ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ 8-е

Допущено
Главным управлением высшего образования
Министерства культуры СССР
в качестве учебника
для педагогических институтов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1969

Зак. 52133.

Четверухин Н. Ф.
Ч-52 Проективная геометрия. Изд. 8-е. Учебник для пед. ин-тов. М., «Просвещение», 1969.

368 с. с черт. 40 000 экз. 82 к.

В новом издании книги изложен основной курс проективной геометрии в соответствии с последней программой физико-математических факультетов пединститутов. Автор излагает проективную геометрию в тесной связи с проблемами элементарной геометрии.

$\frac{2-2-3}{20-68}$ 517.5

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый курс проективной геометрии представляет собой переработку книги «Высшая геометрия» того же автора, выполненную в соответствии с действующей программой этого курса для педагогических институтов.

Изложение курса начинается главой об аффинной геометрии, которую следует рассматривать как вводную, позволяющую наиболее простым образом (при помощи параллельного проектирования) познакомить читателей с некоторыми видами геометрических преобразований и их инвариантами.

Последующие главы курса посвящены развитию основных понятий и систематическому изложению содержания проективной геометрии. Изучение проективной геометрии начинается с операции центрального проектирования и «проективных» свойств фигур, т. е. таких их свойств, которые сохраняются при всяком центральном проектировании.

При этом оказывается необходимым произвести некоторую реконструкцию евклидова пространства путем дополнения его новыми, «несобственными» элементами. Такое геометрическое пространство принадлежит к числу так называемых «проективных» пространств и обладает всеми свойствами, необходимыми для обоснования и развития проективной геометрии.

Предлагаемая концепция изложения курса проективной геометрии обладает, как нам представляется, некоторыми педагогическими преимуществами и позволяет тесно увязать новые понятия и теоремы проективной геометрии с материалом элементарной геометрии, что имеет большое значение для будущих преподавателей математики. В отношении композиции и расположения материала автор придерживался той точки зрения, что педагогически целесообразно первую часть книги посвятить преимущественно изложению фактического материала, нового для студентов (аффинная геометрия, проективная геометрия), отнеся вопросы критико-методологического характера в их связи с преподаванием элементарной геометрии главным образом ко второй части книги (в частности, к главе VI, трактующей о сравнительном изучении проективной, аффинной и метрической геометрий). Целесообразность такого построения курса вытекает, с одной стороны, из необходимости для читателей обладать фактическими знаниями, чтобы перейти ко второй группе вопросов, а с другой — из естественного стремления студентов ознакомиться в первую очередь с новыми и увлекательными идеями проективной геометрии. Опыт показывает, что вкус и желание обсуждать с этих новых позиций знакомый им еще из средней школы материал элементарной геометрии и интерес к вопросам преподавания этой дисциплины приходят несколько позднее.

Отметим следующие моменты в развитии курса.

а) В обыкновенном евклидовом пространстве с помощью средств элементарной геометрии излагаются основные понятия аффинной геометрии. Строится учение об аффинных преобразованиях и их инвариантах в синтетическом и аналитическом изложении (глава I).

б) Для изложения основных понятий и фактов проективной геометрии является необходимость в конструировании проективного пространства. Это достигается путем присоединения несобственных элементов к евклидову пространству. Получается новая геометрическая модель пространства, пригодная для изучения проективных свойств фигур (глава II).

в) Такое построение проективного пространства определяет целесообразный метод изложения. Возможно использовать при развитии важнейших идей проективной геометрии уже имеющиеся понятия элементарной геометрии, в том числе и метрические. В частности, проективное соответствие определяется при помощи сложного отношения (Штейнер), хотя подход к этому понятию осуществляется через рассмотрение цепи перспектив (Понселе) (глава III).

г) Принимая евклидово пространство за исходный пункт для построения проективного пространства, можем вначале отказаться от аксиоматического принципа в этом построении.

Однако в соответствующем разделе книги рассмотрены аксиомы принадлежности, порядка и непрерывности, могущие служить для независимого построения проективного пространства. Это рассмотрение позволяет также оттенить ту симметричность, которую приобрели основные предложения (аксиомы) от присоединения несобственных элементов, что имеет важное значение для обоснования принципа двойственности. «Проверка» выполнимости проективных аксиом в построенном пространстве полезна также для изучающего предмет с точки зрения лучшего «освоения» несобственных элементов, которые в дальнейшем изложении проективной геометрии ничем не отличаются от собственных элементов пространства (глава II).

д) На основе указанных соображений развивается проективная геометрия на плоскости (учение о проективных соответствиях форм первой ступени, проективная теория кривых второго порядка) (главы III, IV).

е) Для изучения проективных соответствий форм второй ступени в общем виде было использовано определение проективного соответствия через гармонизм (Штаудт). Эквивалентность такого определения с определением Штейнера показана в § 47. Следует, однако, отметить, что при этом задача чисто геометрического (без применения метрических понятий) обоснования проективной геометрии не ставилась, хотя о ней и было упомянуто в § 47. Таким образом, ранее принятый метод изложения был сохранен.

ж) В главе V заканчивается изложение фактического материала. Следующая глава (VI) ставит своей целью систематизировать полученные сведения, дать сравнительную характеристику каждой из трех геометрий (проективной, аффинной и метрической). Это достигается с помощью построения всех трех геометрий в общей проективной форме.

Более детально рассматривается с этой проективной точки зрения построение аффинной и метрической геометрий, так как освещение различных вопросов элементарной метрической геометрии имеет прямое отношение к будущей работе студентов в школе в качестве преподавателей математики.

Методологически это проводится следующим образом. Сперва исследуются уже знакомые читателю основные понятия аффинной и метрической геометрий с проективной точки зрения. В результате достигается *истолкование* этих понятий как проективных, если принять во внимание их отношение к абсолюту плоскости (несобственная прямая и ее абсолютная инволюция, соответствующая парам ортогональных направлений).

В таком именно плане изучаются понятия параллельности и перпендикулярности прямых, простое отношение трех точек прямой, конгруентность, гомотетия и подобие геометрических фигур, геометрические построения и другие вопросы элементарной геометрии.

На основании проведенного истолкования этих понятий метрической геометрии с проективной точки зрения становится возможным *построение* аффинной и метрической геометрий на проективной плоскости путем фиксации произвольной прямой в качестве «несобственной» прямой и произвольной эллиптической инволюции на ней в качестве «абсолютной» инволюции.

Такое построение имеет большое принципиальное значение, так как оно уже совершенно не связано с особенностями проективной плоскости, имеющейся в нашем распоряжении (евклидова плоскость, дополненная несобственной прямой). Благодаря этому все выводы, вытекающие из такого построения аффинной и метрической геометрий в проективной форме, становятся особенно убедительными. Вскрывается самая сущность аффинных и метрических свойств фигур.

з) Каждая из построенных геометрий определяется своей группой (Клейн). Получается следующая групповая классификация проективных преобразований:

$\{K\}$	$\supset$	$\{A\}$	$\supset$	$\{M\}$	$\supset$	$\{W\}$
Проективная группа		Аффинная группа		Метрич. группа		Группа движений

и) В конце главы VI дается краткий очерк аналогичного исследования и построения проективной, аффинной и метрической геометрий в пространстве (глава VI, § 77).

к) Наконец, в отдельном параграфе этой главы показана возможность построения геометрии Лобачевского в проективной форме, если в качестве абсолюта плоскости задана овальная кривая второго порядка (§ 78).

л) Главы I—VI составляют основную часть книги, охватывающую программу курса проективной геометрии в педагогических институтах. Изложение проводится преимущественно синтетическим методом, но при изучении общих вопросов (аффинные преобразования, проективные преобразования и т. д.) параллельно дается аналитическое изложение. В частности, читатель знакомится с расширением понятия координат (аффинные, проективные, однородные координаты).

м) Книга заканчивается историческим очерком (§ 79—82).

При подготовке книги к переизданию материал ее был обсужден на кафедрах геометрии Московского государственного педагогического института имени В. И. Ленина и Московского областного педагогического института.

Автор выражает благодарность всем лицам, сделавшим замечания и указания о желательных изменениях и исправлениях в книге. В частности, автор приносит свою искреннюю благодарность заведующему кафедрой геометрии Московского государственного педагогического института имени В. И. Ленина, профессору Д. И. Перепелкину, которому он обязан рядом весьма ценных замечаний и советов относительно содержания книги.

Москва, 15 сентября 1952 г. *Н. Четверухин*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВОСЬМОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке курса «Проективная геометрия» к восьмому изданию были прежде всего исправлены замеченные опечатки и другие недочеты предшествующего, седьмого, издания.

Было уделено большое внимание ортогональным преобразованиям (движениям) в главе I, причем они вошли в соответствующие формулы аффинных преобразований.

§ 20 главы II — «Основные геометрические формы» — был дополнен рассмотрением форм более высоких ступеней, носителем которых являются пространства R_3, а также пространства большего числа измерений. В частности, были рассмотрены все линейные формы в пространстве R_4.

§ 78 главы VI — «Геометрия Лобачевского в проективной форме» — дополнен краткими сведениями о возможности построения геометрии Римана путем задания на проективной плоскости мнимого абсолюта.

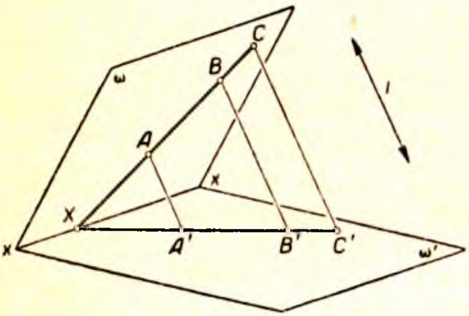
Наконец, § 82 «Исторического очерка» — «Труды отечественных ученых в области проективной геометрии» — пополнен новыми работами советских геометров. Кроме того, в историческом очерке помещены портреты классиков проективной геометрии.

Москва, 15 декабря 1967 г. *Н. Четверухин*

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Перспективно-аффинное соответствие двух плоскостей.



Черт. 1.

1. Предположим, что две плоскости ω и ω' пересекаются по линии xx (черт. 1). Зададим какую-нибудь прямую l, пересекающую обе плоскости. Отметим на плоскости ω произвольную точку A и спроектируем ее на плоскость ω', проводя через A прямую, параллельную l. Пусть проектирующая прямая пересечет плоскость ω' в точке A'. Точку A' можно рассматривать как проекцию точки A на плоскость ω'. Такая проекция называется п а р а л л е л ь н о й и определяется заданием прямой l.

Из самого построения проекции A' точки A видно, что в свою очередь точку A можно рассматривать как проекцию точки A' на плоскость ω. Таким образом, параллельная проекция представляет собой аппарат, имеющий совершенно одинаковое значение по отношению к обеим плоскостям ω и ω'. Она относит каждой точке (A) первой плоскости вполне определенную точку (A') второй, и обратно. Мы получаем попарное с о о т в е т с т в и е точек плоскостей ω и ω'. Это соответствие является в з а и м н о о д н о з н а ч н ы м, т. е. каждой точке одной плоскости соответствует единственная точка второй, и обратно.

Соответствие плоскостей ω и ω', установленное с помощью параллельной проекции, называется п е р с п е к т и в н о-а ф ф и н н ы м или р о д с т в е н н ы м[1].

Если рассматривают процесс перехода от одной из данных плоскостей (например, ω) к другой плоскости (ω'), при котором каждая

[1] От латинского слова Affinitas — свойство, родство.

точка (A) одной плоскости (ω) переходит в соответствующую точку (A') другой плоскости (ω'), как односторонний, то его называют преобразованием плоскости (ω) в плоскость (ω'). В этом случае точку A называют прообразом, а точку A' — ее образом.

Проектируя параллельно плоскость ω на плоскость ω', производим перспективно-аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω'.

Можно также совокупность всех точек плоскости ω называть полем точек ω и говорить о преобразовании поля точек ω в поле точек ω'.

Поставим себе задачу изучить свойства перспективно-аффинного соответствия плоскостей.

Займемся прежде всего вопросом о двойных, или неподвижных, точках нашего соответствия, т. е. о таких точках, которые совпадают со своими соответственными точками. Так как каждая двойная точка должна принадлежать как одной, так и другой плоскости, то они должны лежать на линии пересечения xx плоскостей ω и ω'. С другой стороны, очевидно, что каждая точка прямой xx есть двойная, так как она сама себе соответствует. Прямая xx называется осью соответствия. Согласно предыдущему ось соответствия может быть определена как геометрическое место двойных точек.

Рассмотрим далее какую-нибудь прямую AB на плоскости ω (черт. 1). Параллельная проекция этой прямой на плоскость ω' есть прямая $A'B'$. Причем обе прямые либо пересекаются на оси xx, либо обе параллельны оси.

Таким образом, прямой линии на одной плоскости соответствует прямая же линия на другой. Это свойство перспективно-аффинного соответствия называют коллинеарностью. В силу самого определения параллельной проекции фигуры как геометрического места проекций всех точек этой фигуры каждой точке, лежащей на прямой, всегда соответствует точка, лежащая на соответственной прямой. Поэтому взаимопринадлежность точки и прямой на одной плоскости влечет за собой взаимопринадлежность соответственных элементов на второй.

2. Следующее свойство перспективно-аффинного соответствия касается так называемого простого отношения трех точек прямой.

Рассмотрим три точки A, B, C, лежащие на одной прямой (черт 1). Простое отношение точек A, B, C определяется формулой:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}.$$

В этой формуле точки A и B считаются основными (или базисными), а точка C — делящей. Простое отношение (ABC) представляет собой отношение длин тех отрезков, которые делящая точка образует с основными. Если точка C лежит вне отрезка AB, то оба отрезка AC и BC одинаково направлены, и поэтому в этом случае простое отношение (ABC) положительно. В случае, когда делящая точка C находится между A и B, простое отношение (ABC) отрицательно.

На чертеже 1 видно, что точкам A, B, C плоскости ω соответствуют точки A', B', C' плоскости ω'. Так как проектирующие прямые AA', BB', CC' параллельны, то будем иметь:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'},$$

или

$$(ABC) = (A'B'C').$$

Мы приходим к выводу, что в перспективно-аффинном соответствии *простое отношение трех точек прямой одной плоскости всегда равно простому отношению трех соответственных точек другой.*

3. Прежде чем перейти к рассмотрению дальнейших свойств перспективно-аффинного соответствия, остановимся на вопросе о возможном расположении соответственных плоскостей ω и ω' в пространстве.

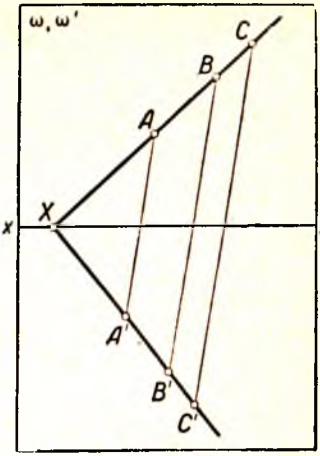
До сих пор мы предполагали эти плоскости несовпадающими и пересекающимися по линии xx с той целью, чтобы посредством параллельного проектирования установить рассмотренное выше перспективно-аффинное соответствие. После того как такое соответствие установлено, можно было бы привести обе плоскости в совпадение, вращая какую-либо одну из них вокруг оси xx. При этом все геометрические образы, находящиеся в той и другой плоскости, не подвергаются никакому изменению. Следовательно, как в любой момент вращения плоскости, так и при ее совмещении со второй плоскостью установленное ранее перспективно-аффинное соответствие не нарушается[1].

Прямые, соединяющие соответственные точки, как AA', BB', CC', ..., остаются параллельными при любом положении вращающейся плоскости, а также и после ее совмещения с неподвижной плоскостью. Это видно из того, что каждые две из упомянутых прямых (например, AA' и BB') всегда лежат в одной плоскости, определяемой парой пересекающихся прямых (AB и $A'B'$), и отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки, так как $(ABX) = (A'B'X)$. При совмещении плоскостей ω и ω' проектирующие прямые (AA', BB', ...) окажутся лежащими в плоскости, образовавшейся из двух совпавших плоскостей ω и ω' (черт. 2).

[1] Заметим, что совпадение плоскостей ω и ω' не означает совпадения соответственных точек полей ω и ω' (см. черт. 2).

Для нас особенно интересен случай совмещенного положения плоскостей, так как в этом случае мы можем пользоваться плоским чертежом, изображающим установленное соответствие без искажения.

В случае совмещения каждую точку (двойной) плоскости можно рассматривать как принадлежащую плоскости ω или ω′ и обозначать ее в зависимости от этого большой буквой без штриха или со штрихом. Таким образом, мы имеем п р е о б р а з о в а н и е п л о с к о с т и в с е б я, причем ее начальное состояние (плоскость до преобразования) обозначается буквой ω, а новое состояние (плоскость после преобразования) — буквой ω′.



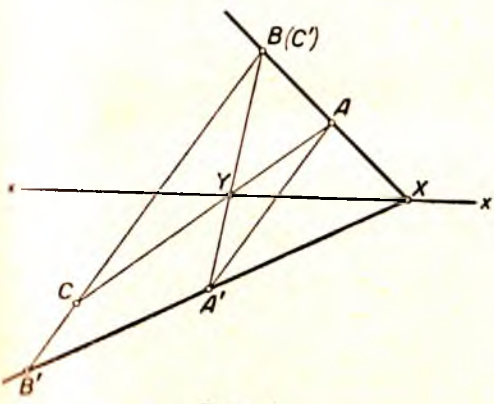
Черт. 2.

Заметим, что после совмещения плоскостей ось соответствия *xx* перестает быть линией пересечения данных плоскостей, но за ней сохраняется второе определение как геометрического места двойных, или неподвижных, точек.

4. Теперь мы могли бы отказаться от пространственного аппарата (параллельной проекции), послужившего нам для установления перспективно-аффинного соответствия двух плоскостей, и определить последнее для двойной плоскости, не выходя в пространство. С этой целью докажем следующее п р е д л о ж е н и е:

Перспективно-аффинное преобразование плоскости в себя вполне определяется осью (xx) и парой соответственных точек (A, A′).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны ось *xx* и пара соответственных точек (*AA′*) перспективно-аффинного преобразования (черт. 3). Докажем, что для любой точки *B* плоскости можно построить вполне определенную и единственную соответственную точку *B′*.



Черт. 3.

Проведем прямую *AB*. Пусть *X* —точка ее пересечения с осью *xx*. Так как точка *X* сама себе соответствует (как лежащая на оси), то прямой *AX* соответствует прямая *A′X*. Наконец, точка *B′* должна лежать на прямой *A′X* и проектирующей прямой *BB′*, параллельной AA'. Это позволяет построить искомую точку B'. Таким образом, данных оказалось достаточно, и соответственная точка B' представляет единственное решение.

Заметим, что перспективно-аффинное соответствие будет действительно реализовано, так как указанная конструкция не может привести к противоречию. Это легко проверить, сведя построение к аппарату параллельной проекции.

В самом деле, если перегнем чертеж 3 по линии xx так, чтобы плоскости ω и ω' образовали двугранный угол, то все проектирующие прямые (прямые, соединяющие соответственные точки, например BB') окажутся параллельными прямой AA' (в силу пропорциональности отрезков). Следовательно, построенное нами соответствие можно рассматривать как результат параллельной проекции.

Примечание. Если бы на чертеже 3 мы отнесли точку B к плоскости ω', обозначив ее через C', то построение соответственной точки привело бы нас к точке C, которая, как видно из чертежа 3, не всегда совпадает с B'. Можно доказать, что необходимое и достаточное условие такого совпадения, т. е. независимости перспективно-аффинного соответствия от того, отнесена ли точка к той или другой плоскости[1], заключается в делении отрезка AA' пополам в точке пересечения его с осью xx.

Следовательно, в этом случае соответствие является *косой* или *прямой симметрией* (относительно оси xx).

5. В дальнейшем исследовании перспективно-аффинного соответствия мы будем опираться на установленные выше свойства: 1) коллинеарность и 2) равенство простых отношений троек соответственных точек.

Заметим, что в перспективно-аффинных преобразованиях эти свойства выражают *неизменность*, или *инвариантность, понятия прямой линии и понятия простого отношения трех точек прямой.*

Из этих свойств можно вывести целый ряд других «инвариантов» перспективно-аффинного преобразования, которые, таким образом, уже не являются независимыми[2].

---

[1] Такое свойство соответствия носит название «инволюционности» (см. § 32).

[2] Рассматривая во втором свойстве перспективно-аффинного соответствия простое отношение трех точек, мы должны были предварительно убедиться в коллинеарности соответствия. Вместо этого можно было бы сформулировать второе свойство иначе, не предполагая заранее коллинеарности преобразования. В таком случае коллинеарность являлась бы следствием второго свойства.

Последнее может быть сформулировано следующим образом.

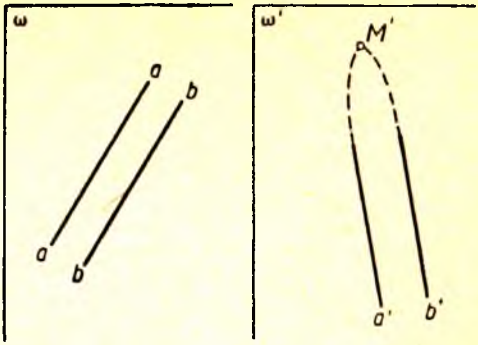
Если A, B, C — три точки, принадлежащие прямой линии поля ω, а A', B', C' — три соответственные точки поля ω', то всегда имеем:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Докажем, что три точки A', B', C' также лежат на одной прямой.

В самом деле, написанную выше пропорцию (простое отношение трех точек) можно переписать так:

Докажем прежде всего *инвариантность параллелизма прямых*. Предположим, что на плоскости ω имеем две прямые a и b, которым на плоскости ω' соответствуют прямые a' и b'. Предположим, что прямые a и b параллельны ($a \parallel b$). Докажем, что $a' \parallel b'$. Применим доказательство «от противного». Предположим, что прямые a' и b' пересекаются, и обозначим точку пересечения буквой M' (черт. 4). Тогда в силу взаимно однозначного соответствия плоскостей ω и ω' точке M' плоскости ω' соответствует точка M на плоскости ω. Точка M должна принадлежать как прямой a, так и прямой b. Следовательно, M есть точка пересечения прямых a и b. Таким образом, приходим к противоречию. Предположение, что прямые a' и b' пересекаются, невозможно. Поэтому $a' \parallel b'$.



Черт. 4.

Таким образом, параллелизм прямых есть инвариантное свойство перспективно-аффинного преобразования.

Далее рассмотрим о т н о ш е н и е д в у х п а р а л л е л ь н ы х отрезков.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} \text{ и далее } \frac{AC + CB}{CB} = \frac{A'C' + C'B'}{C'B'}.$$

Но $\dfrac{AC + CB}{CB} = \dfrac{AB}{CB}$, так как точки A, B, C лежат на одной прямой.

Следовательно, $\dfrac{A'C' + C'B'}{C'B'} = \dfrac{AB}{CB}$.

С другой стороны, по условию

$$\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'},$$

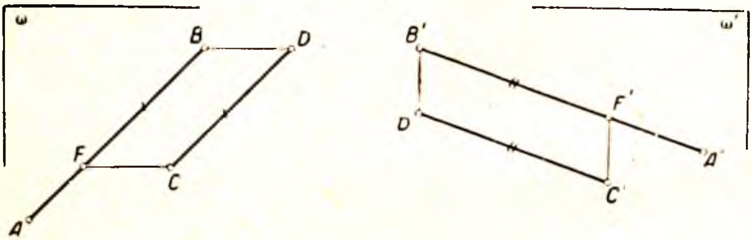
поэтому

$$\frac{A'C' + C'B'}{C'B'} = \frac{A'B'}{C'B'},$$

и, наконец, получаем: $A'C' + C'B' = A'B'$, откуда заключаем, что три точки A, B, C также лежат на одной прямой (ч. т. д.).

Пусть на плоскости ω имеем два отрезка AB и CD (черт. 5) и пусть $AB \parallel CD$. Им соответствуют на плоскости ω' два также параллельных отрезка: $A'B' \parallel C'D'$.

Соединим B с D и проведем через C прямую $CF \parallel DB$. На плоскости ω' прямой CF будет соответствовать прямая $C'F' \parallel D'B'$ (в силу инвариантности параллелизма) и, следовательно, точке F будет соответствовать точка F'.



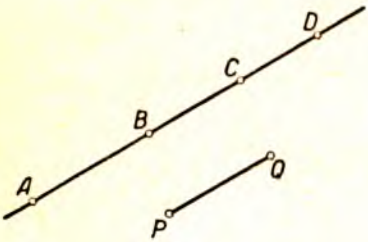
Черт. 5.

Зная, что простое отношение трех точек инвариантно, можем написать:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{FB} = (AFB) = (A'F'B') = \frac{A'B'}{F'B'} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

Таким образом, приходим к равенству:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$



Черт. 6.

Последнее показывает, что *отношение двух параллельных отрезков есть инвариант перспективно-аффинного соответствия.*

Если отрезки AB и CD лежат на одной прямой (черт. 6), то их отношение также инвариантно в перспективно-аффинном соответствии. В самом деле, пусть PQ — произвольный отрезок, параллельный прямой AB. Тогда имеем:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{PQ} \cdot \frac{PQ}{CD} = \frac{A'B'}{P'Q'} \cdot \frac{P'Q'}{C'D'} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

(ч. т. д.).

6. Переходим к рассмотрению п л о щ а д е й с о о т в е т с т в е н н ы х ф и г у р. Докажем следующую лемму:

Расстояния двух соответственных точек (A, A') до оси соответствия (xx) находятся в постоянном отношении, не зависящем от выбора пары соответственных точек.

Доказательство. Предположим, что точкам A и B соответствуют точки A' и B' (черт. 7). Опуская из этих точек перпендикуляры на ось xx, получим расстояния их до оси. Расстояния будем всегда рассматривать положительными независимо от направления перпендикуляров.

Можем написать:

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AX}{BX};\quad \frac{A'A'_1}{B'B'_1}=\frac{A'X}{B'X}.$$

Но, как видно из чертежа,

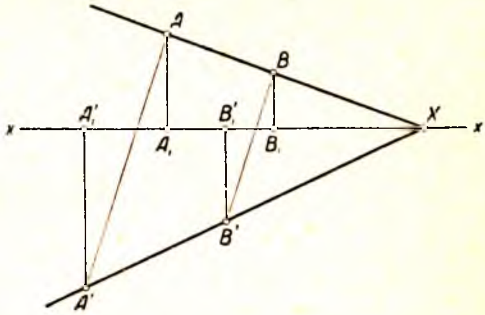
$$\frac{AX}{BX}=\frac{A'X}{B'X},$$

следовательно,

$$\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{A'A'_1}{B'B'_1},$$

или

$$\frac{AA_1}{A'A'_1}=\frac{BB_1}{B'B'_1}=k=\mathrm{const}.$$



Черт. 7.

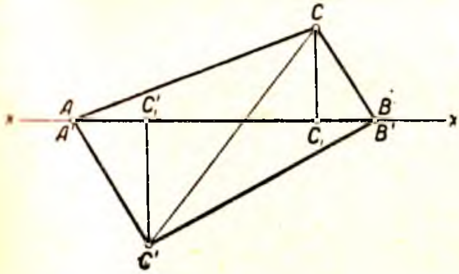
Полученное равенство и доказывает формулированную выше лемму.

Обозначим постоянное отношение расстояний соответственных точек через k. Докажем следующую теорему.

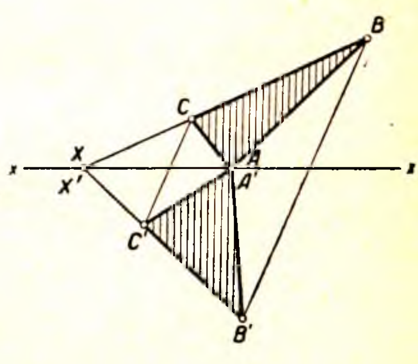
Отношение площадей двух соответственных треугольников постоянно и равно k.

Доказательство теоремы распадается на следующие случаи:

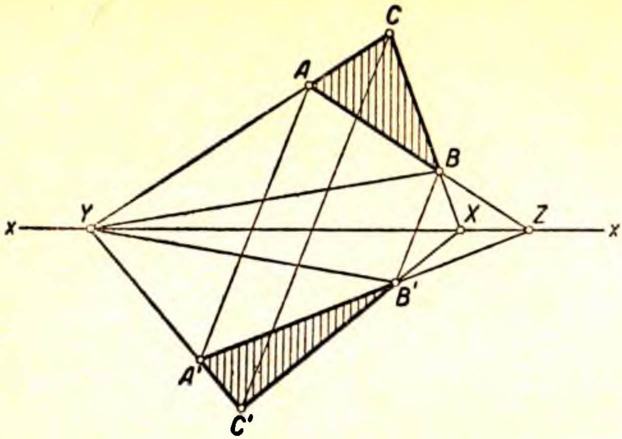
1°. Треугольники имеют общую сторону на оси xx.



Черт. 8.



Черт. 9.



Черт. 10.

Такие треугольники представлены на чертеже 8. Отношение их площадей выразится следующим образом:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot CC_1}{A'B'\cdot C'C_1'}=\frac{CC_1}{C'C_1'}=k.$$

2°. Треугольники имеют общую вершину на оси xx.

Таковы два треугольника на чертеже 9. Соответственные стороны BC и $B'C'$ этих треугольников должны пересекаться на оси xx (в точке X). Рассматриваемый случай сводится к предыдущему. В самом деле, на основании предыдущего можно написать:

$$\frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle A'B'X'}}=k,\quad S_{\triangle ABX}=k\cdot S_{\triangle A'B'X'};$$

$$\frac{S_{\triangle ACX}}{S_{\triangle A'C'X'}}=k,\quad S_{\triangle ACX}=k\cdot S_{\triangle A'C'X'};$$

$$k\cdot S_{\triangle A'B'X'}-k\cdot S_{\triangle A'C'X'}=k\cdot S_{\triangle A'B'C'}.$$

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABX}-S_{\triangle ACX}.$$

Но $\qquad S_{\triangle ABX}-S_{\triangle ACX}=k(S_{\triangle A'B'X'}-S_{\triangle A'C'X'})=kS_{\triangle A'B'C'}$,

поэтому будем иметь:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=k.$$

3°. Общий случай двух соответственных треугольников.

Пусть на чертеже 10 имеем два соответственных треугольника ABC и $A'B'C'$. Рассмотрим один из этих треугольников, например

ABC. Площадь этого треугольника можно представить следующим образом:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle YXC} - S_{\triangle YBA} - S_{\triangle YXB}.$$

Все треугольники правой части этого равенства относятся к рассмотренным уже двум случаям, поэтому, применяя к ним доказанную теорему, можем переписать найденное выше равенство так:

$$S_{\triangle ABC} = k \cdot S_{\triangle YXC'} - k \cdot S_{\triangle YB'A'} - k \cdot S_{\triangle YXB'},$$

или

$$S_{\triangle ABC} = k(S_{\triangle YXC'} - S_{\triangle YB'A'} - S_{\triangle YXB'}) = k \cdot S_{\triangle A'B'C'}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k = \mathrm{const}.$$

7. Выведенное нами свойство площадей двух соответственных треугольников легко распространить на случай соответственных многоугольников. В самом деле, каждый многоугольник может быть разбит на несколько треугольников, причем площадь многоугольника выразится суммой площадей составляющих его треугольников.

Для соответственного многоугольника получим аналогичное разбиение на треугольники. Если площади двух соответственных многоугольников обозначим буквами S и S', а площади двух соответственных составляющих треугольников — буквами σ_i и σ'_i, то можем написать:

$$S = \Sigma\sigma_i \ ; \ S' = \Sigma\sigma'_i.$$

Так как, кроме того, для площадей соответственных треугольников имеем:

$$\sigma_i = k\sigma'_i,$$

то

$$S = \Sigma\sigma_i = \Sigma k\sigma'_i = k\,\Sigma\sigma'_i = kS'.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{S}{S'} = k = \mathrm{const}.$$

Наконец, можно обобщить теорему об отношении площадей на случай двух площадей, ограниченных соответственными кривыми произвольного вида.

Обозначим площади, ограниченные двумя соответственными кривыми, через $\triangle$ и $\triangle'$. Впишем многоугольник в кривую, ограничивающую площадь $\triangle$, и обозначим площадь этого многоугольника буквой S. Будем увеличивать число сторон вписанного многоугольника до бесконечности при условии, что каждая сторона его стремится к нулю, тогда получим:

$$\triangle = \lim S.$$

Для площади $\triangle'$ будем иметь аналогичный процесс:

$$\triangle' = \lim S',$$

где через S' обозначена площадь многоугольника, соответственного многоугольнику S. Так как в течение всего процесса (изменения многоугольников), согласно доказанной выше теореме, должны иметь:

$$S = kS',$$

то переход к пределу дает

$$\triangle = k\triangle'.$$

Следовательно,

$$\frac{\triangle}{\triangle'} = k.$$

Полученное свойство может быть представлено как инвариант перспективно-аффинного соответствия.

В самом деле, обозначим через $\triangle$ и $\triangle_1$ площади, ограниченные двумя кривыми произвольного вида, а через $\triangle'$ и $\triangle'_1$ — площади, ограниченные соответственными кривыми, тогда, по доказанному, будем иметь:

$$\frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{\triangle_1}{\triangle'_1} = k,$$

или, переставляя средние члены пропорции:

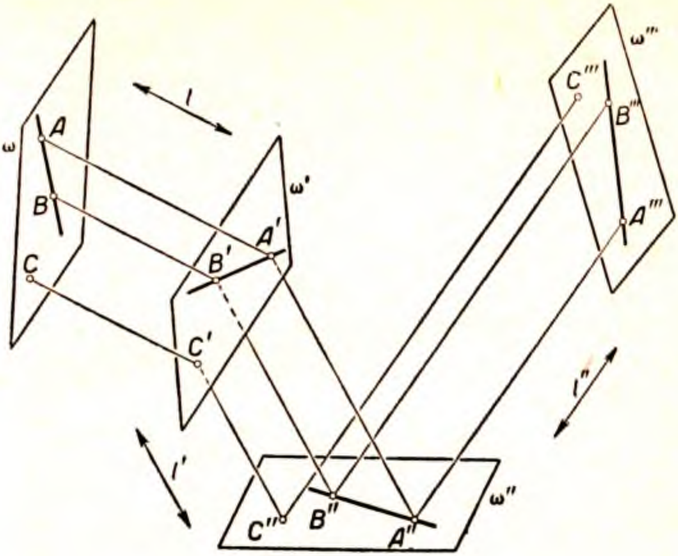
$$\frac{\triangle}{\triangle_1} = \frac{\triangle'}{\triangle'_1},$$

что может быть выражено следующими словами: *отношение двух каких-либо площадей не изменяется (является инвариантом) в перспективно-аффинном соответствии.*

§ 2. Общее аффинное соответствие.

1. В предшествующем параграфе мы изучили перспективно-аффинное соответствие двух плоскостей. Такое соответствие, как мы видели, может быть получено с помощью параллельной проекции.

Рассмотрим теперь соответствие двух плоскостей, образованное многократным применением параллельного проектирования. Так, на чертеже 11 плоскость ω проектируется параллельно прямой l на плоскость ω'. Эта плоскость проектируется параллельно прямой l' на плоскость ω''. Наконец, последняя проектируется параллельно прямой l'' на плоскость ω'''. Таким образом, между плоскостями ω и ω''' устанавливается соответствие, в котором точкам A, B, C первой плоскости соответствуют точки A''', B''', C''' второй. Нетрудно убедиться в том, что это соответствие может не быть параллельной проекцией, но в то же время обладает инвариантными свойствами перспективно-аффинного соответствия. В самом деле, соответствие плоскостей ω и ω''' является цепью последовательных параллельных проектирований. Так как каждое такое проектирование сохраняет



Черт. 11.

коллинеарность и простое отношение трех точек, то теми же свойствами должно, очевидно, обладать и результирующее соответствие плоскостей ω и ω'''.

То же самое можно сказать и об остальных инвариантных свойствах, рассмотренных в случае перспективно-аффинного соответствия, которое оказывается, таким образом, лишь тем частным случаем, когда прямые, соединяющие соответственные точки, параллельны между собой:

$$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \ldots$$

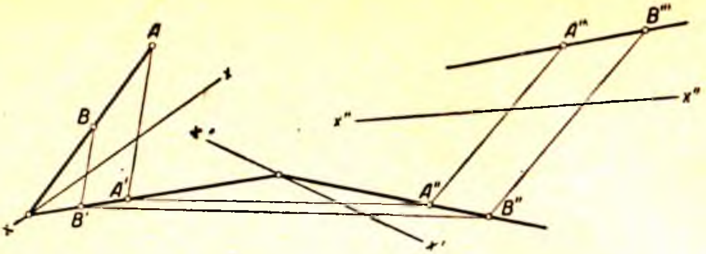
По этой именно причине такое соответствие называется перспективно-аффинным.

Соответствие же плоскостей ω и ω''' называется аффинным. Мы пришли к этому понятию, воспользовавшись цепью перспективно-аффинных преобразований (или параллельных проекций). Если каждое из них обозначим буквами $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, а результирующее преобразование — буквой $\mathbf{A}$, можем представить аффинное преобразование $\mathbf{A}$ следующей символической формулой:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}'',$$

в которой правая часть представляет собой «произведение» перспективно-аффинных преобразований, т. е. результат их последовательного применения.

Те же рассуждения можно было бы провести, не выходя из одной плоскости, для чего достаточно рассматривать цепь перспективно-аффинных преобразований плоскости в себя. Каждое из пре-



Черт. 12.

образований может быть задано осью и парой соответственных точек (§ 1). Так, например, на чертеже 12 первое преобразование **P** задано осью xx и парой (A, A'); второе **P**$'$ — осью $x'x'$ и парой (A', A''); третье **P**$''$ — осью $x''x''$ и парой (A'', A'''). В результирующем преобразовании **A** точке A соответствует точка A'''. На том же чертеже показано построение точки B''', соответственной точке B.

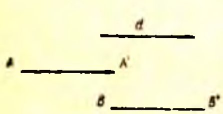
2. Изложенное в настоящем параграфе показывает, что преобразования, полученные при помощи цепи параллельных проекций (или перспективно-аффинных преобразований), обладают свойствами коллинеарности и сохранения простого отношения трех точек.

Будем называть аффинным преобразованием всякое взаимно однозначное преобразование плоскости ω в плоскости ω', сохраняющее коллинеарность и простое отношение трех точек.

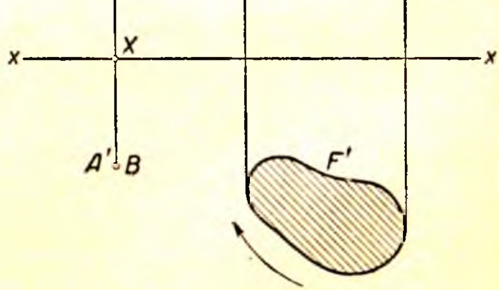
§ 3. О некоторых частных случаях аффинных преобразований.

К числу аффинных преобразований относится так называемое ортогональное преобразование плоскости ω в плоскость ω', или, иначе, движение.

Определение. *Ортогональным преобразованием плоскости* ω *в*



Черт. 13.

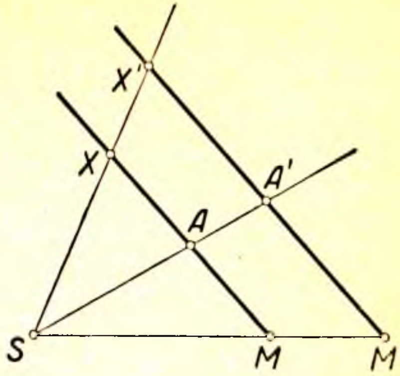


Черт. 14.

плоскость ω' *называется такое преобразование, в котором каждая пара точек* A *и* B *в первой плоскости переходит в пару точек* A' *и* B' *второй плоскости, причем* $AB = A'B'$.

Из этого определения следует, что каждая фигура F плоскости ω преобразуется в конгруентную фигуру F' плоскости ω' ($F = F'$).

Можно также представить себе ортогональное преобразование плоскости ω как перемещение ее в новое положение ω' в пространстве (движение).



Черт. 15.

К числу ортогональных преобразований относится параллельный перенос, задаваемый направленным отрезком d (см. черт. 13). Это означает, что каждая точка A плоскости ω переходит в точку A' той же плоскости, причем имеем: $AA' \# d$[1].

К ортогональным преобразованиям относится осевая симметрия, или отражение плоскости в себя (черт. 14). Это преобразование обладает следующими особенностями. Направление прямых, соединяющих пары соответственных точек, перпендикулярно к оси xx:

$$AA' \perp xx.$$

Кроме того,

$$AX = A'X.$$

Отражение есть *инволюционное* преобразование (см. § 1, стр. 12), поэтому каждой точке соответствует вполне определенная точка независимо от того, считаем ли мы ее точкой первоначальной (A) или преобразованной (A'). Каждая фигура F переходит в конгруентную F', причем направление обхода (на чертеже 14 показано стрелкой) меняется на противоположное.

Другой замечательный случай аффинного преобразования представляет собой гомотетия.

Это преобразование можно определить следующим образом.

Пусть S — какая-нибудь точка плоскости, которую назовем центром гомотетии (черт. 15). Каждой точке M плоскости соответствует точка M', удовлетворяющая следующим условиям

1) точка M' лежит на прямой SM;

2) отношение $\frac{SM'}{SM} = k = \text{const}$.

---

[1] AA' равно и параллельно отрезку d.

Таким образом, гомотетия вполне определяется заданием центра S и пары точек M, M'. В самом деле, для любой точки A может быть построена соответственная точка A', как это видно из чертежа 15. Проводя $M'A' \parallel MA$, находим точку A', причем

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SM'}{SM} = k.$$

Нетрудно убедиться в том, что гомотетия является аффинным преобразованием. Действительно, коллинеарность и простое отношение трех точек являются инвариантами гомотетии.

Предположим, что дана прямая AM, проходящая через точки A и M. Построив соответственные точки A' и M', получим прямую $A'M'$. Прямая $A'M' \parallel AM$. Покажем, что прямая $A'M'$ соответствует в гомотетии прямой AM. Пусть X — произвольная точка данной прямой. Построив прямую SX, находим на прямой $A'M'$ соответственную точку X'. При этом, как легко видеть,

$$\frac{SX'}{SX} = \frac{SM'}{SM} = k.$$

Итак, прямая $M'A'$ является геометрическим местом точек X', соответственных точкам X данной прямой MA. Отсюда заключаем:

1°. *В гомотетии каждая прямая преобразуется в прямую. Прямая, проходящая через S, переходит в себя; прямая, не проходящая через S, переходит в параллельную прямую.*

2°. *Величины углов не изменяются в гомотетии, так как каждый угол переходит в угол с соответственно параллельными сторонами.*

3°. *Отношение двух соответственных отрезков равно постоянному коэффициенту гомотетии* (k). Так, например,

$$\frac{A'M'}{AM} = \frac{SM'}{SM} = k.$$

Эти свойства показывают, что *гомотетия преобразует каждую фигуру F в подобную и подобно расположенную фигуру F'.*

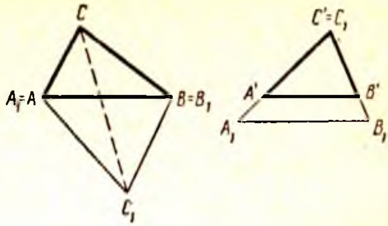
Очевидно, что простое отношение трех точек прямой не изменяется в гомотетии. Так, например, будем иметь:

$$(X'A'M') = \frac{X'M'}{A'M'} = \frac{XM}{AM} = (XAM).$$

Таким образом, убеждаемся, что гомотетия принадлежит к числу аффинных преобразований.

§ 4. Аффинное преобразование как произведение преобразований

Рассмотрим аффинное соответствие двух плоскостей ω и ω' (точнее, их точечных полей), установленное парой соответственных треугольников: $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ (черт. 16). Чтобы преобразовать плоскость ω в плоскость ω', мы проделаем следующие операции. Произведем преобразование гомотетии с центром $C_1 = C'$ и коэффициентом $k = \frac{A_1B_1}{A'B'}$, причем $A_1B_1 = AB$. Затем приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к треугольнику ABC так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB. Теперь мы можем определить аффинное преобразование **A**, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ в форме произведения преобразований. В самом деле, для этого надо произвести следующие преобразования: 1) установить перспективно-аффинное преобразование с осью AB и парой соответственных точек C и C_1. Получим плоскость ω_1 с треугольником $A_1B_1C_1$; 2) переместить плоскость ω_1 в новое положение так, чтобы точка C_1 совпала с точкой C', а угол $A_1C_1B_1$ совместился с углом $A'C'B'$; 3) наконец, произвести преобразование гомотетии с центром C' и коэффициентом $k' = \frac{A'B'}{A_1B_1}$. В результате получим треугольник $A'B'C'$ на плоскости ω'.



Черт. 16.

Обозначим три выполненных преобразования соответственно следующим образом: перспективно-аффинное преобразование — через **P**, движение — буквой **S** и гомотетию — **H**. Тогда данное аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω' выразится следующей формулой:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}. \tag{1}$$

Написанная формула показывает, что *произвольное аффинное преобразование можно рассматривать как произведение перспективно-аффинного преобразования, преобразования движения и гомотетии.*

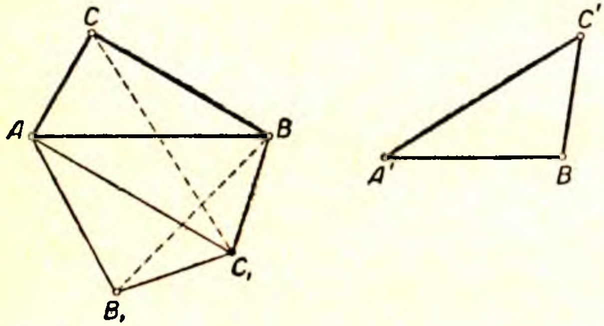
Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Плоскость ω всегда может быть преобразована при помощи двух последовательных параллельных проекций (перспективно-аффинных преобразований) в плоскость ω' таким образом, что произвольно заданному треугольнику ABC на первой плоскости будет соответствовать на второй треугольник, конгруентный произвольно заданному треугольнику $A'B'C'$.*

Доказательство. Пусть на плоскости ω задан треугольник ABC. Требуется с помощью двукратного параллельного проектирования преобразовать плоскость так, чтобы треугольник ABC перешел в произвольно заданный треугольник $A'B'C'$ (черт. 17). Проведем прямую AC_1 по произвольному направлению и отложим на ней отрезок $AC_1 = A'C'$. Далее на отрезке AC_1 построим треугольник AB_1C_1, конгруентный треугольнику $A'B'C'$. Принимая прямую AB за ось перспективно-аффинного соответствия и точки

C, C_1 в качестве соответственных, определим перспективно-аффинное соответствие $\mathbf{P}$[1], переводящее треугольник ABC в треугольник ABC_1.

Подобным же образом перспективно-аффинное соответствие $\mathbf{P}'$ с осью AC_1 и парой соответственных точек B, B_1 переводит треугольник ABC_1 в треугольник AB_1C_1. Следовательно, выполняя над плоскостью ω преобразование $\mathbf{P}$, а затем $\mathbf{P}'$, мы придем к плоскости ω', причем данный треугольник ABC перейдет в новый треугольник AB_1C_1, конгруентный заданному треугольнику $A'B'C'$.



Черт. 17.

Чтобы аффинное преобразование плоскости ω переводило $\triangle ABC$ в $\triangle A'B'C'$, надо к рассмотренным двум параллельным проектированиям добавить еще «движение», переводящее плоскость в новое положение так, чтобы $\triangle AB_1C_1$ совместился с $\triangle A'B'C'$. Такое перемещение («движение») плоскости ω в пространстве как неизменяющегося целого является аффинным преобразованием плоскости. Действительно, при этом не нарушаются свойства коллинеарности и простого отношения трех точек. Обозначим преобразование движения буквой $\mathbf{S}$.

Следствие. *Из двух произвольно заданных треугольников каждый можно считать аффинно-соответственным другому.*

В самом деле, как было доказано выше, существует такое аффинное преобразование $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{S}$, которое переводит один из данных треугольников в другой.

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Существует лишь одно аффинное преобразование, которое переводит треугольник ABC первой плоскости в треугольник $A'B'C'$ второй.*

Доказательство. Предположим, что аффинное преобразование $\mathbf{A}$ переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Выберем произвольную точку M на первой плоскости (черт. 18). Про-

[1] Или, что то же, параллельное проектирование (см. стр. 12).

ведем прямую AM и обозначим через D точку ее пересечения с прямой BC.

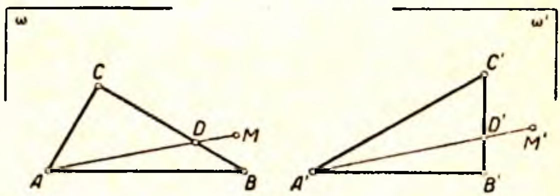
Тогда в силу сохранения простого отношения трех точек должны иметь:

$$(BCD) = (B'C'D').$$

Следовательно, точка D', соответственная точке D, однозначно определяется на прямой $B'C'$. Далее из равенства

$$(ADM) = (A'D'M')$$

заключаем, что и точка M' однозначно определяется на прямой $A'D'$, соответственной прямой AD. Таким образом, в аффинном преобразовании одной плоскости в другую, переводящем треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, соответствие точек определяется



Черт. 18.

единственным образом. Следовательно, не может быть двух аффинных преобразований, переводящих треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, которые не были бы тождественными.

С л е д с т в и е 1. *Аффинное соответствие двух плоскостей вполне определяется заданием пары соответственных треугольников.*

С л е д с т в и е 2. *Если в двух аффинно-соответственных плоскостях имеется пара соответственных конгруентных отрезков, то упомянутые плоскости могут быть приведены в такое положение, в котором их соответствие является перспективно-аффинным и осуществляется параллельным проектированием одной плоскости на другую.*

В самом деле, пусть отрезок AB первой плоскости конгруентен соответственному отрезку $A'B'$ второй:

$$AB = A'B'.$$

Тогда поместим плоскости так, чтобы отрезки AB и $A'B'$ совместились. Пусть при этом какой-нибудь точке C первой плоскости соответствует точка C' второй. Перспективно-аффинное соответствие, определяемое осью AB ($A'B'$) и парой точек C, C', тождественно с заданным соответствием плоскостей, так как в обоих соответствиях треугольники ABC и $A'B'C'$ одни и те же.

Теперь мы можем ответить на поставленный выше вопрос о представлении общего аффинного преобразования в виде цепи перспективно-аффинных.

В самом деле, пусть через **A** обозначено некоторое аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω'. Выберем на плоскости ω произвольный треугольник ABC, и пусть преобразование **A** переводит его в треугольник $A'B'C'$ на плоскости ω'. Тогда по теореме 1 (следствие) существует такое аффинное преобразование $\mathbf{A}^* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{S}$, которое переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. С другой стороны, из теоремы 2 заключаем, что

$$\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{S}. \tag{2}$$

Этот результат можно сформулировать так:

Всякое аффинное преобразование является произведением двух перспективно-аффинных преобразований (или двух параллельных проекций) и преобразования движения.

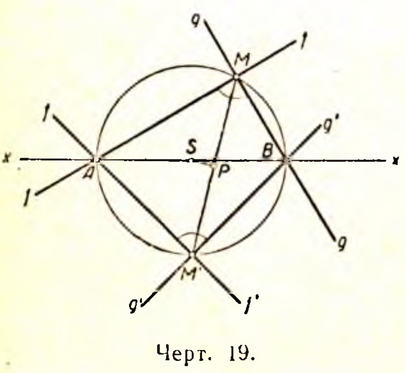
Формула (2) наряду с формулой (1) позволяет глубже проникнуть в структуру аффинных преобразований.

§ 5. Главные направления двух аффинно-соответственных плоскостей.

1. Предположим, что прямым f и g плоскости ω соответствуют прямые f' и g' плоскости ω'. Угол, образованный двумя прямыми, не является инвариантом аффинного соответствия. Поэтому двум перпендикулярным прямым первой плоскости могут соответствовать неперпендикулярные прямые второй плоскости.

Поставим задачу о разыскании на плоскости ω двух таких взаимно перпендикулярных прямых, которым соответствуют две также перпендикулярные прямые плоскости ω'. Эту задачу исследуем сначала в случае перспективно-аффинного соответствия.

Пусть $f \perp g$ и $f' \perp g'$ (черт. 19). Точка A пересечения прямых f и f' и точка B пересечения прямых g и g' лежат на оси соответствия xx. Вершине прямого угла M соответствует вершина также прямого угла M'. Отсюда следует, что окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, пройдет через точки M и M'. Центр S этой окружности легко построить, так как он лежит на оси xx и на перпендикуляре PS к хорде MM' в ее середине. Таким образом, анализ задачи дает нам в руки метод ее решения. Пусть перспективно-аффинное соответствие плоскостей задано осью xx и парой точек M, M'. Требуется провести через точку



Черт. 19.

M пару взаимно перпендикулярных прямых f и g так, чтобы две соответственные им прямые f' и g' были также взаимно перпендикулярными.

Построение. Строим прямую MM' и в средней точке P отрезка MM' восставляем перпендикуляр PS. Точка пересечения последнего с осью соответствия xx является искомым центром окружности. Строим окружность по центру S и радиусу $SM = SM'$. Находим точки пересечения A и B этой окружности с осью xx. Тогда прямые AM и BM — искомые. В самом деле, прямые AM и BM перпендикулярны, так как угол AMB опирается на диаметр; с другой стороны, прямые AM' и BM' также перпендикулярны по аналогичной причине.

Таким образом, искомые прямые построены. Задача имеет одно решение, так как точка S является точкой пересечения двух прямых. Лишь в том случае, когда $MM' \perp xx$ и точка P лежит на оси xx, перпендикуляр PS сливается с осью xx и положение точки S становится неопределенным. Однако, как легко видеть, в рассматриваемом случае перспективно-аффинное соответствие представляет собой осевую симметрию, или отражение ($MM' \perp xx$, $MP = M'P$). Очевидно, что в случае отражения каждой паре перпендикулярных прямых соответствует пара также перпендикулярных прямых, т. е. существует бесчисленное множество решений задачи.

Обратим еще внимание на следующее обстоятельство. Если прямые f и g, пересекающиеся в точке M, представляют решение задачи, то любая пара прямых, параллельных прямым f и g, также дает решение задачи. В самом деле, в силу инвариантности параллелизма на плоскости ω' таким прямым будут соответствовать прямые, параллельные прямым f' и g', т. е. взаимно перпендикулярные.

Найденные направления называются **главными направлениями**. Как мы видели, при перспективно-аффинном соответствии плоскостей всегда существуют две соответственные пары главных направлений; лишь в случае зеркального отражения (осевая симметрия) имеется бесчисленное множество главных направлений.

2. Поставим теперь задачу о главных направлениях в произвольном аффинном преобразовании **A**.

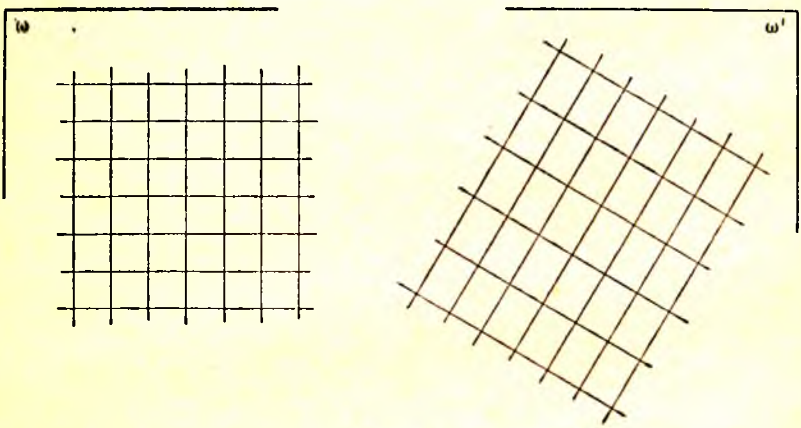
Как было показано в предыдущем параграфе, всякое аффинное преобразование может быть представлено как произведение перспективно-аффинного преобразования **P** на движение **S** и гомотетию **H**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}.$$

Таким образом, аффинное преобразование **A** плоскости ω в плоскость ω' может быть получено при помощи перспективно-аффинного преобразования **P** плоскости ω в плоскость ω_1, движения **S** плоскости ω_1 в новое положение с последующей гомотетией **H**, переводящей плоскость ω_1 в плоскость ω'.

Из сказанного в настоящем параграфе следует, что на плоскостях ω и ω_1 существует по одной паре главных направлений, соответствующих в преобразовании **P**. Обозначим их через f, g и f_1, g_1. Движение **S** сохраняет перпендикулярность пар соответственных главных направлений. Преобразование гомотетии **H** переводит плоскость ω_1 в ω', причем прямые f_1, g_1 перейдут в прямые f', g'.

Так как при гомотетии величины углов не изменяются, то перпендикулярным прямым f_1, g_1 соответствуют две перпендикулярные прямые f', g'.



Черт. 20.

Таким образом, преобразование **A** переводит пару перпендикулярных прямых f, g плоскости ω в пару перпендикулярных прямых f', g' плоскости ω'. Отсюда заключаем, что в произвольном аффинном соответствии двух плоскостей всегда имеются две соответственные пары главных направлений.

Этот результат позволяет с иной точки зрения взглянуть на сущность аффинного преобразования.

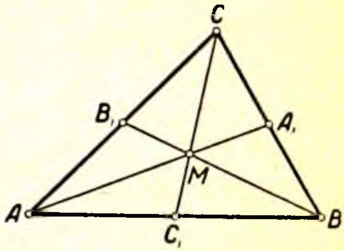
Представим себе сеть квадратов на плоскости ω, образованную прямыми, параллельными главным направлениям; ей соответствует на плоскости ω' сеть, образованная перпендикулярными прямыми, т. е. сеть прямоугольников (черт. 20). Поэтому аффинное преобразование можно рассматривать как операцию растяжения или сжатия плоскости, вообще говоря, различного по двум перпендикулярным направлениям.

§ 6. Аффинные свойства фигур.

Аффинная геометрия занимается изучением тех свойств геометрических фигур, которые остаются инвариантными при аффинных преобразованиях.

Мы уже установили целый ряд таких инвариантных свойств. При этом сохранение коллинеарности и простого отношения трех точек прямой является характеристическим свойством аффинного соответствия, так как именно эти инварианты послужили нам для определения последнего (§ 2).

Другие аффинно-инвариантные свойства являются следствием характеристических.



Черт. 21.

Любую геометрическую фигуру можно рассматривать с этой точки зрения. Именно можно задать вопрос о том, какие из ее свойств являются аффинными, т. е. инвариантными, при аффинных преобразованиях.

Приведем несколько примеров.

1) Треугольник. Каждый треугольник при аффинном преобразовании переходит в треугольник. Можно ли рассматривать два произвольно заданных треугольника ABC и $A'B'C'$ как аффинно-соответственные? На этот вопрос дает ответ следствие § 4 (стр. 24). Из него вытекает, что всегда существует такое аффинное соответствие, в котором два данных треугольника являются соответственными. Следовательно, любые два треугольника являются аффинно-соответственными.

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC — центр тяжести его площади (черт. 21). Медиана определяется как прямая, соединяющая вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. Но деление отрезка пополам есть свойство простого отношения трех точек. Именно, если C_1 есть середина отрезка AB, то имеем:

$$(ABC_1) = \frac{AC_1}{BC_1} = -1.$$

Поэтому точке C_1 аффинно соответствует точка C_1', делящая соответственный отрезок $A'B'$ пополам. Отсюда следует, что медианам треугольника ABC аффинно соответствуют медианы треугольника $A'B'C'$, а точке их пересечения M — точка пересечения медиан соответственного треугольника M'.

Таким образом, точка пересечения медиан треугольника (центр тяжести) является аффинно-инвариантной.

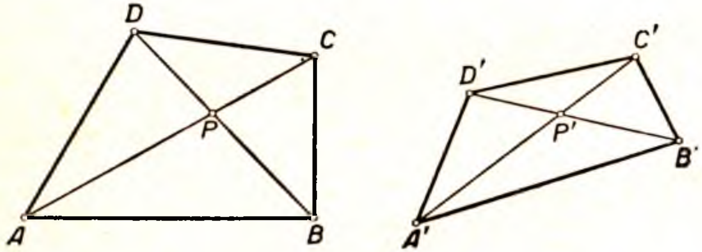
2) Четырехугольник. Если обратимся к четырехугольникам, то придем к следующим выводам.

Каждый четырехугольник $ABCD$ при аффинном преобразовании переходит в некоторый четырехугольник $A'B'C'D'$. Построим диагонали обоих четырехугольников и обозначим точки их пересечения соответственно буквами P и P' (черт. 22). Тогда будем иметь:

$$(ACP) = (A'C'P'); \qquad (1)$$
$$(BDP) = (B'D'P'). \qquad (2)$$

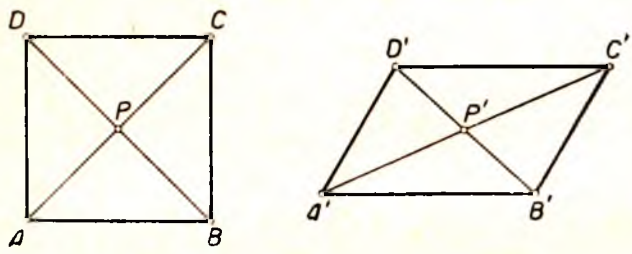
Эти равенства простых отношений показывают, что точка P' делит диагонали второго четырехугольника в тех же отношениях, в которых точка P делит диагонали первого четырехугольника.

Докажем, что этот необходимый признак аффинного соответствия четырехугольников является также и достаточным.



Черт. 22.

В самом деле, пусть имеем два четырехугольника, для которых выполняются равенства (1) и (2). Установим аффинное соответствие с помощью треугольников ABC и $A'B'C'$. В этом соответствии в силу равенства (1) точке P соответствует точка P', а в силу равенства (2) точке D соответствует точка D'. Следовательно, четырехугольнику $ABCD$ соответствует четырехугольник $A'B'C'D'$ (ч. т. д.).



Черт. 23.

Если данный четырехугольник $ABCD$ является т р а п е ц и е й, то и соответственный четырехугольник также будет трапецией, так как параллельным сторонам первого соответствуют параллельные стороны второго. Таким образом, это свойство аффинно.

Предположим, что мы имеем к в а д р а т $ABCD$ (черт. 23). Посмотрим, какие из его свойств яляются аффинными. Параллельность противоположных сторон квадрата есть свойство аффинное, равенство же его углов не является таковым, поэтому квадрату соответствует параллелограмм $A'B'C'D'$. Диагонали последнего делятся пополам, так как это свойство диагоналей квадрата аффинно; но равенство диагоналей квадрата не сохраняется, так же как и деление углов диагоналями пополам.

Подобным образом можно проанализировать всякую геометрическую фигуру, выделяя ее аффинные свойства, и судить о свойствах фигуры, аффинно-соответственной данной.

§ 7. Эллипс как кривая, аффинно-соответственная окружности.

1. Предположим, что между точками плоскостей ω и ω' установлено аффинное соответствие. Если рассмотрим на плоскости ω какую-нибудь кривую C как геометрическое место точек, то ей на плоскости ω' соответствует геометрическое место C' соответственных точек. Можно также сказать, что данное аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω' переводит кривую C в соответственную кривую C'. Поставим задачу исследовать кривую, аффинно-соответствующую окружности.

Определение. *Кривую, соответствующую окружности в аффинном преобразовании, назовем эллипсом.*

Метод исследования эллипса как аффинного образа окружности основывается на следующем принципе:

Всякое аффинное свойство окружности, как инвариантное по отношению к аффинным преобразованиям, переводящим окружность в эллипс, должно быть также и свойством эллипса.

Применение этого принципа в данном случае сводится к установлению аффинных свойств окружности и перенесению их на эллипс.

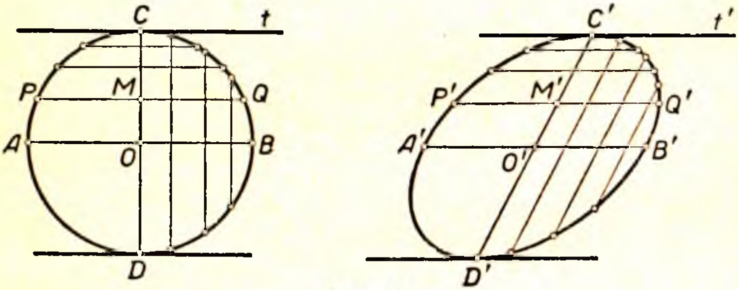
2. Центр эллипса. Определим центр окружности как такую точку, в которой все проходящие через нее хорды делятся пополам.

Это свойство является аффинным, поэтому оно может быть перенесено на эллипс. Следовательно, эллипс является центральной кривой, т. е. существует точка (центр эллипса), в которой все проходящие через нее хорды делятся пополам. Последние называются диаметрами эллипса.

3. Сопряженные диаметры. Любые два взаимно перпендикулярных диаметра окружности обладают следующим свойством: каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру (черт. 24).

Это свойство является аффинным, так как оно основывается на параллельности прямых и делении пополам отрезков (простое отношение трех точек). Диаметры, обладающие этим свойством, называются сопряженными. Сопряженные (они же взаимно перпендикулярные) диаметры окружности переходят в сопряженные диаметры эллипса, но перпендикулярность диаметров при этом нарушается как свойство неаффинное. Таким образом, по соответствию с кругом находим, что геометрическим местом середин хорд эллипса, параллельных одному из его диаметров, служит диаметр, сопряженный данному.

Отсюда получаем следующее построение сопряженного диаметра. Чтобы построить диаметр, сопряженный диаметру $A'B'$ (черт. 24), проводим произвольную хорду $P'Q'$, параллельную диаметру $A'B'$, и делим ее пополам. Прямая, соединяющая полученную точку M' с центром эллипса O', является искомым сопряженным диаметром $C'D'$. Если в центре O окружности рассмотрим пару главных направлений, то им будут соответствовать главные



Черт. 24.

направления второй плоскости, проходящие через центр эллипса O'. Так как любая пара взаимно перпендикулярных диаметров окружности является сопряженной парой, то главные направления как в центре окружности, так и соответствующие им главные направления в центре эллипса также являются сопряженными. Следовательно, у эллипса существует пара сопряженных и взаимно перпендикулярных диаметров, которые называются *осями эллипса*.

Мы видели, что в частном случае аффинного соответствия (§ 5) возможно бесчисленное множество пар главных направлений, проходящих через точки O и O'. Так как любое аффинное преобразование может быть представлено формулой

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{H},$$

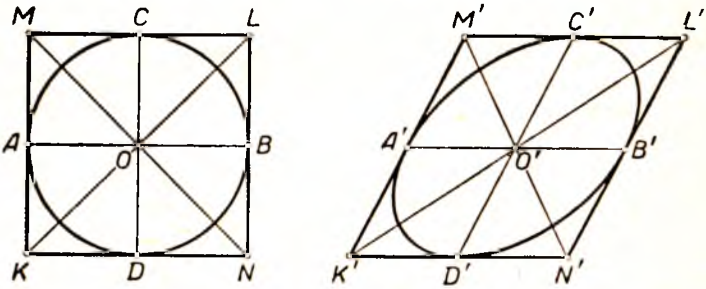
то вопрос о существовании главных направлений сводится к перспективно-аффинному преобразованию $\mathbf{P}$. В этом же случае, как было показано в § 5, преобразование, имеющее бесчисленное множество главных направлений, есть осевая симметрия (отражение). Оно переводит окружность в окружность. Так как движение $\mathbf{S}$ и гомотетия $\mathbf{H}$ не изменяют вида фигуры, то очевидно, что в упомянутом случае мы будем иметь окружность, для которой любая пара взаимно перпендикулярных диаметров является сопряженной, т. е. парой осей. Следовательно, только окружность как частный случай эллипса имеет бесчисленное множество пар осей.

4. Касательные. Рассмотрим касательную t к окружности в точке C (черт. 24). Эта касательная параллельна диаметру AB. Отсюда получаем следующее аффинное свойство касательной к окружности:

Касательная t к окружности в точке C диаметра CD параллельна сопряженному диаметру AB.

Перенося это свойство как аффинное на эллипс, приходим к следующему построению касательной t' к эллипсу.

Если C' — точка эллипса, в которой должна быть построена касательная, то проводим диаметр $C'D'$ и строим ему сопряженный диаметр $A'B'$. Прямая t', проходящая через C' параллельно $A'B'$, есть искомая касательная к эллипсу.



Черт. 25.

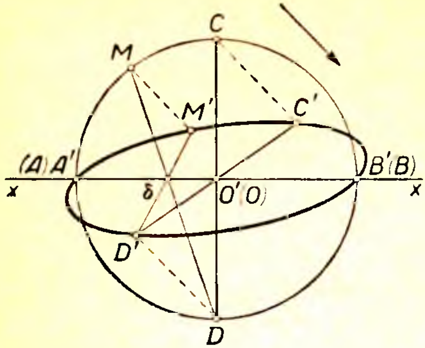
Предположим, что около окружности описан квадрат $KNLM$ (черт. 25). Тогда средние линии и диагонали этого квадрата представляют собой две пары сопряженных диаметров AB, CD и KL, MN. Квадрату $KNLM$ соответствует параллелограмм $K'N'L'M'$, описанный около эллипса. Средние линии $A'B'$, $C'D'$ и диагонали параллелограмма $K'L'$, $M'N'$ являются парами сопряженных диаметров эллипса. Этим пользуются для построения эллипса как параллельной проекции окружности.

5. Построения, основанные на аффинном соответствии эллипса с кругом.

1°. Эллипс, определяемый двумя сопряженными диаметрами. Предположим, что два отрезка произвольной длины и направления $A'B'$ и $C'D'$ пересекаются в точке O', которая является серединой каждого из них (черт. 26). Докажем, что такие два отрезка всегда можно принять за сопряженные диаметры эллипса, который ими определяется. С этой целью, принимая один из отрезков, например $A'B'$, за диаметр родственного круга, построим круг $ABCD$[1].

Пусть диаметр CD перпендикулярен AB. Рассмотрим теперь, какой эллипс будет соответствовать кругу $ABCD$ в перспективно-

[1] Точки A и B совпадают с точками A' и B', а диаметр круга AB — с диаметром эллипса $A'B'$.

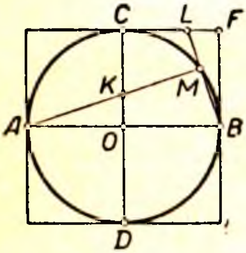


Черт. 26

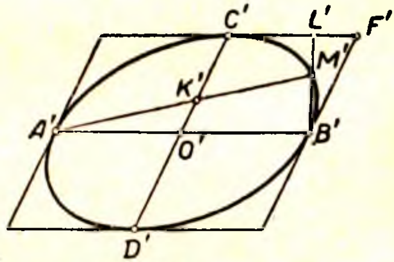
аффинном соответствии, осью которого служит прямая AB, а точке C круга соответствует точка C' эллипса. Диаметр AB круга, очевидно, сам себе соответствует, так как он лежит на оси xx. Диаметру CD круга соответствует диаметр $C'D'$ эллипса, и так как $CD \perp AB$, то $C'D'$ и $A'B'$ — два взаимно сопряженных диаметра эллипса.

Таким образом, доказано, что существует эллипс, для которого два данных отрезка $A'B'$ и $C'D'$ являются сопряженными диаметрами. Построение точек M' этого эллипса по точкам M родственного круга производится обычным способом, а именно: прямой $D\delta M$ соответствует прямая $D'\delta M'$, следовательно, точка M' лежит на прямой $D'\delta$ и определяется как точка пересечения этой прямой с направлением проектирования MM'.

2°. Построение точек эллипса по паре его сопряженных диаметров. Полученным свойством касательной к эллипсу мы воспользуемся для его построения. Опишем около круга O $(ABCD)$ квадрат, стороны которого



Черт. 27 а.



Черт. 27 б.

параллельны диаметрам AB и CD (черт. 27 а). Отметим произвольную точку круга M и соединим ее с концами A и B одного из диаметров. Прямая AM пересекает диаметр CD в точке K, а прямая BM пересекает сторону квадрата CF в точке L. Прямоугольные треугольники AOK и BFL равны, так как имеют по равному катету $(AO = BF)$ и прилежащему к нему острому углу ($\angle OAK = \angle FBL$, так как стороны этих углов взаимно перпендикулярны). Следовательно, $OK = FL$ и $CO - OK = CF - FL$, или $CK = CL$. Но если попарно равны отрезки, то равны и их отношения: $\frac{CK}{KO} = \frac{CL}{LF}$.

Итак, отношение трех точек (CKO) диаметра круга равно отношению трех точек (CLF) стороны описанного около него квадрата.

В аффинном преобразовании отношение трех точек прямой не меняется, поэтому мы должны иметь аналогичное равенство отношений для соответственного эллипса (черт. 27б). Диаметрам круга соответствует пара сопряженных диаметров эллипса: $A'B'$, $C'D'$. Квадрату, описанному около круга, будет соответствовать параллелограмм, описанный около эллипса, со сторонами, параллельными его диаметрам, что следует из найденного выше свойства касательных к эллипсу. Если на отрезках $C'O'$ и $C'F'$ отметим точки K' и L', соответственные точкам K и L родственного круга, то будем иметь:

$$\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{CK}{KO} \text{ и } \frac{C'L'}{L'F'} = \frac{CL}{LF},$$

но правые части этих равенств равны, следовательно, равны и левые, т. е.

$$\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{C'L'}{L'F'}.$$

Это же рассуждение в символе «отношения трех точек» выглядит так:

$$(C'K'O') = (CKO)$$

и $$(C'L'F') = (CLF),$$

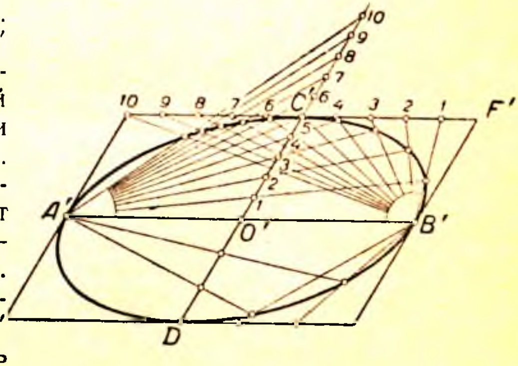
но $$(CKO) = (CLF),$$

следовательно,

$$(C'K'O') = (C'L'F').$$

Таким образом, точка K' делит отрезок $C'O'$ в том же отношении, в каком точка L' делит отрезок $C'F'$. Предположим, что мы провели прямую $B'L'$ произвольно и хотим построить на ней точку эллипса. Для этого достаточно найти на отрезке $C'O'$ точку K', удовлетворяющую условию $\frac{C'K'}{K'O'} = \frac{C'L'}{L'F'}$, и соединить ее с точкой A'. Тогда прямая $A'K'$ пересечет прямую $B'L'$ в искомой точке M' (черт. 27б).

Само построение точек эллипса выполняется следующим образом. Пусть имеем сопряженные диаметры эллипса $A'B'$ и $C'D'$ (черт. 28). Делим отрезки $O'C'$ и $F'C'$ на одинаковое число равных между собой частей и нумеруем точки деления цифрами $1, 2, 3, \ldots$. При этом отрезок $O'C'$ проходит в направлении от O' к C', а отрезок $F'C'$ — в направлении от F' к C'. Рассматривая чертеж, замечаем, что если точка K' на отрезке $O'C'$ будет иметь пометку, скажем, 2, то и

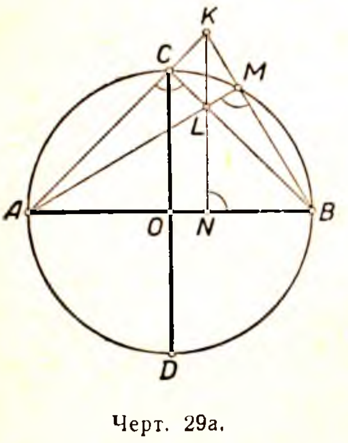


Черт. 28.

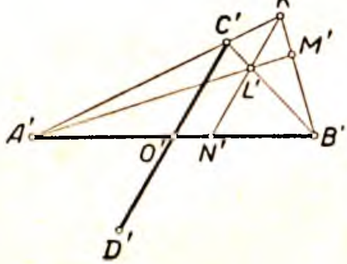
точка L' на отрезке $F'C'$ должна иметь такую же пометку, т. е. *2*. Только при этом условии отношения отрезков $\frac{C'K'}{K'O'}$ и $\frac{C'L'}{L'F'}$ будут равны. Таким образом, мы получим две равномерные шкалы на прямых $O'C'$ и $F'C'$. Для построения точек эллипса надо соединить точку A' с точками *1*, *2*, *3*, ... шкалы $O'C'$, а точку B' с точками *1*, *2*, *3*, ... шкалы $F'C'$, тогда точки пересечения соответственных прямых, например $A'1$ и $B'1$, $A'2$ и $B'2$, явятся точками эллипса. На чертеже 28 по этому способу произведено построение точек эллипса.

3°. Второй способ построения точек эллипса по паре его сопряженных диаметров. Как и в предыдущем случае, воспользуемся родством круга и эллипса. Предположим, что имеем круг с диаметрами AB и CD (черт. 29а). Пусть M — произвольная точка круга. Обозначим через K точку пересечения прямых BM и AC. Получаем треугольник AKB. Высотами этого треугольника будут служить прямые AM, BC и KN. В самом деле: $AM \perp BK$ и $BC \perp AK$, так как образуемые ими углы опираются на диаметр AB окружности. $KN \perp AB$ и, следовательно, $KN \parallel CO$. Точку пересечения трех высот треугольника AKB обозначим через L.

Рассмотрим теперь соответственное построение для эллипса. Пусть $A'B'$ и $C'D'$ — сопряженные диаметры эллипса, родственного кругу (черт. 29б). Если точка K' на прямой $A'C'$ соответствует точке K на прямой AC предыдущего чертежа, то треугольник $A'K'B'$ соответствует треугольнику AKB. Проведя $K'N' \parallel C'O'$, находим точку L' пересечения прямых $K'N'$ и $B'C'$. Соединяем A' с L' и получаем точку M' пересечения прямых $A'L'$ и $B'K'$. Так как точка M' соответствует точке круга M, то она является точкой эллипса. Отсюда и получаем способ построения точек эллипса.

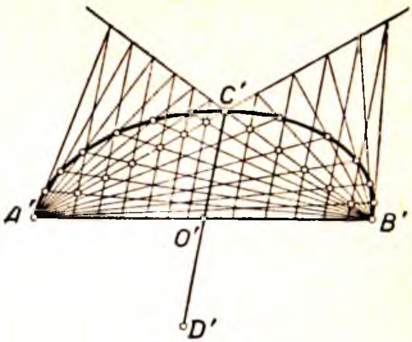


Черт. 29а.



Черт. 29б.

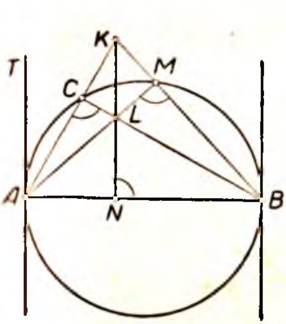
Изменяя положение точки K' на прямой $A'C'$ (каждому положению K' соответствует определенное положение точки K на прямой AC), мы построим сколько угодно точек эллипса. Такое построение и выполнено на чертеже 30. Заметим, что приведенное построение допускает простое обобщение.



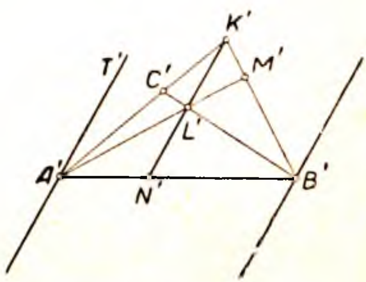
Черт. 30.

В самом деле, оно сохранится и в том случае, если точка C взята на круге произвольно (черт. 31а). Направление KN, перпендикулярное к диаметру AB, параллельно касательным в концах этого диаметра: $KN \parallel AT$. Для построения родственного эллипса должны быть даны: его диаметр $A'B'$, направление $A'T'$ касательных в концах этого диаметра (сопряженное направление) и третья точка C'. Тогда точки эллипса M' находятся уже описанным построением, причем $K'N'$ проводится параллельно $A'T'$ (черт. 31б).

4°. Следствия предыдущих построений эллипса В п. 1° было показано, что любые два отрезка $A'B'$ и $C'D'$, точка пересечения которых O' является серединой каждого из них, всегда можно рассматривать как два сопряженных диаметра некоторого эллипса. В пп. 2° и 3° были даны два построения точек эллипса по паре его сопряженных диаметров. Каждое из этих построений определяет единственный эллипс как кривую, аффинно-соответственную кругу. Отсюда следует, что каждый круг, два взаимно перпендикулярных диаметра (AB и CD) которого в некотором аффинитете соответствуют двум данным отрезкам ($A'B'$ и $C'D'$), преобразуется в этом аффинитете в определенный и единственный эллипс, для которого отрезки ($A'B'$ и $C'D'$)



Черт. 31а.



Черт. 31б.

являются сопряженными диаметрами. Таким образом, мы приходим к выводу:

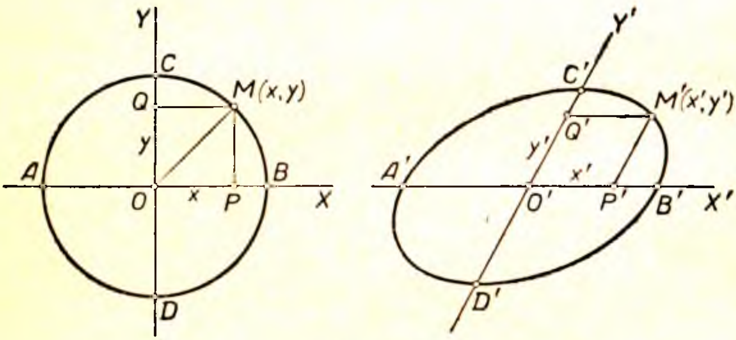
Два данных отрезка $A'B'$ и $C'D'$ произвольной длины и направления, точка пересечения O' которых является серединой каждого из них, определяют единственный эллипс, для которого они служат сопряженными диаметрами.

С другой стороны, так как каждый эллипс имеет бесчисленное множество пар сопряженных диаметров, то он всегда может быть определен одним из построений пп. 2° и 3°. Но параллельная проекция преобразует любое из этих построений в аффинно-соответственное ему аналогичное построение. Следовательно, если какой-либо эллипс, определенный на плоскости ω' одним из построений пп. 2° и 3°, спроектируем параллельно на плоскость ω_1', то на последней получим некоторый родственный эллипс, определяемый аналогичным построением. При этом два сопряженных диаметра $A'B'$ и $C'D'$ первого эллипса спроектируются в два также сопряженных диаметра $A_1'B_1'$ и $C_1'D_1'$ второго.

Отсюда заключаем, что:

1) *Параллельная проекция эллипса на какую-либо плоскость есть также эллипс.*

2) *Любое* (непараллельное образующим) *сечение эллиптического цилиндра плоскостью является эллипсом.*



Черт. 32.

6. Уравнение эллипса. Мы определили эллипс как кривую, аффинно-соответственную окружности. Покажем теперь, что это определение дает нам ту же кривую, что и эллипс, рассматриваемый в аналитической геометрии. С этой целью выведем уравнение эллипса.

Пусть окружности O, $ABCD$ аффинно соответствует эллипс O', $A'B'C'D'$ (черт. 32). Обратимся сперва к уравнению окружности. Оси координат OX и OY направим по диаметрам AB и DC окружности. Начало координат O поместим в центре окружности.

Если $M(x, y)$ — произвольная («текущая») точка окружности, а r — ее радиус, то уравнение окружности напишется так:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

или

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1. \tag{1}$$

Сопряженным диаметрам AB и CD окружности соответствуют сопряженные диаметры $A'B'$ и $C'D'$ эллипса. Отнесем эллипс к системе координат $O'X'Y'$, в которой осями координат служат сопряженные диаметры $A'B'$ и $D'C'$. Обозначим полудиаметры эллипса буквами a' и b', т. е. положим:

$$O'B' = A'O' = a', \ O'C' = D'O' = b'$$

Пусть, наконец, текущей точке $M(x, y)$ окружности соответствует текущая точка $M'(x', y')$ эллипса, а прямым $MQ \parallel OX$ и $MP \parallel OY$ — прямые $M'Q' \parallel O'X'$ и $M'P' \parallel O'Y'$. Тогда уравнение (1) окружности может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{x}{r} = \frac{OP}{OB} = (PBO); \quad \frac{y}{r} = \frac{OQ}{OC} = (QCO).$$

В силу сохранения простого отношения трех точек при аффинных преобразованиях будем иметь:

$$(PBO) = (P'B'O') = \frac{P'O'}{B'O'} = \frac{x'}{a'},$$

$$(QCO) = (Q'C'O') = \frac{Q'O'}{C'O'} = \frac{y'}{b'}.$$

Сравнивая эти формулы с написанными выше, получим:

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{r} = \frac{y'}{b'}.$$

Если подставим эти выражения в уравнение окружности (1), то получим, очевидно, уравнение эллипса, отнесенного к сопряженным диаметрам:

$$\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 = 1. \tag{2}$$

В этом уравнении a' и b' — сопряженные полудиаметры эллипса.

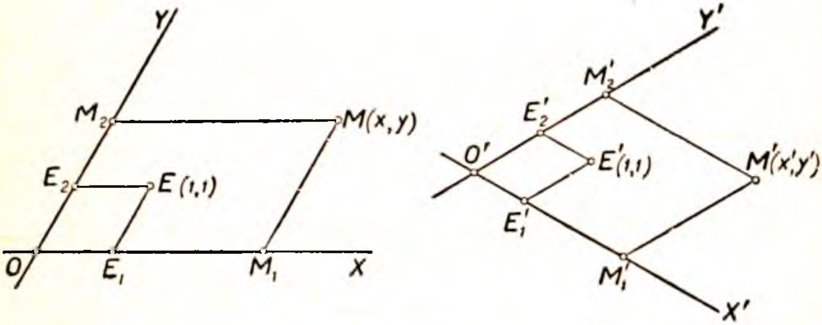
Если бы мы хотели получить уравнение эллипса, отнесенного к его осям, то для этого достаточно выбрать оси координат OX, OY и $O'X'$, $O'Y'$, совпадающими с главными направлениями наших аффинно-соответственных плоскостей. Тогда уравнение (2) выражало бы в декартовой прямоугольной системе координат эллипс, отнесенный к своим осям.

§ 8. Понятие об аффинных координатах.

Пусть нам задана обыкновенная декартова система координат XOY (черт. 33). Обозначим через E единичную точку данной системы, т. е. точку с координатами (1,1). Тогда координаты x и y произвольной точки M выразятся формулами:

$$x = \frac{OM_1}{OE_1}, \quad y = \frac{OM_2}{OE_2},$$

где через OM_1 и OM_2 обозначены стороны координатного параллелограмма OM_1MM_2. Произведем аффинное преобразование плоскости вместе с находящейся на ней системой координат XOY.



Черт. 33.

Предположим, что осям координат OX и OY будут соответствовать прямые $O'X'$ и $O'Y'$, а точкам M и E — точки M' и E'. При этом параллелограммам OE_1EE_2 и OM_1MM_2 будут соответствовать параллелограммы $O'E_1'E'E_2'$ и $O'M_1'M'M_2'$.

Если в новой системе координат $X'O'Y'$ будем считать точку E' единичной, т. е. примем отрезки $O'E_1'$ и $O'E_2'$ за единицы масштабов по осям $O'X'$ и $O'Y'$, то координаты x' и y' выразятся следующими формулами:

$$x' = \frac{O'M_1'}{O'E_1'}, \quad y' = \frac{O'M_2'}{O'E_2'}.$$

По свойству аффинных преобразований отношения отрезков, выражающих старые и новые координаты, остаются равными, поэтому будем иметь:

$$x' = x, \quad y' = y.$$

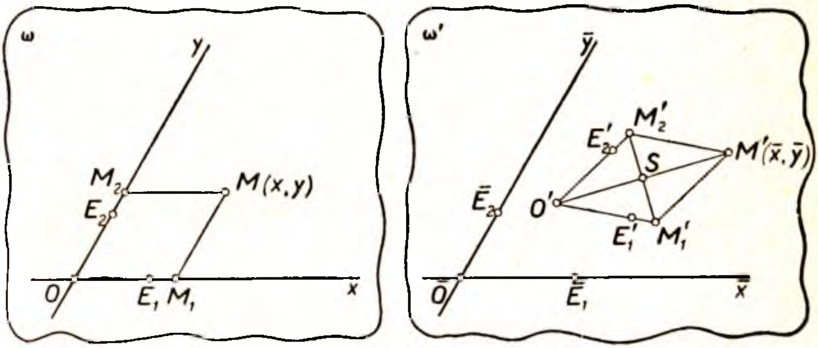
Таким образом, мы пришли к новой системе координат с помощью аффинного преобразования декартовой системы. Новая система представляет собой обобщение декартовой, так как в ней масштабы $O'E_1'$ и $O'E_2'$ по осям координат, вообще говоря, различны.

Единичный ромб OE_1EE_2 декартовой системы заменился единичным параллелограммом $O'E'_1E'E'_2$ новой системы. Такая обобщенная система координат называется аффинной. *Всякое новое аффинное преобразование плоскости переводит аффинную систему координат в аффинную же.*

Декартова система координат представляет собой тот частный случай аффинной, когда масштабы по осям равны.

§ 9. Аффинное преобразование в координатах.

1. Основная теорема. Пусть на плоскостях ω и ω' заданы произвольные аффинные системы координат OE_1E_2 (на плоскости ω) и $\overline{O}\,\overline{E}_1\overline{E}_2$ (на плоскости ω'). Предположим, что произведено аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω', в котором



Черт. 34.

масштабный треугольник OE_1E_2 переходит в треугольник $O'E'_1E'_2$ (черт. 34). Соответствие двух треугольников, как мы знаем (§ 4), вполне определяет аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω'. Рассмотрим произвольную точку M (x, y) первой плоскости и соответственную ей точку M' $(\bar x, \bar y)$ — второй. Координатный параллелограмм OM_1MM_2 переходит в параллелограмм $O'M'_1M'M'_2$. В системе $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ $(\overline{O}\,\overline{E}_1\overline{E}_2)$ координаты соответственных точек обозначим следующим образом:

$$O'\ (\xi_0, \eta_0);\quad E_1'(\xi_1, \eta_1);\quad E'_2\ (\xi_2, \eta_2),$$
$$M'_1\ (\bar x_1, \bar y_1);\quad M'_2\ (\bar x_2, \bar y_2).$$

Наша задача заключается в том, чтобы выразить координаты $\bar x$ и $\bar y$ точки M', соответственной точке M, через координаты x и y последней.

Определяя координаты точки S сначала как середины отрезка $O'M'$, а затем как середины отрезка $M'_1M'_2$, получим:

$$\frac{\bar{x}+\xi_0}{2}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2};\quad \frac{\bar{y}+\eta_0}{2}=\frac{\bar{y}_1+\bar{y}_2}{2}.$$

Эти равенства позволяют определить $\bar{x}$ и $\bar{y}$ следующим образом:

$$\bar{x}=\bar{x}_1+\bar{x}_2-\xi_0;\quad \bar{y}=\bar{y}_1+\bar{y}_2-\eta_0. \tag{1}$$

С другой стороны, в силу равенств простых отношений:

$$(OE_1M_1)=(O'E'_1M'_1);\quad (OE_2M_2)=(O'E'_2M'_2),$$

будем иметь:

$$x=\frac{OM_1}{OE_1}=\frac{O'M'_1}{O'E'_1}=\frac{\bar{x}_1-\xi_0}{\xi_1-\xi_0}=\frac{\bar{y}_1-\eta_0}{\eta_1-\eta_0};$$

$$y=\frac{OM_2}{OE_2}=\frac{O'M'_2}{O'E'_2}=\frac{\bar{x}_2-\xi_0}{\xi_2-\xi_0}=\frac{\bar{y}_2-\eta_0}{\eta_2-\eta_0}.$$

Из этих формул можем выразить $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ через координаты x и y.

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1&=(\xi_1-\xi_0)\,x+\xi_0, & \bar{x}_2&=(\xi_2-\xi_0)\,y+\xi_0,\\ \bar{y}_1&=(\eta_1-\eta_0)\,x+\eta_0, & \bar{y}_2&=(\eta_2-\eta_0)\,y+\eta_0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставляя найденные выражения (2) в формулы (1), получим:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=(\xi_1-\xi_0)\,x+(\xi_2-\xi_0)\,y+\xi_0,\\ \bar{y}&=(\eta_1-\eta_0)\,x+(\eta_2-\eta_0)\,y+\eta_0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Формулы (3) выражают координаты аффинно-соответственной точки M' $(\bar{x}, \bar{y})$ через координаты точки M (x, y).

Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Аффинное преобразование одной плоскости в другую выражается в аффинных (и в декартовых) координатах формулами вида (3), в которых правые части представляют линейные функции от координат преобразованной точки.

Заметим, что аффинное преобразование плоскости ω в плоскость ω' было определено заданием треугольника $O'E'_1E'_2$, соответствующего масштабному треугольнику OE_1E_2 плоскости ω. В формулах (3) это выразилось в том, что коэффициенты этих формул являются функциями координат $(\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ вершин треугольника $O'E'_1E'_2$.

Докажем теперь обратное предложение. Пусть геометрическое преобразование точек M (x, y) плоскости ω в точки M' $(\bar{x}, \bar{y})$ плоскости ω' выражается линейными формулами:

$$\bar{x}=a_1x+b_1y+c_1,\quad \bar{y}=a_2x+b_2y+c_2;\quad \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0. \tag{4}$$

Убедимся в том, что преобразование, осуществляемое формулами (4), является аффинным.

В самом деле, сравнивая формулы (4) с найденными ранее формулами аффинного преобразования (3), находим:

$$\left.\begin{aligned} &\xi_0 = c_1, && \eta_0 = c_2, \\ &\xi_1 = a_1 + \xi_0 = a_1 + c_1, && \eta_1 = a_2 + \eta_0 = a_2 + c_2, \\ &\xi_2 = b_1 + \xi_0 = b_1 + c_1, && \eta_2 = b_2 + \eta_0 = b_2 + c_2. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Так определяются координаты вершин треугольника $O'E'_1E'_2$, соответствующего масштабному треугольнику OE_1E_2.

Таким образом, формулы (4) можно рассматривать как формулы аффинного преобразования (3), определяемого соответствием треугольников OE_1E_2 и $O'E'_1E'_2$.

Условие

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

принимает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_0 & \xi_2 - \xi_0 \\ \eta_1 - \eta_0 & \eta_2 - \eta_0 \end{vmatrix} \neq 0$$

и выражает требование, чтобы три точки O', E'_1 и E'_2 не лежали на одной прямой.

Полученный результат можно формулировать следующим образом:

Геометрическое преобразование, выражаемое формулами (4), *является аффинным преобразованием, в котором масштабный треугольник* OE_1E_2 *переходит в треугольник* $O'E'_1E'_2$. *Координаты вершин последнего треугольника определяются по формулам* (5)[1].

2. Исследование свойств аффинного преобразования в координатах. Заметим, прежде всего, что при условии $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ из формул (4) могут быть найдены выражения координат x и y точки M через координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственной точки M'. Эти формулы будут иметь вид, совершенно аналогичный формулам (4), так как координаты x и y выразятся линейно через $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$x = \alpha_1\bar{x} + \beta_1\bar{y} + \gamma_1, \quad y = \alpha_2\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \gamma_2, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Геометрическое значение формул преобразования (4) и (6) очень простое. В самом деле, если в формулах (4) положим $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$, то будем иметь:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0. \quad (7)$$

---

[1] Идея приведенного здесь вывода принадлежит проф. Д. И. Перепелкину.

Следовательно, осям координат $\bar{x} = 0$ и $\bar{y} = 0$ плоскости ω' соответствуют прямые (7) на плоскости ω. Точка пересечения последних соответствует началу координат $\bar{O}$.

Аналогичное получим, полагая в формулах (6) $x = 0$ и $y = 0$. Тогда прямые

$$\alpha_1\bar{x} + \beta_1\bar{y} + \gamma_1 = 0, \qquad \alpha_2\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \gamma_2 = 0 \tag{8}$$

будут на плоскости ω' соответствовать осям координат $x = 0$ и $y = 0$ плоскости ω, а точка пересечения прямых (8) — началу координат O.

Покажем аналитически, что геометрическое преобразование плоскости по формулам (4) или (6) обладает свойством *коллинеарности*.

Рассмотрим прямую

$$mx + ny + p = 0$$

на плоскости ω и преобразуем ее по формулам (6). Получим:

$$m(\alpha_1\bar{x} + \beta_1\bar{y} + \gamma_1) + n(\alpha_2\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \gamma_2) + p = 0,$$

или

$$(m\alpha_1 + n\alpha_2)\bar{x} + (m\beta_1 + n\beta_2)\bar{y} + (m\gamma_1 + n\gamma_2 + p) = 0.$$

Таким образом, получим на плоскости ω' также прямую линию.

Убедимся далее в инвариантности *простого отношения трех точек прямой*.

Пусть

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2) \text{ и } M_3(x_3, y_3) \text{ —}$$

три точки, лежащие на одной прямой первой плоскости, а

$$M_1'(\bar{x}_1, \bar{y}_1),\ M_2'(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \text{ и } M_3'(\bar{x}_3, \bar{y}_3) \text{—}$$

три соответствующие точки второй плоскости. Тогда будем иметь:

$$(M_1M_2M_3) = \frac{M_1M_3}{M_2M_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \lambda.$$

Мы хотим доказать, что

$$(M_1'M_2'M_3') = (M_1M_2M_3) = \lambda.$$

В самом деле,

$$(M_1'M_2'M_3') = \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_1}{\bar{x}_3 - \bar{x}_2}.$$

Преобразуя это выражение по формулам (4), получим:

$$(M_1'M_2'M_3') = \frac{a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 - (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)}{a_1x_3 + b_1y_3 + c_1 - (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1)} =$$

$$= \frac{a_1(x_3 - x_1) + b_1(y_3 - y_1)}{a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)}.$$

Но из написанного выше равенства

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2},$$

умножая числитель и знаменатель левой части на a_1, а числитель и знаменатель правой части на b_1, получим следующую производную пропорцию:

$$\frac{a_1(x_3 - x_1) + b_1(y_3 - y_1)}{a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \lambda.$$

Следовательно,

$$(M_1' M_2' M_3') = \lambda,$$

или

$$(M_1' M_2' M_3') = (M_1 M_2 M_3)$$

(ч. т. д.).

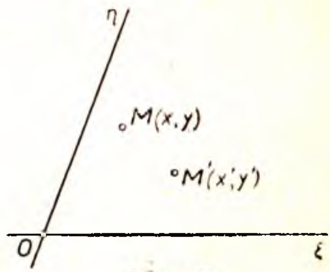
Отсюда заключаем, что преобразование, осуществляемое формулами (4) и (6), обладает свойством коллинеарности и сохраняет простое отношение трех точек.

Таким образом, получено новое доказательство того, что это преобразование является аффинным.

Аффинное преобразование может быть задано тремя парами соответственных точек (двумя соответственными треугольниками). Так, если точкам M_1 (x_1, y_1), M_2 (x_2, y_2) и M_3 (x_3, y_3) соответствуют точки M_1' $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, M_2' $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ и M_3' (x_3, y_3), то при подстановке координат данных точек в формулу (4) получим шесть уравнений, из которых можно определить все шесть коэффициентов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 формул преобразования (4) (ср. следствие 1 § 4).

§ 10. Неподвижная точка аффинного преобразования плоскости в себя.

1. Предположим, что плоскость ω' совпадает с плоскостью ω[1]. Тогда формулы (4) и (6) § 9 определяют аффинное преобразование плоскости в себя. В этом случае нам нет необходимости пользоваться двумя системами координат Oxy (для плоскости ω) и $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ (для плоскости ω'), как мы это делали в предшествующем параграфе. Мы будем предполагать обе системы координат совпадающими и обозначим оси координат буквами $O\xi$ и $O\eta$. Точку плоскости ω до преобразования будем обозначать через M (x, y), а после преобразования — M' (x', y'), причем координаты в обоих случаях берутся по отношению к системе $O\xi\eta$ (черт. 35).



Черт. 35

[1] Что не означает совпадения точечных полей ω и ω'.

Формулы преобразования (4) перепишутся в следующем виде:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Поставим вопрос о существовании на плоскости ω таких точек, которые при выполнении аффинного преобразования по формулам (1) переходили бы в себя, т. е. не изменяли бы своего положения на плоскости ω. Такие точки называются *двойными* или *неподвижными точками* плоскости при ее преобразовании (1).

Очевидно, что для неподвижной точки мы должны иметь:

$$x' = x, \quad y' = y.$$

Подставляя эти значения x' и y' в формулы (1), получим:

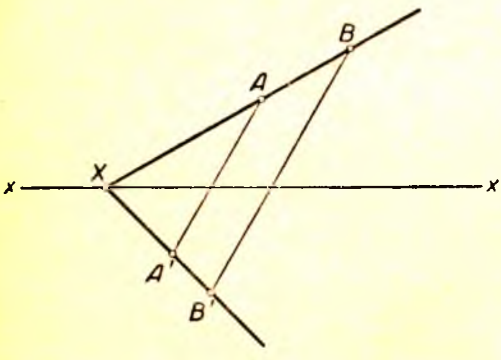
$$x = a_1x + b_1y + c_1, \quad y = a_2x + b_2y + c_2. \qquad (2)$$

Разрешая систему (2) относительно x и y, мы найдем искомые координаты неподвижной точки.

Система уравнений (2) может иметь одно решение, может не иметь ни одного решения, наконец, может оказаться, что она имеет бесчисленное множество решений.

Следовательно, аффинное преобразование плоскости в себя может иметь одну неподвижную точку или не иметь ее[1], что соответствует первым двум случаям. Последний случай рассмотрим подробнее. Он имеет место, если оба уравнения системы (1) эквивалентны, т. е. если их коэффициенты пропорциональны:

$$\frac{a_1 - 1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2 - 1} = \frac{c_1}{c_2}.$$



Черт. 36.

При этом оба уравнения (2) изображают одну и ту же прямую, все точки которой являются неподвижными.

Нетрудно убедиться в том, что эта неподвижная прямая является осью перспективно-аффинного соответствия, которое и изображается в данном случае формулами (1). В самом деле, если xx — неподвижная прямая (черт. 36) и точкам A и B со-

[1] Ср. с § 55.

ответствуют точки A' и B', то прямая AB имеет неподвижную точку X пересечения с неподвижной прямой xx. Следовательно, соответственная прямая $A'B'$ пересекается с прямой AB в точке X. По свойству аффинного соответствия имеем:

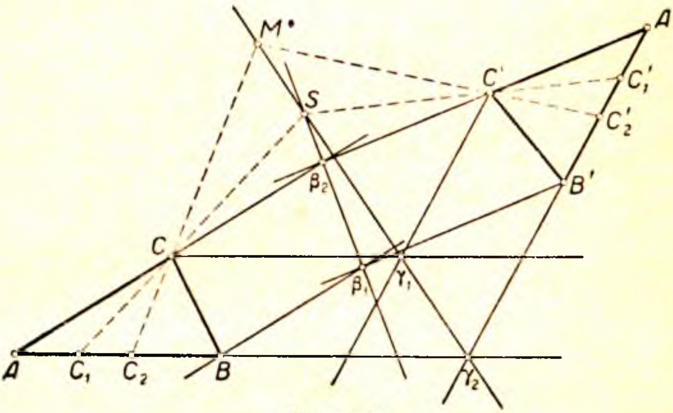
$$(XAB) = (XA'B'),$$

откуда заключаем о пропорциональности отрезков на сторонах угла AXA', а из этого о параллельности прямых AA' и BB':

$$AA' \parallel BB'.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеем перспективно-аффинное преобразование с осью xx.

2. Построение неподвижной точки. Пусть аффинное преобразование плоскости в себя задано соответствием двух треугольников: ABC и $A'B'C'$ (черт. 37). Предположим, что задача



Черт. 37.

решена и точка S является неподвижной точкой преобразования плоскости. Тогда прямая SC переходит в прямую SC'. Обозначим через C_1 и C'_1 точки пересечения этих прямых соответственно со сторонами AB и $A'B'$.

Будем иметь:

$$(SCC_1) = (SC'C'_1).$$

Следовательно, точка S должна принадлежать геометрическому месту точек M, для которых

$$(MCC_1) = (MC'C_1').$$

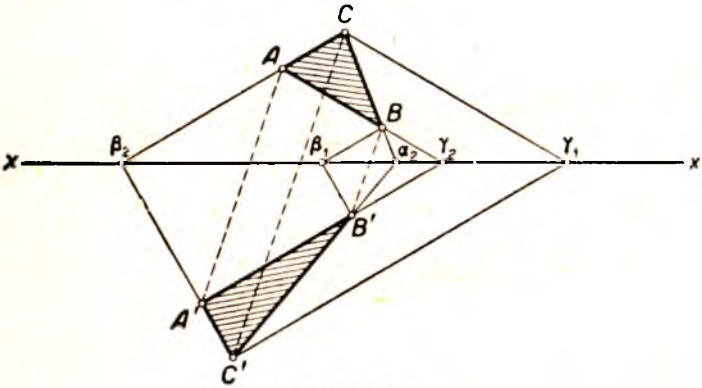
Покажем, что это геометрическое место есть прямая, которую можно построить следующим образом.

Проводим через C прямую $C\gamma_1 \parallel AB$ и через C' — прямую $C'\gamma_1 \parallel A'B'$. Точку пересечения прямых $C\gamma_1$ и $C'\gamma_1$ обозначим буквой γ_1. Точку пересечения прямых AB и $A'B'$ обозначим буквой γ_2.

Прямая $\gamma_1\gamma_2$ и является, как это нетрудно видеть, искомым геометрическим местом точек M. В самом деле, для любой точки M^* этой прямой будем иметь:

$$(M^*CC_2) = (M^*\gamma_1\gamma_2) = (M^*C'C'_2)$$

Подобным же образом можно построить две другие прямые $\beta_1\beta_2$ и $\alpha_1\alpha_2$, соответствующие вершинам B, B' и A, A'. Неподвижная точка S является точкой пересечения этих трех прямых, которые, если такая точка S существует, все три проходят через нее. На чертеже 37 построены только две прямые: $\gamma_1\gamma_2$ и $\beta_1\beta_2$. Неподвижная точка S определяется как точка их пересечения.



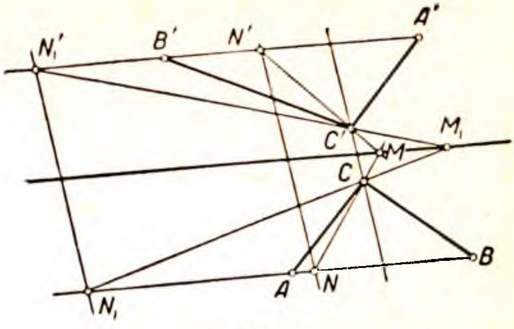
Черт. 38

Рассмотрим случай перспективно-аффинного соответствия. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ соответствуют один другому в этом соответствии (черт. 38). Тогда их соответственные стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ пересекаются в трех точках γ_2, α_2 и β_2, лежащих на оси соответствия xx. Если построим прямые $C\gamma_1 \parallel AB$ и $C'\gamma_1 \parallel A'B'$, то эти прямые, как соответственные, должны пересекаться в точке γ_1 на оси соответствия xx. Следовательно, прямая $\gamma_1\gamma_2$ в данном случае совпадает с осью xx. Но то же самое можно сказать и о двух других прямых $\alpha_1\alpha_2$ и $\beta_1\beta_2$. Таким образом, все три прямые сливаются с осью xx, и любая точка последней может рассматриваться как неподвижная точка S пересечения прямых $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ и $\gamma_1\gamma_2$. Приходим к выводу, что ось xx является геометрическим местом неподвижных точек, как это и должно быть в перспективно-аффинном соответствии.

В том случае, когда две соответственные пары сторон треугольников параллельны (например, $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$, но $BC \nparallel B'C'$) (черт. 39), приведенное выше построение, очевидно, невозможно. Тогда оно может быть заменено другим. Проводим прямую CC' и произвольную прямую, ей параллельную. Пусть последняя пересекает стороны AB и $A'B'$ треугольников соответственно в точках N и N'. Строим прямые NC и $N'C'$ и находим точку их пересечения M. Как легко видеть, будем иметь:

$$(MCN) = (MC'N').$$

Прямая MM_1, проходящая через точку M и параллельная сторонам AB и $A'B'$, является искомым геометрическим местом. В самом деле, для каждой точки M_1 этой прямой имеем:



Черт. 39.

$$(M_1CN_1) = (M_1C'N_1').$$

Аналогично можем построить второе геометрическое место и найти неподвижную точку S.

§ 11. Аффинное преобразование как метод решения геометрических задач.

Аффинное преобразование может быть применено как метод решения геометрических задач. Принцип такого применения аффинного преобразования заключается в следующем.

Предположим, что геометрическая задача сводится к некоторой конструкции F. Если произведем аффинное преобразование плоскости чертежа, то конструкция F перейдет в конструкцию F'. Может оказаться, что эта последняя проще конструкции F, и построение ее может быть легко выполнено. Тогда решаем задачу в преобразованном виде (выполняем конструкцию F') и, произведя обратное преобразование чертежа, получаем искомое решение задачи.

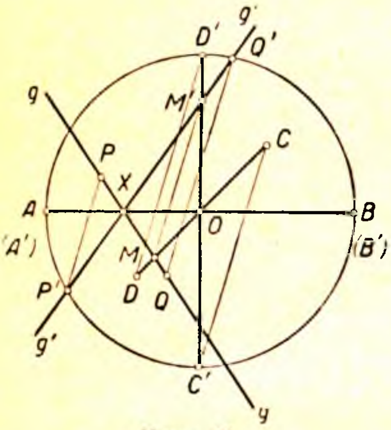
В частности, этот метод может быть с успехом применен в тех случаях, когда в конструкции F участвуют эллипсы. Тогда производится такое преобразование, которое переводит эллипсы в круги. Благодаря этому задача упрощается. После ее решения производится обратное преобразование. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а. Д а н а п р я м а я g и п а р а с о п р я ж е н н ы х д и а м е т р о в э л л и п с а AB и CD. Т р е б у е т с я п о с т р о и т ь т о ч к и п е р е с е ч е н и я п р я м о й g с з а д а н н ы м э л л и п с о м.

Произведем такое перспективно-аффинное преобразование плоскости чертежа (плоскость ω), которое переводит заданный эллипс в окружность. Проще всего это сделать так. Примем диаметр эллипса AB за ось перспективно-аффинного преобразования, тогда отрезок AB (диаметр эллипса) переходит в себя, т. е. соответственный отрезок $A'B'$ (диаметр окружности) совпадает с AB. Следовательно, мы хотим преобразовать данный эллипс (с сопряженными диаметрами AB и CD) в окружность, для которой отрезок AB является диаметром, т. е. окружность с центром в точке O и радиусом $r = OB = OA$ (черт. 40). Так как AB и CD — сопряженные диаметры эллипса, то соответственные диаметры $A'B'$ и $C'D'$ окружности должны быть сопряженными, а следовательно, перпендикулярными. Поэтому получаем:

$$C'D' \perp A'B', \quad \text{или} \quad C'D' \perp AB.$$

Таким образом, положение диаметра $C'D'$ соответственной окружности определилось. Его концы обозначаем буквами C' и D': они являются точками, соответственными точкам C и D. На чертеже 40 мы обозначили нижний конец диаметра окружности буквой C', так как это более удобно для выполнения построения. Точки C и C' (или D и D') представляют пару соответственных точек перспективно-аффинного соответствия. Последнее вполне определяется осью xx и парой соответственных точек (C, C'). Это преобразование переводит данный эллипс (с сопряженными диаметрами AB и CD) в окружность (с сопряженными диаметрами $A'B' = AB$ и $C'D'$). Произведем указанное перспективно-аффинное преобразование плоскости чертежа в себя.



Черт. 40.

Прямая g в этом преобразовании перейдет в прямую g', которую легко построить по точке X (неподвижной точке) и точке M (в точке пересечения прямой g с диаметром CD), переходящей в точку M' (на диаметре $C'D'$).

Благодаря выполненному преобразованию задача построения точек пересечения прямой g с эллипсом переходит в задачу построения точек пересечения прямой g' с окружностью, соответственной данному эллипсу.

Обозначим точки пересечения прямой g' с окружностью (которую можем построить циркулем) буквами P' и Q'. Тогда, проводя проектирующие $P'P \parallel Q'Q \parallel C'C$, найдем на данной прямой g искомые точки P и Q.

§ 12. Аффинное преобразование пространства в себя.

В § 10 было рассмотрено аффинное преобразование плоскости в себя. Это преобразование выражалось в координатах линейными формулами:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Аналогичным образом может быть определено аффинное преобразование пространства в себя.

Пусть имеем аффинную систему координат в пространстве $O\xi\eta\zeta$. Произвольную точку пространства до преобразования обозначим через M (x, y, z), а после преобразования — через M' (x', y', z'), причем координаты в обоих случаях берутся относительно системы $O\xi\eta\zeta$. Предположим, что координаты точки M' выражаются через координаты точки M следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3; \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Такое преобразование будем называть **аффинным преобразованием пространства в себя**.

Исследуем свойства аффинного преобразования пространства. Формулы (1) показывают, что это преобразование является *взаимно однозначным*. В самом деле, координаты x, y, z точки M могут быть выражены линейными формулами через координаты x', y', z' точки M':

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1x' + \beta_1y' + \gamma_1z' + \delta_1, \\ y &= \alpha_2x' + \beta_2y' + \gamma_2z' + \delta_2, \\ z &= \alpha_3x' + \beta_3y' + \gamma_3z' + \delta_3; \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

Далее, как легко убедиться, всякая плоскость пространства преобразуется в плоскость.

Пусть, например, имеем плоскость:

$$mx + ny + pz + q = 0. \tag{3}$$

Подставляя выражения x, y, z по формулам (2), получим:

$$m(\alpha_1x' + \beta_1y' + \gamma_1z' + \delta_1) + n(\alpha_2x' + \beta_2y' + \gamma_2z' + \delta_2) + \\ + p(\alpha_3x' + \beta_3y' + \gamma_3z' + \delta_3) + q = 0,$$

или, собирая члены с x', y' и z':

$$(m\alpha_1 + n\alpha_2 + p\alpha_3)x' + (m\beta_1 + n\beta_2 + p\beta_3)y' + \\ + (m\gamma_1 + n\gamma_2 + p\gamma_3)z' + q = 0, \tag{4}$$

т. е. снова получим плоскость.

Отметим затем, что свойство **взаимопринадлежности** точки и плоскости также не нарушается в аффинном преобразовании пространства. В самом деле, если точка M (x, y, z) лежит на плоскости (3), то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости. В таком случае очевидно, что координаты соответственной точки M' (x', y', z') будут удовлетворять уравнению (4) плоскости, соответственной плоскости (3) в рассматриваемом аффинном преобразовании.

Отсюда немедленно следует, что в рассматриваемом преобразовании прямой линии соответствует прямая линия. В самом деле, каждую прямую g пространства мы можем рассматривать как линию пересечения проходящих через нее плоскостей α и β. Последние преобразуются в плоскости α' и β'. Тогда прямой g соответствует линия g' пересечения плоскостей α' и β'. Эти плоскости должны пересекаться, так как в противном случае соответствие не было бы взаимно однозначным.

Заметим, что из аналогичных соображений следует *сохранение параллельности* двух плоскостей, двух прямых и прямой с плоскостью при аффинном преобразовании пространства в себя.

Покажем, наконец, что аффинное преобразование пространства в себя сохраняет простое отношение трех точек прямой. Обозначим упомянутые точки через $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Соответственные точки после преобразования по формулам (I) обозначим через $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$, $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$ и $M'_3(x'_3, y'_3, z'_3)$. Тогда будем иметь:

$$(M_1M_2M_3) = \frac{M_1M_3}{M_2M_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \lambda.$$

Следовательно,

$$x_3 - x_1 = \lambda(x_3 - x_2); \quad y_3 - y_1 = \lambda(y_3 - y_2); \quad z_3 - z_1 = \lambda(z_3 - z_2).$$

После преобразования получим:

$$(M'_1M'_2M'_3) = \frac{M'_1M'_3}{M'_2M'_3} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} =$$

$$= \frac{(a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 + d_1) - (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1)}{(a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 + d_1) - (a_1x_2 + b_1y_2 + b_1z_2 + d_1)} =$$

$$= \frac{a_1(x_3 - x_1) + b_1(y_3 - y_1) + c_1(z_3 - z_1)}{a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2) + c_1(z_3 - z_2)} =$$

$$= \frac{a_1\lambda(x_3 - x_2) + b_1\lambda(y_3 - y_2) + c_1\lambda(z_3 - z_2)}{a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2) + c_1(z_3 - z_2)} = \lambda.$$

Поэтому можем написать:

$$(M_1M_2M_3) = (M'_1M'_2M'_3).$$

Предположим, что α — произвольная плоскость, которой в аффинном преобразовании пространства соответствует плоскость α'. Тогда параллельным прямым плоскости α будут соответствовать параллельные прямые плоскости α'. Простое отношение трех прямолинейно расположенных точек плоскости α сохранит свое значение для трех соответственных точек плоскости α'. Следовательно, между плоскостями α и α' установится аффинное соответствие.

Рассмотрим затем вопрос о неподвижных, или двойных, точках аффинного преобразования пространства в себя.

Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ совпадала со своей соответственной точкой $M'(x', y', z')$, мы должны иметь:

$$x' = x, \quad y' = y, \; z' = z,$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \\ y &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \\ z &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Система линейных уравнений (5) имеет в общем случае одно решение. Следовательно, в этом предположении аффинное преобразование пространства в себя имеет лишь одну неподвижную точку.

Существенный интерес представляет тот частный случай аффинного преобразования пространства, когда неподвижные точки образуют плоскость. Уравнения (5) представляют собой три плоскости, причем точка их пересечения и является, очевидно, неподвижной точкой преобразования. Неподвижную плоскость, все точки которой двойные, мы будем иметь в том, и только в том, случае, когда три уравнения системы (5) эквивалентны, т. е. когда их коэффициенты соответственно пропорциональны.

Это можно записать в следующей условной форме:

$$(a_1 - 1) : a_2 : a_3 = b_1 : (b_2 - 1) : b_3 = c_1 : c_2 : (c_3 - 1) = \\ = d_1 : d_2 : d_3. \qquad (6)$$

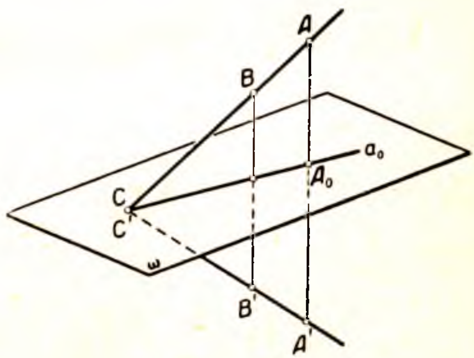
При выполнении условия (6) аффинное преобразование будет иметь неподвижную плоскость, все точки которой двойные. Уравнение такой плоскости можно написать в виде:

$$(a_1 - 1)\, x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

Докажем, что в этом случае прямые, соединяющие пары соответственных точек, параллельны и мы имеем *перспективно-аффинное* преобразование, или *родство*.

Предположим, например, что точкам A и B пространства соответствуют в аффинном преобразовании точки A' и B'. Если обозначим неподвижную плоскость буквой ω, то можем иметь следующие случаи:

1) Прямая AB пересекает плоскость ω в двойной точке C ($C \equiv C'$). Следовательно, прямая $A'B'$ проходит через точку $C(C')$. Тогда должны иметь: $(ABC) = (A'B'C')$. А отсюда заключаем: $AA' \parallel BB'$ (черт. 41).

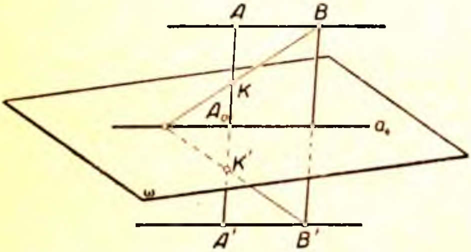


Черт. 41.

2) Прямая AB параллельна плоскости ω, но прямая AA' пересекает плоскость ω в двойной точке A_0. Тогда, обозначая через a_0 двойную прямую пересечения плоскости $AA'B$ с плоскостью ω, будем иметь: $AB \parallel a_0$, $A'B' \parallel a_0$ и, следовательно, $A'B' \parallel AB$.

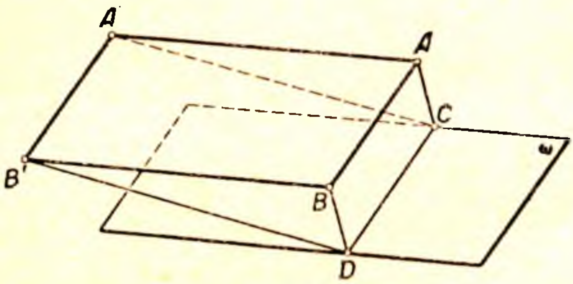
С другой стороны, прямая AA' сама себе соответствует, так как AA_0 переходит в $A'A_0$. Поэтому, взяв на прямой AA' точку K такую, что $BK \nparallel$ плоскости ω, вернемся к первому случаю и будем иметь $KK' \parallel BB'$. Следовательно, $AA' \parallel BB'$ (черт. 42).

3) Наконец, можем иметь: AB параллельна плоскости ω и AA' параллельна плоскости ω. Плоскость ABA' параллельна плоскости ω. Так как плоскость, соответственная плоскости ABA', должна проходить через точку A' и быть параллельной плоскости ω, то она совпадает с плоскостью ABA'. Поэтому точка B' должна лежать в плоскости ABA'.



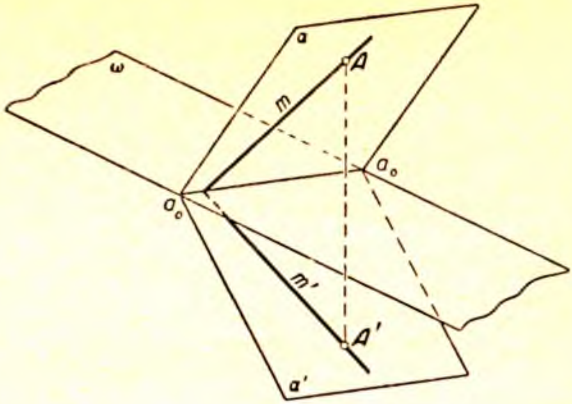
Черт. 42.

Проводим через AB плоскость $ABCD$ (черт. 43), пересекающую плоскость ω по прямой CD. Будем иметь: $CD \parallel AB$. В плоскости $ABCD$ проведем прямые AC и BD, причем $AC \parallel BD$. Следовательно, $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому $A'B'CD$ — также параллелограмм. Следовательно, $A'C \parallel B'D$. Плоскости ACA' и BDB' — параллельны. Прямые AA' и BB' являются линиями пересечения плоскости ABA' с плоскостями ACA' и BDB'. Следовательно, будем иметь: $AA' \parallel BB'$ (ч. т. д.).



Черт. 43.

Предположим далее, что произвольная плоскость α пересекает тождественную плоскость ω по прямой a_0 (черт. 44). Так как a_0— тождественная прямая, то соответственная плоскость α' проходит через a_0. Все точки плоскости α проектируются параллельно (по направлению родства) в соответственные точки пло-



Черт. 44.

скости α'. Следовательно, между плоскостями α и α' устанавливается родственное соответствие с осью родства a_0.

Двум параллельным отрезкам ($AB \parallel CD$) соответствуют два параллельных отрезка ($A'B' \parallel C'D'$), причем, конечно:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$$

(черт. 45).

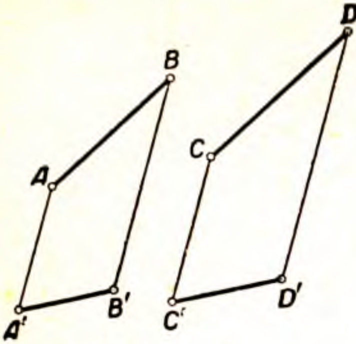
Перспективно-аффинное соответствие точек пространства будет вполне определено, если зададим неподвижную плоскость соответствия ω, все точки которой двойные («плоскость родства»), и пару соответственных точек (A, A').

В самом деле, пусть B — произвольная точка пространства. Прямая AB либо пересекает плоскость ω в двойной точке X, либо параллельна плоскости ω. В первом случае соответственной прямой является прямая $A'X$, во втором — соответственная прямая проходит через A' и параллельна AB (так как $AA' \parallel BB'$ и, следовательно, прямые AB и $A'B'$ лежат в одной плоскости).

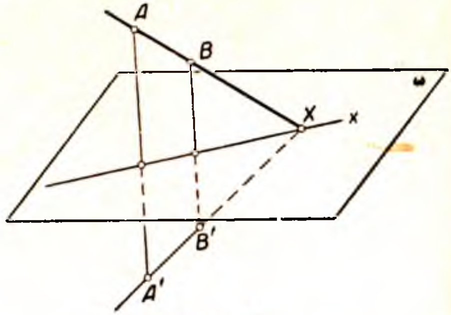
Для построения точки B', соответственной точке B, в обоих случаях достаточно провести $BB' \parallel AA'$ и найти точку пересечения прямой BB' с линией $A'B'$, соответственной прямой AB (см. черт. 46).

Заметим, что при этом в плоскости $AA'B$ устанавливается перспективно-аффинное соответствие, которое определяется парой соответственных точек (A, A') и осью соответствия x. Последней, очевидно, является линия пересечения плоскости $AA'B$ с плоскостью ω, так как все точки этой прямой двойные.

Представим себе далее, что имеем какие-либо две аффинно-соответственные пространственные фигуры Φ и Φ'. Проведем плоское сечение α фигуры Φ. На основании сказанного выше ему соответствует плоское сечение α' фигуры Φ'.



Черт. 45.



Черт. 46.

Так как сечения α и α' являются аффинно-соответственными, то ими можно воспользоваться для изучения аффинно-соответственных фигур Φ и Φ' в пространстве. В частности, мы применим метод сечений при исследовании фигуры, аффинно-соответственной сфере.

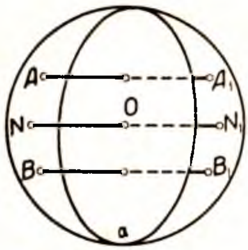
Если аффинное преобразование пространства переводит какую-либо замкнутую поверхность T в некоторую соответственную поверхность T', то можно исследовать это преобразование одной поверхности в другую при помощи параллельных хорд, проведенных в первой поверхности по определенному направлению. Таким хордам будут соответствовать во второй поверхности также параллельные хорды, длины которых изменены в одном и том же отношении. Поэтому аффинное преобразование, переводящее поверхность T в соответствующую ей поверхность T', можно охарактеризовать как *сжатие* или *растяжение* в определенном направлении.

§ 13. Эллипсоид (сопряженные и главные направления, оси эллипсоида).

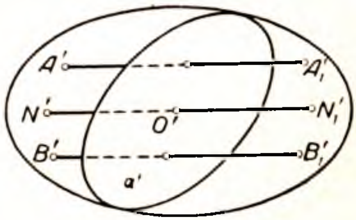
Поверхность, аффинно-соответственная сфере, называется *эллипсоидом*. Так как любое плоское сечение сферы есть окружность, то (на основании предыдущего параграфа) любое сечение эллипсоида есть эллипс (в частном случае — окружность). Центру сферы, как точке, в которой все проходящие через нее хорды (диаметры) делятся пополам, соответствует центр эллипсоида, обладающий тем же свойством. Хорды, проходящие через центр эллипсоида, делятся в нем пополам и называются диаметрами эллипсоида. Плоские сечения, проходящие через центр эллипсоида, называются диаметральными. Каждое диаметральное сечение представляет собой эллипс, центром которого служит центр эллипсоида.

Представим себе какую-нибудь диаметральную плоскость сферы (черт. 47). Обозначим ее буквой α. Тогда для сферы имеем: диаметральная плоскость α делит пополам все перпендикулярные к ней хорды. Например, хорды AA_1, BB_1, ... перпендикулярны к плоскости α и делятся ею пополам. Этим хордам соответствуют параллельные хорды эллипсоида: $A'A_1'$, $B'B_1'$, ... (черт. 48). Последние делятся пополам диаметральной плоскостью α', аффинно-соответствующей плоскости α. Направление хорд эллипсоида ($A'A_1'$) называется сопряженным его диаметральной плоскости α. Таким образом, имеем:

Диаметральная плоскость эллипсоида делит пополам сопряженные ей хорды.



Черт. 47.

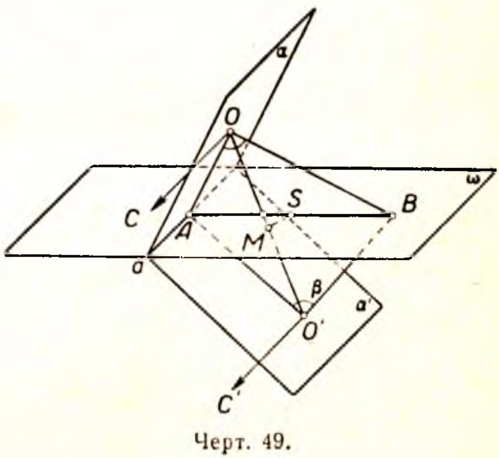


Черт. 48.

Сопряженное направление, вообще говоря, не перпендикулярно к соответствующей диаметральной плоскости, так как перпендикулярность не есть инвариант аффинитета. Поэтому возникает вопрос о существовании у эллипсоида направлений, одновременно сопряженных и перпендикулярных диаметральной плоскости. Такие направления называются главными.

На этот вопрос легко ответить, рассматривая эллипсоид как поверхность, аффинно-соответственную сфере.

Пусть центру сферы O соответствует в родстве центр эллипсоида O' (черт. 49). Тогда прямая OO' дает направление перспективно-аффинного соответствия. Предположим, что диаметр сферы OB перпендикулярен к диаметральной плоскости α. Соответствующий ему диаметр $O'B$ эллипсоида по предположению должен быть перпендикулярным к диаметральной плоскости α'. Линия пересе-



Черт. 49.

чения a соответственных диаметральных плоскостей сферы и эллипсоида лежит в двойной плоскости ω. В той же плоскости лежит точка пересечения соответственных диаметров B.

Диаметры OB и $O'B$ определяют проходящую через них плоскость, перпендикулярную к линии a, а следовательно, перпендикулярную также и к плоскости ω. Обозначим эту плоскость буквой β. Плоскость β пересекает прямую a в точке A, а плоскости α и α' — по прямым OA и $O'A$.

В четырехугольнике $AO'BO$ два противолежащих угла прямые

$$\angle AO'B = \angle AOB = 90^\circ.$$

Следовательно, около него можно описать круг. Зная центр S этого круга, можем определить точки A и B, т. е. искомое направление диаметра OB. Так как круг, описанный около четырехугольника $AO'BO$, пройдет через вершины O' и O, то отрезок $O'O$ является хордой круга. Поэтому делим $O'O$ пополам в точке M и восставляем перпендикуляр MS до пересечения в точке S с прямой AB. Описывая круг с центром в точке S и радиусом $SO(=SO')$, находим точки A и B.

Итак, для определения диаметра OB можем проделать следующее построение: через OO' проводим плоскость β, перпендикулярную к двойной плоскости ω; затем в плоскости β через середину M отрезка OO' проводим перпендикуляр к $O'O$; последний пересекает плоскость ω в точке S; наконец, круг из S радиусом SO' пересекает плоскость ω в искомых точках A и B. Каждая из этих точек дает решение задачи. Нетрудно видеть, что третье решение дает направление OC, перпендикулярное к плоскости β. В самом деле, плоскость β сама себе соответствует, и перпендикулярному к ней направлению OC соответствует направление $O'C'$, причем $O'C' \parallel OC \parallel \omega$. Следовательно, $O'C' \perp \beta$.

Таким образом, имеется всего три диаметра эллипсоида, обладающих тем свойством, что каждый из них перпендикулярен к сопряженной ему диаметральной плоскости. Эти три диаметра называются **осями эллипсоида**. Как видно из чертежа 49, оси $O'A$, $O'B$ и $O'C'$ эллипсоида взаимно перпендикулярны и диаметральная плоскость, сопряженная одному из них, содержит два других. Три диаметральные плоскости, проходящие через каждую пару осей, называются **главными диаметральными плоскостями** или **главными сечениями эллипсоида**.

Обозначим длины полуосей эллипсоида, расположенных на главных направлениях $O'A$, $O'B$ и $O'C'$, соответственно через a, b и c. Так как прямая $O'C'$ параллельна OC, то полуось c эллипсоида равна радиусу r сферы. Из двух других полуосей a и b одна больше, другая меньше радиуса r. В этом легко убедиться, рассматривая чертеж 50, который дает построение полуосей эллипсоида, лежащих в плоскости β.

На чертеже 50 построен четырехугольник $AO'BO$ с двумя прямыми углами при вершинах O' и O. Пусть $OP = OQ = r$. Тогда

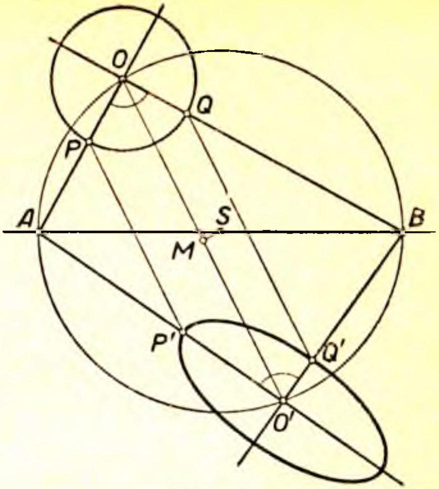
$$\frac{OP}{O'P'} = \frac{OA}{O'A}; \quad \frac{OQ}{O'Q'} = \frac{OB}{O'B}.$$

Но

$$\breve{OA} + \breve{OB} = \breve{O'A} + \breve{O'B} = \pi r.$$

Следовательно, если $\breve{O'A} > \breve{OA}$, то $\breve{O'B} < \breve{OB}$. Поэтому и для хорд имеем: если $O'A > OA$, то $O'B < OB$.

Отсюда и заключаем, что справедливы либо неравенства:



Черт. 50.

$$O'P' > OP, \qquad O'Q' < OQ,$$

либо обратные им. Это значит, что

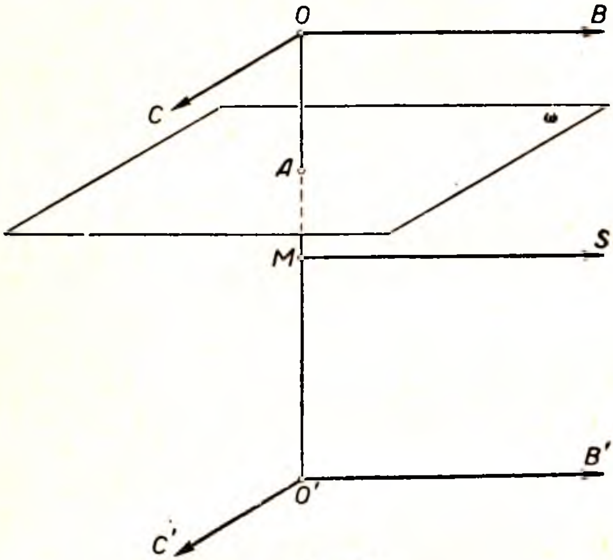
$$O'P' > r > O'Q' \qquad \text{или} \qquad O'P' < r < O'Q'.$$

Возвращаемся к чертежу 49.

Из трех полуосей a, b и c эллипсоида последняя (расположенная по направлению $O'C'$) является средней по величине, так как она равна радиусу r сферы.

В частном случае направление OO' перспективно-аффинного соответствия может быть перпендикулярно к плоскости ω (черт. 51). Тогда положение плоскости, проходящей через OO', становится неопределенным, так как всякая плоскость, проходящая через OO', перпендикулярна к плоскости ω. Поэтому направления перпендикуляров MS образуют целый пучок прямых, лежащих в плоскости, параллельной плоскости ω. В этом предельном случае вместо кругов, применявшихся выше, мы получаем самую прямую OO'. Таким образом, одно из решений дает точка пересечения прямой OO' с плоскостью ω. Если мы обозначим эту точку через A, то прямая OA (совпадающая с OO') дает одно из главных направлений. Остальные главные направления параллельны плоскости ω. Отсюда заключаем, что главная диаметральная плоскость, перпендикулярная к диаметру $O'A$, обладает тем же свойством, что два любых взаимно перпендикулярных ее диаметра $O'B'$ и $O'C'$ являются сопряженными. Следовательно, главное сечение эллипсоида, параллельное плоскости ω, есть круг. Нетрудно убедиться, что в этом случае и все вообще сечения эллипсоида плоскостями, параллельными плоскости ω, будут кругами (предоставляем это читателю). Другими словами, имеем **эллипсоид вращения** с осью OO'.

Еще более частный случай получаем, если середина M отрезка $O'O$ ($O'O \perp \omega$) лежит в плоскости ω. В этом случае перпендикуляры MS образуют пучок в плоскости ω. Поэтому все точки плоскости ω являются решениями, т. е. все направления суть глав-



Черт. 51.

ные. Читатель без труда обнаружит, что эллипсоид, обладающий таким свойством, есть сфера[1].

§ 14. Круговые сечения эллипсоида.

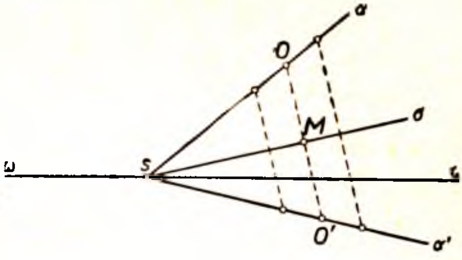
Так как каждое сечение сферы есть круг, то каждое сечение аффинно-соответственного ему эллипсоида есть, вообще говоря, эллипс. Возникает вопрос, имеет ли эллипсоид круговые сечения. Займемся разысканием последних.

Предположим, как и раньше, что эллипсоид с центром O' аффинно соответствует сфере с центром O (черт. 52). Произвольное сечение сферы плоскостью α дает круг. Если плоскости α соответствует плоскость α', то круговое сечение сферы проектируется параллельно направлению OO' на плоскость α'. Проектирующие образуют некоторый эллиптический цилиндр. Посмотрим, при каких условиях этот цилиндр пересекает плоскость α' по кругу.

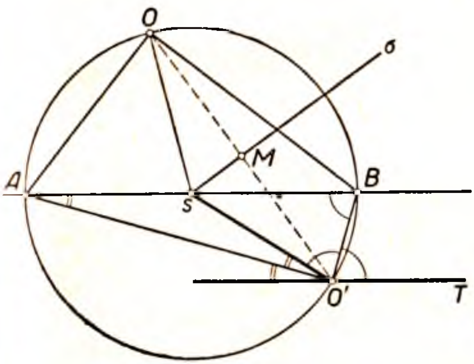
---

[1] В этом случае родственное соответствие представляет собой симметрию (зеркальное отражение) относительно плоскости ω.

Разделим в точке M отрезок OO' пополам и проведем через M плоскость σ, перпендикулярную образующим цилиндра. Предположим, что эта плоскость пересекает двойную плоскость ω по прямой s. Если сечение α проведем через O и s, то соответствующее сечение α' пройдет через O' и s. При этих условиях плоскости α и α' расположатся симметрично относительно плоскости σ и будут одинаково наклонены к образующим проектирующего цилиндра. Это означает, что оба сечения его плоскостями α и α' будут конгруентными, а так как первое есть всегда круг, то и второе также круг. Таким образом, мы построили круговое сечение, проходящее через центр эллипсоида. Второе круговое сечение получим в плоскости, параллельной плоскости ω. В самом деле, если секущая плоскость $\alpha \parallel \omega$, то и $\alpha' \parallel \omega$. Следовательно, α и α' суть два параллельных сечения проектирующего цилиндра и поэтому конгруентны. Оба сечения, очевидно, круговые.



Черт. 52.



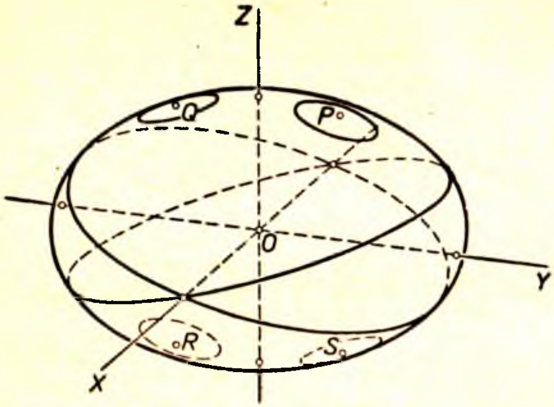
Черт. 53.

Сравнивая чертеж 52 с чертежом 49, замечаем, что плоскость σ, перпендикулярная к прямой OO', должна быть перпендикулярна и к плоскости β (черт. 49), а следовательно, она параллельна прямой OC. Так как плоскости σ и ω обе параллельны прямой OC, то последняя параллельна линии их пересечения, которая на чертеже 52 обозначена буквой s. Плоскость α' кругового сечения, проходя через s и O', должна пройти и через $O'C'$. Второе круговое сечение, параллельное плоскости ω, также проходит через $O'C'$. Таким образом, *оба круговых (центральных) сечения проходят через среднюю по величине* ($2c$) *ось эллипсоида.*

Обращаясь к чертежу 53, который представляет собой сечение сферы и эллипсоида плоскостью β, убеждаемся, что *оба круговых сечения одинаково наклонены к двум другим осям эллипсоида* ($O'A$) и ($O'B$).

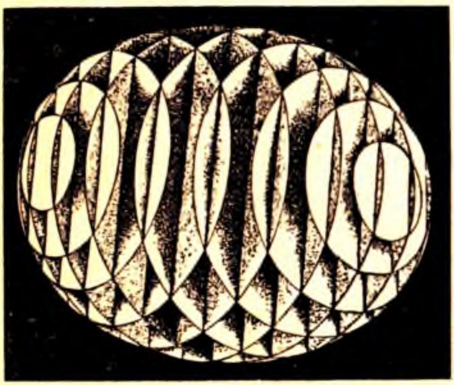
В самом деле, круговые сечения изобразятся на чертеже 53 прямыми $O's$ и $O'T'$, которые, как легко видеть, одинаково наклонены как к прямой $O'A$, так и к прямой $O'B$.

Итак, мы имеем два центральных круговых сечения эллипсоида. Нетрудно доказать, что всякое параллельное



Черт. 54.

им сечение есть также круговое. Для этого нужно только принять во внимание, что двум параллельным плоскостям аффинно соответствуют две параллельные плоскости и что два параллельных сечения эллипсоида подобны, так как подобны два соответствующих сечения сферы. Отсюда заключаем, что плоскости, параллельные центральным круговым сечениям, пересекают эллипсоид по кругам. Удаляя секущую плоскость от центра, получаем круги все меньшего радиуса. Наконец, в положении прикосновения плоскости к эллипсоиду будем иметь круг нулевого радиуса — точку прикосновения. Такая точка называется точкой округления. Эллипсоид имеет четыре точки округления соответственно двум системам круговых сечений (черт. 54).



Черт. 55.

С помощью круговых сечений может быть построена картонная модель эллипсоида (черт. 55)

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Какие свойства ромба сохраняются при аффинном преобразовании, а какие могут нарушиться?

2. Даны ось и направление перспективно-аффинного соответствия, а также прямая g. Требуется определить это соответствие (пару соответственных точек) при условии, что прямая g', соответствующая прямой g, перпендикулярна к последней.

3. Перспективно-аффинное соответствие дано осью и парой соответственных точек A и A'. Выбрав произвольную точку плоскости, построить ей соответственную, считая ее один раз точкой плоскости ω, а другой раз точкой плоскости ω'.

4. В каком случае оба построения соответственной точки (см. упр. 3) будут давать один и тот же результат?

5. Установить особенности перспективно-аффинного соответствия двух плоскостей в случае ортогонального проектирования одной плоскости на другую. Рассмотреть это соответствие в совмещенных плоскостях.

6. Показать, что любые два отрезка, делящие друг друга пополам, могут служить сопряженными диаметрами эллипса, который они определяют.

7. Построить произвольное число точек и оси эллипса, рассматривая его как кривую, аффинно-соответственную окружности.

8. Эллипс задан своими осями. Определить точки его пересечения с данной прямой (см. § 11).

9. Эллипс задан парой сопряженных диаметров. Построить касательные к эллипсу из данной точки (см. § 11).

10. Построить оси эллипса, заданного центром, точкой и двумя парами сопряженных направлений.

Указание. Воспользоваться перспективно-аффинным соответствием, в котором сопряженным направлениям эллипса соответствуют взаимно перпендикулярные направления соответственного круга.

11. По заданной большой оси и точке эллипса построить его малую ось.

12. Показать, что для любого данного треугольника можно построить перспективно-аффинный ему равносторонний треугольник.

13. Доказать, что около любого треугольника можно описать эллипс, центр которого служил бы центром тяжести площади этого треугольника. Можно ли вписать в данный треугольник эллипс, центр которого обладал бы тем же свойством?

14. Аффинное преобразование задано формулами:

$$x' = x + 5y - 7, \quad y' = 2x - 3y + 1;$$

а) написать формулы обратного преобразования;

б) написать уравнения прямых, соответствующих осям координат в обеих плоскостях ω и ω'.

в) найти координаты точек, соответствующих началу координат в обеих плоскостях.

15. В аффинном соответствии, установленном формулами:

$$2x' = x - 2y + 3, \quad y' = 2x + 3y - 1,$$

определить координаты неподвижной двойной точки.

16. Написать формулы преобразования зеркального отражения (осевой симметрии) плоскости, если осью симметрии служит ось координат OX (или OY).

17. Написать формулы преобразования гомотетии, центром которой служит начало координат O.

18. Написать формулы параллельного перенесения, в котором началу координат соответствует точка (3, —2).

19. В преобразованиях № 16, 17 и 18 исследовать вопрос о неподвижных точках.

20. Даны пара соответственных точек (A, A') и пара соответственных плоскостей (α, α') перспективно-аффинного преобразования пространства в себя. Указать построение, определяющее тождественную плоскость («плоскость родства») этого соответствия.

21. Даны тождественная плоскость и пара соответственных точек (M, M') перспективно-аффинного преобразования пространства в себя. Указать построение фигуры, родственной данной пирамиде $SABCD$, стоящей на плоскости родства.

22. Перспективно-аффинное преобразование пространства в себя определено тождественной плоскостью и парой соответственных точек (A, A'). Даны плоскость α и окружность k на ней. Требуется при помощи построения определить фигуру, родственную конусу с вершиной A и основанием k.

23. Перспективно-аффинное преобразование пространства в себя определено тождественной плоскостью (ω) и парой соответственных точек (A, A'), причем $AA' \perp \omega$. Определить фигуру, родственную сфере с центром в точке A и радиусом, равным расстоянию этой точки до плоскости ω.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

§ 15. Евклидово пространство.

Все рассуждения и выводы предшествующей главы относились к обыкновенному евклидову пространству, с которым читатель познакомился еще в средней школе. В этой главе нам не приходилось делать каких-либо отступлений от привычных правил и воззрений элементарной геометрии на взаимоотношения элементов (точек, прямых и плоскостей) евклидова пространства.

В ближайшем будущем обстоятельства, о которых будет далее рассказано, заставят нас произвести некоторую «реконструкцию» евклидова пространства. Поэтому представляется целесообразным прежде всего напомнить, в чем же заключаются характерные особенности и свойства самого евклидова пространства.

Как известно, эти основные свойства могут быть выражены при помощи некоторой системы предложений, или *аксиом*, устанавливающих зависимости и отношения между элементами пространства.

Точки, прямые и плоскости евклидова пространства могут находиться в некотором взаимоотношении, которое принято обозначать словом и н ц и д е н т н о с т ь или п р и н а д л е ж н о с т ь. Само понятие инцидентности обладает свойством взаимности, т. е. если какой-либо элемент x принадлежит другому элементу y, то и элемент y принадлежит элементу[1] x.

Отношения принадлежности, имеющие место для элементов евклидова пространства, могут быть выражены следующими хорошо известными предложениями, в которых точки обозначены большими буквами латинского алфавита A, B, C,..., прямые — малыми буквами латинского алфавита a, b, c, ..., а плоскости — буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$.

1. Если точка (A) принадлежит прямой (a), а прямая (a) принадлежит плоскости (α), то точка (A) принадлежит плоскости (α).

2. Две различные точки (A, B) всегда принадлежат одной и той же, и только одной, прямой (a). Каждой прямой (a) принадлежат по крайней мере две точки (A, B).

---

[1] Это понятие инцидентности (принадлежности) заменяет такие понятия, как: «лежать на» (точка лежит на плоскости), «проходить через» (прямая проходит через точку). Вместо этого будем говорить: «точка принадлежит (инцидентна) плоскости», «прямая принадлежит (инцидентна) точке».

3. Три различные точки (A, B, C), не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной и той же, и только одной, плоскости.

4. Если две точки (A, B), принадлежащие прямой (a), принадлежат плоскости (α), то и прямая (a) принадлежит плоскости (α).

5. Если две плоскости (α, β) принадлежат одной точке (A), то они принадлежат также и другой точке (B).

6. Каждой плоскости (α) принадлежит точка (A). Существуют четыре точки (A, B, C, D), не принадлежащие одной плоскости (α).

Формулированные здесь предложения характеризуют отношения принадлежности, имеющие место в евклидовом пространстве. Их можно считать аксиомами принадлежности и вывести из них путем логических умозаключений другие предложения (теоремы) для элементов евклидова пространства.

Таким образом, может развертываться дальнейшее изучение отношений принадлежности. В частности (в евклидовом пространстве), имеем следующее:

1°. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать одной и той же точке (прямые пересекаются), но этого может и не быть (прямые параллельны).

2°. Две плоскости могут принадлежать одной и той же прямой (плоскости пересекаются), но этого может и не быть (плоскости параллельны).

3°. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать одной точке (прямая пересекает плоскость), но этого может и не быть (прямая параллельна плоскости).

В самом деле, в евклидовой плоскости две прямые либо пересекаются (принадлежат одной и той же точке), либо не имеют общей точки — в этом случае они называются параллельными.

А к с и о м а п а р а л л е л ь н о с т и утверждает, что *если a — произвольная прямая и A — не принадлежащая ей точка, то в плоскости α (которой принадлежат прямая a и точка A) существует лишь одна прямая, принадлежащая точке A и параллельная прямой a.*

Аналогичным образом в евклидовом пространстве две плоскости либо принадлежат одной и той же прямой, либо они параллельны. Прямая, не принадлежащая плоскости, либо пересекает последнюю (т. е. прямая и плоскость принадлежат одной и той же точке), либо они параллельны.

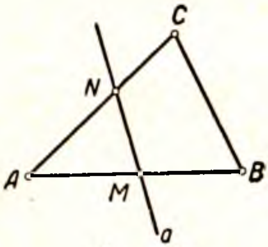
Черт. 56.

Напомним также о других свойствах евклидова пространства, которые характеризуют отношение порядка в расположении элементов.

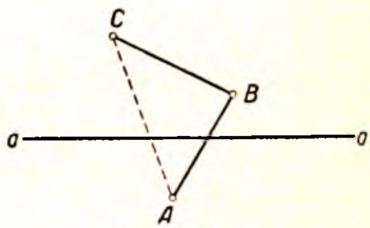
П о р я д о к в р а с п о л о ж е н и и т о ч е к н а п р я м о й х а р а к т е р и з у е т с я п о н я т и е м *между*. Если A, B и C — три различные точки прямой, то одна из них (например, B), и только одна, лежит между двумя другими (черт. 56). Между каждыми двумя точками прямой имеется точка, принадлежащая той же прямой. Все точки прямой, лежащие между точками A и B, образуют геометрическое место точек (множество), которое называется о т р е з к о м. Точки A и B называются концами отрезка AB. Все остальные точки прямой, не лежащие между точками A и B, не являются точками отрезка AB.

Расположение точек на плоскости характеризуется предложением, которое известно под названием а к с и о м ы П а ш а[1]. Эта аксиома заключается в следующем. *Пусть ABC — треугольник и a — прямая, принадлежащая плоскости ABC и не проходящая через вершины треугольника* (черт. 57). *Тогда прямая a либо пересекает две стороны треугольника, либо не пересекает ни одной.*

Так, например, на чертеже 57 прямая a пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках M и N.



Черт. 57.



Черт. 58.

Аксиома Паша приводит к следующим выводам о расположении точек плоскости. Если на плоскости имеем какую-либо прямую a (черт. 58), то эта прямая разбивает все точки плоскости (не принадлежащие прямой a) на две области. При этом точки одной и той же области называются «лежащими по одну сторону прямой a», а точки, принадлежащие разным областям, — «лежащими по разные стороны прямой a». Условимся относить точки B и C к одной области, так как прямая a не пересекает отрезка BC. Наоборот, точки A и B относим к разным областям, так как прямая a пересекает отрезок AB. Отметим, что точка A и всякая точка C, принадлежащая к той же области, что и точка B, будут принадлежать разным областям. Это прямо следует из аксиомы Паша. В самом деле, если точки A и B — в разных областях, а C и B — в одной, то прямая пересекает отрезок AB и не пересекает отрезок CB. Но, согласно аксиоме Паша, прямая a должна пересекать вторую сторону треугольника ABC, следовательно, она пересекает отрезок AC, т. е. точки A и C находятся в различных областях. Таким образом, каждая прямая (a) разбивает плоскость на две области, или на две «полуплоскости».

Нетрудно убедиться с помощью аналогичных рассуждений в том, что всякая плоскость (α) разбивает все точки пространства на две области, или на два «полупространства».

---

[1] По имени немецкого геометра M. Pasch'а.

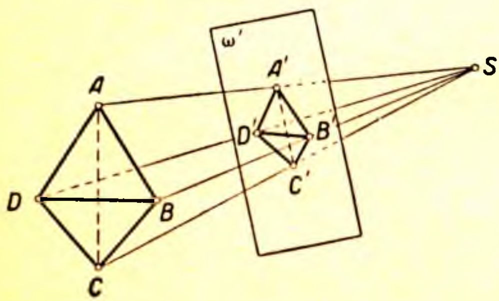
Этим кратким очерком свойств евклидова пространства мы и ограничимся, так как более детальное и глубокое изучение этих вопросов не входит в наши задачи и должно быть отнесено к курсу «Основания геометрии», с которым студенты педагогических институтов познакомятся на IV курсе.

Мы не затрагиваем здесь метрических свойств евклидова пространства, которые могут быть охарактеризованы отдельной группой аксиом (например, группой аксиом конгруентности). Вопросы метрической геометрии с проективной точки зрения будут рассмотрены в главе VI. Свойство непрерывности пространства рассматривается в § 19 настоящей главы.

§ 16. Метод центральной проекции в евклидовом пространстве. Введение несобственных элементов и построение проективного пространства.

1. В основу изучения проективной геометрии должен быть положен м е т о д ц е н т р а л ь н о й п р о е к ц и и, так как под проективными свойствами геометрических фигур разумеют те их свойства, которые сохраняются при всяком центральном проектировании.

Метод центральной проекции (или перспективы) заключается в следующем. Примем произвольную точку S пространства за центр проекций, а произвольную плоскость ω'—за плоскость проекций (или изображений). Для построения центральной проекции какой-либо точки A соединяем эту точку прямой линией AS с центром проекций S и находим точку A' пересечения этой прямой с плоскостью проекций ω' (черт. 59). Точка A' и называется ц е н т р а л ь н о й п р о е к ц и е й точки A.



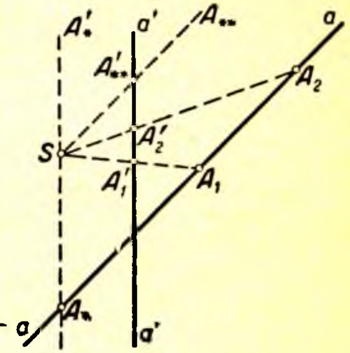
Черт. 59.

Если задана какая-либо фигура, например тетраэдр $ABCD$ (черт. 59), то, строя центральную проекцию каждой из его вершин описанным выше способом, получим на плоскости ω' фигуру $A'B'C'D'$ как центральную проекцию данного тетраэдра. Однако, как мы увидим, применение метода центральной проекции в евклидовом пространстве встречает существенные затруднения.

Рассмотрим сначала простейший случай.

Пусть имеем две пересекающиеся прямые a и a' (черт. 60). В плоскости, принадлежащей прямым a и a', возьмем произвольную точку S и будем из точки S проектировать точки прямой a на прямую a'. Так, проведя через точку A_1 луч SA_1, получим точку A_1' пересечения его с прямой a'. Точка A_1' является центральной проекцией точки A_1. Подобным же образом точка A_2' является центральной проекцией точки A_2 прямой a. Каждую из точек $A_1, A_2, \ldots$ мы будем называть «оригиналом», а каждую из точек $A_1', A_2', \ldots$ — «изображением» соответствующего оригинала[1].

Посмотрим, будет ли метод центральной проекции относить каждой точке-оригиналу определенную точку-изображение и, обратно, каждой точке-изображению точку-оригинал.



Черт. 60.

Как нетрудно видеть на чертеже, мы будем иметь следующие два случая нарушения такой взаимной однозначности. Рассмотрим на прямой a точку A_*, для которой соответствующий луч SA_* параллелен прямой a'. Так как на евклидовой плоскости параллельные прямые не имеют общей точки (не пересекаются), то на прямой a' не имеется точки-изображения, для которой A_* служила бы оригиналом. Аналогичным образом рассматривая точку A'_{**} прямой a', заметим, что для этой точки-изображения не существует на прямой a точки-оригинала, так как луч SA'_{**} параллелен прямой a.

Таким образом, точечное соответствие, установленное с помощью центральной проекции, обладает существенными дефектами, без устранения которых применение метода центральной проекции является неудобным. Другими словами, для изучения проективных свойств фигур евклидово пространство должно подвергнуться некоторой реконструкции. В результате этой реконструкции должно быть построено такое геометрическое пространство, в котором метод центральной проекции находил бы свое полное осуществление, свободное от каких-либо дефектов.

2. Обратимся теперь к вопросу о построении такого пространства. Мы придем к нему в результате изучения метода центральной проекции в евклидовом пространстве. В частности, уже рассмотренный ранее чертеж 60 может служить нам для этой цели. В самом деле, из этого чертежа видно, что дефекты соответствия, установленного между точками прямых a и a' с помощью метода центральной проекции, были бы устранены, если бы точке-оригиналу A_* соответствовала точка-изображение A'_*, а точке-изображению A'_{**} соответствовала бы точка-оригинал A_{**}. Эти недостающие точки должны быть присоединены к евклидову

[1] Употребляются также термины «прообраз» (точка A_1) и «образ» (точка A'_1).

пространству. Мы сделаем это таким образом, чтобы отношения принадлежности элементов евклидова пространства, формулированные в системе аксиом принадлежности (§ 15), не были нарушены. Наоборот, при введении новых элементов эти отношения принадлежности получат более полное выражение, свободное от исключений.

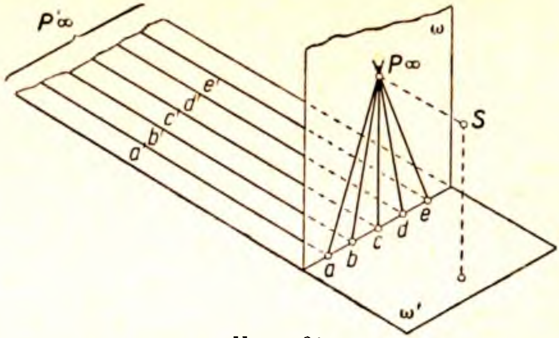
Посмотрим, каким образом на чертеже 60 определяется точка-изображение для данной точки-оригинала. Если, например, речь идет о точке A_1, то для нее точкой-изображением является A'_1 — точка пересечения проектирующего луча SA_1 с прямой a'. Таков закон построения точек-изображений. Применяя его к точке A_*, мы определяем соответствующую точку-изображение A'_* как точку пересечения проектирующего луча SA_* с прямой a'. Таким образом, новая точка A'_* должна принадлежать двум параллельным прямым $SA_* \parallel a'$. Будем называть каждую точку, вновь присоединяемую к евклидову пространству, н е с о б с т в е н н о й т о ч к о й, в то время как точки самого евклидова пространства будем называть о б ы к н о в е н н ы м и или с о б с т в е н н ы м и.

Совершенно аналогично стоит вопрос о присоединении точки-оригинала A_{**}, соответствующей точке-изображению A'_{**}. Такая несобственная точка A_{**} должна принадлежать прямой a (как всякая точка-оригинал) и проектирующему лучу SA'_{**}, следовательно, она является точкой пересечения двух параллельных прямых $SA'_{**} \parallel a$. Теперь становится ясно, в каком направлении должна производиться реконструкция евклидова пространства, пополняемого несобственными элементами. Целесообразно множество точек, принадлежащих евклидовой прямой, дополнить несобственной точкой, которая должна вместе с тем принадлежать всем прямым, параллельным данной прямой. Единственность несобственной точки прямой обусловливается тем, что в пучке с центром S существует лишь одна прямая, параллельная прямой a (или a'). Принадлежность несобственной точки прямой всем прямым, параллельным данной, обусловливается тем, что каждые две из них могут быть приняты за прямые a и SA'_{**} (или a' и SA_*).

Таким образом, мы приходим к выводу о необходимости дополнить каждую прямую евклидова пространства одной несобственной точкой, которая вместе с тем принадлежала бы всем прямым, параллельным данной.

3. Представим себе совокупность прямых, параллельных одной какой-либо прямой и лежащих в плоскости ω' (черт. 61). Пусть это будут прямые: $a' \parallel b' \parallel c' \parallel d' \parallel e' \parallel \ldots$. Всем им должна принадлежать одна и та же несобственная точка [1] P'_∞. С другой

[1] Такое обозначение объясняется тем, что несобственные точки (а также прямые и плоскость проективного пространства) часто называют бесконечно удаленными. Из чертежа 60 видно, что, в то время как проектирующий луч SA'_1A_1 вращается против часовой стрелки, точка $A'_1 \to A'_{**}$, а точка $A_1 \to \infty$.



Черт. 61.

стороны, всякая прямая плоскости ω′, проходящая через несобственную точку P'_∞, должна быть параллельна прямым (a', b', c'...) рассматриваемой совокупности, так как она лежит с этими прямыми в одной плоскости и не имеет с ними общих точек в евклидовом пространстве. Таким образом, все прямые, проходящие через несобственную точку P'_∞ и лежащие в плоскости ω′, образуют совокупность параллельных между собой прямых. Поэтому такую совокупность прямых можно назвать пучком прямых с несобственным центром (P'_∞).

Будем проектировать прямые a', b', c', . . . этого пучка из центра S на плоскость ω. Тогда проектирующий луч SP'_∞, параллельный всем прямым пучка (P'_∞), имеет с ними общую точку — несобственную точку P'_∞. Точка пересечения P_∞ проектирующего луча SP'_∞ с плоскостью изображений ω является изображением (проекцией) несобственной точки P'_∞ на плоскости ω. Таким образом, пучок параллельных прямых с несобственным центром P'_∞ на плоскости ω′ изобразится пучком прямых, имеющих собственный центр P_∞ на плоскости ω. Это указывает на равноправность (в отношении центрального проектирования) несобственных точек реконструированного пространства с обыкновенными точками.

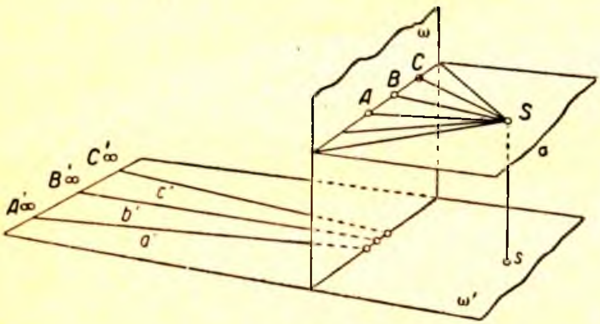
Вместе с тем рассмотренный пример показывает, что в реконструированном пространстве центральная проекция пучка прямых всегда является пучком прямых с собственным или несобственным центром, в то время как в евклидовом пространстве пучок прямых (например, пучок (P_∞) плоскости ω) может спроектироваться на плоскости ω′ совокупностью прямых, не имеющих общей точки (т. е. параллельных).

Рассмотрим теперь совокупность прямых, параллельных одной прямой в пространстве.

В реконструированном пространстве совокупность всех прямых, параллельных одной прямой, имеет несобственную точку, принадлежащую всем прямым совокупности. Такую совокупность параллельных прямых пространства естественно назвать связкой прямых, а их общую несобственную точку — центром связки. Таким образом, наряду с обыкновенными связками прямых, имеющими собственный центр, в новом пространстве будем иметь связки с несобственным центром, т. е. совокупность параллельных между собой прямых.

Таковы первые результаты конструирования нового пространства. Они являются следствием присоединения к каждой евклидовой прямой несобственной точки.

4. Обратимся теперь к исследованию плоскости в новом пространстве и поставим вопрос о ее несобственных элементах. Другими словами, поставим вопрос о том, каково должно быть геометрическое место несобственных точек плоскости. Так как каждая прямая имеет одну несобственную точку, то отсюда можно заключить, что геометрическое место несобственных точек плоскости должно пересекаться каждой прямой той же плоскости в одной точке. Этому условию можно удовлетворить, принимая, что геометрическое место несобственных точек плоскости само является прямой линией, которую будем называть несобственной прямой данной плоскости.



Черт. 62.

К тем же выводам можно прийти и из других соображений, в частности из необходимости обеспечить применение метода центральной проекции. В самом деле, рассмотрим несобственные точки плоскости ω′, которые будем проектировать из центра S на плоскость изображений (проекций) ω (черт. 62). Каждая несобственная точка плоскости ω′ определяется прямой линией, которой эта точка принадлежит. Так, точка A'_∞ принадлежит прямой a', точка B'_∞ — прямой b' и т. д.

Чтобы провести из центра S проектирующий луч в несобственную точку A'_∞, мы строим прямую $SA \parallel a'$. Далее, находим точку A пересечения проектирующего луча SA'_∞ с плоскостью ω. Точка A является изображением (проекцией) несобственной точки A'_∞. Аналогично построим изображения других несобственных точек плоскости ω' с помощью проектирующих лучей SB'_∞, SC'_∞, ... Так как все проектирующие лучи параллельны плоскости ω, то они лежат в одной (проектирующей) плоскости σ. Геометрическое место изображений A, B, C, ... несобственных точек плоскости ω' представляет собой прямую линию пересечения плоскости ω с плоскостью σ. Эта прямая должна служить изображением геометрического места несобственных точек плоскости ω'. С другой стороны, последнее должно быть линией пересечения параллельных плоскостей σ и ω'. Мы знаем, что в евклидовом пространстве такой линии не имеется. Она должна быть присоединена как несобственная прямая, принадлежащая плоскостям ω' и σ, т. е. как прямая линия их пересечения. Таким образом, основываясь на принципе применимости метода центральной проекции и сохранения отношений принадлежности элементов пространства, мы приходим к выводу, что реконструкция евклидовой плоскости должна выразиться в присоединении к этой плоскости несобственной прямой, являющейся геометрическим местом несобственных точек плоскости. Так как любые две параллельные плоскости должны удовлетворять тем же требованиям (что и плоскости ω' и σ), то сказанное относится ко всем плоскостям евклидова пространства. Благодаря введению несобственной прямой на каждой евклидовой плоскости в реконструированном пространстве совокупность плоскостей, параллельных одной плоскости, представляет собой пучок плоскостей, осью которого является несобственная прямая, принадлежащая всем плоскостям совокупности. Таким образом, наряду с пучками плоскостей, имеющими в качестве оси обыкновенную или собственную прямую, будем иметь пучки параллельных плоскостей с несобственной осью.

5. Изучение метода центральной проекции в евклидовом пространстве дало нам указания о целесообразной реконструкции последнего. Именно целесообразно, как мы видели, дополнить каждую прямую несобственной точкой, а каждую плоскость — несобственной прямой.

Возникает вопрос о том, что же будет представлять собой геометрическое место всех несобственных элементов пространства. Это геометрическое место должно обладать следующими свойствами: оно пересекается с каждой прямой в одной точке (несобственной точке этой прямой) и с каждой плоскостью по одной прямой (несобственной прямой этой плоскости). Очевидно, что этим требованиям можно удовлетворить, присоединяя к евклидову пространству несобственную плоскость как геометрическое место всех несобственных точек и прямых.

Приступая к фактическому осуществлению реконструкции евклидова пространства, мы, таким образом, вводим новые понятия, которые называем несобственными точками, несобственными прямыми и несобственной плоскостью.

Каждой связке параллельных прямых сопоставляется одна несобственная точка. Каждому пучку параллельных плоскостей сопоставляется одна несобственная прямая.

Отношения принадлежности (инцидентности) собственных и несобственных элементов определяются следующим образом:

несобственная точка считается принадлежащей к собственной прямой, если последняя входит в состав связки параллельных прямых, соответствующей несобственной точке, и только в этом случае;

несобственная прямая считается принадлежащей к собственной плоскости, если последняя входит в состав пучка параллельных плоскостей, соответствующего несобственной прямой, и только в этом случае;

несобственная точка считается принадлежащей несобственной прямой, если собственные прямые, образующие связку параллельных прямых, соответствующую несобственной точке, принадлежат собственным плоскостям пучка параллельных плоскостей, соответствующего несобственной прямой, и только в этом случае;

все несобственные точки и несобственные прямые принадлежат несобственной плоскости, не имеющей других точек и прямых, ей принадлежащих.

На этом реконструкция евклидова пространства заканчивается. Полученное путем присоединения к нему несобственных элементов новое пространство называется **проективным пространством**. В самом деле, в этом пространстве полностью осуществляется метод центральной проекции[1].

Проективное пространство, как и пространство Евклида, является одной из геометрических моделей материального физического мира и по своим свойствам вполне пригодно для изучения проективных свойств геометрических фигур. Свойства этого пространства мы рассмотрим более подробно в следующих параграфах.

§ 17. Отношения принадлежности элементов проективного пространства.

1. Присоединение несобственных элементов к евклидову пространству было выполнено при условии сохранения свойств взаимопринадлежности между точками, прямыми и плоскостями евклидова пространства. Вместе с тем введение новых несобственных элементов, устранив исключения, придает бóльшую общность основным предложениям (аксиомам) евклидова пространства (§ 15).

Так, наряду с предложением:

1. *Две различные точки (A и B) всегда принадлежат одной и той же, и только одной, прямой (a)* — можно сформулировать аналогичное предложение для плоскостей:

[1] Можно построить проективное пространство независимо от евклидова на базе системы аксиом проективного пространства (см. об этом стр. 88—89).

2. *Две различные плоскости* (α *и* β) *всегда принадлежат одной и той же, и только одной, прямой* (a).

Это предложение не было бы справедливо в евклидовом пространстве, так как в случае параллельности плоскостей α и β, очевидно, не существует евклидовой прямой, принадлежащей обеим плоскостям. В новом (проективном) пространстве, как мы знаем, такая прямая существует — это несобственная прямая, принадлежащая пучку параллельных плоскостей, в число которых входят плоскости α и β. Подобным же образом можно убедиться, что в новом пространстве наряду с предложением, справедливым в евклидовом пространстве:

3. *Точка* (A) *и не принадлежащая ей прямая* (b) *всегда принадлежат одной и той же, и только одной, плоскости* (α), может быть сформулировано еще следующее утверждение:

4. *Плоскость* (α) *и не принадлежащая ей прямая* (b) *всегда принадлежат одной и той же, и только одной, точке* (A).

Это последнее предложение, очевидно, не во всех случаях справедливо в пространстве Евклида, так как прямая может быть параллельна плоскости. В проективном пространстве, наоборот, предложение 4 является всегда справедливым, так как в случае параллельности плоскости и прямой им принадлежит несобственная точка последней.

2. Чтобы убедиться в справедливости утверждений 1, 2, 3 и 4 для всех элементов (как собственных, так и несобственных) построенного проективного пространства, рассмотрим подробнее различные возможные случаи.

Прежде всего установим, каким образом могут быть определены (или заданы) несобственные элементы пространства.

Несобственная точка A_∞ может быть задана собственной прямой a, которой она принадлежит (и вообще всякой прямой, входящей в состав связки параллельных прямых с несобственным центром A_∞).

Несобственная прямая i_∞ может быть задана двумя (непараллельными) собственными прямыми a и b, определяющими несобственные точки A_∞ и B_∞ прямой i_∞.

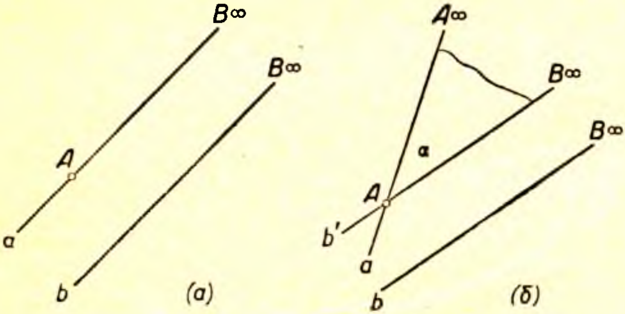
Точно так же можно определить несобственную прямую i_∞ с помощью собственной плоскости α, которой она принадлежит, а также любой плоскостью, входящей в состав пучка параллельных плоскостей с несобственной осью i_∞.

Таким образом, несобственные элементы проективного пространства могут быть определены (заданы) с помощью собственных элементов.

Переходим к рассмотрению предложений 1, 2, 3 и 4. Посмотрим, как построить прямую, принадлежащую точкам A и B, в том случае, когда одна из этих точек или обе являются несобственными.

Пусть имеем обыкновенную точку A и несобственную точку B_∞, заданную собственной прямой b (черт. 63, a). Чтобы построить прямую, принадлежащую точкам A и B_∞, проводим через A прямую a, параллельную b. Эта прямая a является искомой, так как она принадлежит точкам A и B_∞.

Переходим ко второму случаю. Несобственные точки A_∞ и B_∞ определяются двумя (непараллельными) собственными прямыми a и b (черт. 63, *б*). Через произвольную точку A прямой a проводим прямую b', параллельную прямой b. Эта прямая проходит через точку B_∞. Тогда плоскость α, принадлежащая прямым a и b', проходит через точки A_∞ и B_∞. Следовательно, точки A_∞ и B_∞ принадлежат несобственной прямой i_∞ плоскости α. Эта прямая и является искомой.



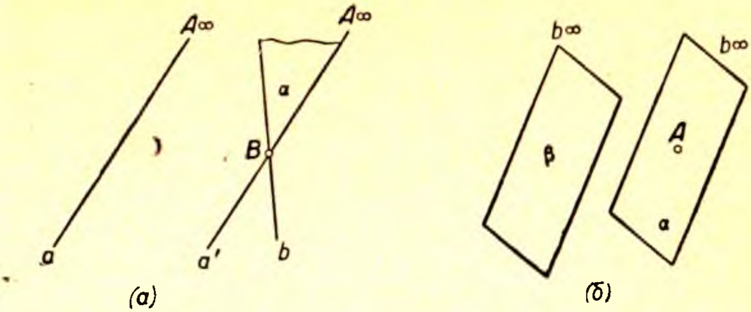
Черт. 63.

Таким образом, предложение справедливо для любых двух точек проективного пространства.

Рассмотрим далее предложение 2. Если обе плоскости (α и β) собственные, то, как мы уже говорили, они имеют общую прямую во всех случаях (в том числе, если $\alpha \parallel \beta$). Если же одна из них (например, α) несобственная, то общей прямой двух этих плоскостей является несобственная прямая, принадлежащая плоскости β. Этим исчерпываются все возможные случаи, так как обе данные плоскости не могут быть несобственными и в то же время различными.

Переходим к предложению 3. Если данная точка A_∞ несобственная (задана прямой a), а прямая b собственная, то плоскость α определяется следующим образом (черт. 64, *а*). Через произвольную точку B прямой b проводим прямую $a' \parallel a$. Тогда пара пересекающихся прямых b и a' определяет принадлежащую им единственную плоскость α. Последняя принадлежит прямой b и точке A_∞ как несобственной точке прямой a'.

Если точка A собственная, а прямая b_∞ несобственная, то искомая плоскость находится следующим образом. Пусть несобственная прямая b_∞ определена плоскостью β как несобственная прямая этой плоскости (черт. 64, *б*). Тогда через данную точку A проводим плоскость $\alpha \parallel \beta$. Эта плоскость α и есть искомая, так как она проходит через точку A и через прямую b_∞.



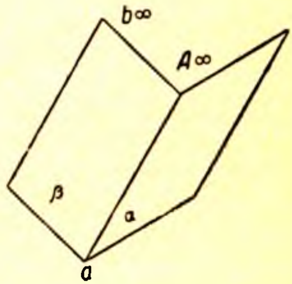
Черт. 64.

Если же точка A_∞ и прямая b_∞ несобственные, то они принадлежат несобственной плоскости α_∞ пространства.

Предложение 4 справедливо в евклидовом пространстве, если данная прямая b не параллельна плоскости α. В проективном пространстве предложение 4 справедливо и в последнем случае, причем искомая точка является несобственной точкой (A_∞).

Предположим, что прямая b_∞ — несобственная — задана принадлежащей ей собственной плоскостью β. Плоскость α пересекается с плоскостью β по собственной прямой a. Несобственная точка A_∞ прямой a принадлежит как прямой b_∞, так и плоскости α, следовательно, она является искомой (черт. 65).

Если плоскость α_∞ несобственная, а прямая b собственная, то несобственная точка прямой b принадлежит плоскости α_∞, следовательно, она является искомой.



Черт. 65.

Наконец, заметим, что случай несобственной прямой b_∞ и несобственной плоскости α_∞ невозможен, так как по условию предложения 4 прямая не должна принадлежать плоскости.

Таким образом, анализ предложений 1, 2, 3 и 4 показывает справедливость их для собственных и несобственных элементов проективного пространства (в любом сочетании этих элементов). С точки зрения отношений принадлежности несобственные элементы ничем не отличаются от собственных.

3. Дополним разобранную систему предложений принадлежности следующим предложением:

5. *Существуют четыре точки, не принадлежащие как одной прямой, так и одной плоскости.*

Справедливость этого предложения как для евклидова, так и для проективного пространства очевидна.

Однако при самостоятельном построении проективного пространства на основе системы аксиом предложение 5 должно быть учтено.

Систему предложений 1—5 вместе с предложением 1 § 15 можно принять в качестве группы аксиом принадлежности проективного пространства. Тогда из них могут быть выведены дальнейшие предложения (теоремы) о свойствах принадлежности элементов проективного пространства. Не углубляясь в этот вопрос, мы докажем с помощью подобного рассуждения следующие теоремы:

I. *Три различные точки A, B и C, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной, и только одной, плоскости.*

В самом деле, существует прямая AB, принадлежащая точкам A и B (предложение 1). Эта прямая и точка C принадлежат единственной плоскости α (предложение 3). Следовательно, точки A, B и C принадлежат одной, и только одной, плоскости.

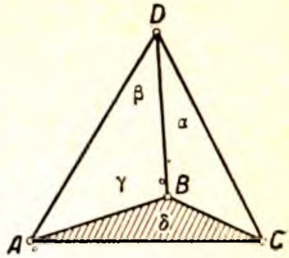
II. *Три различные плоскости α, β и γ, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной, и только одной, точке.* Рассуждение аналогично предыдущему. Плоскости α и β принадлежат одной прямой (предложение 2). Эта прямая и плоскость γ принадлежат единственной точке (предложение 4). Следовательно, существует одна, и только одна, точка, принадлежащая плоскостям α, β и γ.

Следует заметить, что мы вывели эти теоремы из системы 1—5 аксиом проективного пространства и, следовательно, они должны быть справедливы для элементов проективного пространства. В евклидовом пространстве теорема I также выполняется, в то время как теорема II не всегда справедлива. Так, например, три плоскости, являющиеся гранями призмы, не принадлежат одной точке. В проективном пространстве они пересекаются в несобственной точке пересечения ребер этой призмы.

Докажем еще следующую теорему:

III. *Существуют четыре плоскости, не принадлежащие одной точке и не принадлежащие одной прямой.*

На основании предложения 5 существуют четыре точки, не принадлежащие как одной плоскости, так и одной прямой. Никакие три из этих четырех точек не могут принадлежать одной прямой, так как в этом случае такая прямая вместе с четвертой точкой принадлежала бы определенной плоскости (предложение 3) и, следовательно, все четыре точки принадлежали бы одной плоскости. Обозначим четыре точки, не принадлежащие как одной плоскости, так и одной прямой, буквами A, B, C, D (черт. 66). На основании теоремы I каждые три из них принадлежат определенной плоскости. Следовательно, будем иметь четыре различные плоскости (число сочетаний из 4 по 3). Обозначим эти плоскости буквами α, β, γ и δ. Каждые две из них должны принадлежать определенной прямой (предложение 2). Нетрудно видеть, что этими прямыми являются прямые, определяемые парами данных точек (предложение 1). Например, плоскости γ и δ принадлежат прямой AB, так как эта прямая имеет с каждой из них две общие точки и, следовательно, не может не принадлежать каждой из них (предложение 4). Другой прямой, которая принадлежала бы плоскостям γ и δ, быть не может (предложение 2). С другой стороны, аналогичным образом можно доказать, что CD является единственной прямой, принадлежащей плоскостям α и β. Прямые AB и CD различны, так как в противном случае четыре точки A, B, C, D лежали бы на одной прямой. Следовательно, плоскости α, β, γ и δ не принадлежат одной прямой.



Черт. 66.

Докажем, что они не принадлежат одной точке.

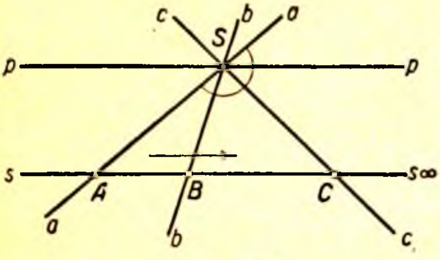
Плоскости α, β, γ принадлежат определенной точке (теорема II). Этой общей точкой является точка D. Плоскость δ не может принадлежать точке D, так как в этом случае четыре данные точки A, B, C, D принадлежали бы одной плоскости δ. Следовательно, плоскости α, β, γ, δ не могут принадлежать одной точке.

4. Изложенная здесь система предложений принадлежности, как уже было сказано, может служить группой аксиом, из которых логическим путем выводятся другие свойства отношений принадлежности элементов. Однако эта система далеко не достаточна для построения проективного пространства с помощью логических заключений. Это можно с большой наглядностью демонстрировать на следующем примере. Представим себе, что точками, прямыми и плоскостями нашего «пространства» являются в е р ш и н ы, р е б р а и г р а н и тетраэдра (черт. 66). Тогда, как легко видеть, все аксиомы принадлежности будут выполняться для этих элементов. Но само пространство будет содержать лишь четыре точки, шесть прямых и четыре плоскости. Читатель без труда убедится в этом, рассматривая чертеж 66.

§ 18. Отношения порядка элементов проективного пространства.

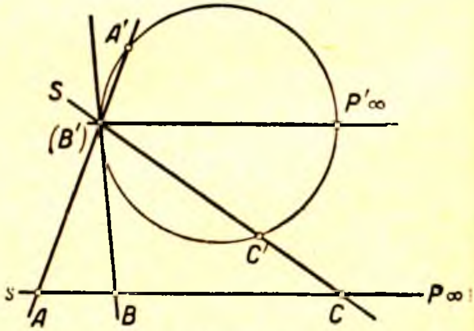
1. Заметим прежде всего, что, дополнив евклидову прямую несобственной точкой, мы получили з а м к н у т у ю линию, точки которой можно привести во взаимно однозначное соответствие с прямыми пучка.

В самом деле, если s — прямая, а S — центр пучка (черт. 67), то через каждую точку (например, A) прямой s проходит один луч (a) пучка S. Обратно, каждый луч (например, b) пучка S пересекает в определенной (одной) точке (B) прямую s. При этом, конечно, луч p, параллельный прямой s, пересекает последнюю в несобственной точке P_∞. Такое расположение точек прямой s и прямых пучка S называется перспективным. Пучок прямых S может быть описан вращением луча на $180°$. Так, повернув луч a на $180°$, мы опишем весь пучок и снова придем в первоначальное положение. Соответствующая точка пересечения A пробежит всю прямую s и придет в первоначальное положение A.



Черт. 67

Особенно наглядно свойство проективной прямой как замкнутой линии обнаруживается в том факте, что точки проективной прямой могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с точками окружности. Это может быть сделано следующим образом. Поместим центр проектирующего пучка S в какой-нибудь точке окружности (черт. 68). Тогда каждый луч пучка S пересекает окружность (кроме точки S) еще в одной точке. Луч SB, касательный к окружности, пересекает ее вторично в точке S. Это позволяет установить взаимно однозначное соответствие точек прямой с точками окружности, в котором точкам $A, B, C, \ldots, P_\infty, \ldots$ прямой соответствуют точки $A', B', C', \ldots, P'_\infty, \ldots$ окружности.



Черт. 68.

Произвольная точка A' окружности не разбивает ее на две части. Подобным же образом точка A проективной прямой не разбивает последней на две части.

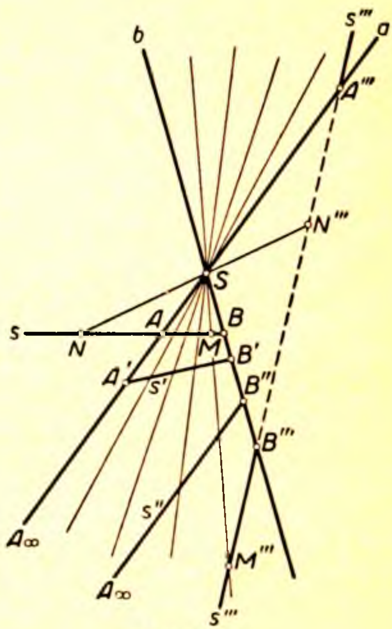
Отметим две какие-нибудь точки A и C на прямой s. На окружности им соответствуют точки A' и C'. Точки A, C разбивают прямую s на две части, или на два отрезка. Один из них не содержит несобственной точки P_∞ и совпадает с обычным отрезком AC в евклидовой плоскости. Другой отрезок замкнутой прямой s содержит несобственную точку P_∞. Мы будем обозначать для отличия этот отрезок так: $A \infty C$. Таким образом, каждая пара точек определяет на проективной прямой s два отрезка. Это разбиение прямой на два отрезка особенно наглядно отображается на окружности. Отрезку AC прямой s соответствует дуга $A'B'C'$ окружности, а отрезку $A \infty C$ прямой s — дуга $A'P'_\infty C'$ окружности.

Так как между точками прямой и прямыми пучка можно установить взаимно однозначное соответствие, то две прямые a и c пучка разбивают последний на две части, или на два угла (черт. 67). Один из этих углов не содержит прямой p (он соответствует отрезку AC), второй угол содержит прямую p (он соответствует отрезку $A \infty C$).

Следует иметь в виду, что в приведенных рассуждениях прямая s мыслится как множество принадлежащих ей точек (прямолинейный ряд точек), в то же время пучок S представляется в виде множества прямых, принадлежащих точке S.

Две точки A и C прямой s разбивают множество точек этой прямой на два класса. Каждый из последних образует о т р е з о к прямой s, причем к отрезку следует отнести и делящие точки A, C, которые называются к о н ц а м и отрезка. Таким образом, получаем отрезки AC и $A \infty C$.

Аналогичным образом углы (ac) и (apc) представляют собой множества прямых, принадлежащих точке S. Так как все точки прямой (в том числе и несобственная точка) совершенно равноправны в проективном отношении, то то же самое можно сказать и об отрезке AC и $A \infty C$.

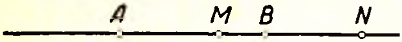


Черт. 69.

2. Рассмотрим центральную проекцию какого-либо отрезка AB прямой s на другую прямую (черт. 69). Проектируя из центра S отрезок AB на прямую s', получим отрезок $A'B'$. Проекция отрезка AB на прямую s'', параллельную прямой a, представится отрезком $A \infty B''$, один конец которого A_∞ является несобственной точкой. Наконец проекция того же отрезка AB на прямую s''' дает отрезок $A''' \infty B'''$, так как именно этот отрезок соответствует углу (ab), проектирующему данный отрезок AB. Рассмотренный пример показывает, что метод центральной проекции может перевести обыкновенный (евклидов) отрезок AB в отрезок $A''' \infty B'''$, содержащий несобственную точку. Вместе с тем благодаря расширению понятия «отрезок» всякая центральная проекция переводит любой отрезок прямой в некоторый отрезок другой прямой. Таким образом, понятие «отрезок» обладает необходимой инвариантностью в отношении операции проектирования

3. Обратимся теперь к расположению точек на прямой.

В евклидовой геометрии принадлежность точки M к отрезку AB выражается словом «между». Именно говорят, что точка M лежит между A и B (черт. 70). На проективной прямой пара точек A, B определяет, как мы видели, два отрезка, поэтому понятие «между» может быть присвоено любой точке прямой AB, например точке N, так как и эта точка принадлежит одному из отрезков, образованных точками A и B. С другой стороны, понятие «между» не сохраняет своих свойств при центральном проектировании. Так, точка M, лежащая между точками A и B (черт. 69), при центральном проектировании из точки S на прямую s''' переходит в точку M''', которая уже не лежит между точками A''' и B'''.



Черт. 70.

Следовательно, понятие «между» теряет свое значение и должно быть заменено другим, которое обладало бы проективным характером. Таким понятием является понятие *разделенности пар точек*.

Если точки M и N принадлежат к разным отрезкам, образованным парой точек A и B, то говорят, что *пара* M, N *разделяет пару* A, B, и записывают это следующим образом:

$$M, N \div A, \quad B.$$

В свою очередь

$$A, B \div M, N.$$

Наоборот, точки M, B не разделяют пары точек A, N, так как первая пара принадлежит одному и тому же евклидову отрезку AN из двух отрезков, образованных на прямой парой точек A и N. В этом случае пользуются следующей записью[1]:

$$M, B \overset{..}{-} A, N.$$

Понятие разделенности обладает проективной инвариантностью. Так, если на прямой s (черт. 69) пары точек A, B и M, N разделены, то, проектируя их из центра S на прямую s''', получим разделенные пары A''', B''' и M''', N'''. Свойство разделенности не нарушено.

Установив понятие разделенности двух пар точек на прямой, мы можем совершенно аналогичным образом установить это понятие для пар прямых в пучке. В самом деле, одна пара прямых, принадлежащих пучку (например, пара a, b), разбивает пучок на два угла. Если прямые m и n принадлежат одному и тому же углу, то они не разделяют пару a, b. Если же m и n принадлежат разным углам (черт. 71), то обе пары разделены и мы пишем:

$$m, n \div a, b.$$

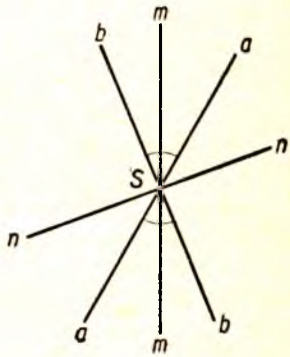
---

[1] Такая символика предложена проф. А. К. Власовым.

При этом, как можно видеть на чертеже 69, центральная проекция относит разделенным парам точек разделенные пары проектирующих лучей (пары точек $A, B \div M, N$ на прямой s и пары прямых $SA, SB \div SM, SN$ в пучке S).

Заметим кстати, что понятие «между» неприменимо к пучку лучей и в евклидовой плоскости, так как пучок лучей, как мы видели, обладает свойствами проективной прямой, или, точнее, *отношения порядка точек проективной прямой и прямых пучка совершенно идентичны.*

Представим себе, что пучок прямых описывается движением какой-нибудь прямой, последовательно совпадающей со всеми прямыми пучка. Пусть, например, прямая a (черт. 71) описывает весь пучок, вращаясь вокруг его центра S, и возвращается в исходное положение. Очевидно, такое вращение может быть произведено в двух противоположных направлениях: против часовой стрелки и по часовой стрелке. Чтобы определить какое-нибудь из этих направлений, мы должны указать не менее трех последовательных прямых пучка, например вращение в направлении amb или противоположное вращение в направлении abm.

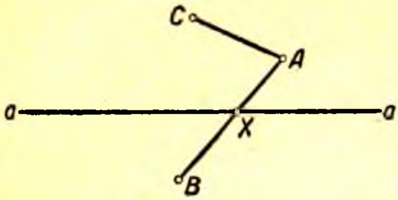


Черт. 71.

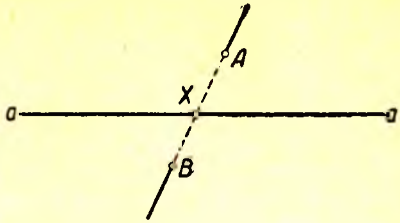
Подобным же образом ряд точек, расположенных на одной прямой, может быть описан движением точки в двух противоположных направлениях. Чтобы определить эти направления, надо задать не менее трех точек, устанавливающих один из двух возможных порядков. Так, на чертеже 70 порядок AMB соответствует движению слева направо (определим это направление как положительное), в то время как порядок ABM соответствует движению в противоположном (отрицательном) направлении.

Заметим, что на евклидовой прямой направление движения вполне определялось уже парой точек. Так, пара A, B уже определяла положительное направление на прямой в силу невозможности прийти из точки A в точку B с помощью противоположного движения. Однако последнее вполне возможно на проективной (замкнутой) прямой.

4. Описанные здесь отношения порядка на прямой и в пучке были нами выведены из свойств того проективного пространства, которое было построено из евклидова пространства путем присоединения несобственных элементов. Поэтому мы имели уже «готовое пространство», и задача заключалась лишь в том, чтобы, учитывая несобственные элементы, приспособить известные уже отношения порядка в евклидовом пространстве к тем новым условиям, которые возникли от присоединения несобственных элементов. В дальнейшем, однако, мы считаем полезным сформу-



Черт. 72.



Черт. 73.

лировать эти отношения порядка в виде системы предложений, которая могла бы служить группой аксиом порядка при самостоятельном построении проективного пространства. Мы получим тогда следующие четыре предложения (или аксиомы) порядка:

1°. *Две различные точки A и B прямой разбивают все остальные точки этой прямой на два класса. Оба класса не являются пустыми* (т. е. в каждом классе имеется по крайней мере по одной точке).

Каждый из классов, дополненный точками A и B, называется отрезком.

Определение. Если точки C и D принадлежат к разным классам разбиения A, B, то пары точек A, B и C, D называются разделенными:

$$A, B \div C, D.$$

Если точки C и D принадлежат одному классу, то мы называем пары A, B и C, D неразделенными:

$$A, B \stackrel{\cdot\cdot}{-} C, D.$$

2°. *Если* $A, B \div C, D$, *то и* $C, D \div A, B$.

3°. *Любые четыре точки прямой могут быть лишь единственным образом разбиты на две разделенные пары.*

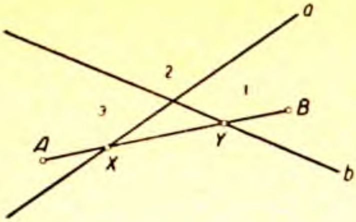
4°. *Центральная проекция переводит две разделенные пары в две разделенные соответственные пары.*

Из этих предложений порядка 1°—4°, а также группы предложений принадлежности можно логическим путем развить те отношения порядка, которые имеют место в проективном пространстве.

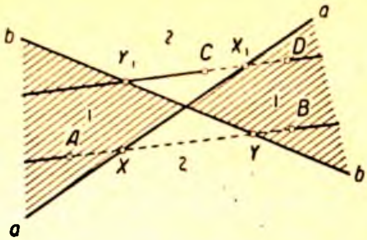
В частности, определение разделенности двух пар прямых пучка может быть проведено с помощью сечения. Предложение 4° обеспечивает непротиворечивость такого определения.

5. Далее можно установить порядковые свойства проективной плоскости.

Напомним прежде всего об отношениях порядка, имеющих место на евклидовой плоскости. Рассмотрим произвольную прямую a этой плоскости (черт. 72). Прямая разбивает евклидову



Черт. 74а.



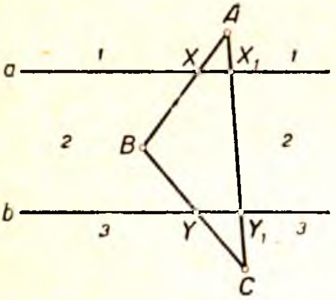
Черт. 74б.

плоскость на две «полуплоскости», или «области» (ср. с § 15). Точки плоскости, принадлежащие разным областям (как, например, точки A и B на черт. 72), характеризуются тем, что соединяющий их отрезок AB непременно пересекает прямую a (в точке X на черт. 72), в то время как точки одной и той же области (например, точки A и C на черт. 72) определяют соединяющий их отрезок AC, который не имеет общих точек с прямой a. Таким образом, прямая a разбивает евклидову плоскость на две области, причем каждая точка, не принадлежащая самой прямой a, может быть отнесена вполне определенным образом только к одной из них.

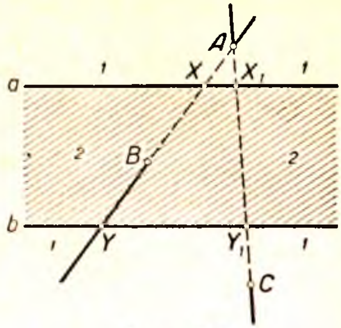
Иначе обстоит дело на проективной плоскости (черт. 73). Как бы ни были выбраны точки A и B, на проективной плоскости всегда найдется соединяющий их прямолинейный отрезок, не пересекающий прямой a. В самом деле, из двух отрезков AB и $A\infty B$, соединяющих точки A и B, только один может иметь общую точку с прямой a (иначе были бы нарушены отношения принадлежности, так как через две точки проходили бы две различные прямые). Следовательно, всегда найдется такой отрезок (на черт. 73 отрезок $A \infty B$), который не пересекает прямой a. Другими словами, любые две точки проективной плоскости принадлежат к одной и той же области. Прямая a не разбивает проективную плоскость на две «полуплоскости».

6. Рассмотрим теперь разбиение плоскости, производимое двумя прямыми (a и b). Для лучшего сравнения свойств евклидовой и проективной плоскостей мы помещаем два чертежа рядом (черт. 74). На чертеже 74а представлена евклидова плоскость. Нетрудно видеть, что две пересекающиеся прямые a и b разобьют евклидову плоскость на четыре области, отмеченные на чертеже цифрами *1*, *2*, *3* и *4*. Отрезок, соединяющий две какие-либо точки, принадлежащие к разным областям, пересекает либо одну, либо обе прямые в зависимости от того, находятся ли обе точки в «смежных» или «противолежащих» областях (так, отрезок AB на черт. 74а пересекает обе граничные прямые в точках X и Y).

В то же время на проективной плоскости (черт. 74б) две прямые a и b (всегда пересекающиеся) образуют всего лишь две области, отмеченные на чертеже цифрами *1*, *1* и 2, 2.



Черт. 75а.



Черт. 75б.

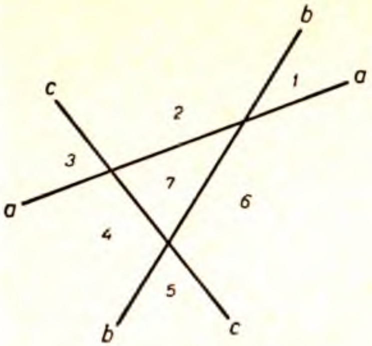
В самом деле, точки A и B лежат в одной и той же области, так как обе точки пересечения X и Y принадлежат одному отрезку, а именно отрезку AB. Следовательно, второй отрезок $A\infty B$ не имеет общих точек с граничными прямыми a и b, т. е. точки A и B лежат в одной области. Эту область мы и обозначили цифрами *1*, *1*. На том же чертеже показана другая пара точек C и D, принадлежащих к разным областям. Действительно, каждый из двух соединяющих эти точки отрезков имеет точку пересечения с одной из граничных прямых. Так, отрезок CD содержит точку X_1 пересечения с прямой a, в то время как отрезок $C\infty D$ содержит точку Y_1 пересечения с прямой b. Следовательно, точки C и D должны быть отнесены к разным областям.

7. Интересно рассмотреть случай, когда прямые a и b параллельны (черт. 75). В этом случае евклидова плоскость разбивается на три области (так как точки A, B и C принадлежат, очевидно, к разным областям, черт. 75а). Для проективной же плоскости случай параллельности граничных прямых a и b не представляет какого-либо исключения, так как параллельные прямые пересекаются в несобственной точке. Действительно, как легко убедиться из чертежа 75б, точки A и B лежат в разных областях (каждый из двух отрезков AB и $A\infty B$ пересекает одну из граничных прямых), в то время как точки A и C лежат в одной области (отрезок AC пересекает обе граничные прямые, поэтому отрезок $A\infty C$ не имеет общих точек с граничными прямыми).

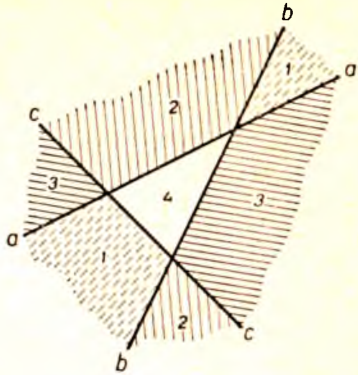
Подобным же образом можно убедиться, что три прямые (a, b и c), не проходящие через одну точку, разбивают евклидову плоскость на семь областей (черт. 76а), в то время как на проективной плоскости три прямые образуют только четыре области (черт. 76б).

Таковы в самом кратком очерке свойства проективной плоскости.

8. Модель проективной плоскости можно построить следующим образом. Представим себе полусферу Σ с центром в точке O,

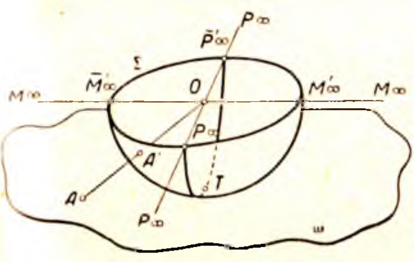


Черт. 76а.

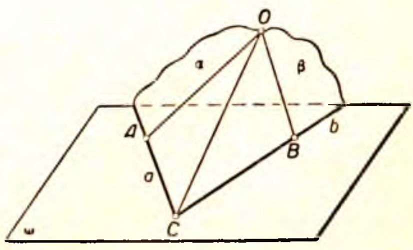


Черт. 76б.

касающуюся плоскости ω в точке T (черт. 77а). Тогда, принимая точку O за центр проекций, будем проектировать все точки плоскости ω на поверхность полусферы. Так, например, точка A спроектируется в точку A' полусферы. Очевидно, для каждой собственной точки плоскости получим ее изображение на полусфере. Что же касается несобственных точек, то их изображения получим с помощью лучей, параллельных плоскости ω (в самом деле, такие лучи пересекают плоскость ω в ее несобственных точках). Таковы, например, на чертеже лучи OM_∞ и OP_∞. Каждый из этих лучей пересекает полусферу в двух точках, лежащих на большом круге экватора. Так, луч OM_∞ пересекает экватор в точках M'_∞ и $\bar{M}'_\infty$; луч OP_∞ — в точках P'_∞ и $\bar{P}'_\infty$. Чтобы сохранить взаимно однозначное соответствие точек плоскости ω и полусферы Σ, необходимо считать пару точек M'_∞ и $\bar{M}'_\infty$ за одну точку, являющуюся изображением несобственной точки M_∞ плоскости на полусфере. То же самое относится и к паре точек P'_∞ и $\bar{P}'_\infty$. При выполнении этого условия плоскость ω однозначно отобразится на полусферу Σ. Таким образом, мы можем считать полусферу Σ моделью проективной плоскости, причем каждая пара диаметрально противоположных точек экватора полусферы принимается



Черт. 77а.



Черт. 77б.

за одну точку, являющуюся изображением несобственной точки плоскости. На этой модели каждая прямая плоскости ω изобразится большим полукругом на сфере, две конечные точки которого, лежащие на экваторе, должны быть приняты совпавшими, идентичными. Этим достигается замкнутость проективной прямой. На построенной модели мы можем видеть все те свойства проективной плоскости, о которых шла речь выше. В частности, проективная плоскость представляется замкнутой поверхностью, которую прямая линия не разбивает на две отдельные части.

Можно представить себе модель проективной плоскости еще иначе. Каждой точке A плоскости ω соответствует проходящая через нее прямая OA связки с центром O. Каждой прямой a плоскости ω соответствует проходящая через нее плоскость α связки (O). Поэтому связка прямых и плоскостей (O) может служить моделью проективной плоскости, если мы будем называть каждую прямую связки (O) «точкой», а каждую плоскость — «прямой». В этой своеобразной модели проективной плоскости будут выполняться отношения принадлежности и порядка, установленные выше. Так, например, каждые две «точки» (OB и OC) определяют единственную принадлежащую им «прямую» (плоскость β); каждые две «прямые» (плоскости α и β) пересекаются в «точке» (OC), которая им принадлежит; две «точки» «прямой» (две прямые связки) определяют на ней два «отрезка» (два угла плоскости) и т. д.[1] (черт. 77б).

§ 19. О непрерывности пространства.

Если бы мы пытались построить проективное пространство на основе формулированных выше аксиом принадлежности и порядка, то оказалось бы, что наша аксиоматическая база еще недостаточна. Правда, благодаря аксиомам порядка мы получили бы пространство, содержащее бесконечное множество точек, прямых и плоскостей. Так, например, применяя аксиомы порядка, мы можем утверждать, что каждый отрезок содержит точку, не совпадающую с его концами (§ 18; предложение 1°), и, применяя это положение к новому отрезку, одним из концов которого является найденная точка, констатировать существование второй точки, затем третьей и т. д. Однако процесс этот является счетным, и, применяя его, мы получим на прямой лишь счетное множество точек, соответствующее множеству рациональных точек (точек с рациональной координатой) на числовой прямой. По этой причине пространство, построенное на базе упомянутых аксиом принадлежности и порядка, иногда называют р а ц и о н а л ь н ы м

---

[1] Более подробно о свойствах проективной плоскости можно прочесть в следующих работах: Д. Г и л ь б е р т и С. К о н-Ф о с с е н. Наглядная геометрия, ОНТИ, 1936, стр. 272; Н. А. Г л а г о л е в. Проективная геометрия, ОНТИ, 1936, стр. 224.

проективным пространством. По сравнению с тем проективным пространством, которое мы построили, дополнив евклидово пространство несобственными элементами, рациональному проективному пространству недостает свойства непрерывности. Это свойство может быть выражено в следующей форме, в которой оно известно под названием аксиомы непрерывности. Мы приведем здесь формулировку, представляющую видоизменение аксиомы непрерывности Дедекинда[1].

Пусть все точки отрезка AB разбиты на два класса (черт. 78), *причем точка A принадлежит к первому, а точка B — ко второму классу. Обозначим через X произвольную точку первого класса, отличную от A, а через Y — точку второго класса, отличную от B. Если для любой пары точек X и Y будет выполняться условие*

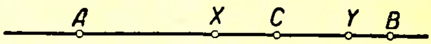
$$AY \div XB,$$

тогда существует такая точка C отрезка AB (принадлежащая к первому или второму классу), что

$$AC \div XY \text{ и } CB \div XY$$

для всех точек X и Y, отличных от C.

Очевидно, что это предложение о непрерывности множества точек на прямой может быть посредством проектирования распространено на множество прямых пучка. В самом деле, прямые пучка могут быть (как мы видели в § 18) приведены во взаимно однозначное соответствие с точками прямолинейного ряда точек, причем точкам какого-либо отрезка прямой соответствуют прямые соответствующего угла пучка. Поэтому всякому разбиению множества точек отрезка будет соответствовать разбиение множества прямых соответствующего угла, а точке C, осуществляющей такое разбиение на отрезке, — прямая c, осуществляющая его в угле.



Черт. 78.

Подобным же образом принцип непрерывности может быть посредством проектирования перенесен на пучок плоскостей. Поэтому в качестве аксиомы непрерывности для построения проективного пространства было бы достаточно принять формулированную выше аксиому Дедекинда.

Группы аксиом принадлежности (§ 17), порядка (§ 18) и аксиома непрерывности представляют ту аксиоматическую основу, с помощью которой может быть совершенно самостоятельно построено проективное пространство и развиты его свойства[2].

---

[1] Аксиома Дедекинда дана здесь в проективной форме. Нетрудно формулировать ее применительно к евклидовой прямой.

[2] См., например: Н. А. Глаголев. Проективная геометрия, стр. 208.

В нашем курсе из педагогических соображений мы избрали другой путь — путь развития проективной геометрии в том проективном пространстве, которое было получено присоединением несобственных элементов к обыкновенному евклидову пространству.

Изучая свойства этого пространства, мы пришли к системе основных предложений принадлежности, порядка и непрерывности, которая, как уже было указано, может служить самостоятельной аксиоматической базой для построения проективного пространства.

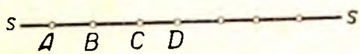
Эта система основных предложений будет нам полезна для обоснования так называемого «принципа двойственности».

§ 20. Основные геометрические формы.

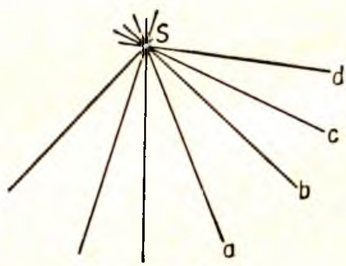
Геометрические формы построенного проективного пространства принято относить к той или другой категории (ступени) в зависимости от структуры того многообразия элементов, которое содержит данная форма.

Так, формами 1-й ступени являются:

1°. П р я м о л и н е й н ы й р я д т о ч е к, т. е. совокупность точек A, B, C, D, ..., принадлежащих данной прямой s (черт. 79а). Прямая s называется н о с и т е л е м р я д а т о ч е к.



Черт. 79а.



Черт. 79б.

2°. П у ч о к п р я м ы х, т. е. совокупность прямых a, b, c, d,...на плоскости, принадлежащих данной точке S. Точка S называется н о с и т е л е м или ц е н т р о м п у ч к а (черт. 79б).

3°. П у ч о к п л о с к о с т е й, т. е. совокупность плоскостей α, β, γ, δ, . . . , принадлежащих данной прямой s (черт. 80). Прямая s — носитель пучка плоскостей — называется также о с ь ю пучка.

Как мы уже знаем, от прямолинейного ряда точек можно посредством проектирования перейти к пучку прямых, причем между точками ряда и прямыми пучка устанавливается взаимно однозначное соответствие. Аналогичным образом может быть установлено взаимно однозначное соответствие между точками прямолинейного ряда и плоскостями пучка плоскостей. В самом деле, пусть имеем прямолинейный ряд точек s $(A, B, C, D, \ldots)$ и пучок плоскостей s^* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$. Тогда каждая точка A ряда s вместе с осью пучка плоскостей определяет плоскость α, им принадлежащую. Обратно, каждая плоскость α пучка s^* определяет на прямой s точку A, принадлежащую прямолинейному ряду точек s.

Итак, каждая из форм 1-й ступени может быть приведена во взаимно однозначное соответствие с любой другой формой 1-й ступени[1].

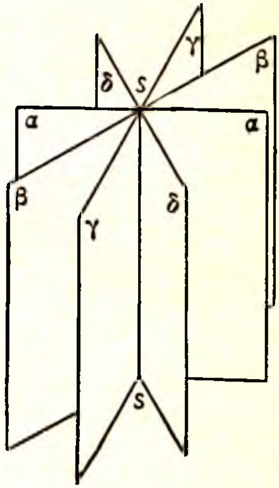
Основными формами 2-й ступени являются:

1°. Плоское поле точек, т. е. совокупность точек, принадлежащих данной плоскости σ, которая называется носителем поля.

2°. Плоское поле прямых, т. е. совокупность прямых, принадлежащих данной плоскости σ, которая называется носителем поля.

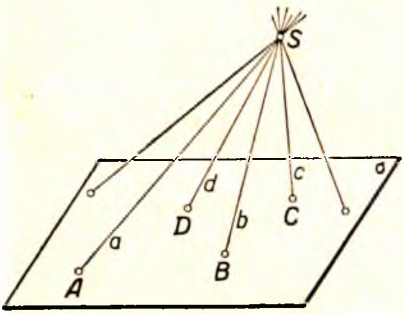
3°. Связка прямых, т. е. совокупность прямых пространства, принадлежащих данной точке S, которая называется носителем или центром связки.

4°. Связка плоскостей, т. е. совокупность плоскостей, принадлежащих данной точке S, которая называется носителем или центром связки.

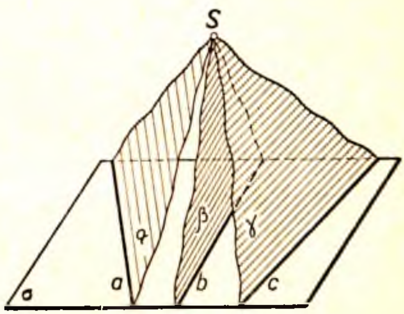


Черт. 80.

Нетрудно установить, что, проектируя из какой-нибудь точки S (не принадлежащей плоскости σ) плоское поле точек σ $(A, B, C, \ldots)$, получим связку прямых $(a, b, c, \ldots)$ (черт. 81), а проектируя из точки S плос-



Черт. 81.



Черт. 82.

[1] В частности, взаимно однозначное соответствие пучка прямых и пучка плоскостей может быть, очевидно, установлено через посредство прямолинейного ряда точек.

кое поле прямых $\sigma (a, b, c, \ldots)$, получим связку плоскостей $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ (черт. 82).

Формами 3-й ступени являются:

1°. Пространство точек, т. е. совокупность всех точек проективного пространства, которое в данном случае играет роль носителя точек.

2°. Пространство плоскостей, т. е. совокупность всех плоскостей проективного пространства, которое в данном случае является носителем плоскостей.

В ряде случаев бывает целесообразно рассматривать форму 2-й ступени, представляющую собой соединение поля точек и поля прямых, принадлежащих плоскости σ, т.е. плоское поле точек и прямых. Эта форма путем проектирования переходит в связку прямых и плоскостей.

Аналогичным образом можно рассматривать пространство точек и плоскостей как форму 3-й ступени.

Обозначим пространство буквой R_3. Мы можем считать его элементами точки, прямые и плоскости. Каждая точка пространства R_3 определяется тремя координатами (параметрами), поэтому «пространство точек» является формой 3-й ступени. Каждая плоскость определяется тремя параметрами (например, расстоянием плоскости от начала координат O и двумя углами нормали к плоскости с осями координат), поэтому «пространство плоскостей» есть также форма 3-й ступени.

Что же касается «пространства прямых» (совокупность всех прямых пространства R_3), то это множество прямых является уже формой 4-й ступени. Покажем, что каждая прямая пространства R_3 определяется четырьмя параметрами. Каждая прямая линия может быть задана двумя точками $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, которым она принадлежит. Для их задания требуется шесть координат (параметров). Однако точки A и B могут занимать любое положение на прямой AB (кроме $A \equiv B$), поэтому два параметра при нашем подсчете были лишними. Их надо вычесть: $6—2 = 4$. Следовательно, множество прямых пространства R_3 есть форма 4-й ступени.

Можно рассматривать «точечное пространство» четырех измерений R_4.

Каждая точка его требует задания четырех координат: $A\ (x,\ y,\ z,\ t)$. Следовательно, имеем форму 4-й ступени.

Совокупность «гиперплоскостей» пространства R_4, т. е. его трехмерных пространств, является также формой 4-й ступени. В этом можно убедиться следующим образом. Уравнение гиперплоскости в декартовых координатах имеет вид: $Ax + By + Cz + Dt + 1 = 0$. Для его определения требуется задать четыре параметра (A, B, C, D).

Рассмотрим R_4 как множество всех его плоскостей (двумерных). Будем иметь: каждую плоскость можно задать тремя точками $A\ (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $B\ (x_2, y_2, z_2, t_2)$ и $C\ (x_3, y_3, z_3, t_3)$, на что потребуется 12 координат; но, учитывая, что каждая точка плоскости ABC может занимать на ней произвольное положение, видим, что были сосчитаны лишние два параметра на каждую точку. Поэтому имеем окончательно: $12-2\cdot 3=6$. Следовательно, «множество плоскостей пространства R_4» является формой 6-й ступени.

Остается рассмотреть, какой формой является пространство R_4 как множество всех принадлежащих ему прямых. Применяя уже проведенный прием, будем иметь: каждая прямая может быть задана двумя ее точками A (x_1, y_1, z_1, t_1) и B (x_2, y_2, z_2, t_2), на что потребуется восемь параметров. При этом два параметра являются лишними. Следовательно, получим $8-2=6$ параметров. Итак, множество всех прямых в R_4 есть форма 6-й ступени. Таковы многообразия элементов (точек, прямых, плоскостей и гиперплоскостей) пространства R_4.

Установив соответствующую проективную аксиоматику для R_4, можем далее развивать в этом пространстве проективную геометрию, например принцип двойственности в R_4. При этом двойственными явятся точка и гиперплоскость, прямая и плоскость.

Таким образом, может быть построена проективная геометрия многомерных пространств[1].

§ 21. Принцип двойственности в пространстве.

Уже при сравнении свойств проективного пространства со свойствами евклидова пространства становилось ясно, что введение несобственных элементов придало известную законченность и стройность формулировкам этих свойств. В частности, основные предложения (аксиомы) получили совершенно симметричное выражение по отношению к точкам и плоскостям. Так, анализируя предложения (аксиомы принадлежности 1—5, § 17), замечаем, что предложению 1 соответствует предложение 2. В самом деле, достаточно в первом из них заменить слово «точка» словом «плоскость» или, наоборот, во втором заменить слово «плоскость» словом «точка», чтобы перевести одно предложение в другое. При этом превращении слово «прямая» должно быть сохранено на своем месте, не подвергаясь замене. То же самое можно сказать и о предложениях 3 и 4 групп аксиом принадлежности (§ 17). Они формулируются совершенно симметрично относительно понятий «точка» и «плоскость». Поэтому, заменяя в любом из них слово «точка» словом «плоскость» и слово «плоскость» словом «точка», мы переводим это предложение в другое. Важно отметить, что во всех этих случаях слово «прямая» не подвергается замене. Наконец, предложению 5 также соответствует симметричное предложение, а именно теорема III.

[1] Для интересующихся этими вопросами можем рекомендовать следующую литературу: Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, Физматгиз. М., 1961; В. А. Розенфельд, Многомерные пространства, изд. «Наука». М., 1966.

Таким образом, основные предложения (аксиомы) принадлежности проективного пространства носят двойственный характер.

Естественно ожидать, что тем же двойственным характером или той же симметричностью относительно понятий «точка» и «плоскость» будут обладать и все теоремы, выведенные из основных предложений путем логических умозаключений. Таковы, например, теоремы I и II, доказанные в § 17. Каждая из них переходит в другую, если слово «точка» будет заменено словом «плоскость» и наоборот, а слово «прямая» сохранено без изменения. Ту же двойственность можно видеть и в описанных в предыдущем параграфе основных геометрических формах.

В самом деле, р я д т о ч е к есть совокупность точек, принадлежащих одной и той же прямой. Двойственной формой является п у ч о к п л о с к о с т е й как совокупность плоскостей, принадлежащих одной и той же прямой. Следовательно, эти две формы 1-й ступени являются двойственными.

Далее, п у ч о к п р я м ы х есть совокупность прямых, принадлежащих одной точке и одной принадлежащей этой точке плоскости. Двойственная форма представляет собой совокупность прямых, принадлежащих одной плоскости и одной принадлежащей этой плоскости точке, т. е. это пучок прямых. Следовательно, пучок прямых есть форма 1-й ступени «сама себе двойственная». Подобным же образом можно установить, что п л о с к о м у п о л ю т о ч е к соответствует двойственная форма 2-й ступени, а именно с в я з к а п л о с к о с т е й. П л о с к о м у п о л ю п р я м ы х двойственна с в я з к а п р я м ы х.

Наконец, обе формы 3-й ступени также являются двойственными. Таким образом, становится очевидной двойственная структура проективного пространства.

Если поставить вопрос еще шире, т. е. не будут ли обладать двойственностью все вообще основные предложения (аксиомы) проективного пространства, а следовательно, не существует ли для каждого проективного предложения двойственного ему предложения, то и на этот вопрос следует дать утвердительный ответ. На первый взгляд может показаться, что предложения порядка и непрерывности (§ 18 и 19) были нами формулированы лишь для прямолинейного ряда точек. Однако с помощью операций проектирования и пересечения они могут быть распространены и на другие формы 1-й ступени. Так, например, пучок плоскостей дает в сечении с прямой (не принадлежащей его центру) прямолинейный ряд точек. Поэтому все отношения порядка и непрерывности могут быть перенесены с прямолинейного ряда точек на пучок плоскостей. Другими словами, двойственные формы занимают совершенно одинаковое (симметричное) положение в отношении основных предложений проективного пространства. Отсюда можно сделать следующий вывод, который известен под названием п р и н ц и п а д в о й с т в е н н о с т и в п р о с т р а н с т в е.

Каждому проективному предложению относительно элементов *(точек, прямых и плосксстей) пространства соответствует второе (двойственное) предложение, которое получается из первого предложения заменой в нем слоза «точка» словом «плоскость» и слова «плоскость» словом «точка». При этом слово «прямая» не подвергается замене. Оба взаимно двойственных предложения справедливы, если доказано одно из них.*

Этим важнейшим принципом проективной геометрии мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

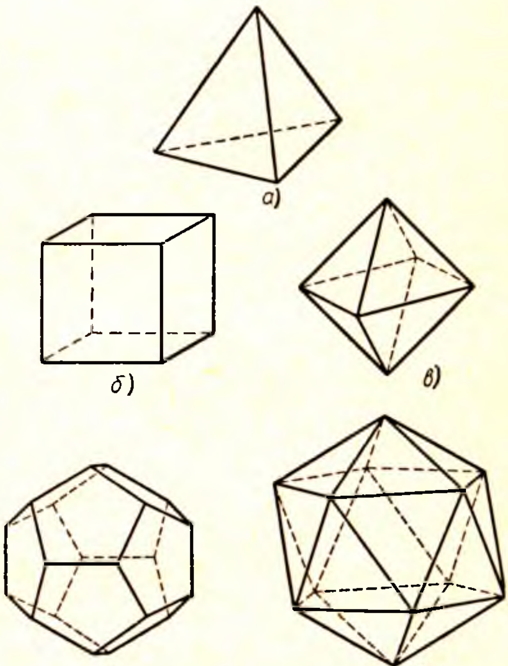
Рассмотрим несколько простейших примеров двойственных фигур в пространстве.

Если мы имеем на плоскости σ какую-нибудь фигуру, состоящую из точек и прямых, то по принципу двойственности в пространстве этой фигуре соответствует фигура, образованная плоскостями и прямыми, принадлежащими точке S, т. е. фигура в связке S.

В частности, треугольнику ABC, лежащему в плоскости σ, двойственно соответствует т р е х г р а н н и к $\alpha\beta\gamma$, вершина S которого как точка, принадлежащая всем трем граням α, β, γ, соответствует плоскости треугольника. Сторонам треугольника соответствуют ребра трехгранника.

Посмотрим, какая фигура двойственна т е т р а э д р у в пространстве.

Тетраэдр можно рассматривать как фигуру, образованную 4 точками (вершины), 4 плоскостями (грани) и 6 прямыми (ребра). Двойственная фигура должна состоять из 4 плоскостей, 4 точек и 6 прямых, т. е. она также является тетраэдром. Итак, тетраэдр сам себе двойствен (черт. 83, *а*).



г) Черт. 83. д)

Рассмотрим г е к с а э д р[1]. Эта фигура состоит из 6 плоскостей (граней), 8 точек (вершин) и 12 прямых (ребер). Двойственная фигура должна состоять из 6 точек (вершин), 8 плоскостей (граней) и 12 прямых (ребер). Такая фигура, как известно, называется о к т а э д р о м (черт. 83, *б*, *в*).

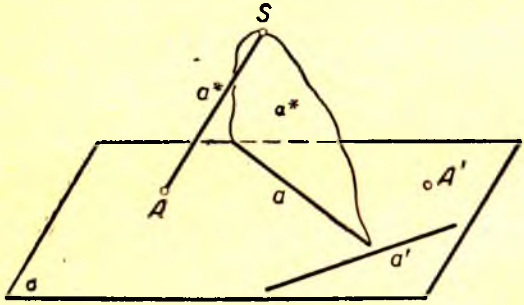
[1] Как известно, правильным гексаэдром является куб.

Если обратимся далее к додекаэдру, то эта фигура состоит из 12 плоскостей (граней), 20 точек (вершин) и 30 прямых (ребер). Двойственная фигура должна иметь 12 точек (вершин), 20 плоскостей (граней) и 30 прямых (ребер). Такая фигура называется икосаэдром (черт. 83, *г*, *д*).

§ 22. Принцип двойственности на плоскости.

Рассмотрим какую-нибудь плоскость σ проективного пространства. Плоскость σ является полем точек и прямых. Нетрудно заметить, что взаимоотношения принадлежности элементов плоского поля симметричны относительно точек и прямых. Так, например, предложению — *две различные точки A и B принадлежат одной, и только одной, прямой a* — соответствует симметричное предложение — *две различные прямые a и b принадлежат одной, и только одной, точке A*.

Для евклидовой плоскости это второе утверждение не всегда справедливо, так как здесь две параллельные прямые не имеют общей точки. В проективной плоскости две параллельные прямые пересекаются в несобственной точке, поэтому второе предложение для проективной плоскости выполняется во всех случаях.



Черт. 84.

Можно было бы пойти по этому пути дальше и проанализировать с точки зрения симметрического строения все аксиомы проективной геометрии на плоскости. Однако мы должны будем отказаться от этого метода по следующим соображениям. Во-первых, мы не подготовили (так как в этом не было необходимости) такой системы основных предложений (аксиом), которая была бы достаточна для построения проективной геометрии на плоскости; во-вторых, потребовалось бы доказательство идентичности этой проективной геометрии с той проективной геометрией на плоскости, которую мы рассматриваем как часть геометрии проективного пространства. Поэтому представляется более целесообразным обосновать принцип двойственности на плоскости, т. е. симметричность всех предложений проективной геометрии на плоскости относительно понятий «точка» и «прямая», при помощи пространственных операций, и в частности принципа двойственности в пространстве. Это можно сделать следующим образом (черт. 84). Выбрав произвольную точку S, не принадлежащую плоскости σ, спроектируем последнюю из точки S. Тогда каждая точка A плоского поля σ проектируется прямой a^*, а каждая прямая a поля σ — плоскостью α^*. Таким образом, плоское поле σ точек (A) и прямых (a) спроектируется связкой S прямых (a^*) и плоскостей (α^*). При этом свойства принадлежности точек и прямых поля σ переносятся на соответствующие элементы связки S. Так, если точка A принадлежит прямой a, то и в связке прямая a^* принадлежит плоскости α^*, и т. д. Вообще всякому проективному предложению на плоскости σ будет соответствовать проективное предложение в связке S.

Применим теперь принцип двойственности в пространстве к связке прямых и плоскостей S. Согласно этому принципу, всякому проективному предложению в связке S соответствует проективное предложение на какой-нибудь плоскости, например на плоскости σ. При этом плоскостям (α^*) связки S соответствуют точки (A') плоскости σ, а прямым (a^*) связки — прямые (a') плоскости.

Таким образом, всякое проективное предложение, относящееся к точкам (A) и прямым (a) плоского поля σ, переносится на связку S [прямые (a^*) и плоскости (α^*)], а затем снова на плоскость σ [прямые (a') и точки (A')]. В результате мы получаем на плоскости σ двойственное проективное предложение, в котором точкам (A) соответствуют прямые (a'), а прямым (a) — точки (A'). Так доказывается принцип двойственности на плоскости.

Этот принцип может быть сформулирован следующим образом:

Каждому проективному предложению относительно элементов (точек и прямых) на плоскости соответствует второе, двойственное предложение, которое может быть получено из первого заменой в нем слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Оба взаимно двойственных предложения справедливы, если доказано одно из них.

Примерами двойственных образов на плоскости могут служить прямолинейный р я д т о ч е к (совокупность точек, принадлежащих прямой) и п у ч о к п р я м ы х (совокупность прямых, принадлежащих точке).

«Треугольнику» (или, лучше, «трехвершиннику») соответствует «трехсторонник». Если же рассматривать т р е у г о л ь н и к как фигуру, образованную тремя точками и тремя прямыми, то двойственной фигурой является опять т р е у г о л ь н и к. Следовательно, треугольник сам себе двойствен на плоскости.

Нетрудно увеличить число подобных примеров, рассматривая другие фигуры, образованные точками и прямыми. Мы еще не раз встретимся с ними в последующих параграфах.

Все изложенное здесь о принципе двойственности на плоскости (или в плоском поле точек и прямых) может быть перенесено на другую форму второй ступени, а именно на связку как совокупность плоскостей и прямых. Это прямо следует из принципа двойственности в пространстве, согласно которому всякому проективному предложению, относящемуся к плоскому полю точек и прямых, соответствует двойственное предложение в связке плоскостей и прямых. Поэтому паре двойственных предложений на плоскости соответствует пара двойственных предложений в связке.

Следовательно, принципу двойственности на плоскости (поле точек и прямых) двойственно соответствует принцип двойственности в связке (связка плоскостей и прямых). В связке каждому проективному предложению для плоскостей и прямых соответствует двойственное предложение для прямых и плоскостей.

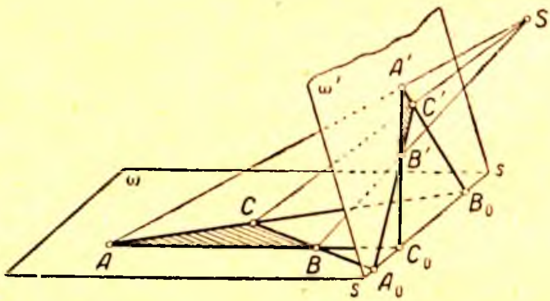
Таким образом, принцип двойственности на плоскости принимает обобщенный вид и становится уже **принципом двойственности форм второй ступени** (плоское поле точек и прямых; связка плоскостей и прямых).

§ 23. Теорема Дезарга.

1. Предположим, что в двух различных плоскостях ω и ω' (черт. 85) расположены треугольники ABC и $A'B'C'$.

Теоремой Дезарга называют следующее утверждение:

I. *Если прямые AA', BB' и CC', соединяющие соответственные вершины данных треугольников, проходят через одну точку (S),*



Черт. 85

то соответственные стороны этих треугольников пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.

Доказательство. Прямые AA' и BB', как пересекающиеся в точке S, определяют плоскость γ. В плоскости γ лежат стороны AB и $A'B'$ данных треугольников. Поэтому стороны AB и $A'B'$ пересекаются в точке, которую обозначим через C_0. Точка C_0 должна принадлежать трем плоскостям: плоскости ω (как точка прямой AB), плоскости ω' (как точка прямой $A'B'$) и плоскости γ (в которой лежат обе прямые AB и $A'B'$).

Аналогичным образом стороны BC и $B'C'$ лежат в плоскости α, определяемой пересекающимися в точке S прямыми BB' и CC'. Поэтому точка A_0 пересечения прямых BC и $B'C'$ принадлежит трем плоскостям: ω, ω' и α.

Совершенно так же получим, что третья пара сторон CA и $C'A'$ пересекается в точке B_0, которая принадлежит трем плоскостям ω, ω' и β. Причем плоскость β определяется парой пересекающихся прямых AA' и CC'.

Представим эти выводы относительно точек A_0, B_0 и C_0 в следующем символическом виде:

$$\omega \times \omega' \times \alpha = A_0,$$
$$\omega \times \omega' \times \beta = B_0,$$
$$\omega \times \omega' \times \gamma = C_0,$$

где знак $\times$ показывает, что берется пересечение соответствующих плоскостей. Эти три символических равенства наглядно показывают, что все три точки A_0, B_0 и C_0 принадлежат как плоскости ω, так и плоскости ω', т. е. линии их пересечения s. Следовательно, соответственные стороны двух данных треугольников AB, $A'B'$; BC, $B'C'$ и CA, $C'A'$ пересекаются в точках C_0, A_0 и B_0, лежащих на одной прямой s. Теорема Дезарга доказана.

Не представляет каких-либо трудностей и доказательство обратного утверждения, которое можно формулировать так:

II. *Если соответственные стороны AB, $A'B'$; BC, $B'C'$ и CA, $C'A'$ двух данных треугольников пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой — линии пересечения (s) плоскостей данных треугольников, то прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, проходят через одну точку (S).*

Доказательство сводится к следующему. Каждая пара соответственных сторон определяет плоскость. Три полученные таким образом плоскости α, β и γ образуют трехгранник, вершиной которого служит точка S пересечения плоскостей α, β и γ:

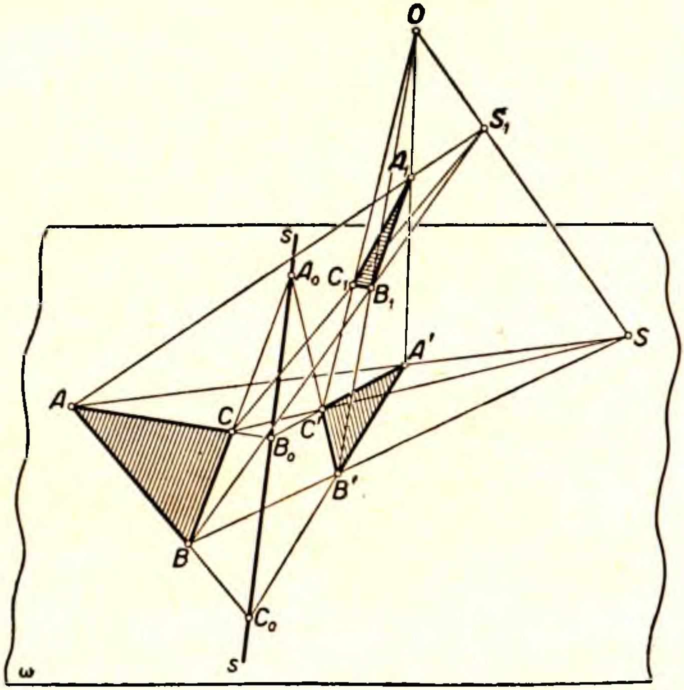
$$\alpha \times \beta \times \gamma = S.$$

Но, кроме того, будем иметь:

$$\alpha \times \beta = CC', \ \beta \times \gamma = AA', \ \gamma \times \alpha = BB'.$$

Следовательно, прямые AA', BB' и CC' являются ребрами трехгранника и должны проходить через его вершину S (ч. т. д.).

2. Теорема Дезарга была нами доказана в предположении, что данные треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в разных плоскостях ω и ω'. Если же эти треугольники лежат в одной плоскости, то проведенное выше доказательство теоремы Дезарга является в этом случае, очевидно, непригодным. Поэтому для случая двух треугольников, лежащих в одной плоскости (теорема Дезарга на плоскости), мы дадим другое доказательство. В этом доказательстве плоскость рассматривается как элемент пространства и применяется только что доказанная пространственная теорема Дезарга.



Черт. 86.

Итак, предположим, что два треугольника ABC и $A'B'C'$, расположенные в одной и той же плоскости ω, обладают тем свойством, что прямые AA', BB' и CC', соединяющие попарно соответственные вершины, проходят через одну точку S (черт. 86). Требуется доказать, что соответственные стороны данных треугольников пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой[1] s. Пусть O — произвольная точка пространства, не лежащая на плоскости ω. Если на прямой OS выберем какую-нибудь точку S_1, отличную от точек O и S, то можно считать точку S центральной проекцией точки S_1 из центра O. Но тогда фигура $SABC$ является центральной проекцией фигуры (пирамиды) S_1ABC. Вершины A', B' и C', как лежащие на прямых SA, SB и SC, являются проекциями точек A_1, B_1 и C_1, лежащих на прямых S_1A, S_1B и S_1C.

Так как треугольник $A_1B_1C_1$ не лежит в плоскости ω, то к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ может быть применена пространственная теорема Дезарга.

[1] Треугольники, обладающие таким свойством, называются *гомологическими*.

В самом деле, прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, а именно прямые AA_1, BB_1 и CC_1, проходят через одну точку (S_1). Согласно пространственной теореме Дезарга соответственные стороны этих треугольников пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой. Но проекцией треугольника ABC является он сам, а проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ — треугольник $A'B'C'$. Поэтому три точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ также должны лежать на одной прямой (ч. т. д.).

Для доказательства обратного предложения воспользуемся принципом двойственности на плоскости. В самом деле, прямая теорема Дезарга представляет собой чистую форму проективного предложения, поэтому к ней может быть применен принцип двойственности.

Мы знаем, что треугольник есть фигура, сама себе двойственная на плоскости, причем вершинам треугольника соответствуют стороны, а сторонам — вершины. Дадим прямой теореме Дезарга более строгую формулировку:

III. *Если три прямые, принадлежащие соответственным вершинам двух треугольников, принадлежат одной и той же точке, то три точки, принадлежащие соответственным сторонам этих треугольников, принадлежат одной и той же прямой.*

Теперь ясно, что предложение, двойственное этому, будет совпадать с обратной теоремой Дезарга. В самом деле, двойственное предложение получим, заменяя слово «точка» словом «прямая» и слово «прямая» словом «точка». Тогда будем иметь:

IV. *Если три точки, принадлежащие соответственным сторонам двух треугольников, принадлежат одной и той же прямой, то три прямые, принадлежащие соответственным вершинам этих треугольников, принадлежат одной и той же точке.*

Но это и есть обратная теорема Дезарга.

Таким образом, прямая и обратная теоремы Дезарга на плоскости являются взаимно двойственными предложениями. Согласно принципу двойственности достаточно доказать одно из этих предложений, что и было сделано для прямой теоремы Дезарга.

3. Обратимся теперь к вопросу о том, что представляет собой предложение, двойственное теореме Дезарга, согласно принципу двойственности в пространстве. Как уже было сказано, треугольнику соответствует по принципу двойственности в пространстве трехгранник, вершина которого соответствует плоскости треугольника. Поэтому в предложении, двойственном теореме Дезарга, речь будет идти о двух трехгранниках. Прямым AA', BB' и CC', принадлежащим соответственным вершинам двух треугольников, двойственно соответствуют прямые, принадлежащие соответственным граням α, α'; β, β' и γ, γ' двух трехгранников. Точкам A_0, B_0 и C_0, принадлежащим парам соответственных сторон треугольников, двойственны плоскости α_0, β_0 и γ_0, принадлежащие парам соответственных ребер трехгранников. Таким образом,

предложение, двойственное пространственной теореме Дезарга, будет читаться так:

V. *Если прямые пересечения соответственных граней* α, α'; β, β' *и* γ, γ' *двух данных трехгранников лежат в одной плоскости* σ, *то три плоскости, определяемые парами соответственных ребер этих трехгранников, проходят через одну прямую* s.

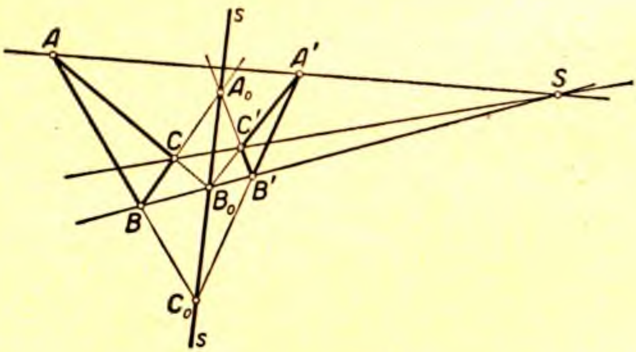
Нетрудно также формулировать предложение, двойственное обратной теореме Дезарга. Мы предоставим это сделать самим читателям.

Частному случаю теоремы, когда оба треугольника лежат в одной плоскости, т. е. теореме Дезарга на плоскости, соответствует частный случай двойственного предложения, когда два трехгранника имеют общую вершину (теорема Дезарга в связке). По своей форме теорема Дезарга в этом случае ничем не отличается от предложения V. Предполагается лишь, что оба трехгранника имеют общую вершину. Обратную теорему Дезарга в связке можно получить по принципу двойственности в связке (§ 22).

§ 24. Конфигурация Дезарга.

В связи с теоремой Дезарга на плоскости рассмотрим ту фигуру, которую образуют два треугольника ABC и $A'B'C'$ вместе с тремя прямыми AA', BB' и CC', проходящими через одну точку S, и тремя точками A_0, B_0, C_0, лежащими на одной прямой s (черт. 87).

Эту фигуру образуют д е с я т ь т о ч е к: шесть вершин двух треугольников, одна точка S пересечения прямых, соединяющих



Черт. 87.

соответственные вершины треугольников, и три точки пересечения соответственных сторон — и д е с я т ь п р я м ы х: шесть сторон двух треугольников, три прямые, соединяющие соответственные вершины, и одна прямая s, на которой лежат точки пересечения соответственных сторон треугольников.

Обратим внимание на следующее свойство этой фигуры: каждой из десяти прямых принадлежат три точки фигуры, а каждой из десяти точек принадлежат три прямые той же фигуры.

Фигуры, состоящие из m точек и n прямых и обладающие тем свойством, что каждой прямой принадлежит m' точек и каждой точке принадлежит n' прямых той же фигуры, называются **конфигурациями**. Каждую конфигурацию характеризуют, как видно из ее определения, четыре числа m, n, m', n'. Поэтому для обозначения конфигураций можно пользоваться следующим символом:

$$\left(\frac{m}{n'},\ \frac{n}{m'}\right).$$

Числа m, n, m' и n' не являются независимыми. В самом деле, подсчитаем число точек конфигурации, пользуясь тем фактом, что на каждой ее прямой имеется m' точек. Мы получим число $m'n$, при этом каждая точка будет сосчитана столько раз, сколько прямых конфигурации проходит через одну точку, т. е. n' раз. Следовательно, должны иметь:

$$m = \frac{m'n}{n'},$$

или

$$mn' = nm'.$$

Такова зависимость четырех чисел m, n, m', n'. Из этой формулы, между прочим, следует, что для тех конфигураций, которые содержат одинаковое число точек и прямых ($m = n$), будем иметь:

$$m' = n'.$$

Поэтому таким конфигурациям соответствует более простой символ:

$$\left(\frac{m}{n'}\right).$$

Рассмотренная выше конфигурация Дезарга состоит из десяти точек, инцидентных каждая трем прямым, и из десяти прямых, инцидентных каждая трем точкам. Следовательно, этой конфигурации соответствует символ:

$$\left(\frac{10}{3}\right).$$

Все точки и все прямые конфигурации Дезарга совершенно равноправны, и если при образовании конфигурации они имели различные значения (например, точка S служила точкой пересечения прямых, соединяющих соответственные вершины двух данных треугольников), то в уже построенной конфигурации каждая точка и каждая прямая могут выполнять любую роль в отношении теоремы Дезарга (так, любая точка может быть принята за точку S).

Конфигурации, обладающие этим свойством, называются правильными. Таким образом, теорема Дезарга привела нас к построению правильной конфигурации $\binom{10}{3}$.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Даны две несобственные точки A_∞ и B_∞ (с помощью непересекающихся прямых a и b) и собственная точка C. Требуется построить плоскость, проходящую через точки A_∞, B_∞ и C.

2. Через несобственную точку прямой a провести прямую, пересекающую две данные (непересекающиеся) прямые b и c.

3. Что представляет собой пирамида (или конус), если вершина ее является несобственной точкой?

4. С помощью аксиом 1—5 группы принадлежности (§ 17) доказать следующие предложения:

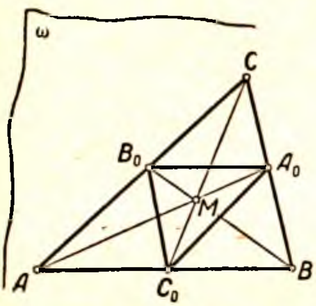
а) Каждая прямая содержит по крайней мере две точки.

б) Две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются в одной точке.

5. С помощью аксиом порядка 1—4 (§ 18) доказать следующие теоремы:

а) Если A, B, C, D, E — пять точек одной прямой, причем $AB \div CD$ и $AB \div CE$, то $AB \ddot{-} DE$.

б) Если A, B, C, D, E — пять точек одной прямой, причем $AB \div CD$ и $AB \ddot{-} DE$, то $AB \div CE$.



Черт. 88.

6. На плоскости ω произведено следующее построение: произвольную точку M плоскости ω соединяем с вершинами A, B, C треугольника той же плоскости. Отмечаем точки пересечения A_0, B_0 и C_0 прямых AM, BM и CM со сторонами BC, CA и AB данного треугольника (черт. 88). Наконец, соединяя прямыми три точки A_0, B_0 и C_0, получаем треугольник $A_0B_0C_0$, вписанный в данный треугольник. Требуется произвести двойственное построение, пользуясь принципом двойственности в пространстве.

7. Считая, что исходными данными предыдущего построения являются три вершины A, B, C треугольника и произвольная точка M (черт. 88), произвести двойственное построение на плоскости, приняв за исходные данные три стороны a, b, c треугольника и произвольную прямую m.

8. Формулировать принцип двойственности в связке прямых и плоскостей и, пользуясь им, получить обратную теорему Дезарга — для связки.

9. Какими особенностями обладает конфигурация Дезарга, если точка S пересечения прямых, соединяющих попарно соответственные вершины данных треугольников (дезаргова точка), является несобственной точкой? Сделайте чертеж для этого случая.

10. Тот же вопрос в случае, если прямая, на которой лежат точки пересечения собственных сторон двух треугольников (дезаргова прямая), является несобственной. Сделайте чертеж для этого случая.

11. Тот же вопрос, если одна пара соответствующих вершин данных треугольников лежит на несобственной прямой. Как должны быть расположены остальные вершины треугольников? Сделайте чертеж для этого случая.

12. Принимая произвольную точку конфигурации Дезарга за дезаргову точку S, найти в этой конфигурации вершины треугольников и дезаргову прямую. Выполнить аналогичное упражнение, принимая произвольную прямую конфигурации за дезаргову.

13. Простой многоугольник содержит n вершин и n сторон. Можно рассматривать его как конфигурацию. Какой символ соответствует этой конфигурации?

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 25. Сложное (ангармоническое) отношение четырех точек прямой.

1. Основным инвариантом аффинной геометрии является, как мы знаем, простое отношение трех точек прямой. Простое отношение трех точек A, B и C прямой мы записывали следующим образом[1]:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}.$$

Как видно из этой записи, роль точек неодинакова. Точка C называется *делящей*, а точки A и B — *основными* или *базисными*. Если базисные точки фиксированы, то каждой точке C на прямой AB соответствует определенное значение простого отношения (ABC) и, обратно, каждому значению (ABC) соответствует определенное положение точки C на прямой AB.

В самом деле, простое отношение трех точек может быть представлено в следующей форме:

$$(ABC) = \frac{AC}{BC} = \frac{AB + BC}{BC} = \frac{AB}{BC} + 1.$$

Если допустить, что для двух точек C и C' соответствующие простые отношения равны, то будем иметь:

$$(ABC) = (ABC'),$$

или

$$\frac{AB}{BC} + 1 = \frac{AB}{BC'} + 1,$$

откуда

$$BC = BC',$$

т. е. точка C' совпадает с точкой C. Взаимно однозначное соответствие точек прямой и соответствующих значений простого отношения позволяет произвести арифметизацию прямой при помощи простого отношения. В качестве координаты, определяющей положение точки C на прямой AB, мы примем число

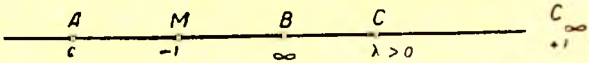
$$\lambda = (ABC),$$

[1] Здесь рассматриваются отрезки, не содержащие несобственной точки (как обычно в элементарной евклидовой геометрии).

причем A и B — фиксированные точки прямой. Если на этой прямой установлено положительное и отрицательное направления, так что отрезок AB считается положительным, а отрезок BA — отрицательным, то, как легко видеть, простое отношение

$$(ABC) = \frac{AC}{BC}$$

будет иметь отрицательное значение для всех точек C, лежащих между A и B, и положительное значение для точек C, ле-



Черт. 89.

жащих вне отрезка AB (черт. 89). В частности, для середины M отрезка AB простое отношение равно -1, так как

$$\lambda_M = (ABM) = \frac{AM}{BM} = -1.$$

Для базисных точек получим:

$$\lambda_A = (ABA) = \frac{AA}{BA} = 0,$$

$$\lambda_B = (ABB) = \frac{AB}{BB} = \frac{AB}{0}.$$

В последнем случае λ_B не имеет числового значения, но мы можем рассматривать этот случай как предельный, а именно:

$$\lambda_B = \lim_{C \to B} (ABC) = \lim_{C \to B} \frac{AC}{BC} = \infty.$$

На этом основании точке B приписываем символ ∞.

Найдем числовое значение простого отношения, соответствующее несобственной точке C_∞ прямой AB. Рассмотрим этот случай как предельный:

$$\lambda_\infty = \lim_{C \to C_\infty} (ABC) = \lim_{BC \to \infty} \left(\frac{AB}{BC} + 1 \right) = +1.$$

Таким образом, несобственной точке C_∞ приписываем значение простого отношения, равное $+1$.

2. Как было показано в главе I, простое отношение является основным инвариантом аффинных преобразований и важнейшим понятием аффинной геометрии. В частности, простое отношение трех точек инвариантно при всяком параллельном проектировании, являющемся основной геометрической операцией аффинной геометрии. Приступая к изучению проективной геометрии, мы положили в основу этого изучения метод центральной проекции. Однако нетрудно убедиться, что простое отношение трех точек уже не является инвариантом центрального проектирования и по-

этому не может иметь того значения в проективной геометрии, какое это понятие имело в аффинной геометрии.

Рассмотрим следующий простой пример (черт. 90). Пусть прямая c является биссектрисой угла (a, b), имеющего вершину в точке S, т. е.

$$\angle (a, c) = \angle (b, c).$$

Пересечем угол (a, b) прямыми g и g' таким образом, чтобы было

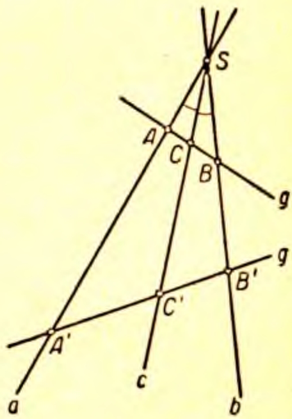
$$AS < BS \text{ и } A'S > B'S.$$

Тогда будем иметь:

$$|(ABC)| = \left|\frac{AC}{BC}\right| = \frac{AS}{BS} < 1,$$

$$|(A'B'C')| = \left|\frac{A'C'}{B'C'}\right| = \frac{A'S}{B'S} > 1.$$

Так как точки A', B', C' являются центральной проекцией (из центра S) точек A, B, C, то, как показывают написанные формулы, простое отношение трех точек может изменить свое значение при центральном проектировании.



Черт. 90.

Таким образом, возникает задача установить такое понятие, которое, являясь инвариантом центрального проектирования, заменило бы в проективной геометрии простое отношение трех точек. Этим понятием является, как будет видно из дальнейшего, так называемое сложное (или ангармоническое) отношение четырех точек прямой.

Сложное отношение четырех точек прямой определяется как отношение двух простых отношений трех точек, а именно следующим образом:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}. \qquad (1)$$

Как видно из этого определения, точки A и B являются базисными в обоих простых отношениях, в то время как точки C и D являются делящими соответственно в первом и втором простых отношениях. На этом основании пара точек A, B называется также основной (или базисной) парой сложного отношения, в то время как пара точек C, D называется делящей парой. Если провести вычисление сложного отношения (1) несколько дальше, то получим следующую формулу:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}. \qquad (2)$$

Установим прежде всего некоторые свойства сложного отношения, вытекающие из его определения.

1°. *Сложное отношение не изменяется от перестановки обеих пар составляющих его точек, т. е. если базисная пара сделана делящей, а делящая — базисной.*

Докажем, что

$$(ABCD) = (CDAB).$$

Применяя формулу (2), получим:

$$(CDAB) = \frac{(CDA)}{(CDB)} = \frac{\dfrac{CA}{DA}}{\dfrac{CB}{DB}} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = (ABCD).$$

2°. *Сложное отношение не изменяется от одновременной перестановки букв внутри каждой пары.*

Докажем, что

$$(ABCD) = (BADC).$$

Имеем:

$$(BADC) = \frac{(BAD)}{(BAC)} = \frac{\dfrac{BD}{AD}}{\dfrac{BC}{AC}} = \frac{BD \cdot AC}{AD \cdot BC} = (ABCD).$$

3. Поставим следующий вопрос: сколько различных значений сложного отношения можно получить из четырех данных точек A, B, C, D? Четыре элемента образуют всего 24 перестановки. Но среди этих перестановок найдутся такие, которые дают равные сложные отношения. Из выведенных выше свойств сложного отношения получим, что для каждой перестановки имеются еще три, сложные отношения которых равны сложному отношению данной перестановки. Эти перестановки следующие:

$$(ABCD) = (CDAB) = (DCBA) = (BADC).$$

Таким образом, все перестановки образуют 6 групп по 4 перестановки с равным сложным отношением. Следовательно, будем иметь всего 6 различных значений сложного отношения четырех данных точек прямой. Обозначим значение сложного отношения $(ABCD)$ буквой ν:

$$(ABCD) = \nu.$$

Разыщем остальные 5 значений сложного отношения четырех точек A, B, C, D, соответствующих различным перестановкам. Докажем, что:

Перестановка букв в одной паре изменяет величину сложного отношения на обратную.

Пусть, например, переставлены буквы второй пары. Тогда имеем:

$$(ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{1}{\frac{(ABC)}{(ABD)}} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\nu}.$$

Если переставлены буквы первой пары, то получим:

$$(BACD) = (CDBA) = \frac{1}{(CDAB)} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\nu}.$$

Докажем теперь, что:

Перестановка двух крайних или двух средних букв четверки изменяет значение сложного отношения на новое, равное $(1 - \nu)$.

Пусть, например, переставлены средние буквы. Имеем:

$$(ACBD) = \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot (CA + AD)}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CA + AB \cdot AD}{CB \cdot AD} =$$

$$= \frac{AB \cdot CA + (AC + CB) \cdot AD}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CA + AC \cdot AD}{CB \cdot AD} + 1 = \frac{AC\,(BA + AD)}{CB \cdot AD} +$$

$$+ 1 = 1 - \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = 1 - (ABCD) = 1 - \nu.$$

Если же переставлены крайние буквы, то получим:

$$(DBCA) = (BDAC) = 1 - (BADC) = 1 - \nu.$$

Теперь уже нетрудно получить все шесть значений сложного отношения для четырех точек A, B, C и D.

Эти значения следующие:

1) $(ABCD) = \nu$, 2) $(ABDC) = \frac{1}{\nu}$,

3) $(ACBD) = 1 - \nu$, 4) $(ACDB) = \frac{1}{1 - \nu}$,

5) $(ADBC) = 1 - \frac{1}{\nu} = \frac{\nu - 1}{\nu}$, 6) $(ADCB) = \frac{\nu}{\nu - 1}$.

4. Рассмотрим четыре точки A, B, C и D на прямой. Предположим, что точки A, B и C фиксированы, а четвертая точка D перемещается по прямой. Каждому положению точки D на прямой соответствует определенное значение сложного отношения $(ABCD)$. Как легко видеть, двум различным положениям точки D соответствуют два различных значения сложного отношения.

В самом деле, если точка D занимает два положения D_1 и D_2, причем соответствующие сложные отношения равны, то будем иметь:

$$(ABCD_1) = (ABCD_2),$$

или

$$\frac{(ABC)}{(ABD_1)} = \frac{(ABC)}{(ABD_2)}.$$

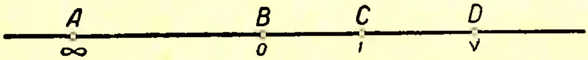
Откуда получим:

$$(ABD_1) = (ABD_2).$$

Но, как мы уже знаем, это возможно лишь при условии, что точки D_1 и D_2 совпадают: $D_1 \equiv D_2$. Таким образом, каждому значению сложного отношения $ABCD$ соответствует определенное положение точки D и обратно. Это позволяет ввести координаты точки на прямой, пользуясь сложным отношением. В качестве координаты, определяющей положение точки D на прямой AB, мы примем число

$$\nu = (ABCD),$$

причем A, B и C — фиксированные точки прямой (черт. 91). Посмотрим, какое значение принимает сложное отношение для этих точек.



Черт. 91.

Если точка D совпадает с C, то будем иметь:

$$\nu_C = (ABCC) = \frac{(ABC)}{(ABC)} = 1.$$

При совпадении с точкой B:

$$\nu_B = (ABCB) = \frac{(ABC)}{(ABB)} = \frac{(ABC) \cdot BB}{AB} = 0.$$

Наконец, для точки A:

$$\nu_A = (ABCA) = \frac{(ABC)}{(ABA)} = \frac{(ABC) \cdot BA}{AA}.$$

Последний случай можно рассматривать как предельный, именно:

$$\nu_A = \lim_{D \to A} (ABCD) = \lim_{D \to A} \frac{(ABC)}{(ABD)} = \infty.$$

Это дает нам основание отнести точке A символ ∞. Таким образом, основным точкам соответствуют значения сложного отношения 1, 0 и ∞.

Посмотрим, наконец, какое значение сложного отношения соответствует несобственной точке D_∞ прямой. Будем иметь:

$$\nu_\infty = (ABCD_\infty) = \frac{(ABC)}{(ABD_\infty)} = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \lambda,$$

так как $\lambda_\infty = 1$. Таким образом, если четвертая точка является несобственной, то сложное отношение равно простому отношению трех точек (ABC). Это позволяет представить простое отношение трех точек в форме сложного отношения:

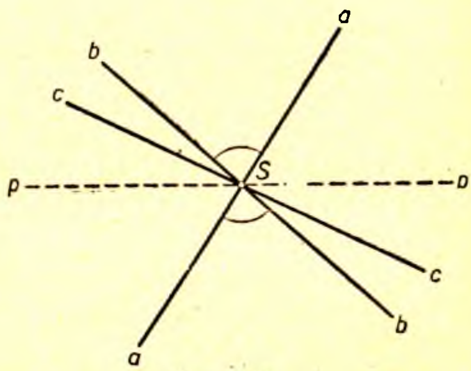
$$(ABC) = (ABCD_\infty).$$

§ 26. Простое и сложное отношение прямых пучка.

Как мы видели, понятие простого и сложного отношения точек прямой (прямолинейного ряда) связано с метрическим понятием длины отрезка. Разумеется, речь идет об евклидовых отрезках, как это молчаливо предполагалось во всех предыдущих рассуждениях. Две точки A и B определяют на проективной прямой два отрезка: AB и $A\infty B$. Из этих отрезков мы выбирали евклидов отрезок AB. Другими словами, мы выбирали т о т и з д в у х о т р е з к о в, к о т о р ы й н е с о д е р ж и т н е с о б с т в е н н о й т о ч к и п р я м о й, т. е. е в к л и д о в о т р е з о к. Благодаря этому критерию вопрос о выборе отрезка разрешался однозначно.

При установлении понятий простого и сложного отношения прямых пучка, т. е. при переходе от прямолинейного ряда точек к двойственной форме — пучку прямых, мы встретимся с аналогичным вопросом. В самом деле, две прямые a и b пучка S образуют два угла (черт. 92).

Необходимо условиться, какой именно угол выбран, т. е. сделать этот выбор угла однозначным, как и в случае выбора отрезка. Проведем произвольную прямую p пучка S и условимся выбирать т о т и з д в у х у г л о в, о б р а з о в а н н ы х п р я м ы м и a и b, к о т о р ы й н е с о д е р ж и т п р я м о й p (на чертеже 92 этот угол отмечен дугой). Ясно, что прямая p при выборе угла выполняет ту же роль, что несобственная точка прямой при выборе отрезка. Установив, таким образом, однозначное определение угла, приписываем ему знак (+) или (—) в зависимости от того, совпадает ли порядок его сторон с направлением, противоположным стрелке часов, или с направлением по стрелке часов.



Черт. 92.

Так, например, угол (a, b) на чертеже 92 положителен (прямая a опишет угол, двигаясь против стрелки часов), а угол (b, a) является отрицательным (так как прямая b описывает его по ходу часовой стрелки).

Переходим к определению понятия простого отношения трех прямых пучка. Пусть имеем три прямые a, b и c пучка S (черт. 92). Назовем п р о с т ы м о т н о ш е н и е м т р е х п р я м ы х п у ч к а в е л и ч и н у

$$(abc) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)}, \tag{1}$$

где в правой части через (a, c) и (b, c) обозначены углы, образованные прямой c («делящей») с прямыми a и b («основными», или «базисными»). В согласии с установленным выше определением угла и его знака можем сказать, что для всех делящих прямых (c), принадлежащих углу (a, b), простое отношение отрицательно, так как углы (a, c) и (b, c) имеют разные знаки. В частности, для биссектрисы угла (a, b) простое отношение принимает значение (-1). Для делящей прямой (c), принадлежащей смежному углу, простое отношение (abc) положительно. В частности, для биссектрисы смежного угла простое отношение принимает значение $(+1)$.

На основании установленного определения простого отношения трех прямых пучка можно произвести арифметизацию пучка, принимая за «координату» прямой пучка ее простое отношение. При этом основные прямые a и b будут иметь «координаты» 0 и ∞.

С помощью простого отношения трех прямых понятие **сложного, или ангармонического, отношения четырех прямых пучка** определяется совершенно аналогично тому, как это было сделано для точек прямолинейного ряда, а именно следующим образом:

$$(abcd) = \frac{(abc)}{(abd)} = \frac{\dfrac{\sin (a\,c)}{\sin (b\,c)}}{\dfrac{\sin (a\,d)}{\sin (b\,d)}} = \frac{\sin (a\,c) \cdot \sin (b\,d)}{\sin (b\,c) \cdot \sin (a\,d)}. \qquad (2)$$

В этих формулах первая пара прямых a, b называется **парой основных, или базисных, прямых**, а вторая пара c, d — **парой делящих прямых**.

Как простое, так и сложное отношение прямых пучка выражается через синусы углов, образованных делящими прямыми с базисными. Так как значения синусов одинаковы как для этих углов, так и для смежных с ними, дополняющих эти углы до 180°, то отсюда ясно, что правые части формул (1) и (2) по абсолютной величине совершенно не зависят от фиксированной прямой p (черт. 92), определяющей выбор углов и их знак. Знак же простого отношения трех прямых зависит от фиксированной прямой p, а именно, как уже было выяснено выше, знак простого отношения положителен, если делящая прямая принадлежит смежному углу, и отрицателен, если делящая прямая принадлежит самому углу, образованному базисными прямыми (т. е. не содержащему прямой p). Так, например, на чертеже 92 делящая прямая (c) принадлежит смежному углу, и простое отношение (abc) положительно. Если же фиксированную прямую p проведем внутри угла (a, b), отмеченного на чертеже дугой, то простое отношение изменит знак на обратный, т. е. станет отрицательным.

Покажем теперь, что сложное отношение четырех прямых пучка не зависит от выбора прямой p ни по абсолютной величине, ни по знаку. В самом деле, из формулы (2) видно, что знак сложного отношения ($abcd$) зависит от того, имеют ли простые отношения (abc) и (abd) одинаковые или разные знаки. Из предыдущего ясно, что эти простые отношения будут иметь один и тот же знак, если обе делящие прямые c и d принадлежат одному и тому же углу (основному или смежному), они будут иметь разные знаки, если делящие прямые принадлежат разным углам. Следовательно, приходим к выводу, что:

Сложное отношение четырех прямых пучка ($abcd$) имеет положительный знак, если вторая пара прямых c, d (делящая пара) не разделяет первой пары a, b (базисная пара), $c, d \stackrel{\cdot\cdot}{-} a, b$. Наоборот, *знак сложного отношения ($abcd$) отрицателен, если $c, d \div a, b$.*

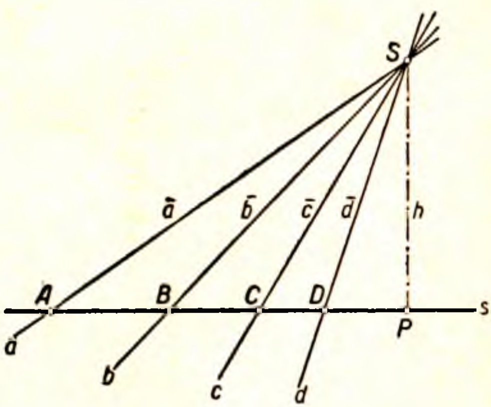
Как уже было показано, простое отношение трех точек прямой не является инвариантным при центральном проектировании. Таким инвариантом является, как будет показано далее, сложное отношение четырех точек. Это утверждение основывается на теореме о равенстве сложного отношения четырех прямых пучка сложному отношению четырех точек пересечения их с произвольной прямой. Инвариантность сложного отношения четырех точек ряда и четырех прямых пучка при всех проектированиях и пересечениях является основанием для установления понятия проективного соответствия рядов и пучков. Этим вопросам и посвящены ближайшие параграфы.

§ 27. Перспективные и проективные ряды и пучки.

1. Предположим, что прямолинейный ряд точек s является сечением пучка прямых S. В этом случае каждая точка ряда инцидентна соответственной прямой пучка. Пучок и ряд, находящиеся в таком расположении, называются **перспективными**. Можно сказать, что ряд, **перспективный** пучку, получается с помощью сечения пучка прямой, а пучок, перспективный ряду, — с помощью проектирования ряда пучком.

Докажем следующую теорему:

Сложное отношение четырех точек прямолинейного ряда равно сложному отношению четырех соответственных прямых перспективного пучка.



Черт. 93.

Доказательство. Пусть A, B, C и D — четыре точки прямолинейного ряда s, принадлежащие четырем соответственным прямым a, b, c, d перспективного пучка S (черт. 93). Отрезки SA, SB, SC и SD (прямых a, b, c, d) обозначим соответственно буквами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$. Расстояние точки S от прямой s обозначим через h. Тогда площадь каждого треугольника, образованного парой лучей пучка и прямой s, можно выразить двояким образом. Так, например, площадь треугольника ABS может быть выражена следующими двумя формулами:

$$2\triangle ABS = \bar{a}\bar{b}\sin(a,\ b),\quad 2\triangle ABS = AB\cdot h.$$

Аналогичными формулами представятся площади других треугольников.

Сравнивая два выражения площади треугольника ABS, получим:

$$AB\cdot h = \bar{a}\,\bar{b}\sin(a,\ b),$$

или

$$AB = \frac{\bar{a}\ \bar{b}}{h}\sin(a,\ b). \qquad (1)$$

Этой формулой мы и воспользуемся для доказательства теоремы. Имеем:

$$(ABCD) = \frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD} = \frac{\bar{a}\ \bar{c}\sin(a,c)\cdot\bar{b}\ \bar{d}\sin(b,\ d)}{\bar{b}\ \bar{c}\sin(b,\ c)\cdot\bar{a}\ \bar{d}\sin(a,\ d)} = \frac{\sin(a,\ c)\cdot\sin(b,\ d)}{\sin(b,\ c)\cdot\sin(a,\ d)} = (abcd)^1.$$

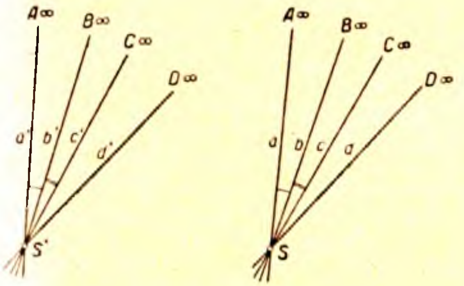
2. Заметим прежде всего, что эта теорема позволяет распространить понятие сложного отношения четырех элементов формы первой ступени и на те случаи, когда носителем данной формы является несобственный элемент пространства. В самом деле, определения сложного отношения четырех точек ряда или четырех прямых пучка, данные в предшествующих параграфах, относились лишь к таким формам первой ступени, которые имеют в качестве носителя собственную прямую или собственную точку. Понятно, что и теорема о равенстве сложных отношений четырех точек ряда и четырех соответственных прямых перспективного пучка также была доказана для этого случая. Если потребовать, чтобы эта теорема оставалась справедливой во всех случаях перспективного расположения ряда и пучка, то понятие сложного отношения четырех элементов формы первой ступени окажется определенным для любых форм первой ступени, в частности и для тех, которые имеют несобственного носителя.

Так, сложным отношением четырех точек A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ несобственной прямой мы назовем сложное отношение четырех прямых, проектирующих эти точки из произвольной собственной

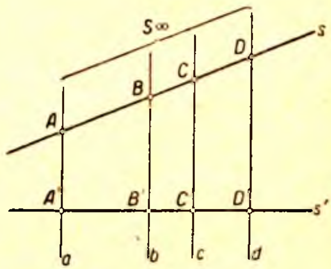
---

[1] Знаки сложных отношений $(ABCD)$ и $(abcd)$ будут всегда одинаковы, так как если $A,\ B \div C,\ D$, то и $a,\ b\div c,\ d$, если $A,\ B \doteq C,\ D$, то и $a,\ b \doteq c,\ d$.

точки пространства S. Ясно, что сложное отношение четырех упомянутых прямых не зависит от центра проектирования, так как все прямые, проектирующие одну и ту же несобственную точку, параллельны и, следовательно, две различные проектирующие четверки прямых S и S' образуют соответственно равные углы (черт. 94а). Аналогичным образом сложным отношением четырех прямых a, b, c, d, принадлежащих пучку с несобственным центром S_∞, мы назовем сложное отношение четырех точек пересечения этих прямых с произвольной собственной прямой s, не проходящей через S_∞ (черт. 94б). Ясно, что величина сложного



Черт. 94а.



Черт. 94б.

отношения не зависит от выбора прямой s. В самом деле, если проведем вторую секущую прямую s', то будем иметь:

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

так как простые отношения трех любых соответственных точек из каждой четверки равны (как инвариант параллельной проекции).

3. Теорема о равенстве сложных отношений двух перспективных форм устанавливает очень важное свойство сложного отношения, а именно его инвариантность при всех проектированиях и пересечениях.

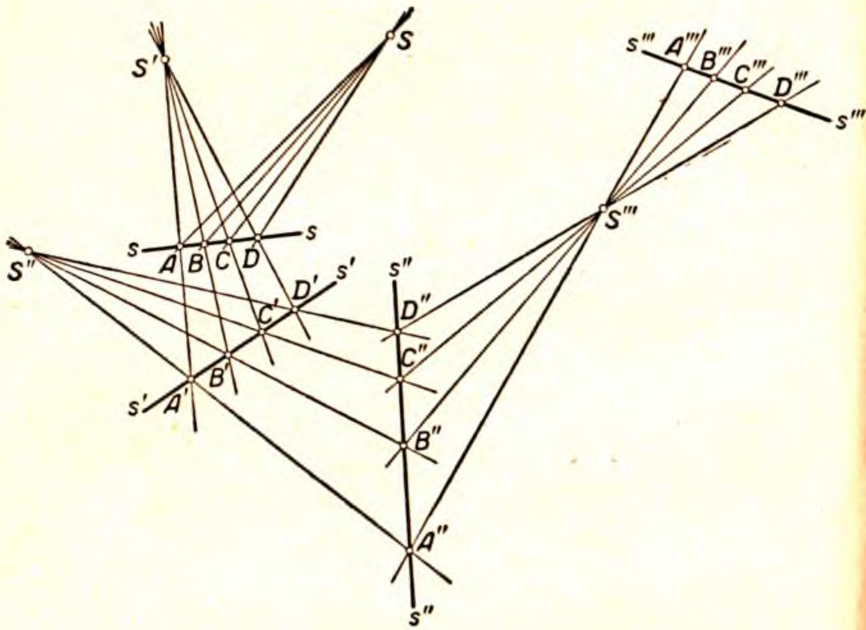
Пусть имеем пучок прямых S и перспективный ему ряд точек s (черт. 95). Из центра S' проектируем ряд s. Получаем пучок S', перспективный ряду s. Пересекаем пучок S' прямой s'. Получаем ряд точек s', перспективный пучку S'. Проектируем затем ряд s' из центра S''. Получаем пучок S'', перспективный ряду s'. Пересекаем пучок S'' прямой s''. Получим ряд точек s'', перспективный пучку S''. Проектируем ряд s'' из центра S'''. Получим пучок прямых S''', перспективный ряду s''. Пересечем пучок S''' прямой s'''. Получим ряд точек s''', перспективный пучку прямых S''', и т. д. Очевидно, такой процесс, состоящий из проектирований и пересечений, можно продолжить сколь угодно далеко. Замечательным свойством всех получаемых при этом рядов и пучков является то, что четверки соответственных элементов (точек или прямых) двух любых из них всегда имеют одно и то же сложное отношение.

В самом деле, согласно доказанной теореме при каждом переходе от пучка или ряда к перспективному ряду или пучку сложное отношение не изменяется. Таким путем мы приходим к понятию двух соответственных рядов, связанных цепью проектирований и пересечений. Таковы, например, ряды s и s'''. Если A, B, C, D и A''', B''', C''', D''' — четверки соответственных точек этих рядов, то будем иметь:

$$(ABCD) = (A'''B'''C'''D''').$$

Аналогичным свойством обладают два любых пучка, связанных цепью пересечений и проектирований (например, пучки S и S'''), или, наконец, ряд и пучок (ряд s и пучок S''').

Во всех этих случаях мы будем называть соответствующие формы первой ступени проективными и обозначать свойство п р о е к т и в н о с т и знаком $\overline{\wedge}$.



Черт. 95.

Так, например, можем написать:

$$s\,(ABCD)\ \overline{\wedge}\ s'''\,(A'''B'''C'''D'''),$$

что означает, что ряд s проективен ряду s'''. Подобным же образом формулы

$$S\,(abcd)\ \overline{\wedge}\ S'''\,(a'''b'''c'''d''')$$

и

$$s\,(ABCD)\ \overline{\wedge}\ S'''\,(a'''b'''c'''d''')$$

выражают проективность двух пучков S и S''' и проективность ряда s пучку S'''. Равенство сложных отношений соответственных элементов двух форм является характеристическим свойством их проективности. На этом основании можно называть *проективными всякие две формы первой ступени, у которых сложные отношения любых четырех пар соответственных элементов всегда равны.*

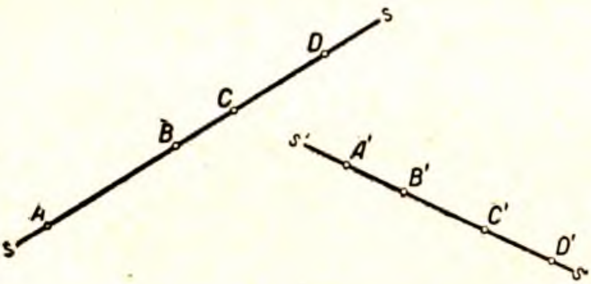
Такое определение проективности ведет свое начало от работ Якоба Штейнера[1] и носит название «определения Штейнера».

Таким образом, сложное отношение остается инвариантным при всех проектированиях и пересечениях. Переход от пучка S к пучку S''' или от ряда s к ряду s''', выполненный при помощи цепи перспектив, называется *проективным преобразованием* пучка прямых (соответственно ряда точек).

Как мы видели, сложное отношение четырех элементов пучка S (или ряда s) остается инвариантным при таком проективном преобразовании.

В главе V будет показано, что понятие проективного преобразования может быть распространено на формы 2-й ступени, в частности на плоское поле точек и прямых.

Проективная геометрия на плоскости изучает те свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех проективных преобразованиях плоского поля точек и прямых.



Черт. 96.

4. Мы получили проективные ряды и пучки при помощи операций проектирования и пересечения. В дальнейшем будет показано, что всякое проективное (в смысле Штейнера) соответствие двух форм первой ступени может быть осуществлено посредством цепи перспективных соответствий.

Принимая определение Штейнера проективности двух форм первой ступени, мы можем вывести из него весьма важные следствия:

1°. *Проективное соответствие двух форм первой ступени вполне определяется заданием трех пар соответственных элементов.*

---

[1] См. исторический очерк, стр. 354.

В самом деле, если, например, точкам A, B, C, ... ряда s соответствуют точки A', B', C', ... ряда s' (черт. 96), причем

$$s\,(A,\ B,\ C,\ \dots)\ \overline{\wedge}\ s'\ (A',\ B',\ C',\ \dots),$$

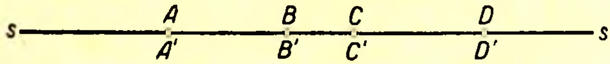
то положение каждой точки D', соответственной произвольной точке D первого ряда, вполне определяется. По определению мы должны иметь:

$$(A'B'C'D') = (ABCD) = \nu.$$

Но, как мы видели (§ 25), в качестве координаты для определения положения точки D' можно принять величину сложного отношения: $(A'B'C'D') = \nu$. Так как ν известно, то положение точки D' однозначно определяется.

Следовательно, проективное соответствие рядов S и S' определяется единственным образом.

2°. *Если у двух проективных рядов точек, расположенных на одном и том же носителе* (на прямой s), *три пары соответственных точек совпадают, то и все остальные пары соответственных точек также совпадают* (предложение Штаудта).



Черт. 97.

В самом деле, пусть, например, точки A, B, C совпадают со своими соответственными точками A', B', C' (черт. 97). Тогда для любой пары соответственных точек D и D' должны иметь:

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

или

$$(ABCD) = (ABCD').$$

Отсюда

$$D' \equiv D,$$

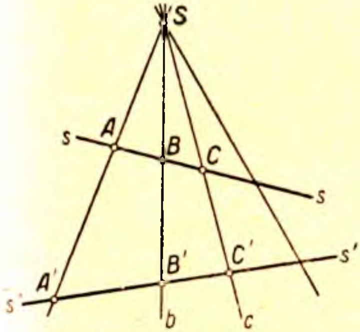
т. е. точки D' и D также совпадают. Само собой разумеется, что эти рассуждения вполне справедливы не только для прямолинейных рядов точек, но и для всяких двух проективных форм первой ступени.

5. Перспективное расположение рядов и пучков. Мы уже говорили о перспективном расположении ряда и пучка в том случае, когда ряд является сечением пучка (или пучок проектирует ряд).

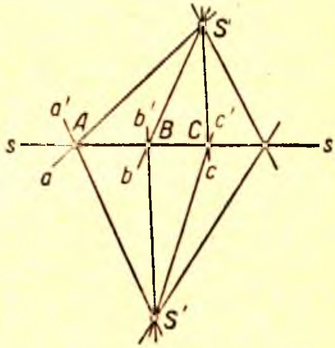
Два ряда точек называются перспективными, если они являются сечениями одного и того же пучка. Так, ряды s и s' (черт. 98а) перспективны, ибо они являются сечениями пучка S. Каждая пара соответственных точек рядов s и s' принадлежит одной прямой пучка S. Например, пара точек A и A' принадлежит прямой a, пара точек B и B' — прямой b и т. д.

Центр S пучка называется центром перспективности рядов s и s'. Для его определения достаточно иметь две пары соответственных точек перспективных рядов (например, A, A' и B, B').

Точно так же два пучка называются перспективными, если они проектируют один и тот же ряд точек. Например, пучки S и S' (черт. 98б) являются перспективными, так как они проектируют ряд s из центров S и S'.



Черт. 98а.



Черт. 98б.

Прямая s называется осью перспективности пучков S и S'. Для ее определения достаточно знать две пары соответственных прямых перспективных пучков (например, a, a' и b, b').

6. Докажем следующее предложение:

Необходимое и достаточное условие перспективности (перспективного расположения) двух проективных рядов или пучков состоит в том, что их общий элемент сам себе соответствует.

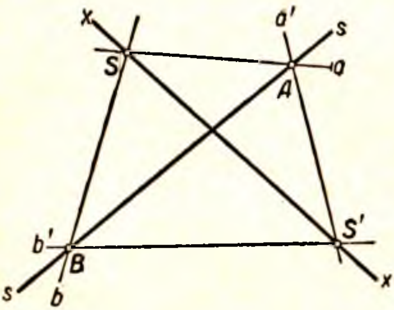
Черт. 99.

Необходимость этого условия совершенно очевидна, так как если ряды s и s' (черт. 99) перспективны, то они являются сечениями одного и того же пучка, например пучка S. Обозначим общую точку рядов s и s' (точку пересечения их носителей) буквой X. Прямая SX пересекает оба ряда в одной и той же точке X, которая, следовательно, сама себе соответствует.

Достаточность условия перспективности можно доказать следующим образом.

Предположим, что общая точка X двух проективных рядов s и s' сама себе соответствует. Пусть, кроме того, точкам A и B

ряда s соответствуют точки A', B' ряда s'. Найдем точку пересечения прямых AA' и BB' и обозначим ее буквой S. Если будем рассматривать два перспективных прямолинейных ряда, образованных пересечением пучка S прямыми s и s', то в них будем иметь три соответственные пары точек: A, A'; B, B' и X, X.



Черт. 100.

Но по предположению те же пары точек являются соответственными для данных проективных рядов s и s'. Так как возможно лишь одно проективное соответствие, в котором три пары точек A, A'; B, B' и X, X являются соответственными, то отсюда заключаем, что данные проективные ряды являются перспективными с центром перспективности в точке S. Таким образом, доказывается и достаточность формулированного выше условия.

Совершенно аналогичным образом можно провести доказательство условия перспективности двух проективных пучков S и S' (черт. 100). При этом общая прямая x этих пучков сама себе соответствует, а ось перспективности определяется при помощи двух пар соответственных прямых (a, a' и b, b') данных пучков.

Заметим, что предложение о перспективности двух проективных пучков является двойственным по отношению к доказанному выше аналогичному предложению о перспективности рядов.

Для обозначения перспективности двух рядов или пучков употребляется знак: $\overline{\overline{\wedge}}$. Применяя этот знак к формам первой ступени, изображенным на чертеже 95, можем написать:

$$s\,(A,\ B,\ C,\ \ldots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ s'\,(A',\ B',\ C',\ \ldots),$$

$$s'\,(A',\ B',\ C',\ \ldots)\ \overline{\overline{\wedge}}\ s''\,(A'',\ B'',\ C'',\ \ldots),$$

но

$$s\,(A,\ B,\ C,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ s''\,(A'',\ B'',\ C'',\ \ldots).$$

§ 28. Задание и построение проективного соответствия.

Покажем, что проективное соответствие двух прямолинейных рядов может быть задано тремя парами произвольно выбранных соответственных точек: A, A'; B, B' и C, C' (черт. 101).

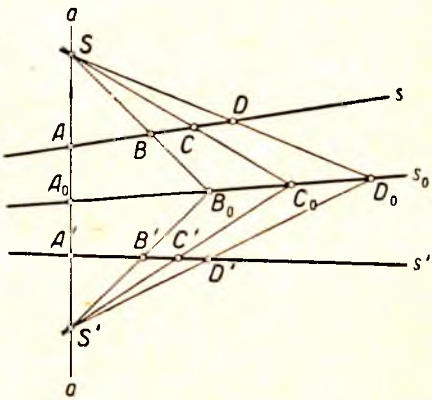
При этом задании проективное соответствие рядов $s\,(A,\ B,\ C,\ \ldots)$ и $s'\,(A',\ B',\ C',\ \ldots)$ осуществляется с помощью двух перспективных соответствий.

На прямой AA', проходящей через две соответственные точки рядов s и s', отмечаем произвольные точки S и S'. Примем эти точки за центры двух пучков и будем из центра S проектировать точки ряда s, а из центра S' — точки ряда s'. Тогда получим два пучка: пучок S, перспективный ряду s, и пучок S', перспективный ряду[1] s'. Но данные ряды s и s' по предположению проективны, поэтому перспективные им пучки S и S' также проективны. Но, как легко видеть, общая прямая этих двух пучков $SS' \equiv a$ сама себе соответствует, так как прямой $SA \equiv a$ первого пучка соответствует прямая $S'A' \equiv a$ второго пучка. Это означает, что пучки S и S' не только проективны, но и перспективны.

Для построения оси перспективности s_0 находим точки пересечения двух пар соответственных прямых, а именно:

$$SB \times S'B' = B_0,$$
$$SC \times S'C' = C_0.$$

Осью перспективности пучков S и S' должна быть прямая $B_0C_0 \equiv s_0$, пересекающая прямую a в точке A_0.



Черт. 101.

Теперь ясно, что построение соответственных точек двух проективных рядов s и s' может быть осуществлено с помощью двух перспективных соответствий. В самом деле, пусть для произвольной точки D ряда s требуется построить соответственную точку D' второго ряда s'. Построим прямую SD, проходящую через D и пересекающую прямую s_0 в точке D_0. Далее, соединяем точку D_0 с S'. Прямая $S'D_0$ пересекает прямую s' в точке D'. Эта точка и является искомой точкой, проективно соответственной точке D. В самом деле, будем иметь:

$$s'(A', B', C', D') \overline{\wedge} s_0(A_0, B_0, C_0, D_0),$$

$$s_0(A_0, B_0, C_0, D_0) \overline{\wedge} s(A, B, C, D).$$

Следовательно,

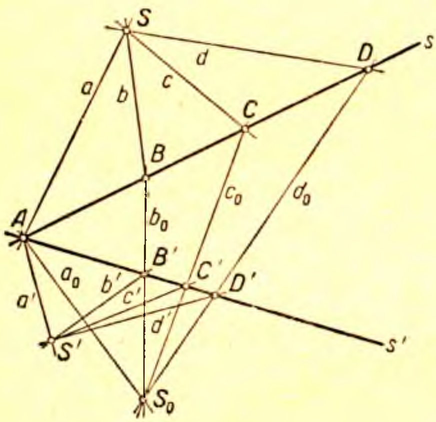
$$s(A, B, C, D) \overline{\wedge} s'(A', B', C', D').$$

Точки D и D' являются соответственными в проективном соответствии рядов $s(A, B, C, D)$ и $s'(A', B', C', D')$. Приведенное

[1] В частности, можно выбрать центры пучков в точках A' и A.

построение позволяет строить для каждой точки ряда s (при помощи двух перспектив) соответственную точку второго ряда s'[1].

Для построения соответственных прямых двух проективных пучков S и S', в которых соответствие задано тремя парами соответственных прямых a, a'; b, b' и c, c', можно применять двойственную схему. Такая схема дана на чертеже 102. Проективное соответствие пучков S и S' задано тремя парами прямых: a, a'; b, b' и c, c'. Находим точку пересечения A прямых a и a'. Через A проводим две произвольные прямые s и s'. Пучок S образует на прямой s перспективный ряд точек s. Пучок S' образует на прямой s' перспективный ряд точек s'. Так как данные пучки S и S' проективны, то и ряды s и s' также проективны. Замечая, что их общая точка A сама себе соответствует, заключаем, что ряды s и s' перспективны.



Черт. 102.

Следовательно, ряды s и s' являются сечениями одного и того же пучка, центр которого S_0 находится как точка пересечения прямых BB' и CC':

$$S_0 = BB' \times CC'.$$

Этот вспомогательный пучок S_0, перспективный как пучку S, так и пучку S', служит промежуточным звеном построения. Именно, если для произвольной прямой d требуется построить соответственную прямую d' второго пучка S', то поступаем следующим образом. Находим точку D пересечения прямой d с прямой s, затем проводим через D прямую d_0 пучка S_0 и находим точку D' ее пересечения с прямой s'. Наконец, строим прямую d' пучка S', проходящую через точку D'. Прямая d' и есть искомая прямая, так как

$$S\,(a, b, c, d) \barwedge S'\,(a', b', c', d').$$

Мы рассмотрели случай двух проективных рядов и двух пучков. В случае ряда и пучка вопрос легко свести к одному из предыдущих построений. Пусть, например, проективное соответствие ряда s и пучка S задано тремя точками A, B, C ряда и соответствующими им тремя прямыми a, b, c пучка S (черт. 103).

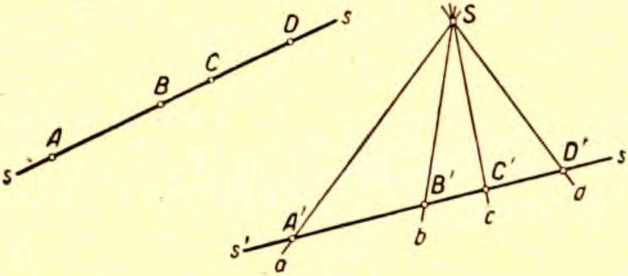
---

[1] Отсюда следует, что проективность двух форм первой ступени может быть определена при помощи цепи перспектив. Такое именно определение проективности было дано французским геометром P o n c e l e t (см. ист. очерк, стр. 352).

Проведем произвольную прямую s' и рассмотрим ряд s' $(A', B', C', \ldots)$, образованный на ней пучком S. Будем иметь:

$$s' (A', B', C', \ldots) \,\overline{\wedge}\, s (A, B, C, \ldots).$$

Таким образом, построение прямой d (пучка S), соответственной точке D (ряда s), можно выполнить следующим образом. Строим точку D' (ряда s'), соответственную точке D, тогда искомая прямая $d \equiv SD'$.



Черт. 103.

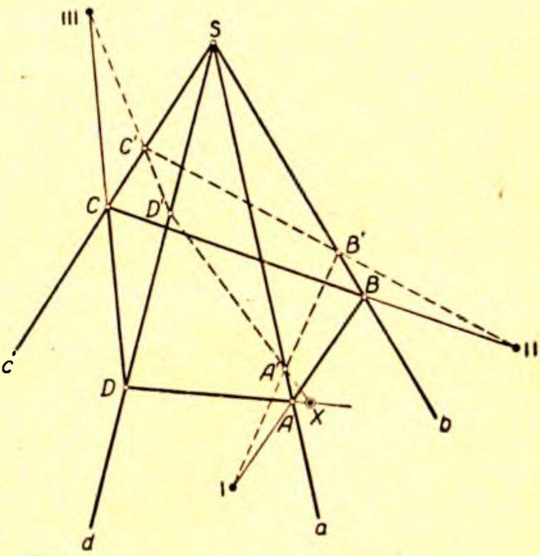
В качестве примера применения выводов настоящего параграфа к решению элементарно-геометрических вопросов рассмотрим следующую задачу:

«Вершины n-угольника скользят по n данным прямым, проходящим через точку S, а $(n - 1)$ сторон многоугольника вращаются вокруг $(n - 1)$ данных точек.

Доказать, что при этом последняя сторона многоугольника также будет вращаться вокруг неподвижной точки, и построить эту точку».

Предположим, что вершины $A, B, C, D, \ldots$ данного многоугольника скользят по прямым $a, b, c, d, \ldots$, проходящим через неподвижную точку S, а стороны AB, BC, CD, ... проходят последовательно через заданные точки I, II, III, ... (черт. 104).

Требуется доказать, что последняя сторона (на чертеже — сторона DA) будет при этом вращаться вокруг некоторой неподвижной



Черт. 104.

точки X. Вершины многоугольника, двигаясь по прямым a, b, c, d, ..., описывают на этих прямых ряды точек, которые мы будем обозначать так: $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$, $d(D)$, ...

По условию имеем:

$$a(A) \overset{=}{\wedge} b(B)$$
$$b(B) \overset{=}{\wedge} c(C)$$
$$c(C) \overset{=}{\wedge} d(D)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Для последней пары рядов (на чертеже это ряды $d(D)$ и $a(A)$) будем иметь:

$$d(D) \overline{\wedge}\, a(A).$$

С другой стороны, общая точка S сама себе соответствует для указанных выше проективных рядов $d(D)$ и $a(A)$. Следовательно, проективное соответствие рядов $d(D)$ и $a(A)$ является перспективным (§ 27):

$$d(D) \overset{=}{\wedge} a(A).$$

Прямая DA, соединяющая соответственные точки этих рядов, должна проходить через неподвижную точку (центр перспективности) X.

Для построения неподвижной точки X изменим положение вершины A на прямой a. Обозначим новое положение вершины буквой A'. Тогда последовательное проектирование из центров I, II, III, ... определит нам вершины B', C', D', ... многоугольника. Искомая точка X является точкой пересечения прямых DA и $D'A'$.

§ 29. Гармонизм.

1. Гармонизмом называется особое расположение четырех точек на прямой или четырех прямых пучка[1]. Это расположение может быть охарактеризовано при помощи сложного отношения.

Четыре точки A, B, C, D, *лежащие на одной прямой, называются гармонически расположенными, если*

$$(ABCD) = -1.$$

Это равенство показывает, что пара точек A и B (базисная пара) разделена парой C и D (делящая пара), $AB \div CD$:

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = -1, \text{ или } (ABC) = -(ABD).$$

Последняя формула показывает, что точки C и D делят отрезок AB внутренним и внешним образом в одинаковом отношении (черт. 105). Если из какой-нибудь точки S спроектируем гармоническую четверку точек A, B, C, D, то получим гармоническую четверку прямых a, b, c, d.

---

[1] Или вообще четырех элементов какой-нибудь формы первой ступени.

При этом

$$(abcd) = -1.$$

С понятием о гармоническом расположении точек учащиеся встречаются еще в средней школе. Так, рассматривая биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине C треугольника ABC, замечаем, что они делят гармонически противоположную сторону AB (черт. 106). Обозначая через M и N точки пересечения упомянутых биссектрис с прямой AB, будем иметь:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC}; \qquad \frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}.$$

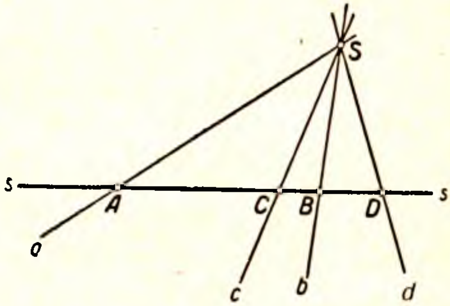
Отсюда получаем:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}, \frac{AM}{BM} = -\frac{AN}{BN},$$

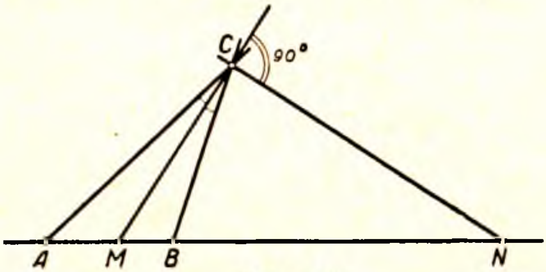
или

$$\frac{AM \cdot BN}{BM \cdot AN} = (ABMN) = -1.$$

Таким образом, точки A, B, M, N образуют гармоническую четверку. С другой стороны, пара сторон и пара биссектрис какого-либо угла (на черт. 106 — угла ACB) также являются гармонической четверкой.



Черт. 105.



Черт. 106.

Отметим, что для середины M отрезка AB четвертой гармонической является несобственная точка N_∞. В самом деле, в этом случае имеем:

$$(ABM) = -1 \text{ и } (ABN_\infty) = +1.$$

То же самое можно видеть из треугольника ABC, если биссектриса CM проходит через середину M противоположной стороны (черт. 107).

Так как

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} = 1,$$

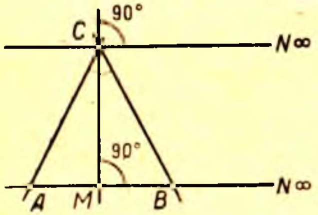
$$AC = BC.$$

Следовательно, в этом случае треугольник ACB равнобедренный, одна из его биссектрис (CM) перпендикулярна, а вторая (CN_∞) параллельна противоположной стороне (AB). Первая пересекает AB в середине M, а вторая — в несобственной точке N_∞.

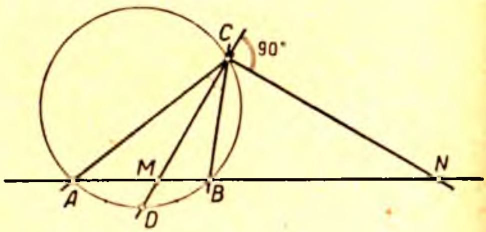
2. Построение четвертой гармонической точки. Свойство биссектрис можно использовать для построения четвертой гармонической точки к трем данным. Пусть, например, даны точки A, B (базисные) и точка M (делящая) (черт. 108). Требуется построить точку N (делящую) так, чтобы

$$(ABMN) = -1.$$

Проведем произвольную окружность через точки A и B. Дугу окружности AB делим пополам в точке D и проводим прямую



Черт. 107.



Черт. 108.

DM. Отметим вторую точку C пересечения прямой DM с окружностью и построим прямую CN, перпендикулярную к CM. Прямая CN пересекает AB в искомой точке N. Читатель легко убедится в этом из рассмотрения чертежа 108.

Другое построение четвертой гармонической точки основывается на применении подобных треугольников (черт. 109). Проводим через точки A и B пару параллельных прямых произвольного направления. Через точку M проводим произвольную секущую. Точки пересечения ее с двумя параллельными прямыми обозначим буквами P и P_2. На прямой BP_2 отложим отрезок $BP_1 = BP_2$. Наконец, проведем прямую PP_1, которая пересекает прямую AB в искомой четвертой гармонической точке N.

В самом деле, из подобия треугольников APN и BP_1N имеем:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AP}{BP_1}.$$

С другой стороны, из подобия треугольников APM и BP_2M имеем:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{P_2B}.$$

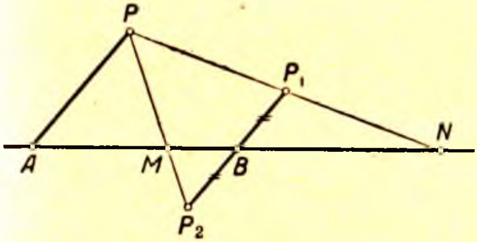
Но вследствие равенства $BP_1 = P_2B$ правые части этих равенств равны, следовательно, получаем:

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{MB},$$

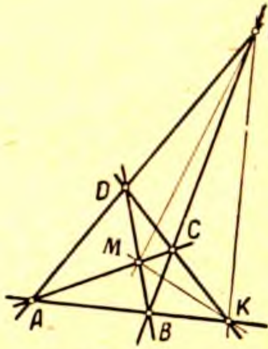
или

$$(ABMN) = -1.$$

Заметим, что построение четвертой гармонической прямой d к трем данным прямым a, b, c пучка S всегда может быть сведено к построению четвертой гармонической точки. Для этого достаточно пересечь пучок S какой-нибудь прямой s. Тогда



Черт. 109.

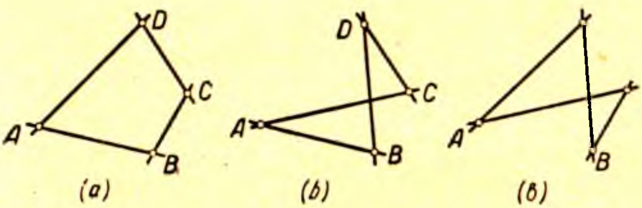


Черт. 110.

задача сведется к построению четвертой гармонической точки D по трем точкам A, B, C пересечения прямых a, b, c с секущей прямой s.

§ 30. Гармонические свойства полного четырехугольника (и четырехсторонника).

1. В элементарной геометрии четырехугольником, или *простым четырехугольником*, как мы теперь будем говорить, называется фигура, образованная четырьмя точками (вершины) и четырьмя отрезками (стороны), соединяющими вершины в определенном порядке.



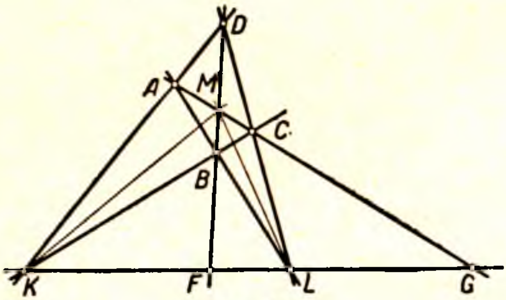
Черт. 111.

Полным четырехугольником называется фигура, образованная четырьмя точками (вершины), из которых никакие три не лежат на одной прямой, и шестью прямыми (стороны), определяемыми парами точек (вершин) (черт. 110).

В полном четырехугольнике содержатся три простых: $ABCD$, $ABDC$ и $ACBD$ (черт. 111).

Две стороны полного четырехугольника, проходящие через одну вершину, назовем «смежными», две стороны, не проходящие через одну вершину, назовем «противоположными». Так как каждая сторона проходит через две вершины полного четырехугольника, то противоположная ей сторона проходит через две другие вершины. Следовательно, для каждой стороны имеется только одна противоположная. Шесть сторон полного четырехугольника образуют три пары противоположных. На чертеже 110 имеем следующие пары противоположных сторон:

$$AB \text{ и } CD;\ AC \text{ и } BD;\ AD \text{ и } BC.$$



Черт. 112.

Точки пересечения противоположных сторон называются «диагональными точками». Так, на чертеже 110 имеем следующие диагональные точки:

$$AB \times CD = K;\ AD \times BC = L;\ AC \times BD = M.$$

Прямые, соединяющие диагональные точки, назовем «диагоналями». Это прямые KL, LM и MK.

Рассмотрим полный четырехугольник $ABCD$ (черт. 112). Точки пересечения диагонали KL со сторонами BD и AC обозначим соответственно буквами F и G. Проектируя четверку точек K, L, F, G из центра D на прямую AC, получим четверку точек A, C, M, G, причем, конечно,

$$(KLFG) = (ACMG).$$

Спроектируем затем четверку точек A, C, M, G из центра B обратно на прямую KL. Получим четыре точки L, K, F, G, причем

$$(ACMG) = (LKFG).$$

Из написанных равенств следует, что

$$(KLFG) = (LKFG) = \frac{1}{(KLFG)}.$$

Это значит, что

$$(KLFG)^2 = 1 \text{ и } (KLFG) = \pm 1.$$

Так как сложное отношение четырех точек равно $(+1)$ лишь в случае, если F совпадает с G, чего не может быть в данном случае, то будем иметь:

$$(KLFG) = -1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что точки K, L, F, G образуют гармоническую четверку. Это свойство полного четырехугольника можно формулировать следующим образом:

На каждой диагонали полного четырехугольника имеем гармоническую группу точек, образованную двумя диагональными точками (K, L) и точками пересечения (F, G) этой диагонали с парой сторон, проходящих через третью диагональную точку (M).

Проектируя точки K, L, F, G из центра D на прямую AC, получим гармоническую четверку точек:

$$(ACMG) = (KLFG) = -1.$$

Следовательно:

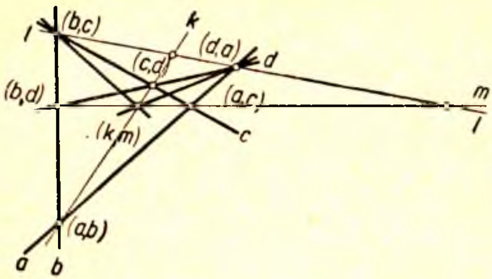
На каждой стороне полного четырехугольника имеем гармоническую группу точек, образованную парой вершин (A, C), диагональной точкой (M) и точкой пересечения (G) этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.

Если гармоническую четверку точек K, L, F, G спроектируем из диагональной точки M, то получим гармоническую четверку прямых: MK, ML, MF, MG. Первые две из них являются диагоналями, а две последние — сторонами полного четырехугольника. Поэтому можем сказать, что

Пара противоположных сторон полного четырехугольника делится гармонически парой диагоналей, проходящих через точку пересечения этих сторон.

2. Изучение полного четырехугольника показывает, что гармонизм не только является понятием проективным, но и может быть определен чисто геометрическим путем без всякого использования метрических понятий. В самом деле, гармонизм может быть определен как свойство полного четырехугольника, которое связано лишь с построением прямых и точек пересечения прямых. Этим воспользовался немецкий геометр Штаудт, который положил понятие гармонизма в основу чисто геометрического определения проективного соответствия (§ 47).

Так как рассмотренные гармонические свойства полного четырехугольника являются проективными, то можно поставить вопрос о гармонических свойствах фигуры, двойственной полному четырехугольнику. Такой фигурой является **полный четырехсторонник** (черт. 113). Эта фигура образована четырьмя прямыми (сторонами), из которых никакие три не проходят через одну точку, и шестью их точками пересечения (вершины). Если назовем две вершины, при-



Черт. 113.

надлежащие одной стороне, «смежными», а любые две несмежные вершины — «противоположными», то будем иметь три пары противоположных вершин: (a, b) и (c, d), (b, c) и (d, a), (b, d) и (a, c). Прямые k, l и m, соединяющие противоположные вершины, назовем «диагоналями», а точки их пересечения — «диагональными точками».

Гармоническое свойство полного четырехсторонника, двойственное формулированному выше (первому) свойству полного четырехугольника, может быть выражено следующим образом:

Через каждую диагональную точку (k, m) *полного четырехсторонника проходит гармоническая четверка прямых, а именно: две диагонали* (k *и* m) *и две прямые, соединяющие эту диагональную точку* (k, m) *с парой вершин, лежащих на третьей диагонали* $[(d, a), (b, c)]$.

Нетрудно убедиться в том, что ту же самую гармоническую четверку прямых можно получить из полного четырехугольника с вершинами (a, b); (c, d); (a, c) и (b, d). Для последнего диагонали k и m являются сторонами, а вторая пара прямых — диагоналями (см. третье гармоническое свойство полного четырехугольника).

Подобным же образом можно формулировать другие гармонические свойства полного четырехсторонника. Мы предоставляем это сделать самим читателям, а также показать, что эти свойства могут быть получены из полного четырехугольника.

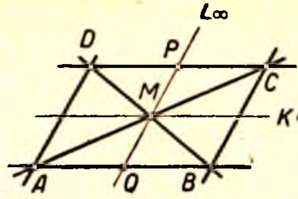
3. Гармонические свойства полного четырехугольника (или четырехсторонника) можно применить для п о с т р о е н и я ч е т в е р т о й г а р м о н и ч е с к о й т о ч к и к т р е м д а н н ы м.

Это построение можно проследить по чертежу 112. Пусть даны точки K, L, F. Требуется построить четвертую гармоническую точку G, принимая за основную пару точки K и L. Для построения поступаем следующим образом. Проводим через точку K пару произвольных прямых KA и KB. Пересекаем их произвольной прямой, проходящей через точку F. Обозначим точки пересечения буквами B и D. Проводим прямые LB и LD. Точки пересечения этих прямых с прямыми KD и KB обозначим соответственно буквами A и C. Тогда прямая AC пересекает прямую KL в искомой точке G.

Важно отметить, что в с е п о с т р о е н и е в ы п о л н я е т с я о д н о й л и н е й к о й.

Заметим также, что в силу известных свойств гармонического деления (§ 29) середине отрезка KL соответствует несобственная точка. Поэтому, если дана середина F отрезка KL, то с помощью одной линейки можно построить прямую $AC \parallel KL$. Обратно, если имеется пара параллельных прямых $AC \parallel KL$, то при помощи одной линейки можем разделить отрезок KL пополам (в точке F).

4. Рассмотрим следующий пример. Параллелограмм вместе с его диагоналями представляет собой полный четырехугольник. Обозначим его вершины буквами $ABCD$ (черт. 114). Противоположные стороны пересекаются в точках M, K_∞ и L_∞. Две из них несобственные, так как противоположные стороны AB и CD параллельны, так же как и стороны BC и AD. Диагональ $K_\infty L_\infty$ является несобственной прямой.

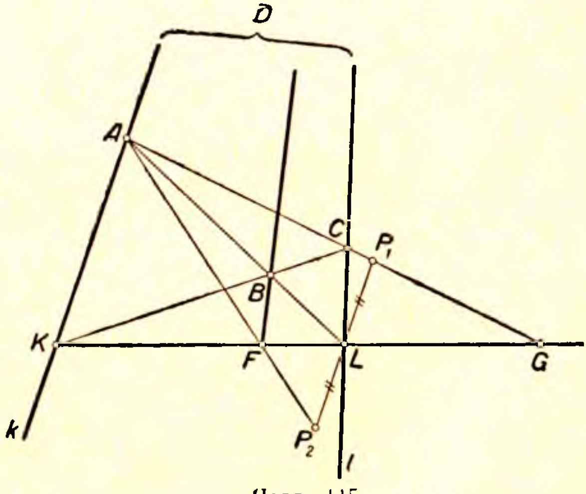


Черт. 114.

На стороне AB имеем гармоническую четверку $(ABK_\infty Q)$, причем точка Q, гармонически сопряженная точке K_∞, является серединой отрезка AB. На диагонали ML_∞ имеем гармоническую четверку $(ML_\infty PQ)$, причем точка M, гармонически сопряженная точке L_∞, делит отрезок PQ пополам. В точке M имеем гармоническую четверку прямых: две противоположные стороны AC, BD и две диагонали ML_∞, MK_∞. Эта четверка прямых пересекает несобственную прямую (диагональ $K_\infty L_\infty$) в четырех гармонических точках. Точно так же через точку L_∞ проходит гармоническая четверка прямых: стороны AD, BC и диагонали $(L_\infty M,\ L_\infty K_\infty)$. Эти прямые пересекают сторону DC в четырех гармонических точках C, D, P, K_∞.

Применим гармонические свойства полного четырехугольника к решению следующей задачи:

«Через данную точку F требуется провести прямую в недоступную точку D пересечения данных прямых k и l» (черт. 115).



Черт. 115.

Проведем через точку F произвольную прямую, пересекающую прямые k и l соответственно в точках K и L.

Построим точку G — четвертую гармоническую к точкам K, L, F. Для этого через L проводим прямую $P_1P_2 \parallel k$, а через F — произвольную прямую, пересекающую прямую k в точке A и прямую P_1P_2 — в точке P_2. Затем откладываем $LP_1 = LP_2$. Тогда прямая AP_1 пересекает прямую KL в точке G, четвертой гармонической к тройке точек K, L, F (ср. черт. 109).

Обозначим точку пересечения прямых AG и l буквой C. Проведем далее прямые AL и CK. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой B. Тогда прямая FB является искомой и проходит через недоступную точку D.

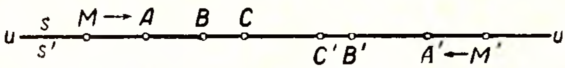
В самом деле, для полного четырехугольника $ABCD$ точки K и L являются диагональными, а прямая AC — стороной, пересекающей диагональ KL в точке G. Противоположная сторона должна проходить через точку F, гармонически сопряженную точке G. Следовательно, прямая FB является стороной полного четырехугольника и должна проходить через его недоступную вершину D.

§ 31. Проективные ряды (и пучки), имеющие общего носителя.

1. Если мы имеем ряд точек A, B, C, D, ... на прямой s и перспективный ему пучок прямых S $(a, b, c, d, \ldots)$, то, как уже было неоднократно отмечено (§ 18), соответственные элементы этих двух форм 1-й ступени расположены в одинаковом порядке. Это означает следующее. Если четыре точки ряда s образуют две разделенные пары, то и четыре перспективно соответственных прямых пучка S также образуют две разделенные пары. Если точка M пробегает ряд s в каком-либо определенном направлении A, B, C, ..., то и перспективно соответственная прямая m пробегает пучок S в определенном направлении a, b, c, ...

Предположим далее, что имеем два проективных ряда s и s'. Как было показано в § 28, проективное соответствие этих рядов может быть построено при помощи цепи перспективных соответствий рядов и пучков. Так как каждая перспективная пара таких рядов и пучков обладает одинаковым порядком расположения элементов в указанном выше смысле, то и два данных проективных ряда s и s' должны обладать тем же свойством. Если точка M ряда s описывает этот ряд в каком-либо определенном направлении A, B, C, ..., то соответственная точка M' описывает ряд s' также в определенном направлении A', B', C', ...

Соответствия, обладающие этим свойством, называются *упорядоченными*. Как мы видели, *проективные соответствия* (рядов или пучков) *являются упорядоченными*. Если два ряда s и s' расположены на одном и том же носителе (например, на прямой u) и между точками этих рядов установлено проективное соответствие, то они также обладают свойствами упорядоченных соответствий. Предположим, что точка M ряда s описывает этот ряд, перемещаясь по прямой u в определенном направлении A, B, C, ..., тогда соответственная точка M' описывает ряд s' в (определенном) направлении A', B', C', ... (черт. 116). Если направление A', B', C' совпадает с направлением A, B, C, то ряды s и s' называются **о д и н а к о в о н а п р а в л е н н ы м и**. Если же направления A, B, C и A', B', C' противоположны, то ряды s и s' называются **п р о т и в о п о л о ж н о н а п р а в л е н н ы м и**.



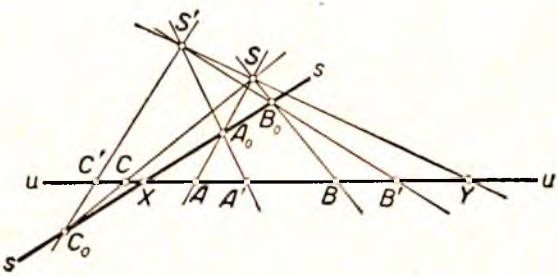
Черт. 116.

Аналогично двум проективным рядам с общим носителем (прямая) будем иметь два проективных пучка с общим носителем (центр пучков). Если прямая m описывает первый пучок, вращаясь в определенном направлении, например против часовой стрелки, то соответственная прямая m' описывает второй пучок, вращаясь в том же или в противоположном направлении.

Следовательно, можем иметь одинаково направленные или противоположно направленные пучки с общим носителем.

2. Предположим, что имеем два проективных ряда (или пучка) с общим носителем. Возникает вопрос о двойных (или совпавших) точках этих рядов. Согласно теореме Штаудта (§ 27) их не может быть больше двух, так как при наличии трех двойных точек все соответственные пары точек проективных рядов совпали бы, т. е. данные ряды были бы тождественными.

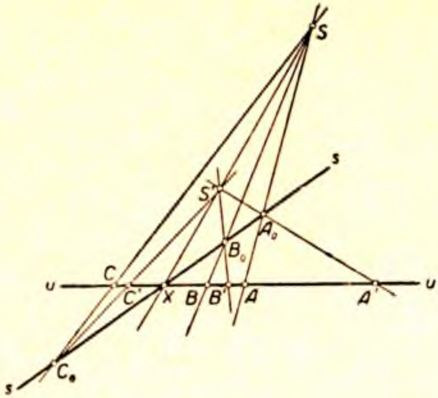
Таким образом, a priori возможны проективные формы первой ступени с общим носителем, имеющие или два двойных элемента, или один двойной элемент, или не имеющие ни одного двойного элемента.



Черт. 117.

Примеры таких соответствий могут быть построены следующим образом.

1°. На чертеже 117 из центров S и S' проектируем точки прямой s на прямую u. На последней получаем два проективных



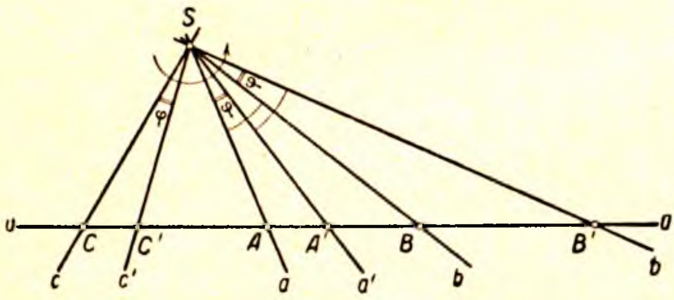
Черт. 118.

ряда: $(A, B, C, \ldots) \overline{\wedge} (A', B', C', \ldots)$. Это ряды, одинаково направленные, так как порядку ABC первого ряда соответствует такой же порядок $A'B'C'$ второго. Они имеют две двойные точки:

$$X = u \times s \text{ и } Y = u \times SS'.$$

Читатель легко убедится в этом, применяя построение соответственного элемента к точкам X и Y.

2°. На чертеже 118 имеем аналогичное построение, но прямые s и SS' пересекают прямую u в одной и той же точке X. Последняя является единственной двойной точкой одинаково направленных проективных рядов $(A, B, C, \ldots)$ и $(A', B', C', \ldots)$ на прямой u.



Черт. 119.

3°. На чертеже 119 построены два одинаково направленных проективных ряда на прямой u, не имеющих двойных точек. Для построения воспользуемся двумя проективными пучками с общим носителем S. Соответственные лучи второго пучка $(a', b', c', \ldots)$ получаются при помощи вращения лучей первого пучка $(a, b, c, \ldots)$ в определенном направлении на один и тот же угол φ. Ясно, что

$$S(a, b, c, \ldots) \overline{\wedge} S(a', b', c', \ldots),$$

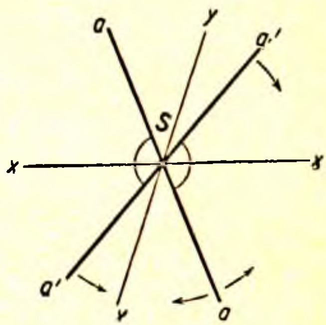
так как углы, образованные парами соответственных лучей этих пучков, всегда равны [например, $\angle(a, b) = \angle(a', b')$]. С другой стороны, они, очевидно, не могут иметь двойных лучей. То же самое можно сказать и о рядах $(A, B, C, \ldots) \barwedge (A', B', C', \ldots)$ на прямой u, перспективных вышеупомянутым пучкам.

3. Проективное соответствие двух форм первой ступени с общим носителем называется г и п е р б о л и ч е с к и м, если имеются два элемента, каждый из которых совпадает со своим соответственным (два двойных элемента); п а р а б о л и ч е с к и м, если имеется лишь одна пара совпадающих соответственных элементов (один двойной элемент), и э л л и п т и ч е с к и м, если совпадений соответственных элементов не имеется (двойных элементов нет). В п. 2 были приведены примеры одинаково направленных рядов гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Докажем теперь следующее предложение:

Проективное соответствие двух противоположно направленных форм первой ступени с общим носителем всегда является гиперболическим[1].

Пусть, например, имеем два проективных пучка с общим центром S (черт. 120). Предположим, что произвольной прямой a первого пучка соответствует прямая a' второго. Так как пучки противоположно направлены, то вращению прямой a против часовой стрелки будет соответствовать вращение прямой a' по часовой стрелке. Поэтому обе прямые должны встретиться в одном из двух углов (a, a'). На чертеже 120 этот угол отмечен дугами. Обозначим буквой x прямую совпадения соответственных прямых обоих пучков.



Черт. 120.

Представим себе теперь, что прямая a вращается по часовой стрелке, тогда прямая a' будет вращаться против часовой стрелки, и совпадение их произойдет в смежном углу (a, a'). Обозначим прямую совпадения буквой y. Таким образом, будем иметь два совпадения соответственных прямых данных проективных пучков. Следовательно, проективное соответствие является гиперболическим. Отметим, что двойные прямые принадлежат двум смежным углам, образованным прямыми a и a'. Другими словами, двойные элементы разделяют каждую пару соответственных элементов.

[1] Строго формальное доказательство этого предложения, без привлечения понятия вращения, может быть проведено при помощи аксиомы непрерывности Дедекинда (§ 19). Здесь, а также в ряде аналогичных случаев далее мы пользуемся более наглядными доказательствами, основанными на свойствах движения.

Как будет видно из дальнейшего, в случае двух одинаково направленных проективных форм первой ступени соответствие может быть гиперболическим, параболическим и эллиптическим.

Докажем следующее свойство гиперболических проективных соответствий:

Каждая пара соответственных элементов образует с двумя двойными элементами постоянное сложное отношение.

Доказательство. Обозначим буквами A, A' и B, B' две пары соответственных элементов проективных форм первой ступени с общим носителем, а буквами X и Y — двойные элементы этого соответствия.

Тогда будем иметь:

$$(XYAB) = (XYA'B'),$$

или

$$\frac{(XYA)}{(XYB)} = \frac{(XYA')}{(XYB')}.$$

Переставляя средние члены этой пропорции, получаем:

$$\frac{(XYA)}{(XYA')} = \frac{(XYB)}{(XYB')}$$

и, следовательно,

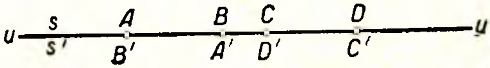
$$(XYAA') = (XYBB')$$

(ч. т. д.).

§ 32. Инволюция.

1. Пусть на прямой u расположены два проективных ряда s и s' (черт. 121).

Так как проективное соответствие можно задать тремя произвольно выбранными парами соответственных элементов, то можно выбрать эти пары A, A'; B, B' и C, C' так, чтобы точка A' совпа-



Черт. 121.

дала с B, а точка B' с A. Тогда в проективном соответствии рядов s и s' точка A (или B') обладает тем свойством, что этой точке соответствует одна и та же точка A' (или B), независимо от того, рассматриваем ли мы выбранную точку как точку (A) первого ряда или как точку (B') второго ряда.

Докажем, что если одна пара точек проективных рядов (s и s') обладает таким свойством, то тем же свойством обладают и все остальные пары соответственных точек данных рядов.

Докажем, например, что если точку C отнесем ко второму ряду, обозначив ее буквой D', то точка D, соответственная точке D', совпадет с точкой C'.

В самом деле, будем иметь:

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = (BAC'C).$$

Переставляя буквы в обеих парах, не изменим величины сложного отношения (§ 25):

$$(ABCD) = (ABCC').$$

Отсюда следует, что точка C' совпадает с точкой D ($D \equiv C'$).

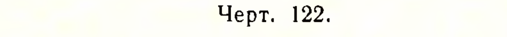
Таким образом, рассматриваемое проективное соответствие рядов s и s' обладает тем свойством, что каждая пара соответственных элементов этих рядов не зависит от того, какую из точек этой пары мы относим к первому, а какую — ко второму ряду. Такое проективное соответствие двух форм первой ступени с общим носителем называется и н в о л ю ц и е й.

Свойство пар соответственных элементов инволюции избавляет нас от необходимости обозначать каждую точку двумя буквами. Поэтому в дальнейшем мы будем обозначать каждую пару соответственных точек независимо от того, к какому ряду отнесена та или другая точка.

Для определения инволюции достаточно задать две пары соответственных элементов. Пусть, например, заданы пары A, A' и B, B' соответственных точек двух инволюционных рядов s и s' (черт. 122). Тогда будем иметь:

$$s\,(A, B, A', B', \ldots) \overline{\wedge}\, s'\,(A', B', A, B, \ldots).$$

Следовательно, получаем четыре пары соответственных точек проективных рядов s и s'. Как мы знаем, проективное соответствие



Черт. 122.

вполне определяется уже тремя парами соответственных точек, поэтому инволюция рядов s и s' на прямой u определена заданием двух пар инволюционно соответственных точек AA' и BB'.

Если имеем три пары соответственных точек инволюции A, A'; B, B' и C, C', то они связаны некоторым метрическим соотношением. В самом деле,

$$(ABA'C') = (A'B'AC),$$

или
$$\frac{(ABA')}{(ABC')} = \frac{(A'B'A)}{(A'B'C)};$$

$$\frac{AA'}{BA'} : \frac{AC'}{BC'} = \frac{A'A}{B'A} : \frac{A'C}{B'C}.$$

Но $AA' = -A'A$, следовательно,

$$\frac{BC'}{BA' \cdot AC'} = -\frac{B'C}{B'A \cdot A'C}.$$

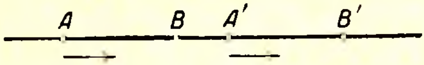
Этому равенству можно придать более симметричную форму:

$$\frac{AB'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{C'A} = -1.$$

2. Исследуем расположение пар соответственных элементов инволюции. Предположим, что пары AA' и BB', которые могут быть выбраны произвольно, разделены (черт. 123):

$$AA' \div BB'.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, при движении точки A по прямой u в определенном направлении соответственная точка A' долж-



Черт. 123.

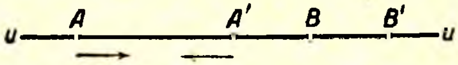
на двигаться в том же направлении. В самом деле, если бы точки A и A' двигались в противоположных направлениях, то при прохождении одной из них через точку B вторая соответственная точка не могла бы оказаться в точке B'. Следовательно, движения точек A и A' должны быть одинаково направленными. Докажем, что в этом случае инволюционное соответствие является эллиптическим, т. е. не имеет двойных элементов. Это видно из того, что при движении точки A по отрезку AB соответственная точка A' описывает отрезок $A'B'$, а при дальнейшем движении точки A по отрезку BA' точка A' описывает отрезок $B'A$ в том же направлении (на чертеже 123 этот отрезок содержит несобственную точку). Точка A не может «догнать» точку A'. Поэтому совпадение соответственных точек невозможно.

Рассмотрим далее инволюционное соответствие, определяемое двумя неразделенными парами соответственных элементов. Пусть эти пары точек обозначены буквами (черт. 124):

$$AA' \mathbin{\ddot{-}} BB'.$$

Установим прежде всего, что движения соответственных точек A и A' должны быть противоположно направленными.

В самом деле, если точка A движется, например, в направлении $AA'B$, то при одинаковом направлении движения соответственной точки A' мы пришли бы к противоречию. Противоречие заключается в том, что при движении точки A по отрезку AA' (не содержащему точек B, B') точка A' описала бы отрезок $A'A$ (содержащий точки B, B'), а следовательно, при прохождении точки A' через B' точка A не могла бы находиться в точке B.



Черт. 124.

Таким образом, убеждаемся в противоположности направлений движения соответственных точек.

На основании теоремы § 31 заключаем, что инволюционное соответствие является в этом случае **гиперболическим** и имеет два двойных элемента.

3. Докажем следующую теорему о двойных элементах гиперболической инволюции:

Двойные элементы гиперболической инволюции делят гармонически любую пару соответственных элементов. Пусть X и Y — двойные элементы инволюции, A, A' — пара соответственных элементов. Тогда имеем:

$$(XYAA') = (XYA'A).$$

С другой стороны, по свойству сложного отношения перестановка букв одной пары изменяет значение сложного отношения на обратное:

$$(XYAA') = \frac{1}{(XYA'A)}.$$

Из двух написанных равенств получаем:

$$(XYA'A) = \frac{1}{(XYA'A)},$$

или

$$(XYA'A)^2 = 1.$$

Отсюда следует, что сложное отношение $(XYA'A)$ может иметь значения $(+1)$ или (-1). Но предположение $(XYA'A) = +1$ означает, что точки A и A' совпадают, что невозможно, так как в этом случае инволюция имела бы три двойные точки. Таким образом, остается:

$$(XYA'A) = -1,$$

т. е. пара двойных точек делит гармонически любую пару соответственных точек.

На основании доказанной теоремы решается вопрос об **общей гармонической паре** для двух данных пар точек. Именно мы докажем, что *две данные пары точек* A, A' и B, B' *на прямой имеют общую гармоническую пару точек* X, Y *в том, и только в том, случае, когда данные пары не разделяют друг друга* ($A, A' \mathrel{\ddot{-}} B, B'$).

В самом деле, если имеем две пары точек A, A' и B, B', причем $A, A' \mathrel{\ddot{-}} B, B'$, то, как мы знаем, эти пары определяют гиперболическую инволюцию. Пусть X и Y — двойные точки этой инволюции, тогда по доказанной выше теореме имеем:

$$(XYAA') = -1, \ (XYBB') = -1.$$

Следовательно, точки X, Y являются общей гармонической парой для данных пар A, A' и B, B'.

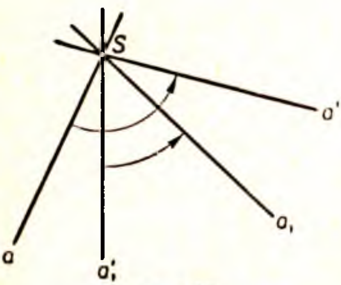
Предположим теперь, что данные пары разделяются:

$$A, A' \div B, B'.$$

Допустим далее, что данные пары точек имеют общую гармоническую пару. Обозначим точки этой последней буквами X и Y. Если точки X и Y рассматривать как двойные точки гиперболической инволюции, то последняя вполне определяется ими. Действительно, пары соответственных точек инволюции получаем как гармонически сопряженные относительно точек X и Y. Среди этих пар точек имеются и данные пары A, A' и B, B', так как они по предположению гармонически сопряжены относительно пары X и Y. Но пары соответственных точек гиперболической инволюции не разделяют друг друга. Приходим к противоречию. Следовательно, допущение о существовании общей гармонической пары невозможно.

4. Докажем еще следующую теорему:

Если имеем два инволюционных соответствия с общим носителем, из которых хотя бы одно эллиптическое, то они всегда имеют общую пару соответственных элементов.



Черт. 125.

Предположим, например, что мы имеем два инволюционных соответствия в пучке прямых с центром S (черт. 125). Пусть прямой a одно соответствие относит прямую a'. Мы обозначим его буквой I'. Другое соответствие относит прямой a прямую a_1. Мы обозначим его буквой I_1. Предположим, что инволюционное соответствие I_1 относит прямой a' прямую a_1'. Если прямая a_1' совпадает с прямой a, то пара прямых a, a' оказывается, очевидно, общей парой обеих инволюций I' и I_1. Таким образом, общую пару данных инволюционных соответствий получаем при совпадении прямой a_1' с прямой a. Но соответствие прямых a_1' и a можно представить как произведение двух данных инволюционных соответствий $\mathrm{I}' \cdot \mathrm{I}_1$. В самом деле, инволюция I' относит прямой a прямую a', а инволюция I_1 — прямой a' прямую a_1'.

Обозначим соответствие прямых a и a_1' буквой **V**. Будем иметь:

$$\mathbf{V} = \mathrm{I}' \cdot \mathrm{I}_1.$$

Как видно из вышеизложенного, вопрос сводится к выяснению существования двойных (совпавших) прямых в соответствии **V**. Возможны два случая:

1) Из двух данных инволюций I' и I_1 одна эллиптическая, а другая гиперболическая. Это значит, что соответствие прямых в одной из данных инволюций одинаково, а в другой противоположно направленное. Следовательно, соответствие **V** противоположно направленное. Поэтому имеем две двойные прямые, а именно, когда $a \equiv a_1'$ и $a' \equiv a_1$.

2) Обе данные инволюции I' и I_1 эллиптические. Тогда соответствие **V** одинаково направленное. Предположим, что прямой a в инволюции I_1 соответствует прямая a_1. Тогда пары a, a_1 и a', a_1' как соответственные в эллиптической инволюции I_1 должны разделять одна другую:

$$a,\ a_1 \div a',\ a_1',$$

или

$$a,\ a' \div a_1,\ a_1'.$$

С другой стороны, проективное соответствие **V** относит прямой a прямую a_1', а прямой a' — прямую[1] a_1.

Будем вращать прямую a против стрелки часов до совпадения с прямой a', тогда прямая a_1' как соответственная прямой a будет вращаться в том же направлении до совпадения с прямой a_1. Совпадение вращающихся прямых a и a_1' должно произойти внутри угла (a_1', a_1), или угла[2] (a, a').

Совпавшие прямые определяют, как мы знаем, одну из прямых общей пары двух данных инволюций. Второй прямой является прямая a' (или a_1), соответствующая прямой a в инволюциях I' и I_1.

Заметим, что двух общих пар данные инволюции иметь не могут. В самом деле, две пары соответственных элементов определяют единственную инволюцию. Следовательно, данные инволюции оказались бы в этом случае тождественными.

§ 33. Вторая теорема Дезарга.

Рассмотрим полный четырехугольник $KLMN$ и прямую s (черт. 126).

Обозначим через A, A'; B, B' и C, C' три пары точек пересечения прямой s с тремя парами противоположных сторон полного четырехугольника $KLMN$.

---

[1] Так как

$$\mathrm{I}'(a') = a;\ \mathrm{I}_1(a) = a_1.$$

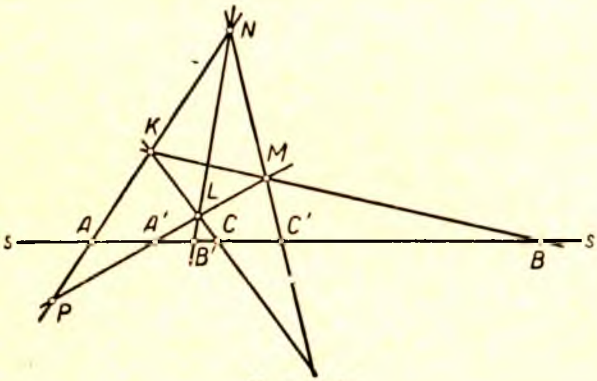
[2] В зависимости от того, какой из этих углов находится внутри другого.

Так называемая вторая теорема Дезарга утверждает, что:

Три пары противоположных сторон полного четырехугольника пересекают произвольную прямую s в трех парах точек, принадлежащих одной и той же инволюции.

Доказательство. Три пары точек пересечения $A, A'; B, B'$ и C, C' определяют проективное соответствие на прямой s. Надо показать, что это проективное соответствие является инволюцией. Для этого достаточно убедиться в равенстве сложных отношений:

$$(AA'BC) = (A'AB'C').$$



Черт. 126

В самом деле, написанное равенство показывает, что точкам A, B, C соответствуют точки A', B', C', причем точки A, A' соответствуют друг другу взаимно.

Проектируем точки A, A', B, C из центра K на прямую LM. Будем иметь:

$$(AA'BC) = (PA'ML).$$

Затем проектируем точки P, A', M, L из центра N обратно на прямую s. Получим:

$$(PA'ML) = (AA'C'B').$$

Но по свойству сложных отношений имеем:

$$(AA'C'B') = (A'AB'C').$$

Сравнивая написанные равенства, получаем:

$$(AA'BC) = (A'AB'C').$$

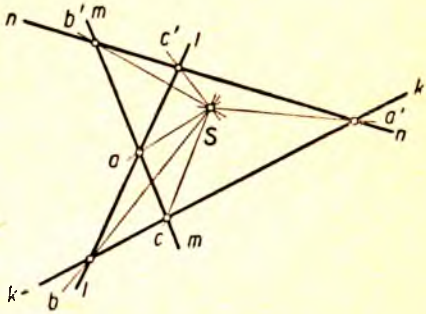
На основании принципа двойственности на плоскости можно формулировать теорему, двойственную второй теореме Дезарга:

Три пары противоположных вершин полного четырехсторонника проектируются из произвольной точки плоскости тремя парами прямых, принадлежащих одной и той же инволюции (черт. 127).

Применим вторую теорему Дезарга для построения соответственных элементов заданной инволюции.

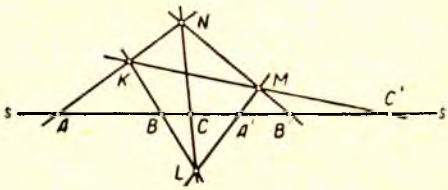
Пусть на чертеже 128 задана эллиптическая инволюция двумя парами соответственных точек A, A' и B, B'[1]. Пусть, кроме того, дана точка C. Требуется построить соответственную ей в данной инволюции точку C'.

Проводим через точки A и A' пару произвольных прямых AN и $A'L$ и пересекаем их третьей произвольной прямой CN, проходящей через точку C. Точки пересечения обозначим соответственно буквами N и L. Строим прямые BL и $B'N$ и находим их точки пересечения K и M соответственно с прямыми AN и $A'L$. Тогда прямая KM пересекает прямую s в искомой точке C'.



Черт. 127.

В самом деле, имеем полный четырехугольник $KLMN$, одна пара противоположных сторон которого проходит через точки A, A', другая пара — через точки B, B', а третья пара — через точки C, C'. По теореме Дезарга третья пара точек C, C' является соответственной в инволюции, определяемой двумя данными парами A, A' и B, B'. Важно отметить, что построение выполняется одной линейкой.



Черт. 128.

§ 34. Центр инволюции. Геометрическая интерпретация.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые метрические свойства инволюционных рядов и дадим их геометрическое применение.

1. Предположим, что инволюция точек на прямой u задана двумя парами A, A' и B, B' соответственных элементов. Обозначим

[1] Мы рассмотрим случай эллиптической инволюции, имеющей особенно большое значение для дальнейшего.

через O_∞ несобственную точку прямой u. Точка O, соответствующая точке O_∞ в данной инволюции, называется **центром инволюции**.

Найдем свойство соответственных элементов относительно центра инволюции O.

Так как инволюция есть особый случай проективного соответствия, то можем написать:

$$(ABOO_\infty) = (A'B'O_\infty O).$$

Раскрывая обе части этого равенства, получаем:

$$\frac{(ABO)}{(ABO_\infty)} = \frac{(A'B'O_\infty)}{(A'B'O)}.$$

Замечая, что $(ABO_\infty) = (A'B'O_\infty) = 1$ (§ 25), придем к следующему равенству:

$$(ABO) = \frac{1}{(A'B'O)},$$

или

$$\frac{AO}{BO} = \frac{B'O}{A'O},$$

что дает нам следующую формулу:

$$AO \cdot A'O = BO \cdot B'O = k \text{ (const)}. \tag{1}$$

Из этой формулы видим, что *произведение расстояний двух соответственных точек до центра инволюции есть величина постоянная*.

Предположим, что X — двойная точка инволюции, в таком случае формула (1) дает:

$$XO \cdot XO = k,$$

или

$$(XO)^2 = k, \quad XO = \pm\sqrt{k}. \tag{2}$$

Так выражается расстояние двойной точки до центра инволюции. В зависимости от того, будет ли

$$k > 0, \quad k < 0$$

или

$$k = 0,$$

расстояние XO окажется действительным, мнимым или равным нулю.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $k > 0$. Имеем две действительные двойные точки X и Y, расположенные по разные стороны от центра на расстояниях:

$$OX = +\sqrt{k}, \quad OY = -\sqrt{k}.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае получим **гиперболическую инволюцию** с двумя двойными точками.

Так как произведение отрезков OA и OA' положительно, то соответственные точки A и A' всегда расположены по одну сторону от центра.

2) $k < 0$. Формула (2) показывает, что в этом случае расстояние XO мнимо, т. е. инволюционное соответствие не имеет двойных точек (или, иначе, имеет две мнимые двойные точки). Это эллиптическая инволюция.

Соответственные точки A и A', как показывает формула (1), лежат по разные стороны от центра O.

3) $k = 0$. В этом случае имеем:

$$AO \cdot A'O = 0,$$

т. е. по крайней мере один из двух отрезков AO и $A'O$ равен нулю. Одна из точек соответственной пары обязательно совпадает с центром. Двойная точка также совпадает с центром инволюции. Этот исключительный случай инволюции можно рассматривать как предельный. Так как при этом инволюция имеет одну двойную точку (или две совпавшие), то она называется параболической. В параболической инволюции центр соответствует любой точке прямой. На этом основании параболическую инволюцию иногда совершенно исключают из рассмотрения, как не отвечающую понятию о проективном соответствии. Мы считаем полезным сохранить этот исключительный случай, так как без него исследование геометрических образов не было бы свободно от исключений (см., например, об инволюции, образованной на прямой пучком окружностей).

2. Геометрическая интерпретация. Покажем, что инволюция на прямой может быть осуществлена с помощью пучка окружностей. Предположим, что на прямой u имеем инволюцию, заданную двумя парами соответственных точек A, A' и B, B' (черт. 129).

Через точки A, A' и через произвольную точку P (не лежащую на прямой u) проводим окружность $(AA'P)$. Вторую окружность $(BB'P)$ проводим через точки B, B' и точку P. Обозначим вторую точку пересечения окружностей $(AA'P)$ и $(BB'P)$ буквой Q (точки P и Q могут в частном случае касания окружностей совпадать). Прямая PQ является радикальной осью построенных окружностей. Точку пересечения ее с прямой u обозначим буквой O. Нетрудно убедиться в том, что точка O является центром инволюции, заданной на прямой u парами A, A' и B, B'. В самом деле, по свойству секущей имеем:

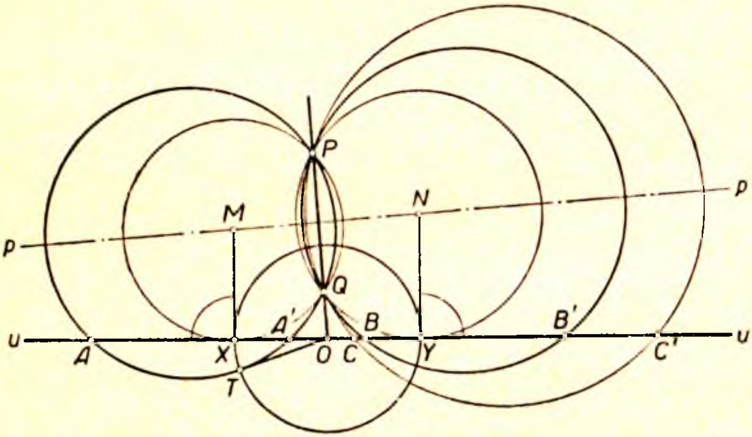
$$OA \cdot OA' = OP \cdot OQ = OB \cdot OB' = k.$$

Отсюда и следует, что точка O является центром инволюции.

Пусть дана произвольная точка C на прямой u. Требуется построить точку C', соответственную C в инволюции. Проведем через точки C, P и Q окружность и обозначим вторую точку ее пересечения с прямой u через C'. Точка C' и является искомой соответственной точкой. Действительно, будем иметь:

$$OC \cdot OC' = OP \cdot OQ = k.$$

Таким образом, любая окружность, проходящая через точки P и Q, пересекает прямую u в соответственных точках инволюции (например, в точках C и C'). Совокупность всех окружностей, проходящих через точки P и Q, называется **пучком окружностей**. Как мы видели, прямая u пересекает пучок окружно-



Черт. 129.

стей в парах точек данной инволюции. На чертеже 129 пучок окружностей образует на прямой u гиперболическую инволюцию, так как пары A, A' и B, B' не разделяют друг друга. Посмотрим, как построить двойные точки этой инволюции. Очевидно, двойную точку инволюции получим в том случае, когда окружность пучка касается прямой u, так как при этом обе точки пересечения окружности с прямой u сливаются в одну. Не забудем, что для двойных точек X и Y мы должны иметь:

$$OX^2 = OY^2 = k = OP \cdot OQ.$$

Построим из точки O касательную OT к одному (любому) из кругов пучка окружностей. Тогда будем иметь:

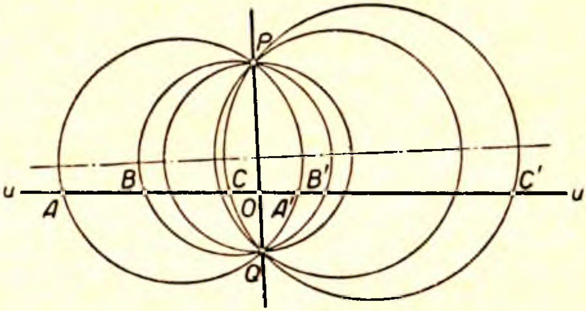
$$OT^2 = OP \cdot OQ = k.$$

Следовательно,

$$OT = OX = OY.$$

Поэтому для построения двойных точек инволюции из центра O описываем окружность радиусом OT, которая пересекает прямую u в искомых двойных точках X и Y. Центры касающихся окружностей можно построить, проведя в точках X и Y перпендикуляры к прямой u и найдя точки их пересечения с линией центров p пучка окружностей.

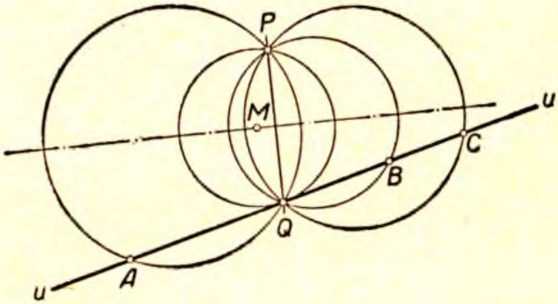
На чертеже 130 представлен случай эллиптической инволюции. Инволюция задана двумя разделенными парами A, A' и B, B' ($A, A' \div B, B'$). Центры P и Q пучка окружностей лежат по разные стороны от прямой u. Последняя пересекает общую хорду PQ всех окружностей пучка в точке O (центре инволюции).



Черт. 130.

Так как всякая окружность пучка PQ пересекает прямую u, то не существует такого круга, который касался бы прямой u. Другими словами, эллиптическая инволюция не имеет двойных точек (или имеет две мнимые двойные точки).

Таким образом, как показало исследование, пучок окружностей дает в сечении с прямой, не пересекающей хорду PQ, ги-



Черт. 131.

перболическую инволюцию. На прямой, пересекающей хорду PQ, пучок окружностей образует эллиптическую инволюцию.

Посмотрим, что представляет собой сечение пучка окружностей прямой, проходящей через одну из точек P или Q.

Предположим, например, что прямая u проходит через точку Q (черт. 131). Тогда одна точка пересечения любого круга пучка PQ совпадает с точкой Q. Поэтому любой точке A соответствует точка A', совпадающая с Q; точно так же точки B', C',..., соответственные точкам B, C, ..., совпадают с точкой Q. Наконец, эта точка является двойной, так как один из кругов пучка касается прямой u в точке Q.

Таким образом, имеем тот исключительный случай, когда одна точка (Q) соответствует всем остальным точкам прямой u. Мы назвали этот случай параболической инволюцией, так как такая инволюция имеет одну двойную точку Q.

В заключение отметим, что осуществление инволюции на прямой при помощи пучка окружностей дает простой способ построения соответственных точек инволюции. Так, на чертежах 129 и 130 показано построение точки C', соответственной данной точке C в гиперболической и эллиптической инволюциях. Кроме того, имеем простой способ построения двойных точек X и Y гиперболической инволюции, а следовательно, способ решения задачи об общей гармонической паре точек для двух данных пар (см. об этом § 32).

§ 35. Проективное преобразование и инволюция в координатах.

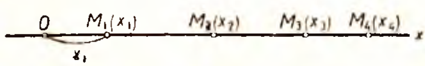
1. Предположим, что имеем на прямой OX четыре точки $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_4(x_4)$ (черт. 132). Найдем выражение сложного отношения (M_1, M_2, M_3, M_4) этих четырех точек через их координаты x_1, x_2, x_3, x_4. Будем иметь:

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{(M_1M_2M_3)}{(M_1M_2M_4)} = \frac{M_1M_3}{M_2M_3} : \frac{M_1M_4}{M_2M_4} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2},$$

или

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3} : \frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}. \tag{1}$$

Эта формула дает выражение сложного отношения четырех точек, лежащих на прямой, через их координаты.



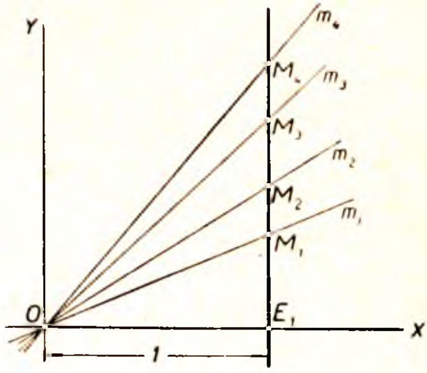
Черт. 132.

Подобным же образом можем определить сложное отношение четырех лучей пучка через их угловые коэффициенты. Принимая центр пучка за начало координат O, можем написать уравнения четырех его прямых m_1, m_2, m_3 и m_4 (черт. 133) в следующей форме:

$$y = k_1x, \tag{m_1}$$
$$y = k_2x, \tag{m_2}$$
$$y = k_3x, \tag{m_3}$$
$$y = k_4x. \tag{m_4}$$

Отложим на оси OX отрезок OE_1, равный единице длины ($OE_1 = 1$), и проведем через точку E_1 прямую, параллельную оси OY. Предположим, что эта прямая пересекает четыре выбранных луча соответственно в точках M_1, M_2, M_3 и M_4. Будем иметь:

$$(m_1m_2m_3m_4) = (M_1M_2M_3M_4).$$



Черт. 133.

Сложное отношение четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 можно выразить через их координаты на прямой E_1M_1. Эти координаты мы найдем из уравнения четырех прямых, полагая в них $x = 1$. Будем иметь:

$$E_1M_1 = y_1 = k_1, \quad E_1M_2 = y_2 = k_2, \quad E_1M_3 = y_3 = k_3, \quad E_1M_4 = y_4 = k_4.$$

Применяя формулу (1), получим:

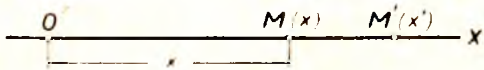
$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}.$$

Таким образом, для искомого сложного отношения четырех лучей будем иметь:

$$(m_1m_2m_3m_4) = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}. \tag{2}$$

2. Переходим к рассмотрению проективного соответствия в координатах. Предположим, что на прямой OX установлено проективное соответствие между точками M (x) и M' (x') двух рядов (черт. 134).

Это соответствие может быть задано тремя парами соответственных точек. Пусть, например, точкам M_1 (x_1), M_2 (x_2) и M_3 (x_3) первого ряда соответствуют точки M_1' (x_1'), M_2' (x_2') и $M_3'(x_3')$



Черт. 134.

второго. Тогда в силу инвариантности сложного отношения для каждой пары соответственных точек M (x) и M' (x') обоих рядов можем написать:

$$(M_1M_2M_3M) = (M_1'M_2'M_3'M'),$$

или, выражая правую и левую части через координаты по формуле (1), получим:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{x'_1 - x'_3}{x'_2 - x'_3} : \frac{x'_1 - x'}{x'_2 - x'}.$$

Это равенство можно представить в следующей форме:

$$\frac{x'_1 - x'}{x'_2 - x'} = \frac{\dfrac{x'_1 - x'_3}{x'_2 - x'_3}}{\dfrac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}} \cdot \frac{x_1 - x}{x_2 - x}.$$

Обозначая первый множитель правой части через λ, будем иметь:

$$\frac{x'_1 - x'}{x'_2 - x'} = \lambda \cdot \frac{x_1 - x}{x_2 - x}.$$

Решая это уравнение относительно x', получим формулу:

$$x' = \frac{(x'_1 - \lambda x'_2)\, x + (\lambda x_1 x'_2 - x_2 x'_1)}{(1 - \lambda)\, x + (\lambda x_1 - x_2)},$$

которая может быть записана в более короткой форме так:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}. \tag{3}$$

В этой формуле коэффициенты a, b, c и d обозначают величины, стоящие в скобках в предыдущей формуле и зависящие от координат данных точек M_1, M_2, M_3, M'_1, M'_2, M'_3. Таким образом, координата x' точки M' второго ряда представляет собой дробно-линейную функцию[1] от координаты x точки M первого ряда.

Отсюда приходим к выводу, что

Проективное преобразование точки M (x) первого ряда в точку M' (x') второго ряда выражается в координатах дробно-линейной функцией.

Нетрудно также убедиться в справедливости обратного предложения:

Всякое преобразование точки M (x) в точку M' (x') по формуле $x' = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ (при условии, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$) является проективным, т. е. не изменяет сложного отношения четырех точек прямой.

Оговорка относительно детерминанта $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ необходима, так

[1] Так как она является алгебраической дробью, числитель и знаменатель которой суть многочлены первой степени (линейные функции от x).

как при $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ будем иметь $ad - bc = 0$, или $ad = bc$. Следовательно,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = q$$

и

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} = q\frac{cx + d}{cx + d} = q,$$

т. е. координата x' не зависит от x.

Доказательство обратного предложения заключается в том, что четыре точки $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_4(x_4)$ преобразуются в четыре соответственные точки $M'_1(x'_1)$, $M'_2(x'_2)$, $M'_3(x'_3)$, $M'_4(x'_4)$ по формуле $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$. Затем составляется сложное отношение для той и другой четверки точек в координатах. Получающиеся выражения обнаруживают равенство обоих сложных отношений. Мы предоставляем читателю проделать встречающиеся при этом несложные выкладки самостоятельно.

Формулу проективного преобразования $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$ можно написать в виде уравнения, правая часть которого есть нуль, а именно:

$$cxx' + dx' - ax - b = 0. \tag{4}$$

Посмотрим, в каком случае это уравнение будет определять и н в о л ю ц и ю.

Пусть преобразование, выраженное написанным уравнением, инволюционно и пусть оно удовлетворяется некоторыми значениями координат x и x'. В таком случае оно должно удовлетворяться при замене буквы x буквой x' и обратно. Это значит, что уравнение преобразования должно быть симметричным относительно букв x и x'. Последнее достигается в том случае, если $d = -a$.

Таким образом, для изображения в координатах инволюции на прямой имеем уравнение:

$$cxx' - a(x + x') - b = 0, \tag{4'}$$

или формулу преобразования:

$$x' = \frac{ax + b}{cx - a}. \tag{5}$$

Разрешая последнюю формулу относительно x, получаем аналогичную формулу:

$$x = \frac{ax' + b}{cx' - a}. \tag{5'}$$

Если мы хотим найти двойные элементы инволюции, то в уравнении (4′) надо положить $x' = x$. Будем иметь:

$$cx^2 - 2ax - b = 0. \tag{6}$$

Координаты двойных точек будут корнями этого квадратного уравнения.

Если дискриминант $a^2 + bc$ уравнения (6) положителен ($a^2 + bc > 0$), то имеем две действительные двойные точки, т. е. гиперболическую инволюцию. В случае отрицательного дискриминанта ($a^2 + bc < 0$) координаты двойных точек мнимы, имеем эллиптическую инволюцию.

Наконец, при равенстве дискриминанта нулю ($a^2 + bc = 0$) находим одну двойную точку с координатой $\frac{a}{c}$. Формула преобразования (5) показывает, что в этом случае любая точка $M(x)$ соответствует двойной точке. В самом деле, мы уже видели ранее, что в случае равенства нулю детерминанта преобразования (в данном случае $\begin{vmatrix} a & b \\ c & -a \end{vmatrix} = -(a^2 + bc) = 0$) будем иметь:

$$x' = q = \frac{a}{c}$$

для любого значения x.

Таким образом, мы приходим к параболической инволюции, которая, как мы знаем (§ 34), обладает указанными свойствами.

Исследование проективного преобразования и инволюции для пучков можно провести аналогичным образом, применяя формулу (2), выражающую сложное отношение четырех лучей через их угловые коэффициенты.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. К двум заданным точкам A и B построить точку M так, чтобы

$$(ABM) = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2.$$

2. Угол (ab) равен 120°. Прямая m делит его на два угла (am) и (bm), отношение которых равно: $-\frac{1}{3}, -1, 0, +1, +\frac{1}{4}, +5$. Определить соответствующее значение (abm).

3. Даны точки A и B и точка M на прямой AB (вне отрезка AB). Требуется построить точку C, гармонически сопряженную с точкой M относительно A и B. Примените с этой целью три метода (при помощи полного четырехугольника, подобных треугольников и окружности).

4. Даны три прямые a, b, c одного пучка. Построить четвертую прямую, гармонически сопряженную с прямой c.

5. Даны три параллельные прямые $a \parallel b \parallel c$, являющиеся лучами пучка с несобственным центром. Построить в этом пучке четвертый гармонический луч d.

6. Три точки несобственной прямой заданы как несобственные точки сторон данного треугольника ABC. Построить на несобственной прямой четвертую гармоническую точку.

7. Дан простой четырехсторонник $abcd$ и прямая g. Требуется на прямой g построить четверку точек A, B, C, D так, чтобы $(ABCD) = (A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty)$, где через $A_\infty B_\infty C_\infty D_\infty$ обозначены несобственные точки данного четырехсторонника.

8. Даны четыре точки прямой A, B, C, D, следующие на равных расстояниях одна за другой. Вычислить все значения, которые может иметь сложное отношение этих четырех точек.

9. На прямой даны четыре точки A (0), B (5), C (2) и D (3). Найти все значения сложного отношения.

10. Даны три точки A (0), B (1), C (— 2). Пользуясь методом координат (§ 35), определить четвертую точку D при условии, что

$$(ABCD) = -3.$$

11. Даны три точки прямой A (3), B (— 1), C (— 2). Найти четвертую гармоническую, принимая за сопряженную точку: 1) A, 2) B, 3) C.

12. Даны четыре прямых пучка своими уравнениями: $y = \frac{x}{2}$, $y = x$, $y = 3x$ и $y = -2x$. Найти их сложное отношение.

13. Определить сложное отношение, которое образуют оси прямоугольной декартовой системы координат с прямыми:

$$y = 3x, \quad y = \frac{x}{2}.$$

14. Показать, что два проективных ряда передвижением по плоскости могут быть приведены в перспективное расположение.

15. То же для двух проективных пучков.

16. То же для ряда и проективного ему пучка.

17. Построить взаимно перпендикулярные лучи двух перспективных пучков. Исследовать задачу.

18. Доказать, что если три пары соответственных прямых двух проективных пучков пересекаются под одним и тем же углом, то и все пары соответственных прямых обладают тем же свойством.

19. Даны три пары соответственных точек двух проективных рядов. Построить точку второго ряда, соответствующую несобственной точке первого ряда, и наоборот.

20. Даны три пары соответственных точек двух проективных рядов. Построить точки, соответствующие общей точке обоих рядов, относя ее сперва к одному, а затем к другому ряду.

21. Рассмотреть аналогичную задачу для пучков.

22. Какой особенностью обладают два перспективных ряда, если центр их перспективности является несобственной точкой S_∞.

23. Соответствие двух перспективных пучков с несобственными центрами S_∞ и S'_∞ определяется двумя парами соответственных прямых $a \parallel b$ и $a' \parallel b'$. Построить прямую c пучка S_∞, соответственную данной прямой c' пучка S'_∞.

24. На прямой задана гиперболическая инволюция двумя парами точек A, A' и B, B' ($A, A' \div B, B'$). Построить (при помощи одной линейки) точку C', соответственную точке C.

25. Дана гиперболическая инволюция двумя парами соответственных прямых пучка $a, a' \div b, b'$. Построить двойные прямые пучка.

26. Можно ли рассматривать пары симметричных точек прямой (относительно фиксированной точки) как инволюцию? Каковы особенности такой инволюции?

27. Задайте эллиптическую (гиперболическую) инволюцию на несобственной прямой.

28. Пусть имеем три пары соответственных точек инволюции A,A'; B,B' и C,C'. Докажите, что

$$(ABC')\,(BCA')\,(CAB') = 1.$$

29. Проективное преобразование на оси OX задано уравнением $x' = \frac{2x-1}{x+3}$. Требуется найти точки, соответствующие началу координат и несобственной точке.

30. Инволюция на прямой задана уравнением $xx' = 1$. Показать, что эта инволюция гиперболическая, и найти ее двойные точки и центр.

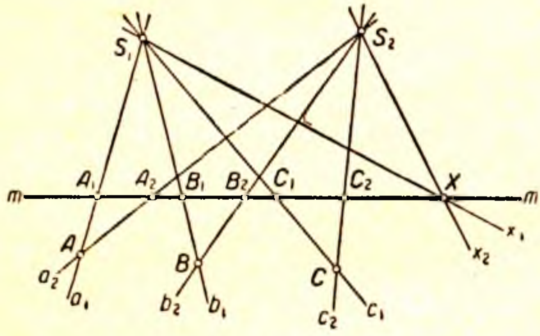
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 36. Ряды второго порядка.

Говоря о формах первой ступени, мы рассмотрели прямолинейный ряд точек, который мы теперь будем называть **рядом первого порядка**. Двойственную форму первой ступени — пучок прямых—будем называть **пучком первого порядка**.

Как будет далее показано, с помощью двух проективных пучков первого порядка можно образовать **ряд точек второго порядка**. Двойственной формой явится пучок прямых второго порядка, который можно образовать с помощью двух проективных рядов первого порядка.



Черт. 135.

Предположим, что мы имеем два проективных пучка S_1 и S_2 первого порядка (черт. 135):

$$S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots) \barwedge S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots).$$

Обозначим буквой A точку пересечения соответственных прямых a_1 и a_2 проективных пучков S_1 и S_2. Будем иметь:

$$a_1 \times a_2 = A$$

и аналогично

$$b_1 \times b_2 = B,$$
$$c_1 \times c_2 = C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассмотрим геометрическое место точек A, B, C, ... пересечения пар соответственных прямых данных пучков. Это геометрическое место точек называется р я д о м т о ч е к в т о р о г о п о р я д к а.

Докажем следующее свойство рядов второго порядка:

Произвольная прямая не может иметь более двух точек, принадлежащих данному ряду второго порядка.

Пусть дана прямая m (черт. 135). Пучок S_1, пересекая прямую m, дает на ней перспективный ряд точек: A_1, B_1, C_1, ... Пучок S_2 дает в пересечении с прямой m перспективный ему ряд точек: A_2, B_2, C_2, ... Так как пучки S_1 и S_2 проективны, то и образованные ими на прямой m ряды также проективны:

$$(A_1, B_1, C_1, \ldots) \overline{\wedge} (A_2, B_2, C_2, \ldots).$$

Таким образом, на прямой m имеем два проективных ряда точек. Два проективных ряда с общим носителем не могут иметь более двух двойных точек, так как если они имеют их три, то данные ряды совпадают (§ 27)[1]. Предположим, что точка X является двойной, т. е. оба соответственных луча x_1 и x_2 пересекают прямую m в точке X. Но тогда X является точкой ряда второго порядка. Следовательно, каждая двойная точка проективных рядов на носителе m является вместе с тем точкой ряда второго порядка. Легко видеть, что и, обратно, всякая точка ряда второго порядка, лежащая на прямой m, является двойной точкой рассматриваемых проективных рядов, так как через нее проходят оба соответственных луча пучков S_1 и S_2.

Но, как уже было сказано, двойных точек не может быть более двух, поэтому на прямой m не может быть более двух точек ряда второго порядка. Теорема доказана.

Следовательно, ряд второго порядка представляет собой геометрическое место точек, имеющее с произвольной прямой не более двух точек пересечения.

Это свойство и послужило основанием называть полученное геометрическое место р я д о м в т о р о г о п о р я д к а или к р и в о й в т о р о г о п о р я д к а[2].

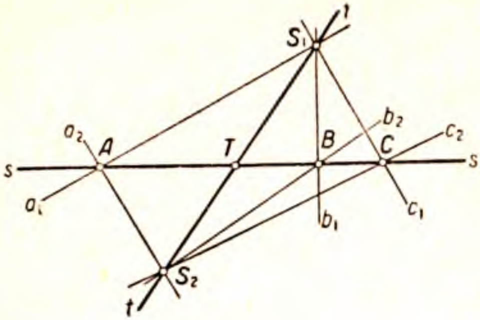
Рассмотрим частный случай двух проективных пучков, а именно предположим, что эти п у ч к и п е р с п е к т и в н ы:

$$S_1 (a_1, b_1, c_1, \ldots) \overline{\overline{\wedge}} S_2 (a_2, b_2, c_2, \ldots).$$

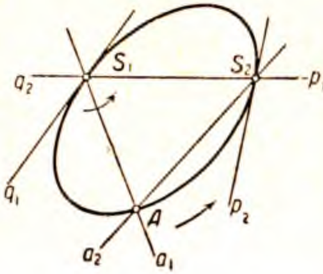
Обозначим буквой s ось перспективности пучков S_1 и S_2 (черт. 136). Тогда прямая s является геометрическим местом точек

[1] В этом случае пучки S_1 и S_2 не только проективны, но и перспективны (с осью перспективности m). Случай, когда пучок $S_1 \overline{\wedge}$ пучку S_2, будет рассмотрен ниже.

[2] Ниже убедимся, что образованные с помощью пучков кривые 2-го порядка тождественны с кривыми, известными читателю из курса аналитической геометрии.



Черт. 136.



Черт. 137.

пересечения пар соответственных прямых данных пучков, следовательно, прямая s входит в этом случае в состав ряда второго порядка. Рассмотрим далее общую прямую t обоих пучков. Предположим, что прямая t пересекает ось перспективности s в точке T. В таком случае прямой $S_1T = t$ первого пучка соответствует прямая $S_2T = t$ второго пучка (общая прямая сама себе соответствует), а следовательно, каждая точка общей прямой t принадлежит как прямой S_1T, так и прямой S_2T, т. е. является общей точкой пары соответственных прямых. Поэтому двойная прямая t также должна быть включена в состав ряда второго порядка.

Поэтому приходим к выводу, что

Ряд второго порядка, образованный двумя перспективными пучками S_1 и S_2, состоит из двух рядов первого порядка, а именно оси перспективности s и общей прямой двух данных пучков t.

Короче, ряд второго порядка распадается в данном случае на два ряда первого порядка.

Вернемся к общему случаю. Рассмотрим ряд (или кривую) второго порядка, образованный с помощью двух проективных пучков S_1 и S_2 (черт. 137). Общую прямую этих пучков можно рассмотреть как прямую первого пучка, обозначая ее через p_1. Тогда ей соответствует во втором пучке некоторая прямая p_2. Считая общую прямую данных пучков прямой q_2 второго пучка, получим соответствующую ей прямую q_1 первого пучка.

Самые центры S_1 и S_2, очевидно, принадлежат к ряду второго порядка, так как они являются точками пересечения пар соответственных прямых:

$$S_1 = q_1 \times q_2,$$
$$S_2 = p_1 \times p_2.$$

Будем называть прямую p_2 к а с а т е л ь н о й к ряду второго порядка в точке S_2, а прямую q_1 — к а с а т е л ь н о й в точке S_1.

Покажем далее, что данное здесь определение касательной в центре пучка (S_1 и S_2) совпадает с обычным определением касательной как предельного положения секущей. В самом деле, предположим, что произвольная прямая a_1 пучка S_1 (черт. 137) вращается в определенном направлении, описывая пучок. Если прямая a_1 стремится при этом к совпадению с прямой $p_1 \equiv S_1S_2$, то точка A описывает кривую второго порядка, стремясь к совпадению с точкой S_2. В то же время соответственная прямая $a_2 \equiv S_2A$ также вращается в определенном направлении, стремясь к совпадению с касательной прямой p_2. Поэтому касательная p_2 является предельным положением вращающейся секущей a_2, в то время как вторая точка пересечения A стремится к совпадению с первой точкой S_2. Центр пучка S_2 является, таким образом, точкой прикосновения касательной p_2. Аналогично центр пучка S_1 является точкой прикосновения касательной q_1.

§ 37. Пучки второго порядка.

1. Формой, двойственной ряду второго порядка, является пучок второго порядка. Применяя принцип двойственности на плоскости, можно было бы сформулировать свойства пучков второго порядка как соответственные установленным в предыдущем параграфе свойствам рядов второго порядка.

Считаясь с трудностью самостоятельного применения двойственной схемы для не привыкшего еще к этому методу читателя и необходимостью основательно изучить его, мы приводим здесь, по крайней мере на первых порах, все рассуждения полностью.

Пучок второго порядка можно образовать при помощи двух проективных рядов первого порядка. Предположим, что мы имеем два проективных ряда первого порядка s_1 и s_2, проективное соответствие которых установлено тремя парами соответственных точек: $s_1\ (A_1, B_1, C_1, \ldots) \,\overline{\wedge}\, s_2\ (A_2, B_2, C_2, \ldots)$. Каждая пара соответственных точек определяет прямую:

$$A_1A_2 \equiv a, \quad B_1B_2 \equiv b, \quad C_1C_2 \equiv c, \ \ldots .$$

Рассмотрим геометрическое место прямых a, b, c, ..., определяемых парами соответственных точек данных проективных рядов s_1 и s_2. Это геометрическое место называется пучком прямых второго порядка.

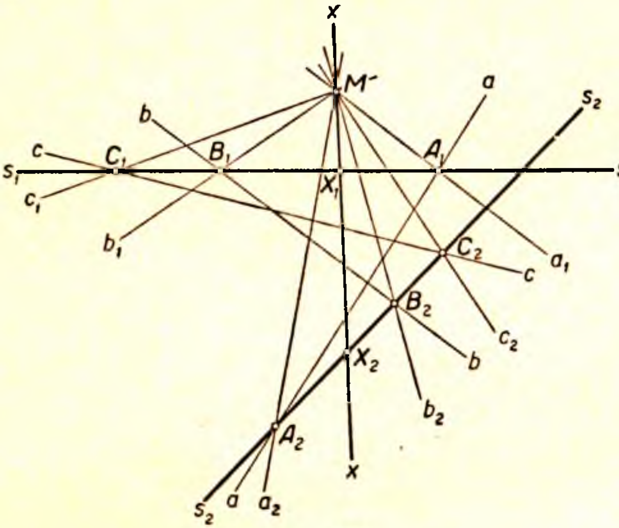
Докажем следующее свойство пучков второго порядка:

Через произвольную точку плоскости может проходить не более двух прямых пучка второго порядка.

Пусть M — произвольная точка плоскости (черт. 138). Будем проектировать из M ряды s_1 и s_2. Получим два пучка:

$$M\ (a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots) \,\overline{\wedge}\, M\ (a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots\ ).$$

Эти пучки, очевидно, проективны, так как они соответственно перспективны двум проективным рядам s_1 и s_2. Таким образом, получаем два проективных пучка с общим центром M. Предположим, что x является двойной прямой этих пучков. Тогда точки пересечения X_1 и X_2 прямой x с носителями s_1 и s_2 являются соответственными точками данных проективных рядов. Следовательно, прямая x принадлежит пучку второго порядка. Обратно, если прямая x, проходящая через точку M, принадлежит пучку второго порядка, то она определяет пару соответственных прямых MX_1 и MX_2 в проективных пучках первого порядка с центром M. Так как прямые MX_1 и MX_2 совпадают, то прямая x является двойной прямой пучков первого порядка с общим носителем M. Итак, установлено, что каждая прямая пучка второго порядка,



Черт. 138.

проходящая через M, есть двойная прямая двух рассматриваемых пучков первого порядка. Но пучки не могут иметь более двух двойных прямых, следовательно, через точку M не может проходить более двух прямых, принадлежащих пучку второго порядка (ч. т. д.).

Доказанное свойство дает основание называть рассмотренное геометрическое место прямых **пучком второго порядка**.

2. Рассмотрим частный случай двух проективных рядов s_1 и s_2, а именно когда эти ряды перспективны:

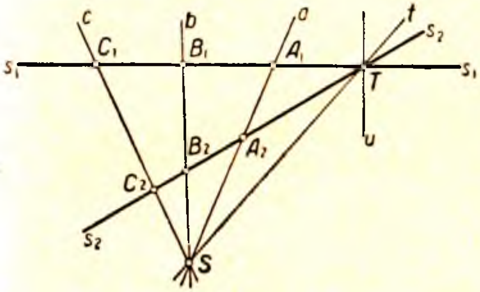
$$s_1 (A_1, B_1, C_1, \ldots) \overline{\overline{\wedge}} s_2 (A_2, B_2, C_2, \ldots).$$

Обозначим через S центр перспективности данных рядов s_1 и s_2 (черт. 139). Общая точка T этих рядов сама себе соответствует, поэтому любая прямая u, проходящая через точку T, содержит пару соответственных точек рядов s_1 и s_2, т. е. точку T. Следовательно, прямая u должна входить в состав пучка второго порядка. Теперь ясно, что в данном случае пучок второго порядка состоит из двух пучков первого порядка: пучка с центром S, все лучи которого принадлежат пучку второго порядка как соединяющие пары соответственных точек, и пучка с центром T, все лучи которого (например, u) также входят в состав пучка второго порядка. Итак,

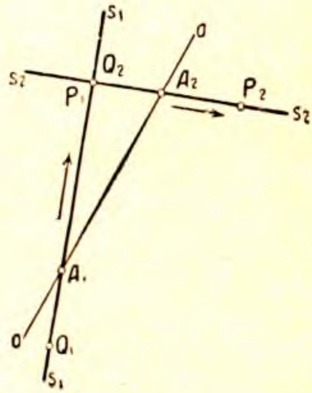
Пучок второго порядка, образованный двумя перспективными рядами s_1 и s_2, состоит из двух пучков первого порядка, а именно пучков с центрами в центре перспективности S и в общей точке двух данных рядов T.

Короче, пучок второго порядка распадается в данном случае на два пучка первого порядка: пучок S и пучок T.

Возвращаемся к рассмотрению общего случая. Предположим, что общей точке проективных рядов (черт. 140), как точке P_1 первого ряда, соответствует на прямой s_2 точка P_2 второго ряда.



Черт. 139.



Черт. 140.

Общей точке рядов, как точке Q_2 второго ряда, пусть соответствует на прямой s_1 точка Q_1 первого ряда.

Заметим прежде всего, что прямые s_1 и s_2 входят в состав пучка второго порядка. В самом деле, их можно рассматривать как прямые, соединяющие пары соответственных точек:

$$s_1 \equiv Q_1Q_2, \quad s_2 \equiv P_1P_2.$$

Точку Q_1 назовем **т о ч к о й п р и к о с н о в е н и я п р я м о й** s_1, а точку P_2 — **т о ч к о й п р и к о с н о в е н и я п р я м о й** s_2. Исследуем геометрический смысл этих понятий.

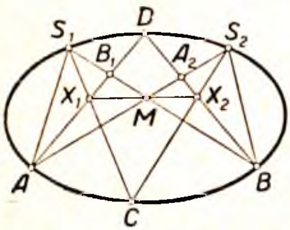
Рассмотрим пару соответственных точек A_1 и A_2 проективных рядов. Прямую, проходящую через пару A_1 и A_2, обозначим буквой a. Предположим, что точка A_1 перемещается по прямой s_1, описывая ряд s_1 в определенном направлении. Соответственная точка A_2 опишет при этом ряд s_2 также в определенном направлении. Наконец, прямая a опишет пучок второго порядка. Если точка A_1 стремится к совпадению с точкой P_1, тогда точка A_2 стремится к совпадению с P_2, а прямая a — к совпадению с прямой s_2.

Следовательно, можем сказать, что точка прикосновения P_2 является предельным положением точки A_2 пересечения движущейся прямой a пучка второго порядка с неподвижной прямой s_2. Аналогичное геометрическое толкование может быть дано и точке прикосновения Q_1 на прямой s_1.

§ 38. Основная теорема для рядов и пучков второго порядка.

1. При образовании ряда второго порядка с помощью проективных пучков (S_1) и (S_2) роль центров этих пучков S_1 и S_2 отличалась от роли всех остальных точек ряда второго порядка. Покажем теперь, что этого отличия на самом деле нет и что любая точка ряда второго порядка может служить центром одного из образующихся пучков. С этой целью докажем следующую фундаментальную теорему:

Точки ряда второго порядка проектируются из любых двух точек этого ряда двумя проективными пучками.



Черт. 141.

Пусть ряд второго порядка образован двумя проективными пучками с центрами в точках S_1 и S_2 (черт. 141). Эти пучки будем называть «образующими» (ряд второго порядка). Пусть A, B, C, D — четыре произвольные точки ряда второго порядка. Тогда прямые S_1C и S_2C являются соответственными в проективных пучках S_1 и S_2, образующих данный ряд второго порядка. Если точка C описывает этот ряд, то соответственные лучи S_1C и S_2C описывают образующие пучки. Обозначим через X_1 точку пересечения луча S_1C с прямой AD и через X_2 — точку пересечения луча S_2C с прямой BD. Тогда луч S_1C опишет на прямой AD перспективный ряд первого порядка (X_1) (точка пересечения X_1 перемещается по прямой AD), а луч S_2C опишет на прямой BD перспективный ряд первого порядка (X_2) (точка пересечения X_2 перемещается по прямой BD). Следовательно, можем написать:

$$\text{пучок } S_1\,(S_1C) \overline{\wedge} \text{ ряду } (X_1),$$

$$\text{пучок } S_2\,(S_2C) \overline{\wedge} \text{ ряду } (X_2).$$

Отсюда заключаем, что

$$\text{ряд } (X_1) \overline{\wedge} \text{ ряду } (X_2).$$

Общим элементом этих рядов является точка D. Так как лучу S_1D соответствует луч S_2D, то точка D сама себе соответствует. Следовательно, ряды (X_1) и (X_2) перспективны:

$$\text{ряд } (X_1) \overline{\overline{\wedge}} \text{ ряду } (X_2).$$

Найдем центр перспективности этих рядов. Так как лучу S_1A соответствует луч S_2A, то точке A первого ряда соответствует точка A_2 второго ($A_2 = BD \times S_2A$). С другой стороны, лучу S_1B соответствует луч S_2B. Поэтому точке B_1 первого ряда ($B_1 = AD \times S_1B$) соответствует точка B второго. Центр перспективности определяется как точка M пересечения прямых AA_2 и BB_1, т. е.

$$M = S_1B \times S_2A.$$

Прямая X_1X_2, соединяющая две соответственные точки перспективных рядов, должна проходить через их центр M перспективности. Следовательно, три точки X_1, X_2 и M лежат на одной прямой. При этом отметим, что положение центра перспективности M зависит только от четырех точек S_1, S_2, A и B и не зависит от положения точек C и D.

Рассмотрим теперь два пучка с центрами в точках A и B. Соответственными лучами этих пучков будем считать прямые, проектирующие точки данного ряда второго порядка, например прямые AD и BD. Докажем, что эти пучки проективны. Закрепим неподвижно точку C и будем теперь перемещать точку D. Если точка D описывает данный ряд второго порядка, то лучи AD и BD образуют соответственно на прямых CS_1 и CS_2 ряды (X_1) и (X_2) первого порядка. При этом

$$\text{ряд } (X_1) \overline{\overline{\wedge}} \text{ пучку } A\ (AD),$$

$$\text{ряд } (X_2) \overline{\overline{\wedge}} \text{ пучку } B\ (BD)[1].$$

Но прямая X_1X_2 всегда проходит через точку M, положение которой не зависит от движущейся точки D. Поэтому ряды (X_1) и (X_2) на прямых CS_1 и CS_2 перспективны, а проектирующие их пучки проективны, т. е.

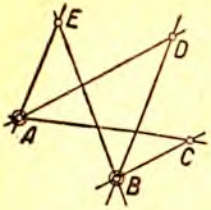
$$\text{пучок } A\ (AD) \overline{\wedge} \text{ пучку } B\ (BD).$$

Так как центры этих пучков A и B — произвольные точки данного ряда второго порядка, то теорема доказана. *Любые две точки ряда второго порядка могут быть выбраны в качестве центров образующих пучков.*

Из основной теоремы можно вывести весьма важные следствия.

С л е д с т в и е 1. Так как каждая точка A ряда второго порядка является центром одного из двух образующих пучков (цент-

[1] Следует обратить внимание на то, что на этот раз ряды X_1 и X_2 расположены соответственно на носителях CS_1 и CS_2, в то время как в первой части доказательства рассматривались ряды на прямых AD и BD.



Черт. 142.

ром второго может быть любая другая точка ряда второго порядка), то можем сказать, что каждая точка A имеет (единственную) касательную, для которой она является точкой прикосновения (см. § 36).

Следствие 2. Ряд второго порядка вполне определяется любыми своими пятью точками.

Пусть, например, даны пять точек ряда второго порядка: A, B, C, D, E (черт. 142). Тогда две (любые) из них можем принять за центры образующих пучков. Пусть выбраны точки A и B. Тогда проективное соответствие образующих пучков A и B определяется тремя парами соответственных лучей, а именно:

$$A\,(AC,\ AD,\ AE) \barwedge B\,(BC,\ BD,\ BE).$$

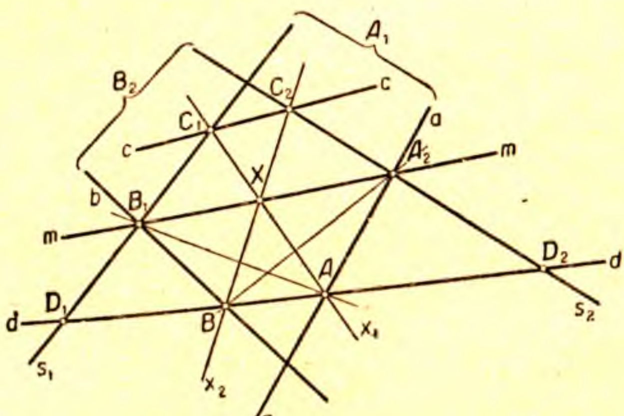
Пучки A и B образуют искомый ряд точек второго порядка, проходящий через заданные точки A, B, C, D, E.

2. Переходим к пучкам второго порядка. В силу принципа двойственности на плоскости для пучков второго порядка должна иметь место теорема, двойственная доказанной выше основной теореме о рядах второго порядка:

Прямые пучка второго порядка пересекают две какие-либо прямые этого пучка по двум проективным рядам точек.

Теорема эта является настолько важной для теории пучков второго порядка, что будет полезно провести рассуждения полностью и дать к теореме чертеж.

Пусть пучок второго порядка образован двумя проективными рядами на прямых s_1 и s_2. Пусть, кроме того, a, b, c, d — четыре



Черт. 143.

произвольные прямые пучка второго порядка (черт. 143). Тогда точки C_1 и C_2 являются соответственными в проективных рядах s_1 и s_2. Если прямая c описывает данный пучок второго порядка, то точки C_1 и C_2 описывают образующие ряды s_1 и s_2.

Обозначим через A точку пересечения прямой a с прямой d и через B — точку пересечения прямой b с прямой d. Будем считать прямые s_1, s_2, a, b, d неподвижными (фиксированными), а прямую c — описывающей пучок второго порядка. Тогда получим два проективных пучка первого порядка с центрами A и B, соответственными лучами которых являются прямые $AC_1 \equiv x_1$ и $BC_2 \equiv x_2$.

В самом деле, ряды (C_1) и (C_2) на прямых s_1 и s_2 проективны как образующие. Пучок A (AC_1) перспективен ряду (C_1); пучок B (BC_2) перспективен ряду (C_2). Поэтому имеем:

$$\text{пучок } A\ (x_1)\ \overline{\wedge}\ \text{пучку } B\ (x_2).$$

Докажем, что эти пучки перспективны. С этой целью рассмотрим их общий элемент — прямую d. Если прямая c совпадает с прямой d, то точка C_1 совпадает с точкой D_1, а точка C_2 — с точкой D_2. Поэтому лучу AD_1 соответствует луч BD_2. Другими словами, если луч x_1 совпадает с d, то и луч x_2 совпадает с d. Прямая d сама себе соответствует. Отсюда и заключаем о перспективности пучков:

$$\text{пучок } A\ (x_1)\ \overline{\overline{\wedge}}\ \text{пучку } B\ (x_2).$$

Найдем ось перспективности этих пучков. Если прямая c совпадает с прямой a, то она дает пару соответственных точек A_1 и A_2 образующих рядов. Поэтому лучу $AA_1 \equiv a$ соответствует луч BA_2. Эти лучи пересекаются в точке A_2:

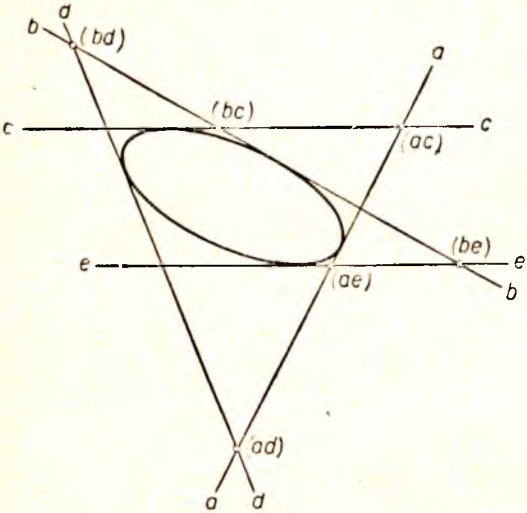
$$AA_1 \times BA_2 = A_2.$$

При совпадении прямой c с прямой b получаем пару точек B_1 и B_2, соответственных в проективных рядах s_1 и s_2.

Тогда лучу AB_1 пучка A соответствует луч $BB_2 \equiv b$ пучка B. Эти лучи пересекаются в точке B_1:

$$AB_1 \times BB_2 = B_1.$$

Таким образом, осью перспективности является прямая $A_2B_1 \equiv m$. На этой прямой должна лежать точка пересечения X всякой пары соответственных лучей x_1 и x_2 пучков A и B. Заметим, что ось перспективности m зависит лишь от четырех прямых s_1, s_2, a, b и не зависит от положения прямых c и d. Если поэтому мы, закрепив прямые s_1, s_2, a, b и c, стали бы перемещать прямую d, описывающую данный пучок второго порядка, то точка X пересечения прямых $AC_1 \equiv x_1$ и $BC_2 \equiv x_2$ должна по доказанному лежать на прямой m. Рассмотрим теперь те два ряда точек первого порядка, которые образует на неподвижных прямых a и b движущаяся прямая d. Прямая d пересекает прямые a и b соответственно в точках A и B. Рассмотрим ряды (A) и (B). Нетрудно убедиться в том, что эти ряды проективны. В самом деле, ряд (A) перспективен пучку $C_1(x_1)$, а ряд (B) перспективен пучку $C_2(x_2)$. Но пучки $C_1(x_1)$ и $C_2(x_2)$ перспективны с осью перспективности m. Поэтому ряды (A) и (B) проективны. Так как a и b — две произвольные прямые данного пучка второго порядка, то теорема доказана. Из нее вытекают следующие свойства пучков второго порядка.



Черт. 144.

Следствие 1. Любая прямая a пучка второго порядка может быть выбрана в качестве носителя образующего ряда (причем вторым носителем является какая-либо другая прямая b пучка). Поэтому каждая прямая пучка второго порядка имеет точку прикосновения (§ 37). Если рассмотрим геометрическое место точек прикосновения, то получим кривую, которая является огибающей данного пучка прямых второго порядка. Прямые пучка являются касательными к этой кривой. Последнюю называют также кривой второго класса, так как через каждую точку плоскости проходит не более двух касательных к кривой (иначе, не более двух прямых пучка второго порядка).

Следствие 2. Пучок второго порядка вполне определяется пятью заданными прямыми a, b, c, d, e. В самом деле, две из этих прямых, например прямые a и b, можно выбрать в качестве носителей образующих рядов. Тогда три остальные прямые c, d и e определяют проективное соответствие этих рядов (черт. 144). Именно имеем три пары соответственных точек[1]:

$$a\,[(ac),\ (ad),\ (ae)]\ \overline{\wedge}\ b[(bc),\ (bd),\ (be)].$$

Пучок второго порядка, определяемый проективными рядами a и b, содержит пять заданных прямых (a, b, c, d, e).

---

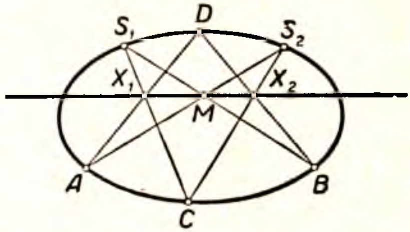
[1] На чертеже 144 эти точки обозначены через (ac), (ad), (ae) и (bc), (bd), (be).

§ 39. Теорема Паскаля.

1. При выводе основной теоремы (§ 38) мы получили в ходе доказательства некоторые свойства ряда второго порядка (а также и пучка второго порядка), заслуживающие отдельного изучения.

Возвращаясь к чертежу 141, заметим, что шесть заданных точек ряда второго порядка (или кривой второго порядка) можно рассматривать как вершины шестиугольника, вписанного в данную кривую второго порядка. Именно имеем шестиугольник S_1CS_2ADB (черт. 141 и 145). Будем называть (черт. 145) противоположными такие две стороны шестиугольника, которые в замкнутой последовательности сторон шестиугольника отделены одинаковым числом сторон (а именно двумя) при обходе их как в одном (прямом), так и в другом (обратном) порядке. Таковы пары сторон:

S_1C и AD, CS_2 и DB, S_2A и BS_1.



Черт. 145.

Точки пересечения пар противоположных сторон обозначены на чертеже 145 (так же, как и на черт. 141) буквами X_1, X_2 и M, а именно:

$$S_1C \times AD = X_1, \quad CS_2 \times DB = X_2, \quad S_2A \times BS_1 = M.$$

В процессе доказательства основной теоремы (§ 38) было обнаружено, что, как бы ни были выбраны вершины шестиугольника S_1CS_2ADB на кривой второго порядка, три точки пересечения пар противоположных сторон X_1, X_2 и M лежат на одной прямой. Это замечательное свойство шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, носит название теоремы Паскаля, по имени открывшего его знаменитого французского математика[1].

Теорема Паскаля может быть сформулирована следующим образом:

Во всяком шестиугольнике, вершины которого принадлежат ряду второго порядка, три точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой (прямая Паскаля).

Мы знаем, что уже пять точек вполне определяют кривую второго порядка. Поэтому шесть вершин вписанного шестиугольника должны быть связаны некоторой зависимостью, которая и выражается в проективной форме теоремой Паскаля. Если пять точек (вершин) будем считать заданными и определяющими кривую второго порядка, то шестая точка (вершина) должна удовлетворять теореме Паскаля. Поэтому последнюю можно рассмат-

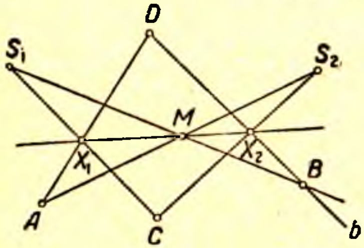
[1] См. исторический очерк, стр. 351.

ривать как своего рода «проективный эквивалент» уравнения кривой второго порядка.

Легко убедиться также в справедливости обратной теоремы Паскаля, которую можно сформулировать следующим образом:

Если три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника лежат на одной прямой, то его шесть вершин принадлежат одному и тому же ряду второго порядка.

Доказательство этой теоремы можно провести, пользуясь чертежом 145. В самом деле, рассмотрим шестиугольник $ADBS_1CS_2$, противоположные стороны которого пересекаются в точках X_1, M, X_2, лежащих на одной прямой. Пять вершин этого шестиугольника A, D, B, S_1, C определяют ряд второго порядка, которому они принадлежат. Предположим, что сторона CS_2 данного шестиугольника пересекается с упомянутым рядом второго порядка в точке S_2' (кроме точки C). Тогда мы будем иметь шестиугольник $ADBS_1CS_2'$, вписанный в кривую второго порядка. Применяя к нему прямую теорему Паскаля, находим, что сторона $S_2'A$ должна проходить через точку M. Следовательно, эта сторона совпадает с прямой MA, а точка S_2' — с точкой S_2.



Черт. 146.

2. Теорема Паскаля позволяет по пяти данным точкам кривой второго порядка построить сколько угодно новых точек той же кривой.

Построение. Пусть даны пять точек S_1, C, S_2, A, D кривой второго порядка [мы оставляем за ними прежние обозначения для облегчения чтения чертежа (черт. 146)].

Считая эти точки вершинами вписанного в кривую шестиугольника Паскаля, можем провести стороны S_1C, CS_2, S_2A и AD этого шестиугольника. Недостает тех двух сторон шестиугольника, которые проходят через шестую вершину. Эту шестую вершину B мы и будем строить, причем для определенности задачи будем искать ее на произвольно выбранной прямой, проходящей через вершину D. Эта прямая b пересекает один раз кривую второго порядка в точке D. Будем искать вторую точку пересечения ее с кривой, которую обозначим буквой B[1]. Другими словами, прямая b является стороной шестиугольника и может быть применена для построения прямой Паскаля. Имеем две точки этой прямой:

$$X_1 = S_1C \times AD, \qquad X_2 = CS_2 \times b.$$

---

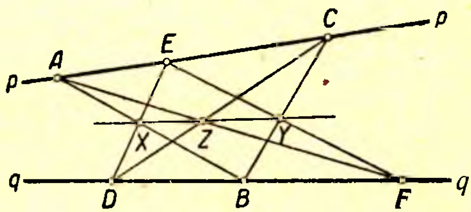
[1] В самом деле, выбирая точки D и S_1 в качестве центров образующих пучков, найдем в пучке S_1 луч S_1B, соответствующий лучу b. Тогда точка B пересечения соответственных лучей b и S_1B является искомой.

Следовательно, прямая Паскаля X_1X_2 построена и пересекает сторону S_2A третьей пары противоположных сторон в точке M. Но тогда прямая S_1M является второй стороной этой пары и определяет искомую вершину B:

$$B = S_1M \times b.$$

Таким образом, можем построить сколько угодно точек кривой второго порядка, вращая прямую b вокруг вершины D.

3. Рассмотрим теперь вопрос о том, сколько различных прямых Паскаля определяют шесть данных точек кривой второго порядка. Предположим, что A, B, C, D, E, F — шесть произвольных точек кривой второго порядка. Соединяя эти шесть точек в определенном порядке, получим вписанный в кривую шестиугольник Паскаля. Изменяя порядок соединения вершин, получим новый шестиугольник и т. д. Следовательно, надо подсчитать число различных шестиугольников, имеющих вершинами данные точки A, B, C, D, E, F. Число различных перестановок из шести элементов равно: $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$. Однако при этом подсчете каждый шестиугольник, очевидно, сосчитан шесть раз (начиная с каждой из его вершин, например $ABCDEF$, $BCDEFA$, ...). Кроме того, каждый шестиугольник сосчитан дважды, так как он может быть получен двумя противоположными порядками обхода вершин (например, $ABCDEF$, $FEDCBA$). Поэтому число различных шестиугольников Паскаля равно: $\frac{1}{2 \cdot 6} P_6 = 60$. Каждому из них соответствует своя прямая Паскаля. Таким образом, будем иметь 60 прямых Паскаля, определяемых шестью данными точками кривой второго порядка.



Черт. 147.

4. **Конфигурация Паскаля—Паппа.** Рассмотрим теорему Паскаля в том частном случае, когда кривая второго порядка распадается на пару прямых. Пусть A, B, C, D, E, F — шесть вершин шестиугольника Паскаля, расположенных по три на данных прямых p и q, которые мы рассматриваем как распавшуюся кривую второго порядка (черт. 147). Тогда имеем следующие три точки пересечения пар противоположных сторон шестиугольника:

$$X = AB \times DE, \quad Y = BC \times EF, \quad Z = CD \times FA.$$

По теореме Паскаля эти три точки лежат на одной прямой.

Рассмотренный частный случай теоремы Паскаля был известен еще древним греческим геометрам и носил название *теоремы Паппа* (Pappus).

Рассматривая чертеж 147, мы замечаем, что он содержит девять точек (шесть вершин и три точки пересечения противоположных сторон) и девять прямых (шесть сторон шестиугольника, две данные прямые p и q и прямая Паскаля). При этом через каждую точку проходят три прямые, а на каждой прямой лежат три точки. Следовательно, мы имеем конфигурацию $\left(\frac{9}{3}\right)$, которую называют конфигурацией Паскаля — Паппа.

Так как эта конфигурация правильная, то любая из прямых конфигурации может быть принята за прямую Паскаля. Предоставляем читателю разобраться в распределении остальных элементов конфигурации.

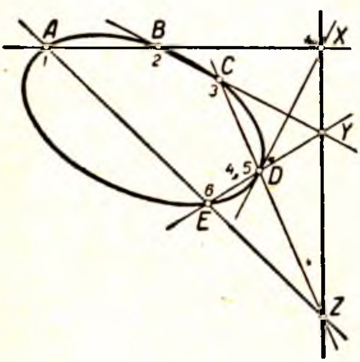
§ 40. Частные случаи теоремы Паскаля.

1. Теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, может быть применена и к многоугольникам с меньшим числом вершин.

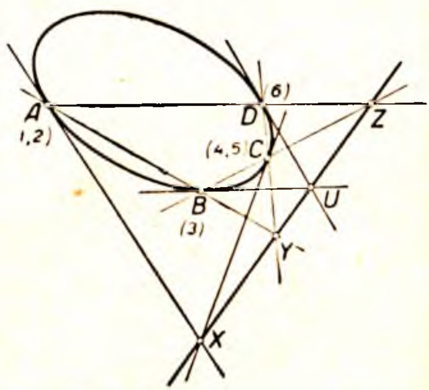
Для этого достаточно предположить, что две какие-либо вершины шестиугольника совпадают. Сторона, соединяющая две совпавшие вершины (а следовательно, и две совпавшие точки кривой второго порядка), является касательной к кривой, причем двойная вершина многоугольника служит точкой прикосновения этой стороны.

Учитывая эти соображения, можем применять теорему Паскаля к случаям вписанного пятиугольника, четырехугольника и треугольника. Пусть, например, в данную кривую второго порядка вписан пятиугольник $ABCDE$ (черт. 148).

Чтобы применить к нему теорему Паскаля, будем рассматривать одну из его вершин, например вершину D, как двойную. Тогда все шесть вершин шестиугольника Паскаля налицо и мо-



Черт. 148.



Черт. 149.

гут быть занумерованы, как это и сделано на чертеже. В точке D совпадают две вершины: 4 и 5.

Парами противоположных сторон, обозначенных при помощи номеров вершин, являются:

$$1, 2 \text{ и } 4, 5; \quad 2, 3 \text{ и } 5, 6; \quad 3, 4 \text{ и } 6, 1.$$

Согласно сказанному выше сторона $4, 5$ является касательной к кривой второго порядка в точке D.

Точки пересечения X, Y и Z пар противоположных сторон должны лежать на одной прямой (прямой Паскаля).

Таким образом, теорема Паскаля в случае пятиугольника формулируется следующим образом:

Во всяком пятиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, точки пересечения (Y и Z) двух пар несмежных сторон и точка пересечения (X) пятой стороны с касательной в противоположной вершине лежат на одной прямой.

2. Рассмотрим, далее, четырехугольник $ABCD$, вписанный в кривую второго порядка.

Будем предполагать, что две из вершин (черт. 149) этого четырехугольника являются двойными. Пусть, например, двойными являются вершины A и C. Тогда, нумеруя вершины, мы обозначим точку A двумя цифрами 1, 2, а точку C — цифрами 4, 5. Применяя теорему Паскаля к полученному таким образом «шестиугольнику» $1, 2, 3, 4, 5, 6$, будем иметь три точки пересечения пар противоположных сторон:

$$X = (1,2) \times (4,5),$$
$$Y = (2,3) \times (5,6),$$
$$Z = (3,4) \times (6,1).$$

Так как вершины 1 и 2 совпадают (в точке A), то сторона 1, 2 обращается в касательную в этой точке. Точно так же сторона 4, 5 является касательной в точке C. Эти касательные пересекаются в точке X. Две другие пары противоположных сторон пересекаются в точках Y и Z.

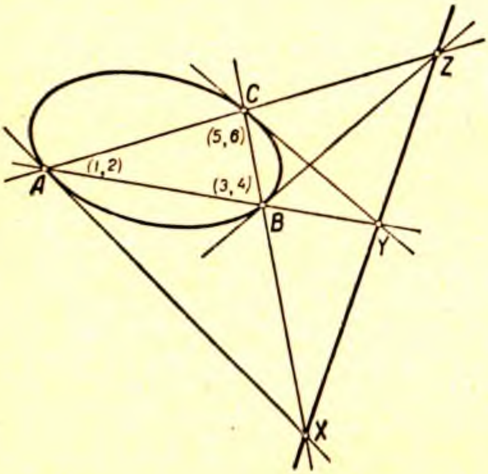
Три точки X, Y и Z по теореме Паскаля должны лежать на одной прямой.

Стороны AB и CD, пересекающиеся в точке Y, являются также противоположными и для данного четырехугольника $ABCD$. То же самое можно сказать и о паре сторон, пересекающихся в точке Z (BC и DA). Вместе с тем третья пара «сторон» AX и CX представляет собой пару касательных в противоположных вершинах A и C данного четырехугольника. Следовательно, на прямой Паскаля должны лежать точки пересечения противоположных сторон вписанного четырехугольника и точки пересечения касательных в противоположных вершинах. Так как мы могли бы считать двойными точками вершины B и D четырехугольника, то, очевидно, четвертая точка U пересечения касательных в противоположных вершинах B и D должна лежать на той же прямой Паскаля.

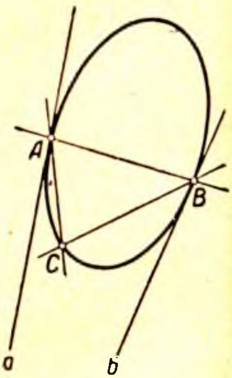
Итак, четыре точки X, Y, Z и U должны лежать на одной прямой. Отсюда получаем теорему Паскаля для четырехугольника в следующем виде:

Во всяком вписанном в кривую второго порядка четырехугольнике две пары противоположных сторон и две пары касательных в противоположных вершинах пересекаются в четырех точках, лежащих на одной прямой.

3. Переходим к случаю вписанного треугольника. В этом случае каждую вершину A, B и C треугольника приходится считать



Черт. 150.



Черт. 151.

двойной точкой (черт. 150). Благодаря этому все шесть вершин вписанного «шестиугольника» оказываются налицо, и теорема Паскаля может быть применена. Из шести сторон этого шестиугольника три [(2, 3), (4, 5) и (6, 1)] являются одновременно и сторонами данного треугольника (AB, BC и CA). Три другие стороны [(1, 2) (3, 4) и (5, 6)] являются касательными в вершинах данного треугольника (AX, BZ и CY).

Точки пересечения противоположных сторон «шестиугольника» определяются следующим образом:

$$X = (1,2) \times (4,5);\ Y = (2,3) \times (5,6);\ Z = (3,4) \times (6,1).$$

Из написанных формул видно, что эти точки являются точками пересечения сторон данного треугольника ABC с касательными в противоположных вершинах.

Три точки пересечения сторон вписанного треугольника с касательными в противоположных вершинах лежат на одной прямой.

4. Частные случаи теоремы Паскаля находят многочисленные применения при решении задач.

Так, например, если кривая второго порядка задана пятью точками A, B, C, D, E, то в каждой из данных точек можно построить касательную к кривой, используя с этой целью теорему Паскаля для пятиугольника. Так, на чертеже 148 показано построение касательной в точке D при помощи прямой Паскаля.

Другой пример дает чертеж 151. Даны три точки A, B и C кривой второго порядка и касательные a и b в двух из них. Этими данными кривая второго порядка (ряд точек второго порядка) вполне определяется. В самом деле, принимая точки A и B за центры образующих пучков, устанавливаем проективное соответствие этих пучков с помощью трех пар соответственных прямых:

$$AB,\quad AC \text{ и } a \text{ (в пучке } A);$$
$$b,\ BC \text{ и } BA \text{ (в пучке } B).$$

Это соответствие пучков A и B дает возможность построить сколько угодно новых точек кривой второго порядка.

В каждой из точек можем построить касательную, применяя с этой целью теорему Паскаля для вписанного треугольника.

§ 41. Теорема Брианшона.

Рассмотрим теперь теорему, двойственную теореме Паскаля. Эта теорема вытекает из свойств шести прямых, принадлежащих одному пучку второго порядка. На чертеже 152 прямые s_1, c, s_2, a, d, b образуют шестисторонник, все стороны которого принадлежат пучку прямых второго порядка. Каждая пара соседних сторон определяет вершину шестисторонника, а именно:

$$s_1 \times c = C_1; \quad c \times s_2 = C_2; \quad s_2 \times a = A_2;$$
$$a \times d = A; \quad d \times b = B; \quad b \times s_1 = B_1.$$

Шесть вершин этого шестисторонника распадаются на три пары **противоположных** вершин, а именно:

$$C_1 \text{ и } A; \quad C_2 \text{ и } B; \quad A_2 \text{ и } B_1.$$

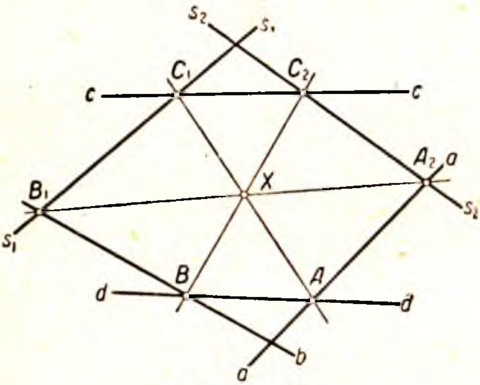
Как было доказано при выводе основной теоремы, три прямых C_1A, C_2B и A_2B_1, соединяющие пары противоположных вершин шестисторонника, проходят через одну точку X. Это свойство шестисторонника и составляет содержание **теоремы Брианшона**. Последнюю можно формулировать так:

Во всяком шестисторонике, стороны которого принадлежат пучку прямых второго порядка, три прямые, соединяющие пары противоположных вершин, проходят через одну точку (**точку Брианшона**).

Теорема Брианшона выражает геометрическую зависимость, которая должна иметь место, если шесть прямых принадлежат одному пучку второго порядка. В самом деле, как мы видели (§ 38, следствие 2), пучок второго порядка вполне определяется пятью своими прямыми. Поэтому шестая (произвольная) прямая этого пучка должна удовлетворять некоторому условию, которое в геометрической форме выражается теоремой Брианшона. Последняя, таким образом, является своего рода «проективным эквивалентом» уравнения пучка второго порядка.

Обратная теорема Брианшона может быть сформулирована следующим образом:

Если три прямые, соединяющие пары противоположных вершин шестисторонника, проходят через одну точку, то его шесть сторон принадлежат одному и тому же пучку второго порядка (т. е. данный шестисторонник описан около кривой второго класса).



Черт. 152.

При помощи теоремы Брианшона можно по пяти заданным прямым пучка второго порядка построить сколько угодно новых прямых пучка. Пусть, например, даны пять прямых s_1, c, s_2, a и d, определяющих пучок второго порядка (черт. 152). Чтобы сделать задачу построения новых прямых пучка определенной, зададим на одной из его сторон, например на стороне d, произвольную точку B и будем искать ту прямую b данного пучка второго порядка, которая проходит через точку B. Как было ранее доказано (§ 37), через одну точку может проходить не более двух прямых, принадлежащих пучку второго порядка. Одной из этих прямых, проходящих через точку B, является прямая d. Предположим, что выбранная точка B не есть точка прикосновения прямой d, тогда через нее должна проходить вторая прямая (b) пучка второго порядка[1].

Построим прямую b при помощи теоремы Брианшона. Принимая пять данных прямых s_1, c, s_2, a и d за стороны шестисторонника Брианшона, постараемся построить точку Брианшона X этого шестисторонника. Противоположными вершинами его являются точки C_1 и A, а также точки C_2 и B. Поэтому точку X находим, проводя прямые C_1A и C_2B:

$$X = C_1A \times C_2B.$$

Следовательно, прямая A_2X должна (в силу теоремы Брианшона) проходить через шестую вершину B_1 шестисторонника,

[1] В самом деле, выбирая прямую d и прямую s_1 в качестве носителей образующих рядов пучка второго порядка, найдем на прямой s_1 точку B_1, соответственную точке B. Тогда прямая $BB_1 \equiv b$ и есть искомая.

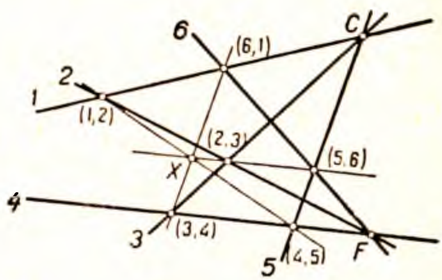
противоположную вершине A_2. Точку B_1 находим на стороне s_1:

$$B_1 = s_1 \times A_2 X.$$

После этого искомая прямая b находится как прямая, соединяющая вершины B и B_1. Изменяя положение произвольно выбранной вершины B на прямой d, получим сколько угодно прямых b пучка второго порядка. Как мы знаем, эти прямые огибают кривую второго класса (§ 38).

Подобно тому как шесть точек образуют 60 различных шестиугольников, из шести прямых можно получить 60 различных шестисторонников. Поэтому шесть прямых пучка второго порядка определяют 60 точек Брианшона.

Если рассмотрим пучок второго порядка, распавшийся на два пучка первого порядка, то можем применить теорему Брианшона к этому частному случаю. Однако при этом получим ту же самую конфигурацию Паскаля—Паппа $\left(\frac{9}{3}\right)$, которая была рассмотрена в § 39. В самом деле, конфигурация Паскаля—Паппа сама себе двойственна и охватывает оба случая, т. е. теорему Паскаля для ряда второго порядка, распавшегося на пару рядов первого порядка, и теорему Брианшона для пучка второго порядка, распавшегося на два пучка первого порядка.



Черт. 153.

Читатель может убедиться в этом, рассматривая чертеж 147, который представляет конфигурацию Паскаля — Паппа. Если на этом чертеже принять точки C и F за центры пучков первого порядка, на которые распался пучок второго порядка, и обозначить цифрами выходящие из них прямые (стороны шестисторонника Брианшона), то получим чертеж 153.

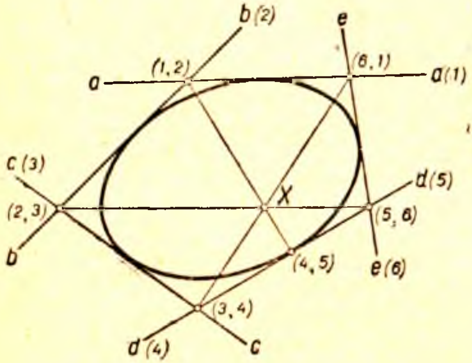
Прямые *1*, *3* и *5* принадлежат пучку C, а прямые *2*, *4* и *6* — пучку F. Получаем шесть вершин шестисторонника: *1*, *2*; *2*, *3*; *3*, *4*; *4*,*5*; *5*,*6* и *6*,*1*. Три прямые, соединяющие пары противоположных вершин, а именно прямые

$$(1,2)\ (4,5);\ (2,3)\ (5,6);\ (3,4)\ (6,1),$$

проходят через одну точку — точку Брианшона X.

§ 42. Частные случаи теоремы Брианшона.

Подобно тому как теорема Паскаля имеет место для шестиугольника, выродившегося в пяти-, четырех- или треугольник, теорема Брианшона приложима к шестисторонику, выродившемуся в пяти-, четырех- или трехсторонник. Пусть, например, на чертеже 154 изображен пятисторонник, описанный около кривой второго класса (стороны его принадлежат пучку второго порядка). Будем рассматривать одну из сторон, например сторону d, как двойную, т. е. как прямую совпадения двух сторон шестисторонника. Тогда, обозначая цифрами *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* стороны последнего, мы отнесем прямой d две цифры *4* и *5*. Так как при совпадении двух прямых пучка второго порядка точка их пересечения обращается в точку прикосновения двойной прямой (см. § 37), то вершина (*4*, *5*) становится точкой прикосновения прямой d. Соединяя прямыми пары противоположных вершин (*1*,*2*) и (*4*,*5*), (*2*,*3*) и (*5*,*6*), (*3*,*4*) и (*6*,*1*), найдем, что все три прямые проходят через одну точку X (точку Брианшона).



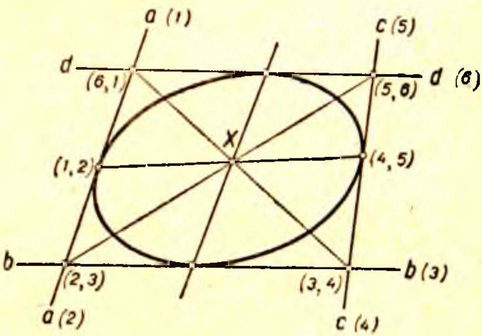
Черт. 154.

Следовательно, для данного случая теорема Брианшона читается так:

Во всяком пятисторочнике, описанном около кривой второго класса, прямые, соединяющие две пары несмежных вершин, и прямая, соединяющая пятую вершину с точкой прикосновения противоположной стороны, пересекаются в одной точке.

Интересный случай теоремы Брианшона дает четырехсторонник, описанный около кривой второго класса.

Так, если $abcd$ — такой четырехсторонник (черт. 155), то, рассматривая две его стороны (например, a и c) как двойные, получим шестисторонник, к которому можно применить теорему Брианшона. Обозначая, как и раньше, стороны этого шестисторонника цифрами, отнесем к сторонам a и c по две цифры, а именно *1*, *2* для стороны a и *4*, *5* для стороны c. Тогда вершины, соответствующие парам совпавших сторон, окажутся их точками прикосновения (*1*,*2*) и (*4*,*5*). Три прямые, соединяющие пары противоположных вершин, должны проходить через точку X Брианшона. Две из этих прямых явля-

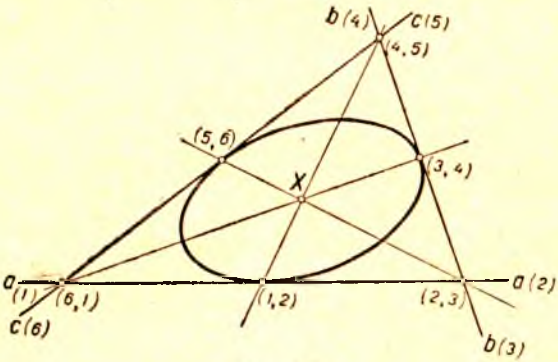


Черт. 155.

ются диагоналями описанного четырехсторонника $[(2,3), (5,6)$ и $(3,4), (6,1)]$, а третья прямая соединяет точки прикосновения противоположных сторон $[(1,2), (4,5)]$.

Так как можно было бы в качестве двойных прямых выбрать другую пару противоположных сторон, а именно b и d, то прямая, соединяющая точки прикосновения этой пары сторон, также должна проходить через точку Брианшона X. Следовательно, через эту точку в случае четырехсторонника проходят четыре прямые. Поэтому имеем:

Во всяком четырехстороннике, описанном около кривой второго класса, прямые, соединяющие точки прикосновения противоположных сторон, проходят через точку пересечения диагоналей.



Черт. 156.

Для трехсторонника abc, описанного около кривой второго класса (черт. 156), можно также применить теорему Брианшона, рассматривая каждую сторону трехсторонника как двойную. Тогда, расставив цифровые обозначения сторон и вершин получившегося благодаря этому шестисторонника Брианшона, найдем, что парами противоположных вершин на этот раз будут вершины данного трехсторонника и точки прикосновения противолежащих этим вершинам сторон. Теорема Брианшона примет следующий вид:

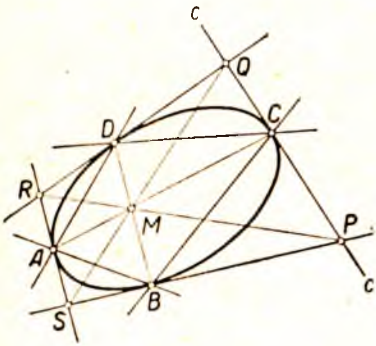
Прямые, соединяющие вершины трехсторонника, описанного около кривой второго класса, с точками прикосновения противолежащих им сторон, проходят через одну точку.

§ 43. Тождественность понятий кривой второго порядка и кривой второго класса. Теорема Маклорена.

Поставим перед собой задачу определить взаимоотношение ряда второго порядка и пучка второго порядка. Пучок второго порядка можно рассматривать как совокупность (геометрическое место) касательных к кривой второго класса. В настоящем параграфе мы докажем, что понятие кривой второго класса тождественно понятию кривой второго порядка (или ряда второго порядка).

1. Докажем следующую теорему Маклорена: *Совокупность касательных к кривой второго порядка образует пучок второго порядка.*

Пусть имеем кривую второго порядка и на ней четыре произвольно выбранные точки A, B, C, D (черт. 157). Применим теорему Паскаля к четырехугольнику $ACBD$, вписанному в эту кривую. Прямые AC и BD являются парой противоположных сторон этого четырехугольника. Прямые AS и BS — одной парой касательных в противоположных вершинах A и B. Прямые CQ и DQ — другой парой касательных в противоположных вершинах C и D. Точки пересечения M, S и Q этих трех пар прямых должны по теореме Паскаля (для четырехугольника) лежать на одной прямой.



Черт. 157.

Рассмотрим теперь второй вписанный четырехугольник $ABDC$. Для него прямые BD и CA являются парой противоположных сторон. Прямые AR и DR — одной парой, а прямые BP и CP — второй парой касательных в противоположных вершинах. Точки пересечения M, R и P этих трех пар также должны лежать на одной прямой.

Таким образом, через точку M проходят четыре прямые: AC, BD, QS и PR. Так как точки A, B, C, D — произвольные точки кривой второго порядка, то доказанное свойство четырех прямых, проходящих через точку M, остается в силе при любом положении точки C на кривой второго порядка. Предположим, что точка C перемещается по кривой вместе с касательной $c \equiv PQ$ (в точке C). Если при этом будем считать остальные три точки A, B, D и касательные в них неподвижными, то подвижная касательная c опишет на неподвижных касательных SB и RD два ряда точек (P) и (Q). Если мы докажем, что ряды (P) и (Q) проективны, то отсюда и будет следовать, что касательная c при своем движении опишет пучок второго порядка.

При движении касательной c точка P перемещается по неподвижной касательной SB, а точка Q — по неподвижной касательной RD. При этом луч RP вращается вокруг неподвижной точки R, и, следовательно, пучок, который описывает луч RP, перспективен ряду (P):

$$\text{пучок } R\ (RP) \overset{=}{\wedge} \text{ ряду } (P).$$

По той же причине пучок с центром S, описываемый лучом SQ, перспективен ряду (Q):

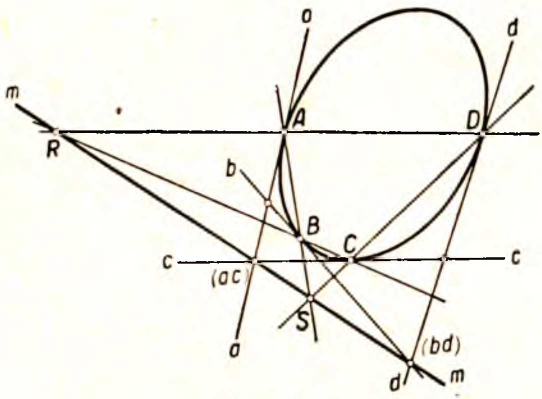
$$\text{пучок } S\ (SQ) \overset{=}{\wedge} \text{ ряду } (Q).$$

Но пучки R и S перспективны, так как их соответственные лучи RP и SQ пересекаются в точке M, которая остается на неподвижной прямой BD (оси перспективности пучков) при любом положении точки C и ее касательной c, т. е.

$$\text{пучок } S\ (SQ) \overline{\overline{\wedge}} \text{ пучку } R\ (RP).$$

Отсюда заключаем, что ряды (P) и (Q), перспективные пучкам R и S, проективны. Таким образом, подвижная касательная c образует на двух неподвижных касательных проективные ряды (P) и (Q). Другими словами, касательная c описывает пучок второго порядка. Теорема доказана.

Так как совокупность касательных к кривой второго порядка по доказанному представляет собой пучок прямых второго порядка, то кривая второго порядка является огибающей пучка второго порядка. Следовательно, *кривая второго порядка является также кривой второго класса.*



Черт. 158.

2. Если построим предложение, двойственное только что доказанной теореме Маклорена, то оно может быть формулировано следующим образом:

Совокупность точек прикосновения прямых пучка второго порядка образует ряд второго порядка (кривую второго порядка).

Справедливость этого предложения вытекает из принципа двойственности, но мы наметим кратко ход рассуждения и построения соответствующего чертежа (черт. 158).

Пусть a, b, c, d — четыре произвольные прямые пучка второго порядка. Обозначим буквами A, B, C и D точки их прикосновения. Рассмотрим простой четырехсторонник $abcd$ и применим к нему теорему Брианшона. Точки (ac) и (bd) являются парой противоположных вершин четырехсторонника $acbd$. Обозначим прямую, соединяющую вершины (ac) и (bd), через m. Точки A и B представляют одну пару точек прикосновения противоположных сторон a и b, а точки C и D — другую пару точек прикосновения противоположных сторон c и d четырехсторонника. По теореме Брианшона три прямые AB, CD и m должны проходить через одну точку. Последняя обозначена на чертеже 158 буквой S.

Если рассмотрим простой четырехсторонник $abdc$, то для него точки (ac) и (bd) представляют пару противоположных вершин, а точки A, D и B, C — две пары точек прикосновения противоположных сторон. По теореме Брианшона для четырехсторонника $abdc$ прямые AD, BC и m должны проходить через одну точку, которую обозначим буквой R.

Предположим теперь, что прямые a, b и d закреплены неподвижно, в то время как прямая c описывает пучок второго порядка, увлекая при своем движении и точку прикосновения C. Точки A, B и D остаются неподвижными. Подвижная точка прикосновения C проектируется из точек B и D двумя пучками $B\,(BC)$ и $D\,(DC)$. Докажем, что эти пучки проективны.

С этой целью рассмотрим два ряда (R) и (S), образованные пучками $B\,(BC)$ и $D\,(DC)$ на неподвижных прямых AD и AB. Так как прямая $RS \equiv m$ проходит через неподвижную точку (bd), то последняя служит центром перспективности рядов (R) и (S). Таким образом, имеем:

$$\text{ряд } (R) \overset{=}{\wedge} \text{ ряду } (S).$$

С другой стороны, имеем:

$$\text{пучок } B\,(BC) \overset{=}{\wedge} \text{ ряду } (R),$$
$$\text{пучок } D\,(DC) \overset{=}{\wedge} \text{ ряду } (S).$$

Отсюда заключаем, что

$$\text{пучок } B\,(BC) \overline{\wedge} \text{ пучку } D\,(DC).$$

Это означает, что точка прикосновения C описывает ряд второго порядка (кривую второго порядка), для которого пучки B и D являются образующими. Теорема доказана.

Так как совокупность точек прикосновения пучка второго порядка представляет собой огибающую пучок кривую второго класса, то из доказанной теоремы имеем:

Кривая второго класса является также кривой второго порядка.

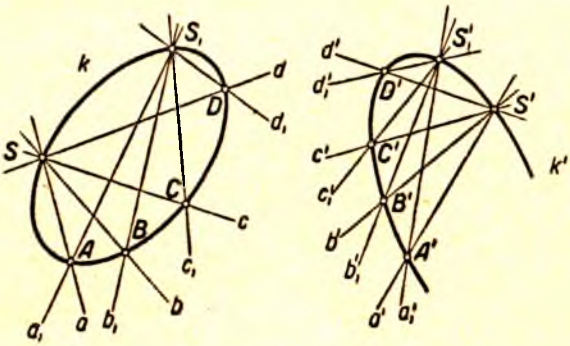
Таким образом, устанавливается идентичность этих двух понятий: кривой второго порядка и кривой второго класса. Следовательно, все полученные ранее выводы относительно пучков прямых второго порядка, например теорема о шестистороннике Брианшона, могут рассматриваться как теоремы о касательных кривой второго порядка. Поэтому теорема Брианшона часто формулируется следующим образом:

Во всяком шестиугольнике, описанном около кривой второго порядка, прямые, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку.

Подобным же образом могут быть формулированы и другие теоремы, относящиеся к пучкам второго порядка.

§ 44. Проективное соответствие рядов второго порядка.

1. Рассмотрим две кривые второго порядка k и k' (черт. 159). Предположим, что центры пучков S и S' лежат соответственно на кривых k и k'. Пусть лучи a, b, c, d, ... пучка S пересекают кривую k в точках A, B, C, D, ... Соответственные лучи a', b', c', d', ... пучка S' пересекают кривую k' в точках A', B', C', D', ...



Черт. 159.

Таким образом, соответствие пучков S и S' приводит в соответствие также и ряды второго порядка, расположенные на носителях k и k'.

Если пучки S и S' находятся в проективном соответствии:

$$S\ (a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ S'\ (a',\ b',\ c',\ d',\ldots),$$

то и соответствие рядов второго порядка называется проективным:

$$k\ (A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ k'\ (A',\ B',\ C',\ D',\ldots).$$

Это определение проективного соответствия рядов второго порядка не зависит от выбора центров пучков на кривых k и k'.

Легко убедиться в том, что *два проективных ряда второго порядка проектируются из двух любых точек их носителей* (кривых k и k') *двумя проективными пучками.*

Пусть, например, проективное соответствие рядов

$$k\ (A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots)\ \text{и}\ k'\ (A',\ B',\ C',\ D',\ldots)$$

определено с помощью двух проективных пучков S и S'. Выберем на кривых k и k' произвольные точки S_1 и S_1'. Будем проектировать ряды k и k' соответственно из точек S_1 и S'_1. Так как соответственные лучи пучков S и S_1 пересекаются в точках A, B, C, D,... кривой второго порядка k, то будем иметь:

$$\text{пучок } S_1 \barwedge \text{пучку } S.$$

По аналогичной причине можем написать:

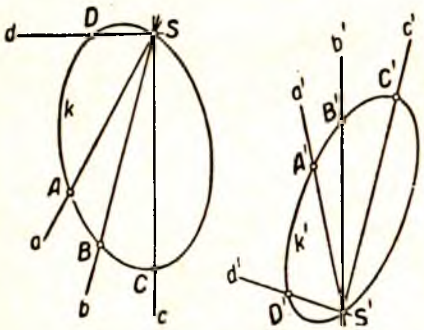
$$\text{пучок } S_1' \barwedge \text{пучку } S'.$$

Но пучки S и S' проективны, поэтому

$$\text{пучок } S_1 \barwedge \text{пучку } S_1'$$

(ч. т. д.).

Таким образом, проективное соответствие рядов второго порядка определено с помощью проективных пучков первого порядка, центры которых принадлежат носителям пучков.



Черт. 160.

Из этого определения следует, что *проективное соответствие рядов второго порядка может быть задано тремя парами соответственных точек.*

Так, проективное соответствие рядов k и k' (черт. 160) вполне определяется тремя парами соответственных точек: A, A'; B, B' и C, C'. В самом деле, выберем произвольно центры S и S' проектирующих пучков на кривых k и k'. Так как по предположению данные ряды второго порядка проективны, то будем иметь:

$$\text{пучок } S\,(a,\ b,\ c,\ldots) \barwedge \text{пучку } S'\,(a',\ b',\ c',\ \ldots).$$

Но проективное соответствие пучков S и S' вполне определяется тремя парами соответственных лучей (a, a'; b, b' и c, c'). Отсюда заключаем, что и соответствие проективных рядов k и k' определено.

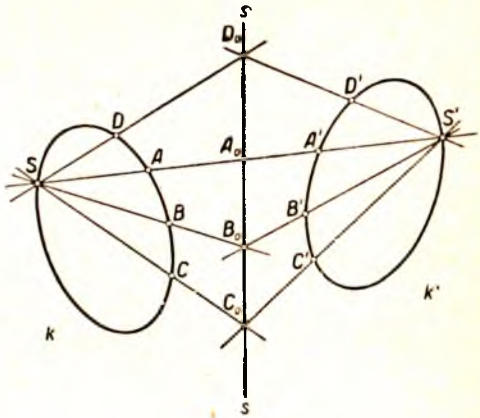
Если, например, для какой-нибудь точки D ряда k требуется построить соответственную точку D' ряда k', то проводим прямую $SD \equiv d$ и находим ей соответственную прямую $S'D' \equiv d'$ так, чтобы

$$(a'b'c'd') = (abcd).$$

Прямая d' пересекает кривую второго порядка k' в искомой точке D'.

Построение упрощается, если центры S и S' вспомогательных пучков выберем в точках пересечения прямой (AA'), соединяющей пару соответственных элементов, с кривыми k и k' (черт. 161).

В этом случае пучки S и S' окажутся перспективными и прямая B_0C_0 будет служить осью s перспективы. Из чертежа 161 видно, как для заданной точки D на кривой k строится соответственная точка D' кривой k'.

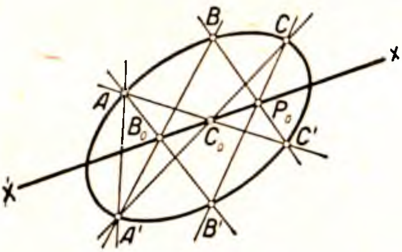


Черт. 161.

2. Рассмотрим проективное соответствие рядов второго порядка, расположенных на одном носителе k [кривой второго порядка (черт. 162)]. Пусть это соответствие задано тремя парами соответственных элементов:

$$A,\ A';\ B,\ B' \text{ и } C,\ C'.$$

Выберем точки A и A' на кривой k в качестве центров проектирующих пучков. Будем проектировать ряд $(A, B, C, \ldots)$ из центра A', а ряд $(A', B', C', \ldots)$ — из центра A. Тогда получим два проективных пучка:



Черт. 162.

$$A'\ (A'A,\ A'B,\ A'C,\ \ldots) \barwedge$$

$$\barwedge A(AA',\ AB',\ AC',\ \ldots).$$

Докажем, что эти пучки не только проективны, но и перспективны. В самом деле, лучу AA' пучка A будет соответствовать луч $A'A$ пучка A' (так как соответственные лучи пучков проходят через соответственные точки данных рядов на кривой k). Следовательно, пучки A и A' перспективны.

Для определения оси перспективности этих пучков имеем две пары соответственных лучей, пересекающихся на искомой оси перспективности:

$$AB' \times A'B = B_0, \quad AC' \times A'C = C_0.$$

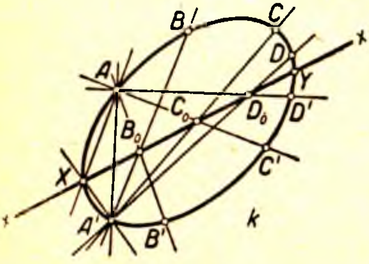
Прямая B_0C_0 и является осью перспективности x пучков A и A'.

Ось перспективности x не зависит от выбора пары соответственных точек в качестве центров проектирующих пучков. Так, в нашем построении центры пучков были выбраны в точках A и A'.

Если выберем центры проектирующих пучков в точках C и C', то ось перспективности определится двумя точками пересечения пар прямых:

$$CA' \times C'A = C_0, \quad CB' \times C'B = P_0.$$

Но три точки B_0, C_0 и P_0 лежат на одной прямой, так как они являются точками пересечения пар противоположных сторон вписанного в кривую второго порядка шестиугольника Паскаля $(AB'CA'BC')$. Поэтому



Черт. 163.

$$B_0C_0 \equiv P_0C_0 \equiv x.$$

Благодаря применению оси перспективности построение соответственных точек проективного соответствия на кривой k, заданного тремя парами $(A, A'; B, B'$ и $C, C')$, легко выполняется. Так, для произвольной точки D (черт. 163) находим луч $A'D$ (пучка A'), отмечаем точку пересечения D_0 последнего с осью перспективности и проводим луч AD_0 пучка A. Тогда луч AD_0 пересекает кривую k в искомой точке D'.

3. Поставим вопрос о двойных точках проективного соответствия на кривой второго порядка. Если точка X двойная, то лучу $A'X$(пучка A') соответствует луч AX (пучка A). Таким образом, X является точкой пересечения соответственных лучей перспективных пучков A и A'. Поэтому точка X должна лежать на оси перспективности x. Следовательно, двойная точка X является точкой пересечения оси перспективности x с кривой второго порядка k. Нетрудно убедиться и в обратном: точки пересечения оси x с кривой k являются двойными точками проективного соответствия рядов $(A, B, C, \ldots)$ и $(A', B', C', \ldots)$, расположенных на кривой k.

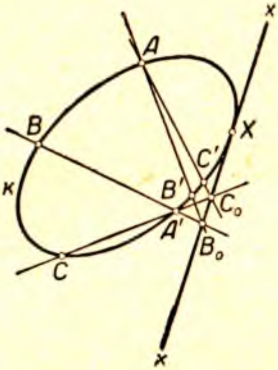
В самом деле, если Y — точка пересечения оси перспективности x с кривой k, то лучи $A'Y$ и AY являются соответственными. Но это значит, что точка Y сама себе соответствует.

Таким образом, вопрос о двойных точках проективного соответствия рядов на кривой второго порядка k сводится к определению точек пересечения оси перспективности x с кривой k.

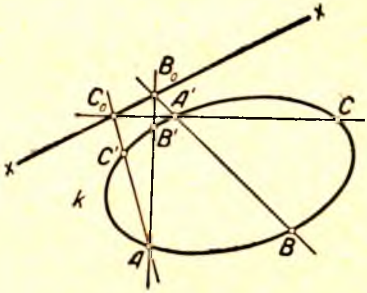
Возможны три случая.

Первый, уже рассмотренный на чертеже 163, представляет тот случай, когда ось перспективности x пересекает кривую второго порядка в двух точках. Проективное соответствие рядов $(A, B, C, \ldots)$ и $(A', B', C', \ldots)$ на кривой k имеет в этом случае два двойных элемента (X и Y). Такое соответствие называется *гиперболическим* (черт. 163). На чертеже 164 представлен другой случай, а именно тот, когда ось перспективности x касается кривой k (в точке X). Соответственные ряды второго порядка имеют в этом случае одну двойную точку (X). Такое соответствие называется п а р а б о л и ч е с к и м.

Наконец, чертеж 165 изображает случай э л л и п т и ч е с к о г о соответствия рядов на криволинейном носителе k. В этом случае ось перспективности x не имеет общих точек с кривой k.



Черт. 164.

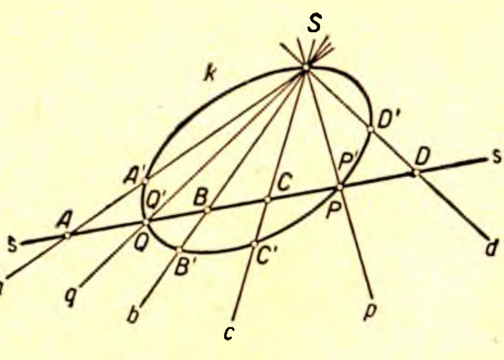


Черт. 165.

4. Определение проективности рядов второго порядка тесно связано с пучками, проектирующими эти ряды из точек их криволинейного носителя. С помощью тех же пучков может быть установлено соответствие прямолинейного ряда точек (первого порядка) и криволинейного ряда точек (второго порядка).

Рассмотрим ряд точек, расположенных на прямой s (черт. 166). Будем проектировать этот ряд из произвольно выбранной точки S данной кривой второго порядка k. Получим пучок прямых S, перспективный ряду s:

$$\text{пучок } S\,(a, b, c, d, \ldots) \;\overline{\overline{\wedge}}\; \text{ряду } s\,(A, B, C, D, \ldots).$$



Черт. 166.

Каждый луч пучка S пересекает кривую k, кроме точки S, еще в одной точке. Совокупность точек пересечения лучей пучка S с кривой k образует ряд второго порядка, перспективный пучку S. Обозначая элементы этого ряда буквами A', B', C', D', ..., будем иметь пучок $S(a, b, c, d, \dots) \overline{\overline{\wedge}}$ ряду $k(A', B', C', D', \dots)$.

Таким образом, прямолинейный ряд s и криволинейный ряд k являются сечениями одного и того же пучка прямых S. Будем называть такие два ряда, из которых один (s) — первого, а другой (k) — второго порядка, **перспективными**.

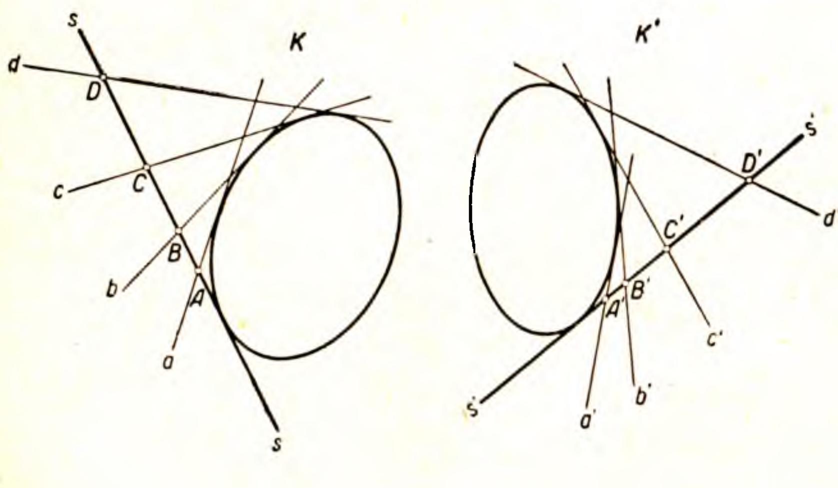
Заметим, что общие элементы обоих рядов (точки Q, Q' и P, P') сами себе соответствуют.

Построение перспективных рядов первого и второго порядка позволяет переходить от прямолинейного носителя ряда (прямая s) к криволинейному носителю (кривая второго порядка k). Это обстоятельство представляет иногда существенные преимущества, с которыми мы ближе познакомимся при рассмотрении задач второй степени (§ 46).

§ 45. Проективное соответствие пучков второго порядка.

1. Ряду второго порядка, как мы знаем, соответствует двойственная форма — пучок прямых второго порядка.

Пусть имеем два пучка второго порядка K и K' (черт. 167). Выделим в пучке K какую-либо прямую s, а в пучке K' — прямую s'. Рассмотрим ряд точек A, B, C, D, ... на прямой s,



Черт. 167.

являющийся сечением пучка второго порядка K $(a, b, c, d, \ldots)$. Второй ряд точек $A', B', C', D', \ldots$ получим на прямой s' как сечение пучка прямых второго порядка K' $(a', b', c', d', \ldots)$. Если ряды s и s' находятся в проективном соответствии:

$$s\,(A, B, C, D, \ldots) \barwedge s'\,(A', B', C', D', \ldots),$$

то и соответствие пучков второго порядка K и K' называется проективным:

$$K\,(a, b, c, d, \ldots) \barwedge K'(a', b', c', d', \ldots).$$

Далее теория проективных пучков второго порядка развивается в духе двойственной аналогии с теорией проективных рядов второго порядка.

Так, устанавливаем, что определение проективного соответствия пучков K и K' не зависит от выбора секущих рядов s и s'. Любые две прямые s_1, s_1', принадлежащие соответственно пучкам K и K', пересекают эти пучки второго порядка по двум проективным рядам, если проективное соответствие пучков K и K' было ранее определено с помощью рядов s и s'. В самом деле, по основной теореме для пучков второго порядка (§ 38) будем иметь:

$$s_1 \barwedge s, \quad s_1' \barwedge s'.$$

Кроме того, по предположению имеем:

$$s \barwedge s'.$$

Следовательно,

$$s_1 \barwedge s_1'.$$

Далее замечаем, что проективное соответствие двух пучков второго порядка вполне определяется тремя парами соответственных прямых:

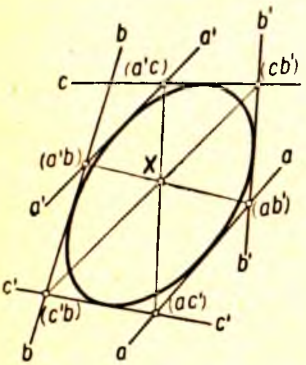
$$a,\ a';\ b,\ b' \text{ и } c,\ c'.$$

Действительно, заданные пары прямых устанавливают проективное соответствие определяющих рядов s и s'. Последними можно воспользоваться для построения соответственных элементов данных проективных пучков второго порядка. В частности, построение упрощается, если выберем в качестве носителей s и s' две прямые, проходящие через точку пересечения двух соответственных лучей (например, a и a') пучков K и K'. Тогда определяющие ряды s и s' окажутся перспективными. Найдя центр перспективности S, применим его для упрощения построения.

Предоставляем читателям построение чертежа, двойственного чертежу 161, в порядке самостоятельной работы.

2. Переходя к рассмотрению двух пучков второго порядка с общим носителем, т. е. принадлежащих совокупности касательных к некоторой кривой второго порядка, мы и здесь обнаружим двойственную аналогию с рядами второго порядка. В частности, для построения двойных прямых такого соответствия можно воспользоваться центром перспективности X определяющих рядов (ср. с черт. 162).

Пусть имеем три пары соответственных прямых: a, a'; b, b' и c, c', являющихся касательными к некоторой кривой второго порядка (черт. 168). Выберем в качестве носителей определяющих рядов s и s' прямые a и a'. Прямые a и a' пересекают проективные пучки $(a, b, c, \ldots)$ и $(a', b', c', \ldots)$ по двум проективным рядам. Эти ряды к тому же перспективны, так как их общий элемент (aa') сам себе соответствует.



Черт. 168.

Соответственные пары точек определяют центр перспективности X. Вот эти пары:

$$(ab') \text{ и } (a'b); \quad (ac') \text{ и } (a'c).$$

Положение центра перспективности X не зависит от выбора пары соответственных прямых (a и a') в качестве носителей определяющих рядов. Так, выбрав другую пару соответственных прямых, например c и c', придем к той же точке X. В самом деле, шесть прямых a, b', c, a', b, c' образуют описанный шестисторонник Брианшона, поэтому прямые, соединяющие пары соответственных точек рядов c и c', пересекутся в той же точке X. Эти пары следующие:

$$(ac') \text{ и } (a'c); \quad (cb') \text{ и } (c'b).$$

Из чертежа видно, что в обоих случаях получим один и тот же центр перспективности X. Центр перспективности X можно использовать при построении соответственных прямых пучков второго порядка. Особенно удобно применить центр X для нахождения двойных прямых этих пучков.

Двойными прямыми в этом проективном соответствии будут, очевидно, те прямые пучка второго порядка, которые проходят через центр перспективности X. В самом деле, такие прямые соединяют пары соответственных точек определяющих рядов (a, a'), поэтому они сами себе соответствуют. Обратно, если прямая сама себе соответствует, она должна соединять соответственные точки определяющих рядов (a, a'), поэтому она проходит через X.

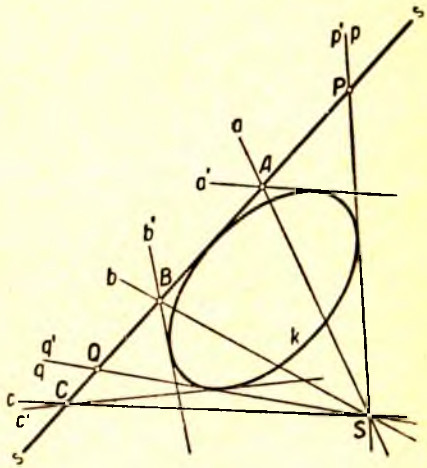
Так как через точку может проходить не более двух прямых пучка второго порядка, то можем иметь следующие три случая.

Если через точку X проходят две прямые пучка второго порядка, или, иначе, две касательные к кривой второго порядка k (точка X называется в этом случае внешней точкой), то проективное преобразование пучка второго порядка в себя имеет два двойных элемента и называется гиперболическим.

Если имеется лишь одна прямая пучка второго порядка, проходящая через X, или, иначе, одна касательная к кривой k (точка X является в этом случае точкой прикосновения), то преобразование имеет один двойной элемент и называется параболическим.

Наконец, если через X не проходит ни одной прямой пучка второго порядка, или ни одной касательной к кривой второго порядка (точка X называется в этом случае внутренней), то преобразование называется эллиптическим, оно не имеет двойных элементов (черт. 168).

Аналогично перспективным рядам первого и второго порядка можем построить перспективно расположенные пучки первого и второго порядка. Пусть имеем пучок первого порядка с центром S и пучок второго порядка K, образованный касательными к кривой второго порядка k (черт. 169). Выберем произвольную прямую s пучка второго порядка и рассмотрим ряд точек s, перспективный пучку S:



Черт. 169.

$$s\,(A,\ B,\ C,\ \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\ S\,(a,\ b,\ c,\ \ldots).$$

Рассмотрим также пучок второго порядка, перспективный ряду s:

$$s\,(A,\ B,\ C,\ \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\ K\,(a',\ b',\ c',\ \ldots).$$

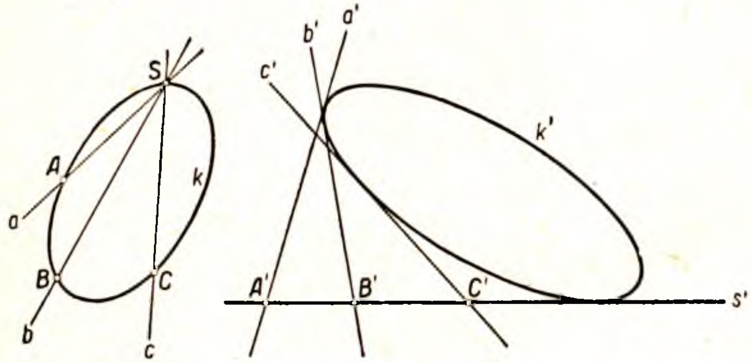
Так как оба пучка (пучок S первого порядка и пучок K второго порядка) проектируют один и тот же ряд s $(A,\ B,\ C,\ \ldots)$, то такие пучки называются перспективными (с осью перспективности s).

Заметим, что общие прямые обоих пучков (касательные из точки S к кривой k) сами себе соответствуют. Таковы прямые $p \equiv p'$ и $q \equiv q'$ на чертеже 169.

Возможность перехода от пучков первого порядка к перспективным пучкам второго порядка может быть использована при решении задач второй степени (§ 46).

3. В § 44 мы установили понятие проективных рядов второго порядка, пользуясь для этого проектирующими пучками, носители (центры) которых принадлежат соответствующим рядам второго порядка.

Аналогичное было сделано в этом параграфе для пучков второго порядка с помощью прямолинейных рядов, носители которых принадлежат соответствующим пучкам второго порядка.



Черт. 170.

Чтобы установить понятие о проективном соответствии рядов и пучков второго порядка, поступим следующим образом.

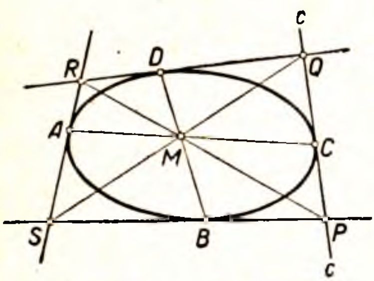
Рассмотрим ряд второго порядка $(A, B, C, \ldots)$, расположенный на кривой k, и пучок второго порядка $(a', b', c', \ldots)$, описанный около кривой k'[1] (черт. 170). Будем проектировать ряд $(A, B, C, \ldots)$ из какой-нибудь точки S кривой k. Получим пучок прямых $S\ (a, b, c, \ldots)$. Пересечем пучок второго порядка $(a', b', c', \ldots)$ какой-нибудь касательной s' к кривой k'. Получим ряд точек:

$$s'\ (A', B', C', \ldots).$$

Если пучок S проективен ряду s':

$$S\ (a, b, c, \ldots) \barwedge s'\ (A', B', C', \ldots)$$

то ряд второго порядка $(A, B, C, \ldots)$ назовем проективным пучку второго порядка $(a', b', c', \ldots)$.



Черт. 171.

Установив это понятие проективности ряда и пучка второго порядка, докажем следующее предложение:

Ряд второго порядка проективен пучку второго порядка, образованному касательными в соответствующих точках ряда.

---

[1] k' может совпадать с k.

Доказательство. Для доказательства этого предложения возвратимся к чертежу, построенному при выводе теоремы Маклорена (черт. 157, § 43). Мы воспроизведем этот чертеж почти в том же виде (черт. 171). Предположим, что подвижная точка C описывает ряд второго порядка (кривую второго порядка), увлекая с собой касательную c. Будем проектировать ряд второго порядка C пучком лучей с центром в неподвижной точке A. С другой стороны, касательная c опишет на неподвижной прямой RQ (касательной в точке D) ряд точек (Q), перспективный пучку S (SQ). Но пучки A (AC) и S (SQ) перспективны, так как соответственные лучи их (AC и SQ) пересекаются в точках M неподвижной прямой BD. Отсюда заключаем, что

$$\text{пучок } A\ (AC) \barwedge \text{ ряду } (Q).$$

Но это и означает, что ряд второго порядка (C) проективен пучку второго порядка c. Теорема доказана.

§ 46. О задачах второй степени.

В настоящем курсе мы неоднократно встречались с геометрическими задачами, которые имеют только одно решение и сводятся к нахождению точки пересечения двух прямых. Такие задачи обыкновенно называют задачами первой степени. Если для нахождения решения необходимы лишь операции проектирования и пересечения, то задача первой степени может быть решена с помощью одной линейки. Таковы, например, задачи на построение соответственных элементов двух проективных форм первой ступени, заданных тремя парами соответственных элементов (§ 28), или построение соответственных элементов инволюции (§ 33), четвертого гармонического элемента к трем данным (§ 30), второй точки пересечения прямой с кривой второго порядка с помощью теоремы Паскаля (§ 39), второй касательной к кривой второго порядка из точки, лежащей на данной касательной (с помощью теоремы Брианшона, § 41). Все эти задачи являются задачами первой степени. Мы видели, что они разрешимы при помощи одной линейки.

Под именем задач на построение второй степени разумеют геометрические задачи, имеющие не более двух решений, которые могут быть приведены к нахождению общих точек прямой и кривой второго порядка (или же общих прямых пучков первого и второго порядка).

Мы рассмотрим здесь следующие типичные задачи:

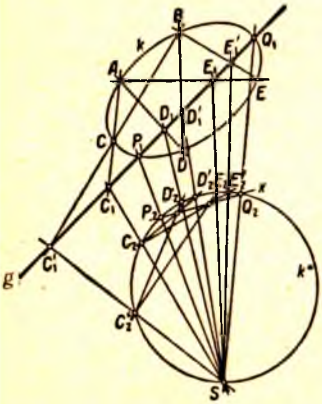
1) Кривая второго порядка задана пятью точками A, B, C, D, E. Построить точки ее пересечения с данной прямой g.

Принимаем две из пяти данных точек кривой второго порядка за центры пучков. Пусть это точки A и B. Проективное соответствие пучков A и B установим с помощью трех пар соответственных прямых, пересекающихся в точках C, D и E (черт. 172). Проективные пучки A и B образуют на данной прямой g два проективных ряда:

$$(C_1,\ D_1,\ E_1,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ (C_1',\ D_1',\ E_1',\ \ldots).$$

Нетрудно видеть, что точки пересечения P_1 и Q_1 прямой g с кривой второго порядка, определяемой точками A, B, C, D, E, являются двойными точками этих проективных рядов. В самом деле, соответственные лучи пучков A и B пересекаются в точках P_1 и Q_1. Следовательно, будем иметь:

$$P_1' \equiv P_1; \quad Q_1' \equiv Q_1.$$



Черт. 172.

Таким образом, задача сведена к построению двойных точек проективного соответствия двух рядов, расположенных на одном носителе g.

Для решения задачи необходимо иметь какую-либо начерченную кривую второго порядка[1] k^*, на которую мы переносим с прямой g проективное соответствие рядов.

Выберем в качестве центра S произвольную точку кривой k^* и будем проектировать на нее из центра S точки прямой g. Получим два проективных ряда второго порядка, расположенные на кривой k^*:

$$(C_2,\ D_2,\ E_2,\ \ldots)\ \overline{\wedge}\ (C_2',\ D_2',\ E_2',\ldots).$$

Очевидно, двойные точки рядов, расположенных на прямой g, проектируются из S двойными точками рядов на кривой k^* и обратно. Поэтому для решения задачи достаточно построить двойные точки рядов второго порядка, полученных проектированием на кривую k^*. Это можно сделать, как мы уже знаем, при помощи оси перспективности.

Принимая точки C_2 и C_2' за центры пучков, определяющих проективное соответствие на кривой k^*, построим ось перспективности x. Последняя определяется точками пересечения двух пар прямых:

$$C_2D_2' \text{ и } C_2'D_2;$$
$$C_2E_2' \text{ и } C_2'E_2.$$

[1] Например, окружность (см. примечание в конце этого параграфа).

Точки пересечения P_2 и Q_2 оси перспективности x с кривой k^* и являются двойными точками рядов второго порядка. Проектируем из центра S на данную прямую g. Получим искомые точки P_1 и Q_1, в которых эта прямая пересекает данную кривую второго порядка $ABCDE$. В ходе решения задачи на построение точек пересечения прямой с кривой второго порядка, заданной пятью точками, мы рассмотрели также решение следующей задачи второй степени[1].

2) Проективное соответствие двух рядов, расположенных на прямой g, задано тремя парами соответственных точек:

$$C_1,\ C_1';\ \ D_1,\ D_1'\ \text{ и } E_1,\ E_1'.$$

Требуется построить двойные точки этого соответствия.

В частности, таким путем могут быть построены двойные точки гиперболической инволюции.

Переходя к рассмотрению задач двойственного характера, остановимся прежде всего на задаче, двойственной задаче 1. Соответствующая задача для пучков может быть сформулирована так:

3) Даны пять касательных a, b, c, d, e к кривой второго порядка. Построить касательные к этой кривой, проходящей через данную точку G.

Если будем решать эту задачу, следуя тому методу, который был применен для решения задачи 1, то сведем ее к следующей:

4) Проективное соответствие двух пучков, имеющих общий центр G, задано тремя парами соответственных прямых:

$$c_1,\ c_1',\ d_1,\ d_1'\ \text{ и } e_1,\ e_1';$$

требуется построить двойные прямые этого соответствия.

Решение этой последней задачи сведется к построению двойных прямых проективного соответствия в пучке второго порядка. Все построение носит характер двойственный по отношению к выполненному на чертеже 172, причем вместо оси перспективности x используется центр перспективности X. Мы предоставляем читателям сделать этот чертеж в порядке самостоятельной работы.

Заметим, что решение задачи 4, а следовательно, и задачи 3 можно было бы свести и к случаю, рассмотренному на чертеже 172. В самом деле, для этого достаточно пересечь проективные пучки с общим центром G какой-либо прямой g. Тогда на прямой g получим два проективных ряда, и задача сведется к построению двойных точек этих рядов.

---

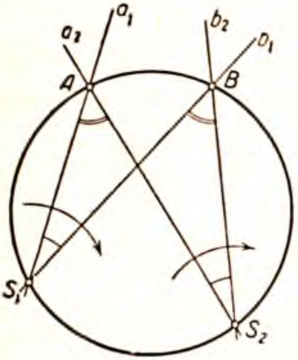
[1] К которой была сведена задача 1.

П р и м е ч а н и е. Для решения всех приведенных здесь задач было достаточно иметь начерченную кривую второго порядка[1]. В дальнейшем будет показано, что окружность представляет собой частный случай кривой второго порядка, обладающей метрическими особенностями (§ 73). Поэтому в качестве начерченной кривой второго порядка можем использовать окружность. Отсюда следует, что рассмотренные выше задачи второй степени могут быть решены линейкой при однократном употреблении циркуля.

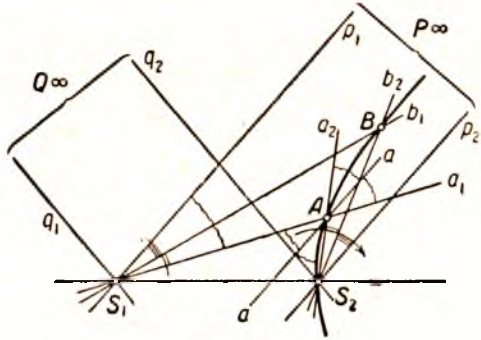
ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Рассмотрим следующие примеры построения кривых второго порядка, в которых образующие пучки удовлетворяют некоторому метрическому условию.

I. О к р у ж н о с т ь. Пусть имеем (черт. 173) два проективных пучка (S_1) и (S_2), обладающих тем свойством, что угол, образованный парой лучей



Черт. 173.



Черт. 174.

первого пучка, всегда равен углу, образованному парой соответственных лучей второго пучка. Например,

$$\angle(a_1, \ b_1) = \angle(a_2, \ b_2).$$

Такие пучки называются к о н г р у е н т н ы м и. Предположим, что вращению луча первого пучка (например, против часовой стрелки) соответствует одинаковое вращение (также против часовой стрелки) соответственного луча второго пучка. Тогда будем иметь:

$$\angle(a_1, \ a_2) = \angle(b_1, \ b_2).$$

Следовательно, геометрическое место точек пересечения $(A, B, \ldots)$ соответственных лучей обоих пучков представляет собой окружность, проходящую через точки S_1 и S_2.

II. Р а в н о с т о р о н н я я г и п е р б о л а. Пусть, как и в предыдущем случае, даны два конгруентных пучка (S_1) и (S_2), имеющие противоположные вращения соответственных лучей (черт. 174). Так, соответственные лучи a_1 и a_2, пересекающиеся в точке A, вращаются в противоположных направлениях (луч a_1 — против часовой стрелки; луч a_2 — по часовой стрелке).

Обозначим буквой a биссектрису угла (a_1, a_2). Луч a_1, вращаясь против часовой стрелки, в одном из своих положений p_1 окажется параллельным биссектрисе a. Будем иметь:

$$\angle(a_1, p_1) = \angle(a_1, a).$$

[1] Центр которой не требовалось задавать, так как все эти задачи имеют проективный характер и не содержат метрических понятий.

Если p_2 — луч, соответственный лучу p_1, то должны иметь:

$$\angle(a_2, p_2) = \angle(a_1, p_1).$$

Сравнивая два написанных равенства, получаем:

$$\angle(a_2, p_2) = \angle(a_1, a) = \angle(a_2, a).$$

Но это означает, что луч p_2 параллелен биссектрисе a. Следовательно, $p_2 \parallel p_1$, и эти лучи пересекаются в несобственной точке P_∞. Если луч p_1 повернется на прямой угол, то в силу конгруентности пучков и луч p_2 повернется на прямой угол. В этом новом положении лучи q_1 и q_2 снова окажутся параллельными и будут пересекаться в несобственной точке Q_∞. Таким образом, кривая второго порядка, образованная пучками S_1 и S_2, имеет две несобственные точки. Такая кривая второго порядка называется **гиперболой**. Как мы видели, направления лучей, проходящих через несобственные точки гиперболы (так называемые **асимптотические направления**), взаимно перпендикулярны. В этом случае гипербола называется **равносторонней**.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти геометрическое место вершин C треугольника, стороны которого вращаются около трех неподвижных точек P, Q и R, а две другие вершины A и B скользят по двум неподвижным прямым a и b.

2. Два угла постоянной величины α и β вращаются вокруг их вершин A и B так, что точка M пересечения двух сторон AM и BM этих углов скользит по прямой m. Определить, какую линию описывает точка N пересечения двух других сторон вращающихся углов.

3. Кривая второго порядка задана пятью точками A, B, C, D, E. Построить касательные в точках A и B, принимая эти точки за центры образующих кривую пучков.

4. Пучок второго порядка задан пятью своими прямыми a, b, c, d, e. Построить точки прикосновения прямых a и b, принимая их за носители образующих рядов.

5. Кривая второго порядка задана четырьмя точками и касательной в одной из них. Построить сколько угодно точек кривой.

6. Кривая второго порядка задана тремя точками и касательными в двух из них. Построить сколько угодно точек кривой.

7. Кривая второго порядка задана тремя точками и касательными в двух из них. Построить касательную в третьей из данных точек.

8. Даны четыре касательные к кривой второго порядка и точка прикосновения одной из них. Построить сколько угодно касательных к этой кривой.

9. Даны три касательные к кривой второго порядка и точки прикосновения двух из этих касательных. Построить сколько угодно новых касательных к той же кривой.

10. Сделать чертеж теоремы Паскаля для того случая, когда прямая Паскаля является несобственной.

11. Сделать чертеж теоремы Брианшона для того случая, когда точка Брианшона является несобственной.

12. Построить чертеж конфигурации Паскаля — Паппа для того случая, когда:

1) одна из ее прямых является несобственной,

2) одна из ее точек является несобственной.

13. В конфигурации Паскаля — Паппа выбрать произвольную прямую за прямую Паскаля и найти все остальные элементы чертежа.

14. Показать, что теорема Брианшона в случае распадения пучка второго порядка на два пучка первого порядка приводит к конфигурации Паскаля — Паппа.

15. Применить теорему Паскаля к случаю вписанного четырехугольника, принимая две его соседние вершины за двойные.

16. Применить теорему Брианшона к случаю описанного четырехсторонника, принимая две его соседние стороны за двойные.

17. Доказать, что если ABC — треугольник, описанный около кривой второго порядка, причем A_1, B_1 и C_1 — точки прикосновения его сторон, то два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ являются гомологическими.

18. Доказать следующее предложение: если имеем два гомологических треугольника, то шесть точек, в которых стороны одного из треугольников пересекают несоответственные стороны другого, лежат на кривой второго порядка. Аналогично: шесть прямых, соединяющих вершины одного из треугольников с несоответственными вершинами второго, принадлежат одному пучку второго порядка. У к а з а н и е. Применить теорему Паскаля (в двойственном предложении — теорему Брианшона).

19. Доказать следующее предложение: если два треугольника вписаны в кривую второго порядка, то они также описаны около некоторой кривой второго порядка. У к а з а н и е. Применить сперва теорему Паскаля к шести вершинам вписанных треугольников, а затем перенумеровать вершины так, чтобы шесть сторон этих треугольников образовали шестисторонник Брианшона.

20. Проективное соответствие двух рядов второго порядка установлено тремя парами точек (A, A'; B, B' и C, C'). Построить точки, соответственные в каждом из данных рядов точкам пересечения их носителей k и k'.

21. Проективное соответствие двух пучков второго порядка, каждый из которых представляет совокупность касательных к данной кривой второго порядка, установлено тремя парами соответственных прямых (a, a'; b, b' и c, c'). Построить прямые, соответственные в каждом из данных пучков общим касательным огибающих их кривых второго порядка.

22. Даны три точки A, B и C и три прямые a, b и c. Построить треугольник, стороны которого проходили бы последовательно через точки A, B и C, а вершины лежали бы на прямых a, b, c.

23. На прямых f и g даны два инволюционных соответствия одинакового типа (эллиптические или гиперболические). Найти такую точку плоскости, из которой инволюция на прямой f проектируется в инволюцию на прямой g.

24. В пучках с центрами F и G установлены инволюционные соответствия одинакового типа. Найти такую прямую плоскости, которая служила бы осью перспективного расположения инволюционных пучков F и G.

25. Доказать, что две кривые второго порядка пересекаются не более чем в четырех точках.

ГЛАВА ПЯТАЯ

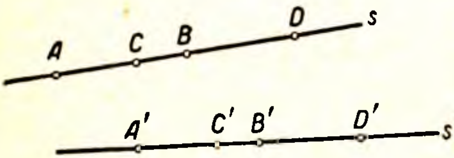
ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМ ВТОРОЙ СТУПЕНИ (КОЛЛИНЕАЦИИ И КОРРЕЛЯЦИИ)

§ 47. Определение проективности через гармонизм и его эквивалентность определению Штейнера.

1. Учение о проективном соответствии рядов и пучков было построено в предшествующих главах на основе штейнеровского определения проективности. Именно проективным мы называли такое взаимно однозначное соответствие двух форм первой ступени, в котором сложное отношение четырех элементов одной формы всегда равнялось сложному отношению четырех соответственных элементов второй. Такое определение проективного соответствия с помощью сложного (или ангармонического) отношения оказалось возможным благодаря тому, что сложное отношение является инвариантом проектирований и пересечений, как это вытекает из теоремы о равенстве сложного отношения соответственных элементов прямолинейного ряда и перспективного ему пучка (§ 27). Само по себе сложное отношение связано с измерением отрезков и углов, т. е. понятиями, чуждыми проективной геометрии, которая может быть построена на своей собственной чисто геометрической базе (без использования метрических понятий).

В нашем курсе проективной геометрии, развиваемой в пространстве частного вида — евклидовом пространстве, дополненном несобственными элементами, было целесообразно использовать проективные свойства сложного отношения, которое мы уже имели в своем распоряжении. Это позволило нам с большой легкостью изложить основные факты проективной геометрии на плоскости. Однако требование инвариантности сложного отношения четверки любых элементов формы первой ступени, положенное в основу определения проективности, является слишком сильным и стеснительным для дальнейшего развития проективной геометрии. Оно может быть заменено, как это будет показано дальше, ослабленным требованием об инвариантности гармонических групп элементов, т. е. об инвариантности сложного отношения лишь в том частном случае, когда оно равно — 1. Заметим при этом, что свойство гармонического расположения группы (четверки) элементов может быть определено чисто проективным путем при помощи полного четырехугольника (§ 30). Этим именно и воспользовался Штаудт, давший чисто геометрическое (без применения метрических понятий) построение проективной геометрии, основанное на идее гармонизма[1].

В предлагаемом здесь курсе проективной геометрии такая задача не ставилась, и, как уже было сказано, определение проективности было основано на понятии сложного отношения. Поэтому, не изменяя характера изложения, мы воспользуемся определением проективности через гармонизм с целью иметь возможность исследования проективных соответствий при ослабленном требовании Штаудта. Для этого необходимо доказать эквивалентность обоих определений проективности, что и будет сделано в настоящем параграфе.



Черт. 175.

2. Итак, будем называть взаимно однозначное соответствие двух форм первой ступени проективным по Штаудту, если каждой гармонической четверке элементов одной формы соответствует гармоническая четверка элементов второй.

Покажем прежде всего, что достаточно потребовать одностороннего сохранения гармонизма при переходе от гармонической четверки одной формы к другой.

В самом деле, пусть имеем два ряда s и s' (черт. 175). Предположим, что гармонизм сохраняется при переходе от ряда s к ряду s'. Докажем, что сохранение гармонизма имеет место и при обратном переходе.

Пусть имеем гармоническую четверку точек A', B', C', D' ряда s'. Предположим, что точкам A', B', C' соответствуют точки A, B, C ряда s.

Обозначим через D четвертую гармоническую точку к точкам A, B, C. Тогда гармонической четверке $ABCD$ ряда s соответствует по предположению гармоническая же четверка ряда s'. Но точкам A, B, C соответствуют точки A', B', C'. Следовательно, точке D соответствует точка D' и точке D' соответствует точка D — четвертая гармоническая к тройке точек[2] A, B, C.

3. Далее, докажем следующие свойства проективного соответствия по Штаудту:

I. *Проективное соответствие по Штаудту является упорядоченным.*

Рассмотрим два ряда точек s и s' и предположим, что для них установлено проективное соответствие по Штаудту.

---

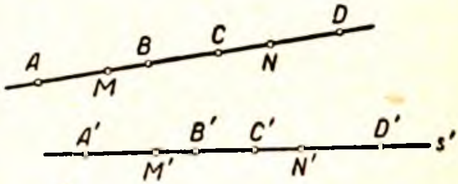
[1] См. исторический очерк, стр. 355, 356.

[2] Не забудем, что соответствие предполагается взаимно однозначным.

Чтобы убедиться в упорядоченности этого соответствия, достаточно показать, что отношениям порядка точек ряда s соответствуют такие же отношения порядка для соответственных точек ряда s'. Так, например, надо показать, что если две пары точек ряда s не разделяют друг друга, то тем же свойством будут обладать и пары соответственных точек ряда s'. Если пары точек ряда s разделяют друг друга, то тем же свойством обладают и пары соответственных точек ряда s'.

Пусть, например, имеем четыре точки A, B, C и D ряда s (черт. 176), причем

$$A,\ B \stackrel{\cdot\cdot}{-} C,\ D.$$



Черт. 176.

Докажем, что для соответственных точек A', B', C' и D' будем иметь:

$$A',\ B' \stackrel{\cdot\cdot}{-} C',\ D'.$$

Как было выяснено в § 32, две неразделяющиеся пары точек всегда имеют общую гармоническую пару. Обозначим эту общую гармоническую пару для пар точек A, B и C, D ряда s буквами M и N. Следовательно, будем иметь:

$$(ABMN) = -1, \quad (CDMN) = -1.$$

Обозначим буквами M' и N' точки ряда s', соответственные точкам M и N. Тогда по определению проективности по Штаудту должны иметь:

$$(A'B'M'N') = -1, \quad (C'D'M'N') = -1.$$

Откуда следует, что пара точек M', N' является общей гармонической парой для пар точек A', B' и C', D'. Но это означает, что

$$A',\ B' \stackrel{\cdot\cdot}{-} C',\ D'.$$

Так же легко доказывается сохранение порядка и в случае

$$A,\ B \div C,\ D.$$

В самом деле, если бы при этом оказалось, что

$$A',\ B',\ \stackrel{\cdot\cdot}{-} C',\ D',$$

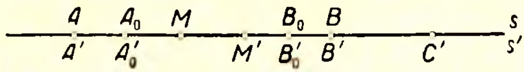
то по доказанному выше мы должны были бы иметь:

$$A,\ B \stackrel{\cdot\cdot}{-} C,\ D,$$

что противоречит сделанному предположению.

II. Теорема Штаудта. *Если имеем два ряда на одной и той же прямой, находящихся в проективном соответствии по Штаудту, причем три пары соответственных точек этих рядов совпадают, то и все пары совпадают, т. е. данные ряды тождественны.*

Предположим, что ряды s и s' расположены на одной прямой, причем пары соответственных точек A, A'; B, B' и C, C' совпадают (черт. 177). Так как ряды s и s' проективны по Штаудту, то четвертые гармонические точки к тройке двойных точек A, A'; B, B' и C, C' также совпадают. Таким образом, можно убедиться в существовании бесконечного (счетного) множества совпавших пар соответственных точек. Докажем, что не может оказаться ни одной пары несовпадающих соответственных точек. С этой целью рассмотрим тот из двух отрезков AB, который не содержит точки C. Отметим какую-нибудь точку M этого отрезка. Соответ-



Черт. 177.

ственная ей точка M' второго ряда должна принадлежать тому же отрезку. Это вытекает из следующих соображений. Ряды s и s' являются одинаково направленными, так как направлению ABC (ряда s) соответствует направление $A'B'C'$ (ряда s')

Так как

$$MC \div AB,$$

то и

$$M'C' \div A'B',$$

или

$$M'C' \div AB.$$

Итак, точка M' лежит на отрезке AB, содержащем точку M. Допустим, что M' не совпадает с M. Покажем, что это приведет к противоречию.

При движении точки M по прямой точка M', как было выяснено, движется в том же направлении. Обе точки должны совпасть в двойной точке A (A') и в двойной точке B (B'). Можно предположить, что совпадение произойдет раньше. Обозначим через $A_0(A_0')$ первую двойную точку при движении пары M, M' в одном направлении, а через $B_0(B_0')$ — первую двойную точку при движении пары M, M' в противоположном направлении. Тогда отрезок A_0B_0, не содержащий точки C, не может иметь других двойных точек, кроме концов отрезка A_0 и B_0. С другой стороны, рассмотрим пару точек D, D', гармонически сопряженных с парой C, C' относительно точек $A_0(A_0')$ и $B_0(B_0')$. Так как пары точек A_0, A_0'; B_0, B_0' и C, C' совпадают, то и пара точек D, D' совпадает (как четвертые гармонические).

Кроме того, должны иметь:

$$A_0,\ B_0 \div C,\ D,$$

т. е. двойная точка D (D') принадлежит тому отрезку A_0, B_0, который не содержит точки C.

Полученное противоречие показывает, что предположение о существовании пары соответственных и несовпадающих точек M и M' было неправильным. Таких пар быть не может.

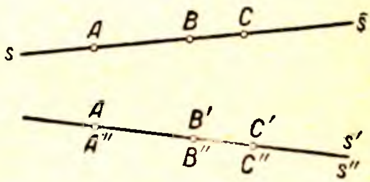
4. *Определение проективности по Штаудту эквивалентно определению проективности по Штейнеру.*

Чтобы убедиться в эквивалентности обоих определений проективности (по Штаудту и по Штейнеру), надо доказать, что:

1) Из определения проективности двух форм первой ступени по Штейнеру следует их проективность по Штаудту.

2) Из определения проективности двух форм первой ступени по Штаудту следует их проективность по Штейнеру.

Первое из этих утверждений является очевидным, так как определение проективности по Штаудту сводится к требованию равенства сложных отношений лишь в случае гармонической группы элементов. Это требование, очевидно, перекрывается определением Штейнера, которое предполагает равенство сложных отношений любых четверок соответственных элементов двух проективных форм.



Черт. 178.

Итак, из определения проективности по Штейнеру следует проективность рассматриваемых форм по Штаудту.

Докажем, что и обратное утверждение справедливо.

Пусть имеем два прямолинейных ряда s и s' (черт. 178). Предположим, что между ними установлено проективное соответствие по Штаудту. Отметим три произвольные точки A, B и C ряда s и обозначим через A', B', C' соответственные точки ряда s'. Тогда будем иметь:

$$\text{ряд } s\,(A, B, C, \ldots) \;\bar{\wedge}\; \text{ряду } s'\,(A', B', C', \ldots)$$
(п о Ш т а у д т у).

Установим теперь проективное соответствие прямолинейных рядов s и s'' по Штейнеру, причем носителем ряда s'' является та же самая прямая, на которой расположен прямолинейный ряд s'. Соответствие рядов s и s'' (по Штейнеру) зададим тремя парами соответственных точек: A, A'', B, B'' и C, C''. При этом выберем точки A'', B'' и C'' ряда s'', так, чтобы они совпадали соответственно с точками A', B' и C' ряда s'.

Тогда будем иметь:

$$\text{ряд } s\,(A, B, C, \ldots) \;\bar{\wedge}\; \text{ряду } s''\,(A'', B'', C'', \ldots)$$
(п о Ш т е й н е р у).

Будем считать соответственными такие пары точек рядов s' и s'', которые отвечают одной и той же точке ряда s в установленных выше соответствиях рядов s' и s'' ряду s. Так, например, если точке K ряда s соответствует точка K' ряда s' и точка K''

ряда s'', то точки K' и K'' считаем соответственными для рядов s' и s''.

Нетрудно убедиться, что установленное соответствие рядов s' и s'' является проективным по Штаудту.

В самом деле, пусть K', L', M' и N' — гармоническая четверка точек ряда s', которой соответствует также гармоническая четверка точек K, L, M и N ряда s (так как ряды s и s' проективны по Штаудту). Тогда гармонической четверке точек K, L, M, N соответствует гармоническая четверка точек K'', L'', M'', N' ряда s'' (так как ряды s и s'' проективны по Штейнеру).

Таким образом, гармонической четверке точек K', L', M', N' ряда s' соответствует гармоническая четверка точек K'', L'', M'', N'' ряда s''.

Следовательно, ряды s' и s'' проективны по Штаудту. Так как у этих рядов имеется три пары совпавших точек, а именно:

$$A' \equiv A'', \; B' \equiv B'', \quad C' \equiv C'',$$

то по теореме Штаудта оба ряда тождественны:

$$s' \, (A', B', \; C', \ldots) \equiv s'' \, (A'', B'', C'', \ldots).$$

Поэтому ряд s проективен ряду s' как по Штаудту, так и по Штейнеру.

Теорема об эквивалентности обоих определений проективности доказана.

Это позволит нам в дальнейшем изучать проективные свойства фигур, ограничиваясь требованием инвариантности гармонизма. В частности, мы воспользуемся определением Штаудта для изучения проективных преобразований плоского поля.

§ 48. Коллинеарные соответствия плоских полей (коллинеации).

В настоящем параграфе мы распространим понятие проективного соответствия на формы второй ступени, а именно на плоские поля точек и прямых. Понятно, что полученные нами выводы могут быть перенесены по принципу двойственности в пространстве на формы второй ступени, двойственные плоским полям, а именно на связки прямых и плоскостей.

Будем называть *коллинеарным соответствием двух плоских полей* или, коротко, *коллинеацией* такое взаимно однозначное соответствие их элементов, в котором:

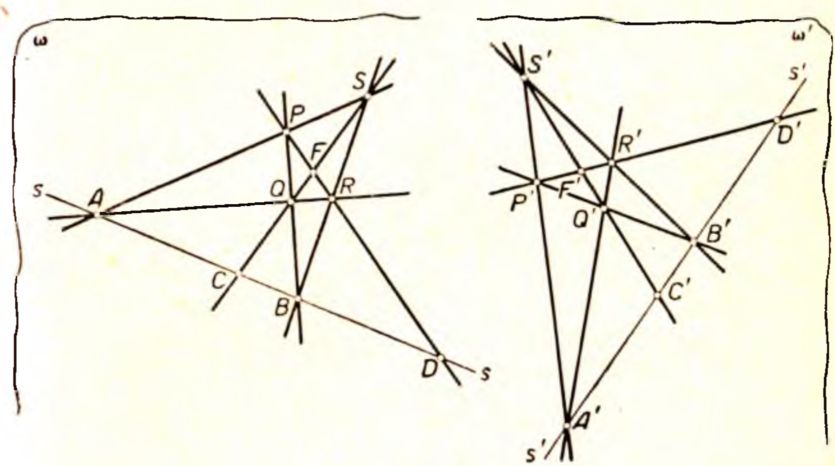
а) каждой точке одного поля соответствует точка второго,

б) каждой прямой одного поля соответствует прямая второго,

в) паре инцидентных элементов одного поля соответствует пара инцидентных соответственных элементов второго поля (т. е. точке, принадлежащей прямой, соответствует точка, принадлежащая соответственной прямой).

Заметим, что плоские поля, находящиеся в коллинеарном соответствии, могут иметь в качестве своих носителей или две различные плоскости, или одну и ту же плоскость. Далее, из самого определения коллинеации вытекает свойство транзитивности этого понятия. Это означает, что плоские поля ω и ω', коллинеарные какому-нибудь третьему полю ω'', коллинеарны между собой.

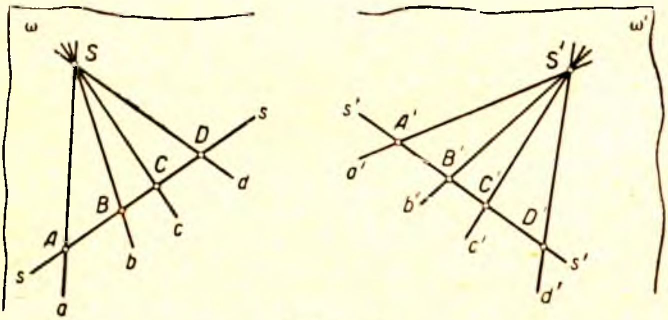
Докажем, что коллинеации обладают проективными свойствами, а именно, что *соответственные формы первой ступени двух коллинеарных полей проективны.* Предположим, что плоские



Черт. 179.

поля ω и ω' коллинеарны. Рассмотрим какой-либо прямолинейный ряд точек s поля ω и соответственный ему прямолинейный ряд точек s' поля ω'. Докажем, что ряды s и s' проективны. Для этого, как мы знаем, достаточно показать, что произвольной гармонической четверке точек ряда s соответствует гармоническая четверка точек ряда s'. Пусть A, B, C, D — четыре точки ряда s, образующие гармоническую группу. Проведем через точку A на плоскости ω произвольные прямые AP и AQ, через точку C — секущую прямую, которая встречает прямые AP и AQ в точках S и Q (черт. 179). Далее, соединим прямыми пары точек B, Q и B, S. Обозначим через P точку встречи прямых AS и BQ и через R — точку встречи прямых BS и AQ. Тогда прямая PR пересекает ряд s в точке D. Это следует из того, что для полного четырехугольника $PQRS$ точки A и B являются диагональными, а точки C и D — парой точек пересечения диагонали AB с противоположными сторонами, проходящими через третью диагональную точку F. Как мы знаем, пары A, B и C, D должны при этом образовать гармоническую группу. Таким образом, для гармонической четверки A, B, C, D мы построим полный четырехугольник $PQRS$, имеющий прямую s своей диагональю, точки A и B — диагональными точками, а точки C и D — точками, в которых эту диагональ пересекают стороны QS и PR полного четырехугольника.

На плоскости ω' ряду s соответствует ряд s'. Точкам A, B, C, D ряда s соответствуют точки A', B', C', D' ряда s', полному четырехугольнику $PQRS$ — полный четырехугольник $P'Q'R'S'$. При этом все отношения принадлежности должны быть перенесены с плоского поля ω на плоское поле ω' без всяких изменений, как это следует из определения коллинеации. Поэтому на плоскости ω' прямая s' будет служить диагональю полного четырех-



Черт. 180.

угольника $P'Q'R'S'$, точки A' и B' — его диагональными точками, а точки C' и D' — точками пересечения диагонали с парой противоположных сторон, проходящих через третью диагональную точку F'. Отсюда тотчас же следует, что четыре точки A', B', C', D' образуют гармоническую группу. Итак, требуемое доказано.

Теперь уже нетрудно доказать проективность соответственных пучков двух коллинеарных полей.

Предположим, что пучку S плоского поля ω соответствует пучок S' плоского поля ω' (черт. 180). Пересечем пучок S прямой s. Получим ряд точек, перспективный пучку S:

$$\text{ряд } s\ (A, B, C, D, \ldots) \overset{=}{\wedge} \text{пучку } S\ (a, b, c, d, \ldots).$$

На плоскости ω' прямой s соответствует прямая s'. Последняя пересекает пучок S' в точках A', B', C', D', ..., причем

$$\text{ряд } s'\ (A', B', C', D', \ldots) \overset{=}{\wedge} \text{пучку } S'\ (a', b', c', d', \ldots).$$

С другой стороны, ряды s и s', как соответственные в коллинеации полей ω и ω', проективны:

$$\text{ряд } s\ (A, B, C, D, \ldots) \overline{\wedge} \text{ ряду } s'\ (A', B', C', D', \ldots).$$

Отсюда заключаем, что перспективные этим рядам пучки S и S' также проективны:

$$\text{пучок } S\ (a, b, c, d, \ldots) \barwedge \text{пучку } S'\ (a', b', c', d', \ldots)$$

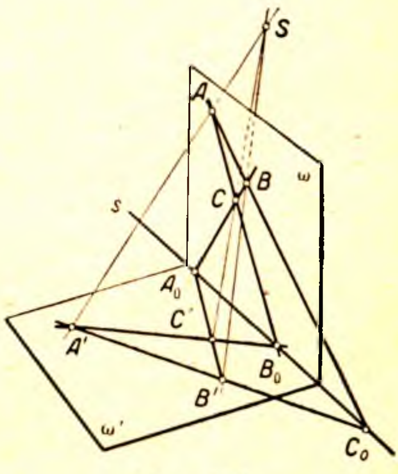
(ч. т. д.).

Таким образом, проективность соответственных форм первой ступени двух коллинеарных полей доказана.

Отсюда также следует, что каждой кривой второго порядка, как геометрическому месту точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков в коллинеарном поле, соответствует кривая второго порядка (образующие пучки первой кривой переходят в образующие пучки второй).

§ 49. Перспективные коллинеации и гомологии.

Вообразим в пространстве плоскости ω и ω' и центр проекций S (черт. 181). Будем проектировать из центра S точки плоскости ω на плоскость ω'. Тогда каждой точке A плоскости ω центральная проекция однозначно относит точку A' плоскости ω'. Обратно, точке A' плоскости ω' соответствует ее центральная проекция A на плоскости ω. Аналогичным образом каждой прямой плоского поля ω центральная проекция относит соответственную прямую плоского поля ω'. Так, например, прямой AB поля ω соответствует прямая $A'B'$ поля ω'. Обе соответственные прямые являются линиями пересечения плоскостей ω и ω' с проектирующей плоскостью SAB (или $SA'B'$). Поэтому прямой $A'B'$ соответствует на плоскости ω прямая AB. Так как точке, лежащей на прямой, центральная проекция относит точку, лежащую на соответственной прямой, то все условия коллинеарного соответствия двух плоскостей ω и ω' оказываются выполненными. Поэтому приходим к выводу, что соответствие плоскостей ω и ω' является коллинеацией. Последняя называется *перспективной коллинеацией*.

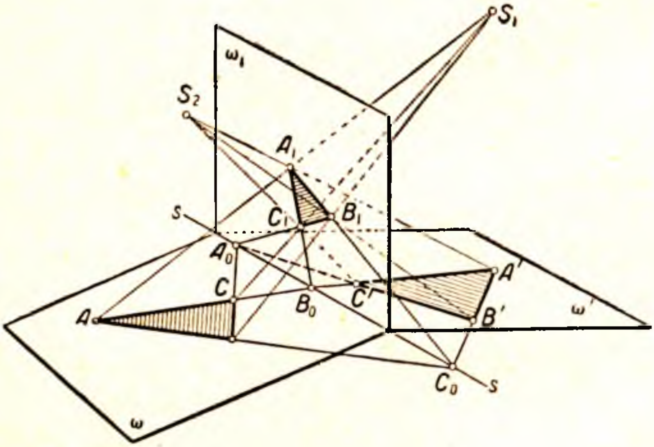


Черт. 181.

Линия пересечения ss плоскостей ω и ω' является, очевидно, геометрическим местом двойных точек перспективной коллинеации. Обозначим через C_0 точку пересечения прямой AB с прямой ss. Тогда точка C_0 сама себе соответствует. Следовательно, прямая $A'B'$, соответственная AB, должна проходить через C_0.

Отсюда заключаем, что пары соответственных прямых пересекаются на прямой ss, которую называют также **осью перспективной коллинеации**. Точка S называется **центром этой коллинеации**.

Выполним теперь следующее построение. Будем проектировать плоскость ω на плоскость ω_1 из центра S_1 (черт. 182). Тогда плоскости ω и ω_1 будут приведены в перспективно-коллинеарное соответствие, в котором треугольнику ABC соответствует треугольник $A_1B_1C_1$. После этого спроектируем плоскость ω_1 из центра S_2, отличного от S_1, на плоскость ω', проходящую через линию пересечения плоскостей ω и ω_1. Получим новую перспективную коллинеацию, приводящую в соответствие плоскости ω_1 и ω'. В этой коллинеации треугольнику $A_1B_1C_1$ будет соответ-



Черт. 182.

ствовать треугольник $A'B'C'$. Соответствие плоскостей ω и ω', очевидно, также является коллинеацией, так как два плоских поля ω и ω', коллинеарные третьему ω_1, коллинеарны между собой. Но, кроме того, мы будем иметь **перспективную** коллинеацию плоских полей ω и ω'. Последнее вытекает из того, что соответственные треугольники ABC и $A'B'C'$ гомологические, т. е. удовлетворяют теореме Дезарга. Поэтому прямые AA', BB' и CC' проходят через одну точку. Обозначим эту точку буквой S. Точка S является центром перспективной коллинеации плоских полей ω и ω'.

Существенно новый случай получим, если плоскость ω' совпадает с плоскостью ω. В этом случае коллинеарные поля имеют одного и того же носителя. Так как и в этом случае теорема Дезарга для треугольников ABC и $A'B'C'$ остается в силе (теорема Дезарга на плоскости), то прямые, соединяющие пары соответственных точек, проходят через одну и ту же точку S

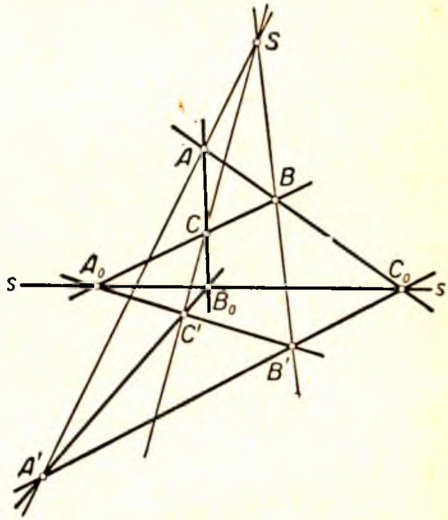
совмещенных плоскостей. Коллинеация называется в этом случае гомологией. Точка S называется центром гомологии. Через центр S проходят все прямые, соединяющие пары соответственных точек (A, A'; B, B', C, C'; ...). Прямая s называется осью гомологии. На этой прямой лежат точки пересечения пар соответственных прямых гомологии (A_0, B_0, C_0, ...).

Все прямые, проходящие через центр гомологии S, являются двойными. Сам центр S также, очевидно, двойная точка.

Аналогично ось гомологии s является двойной прямой, все точки которой двойные. Два соответственных в гомологии треугольника, например треугольники ABC и $A'B'C'$, удовлетворяют условиям теоремы Дезарга.

Точно так же и обратно, два треугольника, удовлетворяющие теореме Дезарга, можно рассматривать как соответственные в гомологии. Отсюда и название таких треугольников—гомологические.

Если коллинеация на плоскости имеет центр, то она имеет также ось, т. е. является гомологией. В самом деле, в этом случае соответственные треугольники расположены гомологически и их соответственные стороны пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой, которая и является, очевидно, осью гомологии.



Черт. 183.

Равным образом коллинеация, имеющая ось, обладает также центром, т. е. является гомологией.

Если даны центр S и ось s гомологии, то для определения гомологии достаточно задать пару соответственных точек A, A'. При этом пара точек A, A' должна удовлетворять единственному условию: прямая AA' обязательно проходит через точку S. В остальном выбор пары соответственных точек является свободным[1].

В частности, в качестве центра S гомологии можно выбрать какую-либо точку на оси s гомологии. С таким особым случаем гомологии мы встретимся в дальнейшем (§ 54).

Покажем, что гомология вполне определена, если даны:

$$S, \; s \text{ и } (AA').$$

[1] Разумеется, точка A не предполагается двойной (т. е. $A' \neq A$).

Пусть дана произвольная точка B (черт. 183). Тогда соответственная ей точка B' находится с помощью следующего построения. Проводим прямую AB и обозначаем через C_0 точку ее пересечения с осью гомологии s. Прямая $A'C_0$ является соответственной прямой AC_0. Точка B' должна лежать на этой прямой $A'C_0$ и на луче SB. Поэтому имеем:

$$B' = A'C_0 \times SB.$$

Таким путем для каждой точки плоскости может быть построена соответственная ей точка.

Если бы построение точки B', соответственной точке B, было выполнено при помощи какой-либо другой пары (отличной от пары A, A') соответственных точек, например при помощи пары C, C', то мы получили бы ту же самую точку, что и при первом построении. Это прямо следует из того, что треугольники ABC и $A'B'C'$ удовлетворяют теореме Дезарга. В самом деле, прямые CB и $C'B'$ должны пересекаться в точке A_0 оси гомологии s. Следовательно, они являются соответственными.

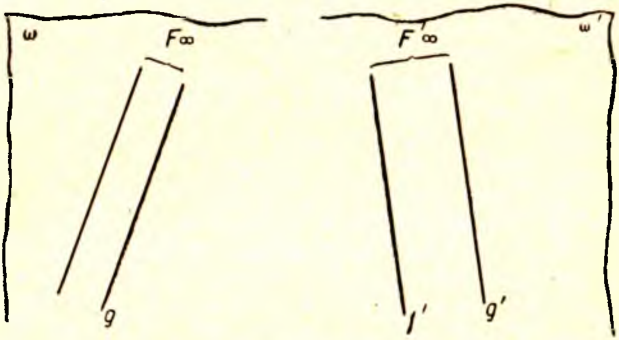
Вместо пары соответственных точек можно определить гомологию заданием пары соответственных прямых. Пусть, например, кроме центра S и оси s гомологии, задана пара AB, $A'B'$ соответственных прямых. Эти прямые должны, очевидно, удовлетворять лишь одному требованию: точка их пересечения C_0 должна принадлежать оси гомологии s. Тогда, проведя произвольный луч (например, SA) пучка S, определим пару соответственных точек A, A' на прямых AB и $A'B'$.

Заметим, что гомологию всегда можно рассматривать как перспективную коллинеацию с последующим совмещением плоскостей. Такую коллинеацию мы получим, перегибая чертеж по оси гомологии s, которая при этом становится линией пересечения плоскостей коллинеации. Центр перспективной коллинеации определяется как точка пересечения прямых AA', BB', CC', ... Последние, по теореме Дезарга (в пространстве), должны проходить через одну точку S.

§ 50. Аффинные коллинеации.

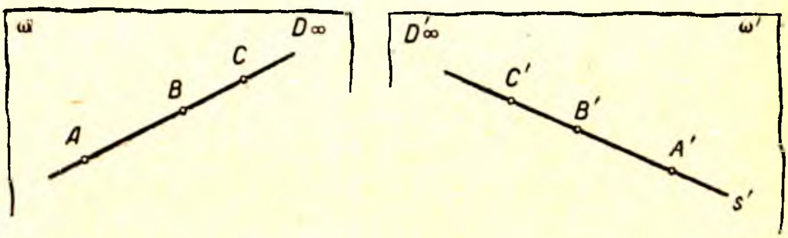
В первой главе мы рассмотрели аффинные и перспективно-аффинные соответствия. Эти соответствия удовлетворяют тем требованиям, которые были выдвинуты при определении коллинеарных соответствий. Поэтому *аффинные соответствия принадлежат к числу коллинеаций*. Но вместе с тем они обладают особыми свойствами (как, например, инвариантностью параллелизма и простого отношения трех точек прямой), которые не являются общими свойствами всех вообще коллинеаций. В настоящем параграфе мы уточним понятие аффинной коллинеации, определив то характеристическое свойство, которое выделяет ее из класса всех коллинеаций.

Предположим, что между плоскостями ω и ω' установлено аффинное соответствие. Тогда двум параллельным прямым f и g ($f \parallel g$) плоскости ω соответствуют параллельные прямые f' и g' ($f' \parallel g'$) плоскости ω' (черт. 184). На проективной плоскости параллельные прямые пересекаются в несобственной точке. Обозначим несобственную точку пересечения прямых f и g через F_∞.



Черт. 184.

Ей соответствует несобственная точка пересечения прямых f' и g' на плоскости ω', которую обозначим через F'_∞. Так как точка F_∞ — произвольная несобственная точка плоскости ω, то можно сказать, что в аффинной коллинеации несобственной точке одной плоскости всегда соответствует несобственная же точка второй



Черт. 185.

плоскости. Это означает, что несобственной прямой плоскости ω в аффинной коллинеации соответствует несобственная прямая плоскости ω'.

Докажем, что это свойство является для аффинной коллинеации характеристическим. Необходимость его следовала из инвариантности параллелизма. Чтобы показать его достаточность, рассмотрим простое отношение трех точек прямой.

Пусть плоскости ω и ω' находятся в коллинеарном соответствии, причем несобственной прямой плоскости ω соответствует несобственная прямая плоскости ω'. Рассмотрим пару соответственных прямых s и s' (черт. 185). Предположим, что трем точкам A, B и C прямой s соответствуют три точки A', B' и C' прямой s'. Кроме того, в силу сделанного предположения несобственной точке D_∞ прямой s соответствует несобственная точка D'_∞ прямой s'. Так как коллинеация не меняет сложного отношения четырех точек прямой, мы должны иметь:

$$(ABCD_\infty) = (A'B'C'D'_\infty).$$

Но, как было показано в § 25,

$$(ABCD_\infty) = (ABC), \quad (A'B'C'D'_\infty) = (A'B'C').$$

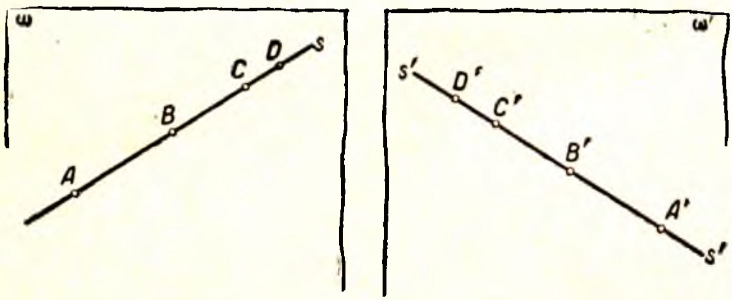
Следовательно, получим:

$$(ABC) = (A'B'C').$$

Таким образом, коллинеации, в которых несобственной прямой одной плоскости соответствует несобственная прямая другой, сохраняют без изменения простое отношение трех точек прямой. Но это значит, что указанные коллинеации являются аффинными.

На основании приведенных соображений приходим к следующему выводу:

Рассмотренные в главе I аффинные соответствия двух плоскостей (различных или совпавших) *являются коллинеациями, в которых несобственной прямой одной плоскости соответствует несобственная прямая второй* (аффинные коллинеации).



Черт. 186.

Предположим, что прямолинейному ряду s соответствует в аффинной коллинеации ряд s'. Как известно, ряды s и s' являются проективными во всякой коллинеации. В данном случае они обладают дополнительным свойством: простые отношения трех соответственных точек этих рядов равны.

Обозначим через AB и CD два каких-либо отрезка прямой s, а через $A'B'$ и $C'D'$ — соответственные отрезки прямой s' (черт. 186). Тогда будем иметь:

$$(ACB) = (A'C'B'); \quad (BDC) = (B'D'C'),$$

или

$$\frac{AB}{CB} = \frac{A'B'}{C'B'}; \qquad \frac{BC}{DC} = \frac{B'C'}{D'C'}.$$

Переставляя средние члены, получим:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'}; \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{DC}{D'C'}.$$

Сравнивая эти два равенства, находим:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \text{const}.$$

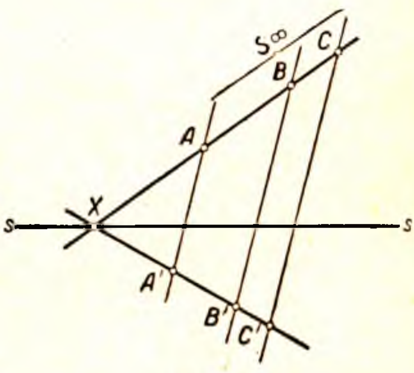
Таким образом, отношение двух любых соответственных отрезков рядов s и s' есть величина постоянная. Проективные ряды, обладающие этим свойством, называются **подобными**. Признаком подобия двух проективных рядов является, как мы видели, соответствие их несобственных точек. В частности, этим свойством всегда обладают два прямолинейных ряда, соответственных в аффинной коллинеации.

§ 51. Аффинные гомологии.

Предположим, что плоскости полей ω и ω' совпадают. Тогда коллинеация этих полей представляет собой соответствие элементов одной и той же плоскости. Если эта коллинеация аффинна, то несобственная прямая плоскости должна сама себе соответствовать. Следовательно, несобственная прямая является двойной прямой коллинеации.

Рассмотрим теперь аффинную гомологию. Это такая гомология, в которой несобственная прямая является двойной.

Как мы видели (§ 49), двойные прямые гомологии проходят через центр гомологии, кроме них, двойной прямой является ось гомологии.



Черт. 187.

В аффинной гомологии двойной прямой оказывается несобственная прямая плоскости, которая, следовательно, либо проходит через центр гомологии S_∞, являющийся в этом случае несобственной точкой, либо сама является осью s_∞ гомологии. Рассмотрим возможные случаи таких гомологий.

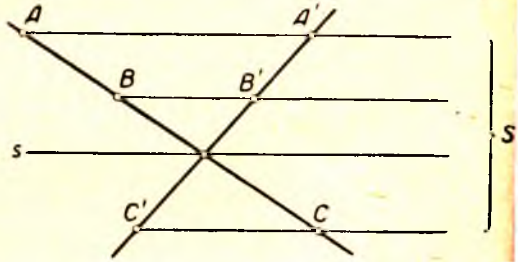
1) **Перспективно-аффинное соответствие.** В этом случае центр гомологии S_∞ является несобственной точкой. Все прямые, соединяющие пары соответственных точек, параллельны и проходят через точку S_∞ (черт. 187). Ясно, что такая гомология

представляет собой перспективно-аффинное преобразование, ось которого s есть геометрическое место двойных точек (ось гомологии).

Если, в частном случае, центр S_∞ перспективно-аффинного соответствия является несобственной точкой оси s, то все прямые, соединяющие пары соответственных точек, параллельны оси s (черт. 188). Такое преобразование называется с д в и г о м.

2) Г о м о т е т и я. Если ось гомологии s_∞ является несобственной прямой, то пары соответственных прямых должны быть параллельными и пересекаться в точках несобственной оси. Так, например, на чертеже 189 соответственные прямые AB и $A'B'$ параллельны и пересекаются в несобственной точке X_∞. При этом будем иметь:

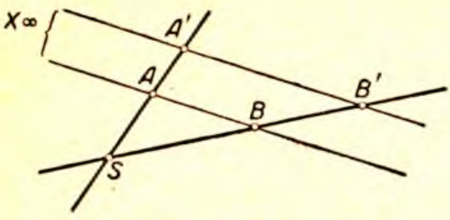
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = k \text{ (const)}.$$



Черт. 188.

Следовательно, рассматриваемая коллинеация представляет собой гомотетию (§ 3) с коэффициентом k.

Особый случай гомотетии представляет собой и н в о л ю ц и о н н а я г о м о т е т и я, или ц е н т р а л ь н а я с и м м е т р и я (черт. 190). В этом случае пары соответственных точек A и A' образуют на прямой AA' инволюцию, двойными точками которой являются центр S и несобственная точка A_∞ (лежащая на оси гомологии). То же самое имеем для любой прямой, проходящей через центр S. Так как инволюция на каждой из этих прямых гиперболическая, причем одна из двойных точек несобственная, то вторая двойная точка S делит отрезок AA' (или BB') пополам как гармонически сопряженная несобственной точке. Отсюда видно, что рассматриваемая инволюционная гомотетия есть центральная симметрия (с центром S).



Черт. 189.

3) П а р а л л е л ь н ы й п е р е н о с. Предположим, наконец, что мы имеем такую аффинную гомологию, в которой ось s_∞ является несобственной прямой, а центр S_∞ — несобственной точкой. Следовательно, центр S_∞ принадлежит оси[1] s_∞.

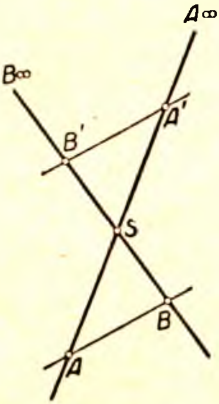
[1] К числу таких гомологий, у которых центр S и ось s инцидентны, относится также «сдвиг».

Если A, A' и B, B' — две пары соответственных точек (черт. 191), то прямые AA' и BB' параллельны и пересекаются в точке S_∞:

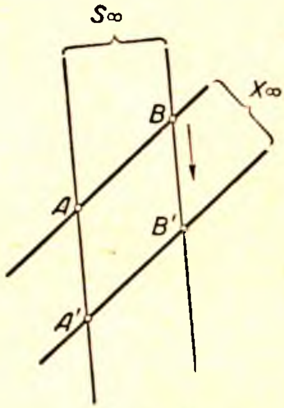
$$AA' \times BB' = S_\infty.$$

С другой стороны, прямые AB и $A'B'$ как соответственные должны пересекаться в точке X_∞, лежащей на несобственной оси гомологии s_∞. Поэтому

$$AB \parallel A'B'.$$



Черт. 190.



Черт. 191.

Следовательно, фигура $ABA'B'$ — параллелограмм и будем иметь:

$$AB \# A'B'.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае гомология сводится к параллельному переносу, определяемому вектором $\overrightarrow{AA'}$.

Параллельный перенос представляет собой такое преобразование плоскости, в котором все точки перемещаются в определенном направлении на одно и то же расстояние. Вектор $\overrightarrow{AA'}$ переноса определяет как направление, так и расстояние переноса.

§ 52. Об условиях, определяющих коллинеацию.

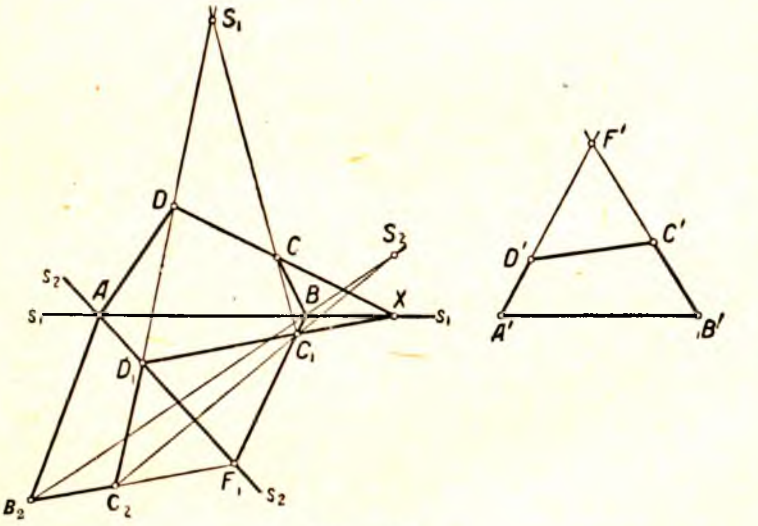
1. Поставим вопрос о том, сколько условий определяет коллинеацию. Докажем предварительно следующие две теоремы:

Теорема I. *Существует коллинеация, переводящая произвольно выбранный невырождающийся*[1] *четырехугольник плоскости в четырехугольник, конгруентный произвольно заданному.*

[1] Т. е. такой четырехугольник, никакие три вершины которого не лежат на одной прямой.

Пусть имеем четырехугольник $ABCD$ на плоскости ω. Покажем, что существует такая коллинеация, которая переводит данный четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник, конгруентный произвольно заданному второму четырехугольнику $A'B'C'D'$ (черт. 192).

Проведем через вершину A данного четырехугольника произвольную прямую s_2 и отложим на ней отрезок $AD_1 = A'D'$. Далее, найдя точку F' пересечения сторон $A'D'$ и $B'C'$ второго четырехугольника, отложим на прямой s_2 отрезок $D_1F_1 = D'F'$. Обозначим буквой X точку пересечения стороны DC данного четырехугольника с противоположной стороной AB.



Черт. 192.

Соединим точку D_1 с точкой X и точку F_1 с B. Точку пересечения прямых D_1X и F_1B обозначим через C_1:

$$C_1 = D_1X \times F_1B.$$

Мы получили четырехугольник ABC_1D_1. Этот четырехугольник можно рассматривать как соответственный данному четырехугольнику $ABCD$ в гомологии с осью AB и центром S_1. Последний определяется как точка пересечения прямых D_1D и C_1C:

$$S_1 = C_1C \times D_1D.$$

Действительно, гомология с центром S_1 и осью $s_1 \equiv AB$ переводит четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник ABC_1D_1. Обозначим эту гомологию буквой $\mathbf{H}_1$. Гомология $\mathbf{H}_1$ преобразует точки плоскости ω таким образом, что четырехугольник $ABCD$ переходит в четырехугольник ABC_1D_1.

Так как отрезок $AD_1 = A'D'$, то на этом отрезке AD_1 можно построить четырехугольник $AD_1C_2B_2$, конгруентный второму данному четырехугольнику $A'D'C'B'$:

$$AD_1C_2B_2 = A'D'C'B'.$$

При этом, в силу того что $D_1F_1 = D'F'$, сторона B_2C_2 пересекает сторону AD_1 четырехугольника в точке F_1.

Нетрудно видеть, что четырехугольник $AD_1C_2B_2$ является соответственным четырехугольнику AD_1C_1B в гомологии с осью $s_2 \equiv AD_1$ и центром S_2, определяемым следующим образом:

$$S_2 = B_2B \times C_2C_1.$$

Обозначим эту гомологию буквой $\mathbf{H}_2$. Гомология $\mathbf{H}_2$ преобразует точки плоскости таким образом, что четырехугольник AD_1C_1B переходит в четырехугольник $AD_1C_2B_2$.

Рассмотрим теперь преобразование **K**, представляющее собой произведение гомологий $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2$$

Преобразование **K** является, как нетрудно видеть, коллинеацией. В самом деле, точки плоскости ω при посредстве гомологий $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ переходят в соответственные точки той же плоскости. Прямые плоскости ω переходят в соответственные прямые. Наконец, инцидентные элементы переходят в инцидентные.

Таким образом, существует коллинеация **K**, переводящая данный четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник $AB_2C_2D_1$, конгруентный второму данному четырехугольнику $A'B'C'D'$.

Теорема доказана[1].

Теорема II. *Существует лишь одна коллинеация, в которой данному невырождающемуся четырехугольнику $ABCD$ соответствует второй данный четырехугольник $A'B'C'D'$.*

Предположим, что в некоторой коллинеации четырехугольнику $ABCD$ соответствует четырехугольник $A'B'C'D'$ (черт. 193). При этом не имеет значения, рассматриваем ли мы коллинеацию двух различных плоскостей или одной плоскости (т. е. являются ли носителями коллинеарных полей две различные плоскости или одна и та же).

Покажем, что каждой точке M плоского поля ω соответствует вполне определенная единственная точка M' плоского поля ω'.

---

[1] Можно доказать, что с помощью ряда центральных проекций можно установить коллинеацию плоскостей ω и ω', в которой данному четырехугольнику $ABCD$ соответствует данный четырехугольник $A'B'C'D'$ (см., например, Гиршвальд, Проективная геометрия, изд. ДНТВУ, 1935).

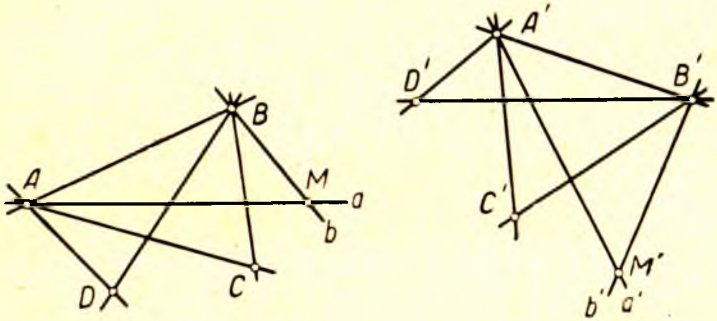
Рассмотрим два пучка с центрами в соответственных точках A и A'. В этих пучках имеем соответственные пары лучей:

$$AB \text{ и } A'B',\ AC \text{ и } A'C',\ AD \text{ и } A'D',$$

которые вполне определяют проективное соответствие пучков A и A': пучок A $(AB, AC, AD, \ldots) \barwedge$ пучку A' $(A'B', A'C', A'D', \ldots)$.

Тогда лучу a пучка A, проходящему через точку M, соответствует определенный луч a' пучка A', проходящий через соответственную точку M'. При этом должны иметь

$$(AB, AC, AD, a) = (A'B', A'C', A'D', a').$$



Черт. 193.

Из этого условия, как мы знаем (§ 28), луч a' однозначно определяется и может быть построен.

Подобным же образом рассмотрим два проективных пучка с центрами B и B':

пучок B $(BA, BC, BD, \ldots) \barwedge$ пучку B' $(B'A', B'C', B'D', \ldots)$.

Лучу b пучка B, проходящему через точку M, соответствует определенный луч b' пучка B', проходящий через M'. Причем

$$(BA, BC, BD, b) = (B'A', B'C', B'D', b'),$$

что позволяет однозначно построить луч b'.

Таким образом, точка M' однозначно определяется как точка пересечения прямых a' и b':

$$M' = a' \times b'.$$

Следовательно, существует только одна коллинеация, в которой четырехугольнику $ABCD$ соответствует четырехугольник $A'B'C'D'$ (ч. т. д.).

2. Из теорем I и II можем заключить, что *задание двух соответственных невырождающихся четырехугольников или четырех пар соответственных точек* (из которых никакие три не лежат на одной прямой) *вполне определяет коллинеарное соответствие плоских полей.*

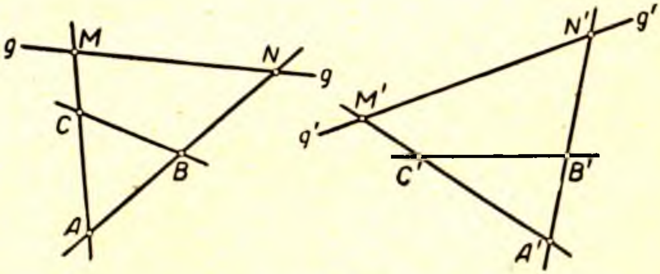
В самом деле, если точкам A, B, C, D плоского поля ω соответствуют точки A', B', C', D' плоского поля ω', то по теореме I существует коллинеация, переводящая четырехугольник $ABCD$

в четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, конгруентный четырехугольнику $A'B'C'D'$.

Обозначим через ω_1 плоское поле, в которое при этом переходит поле ω. Совместим носители плоских полей ω_1 и ω' так, чтобы четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ совместился с четырехугольником $A'B'C'D'$. Тогда в коллинеации плоских полей ω и $\omega_1 \equiv \omega'$ четырехугольнику $ABCD$ соответствует четырехугольник $A'B'C'D'$. По теореме II эта коллинеация является единственной[1].

Таким образом, задание двух соответственных четырехугольников плоских полей ω и ω' определяет единственную коллинеацию этих полей (ч. т. д.).

Вместо двух соответственных четырехугольников *для определения коллинеации можно задать два соответственных четырех-*



Черт. 194.

сторонника или четыре пары соответственных прямых (из которых никакие три не проходят через одну точку).

В самом деле, задавая два соответственных четырехсторонника, мы будем иметь и четыре пары соответственных точек коллинеарных полей (вершины данных четырехсторонников), которые, как было показано, определяют коллинеацию.

Коллинеация может быть также определена заданием трех пар соответственных точек и пары соответственных прямых. Так, если даны три пары соответственных точек A, A'; B, B' и C, C' (черт. 194) и пара соответственных прямых g и g', то, отмечая точки пересечения прямых g и g' соответственно со сторонами треугольника ABC и $A'B'C'$, получим еще три пары соответственных точек. Тогда можем выбрать два соответственных невырождающихся четырехугольника, например $BCMN$ и $B'C'M'N'$, которые вполне определяют коллинеацию.

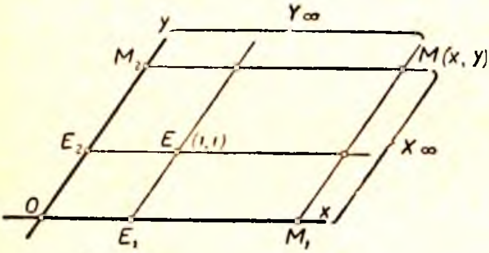
Рассматривая в главе I аффинные соответствия, мы определяли их с помощью двух соответственных треугольников (трех пар

[1] Заметим, что для преобразования плоского поля ω в поле ω', помимо коллинеации K, потребовалось произвести движение S, совмещающее четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ с четырехугольником $A'B'C'D'$.

соответственных точек). Теперь ясно, что четвертое условие для аффинных коллинеаций заключается в соответствии несобственных прямых плоских полей. Поэтому для определения аффинной коллинеации достаточно задать три пары соответственных точек.

§ 53. Проективные координаты.

1. Изучая аффинные преобразования плоскости, мы пришли к понятию аффинных координат, представляющих собой обобщение обыкновенных декартовых координат (§ 8). Аффинную систему координат мы получили, подвергнув аффинному преобразованию обыкновенную декартову систему координат на плоскости. При этом новая система — система аффинных координат — оказалась инвариантной по отношению ко всякому аффинному преобразованию.



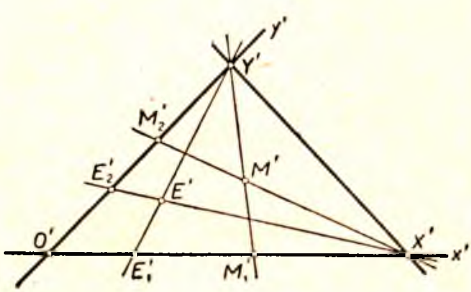
Черт. 195.

Для изучения проективных преобразований плоскости (коллинеации) должно быть получено такое обобщение декартовой системы, которое могло бы выдержать без изменения любое коллинеарное преобразование плоского поля.

Такая система координат носит название проективной. Мы придем к ней, произведя проективное преобразование обыкновенной декартовой системы координат.

Пусть, как и в § 8, имеем на плоскости систему обыкновенных декартовых координат xOy (черт. 195). Обозначим через E (1, 1) единичную точку и через M (x, y) произвольную точку плоскости.

Произведем теперь коллинеарное преобразование плоского поля и посмотрим, какой вид примет при этом чертеж 195. На этом чертеже прямые M_2M и E_2E пересекают ось Ox в ее несобственной точке X_∞ ($M_2M \parallel E_2E \parallel Ox$). Точно так же прямые M_1M и E_1E пересекают ось Oy в ее несобственной точке Y_∞ ($M_1M \parallel E_1E \parallel Oy$).



Черт. 196.

Предположим, что точкам X_∞ и Y_∞ соответствуют в коллинеации точки X' и Y', а несобственной прямой $X_\infty Y_\infty$ — прямая $X'Y'$ (черт. 196). Тогда прямые M'_2M' и E'_2E' должны пересекать ось $O'x'$ в точке X', а прямые $M_1'M'$ и $E_1'E'$ должны пересекать ось $O'y'$ в точке Y'. Таким образом, чертеж 196 является проективным изображением чертежа 195. Теперь мы дадим декартовым координатам x и y такое выражение, которое оставалось бы инвариантным при всех коллинеарных преобразованиях. Этого можно достигнуть, выражая координаты x и y с помощью сложных отношений:

$$x = \frac{OM_1}{OE_1} = (M_1E_1O) = (M_1E_1OX_\infty),$$

так как

$$(M_1E_1OX_\infty) = \frac{(M_1E_1O)}{(M_1E_1X_\infty)} = (M_1E_1O).$$

Аналогично

$$y = \frac{OM_2}{OE_2} = (M_2E_2O) = (M_2E_2OY_\infty).$$

Мы представили декартовы координаты в проективной форме. После преобразования (черт. 196) будем иметь:

$$x' = (M_1'E_1'O'X'),$$
$$y' = (M_2'E_2'O'Y'). \qquad (1)$$

Эти выражения назовем **проективными** координатами точки M'.

Так как сложное отношение четырех точек прямой не изменяется в коллинеарном преобразовании, то будем иметь:

$$x' = x \text{ и } y' = y.$$

2. Рассмотрим теперь систему проективных координат независимо от декартовой. Прежде всего мы видим, что для определения проективных координат по формулам (1) должен быть задан треугольник $O'X'Y'$, который называется **основным** (базисным) или **координатным**. Кроме того, должна быть задана единичная точка E'.

Из формул (1) видно, что при совпадении текущей точки M' с точкой E' получим:

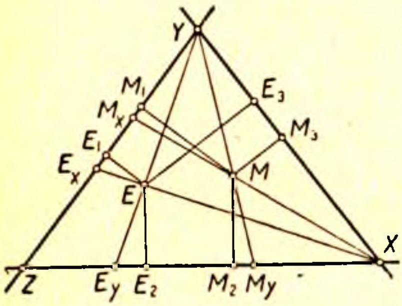
$$x' = 1, \ y' = 1.$$

Следовательно, проективные координаты единичной точки E' равны единице.

Рассматривая чертеж 196, мы видим, что координатная фигура (основной треугольник и единичная точка) совершенно равноправна в отношении вершин и сторон треугольника, поэтому в качестве центров проекции можно выбрать любые две вершины основного треугольника и проектировать из них единичную и данную точки на противоположные стороны треугольника. Предположим, что нам задан основной (координатный) треугольник XYZ проективной системы координат (черт. 197). Проектируя точки E и M из вершины X на противолежащую сторону координатного треугольника, получим точки E_x и M_x. Проектируя те же точки из вершины Y, получим на противолежащей стороне точки E_y и M_y. Тогда проективные координаты x' и y' можно выразить следующими формулами:

$$x' = (M_y E_y Z X), \quad y' = (M_x E_x Z Y). \tag{2}$$

Следует отметить, что проективные координаты точек прямой XY остаются неопределенными. В самом деле, если точка M лежит на прямой XY, то M_y совпадает с X, а M_x с Y. Чтобы устранить это исключение, перейдем к однородным проективным координатам, полагая



Черт. 197.

$$x' = \frac{x}{z}, \quad y' = \frac{y}{z}.$$

Посмотрим, какой геометрический смысл имеют однородные проективные координаты x, y, z.

Из точек M и E опустим перпендикуляры на стороны координатного треугольника. Основания этих перпендикуляров обозначим соответственно буквами: M_1, M_2, M_3 и E_1, E_2, E_3 (черт. 197). Будем иметь:

$$\frac{x}{z} = x' = (M_y E_y Z X) = (YM_y, YE_y, YZ, YX) = \frac{(YM_y, YE_y, YZ)}{(YM_y, YE_y, YX)} =$$

$$= \frac{\sin(M_y Y Z)}{\sin(E_y Y Z)} : \frac{\sin(M_y Y X)}{\sin(E_y Y X)} = \frac{\sin(M_y Y Z)}{\sin(M_y Y X)} : \frac{\sin(E_y Y Z)}{\sin(E_y Y X)} = \frac{MM_1}{MM_3} : \frac{EE_1}{EE_3} =$$

$$= \frac{MM_1}{EE_1} : \frac{MM_3}{EE_3},$$

или

$$\frac{x}{z} = \frac{MM_1}{EE_1} : \frac{MM_3}{EE_3}.$$

Подобным же образом найдем:

$$\frac{y}{z} = \frac{MM_2}{EE_2} : \frac{MM_3}{EE_3}.$$

Обозначим расстояния точки M до сторон координатного треугольника следующим образом:

$$MM_1 = d_1, \; MM_2 = d_2, \; MM_3 = d_3$$

и аналогичные расстояния единичной точки E через

$$EE_1 = e_1, \quad EE_2 = e_2, \; EE_3 = e_3.$$

Тогда получим следующую формулу:

$$x : y : z = \frac{d_1}{e_1} : \frac{d_2}{e_2} : \frac{d_3}{e_3}. \tag{3}$$

Формула (3) показывает, что *однородные проективные координаты x, y, z точки M пропорциональны отношениям расстояний данной точки к расстояниям единичной точки до сторон координатного треугольника.*

3. Это свойство однородных проективных координат позволяет написать формулы преобразования координат.

Обозначим через ξ, η обыкновенные декартовы координаты на плоскости. Предположим, что уравнения сторон основного треугольника XYZ имеют в этой системе декартовых координат следующий вид[1]:

$$\begin{aligned} &(YZ) \dots \ \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1 = 0, \\ &(ZX) \dots \ \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2 = 0, \\ &(XY) \dots \ \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3 = 0, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ \alpha_3\beta_3\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Допустим для упрощения записи, что левые части этих уравнений представлены в нормальной форме. Тогда расстояния d_1, d_2 и d_3 выражаются левыми частями уравнений (4), в которых ξ и η являются декартовыми координатами точки M. Поэтому будем иметь:

$$x : y : z = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{e_1} : \frac{\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2}{e_2} : \frac{\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3}{e_3}.$$

В однородных декартовых координатах (заменяя ξ и η через $\frac{\xi}{\zeta}$ и $\frac{\eta}{\zeta}$) эти формулы можно переписать в следующем виде:

$$x : y : z = (a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta) : (a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta) : (a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta),$$

или

$$\begin{aligned} \rho x &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta, \\ \rho y &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta, \\ \rho z &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

В формулах (5) ρ — произвольный множитель, не равный нулю. Определитель системы (5) не может равняться нулю, так как он отличается от определителя системы уравнений (4) лишь постоянным множителем.

Формулы (5) дают выражения однородных проективных координат x, y, z через однородные декартовы координаты ξ, η и ζ.

---

[1] Определитель системы уравнений (4) не может равняться нулю, так как в этом случае три прямые проходили бы через одну точку.

Мы видим, что эти формулы линейны. Разрешая их относительно ξ, η и ζ, находим:

$$\begin{aligned} \rho'\xi &= a'_1x + b'_1y + c'_1z, \\ \rho'\eta &= a'_2x + b'_2y + c'_2z, \\ \rho'\zeta &= a'_3x + b'_3y + c'_3z, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Формулы (6) выражают однородные декартовы координаты точки M через однородные проективные координаты.

С помощью этих формул можно получить формулы перехода от одной системы проективных координат к другой. Предположим, что, кроме рассматриваемой системы проективных координат x, y, z, имеется еще вторая система $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, определяемая координатным треугольником $\overline{XYZ}$ и единичной точкой $\bar{E}$. Выражая декартовы однородные координаты точки M через ее проективные однородные координаты второй системы по формулам (6), получим:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'\xi &= \bar{a}'_1\bar{x} + \bar{b}'_1\bar{y} + \bar{c}'_1\bar{z}, \\ \bar{\rho}'\eta &= \bar{a}'_2\bar{x} + \bar{b}'_2\bar{y} + \bar{c}'_2\bar{z}, \\ \bar{\rho}'\zeta &= \bar{a}'_3\bar{x} + \bar{b}'_3\bar{y} + \bar{c}'_3\bar{z}, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \bar{a}'_1 & \bar{b}'_1 & \bar{c}'_1 \\ \bar{a}'_2 & \bar{b}'_2 & \bar{c}'_2 \\ \bar{a}'_3 & \bar{b}'_3 & \bar{c}'_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Если внесем эти выражения ξ, η и ζ через $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ в формулы (5), то и получим искомые *формулы преобразования проективных однородных координат*. Они могут быть написаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \rho x &= A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1\bar{z}, \\ \rho y &= A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2\bar{z}, \\ \rho z &= A_3\bar{x} + B_3\bar{y} + C_3\bar{z}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

При этом определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

не равен нулю, так как он равен произведению соответствующих детерминантов формул (5) и (7).

Из формулы (3) можем найти координаты вершин базисного треугольника XYZ. В самом деле, для вершины X будем иметь: $d_2 = d_3 = 0$. Следовательно, получаем координаты:

$$X\ (x : 0 : 0) \text{ или } X\ (1 : 0 : 0).$$

Аналогично для вершин Y и Z получаем:

$$Y\ (0 : 1 : 0),\quad Z\ (0 : 0 : 1).$$

Пользуясь формулами преобразования проективных координат (8), найдем координаты вершин нового базисного треугольника в старой системе. Для этого применим формулы (3) последовательно к точкам $\bar{X}$, $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$, имеющим в новой системе координаты: $\bar{X}$ $(1:0:0)$, $\bar{Y}$ $(0:1:0)$, $\bar{Z}$ $(0:0:1)$.

Получаем следующие координаты для точек $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ в старой системе:

$$\bar{X}(A_1 : A_2 : A_3),\ \bar{Y}\ (B_1 : B_2 : B_3),\ \bar{Z}\ (C_1 : C_2 : C_3).$$

Таков геометрический смысл коэффициентов в формулах (8). Посмотрим, какой вид примут формулы преобразования проективных координат (8), если вершины X и Y базисного треугольника остаются неподвижными ($X \equiv \bar{X}$; $Y \equiv \bar{Y}$).

Так как координаты вершин X и Y в старой системе таковы: X $(1:0:0)$, Y $(0:1:0)$, то мы должны иметь:

$$A_1 : A_2 : A_3 = 1:0:0; \quad B_1 : B_2 : B_3 = 0:1:0.$$

Отсюда заключаем, что

$$A_2 = A_3 = 0 \text{ и } B_1 = B_3 = 0.$$

Поэтому формулы преобразования координат (8) в рассматриваемом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \rho x &= A_1\bar{x} + C_1\bar{z}, \\ \rho y &= B_2\bar{y} + C_2\bar{z}, \\ \rho z &= C_3\bar{z} \qquad (A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 \neq 0). \end{aligned} \tag{8'}$$

§ 54. Коллинеарное преобразование в проективных и декартовых координатах.

1. Как было показано в § 52, коллинеарное преобразование плоского поля ω в плоское поле ω' вполне определяется заданием четырех пар соответственных точек этих полей.

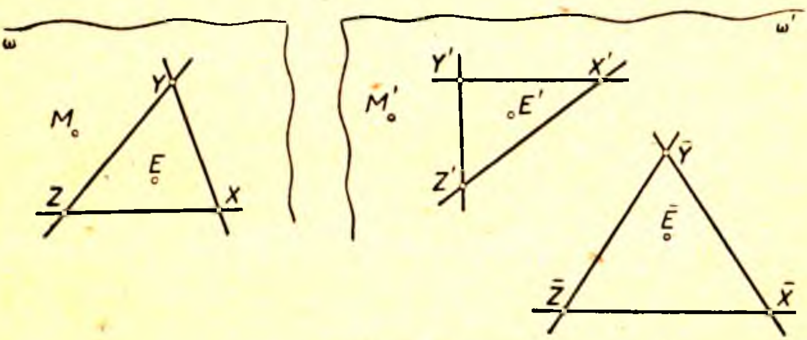
Предположим, что на плоскости ω установлена система проективных координат, определяемая координатным треугольником XYZ и единичной точкой E.

На плоскости ω' установлена система проективных координат, определяемых координатным треугольником $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ и единичной точкой $\bar{E}$.

Предположим, что плоские поля ω и ω' находятся в коллинеарном соответствии, в котором четырем точкам X, Y, Z и E поля ω соответствуют четыре точки поля ω', которые мы обозначим буквами X', Y', Z' и E' (черт. 198). Таким образом, данная коллинеация К определяется четырьмя парами соответственных точек: X, X'; Y, Y'; Z, Z'; E, E'.

Пусть M — произвольная точка плоскости ω, а M' — соответственная ей точка плоскости ω'. Нашей задачей является найти выражения однородных проективных координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ преобразованной точки M' через координаты x, y, z данной точки M. С этой целью мы рассмотрим на плоскости ω' ту систему однородных проективных координат, которую определяют координатный треугольник $X'Y'Z'$ и единичная точка E'. Координаты точки M' в этой системе обозначим через x', y', z'.

Так как коллинеация не нарушает сложного отношения четырех соответственных элементов форм первой ступени, то проективные



Черт. 198.

координаты точки M относительно системы $(XYZ,\ E)$ и точки M' относительно системы $(X',\ Y',\ Z',\ E')$ должны быть равны:

$$\frac{x}{z} = \frac{x'}{z'}; \quad \frac{y}{z} = \frac{y'}{z'}.$$

Следовательно, для однородных проективных координат можем написать:

$$x : y : z = x' : y' : z',$$

или

$$\rho^* x' = x,\ \rho^* y' = y,\ \rho^* z' = z. \tag{1}$$

С другой стороны, применяя формулы преобразования проективных координат предыдущего параграфа к системам $(X'Y'Z',\ E')$ и $(\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}, \bar{E})$, можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \rho\bar{x} &= A_1 x' + B_1 y' + C_1 z', \\ \rho\bar{y} &= A_2 x' + B_2 y' + C_2 z', \\ \rho\bar{z} &= A_3 x' + B_3 y' + C_3 z'. \end{aligned}\right| \tag{2}$$

Внося в эти формулы выражения координат x', y', z' по формулам (1), найдем:

$$\left.\begin{aligned}\bar\rho x &= A_1x + B_1y + C_1z,\\ \bar\rho y &= A_2x + B_2y + C_2z,\\ \bar\rho z &= A_3x + B_3y + C_3z\end{aligned}\right| \quad (3)$$

где

$$\bar\rho = \rho\rho^*.$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом:

Коллинеарное преобразование плоского поля выражается в однородных проективных координатах линейными формулами вида (3).

Как нетрудно убедиться, справедливо и обратное утверждение: *Преобразование, выражаемое линейными формулами* (3), *является коллинеацией.*

Посмотрим прежде всего, какой вид имеет уравнение прямой линии в однородных проективных координатах.

Уравнение прямой линии в однородных декартовых координатах имеет вид:

$$m\xi + n\eta + p\zeta = 0.$$

Переходя от декартовых координат ξ, η и ζ к однородным проективным координатам по формулам (6) предшествующего параграфа, получим:

$$m\xi + n\eta + p\zeta \equiv$$
$$\equiv \frac{m}{\rho'}(a_1'x + b_1'y + c_1'z) + \frac{n}{\rho'}(a_2'x + b_2'y + c_2'z) + \frac{p}{\rho'}(a_3'x + b_3'y + c_3'z) \equiv$$
$$\equiv Mx + Ny + Pz = 0.$$

Таким образом, прямая линия выражается в однородных проективных координатах уравнением первой степени:

$$Mx + Ny + Pz = 0.$$

Покажем, что линейное преобразование по формулам (3) относит прямой линии прямую линию, т. е. представляет собой коллинеацию.

Так как определитель $\triangle$ линейного преобразования (3) не равен нулю, то формулы (3) могут быть разрешены относительно x, y и z. Получим линейные формулы аналогичного вида:

$$\begin{aligned}\rho_1 x &= \bar A_1\bar x + \bar B_1\bar y + \bar C_1\bar z,\\ \rho_1 y &= \bar A_2\bar x + \bar B_2\bar y + \bar C_2\bar z,\\ \rho_1 z &= \bar A_3\bar x + \bar B_3\bar y + \bar C_3\bar z,\end{aligned} \quad \begin{vmatrix}\bar A_1 & \bar B_1 & \bar C_1\\ \bar A_2 & \bar B_2 & \bar C_2\\ \bar A_3 & \bar B_3 & \bar C_3\end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Предположим, что на плоскости ω имеем прямую:

$$Mx + Ny + Pz = 0.$$

Преобразовав это уравнение по формулам (4), получим снова линейное уравнение относительно координат $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$:

$$\bar{M}\bar{x} + \bar{N}\bar{y} + \bar{P}\bar{z} = 0.$$

Таким образом, рассматриваемое линейное преобразование является коллинеацией (ч. т. д.).

Посмотрим, какими формулами выражается коллинеарное преобразование плоского поля в декартовых координатах.

Мы пришли к понятию проективных координат как проективному обобщению обыкновенных декартовых координат. Точно так же однородные проективные координаты являются обобщением однородных декартовых координат. Последние можно рассматривать как частный случай проективных, когда координатный треугольник образован осями координат OX_∞ и OY_∞ и несобственной прямой $X_\infty Y_\infty$ (черт. 195).

Отсюда можем заключить, что формулы (3) и (4), выражающие коллинеарное преобразование в однородных проективных координатах, остаются в силе, если под координатами x, y, z и $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ будем разуметь однородные декартовы координаты точки M и соответственной ей точки M'.

Из формулы (3) можно найти отношения координат в следующем виде:

$$\frac{\bar{x}}{\bar{z}} = \frac{A_1x + B_1y + C_1z}{A_3x + B_3y + C_3z},$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2z}{A_3x + B_3y + C_3z}.$$

Чтобы перейти от однородных к обыкновенным декартовым координатам, надо положить в этих формулах $z = \bar{z} = 1$.

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_3x + B_3y + C_3}, \\ \bar{y} &= \frac{A_2x + B_2y + C_2}{A_3x + B_3y + C_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Формулы (5) выражают коллинеарное преобразование в декартовых координатах. Из этих формул видно, что

коллинеарное преобразование плоского поля выражается в декартовых координатах дробно-линейными функциями.

Заметим, что для определения коллинеарного преобразования (5) нужно знать девять коэффициентов, стоящих в правых частях формул (5). Так как, однако, любой из этих коэффициентов (не равный нулю) может быть сделан единицей, то существенны лишь восемь отношений коэффициентов, которые и определяют формулы преобразования (5).

Если на плоскости заданы четыре пары соответственных точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ и им соответственные точки $M'_1(x'_1, y'_1)$, $M'_2(x'_2, y'_2)$, $M'_3(x'_3, y'_3)$, $M'_4(x'_4, y'_4)$][1], то при подстановке координат данных точек в формулы (5) мы получим восемь уравнений, из которых можно найти неизвестные отношения коэффициентов преобразования.

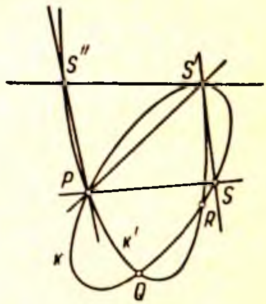
Таким образом, мы пришли аналитически к доказанному ранее положению, что *коллинеация определяется четырьмя парами соответственных точек* (§ 52).

§ 55. Двойные элементы коллинеации.

1. Рассмотрим коллинеацию двух плоских полей ω и ω', расположенных на одной плоскости. Возникает вопрос о том, существуют ли для данной коллинеации двойные элементы, т. е. точки или прямые, совпадающие со своими соответственными точками и прямыми.

Предположим, что произвольно выбранному пучку S плоского поля ω коллинеация относит пучок S' поля ω' (черт. 199). Тогда пучки S и S', как соответственные в коллинеации, проективны. Точки пересечения соответственных лучей пучков S и S' образуют кривую второго порядка, которую мы обозначим буквой k.

Общему лучу SS' двух пучков соответствует, как мы знаем (§ 36), луч, касательный к кривой k в точке S' (на черт. 199 прямая $S'S''$).



Черт. 199.

Рассмотрим теперь пучок S' как пучок первого поля ω, тогда коллинеация относит ему соответственный пучок S'' поля ω'.

Пучки S' и S'', как соответственные в коллинеации, должны быть проективными. Точки пересечения пар соответственных лучей этих пучков образуют кривую второго порядка k', проходящую через точки S' и S''. Так как прямой SS' соответствует прямая $S''S'$, касательная к кривой k в точке S', то отсюда заключаем, что точка S'' лежит на этой касательной. С другой стороны, лучу $S''S'$ соответствует луч $S'S$, который поэтому должен касаться кривой k' в точке S'.

Так как обе кривые второго порядка k и k' проходят через точку S', то последняя является точкой их пересечения. Кроме того, они могут иметь еще три точки пересечения[2]. Обозначим

[1] Причем никакие три из четырех точек каждой группы не лежат на одной прямой.

[2] Две кривые второго порядка k и k' не могут иметь более четырех точек пересечения, так как если бы они имели пять точек пересечения, то они должны были бы совпасть (пять точек определяют единственную кривую второго порядка). С другой стороны, легко построить пример двух различных кривых второго порядка, имеющих четыре точки пересечения. Отметив на кривой второго порядка четыре произвольные точки и присоединив к ним

эти точки буквами P, Q и R. Докажем, что каждая из точек пересечения P, Q и R является двойной точкой коллинеации.

Проведем рассуждения для одной из этих точек, например для точки P. Точку P можно рассматривать как точку пересечения лучей SP (пучка S) и $S'P$ (пучка S'). Коллинеация относит лучу SP луч $S'P$, а лучу $S'P$ луч $S''P$. Поэтому можно сказать, что точке P пересечения лучей SP и $S'P$ соответствует точка пересечения соответственных лучей $S'P$ и $S''P$. Но эти последние лучи пересекаются в той же самой точке P, поэтому последняя сама себе соответствует.

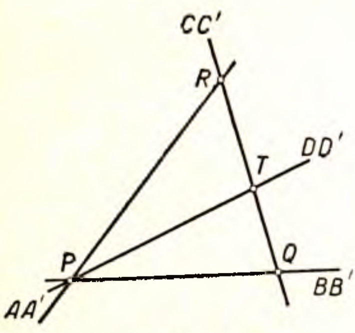
Итак, можно иметь т р и д в о й н ы е т о ч к и.

Более трех двойных точек, например четыре двойные точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, очевидно, иметь нельзя, так как в этом случае (на основании теоремы § 52) коллинеарные поля ω и ω' были бы тождественны, что не предполагается в настоящем исследовании.

2. Рассуждение, двойственное изложенному (т. е. основанное на принципе двойственности), приведет нас к выводу, что в коллинеарном соответствии полей ω и ω' нельзя иметь более т р е х д в о й н ы х п р я м ы х. Этими прямыми, очевидно, являются стороны треугольника PQR.

Следует отметить, что во всех предшествующих рассуждениях мы предполагали соответственные в коллинеации пучки (или ряды) проективными, но не перспективными. Если же допустить, что данная коллинеация относит каждому пучку S перспективный с ним пучок S', то, как нетрудно убедиться, эта коллинеация является гомологией.

В самом деле, для этого достаточно показать, что данная коллинеация имеет центр (или ось). Предположим, что A и A' — пара соответственных точек. В таком случае соответственные пучки (A) и (A') являются согласно допущению перспективными. Следовательно, их общий луч AA' сам себе соответствует, т. е. прямая AA' двойная. Итак, все прямые, соединяющие пары соответственных точек, двойные. Если все они проходят через одну и ту же точку, то коллинеация имеет центр и требуемое доказано. Предположим поэтому, что имеются три двойные пря-

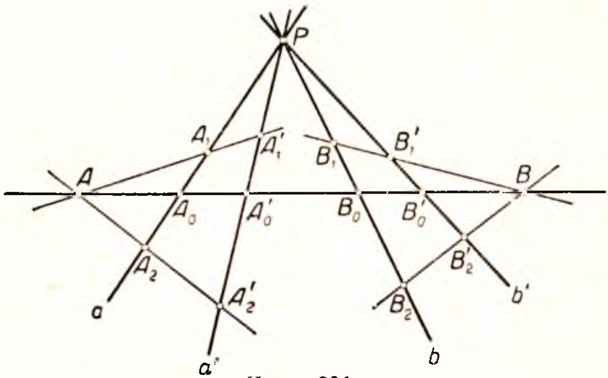


Черт. 200.

произвольно пятую точку, не лежащую на кривой k и на одной прямой с двумя какими-либо отмеченными точками, определим кривую k' при помощи пяти указанных точек.

мые AA', BB' и CC', не проходящие через одну точку. Тогда эти три прямые образуют треугольник PQR, вершины которого являются двойными точками (как точки пересечения двойных прямых) (черт. 200). Если какая-либо из сторон этого треугольника имеет двойную точку, то (по теореме Штаудта) все ее точки двойные, т. е. рассматриваемая сторона является осью коллинеации. Предположим, что DD' — двойная прямая, отличная от сторон треугольника PQR. В таком случае прямая DD' по крайней мере одну из сторон треугольника PQR пересекает в точке T, не совпадающей с вершинами этого треугольника. Соответствующая сторона CC', имея три двойные точки Q, R, T, представляет собой ось коллинеации.

Таким образом, рассматриваемая коллинеация есть гомология. Как было выяснено в § 49, в случае гомологии соответственные поля имеют целую прямую двойных точек — о с ь г о м о л о г и и, которая является двойной прямой, и, кроме того, целый пучок двойных прямых, центр которого является ц е н т р о м г о м о л о г и и. Центр гомологии — двойная точка соответствия.



Черт. 201.

В других случаях, как мы видели, коллинеация не может иметь более трех двойных точек и трех двойных прямых.

Предположим, что P — двойная точка коллинеации. Докажем, что существует и двойная прямая, определенным образом связанная с точкой P.

Рассмотрим пучок с центром в двойной точке P (черт. 201). Пусть лучу a коллинеация относит луч a', а лучу b — луч b'. Выбираем такие лучи a и b, которые не совпадают со своими соответственными. Если же все лучи пучка P двойные, то данная коллинеация есть гомология и центру ее P соответствует ось гомологии p. Итак, возвратимся к нашему чертежу. На соответственных прямых a и a' коллинеация определяет два соответственных проективных ряда. Так как общая точка P этих рядов сама себе соответствует, то ряды перспективны. Прямые A_1A_1' и A_2A_2' определяют центр перспективности A.

Аналогично прямые B_1B_1' и B_2B_2' определяют центр перспективности B рядов b и b'.

$$A = A_1A_1' \times A_2A_2', \quad B = B_1B_1' \times B_2B_2'.$$

Докажем, что прямая $AB \equiv p$ есть двойная прямая соответствия. Обозначим точки пересечения прямой AB с лучами a, a' и b, b' соответственно буквами A_0, A_0' и B_0, B_0'. Так как точкам A_0 и B_0 соответствуют точки A_0' и B_0', то прямой A_0B_0 соответствует прямая $A_0'B_0'$. Следовательно, эта прямая двойная. Таким образом, доказано, что с каждой двойной точкой P связана некоторая двойная прямая $p \equiv AB$. На последней лежат центры перспективности (A, B, ...) перспективных рядов на соответственных лучах пучка P.

Точка P и прямая p называются *ассоциированной парой двойных элементов коллинеации.*

3. Исследуем вопрос о двойных элементах в координатах. Формулы (3) § 54 выражают однородные проективные координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ точки M', соответственной точке M (x, y, z) в данной коллинеации. Рассматривая коллинеарное соответствие плоских полей, расположенных на одной и той же плоскости, мы можем предполагать обе системы координат совпадающими.

Если точка M является двойной, то она совпадает со своей соответственной точкой M'. В этом случае равенства (3) должны удовлетворяться, если положим

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z.$$

Будем иметь:

$$\bar{\rho}x = A_1x + B_1y + C_1z,$$
$$\bar{\rho}y = A_2x + B_2y + C_2z,$$
$$\bar{\rho}z = A_3x + B_3y + C_3z,$$

или

$$\left.\begin{aligned} (A_1 - \bar{\rho})\,x + B_1y + C_1z = 0,\\ A_2x + (B_2 - \bar{\rho})\,y + C_2z = 0,\\ A_3x + B_3y + (C_3 - \bar{\rho})\,z = 0. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Таким образом, для определения координат двойных точек служит система уравнений (1).

Условие совместности этих уравнений заключается в равенстве

$$\begin{vmatrix} A_1 - \bar{\rho} & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 - \bar{\rho} & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 - \bar{\rho} \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

которое представляет собой уравнение третьей степени относительно $\bar{\rho}$ и имеет три корня, в числе которых могут быть совпавшие и мнимые.

Каждый действительный корень уравнения (2) при подстановке его (вместо $\bar{\rho}$) в систему уравнений (1) обращает последнюю в систему совместных уравнений, из которых можно определить координаты соответствующей двойной точки[1].

4. Таким образом, приходим к следующим выводам:

1°. В коллинеации (не являющейся гомологией) может быть не более трех двойных точек.

2°. Всякая коллинеация имеет по крайней мере одну двойную точку, соответствующую действительному корню уравнения (2).

3°. С каждой двойной точкой ассоциируется двойная прямая.

4°. Если коллинеарное соответствие имеет три двойные точки P, Q, R, то оно имеет и три двойные прямые: стороны треугольника PQR. Треугольник PQR называется неподвижным треугольником коллинеации.

§ 56. Коррелятивные соответствия плоских полей (корреляции).

Под коррелятивным соответствием двух плоских полей подразумевают такое взаимно однозначное соответствие их элементов, в котором:

а) каждой точке одного поля соответствует прямая другого,

б) каждой прямой одного поля соответствует точка другого,

в) паре инцидентных элементов одного поля соответствует пара инцидентных соответствующих элементов другого поля.

Заметим, что коррелятивные поля могут иметь либо разных носителей, либо одного и того же. Из самого определения корреляции следует, что два плоских поля, коррелятивных третьему полю, коллинеарны между собой.

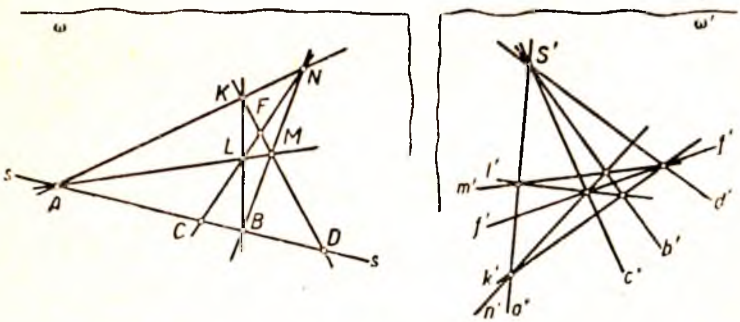
Докажем, что корреляции обладают проективными свойствами, а именно покажем, что *соответственные формы первой ступени двух коррелятивных полей проективны.*

Предположим, что плоские поля ω и ω' находятся в коррелятивном соответствии (черт. 202). Рассмотрим прямолинейный ряд точек s поля ω и соответствующий ему пучок прямых S' поля ω'. Докажем, что пучок S' проективен ряду s. Для этого достаточно убедиться в том, что каждой гармонической четверке точек ряда s соответствует гармоническая четверка лучей пучка S'. Предположим, что на прямой s имеется гармоническая четверка точек A, B, C, D. Тогда аналогично тому, как это было сделано в § 48, можно построить полный четырехугольник $KLMN$, для которого прямая s является диагональю, точки A и B — диагональными, а точки C и D — точками пересечения диагонали s с парой противоположных сторон, проходящих через третью диагональную точку F.

[1] Подробное исследование кубического уравнения (2) и линейной системы (1) имеется в книге Глаголева Н. А., Проективная геометрия, стр. 175—182.

На плоскости ω' прямой s соответствует по корреляции точка S', а четырем точкам A, B, C, D прямой s — четыре луча a', b', c', d' пучка S'. Полному четырехугольнику $KLMN$ соответствует полный четырехсторонник $k'l'm'n'$, причем отношения взаимопринадлежности соответственных элементов должны быть сохранены. Это значит, что точка S' является диагональной точкой полного четырехсторонника $k'l'm'n'$, а прямые a' и b' — его диагоналями. Прямые c' и d' соединяют диагональную точку S' с парой противоположных вершин, лежащих на третьей диагонали f'. Как мы знаем, такая четверка лучей (a', b', c', d') образует гармоническую группу (§ 30). Таким образом, требуемое доказано.

Так же легко убедиться в том, что пучку прямых с центром S коррелятивное соответствие относит проективный с ним прямолинейный ряд точек s'. В самом деле, если пучок S пересечем произ-



Черт. 202.

вольной прямой s, то на последней получим перспективный ряд точек. Перспективным пучку S и ряду s соответствуют в корреляции перспективные ряд s' и пучок S'. Но было доказано, что ряд s проективен пучку S'. Отсюда заключаем, что пучок S также проективен ряду s'.

Переходя к вопросу об условиях, определяющих коррелятивное соответствие, докажем следующее предложение:

Если даны четыре пары соответственных элементов (четверка точек одного поля и соответственная четверка прямых другого) *коррелятивного соответствия двух плоских полей, то* [с помощью одной линейки[1]] *можно для любого данного элемента построить соответственный ему элемент.*

Предположим, что четырем точкам A, B, C, D плоского поля ω соответствуют четыре прямые a', b', c', d' поля ω' (черт. 203). Пусть дана произвольная точка M поля ω. Покажем, что ей соответствует коррелятивно определенная прямая m' поля ω'.

Проведем прямые AC и BD и отметим точку их пересечения F.

[1] Т. е. проводя прямые линии.

Соединим точку M с данными точками B и C и отметим точки пересечения прямых BM и CM с прямыми CA и BD:

$$BM \times CA = K, \quad CM \times BD = L.$$

Точка M определяется как точка пересечения прямых BK и CL:

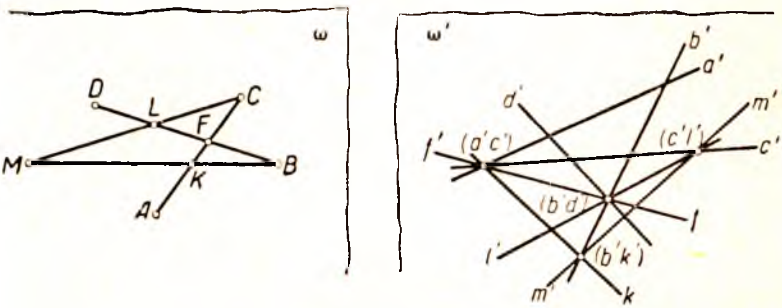
$$BK \times CL = M.$$

Переходя к соответственной фигуре на плоскости ω', будем иметь четыре прямые a', b', c', d'. Отметим точки пересечения $(a'c')$ и $(b'd')$, соответствующие прямым AC и BD. Построим прямую f', проходящую через точки $(a'c')$ и $(b'd')$ и соответствующую точке F. К трем лучам a', c', f' пучка $(a'c')$ построим четвертый луч k' так, чтобы

$$(a'c'f'k') = (ACFK).$$

Точно так же к трем лучам b', d', f' пучка $(b'd')$ построим четвертый луч l' так, чтобы

$$(b'd'f'l') = (BDFL).$$



Черт. 203.

Тогда точки $(b'k')$ и $(c'l')$ являются соответственными прямым BK и CL в корреляции плоскостей ω и ω'.

Следовательно, прямая m', проходящая через точки $(b'\ k')$ и $(c'l')$, соответствует точке M пересечения прямых BK и CL.

Аналогичным образом можно показать, что для произвольной прямой p поля ω можно построить соответственную ей точку P' поля ω'.

Все эти построения выполняются одной линейкой.

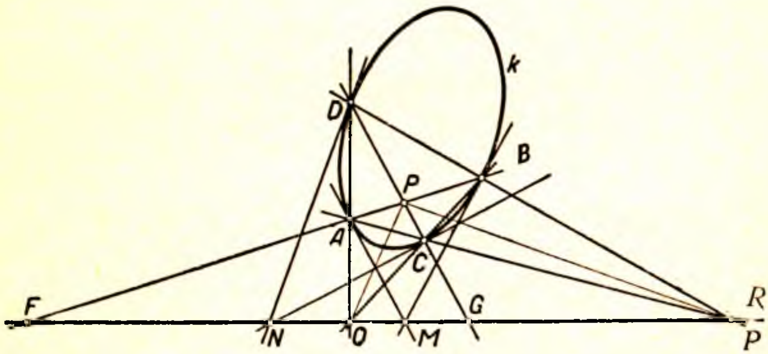
Переходя к изучению отдельных коррелятивных соответствий, мы остановимся более подробно на одном из них, а именно на так называемом **полярном соответствии плоских полей**.

Рассмотрению этого соответствия и его свойств посвящены последующие параграфы настоящей главы.

§ 57. Полюсы и поляры.

1. Предположим, что на плоскости даны кривая второго порядка k и произвольная точка P (черт. 204). Проведем через точку P две произвольные секущие AB и CD. Применяя к четырехугольнику $ACBD$, вписанному в кривую k, теорему Паскаля, найдем, что на прямой Паскаля p должны лежать четыре точки: две точки (Q и R) пересечения противоположных сторон и две точки (M и N) пересечения касательных в противоположных вершинах.

Можно также рассматривать четырехугольник $ABCD$ как полный четырехугольник, для которого точки P, Q и R являются



Черт. 204.

диагональными точками, а прямая QR — диагональю. На стороне AB такого четырехугольника имеем гармоническую четверку точек: вершины A, B, диагональная точка P и точка F пересечения этой стороны с диагональю $QR = p$. Аналогично на стороне CD имеем гармоническую четверку точек: C, D, P и G (точка пересечения стороны CD с диагональю p).

Прямая p, соответствующая точке P, как видно из сказанного выше, может быть определена с помощью одной секущей, проходящей через точку P. В самом деле, воспользуемся секущей AB. Прямая p определяется: 1) точкой M пересечения касательных к кривой k в точках A и B и 2) точкой F — четвертой гармонической к P относительно пары A, B. Таким образом, имеем $p = FM$. Заметим, что секущая CD выбрана произвольно и независимо от AB. Между тем она определяет с помощью точек N и G ту же самую прямую p. Следовательно, определение прямой p с помощью секущей, проходящей через точку P, не зависит от выбора этой секущей. По этой же причине для любого полного четырехугольника, вписанного в кривую k и имеющего точку P своей диагональной точкой, прямая p является диагональю, проходящей через две другие диагональные точки.

Прямую p, соответствующую данной точке P, называют **п о л я р о й** этой точки, а последнюю — **п о л ю с о м** прямой p.

На основании приведенных здесь соображений можно дать одно из следующих определений поляры данной точки P относительно кривой второго порядка k:

1°. *Полярой называется геометрическое место четвертых гармонических точек F (или G) к полюсу P и точкам пересечения с кривой k любой секущей, проходящей через полюс.*

2°. *Поляра p является геометрическим местом точек пересечения касательных к кривой второго порядка в концах хорд, проходящих через полюс P.*

3°. *Полярой называется диагональ полного четырехугольника, вписанного в кривую k и имеющего полюс P своей диагональной точкой, проходящая через две другие диагональные точки.*

Ясно, что из этих определений поляры вытекают и способы ее построения. Так, проведя через полюс P две произвольные секущие AB и CD, строим точки F и G — четвертые гармонические к тройкам ABP и CDP:

$$(ABPF) = (CDPG) = -1.$$

Прямая FG и есть искомая поляра p. Второй способ: строим полный четырехугольник $ABCD$ и находим диагональные точки Q и R. Диагональ QR и есть поляра p.

Полюс P данной прямой p определяется как точка, полярой которой служит прямая p.

Для построения полюса P по данной поляре p можно поступить следующим образом. Из произвольной [внешней[1]] точки M поляры p проводим касательные MA и MB к кривой k и находим прямую прикосновения AB. Аналогичное построение производим из другой произвольной точки N поляры. Получаем вторую прямую прикосновения CD. Тогда полюс P определяется как точка пересечения прямых AB и CD:

$$P = AB \times CD.$$

В самом деле, полярой точки P является прямая $p = MN$.

Единственность полюса, соответствующего данной поляре, следует из того, что двум различным полюсам всегда соответствуют две различные поляры. (Это последнее утверждение есть следствие определения поляры.)

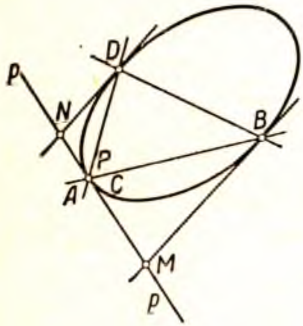
Обратим внимание на треугольник PQR. Согласно определению 3° поляры каждая из сторон треугольника PQR является полярой противолежащей вершины. Так, сторона $QR \equiv p$ есть поляра точки P, сторона RP — поляра точки Q и сторона PQ — поляра точки R. В свою очередь вершины треугольника PQR являются полюсами его сторон. Такой треугольник называется **п о л я р н ы м т р е у г о л ь н и к о м**.

[1] На всякой прямой существуют внешние точки, а именно точки пересечения этой прямой с касательными к кривой второго порядка.

2. Перейдем теперь к вопросу о том, какую прямую мы должны считать полярой точки P, если последняя лежит на кривой второго порядка k.

В этом случае определение 1° поляры является непригодным, так как все четвертые гармонические точки для любой секущей будут совпадать с точкой P. Воспользуемся для выяснения этого вопроса определением 2°.

Предположим, что полюс P лежит на кривой k. Проведем через точку P произвольные хорды PB и PD (черт. 205). Построим касательные в концах каждой хорды. Одним концом хорды PB является точка B, другим концом служит сама точка P (точка A совпадает с P). Точно так же вторая хорда имеет концы D и P (точка C совпадает с P; сравните черт. 205 с черт. 204). Касательные в точках B и P пересекаются в точке M; касательные в концах D и P второй хорды пересекаются в точке N. Следовательно, обе точки M и N лежат на касательной к кривой k в точке P. Эта касательная MN является тем геометрическим местом точек, о котором говорится в определении 2°. Поэтому в случае, когда точка P лежит на кривой k, мы называем касательную p к этой кривой в точке P полярой точки P. Итак, *полярой точки P, лежащей на кривой второго порядка k, является касательная p к кривой в точке P. Полюсом прямой p, касающейся кривой второго порядка k, является точка ее прикосновения P к этой кривой.*



Черт. 205.

Таким образом, установлены понятия поляры данной точки и полюса данной прямой относительно кривой второго порядка для любого положения полюса или поляры.

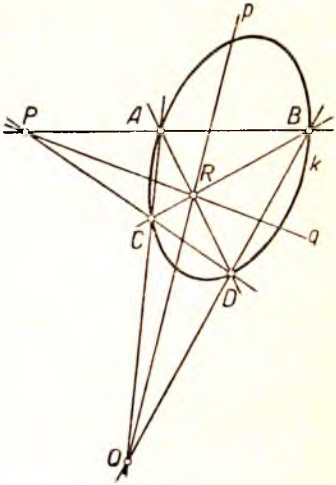
§ 58. Полярное соответствие и его свойства.

1. Пусть на плоскости ω задана некоторая (нераспадающаяся) кривая второго порядка k. Тогда на основании сказанного в предшествующем параграфе каждой точке P плоского поля ω соответствует определенная прямая p — поляра точки P. Обратно, любой прямой p_1 плоского поля соответствует определенная точка P_1 — полюс прямой p_1.

Рассмотрим, далее, следующее свойство полярного соответствия, известное под названием п р и н ц и п а в з а и м н о с т и. Принцип взаимности можно формулировать так:

Если поляра какой-нибудь точки проходит через вторую точку, то поляра второй точки проходит через первую.

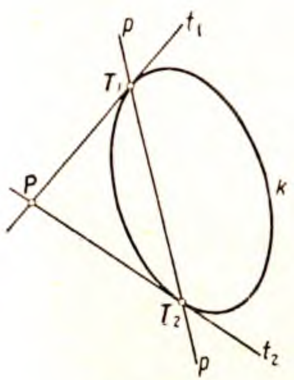
В справедливости принципа взаимности можно убедиться следующим образом. Предположим, что поляра p данной точки P проходит через точку Q (черт. 206). Докажем, что в этом случае поляра q точки Q проходит через P. Проведем через P произвольную секущую PAB и отметим точки A и B ее пересечения с данной кривой второго порядка k. Соединим точку A с точкой Q и обозначим через C вторую точку пересечения прямой AQ с кривой k. Далее, проведем через P секущую PC и обозначим через D вторую точку ее пересечения с кривой k. Согласно определению 3° поляры (§ 57) противоположные стороны полного четырехугольника $ABCD$ должны пересекаться в точках, принадлежащих поляре p точки P. Сторона AC этого четырехугольника пересекает поляру p в точке Q. Следовательно, и противоположная ей сторона BD пересекает поляру p в той же точке Q, т. е. BD проходит через Q. Отсюда заключаем, что Q есть диагональная точка полного четырехугольника $ABCD$. Но это значит, что поляра q точки Q проходит через две другие диагональные точки четырехугольника $ABCD$.



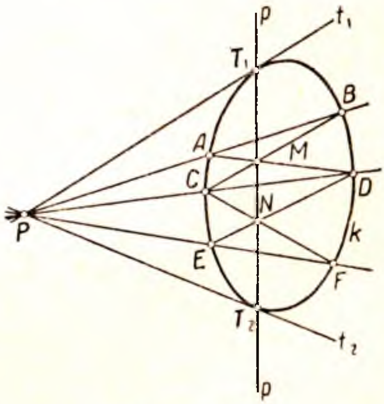
Черт. 206.

Так как одной из диагональных точек является точка P, то прямая q проходит через P (ч. т. д.).

Применяя принцип взаимности, можно выполнить следующие построения. Пусть имеем точку P, лежащую вне кривой второго порядка k (черт. 207). Тогда из точки P можно провести две касательные к этой кривой. Обозначим точки прикосновения этих касательных буквами T_1 и T_2. Касательная $t_1 = PT_1$



Черт. 207.



Черт. 208.

является полярой точки прикосновения T_1. Равным образом касательная $t_2 \equiv \equiv PT_2$ является полярой точки T_2. Так как поляры t_1 и t_2 проходят через точку P, то поляра p (точки P) должна проходить через точки T_1 и T_2. Получаем способ построения поляры. Последняя является прямой, соединяющей точки прикосновения касательных из полюса P.

Обратно, этим свойством можно воспользоваться для построения касательных к кривой второго порядка.

Пусть имеем кривую второго порядка k (начерченную) и вне ее точку P (черт. 208). Построим поляру p точки P, воспользовавшись для этого тремя секущими PAB, PCD и PEF. Поляра p должна проходить через диагональные точки M и N двух полных четырехугольников $ABCD$ и $CDEF$. Точки пересечения поляры MN с кривой k и являются точками прикосновения T_1 и T_2 касательных из данной точки P.

2. На основании принципа взаимности можем сказать, что полярное соответствие сохраняет инцидентность элементов, т. е. точке P, лежащей на прямой q, соответствует прямая p, проходящая через точку Q. Таким образом, полярное соответствие удовлетворяет всем условиям, формулированным при определении корреляции (§ 56).

Вместе с тем полярное соответствие обладает свойством и н в о л ю ц и о н н о с т и. Последнее вытекает из самого определения полюса и поляры. Если точке P соответствует поляра p, то и, обратно, прямой p соответствует точка P. Следовательно, полярное преобразование плоского поля совпадает с обратным ему преобразованием. Это выражается следующим символическим тождеством:

$$\mathbf{П} \equiv \mathbf{П}^{-1},$$

где через $\mathbf{П}$ обозначено полярное преобразование плоского поля в себя, а через $\mathbf{П}^{-1}$ — обратное ему преобразование.

Двукратное применение полярного преобразования приводит к тождественному полю, т. е. оставляет все его элементы без изменения. В символической форме это изображается так:

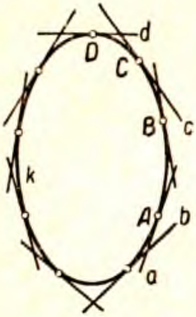
$$\mathbf{П} \cdot \mathbf{П} = \mathbf{П}^2 = 1.$$

В самом деле, точка P после преобразования $\mathbf{П}$ перейдет в прямую p. При вторичном преобразовании плоского поля прямая p переходит в точку P. То же самое происходит со всеми элементами плоского поля ω.

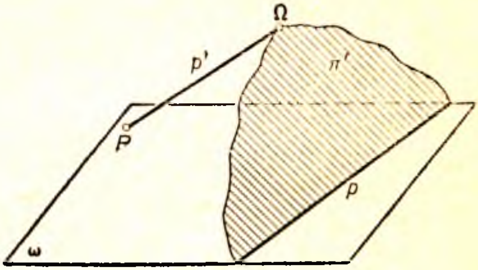
Таким образом, *полярное соответствие является корреляцией и обладает свойством инволюционности*.

Как мы видим из определения поляры и полюса, последние являются инцидентными лишь в том случае, если полюс принадлежит кривой k второго порядка и вместе с тем поляра касается этой кривой. Это позволяет определить о с н о в н у ю к р и в у ю k, относительно которой установлено полярное соответствие точек и прямых как *геометрическое место полюсов, лежащих на своих полярах, или как огибающую поляр, проходящих через свои полюсы* (черт. 209).

3. Основываясь на этих соображениях, можем расширить понятие о полярном соответствии. Именно всякое коррелятивное преобразование плоского поля ω в себя, обладающее свойством инволюционности (т. е. $\Pi^2 = 1$), можно рассматривать как полярное преобразование. Что же касается основной кривой второго порядка k, то она определяется при помощи инцидентных пар соответственных элементов, как это было сформулировано выше. Если в полярном соответствии нет полюсов, инцидентных своим полярам, то будем говорить, что основная кривая второго порядка k является мнимой. В качестве примера полярного соответствия такого рода рассмотрим сечение прямых и плоскостей, образующих ортогональное соответствие в связке. Заметим прежде всего,



Черт. 209.



Черт. 210.

что полярное соответствие точек и прямых плоского поля ω переходит путем проектирования из произвольного центра Ω в полярное соответствие прямых и плоскостей связки. В этом легко убедиться, проектируя элементы плоского поля ω из произвольного центра связки Ω (черт. 210). При этом точки (P) плоского поля ω переходят в прямые (p') связки Ω, а прямые (p) поля ω — в плоскости (π') связки Ω. Получаем полярное соответствие прямых (p') и плоскостей (π') в связке Ω. Обратно, сечение плоскостью ω переводит соответствие прямых и плоскостей связки в соответствие точек и прямых плоского поля.

Предположим, что полярное соответствие прямых и плоскостей связки Ω определено следующим образом. Каждой прямой p' соответствует перпендикулярная к ней плоскость π' связки. Каждой плоскости π' соответствует перпендикулярная к ней прямая p' связки. Таким образом устанавливается ортогонально-полярное соответствие прямых и плоскостей в связке[1].

Пересекая связку Ω плоскостью ω, получим на последней полярное соответствие точек и прямых. В самом деле, каждой точке P плоского поля ω соответствует определенная прямая p. Последняя может быть построена следующим образом. Проводим прямую $P\Omega \equiv p'$ и строим плоскость $\pi' \perp p'$. Тогда $p = \pi' \times \omega$.

[1] Это соответствие является полярным, так как оно представляет собой корреляцию элементов связки и обладает свойством инволюционности.

Очевидно, что прямой p соответствует точка P, которую можно найти, произведя обратное построение. Итак, имеем полярное соответствие точек (P) и прямых (p) плоского поля ω. При этом, очевидно, не существует точки P, инцидентной свой поляре p, так как прямая p' не может принадлежать перпендикулярной к ней плоскости π'. Отсюда заключаем, что основная кривая второго порядка k в данном случае является мнимой.

Заметим еще, что всякое коррелятивное преобразование $\mathbf{R}$ плоского поля в себя может быть представлено как произведение коллинеации $\mathbf{K}$ на полярное преобразование $\mathbf{\Pi}$.

В самом деле, произведение двух корреляций дает всегда коллинеацию, так как при этом точка переходит сперва в прямую (первая корреляция), а затем эта прямая — снова в точку (вторая корреляция). Аналогично прямая линия после двух корреляций переходит в прямую. На этом основании можем написать:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{K}.$$

Выполним теперь еще раз преобразование $\mathbf{\Pi}$; тогда будем иметь:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Pi},$$

т. е.

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Pi}$$

(ч. т. д.).

§ 59. Инволюция полярно сопряженных элементов прямолинейного ряда и пучка.

1. Предположим, что на плоскости ω имеется кривая второго порядка k, относительно которой установлено полярное соответствие точек и прямых. В этом соответствии точкам прямолинейного ряда s соответствуют прямые пучка S. Как было показано для всякого коррелятивного соответствия (§ 56), пучок S и соответственный ему ряд s проективны:

$$S\,(a,\ b,\ c,\ \ldots) \barwedge s\,(A,\ B,\ C,\ \ldots).$$

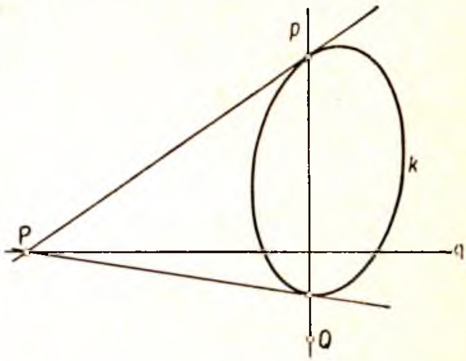
Следовательно, *пучок поляр проективен соответственному ряду полюсов.*

Введем понятие сопряженных элементов полярного соответствия. Именно будем называть *сопряженными две такие точки, каждая из которых лежит на поляре другой.*

Аналогично *сопряженными прямыми называются две такие прямые, каждая из которых проходит через полюс второй.*

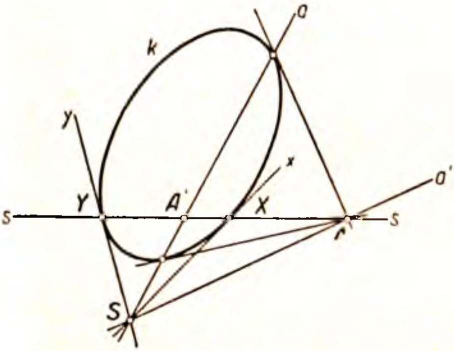
Из определения сопряженности вытекает, что точки, сопряженные данной точке P, должны лежать на ее поляре p. С другой стороны, каждая точка Q последней сопряжена с P, так как поляра q этой точки проходит через P (черт. 211). Аналогично прямыми, сопряженными данной прямой p, являются все прямые, проходящие через полюс P.

Пусть имеем произвольную прямую s плоского поля (черт. 212). Каждой точке A этой прямой соответствует единственная сопряженная точка той же прямой s. Такой точкой, очевидно, является точка A' пересечения поляры a точки A с прямой s. Так как сопряженность есть взаимное свойство двух точек (или двух прямых), то точке A' сопряжена точка A (причем поляра a' проходит через точку A). Таким образом, на прямой s получаем соответствие сопряженных точек. Нетрудно убедиться, что это соответствие является инволюцией. Действительно, ряд точек A (на прямой s) проективен пучку поляр a (с центром S). С другой стороны, пучок поляр a перспективен ряду точек A' (на прямой s). Следовательно, ряд точек A (на прямой s) проективен ряду точек A' (на прямой s). Кроме того, как мы видели, соответствие точек A и A' взаимно. Отсюда заключаем, что пары сопряженных точек A и A' образуют инволюцию.



Черт. 211.

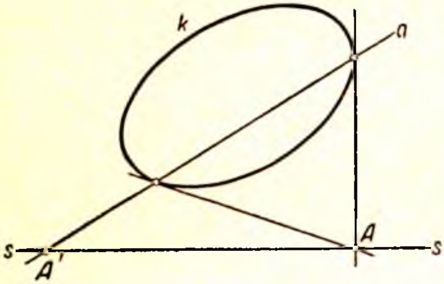
Нетрудно видеть, что двойными точками этой инволюции являются точки X и Y пересечения прямой s с основной кривой второго порядка k. В самом деле, поляра x точки X есть касательная к кривой k в точке X. Поэтому она пересекает прямую s в той же точке X. Следовательно, точка X сама себе соответствует. То же самое можно сказать о второй точке пересечения Y.



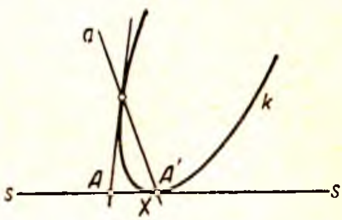
Черт. 212.

Из сказанного следует, что кривая k устанавливает на каждой прямой s инволюцию сопряженных точек. Эта инволюция является г и п е р б о л и ч е с к о й, если прямая s пересекает кривую k в двух точках (как на черт. 212). Она является э л л и п т и ч е с к о й, если прямая s не пересекает кривой k (черт. 213), так как в этом случае инволюция не имеет двойных точек. Наконец, можем иметь п а р а б о л и ч е с к у ю инволюцию, если прямая s касается кривой второго порядка k (черт. 214). В последнем случае точка прикосновения X соответствует любой точке прямолинейного ряда s. Так, например, точке A этой прямой соответствует поляра a, проходящая через точку X прикосновения прямой s. Поэтому сопряженная точка A' совпадает с точкой X.

Все сказанное показывает, что двойные точки инволюции сопряженных точек прямой s можно рассматривать как точки, принадлежащие прямой s и кривой k. По типу инволюции можно судить о существовании таких точек или об относительном положении прямой s и кривой k. Если инволюция, устанавливаемая кривой k на прямой s, гиперболическая, то прямая s пересекает кривую k в двух точках. Если эта инволюция параболическая,



Черт. 213.

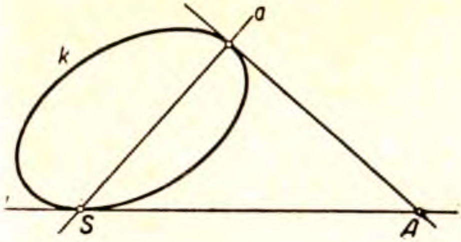


Черт. 214.

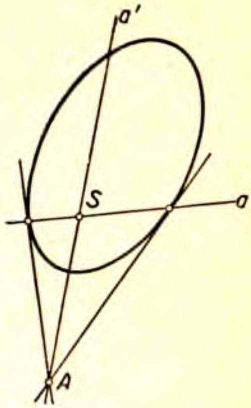
прямая s касается кривой k. Наконец, в случае эллиптической инволюции прямая s не имеет общих точек с кривой k. В последнем случае можно также сказать, что точки пересечения прямой s с кривой k являются мнимыми. Это мнимые двойные точки эллиптической инволюции (§ 34).

2. Инволюции сопряженных точек прямолинейного ряда s двойственно соответствует инволюция сопряженных прямых пучка S.

Пусть имеем пучок прямых S (черт. 212). Тогда каждой прямой a пучка соответствует единственная сопряженная прямая a' того же пучка. Построение ее показано на чертеже 212. Получаем инволюцию сопряженных прямых a, a' пучка S. Двойными прямыми этой инволюции являются касательные x и y из точки S к основной кривой второго порядка k. В самом деле, касательная x проходит через точку прикосновения X, которая служит полюсом прямой x. Поэтому прямая x совпадает со своей сопряженной прямой. То же самое относится к касательной y. Если точка S внешняя, то из нее можно провести две касательные к кривой k (как на черт. 212). В этом случае инволюция сопряженных прямых пучка S является г и п е р б о л и ч е с к о й. Если точка S лежит на самой кривой k (черт. 215), то касательная x в этой точке соответствует всем прямым пучка S. Так, для прямой a полюс ее A лежит, как это видно из построения (и вытекает из принципа взаимности полярного соответствия), на прямой x. Следовательно, сопряженная прямая $a' = SA$ совпадает с прямой x. Отсюда заключаем, что инволюция сопряженных прямых в пучке S является п а р а б о л и ч е с к о й.



Черт. 215.



Черт. 216.

Наконец, рассмотрим случай внутренней точки S. В этом случае инволюция сопряженных прямых пучка S не имеет двойных прямых, так как не существует действительных касательных к кривой k, проведенных из точки S (черт. 216). Это **эллиптическая инволюция**.

Как и для эллиптической инволюции сопряженных точек прямой s, можно сказать, что в случае внутреннего центра пучка S касательные из точки S к кривой k мнимы и являются мнимыми двойными прямыми эллиптической инволюции сопряженных прямых пучка S.

§ 60. Уравнения кривых второго порядка в проективных координатах.

Кривой второго порядка, или рядом второго порядка, мы называли геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков первого порядка.

В частном случае, когда проективные пучки, образующие геометрическое место, перспективны, кривая второго порядка распадается на две прямые. Если примем две прямые распавшейся кривой второго порядка за две стороны координатного треугольника, например стороны YZ и XZ, то уравнения этих прямых в однородных проективных координатах будут иметь вид:

$$x = 0, \quad y = 0$$

[так как будем иметь соответственно: $d_1 = 0$ и $d_2 = 0$ (см. § 53)].

Следовательно, уравнение распавшейся на пару прямых кривой второго порядка представится в следующем виде:

$$x \cdot y = 0.$$

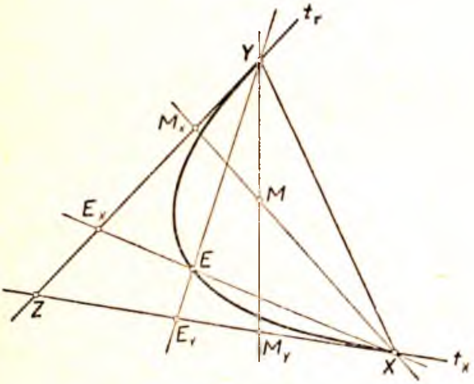
Таково простейшее уравнение распадающейся кривой второго порядка в однородных проективных координатах.

Рассмотрим теперь общий случай, когда два образующих кривую второго порядка пучка проективны.

Обозначим буквами X и Y центры образующих проективных пучков. Предположим, что прямой XY первого пучка соответствует прямая t_y второго, а прямой YX второго пучка соответствует в первом пучке прямая t_x. Точку пересечения прямых t_x и t_y обозначим буквой Z (черт. 217).

Три точки X, Y и Z примем за вершины координатного треугольника. Эти три точки не могут лежать на одной прямой.

В качестве единичной точки E примем какую-либо точку кривой второго порядка, отличную от центров X и Y образующих пучков. Очевидно, что точка E не может лежать на сторонах координатного треугольника.



Черт. 217.

Обозначим буквой M произвольную точку плоскости. Точки пересечения лучей XE и XM первого пучка с противолежащей стороной t_y координатного треугольника обозначим буквами E_x и M_x. Аналогичным образом точки пересечения лучей YE и YM второго пучка с противолежащей стороной t_x обозначим буквами E_y и M_y.

Если точка M принадлежит кривой второго порядка, образованной проективными пучками (X) и (Y), то сложное отношение четырех лучей XM, XE, XZ, XY первого пучка должно быть равно сложному отношению четырех соответствующих лучей YM, YE, YX, YZ второго пучка (§ 38).

Справедливо и обратное заключение: если упомянутые выше сложные отношения равны, то точка M принадлежит кривой второго порядка, определяемой точками X, Y, E и касательными t_x и t_y.

Таким образом, равенство указанных сложных отношений является необходимым и достаточным условием того, что точка M принадлежит данной кривой второго порядка.

Выразим это условие в проективных координатах.

Сложное отношение четырех лучей (XM, XE, XZ, XY) может быть выражено через равное ему сложное отношение четырех точек перспективного ряда (M_xE_xZY).

Аналогичным образом сложное отношение четырех лучей второго пучка представится так:

$$(YM, YE, YX, YZ) = (M_yE_yXZ).$$

Поэтому равенство сложных отношений выразится следующим образом:

$$(M_yE_yXZ) = (M_xE_xZY) = \frac{1}{(M_yE_yZX)}.$$

Замечая, что выражения, стоящие в скобках, являются проективными координатами точки M: $x'=(M_yE_y\, ZX)$, $y'=(M_xE_xZY)$, можем написать: $y' = \frac{1}{x'}$, или $x'y' - 1 = 0$. Таково уравнение кривой второго порядка в проективных координатах.

Переходя к однородным проективным координатам, т. е. полагая $x' = \frac{x}{z}$; $y' = \frac{y}{z}$, получим простейшее уравнение кривой второго порядка в однородных проективных координатах:

$$xy - z^2 = 0.$$

§ 61. Исследование общего уравнения второй степени в однородных проективных координатах.

В настоящем параграфе мы рассмотрим общее уравнение второй степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0, \qquad (1)$$

где через x, y, z обозначены текущие однородные проективные координаты на плоскости.

Множество точек плоскости, удовлетворяющих этому уравнению, мы будем называть алгебраической кривой второго порядка. Исследование введенного таким образом понятия кривой второго порядка покажет, что оно является расширением того определения кривой второго порядка (ряда второго порядка) как геометрического места точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков, которым мы пользовались до сего времени.

Расширение понятия кривой второго порядка мы получим, рассматривая наряду с действительными точками проективной плоскости также «мнимые» точки этой плоскости.

С этой целью будем считать, что точка на проективной плоскости определяется тремя проективными однородными координатами $(x : y : z)$, которые могут принимать любые комплексные значения, не равные все три одновременно нулю. Две точки $(x_1 : y_1 : z_1)$ и $(x_2 : y_2 : z_2)$ будем считать совпадающими, если имеет место равенство:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Очевидно, что такое расширенное определение проективных координат точки на плоскости заключает в себе все действительные точки плоскости, которым соответствуют тройки действительных чисел и которые мы рассматривали до сих пор. Но, с другой стороны, к ним присоединяются теперь и мнимые точки, которым соответствуют комплексные координаты $(x : y : z)$, причем не существует трех действительных чисел (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющих условию:

$$\frac{x_0}{x} = \frac{y_0}{y} = \frac{z_0}{z}.$$

Таким образом, под алгебраической кривой второго порядка мы будем разуметь совокупность всех действительных и мнимых точек, удовлетворяющих уравнению второй степени (1).

Как было показано в предыдущем параграфе, кривые второго порядка, полученные при помощи проективных пучков, изображались в однородных проективных координатах однородными уравнениями второй степени. Таким образом, эти кривые содержатся в числе тех геометрических образов, которые изображаются общим уравнением (1). Однако, как мы увидим из дальнейшего исследования, это уравнение заключает также и другие геометрические образы, если наряду с действительными точками мы будем рассматривать также и мнимые точки проективной плоскости, удовлетворяющие уравнению (1).

Нашей задачей является разыскание всех типов кривых второго порядка, определяемых уравнением (1)[1].

Для этой цели мы воспользуемся методом преобразования координат, что позволит нам привести уравнение кривой (1) к наиболее простому виду.

I. Предположим, что алгебраическая кривая второго порядка имеет по крайней мере две действительные точки. Докажем, что в этом случае она представляет собою либо ряд второго порядка, либо пару прямых, различных или совпадающих.

Примем две действительные точки кривой второго порядка за вершины координатного треугольника X и Y. В таком случае уравнение кривой (1) должно удовлетворяться координатами точек X $(1 : 0 : 0)$ и Y $(0 : 1 : 0)$. Подставляя указанные координаты в общее уравнение кривой, будем иметь: $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$. Следовательно, уравнение кривой должно иметь вид:

$$a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0. \qquad (2)$$

Далее, выполним преобразование координат, сохраняющее без изменения вершины координатного треугольника X и Y. Для этого воспользуемся формулами (8') параграфа 53. Полагая в этих формулах $C_3 = 1$, что, очевидно, не нарушает их общности, перепишем формулы преобразования координат в следующей форме:

$$\rho x = A_1\bar{x} + C_1\bar{z}; \quad \rho y = B_2\bar{y} + C_2\bar{z}; \quad \rho z = \bar{z}; \ (A_1 \cdot B_2 \neq 0).$$

[1] Приведенная здесь схема исследования уравнения второй степени была сообщена мне профессором Д. И. Перепелкиным, применившим ее в курсе проективной геометрии, читанном в МГПИ имени В. И. Ленина.

После подстановки координат (x, y, z) в уравнение (2) получим уравнение кривой второго порядка в новой системе проективных координат:

$$a_{33}\bar{z}^2 + 2a_{12}(A_1\bar{x} + C_1\bar{z})(B_2\bar{y} + C_2\bar{z}) + 2a_{23}(B_2\bar{y} + C_2\bar{z})\,\bar{z} +$$
$$+ 2a_{31}\bar{z}\,(A_1\bar{x} + C_1\bar{z}) = 0,$$

или

$$\bar{z}^2(a_{33} + 2a_{12}C_1C_2 + 2a_{23}C_2 + 2a_{31}C_1) +$$
$$+ \bar{x}\,\bar{y}\cdot 2a_{12}A_1B_2 + \bar{y}\,\bar{z}\cdot 2B_2(a_{12}C_1 + a_{23}) + \bar{z}\,\bar{x}\cdot A_1(a_{12}C_2 + a_{31}) = 0.$$

Рассмотрим отдельно два случая:

1) $a_{12} \neq 0$. Тогда можем положить:

$$C_1 = -\frac{a_{23}}{a_{12}};\quad C_2 = -\frac{a_{31}}{a_{12}},$$

и уравнение кривой примет вид:

$$P\bar{z}^2 + \bar{x}\,\bar{y}\cdot 2a_{12}A_1B_2 = 0,$$

где

$$P = a_{33} + 2a_{12}C_1C_2 + 2a_{23}C_2 + 2a_{31}C_1.$$

Если $P \neq 0$, то можно положить: $2a_{12}A_1B_2 = -P$, и уравнение кривой примет вид:

$$\bar{z}^2 - \overline{x}\,\overline{y} = 0,$$

т. е. имеем ряд второго порядка.

Если же $P = 0$, то уравнение кривой примет вид:

$$\bar{x}\,\bar{y} = 0.$$

Следовательно, имеем пару прямых.

2) $a_{12} = 0$. Уравнение (2) в этом случае имеет вид:

$$\bar{z}\,(a_{33}\bar{z} + 2a_{23}\bar{y} + 2a_{31}\bar{x}) = 0.$$

Оно представляет, очевидно, пару прямых. В частном случае при $a_{23} = a_{31} = 0$ эти прямые совпадают.

Итак, мы доказали, что если кривая второго порядка имеет две действительные точки, то она представляет собою либо ряд второго порядка, либо пару прямых, различных или совпадающих.

II. Переходим к рассмотрению второго случая, когда кривая второго порядка имеет только одну действительную точку или вовсе не имеет действительных точек. Примером кривой первого типа может служить кривая, выражаемая уравнением $x^2 + y^2 = 0$, которая имеет лишь одну действительную точку с координатами $(0 : 0 : 1)$. Можно доказать, что к такому виду приводится уравнение всякой кривой второго порядка, имеющей только одну действительную точку.

Такую кривую можно рассматривать как распавшуюся на пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке, которая и является единственной действительной точкой нашей кривой.

Примером кривой, вовсе не имеющей действительных точек, может служить кривая, изображаемая уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Все точки этой кривой мнимые.

Теперь мы можем перечислить все возможные типы кривых второго порядка, изображаемых общим уравнением (1).

Будем иметь следующие пять типов:

1) Ряд второго порядка (действительная нераспадающаяся кривая второго порядка, «овальная» кривая).

2) Пара действительных различных прямых.

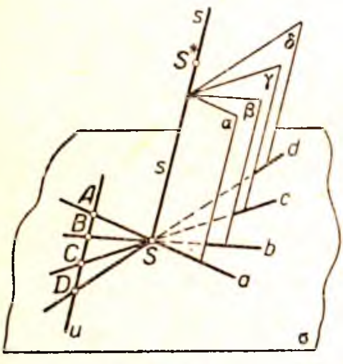
3) Пара действительных совпадающих прямых.

4) Пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке.

5) Чисто мнимая кривая, состоящая из одних мнимых точек.

§ 62. О пучках плоскостей.

В главе IV (проективная теория кривых второго порядка) мы воспользовались рядами точек и пучками прямых для образования форм второго порядка (рядов и пучков второго порядка). При изучении вопроса о проективном образовании поверхностей второго порядка мы будем пользоваться, помимо упомянутых форм первой ступени, также пучками плоскостей. Поэтому полезно остановиться на понятии сложного отношения для пучка плоскостей и проективного соответствия различных форм первой ступени.



Черт. 218.

Рассмотрим пучок плоскостей s $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$. Пересечем его произвольной плоскостью σ (черт. 218). Получим пучок прямых S $(a, b, c, d, \ldots)$. Такой пучок прямых называется перспективным пучку плоскостей. Сложное отношение четырех плоскостей пучка s мы будем считать равным сложному отношению четырех соответственных прямых перспективного пучка S:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (abcd).$$

Ясно, что величина сложного отношения не зависит от положения секущей плоскости. В самом деле, всякая другая секущая плоскость σ' даст в сечении с данным пучком плоскостей пучок прямых S', перспективный пучку S, так как эти пучки являются соответственными в перспективной коллинеации плоскостей σ и σ', центром которой является произвольная точка S^* прямой s. В частности, можно взять нормальное (перпендикулярное к оси пучка плоскостей) сечение. Тогда сложное отношение выразится через синусы линейных углов двугранных углов плоскостей пучка:

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin(\alpha, \gamma)}{\sin(\beta, \gamma)} : \frac{\sin(\alpha, \delta)}{\sin(\beta, \delta)}.$$

Пересекая пучок плоскостей s прямой u, получаем перспективный пучку ряд точек:

$$u(A, B, C, D, \ldots) \barwedge s(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots).$$

Проводя через прямую u плоскость σ, будем иметь:

$$(ABCD) = (abcd) = (\alpha\beta\gamma\delta).$$

Таким образом, видим, что сложное отношение четырех плоскостей пучка s равно сложному отношению соответственных точек перспективного ему ряда u.

Распространив понятие сложного отношения на пучки плоскостей, можно определить проективное соответствие двух любых форм первой ступени (ряды точек, пучки прямых, пучки плоскостей).

Взаимно однозначное соответствие элементов двух форм первой ступени называется проективным, если сложное отношение четырех элементов одной формы всегда равно сложному отношению четырех соответственных элементов второй формы.

§ 63. Конус второго порядка и пучок плоскостей второго порядка.

1. Предположим, что на плоскости ω мы имеем кривую второго порядка k (черт. 219). Будем проектировать все точки кривой k из произвольно выбранной точки S, не лежащей в плоскости ω. Совокупность всех проектирующих прямых называется конусом второго порядка, а проектирующие прямые — образующими конуса.

Легко убедиться в том, что прямая, не являющаяся образующей конуса, может иметь с ним не более двух точек пересечения. В самом деле, плоскость, проходящая через данную прямую и вершину S конуса, может пересекать последний не более чем по двум образующим. Поэтому прямая не может иметь более двух точек пересечения с конусом.

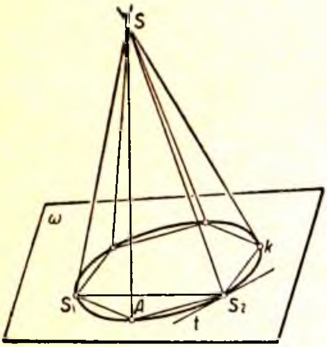
Покажем далее, что некоторые теоремы, выведенные нами для кривых второго порядка, могут послужить источником построения соответствующих теорем для конуса второго порядка.

Так, в § 38 было доказано, что точки кривой второго порядка проектируются из двух каких-либо ее точек (например, S_1 и S_2) двумя проективными пучками. Будем проектировать эти пучки из центра S (вершины конуса). Тогда, очевидно, получим два проективных пучка плоскостей, осями которых будут служить образующие конуса, проходящие через центры пучков (прямые SS_1 и SS_2). Если A — точка кривой k, то лучи S_1A и S_2A — соответственные в проективных пучках прямых S_1 и S_2. Аналогично будем иметь, что плоскости SS_1A и SS_2A являются соответственными в проективных пучках плоскостей SS_1 и SS_2. Мы видим, что соответственные плоскости проективных пучков SS_1 и SS_2 пересекаются по образующей конуса SA. Следовательно, имеем:

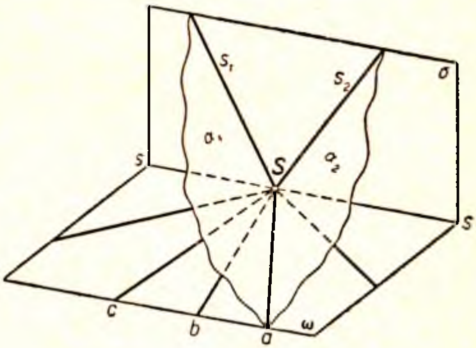
Образующие конуса второго порядка являются линиями пересечения соответственных плоскостей двух проективных пучков плоскостей, осями которых могут служить две любые образующие конуса.

С другой стороны:

Два проективных пучка плоскостей, оси которых лежат в одной плоскости, образуют конус второго порядка.



Черт. 219.



Черт. 220.

В самом деле, обозначим точку пересечения осей проективных пучков плоскостей через S. Любое сечение этих пучков плоскостью ω даст пару проективных пучков прямых, центрами которых явятся точки S_1 и S_2 пересечения осей данных пучков плоскостей с плоскостью ω (черт. 219). Пучки прямых S_1 и S_2 образуют на плоскости кривую второго порядка k. Прямые пересечения соответственных плоскостей проективных пучков плоскостей SS_1 и SS_2 проходят через точки кривой k и точку S — пересечения осей этих пучков. Следовательно, эти прямые образуют конус второго порядка с вершиной S и направляющей кривой k (ч. т. д.).

В частном случае данные проективные пучки плоскостей могут быть перспективными. Это значит, что они проектируют один и тот же плоский пучок прямых, который является их общим сечением. Предположим, например, что пучки плоскостей с осями s_1 и s_2 проектируют один и тот же пучок S (a, b, c, ...), лежащий в плоскости ω (черт. 220). Тогда оси s_1 и s_2 проектирующих пучков плоскостей проходят через центр S. Искомое геометрическое место линий пересечения соответственных плоскостей пучков s_1 и

s_2 будет, очевидно, состоять из пучка прямых $S(a, b, c, \ldots)$, а также всех прямых плоскости σ, проходящей через оси s_1 и s_2 пучков. Последнее видно из того, что плоскость σ сама себе соответствует, так как плоскости $s_1 s$ первого пучка соответствует плоскость $s_2 s$ второго.

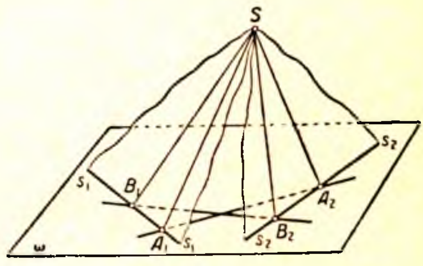
Таким образом, *в случае двух перспективных пучков плоскостей конус второго порядка распадается на две плоскости* (ω и σ).

2. Вернемся к общему случаю (черт. 219). Если рассмотрим в плоскости ω проективные пучки S_1 и S_2, образующие кривую второго порядка k, то, как известно, общему лучу этих пучков соответствуют касательные в центрах пучков. Например, лучу S_1S_2 (считая его лучом первого пучка) соответствует касательная t в центре S_2 второго пучка. При проектировании из вершины конуса S получим касательную плоскость S_t второго пучка плоскостей, как соответственную плоскости SS_1S_2 первого пучка. Образующая SS_2 является «прямой прикосновения» касательной плоскости к конусу. Как известно из теории кривых второго порядка, приведенные здесь соображения могут быть распространены на все точки кривой k. То же самое относится, очевидно, и к конусу второго порядка. Поэтому можем сказать, что *через каждую образующую конуса второго порядка проходит одна касательная плоскость.*

Совокупность всех касательных к кривой второго порядка образует пучок прямых второго порядка (§ 43). При проектировании из вершины S конуса пучка прямых второго порядка получим пучок плоскостей второго порядка.

Из сказанного выше о касательных плоскостях конуса второго порядка можем сделать следующий вывод:

Касательные плоскости конуса второго порядка образуют пучок плоскостей второго порядка.



Черт. 221.

К проективному образованию пучка плоскостей второго порядка можно прийти следующим образом. Рассмотрим пучок прямых второго порядка в плоскости ω (черт. 221). Он может быть образован при помощи двух проективных рядов точек, расположенных на любых двух прямых пучка. Пусть это прямые s_1 и s_2. Проектируя ряды s_1 и s_2 из центра S, получим два проективных пучка прямых с общим центром S, но лежащих в разных плоскостях, а именно в плоскостях s_1S и s_2S. Будем иметь:

$$S(SA_1, SB_1, \ldots) \overline{\wedge} S(SA_2, SB_2, \ldots)$$

Плоскости, определяемые парами соответственных лучей этих пучков, а именно плоскости SA_1A_2, SB_1B_2, образуют пучок плоскостей второго порядка, так как каждая из них проектирует соответствующую прямую пучка прямых второго порядка из центра S.

Следовательно, *два проективных пучка лучей, расположенных в разных плоскостях, но имеющих общий центр, образуют пучок плоскостей второго порядка.*

Все изложенное показывает, что, пользуясь методом проектирования, можно переносить на конус второго порядка или на пучок плоскостей второго порядка свойства рядов и пучков второго порядка.

В частности, теорема Паскаля о шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка (черт. 219), и теорема Брианшона о шестистороннике, описанном около кривой второго порядка, принимают для конуса второго порядка следующий вид:

1°. *Три прямые пересечения противоположных граней любого шестигранника, вписанного в конус второго порядка*[1], *лежат в одной плоскости.*

2°. *Три плоскости, проходящие через противоположные ребра любого шестигранника, описанного около конуса второго порядка, пересекаются по одной прямой.*

3. Рассмотрим теперь образование конуса второго порядка и пучка плоскостей второго порядка с точки зрения принципа двойственности. Как мы знаем, связка плоскостей и прямых есть форма, двойственная (по принципу двойственности в пространстве) плоскому полю точек и прямых. Поэтому ряду второго порядка и пучку прямых второго порядка на плоскости будут отвечать по принципу двойственности некоторые геометрические образования в связке плоскостей и прямых. Предположим, что на плоскости ω имеется пучок прямых второго порядка. Прямые пучка образуют, как мы знаем, два проективных ряда точек на двух любых фиксированных прямых пучка. Согласно принципу двойственности проективным рядам точек, носители которых принадлежат плоскости ω, соответствуют два проективных пучка плоскостей, носители которых принадлежат точке Ω — центру связки. Но, как мы видели, линии пересечения двух таких пучков образуют конус второго порядка. Итак, *конус второго порядка есть геометрический образ, двойственный пучку прямых второго порядка.*

Рассмотрим, далее, кривую второго порядка в плоскости ω. Проектируя точки кривой из двух ее произвольно фиксированных точек S_1 и S_2, получим, как известно, два проективных пучка прямых. По принципу двойственности точкам S_1 и S_2 плоскости ω соответствуют плоскости σ_1 и σ_2, проходящие через центр связки Ω, а проективным пучкам прямых S_1 и S_2 плоскости ω — проек-

---

[1] В предложениях 1° и 2° речь идет о шестиграннике, все грани которого проходят через вершину S конуса.

тивные пучки прямых в плоскостях σ_1 и σ_2, принадлежащие связке Ω. Но, как мы знаем, два таких проективных пучка образуют пучок плоскостей второго порядка. Следовательно, *пучок плоскостей второго порядка есть геометрический образ, двойственный кривой второго порядка* (*ряду точек второго порядка*).

Таковы двойственные отношения образов второго порядка плоского поля точек и прямых и связки плоскостей и прямых.

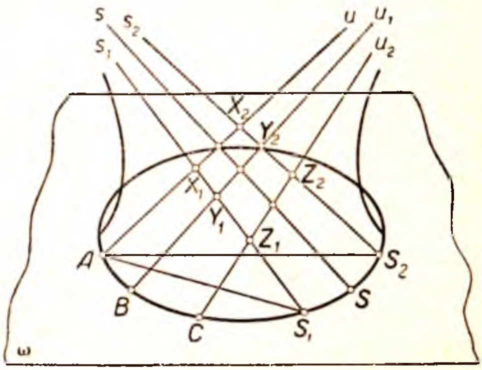
Кроме того, мы можем рассматривать двойственные отношения элементов самого плоского поля точек и прямых (или связки плоскостей и прямых).

С этой точки зрения кривой второго порядка, как известно, соответствует пучок прямых второго порядка.

Ясно, что в связке плоскостей и прямых пучку плоскостей второго порядка будет соответствовать конус второго порядка.

§ 64. Проективное образование линейчатых поверхностей второго порядка.

1. Как было показано в предшествующем параграфе, два проективных пучка плоскостей, оси которых лежат в одной плоскости (следовательно, пересекаются), образуют линейчатую поверхность — конус второго порядка. Естественно поставить вопрос о тех геометрических образах, которые могут быть получены при помощи двух проективных пучков плоскостей, оси которых являются скрещивающимися прямыми (т. е. не лежат в одной плоскости).



Черт. 222.

Предположим, что мы имеем два проективных пучка плоскостей, оси которых s_1 и s_2 не лежат в одной плоскости (черт. 222). Каждой плоскости σ_1 первого пучка соответствует плоскость σ_2 второго пучка. Рассмотрим геометрическое место прямых пересечения соответственных плоскостей σ_1 и σ_2 данных пучков. Это геометрическое место обладает следующими свойствами:

1°. *Любая плоскость* (ω) *пересекает его по кривой второго порядка.*

В самом деле, плоскость (ω) пересекает проективные пучки плоскостей s_1 и s_2 по двум проективным пучкам прямых S_1 и S_2.

Соответственные лучи этих пучков (например, S_1A и S_2A) проходят через точки пересечения (A) плоскости (ω) с прямыми рассматриваемого геометрического места (u). Поэтому точки пересечения (A) образуют кривую второго порядка.

Если в частном случае плоскость ω проходит через ось одного из данных пучков плоскостей, например s_1, то кривая второго порядка распадается на пару прямых, а именно ось s_1 и прямую пересечения плоскости ω (принадлежащей в этом случае пучку s_1) с соответственной плоскостью второго пучка s_2.

2°. *Любая прямая, не принадлежащая рассматриваемому геометрическому месту, пересекает его не более чем в двух точках.*

Действительно, проведем через эту прямую какую-нибудь плоскость. Последняя пересекает геометрическое место прямых по кривой второго порядка. Следовательно, данная прямая пересекает его в тех же точках, в которых она пересекает кривую второго порядка. Но таких точек не может быть больше двух.

Если же данная прямая имеет три общие точки с кривой второго порядка, то это означает, что кривая распадается на пару прямых, одной из которых является данная прямая. Поэтому данная прямая целиком принадлежит геометрическому месту. Указанные свойства геометрического места прямых дают основание назвать его **линейчатой поверхностью второго порядка**.

2. Для дальнейшего изучения свойств этих поверхностей вернемся к чертежу 222. Предположим, что буквами u, u_1 и u_2 обозначены три прямые (образующие) линейчатой поверхности второго порядка, образованной проективными пучками плоскостей s_1 и s_2. В таком случае пары плоскостей s_1u, s_2u; s_1u_1, s_2u_1; s_1u_2, s_2u_2 являются соответственными. Обозначим через X_1, Y_1, Z_1 точки пересечения плоскостей s_2u, s_2u_1 и s_2u_2 с прямой s_1, а через X_2, Y_2, Z_2 — точки пересечения плоскостей s_1u, s_1u_1, s_1u_2 с прямой s_2. Тогда будем иметь:

$$u \equiv X_1X_2, \; u_1 \equiv Y_1Y_2, \; u_2 \equiv Z_1Z_2.$$

Ряд точек X_1, Y_1, Z_1, ... перспективен пучку плоскостей s_2, в то время как ряд точек X_2, Y_2, Z_2, ... перспективен пучку плоскостей s_1. Но пучки плоскостей s_1 и s_2 проективны. Следовательно, ряды s_1 (X_1, Y_1, Z_1, ...) и s_2 (X_2, Y_2, Z_2, ...) также проективны. Таким образом, имеем:

Образующие (u, u_1, u_2, ...) линейчатой поверхности второго порядка пересекают оси (s_1 и s_2) проективных пучков плоскостей по двум проективным рядам точек:

$$s_1 (X_1, Y_1, Z_1, \ldots) \overline{\wedge} s_2(X_2, Y_2, Z_2, \ldots).$$

Из самого хода рассуждений при выводе этого предложения можно убедиться в справедливости предложения, ему обратного:

Если имеем два проективных ряда (X_1, Y_1, Z_1, ...) и (X_2, Y_2, Z_2, ...), носителями которых служат скрещивающиеся прямые s_1 и s_2, то прямые, соединяющие соответственные точки этих *рядов, являются образующими линейчатой поверхности второго порядка.*

В самом деле, проектируя ряды (X_1, Y_1, Z_1) и (X_2, Y_2, Z_2) двумя пучками плоскостей с осями s_2 и s_1, получим:

$$s_2 (s_2 X_1, s_2Y_1, s_2Z_1, \ldots) \barwedge s_1 (s_1X_2, s_1Y_2, s_1Z_2, \ldots).$$

Следовательно, имеем два проективных пучка плоскостей, которые образуют линейчатую поверхность второго порядка. Соответственные плоскости этих пучков пересекаются по прямым X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2, ..., которые являются образующими поверхности второго порядка.

Заметим, что двум проективным пучкам плоскостей двойственно соответствуют два проективных ряда точек. Поэтому мы имеем два взаимно двойственных метода образования линейчатых поверхностей второго порядка с помощью проективных пучков плоскостей и с помощью проективных рядов точек.

3. Займемся теперь более детальным изучением свойств образующих линейчатых поверхностей второго порядка. Любые две образующие u_i и u_k линейчатой поверхности, очевидно, не пересекаются, так как в противном случае они лежали бы в одной плоскости, а следовательно, прямые s_1 и s_2 также лежали бы в одной плоскости, что противоречит нашему предложению. С другой стороны, каждая образующая, как мы видели, пересекает обе оси s_1 и s_2 в соответственных точках проективных рядов.

Пусть некоторая прямая s пересекает три образующие (например, u, u_1 и u_2) линейчатой поверхности второго порядка. В таком случае прямая s имеет три общие точки с поверхностью и, следовательно, принадлежит ей всеми своими точками. Покажем, что прямая s пересекает все образующие линейчатой поверхности.

Образующие u, u_1, u_2, ... пересекают прямые s_1 и s_2 в соответственных точках двух проективных рядов:

$$(X_1, Y_1, Z_1, \ldots) \text{ и } (X_2, Y_2, Z_2, \ldots).$$

Будем проектировать эти ряды двумя пучками плоскостей с общей осью s. Получим:

$$s (X_1, Y_1, Z_1, \ldots) \barwedge s (X_2, Y_2, Z_2, \ldots).$$

Но означенные пучки плоскостей имеют три пары соответственных совпадающих элементов. Именно совпадают следующие пары плоскостей:

$$\begin{aligned} &\text{пл. } sX_1 \equiv \text{пл. } sX_2 \equiv \text{пл. } su, \\ &\text{пл. } sY_1 \equiv \text{пл. } sY_2 \equiv \text{пл. } su_1, \\ &\text{пл. } sZ_1 \equiv \text{пл. } sZ_2 \equiv \text{пл. } su_2. \end{aligned}$$

Поэтому, по теореме Штаудта, можно заключить, что и остальные пары соответственных плоскостей должны совпадать. Любая образующая u_i пересекает прямые s_1 и s_2 в соответственных точках проективных рядов. Обозначим эти точки буквами U_1 и U_2.

Тогда по доказанному плоскости sU_1 и sU_2 должны совпадать, поэтому прямая u_i пересекает прямую s.

Таким образом, прямая s пересекает все образующие линейчатой поверхности и лежит на ней всеми своими точками.

Будем перемещать прямую s так, чтобы она в любом своем положении пересекала три фиксированные образующие u, u_1, u_2 поверхности. Тогда, как выше было показано, прямая s лежит на поверхности всеми точками и пересекает все образующие последней.

Поэтому можно сказать, что, перемещая прямую s, мы получим вторую серию образующих линейчатой поверхности.

Покажем, что образующие второй серии (s) пересекают каждые две образующие первой серии (например, u_1 и u_2) в соответственных точках проективных рядов. Предположим, что образующие (s) второй серии пересекают соответственно прямую u в точках X, X_1, X_2, ..., прямую u_1 — в точках Y, Y_1, Y_2, ... и прямую u_2 — в точках Z, Z_1, Z_2, ... Будем проектировать ряд точек X, X_1, X_2, ... двумя пучками плоскостей с осями u_1 и u_2. Тогда получим

$$\text{ряд } (X, X_1, X_2, \dots) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \text{пучку } u_1 (u_1X, u_1X_1, u_1X_2, \dots);$$
$$\text{ряд } (X, X_1, X_2, \dots) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \text{пучку } u_2 (u_2X, u_2X_1, u_2X_2, \dots).$$

Отсюда видно, что пучки плоскостей u_1 и u_2 проективны.

С другой стороны, плоскости u_1X, u_1X_1, u_1X_2, ... пересекают прямую u_2 соответственно в точках Z, Z_1, Z_2, ... Поэтому имеем:

$$\text{ряд } (Z, Z_1, Z_2, \dots) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \text{пучку } u_1 (u_1X, u_1X_1, u_1X_2, \dots)$$

и аналогично

$$\text{ряд } (Y, Y_1, Y_2, \dots) \mathrel{\overline{\overline{\wedge}}} \text{пучку } u_2 (u_2X, u_2X_1, u_2X_2, \dots).$$

Отсюда и заключаем, что ряды точек $(Y, Y_1, Y_2, \dots)$ и $(Z, Z_1, Z_2, \dots)$ проективны.

Таким образом, образующие той и другой серии играют совершенно одинаковую роль в смысле проективного образования линейчатой поверхности, которой они принадлежат.

Только что проведенное рассуждение дает нам новый метод образования линейчатой поверхности второго порядка:

Пусть имеем три произвольные и непересекающиеся прямые u, u_1, u_2. Фиксируем эти прямые и рассмотрим подвижную прямую s, перемещающуюся таким образом, что в любом своем положении она пересекает три фиксированные прямые. Тогда подвижная прямая s опишет линейчатую поверхность второго порядка.

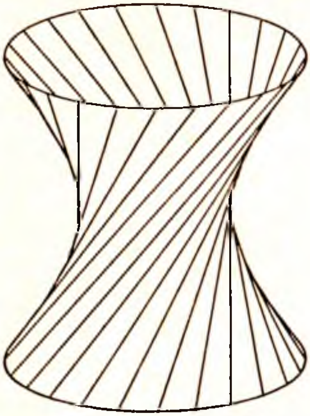
Возвращаясь к вопросу об образующих линейчатой поверхности второго порядка, можем показать, что *любые две образующие одной и той же серии могут быть приняты за оси проективных пучков плоскостей, определяющих данную линейчатую поверхность.*

В самом деле, любые две образующие одной серии не пересекаются, но пересекают все образующие другой серии. Последние пересекают две данные образующие в соответственных точках проективных рядов. Отсюда и следует, что данные образующие служат осями двух проективных пучков плоскостей, определяющих рассматриваемую линейчатую поверхность второго порядка.

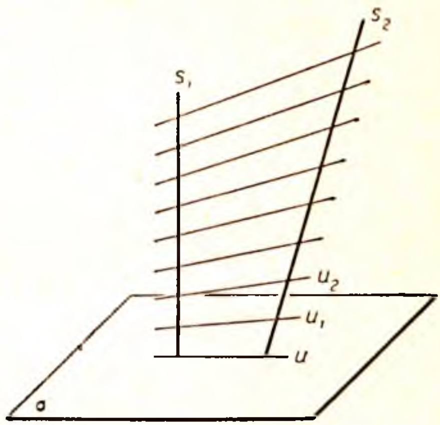
Далее, из свойств образующих поверхности второго порядка вытекает, что

Через любую точку поверхности проходит одна образующая каждой серии.

Так, по определению линейчатой поверхности второго порядка каждая ее точка M принадлежит образующей первой серии (например, u_i). Пусть точке M этой образующей соответствует M' на какой-либо другой образующей (например, u_k) той же серии



Черт. 223.



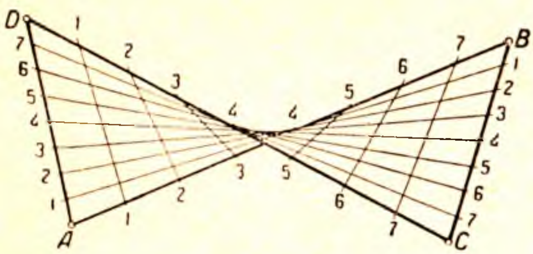
Черт. 224.

(в проективном соответствии, установленном на образующих u_i и u_k образующими второй серии). Тогда прямая MM' является образующей второй серии (ч. т. д.).

4. Мы уже видели, что произвольная плоскость ω пересекает линейчатую поверхность второго порядка по кривой второго порядка. Если же плоскость ω проходит через образующую поверхности, то она содержит также образующую другой серии (именно ту образующую, по которой ее пересекает соответственная плоскость второго пучка плоскостей). Следовательно, кривая второго порядка распадается в этом случае на пару прямых. Плоскость ω называется в этом случае к а с а т е л ь н о й п л о с к о с т ь ю.

С точки зрения аффинных свойств линейчатых поверхностей второго порядка последние могут быть разбиты на два класса. Те поверхности, для которых несобственная плоскость является секущей, называются о д н о п о л о с т н ы м и г и п е р б о л о и д а м и (черт. 223). Те же поверхности, которые касаются несобственной плоскости, называются г и п е р б о л и ч е с к и м и п а р а б о л о и д а м и (черт. 224).

В случае гиперболического параболоида несобственная плоскость как касательная пересекает параболоид по двум образующим разных серий. Обозначим эти образующие через u_∞ и s_∞. Все образующие одной серии пересекают прямую u_∞, в то время как образующие второй серии пересекают прямую s_∞. Это значит, что все образующие первой серии параллельны одной и той же плоскости, проходящей через u_∞. Точно так же все образующие второй серии параллельны одной и той же плоскости, проходящей через s_∞. Этим свойством образующих гиперболического параболоида часто пользуются для построения его модели.



Черт. 225.

Если s_1 и s_2 — две скрещивающиеся прямые, не параллельные плоскости σ (и не лежащие в ней, черт. 224), то можем принять прямые s_1 и s_2 за образующие одной серии. Образующими другой серии можно считать прямые u, u_1, u_2, ..., пересекающие обе прямые s_1 и s_2 и параллельные плоскости σ. Нетрудно видеть, что образующие второй серии u представляют собой прямые, пересекающие три фиксированные прямые: s_1, s_2 и несобственную прямую плоскости σ. Для построения гиперболического параболоида можно также воспользоваться тетраэдром $ABCD$ (черт. 225).

В самом деле, разбивая противоположные ребра AB и CD тетраэдра на равное число частей, соединяем прямыми соответственные точки деления. Получим прямые *11*, *22*, *33*, *44*, *55*, ..., являющиеся образующими одной серии. Последнее ясно из того, что все эти прямые параллельны плоскости σ, параллельной прямым AD и BC. Точно так же, используя противоположные ребра AD и BC тетраэдра, можно построить вторую серию образующих, параллельных плоскости σ', параллельной прямым AB и CD[1].

§ 65. Образование поверхностей второго порядка при помощи двух коррелятивных связок.

В главе V был рассмотрен вопрос о коллинеарных и коррелятивных соответствиях плоских полей. Плоскому полю точек и прямых двойственно соответствует связка плоскостей и прямых. Поэтому аналогично проективным соответствиям плоских полей можно рас-

[1] Предлагаем читателю в порядке упражнения исследовать вопрос о том сколько различных линейчатых параболоидов можно получить этим способом из данного тетраэдра.

сматривать коллинеарные и коррелятивные соответствия связок плоскостей и прямых. В настоящем параграфе будет показано, что коррелятивное соответствие двух связок приводит к образованию поверхности второго порядка. В случае двух связок их коррелятивное соответствие выражается следующим образом:

1°. Каждой плоскости первой связки соответствует прямая второй, а каждой плоскости второй — прямая первой.

2°. Инцидентной паре элементов одной связки соответствует инцидентная пара элементов второй.

В корреляции связок, как и в корреляции плоских полей, любые две соответственные формы первой ступени проективны.

Предположим, что мы имеем две коррелятивные связки с центрами S и S'. Тогда каждой плоскости одной связки соответствует прямая второй связки.

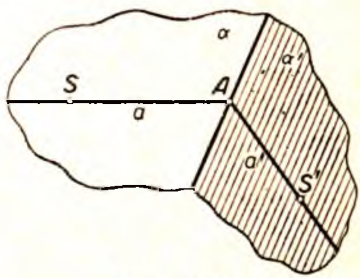
Рассмотрим геометрическое место точек пересечения плоскостей, принадлежащих каждой из связок S и S', с соответственными им прямыми.

Заметим прежде всего, что это геометрическое место может быть построено двумя способами:

1) Можно рассматривать точки пересечения плоскостей связки S с соответственными прямыми связки S'.

2) Можно рассматривать точки пересечения прямых связки S с соответственными плоскостями связки S'.

Покажем, что в обоих случаях мы получим одно и то же геометрическое место точек.



Черт. 226.

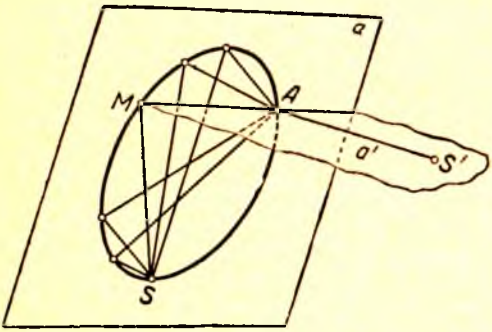
В самом деле, предположим, что плоскости α первой связки соответствует прямая a' второй. Обозначим через A точку их пересечения (чертеж 226). Прямую SA как луч первой связки обозначим буквой a. Плоскость второй связки, соответственную лучу a, обозначим буквой α'. Так как луч a принадлежит плоскости α, то плоскость α' принадлежит лучу a'. Следовательно, α' проходит через точку A и пересекает в этой точке луч a. Итак, любая точка A, полученная с помощью первого построения $(A = \alpha \times a')$, может быть также получена и с помощью второго построения $(A = a \times \alpha')$ (ч. т. д.).

Переходим теперь к доказательству следующих основных свойств рассматриваемого геометрического места:

1°. *Каждая плоскость, принадлежащая связке S или S', пересекает это геометрическое место по кривой второго порядка.*

2°. *Каждая прямая пересекает это геометрическое место не более чем в двух точках.*

Докажем сперва первое предложение. Предположим, что речь идет о плоскости α, принадлежащей связке S (черт. 227). Так как все точки геометрического места могут быть получены по второму способу (прямые первой связки и соответственные плоскости второй связки), то точки, лежащие в плоскости α, могут быть получены как точки пересечения прямых первой связки, лежащих в плоскости α, с соответственными плоскостями второй связки. Но упомянутые прямые образуют пучок лучей с центром в точке S, лежащей в плоскости α. Пусть плоскости α соответствует луч a', пересекающий ее в точке A. Тогда пучку прямых S, лежащих в плоскости α, соответствует пучок плоскостей, проходящих через прямую a'. Эти две соответственные формы первой ступени проективны. Но пучок плоскостей a' пересекает плоскость α по перспективному ему пучку прямых A. Поэтому пучки A и S в плоскости α проективны, и точки пересечения (M) их соответственных лучей (AM и SM) образуют кривую второго порядка. Эта кривая и является, очевидно, искомым сечением рассматриваемого геометрического места плоскостью α.



Черт. 227.

Второе предложение легко вывести из первого. В самом деле, если g — произвольная прямая, то плоскость ω, проходящая через эту прямую и центр связки S, пересекает геометрическое место по кривой второго порядка k. Так как прямая g лежит в этой плоскости и не может иметь с кривой k более двух общих точек, то второе предложение доказано.

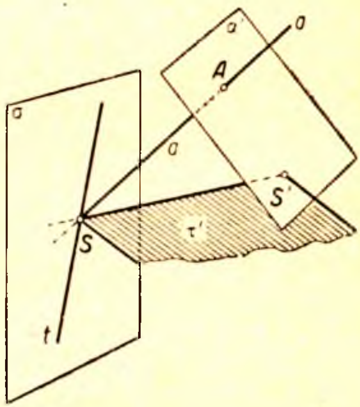
Выведенные здесь свойства рассматриваемого геометрического места дают основание называть его *поверхностью второго порядка*[1].

Выше мы убедились в том, что плоскость α, принадлежащая одной из связок, пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка k. В частном случае можно выбрать плоскость α таким образом, чтобы она соответствовала прямой $a' \equiv S'S$. Тогда точка A совпадает с точкой S, и мы получаем два пучка с общим центром S. Двойные лучи этих пучков принадлежат, очевидно, поверхности второго порядка. Их может быть два (гиперболическое соответствие), один (параболическое соответствие) и ни одного (эллиптическое соответствие). Поэтому плоскость α, кото-

[1] Точное решение этого вопроса дает управление поверхности в декартовых координатах.

рая называется в этом случае *касательной плоскостью*, может иметь с поверхностью второго порядка две общие прямые, или одну общую прямую, или одну общую точку S.

Через центр каждой из образующих связок проходит единственная касательная плоскость. Мы определили ее как плоскость одной из связок, соответственную общему лучу обеих связок, отнесенному к другой связке. Обозначим буквой σ касательную плоскость, проходящую через точку S (черт. 228). Проведем через S произвольную прямую a. Эта прямая имеет одну общую точку S с поверхностью второго порядка, поэтому она может иметь еще только одну общую с поверхностью точку. Такой точкой, очевидно, является точка A пересечения данной прямой a с соответственной ей плоскостью α'. Эта вторая точка A совпадает с первой S в том и только в том случае, если плоскость α' проходит через S, или, что то же, если плоскость α' проходит через общий луч связок SS'. Но тогда соответственная ей прямая a первой связки должна лежать в касательной плоскости σ. Отсюда заключаем:



Черт. 228.

Каждая прямая t, проходящая через S и лежащая в касательной плоскости σ, не имеет других (кроме S) *точек пересечения с поверхностью второго порядка. Такая прямая называется касательной к поверхности второго порядка.*

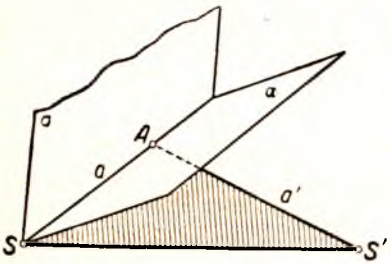
На чертеже 228 касательная t соответствует плоскости τ', проходящей через общий луч связок SS'. Таким образом, *касательная плоскость σ есть геометрическое место касательных прямых t, проходящих через точку S, которая называется точкой прикосновения.*

Если плоскость τ' проходит через соответственную касательную t, то последняя целиком принадлежит поверхности второго порядка. Если это имеет место для каждой плоскости (τ'), пучка (SS'), т. е. если пучок плоскостей, проходящих через прямую SS', перспективен пучку соответственных касательных (t), то пучок касательных, а значит, и плоскость σ принадлежат поверхности второго порядка. Относя касательные и проходящие через них плоскости к первой связке, находим, что плоскости пучка (SS') должны проходить через соответственные им касательные в точке S'. Следовательно, касательная плоскость σ', проходящая через точку S', также принадлежит поверхности второго порядка. Легко видеть, что последняя распадается в этом случае на две плоскости σ и σ'. Других точек поверхность иметь не может. Это видно из того, что всякая точка A поверхности лежит в плоскости SAS', которой соответствует касательная a (черт. 229). Поэтому прямой $S'A \equiv a'$

соответствует плоскость α, проходящая через a и пересекающая a, в точке A, лежащей на прямой a (ч. т. д.).

Таким образом, поверхность второго порядка распадается на пару плоскостей σ и σ'.

На этом мы заканчиваем краткий очерк проективного образования поверхностей второго порядка. Дальнейшее развитие проективной теории этих поверхностей имеет много сходного с соответствующей теорией кривых второго порядка. В частности, можно доказать, что *две любые точки поверхности второго порядка могут служить центрами образующих связок*. Отсюда следует, что *поверхность в каждой своей точке имеет касательную плоскость*, а также, что *любая плоскость может пересекать поверхность второго порядка только по кривой второго порядка, которая в свою очередь может распадаться на пару прямых* (касательная плоскость).



Черт. 229.

Далее, можно поставить вопрос о форме, двойственной поверхности второго порядка (геометрическое место плоскостей) и ее проективном образовании при помощи двух плоских полей[1].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дана перспективная коллинеация плоскостей ω и ω'. Прямая одной из этих плоскостей, соответственная несобственной прямой второй плоскости, называется п р е д е л ь н о й. Что можно сказать о положении предельных прямых на плоскостях ω и ω'?

2. Доказать справедливость следующего утверждения:

Если одна из плоскостей ω и ω' перспективной коллинеации вращается вокруг линии пересечения плоскостей, то коллинеация плоскостей остается перспективной.

3. Если будем вращать одну из плоскостей вокруг линии их пересечения, то центр S перспективной коллинеации перемещается в пространстве. Докажите, что центр S опишет круг, центр которого лежит на одной из предельных прямых.

4. Даны центр, ось и пара соответственных точек гомологии. Требуется построить точку, соответственную данной несобственной точке (последняя задается любой проходящей через нее прямой).

5. Гомология совмещенных полей задана осью s, центром S и парой соответственных точек A, A'. Построить прямые, соответствующие несобственной прямой плоскости, считая ее прямой одного или другого плоского поля. Такие прямые называются п р е д е л ь н ы м и. Что можно заранее сказать об их положении?

---

[1] Не углубляясь в рассмотрение этих интересных вопросов, мы отсылаем тех читателей, которые пожелают более подробно ознакомиться с ними, к работе Th. Reye, Geometrie der Lage, Zw. Abt. S. 28—40.

6. Даны центр, ось и одна из предельных прямых гомологии (рассмотреть оба случая). Построить точку M', соответственную данной точке M.

7. Даны центр, ось и пара соответственных точек гомологии A, A'. На прямой AA' дана точка M. Построить соответственную ей точку M'.

8. Даны центр S и обе предельные прямые гомологии. Построить ось и пару соответственных точек гомологии.

9. Доказать, что в инволюционной гомологии пара соответственных точек A, A' гармонически разделяется центром гомологии и точкой пересечения прямой AA' с ее осью.

10. Гомология, центр которой лежит на оси, задана осью и парой соответственных точек A, A'. Построить точку A', соответственную данной точке B. Построить точку, соответственную необходимой точке прямой AA'.

11. Показать, что однородные проективные координаты вершин координатного треугольника и единичной точки могут быть выражены следующим образом: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) и (1, 1, 1).

12. Написать уравнения сторон координатного треугольника и уравнение произвольной прямой, проходящей через одну из его вершин, в однородных проективных координатах.

13. Дать аналитическое доказательство теоремы Дезарга на плоскости, принимая один из двух гомологических треугольников за координатный, а центр гомологии за единичную точку.

14. Написать уравнение кривой второго порядка, проходящей через вершины координатного треугольника, в однородных проективных координатах.

Ответ: $ayz + bzx + cxy = 0$.

15. Написать формулы коллинеарного преобразования, переводящего вершины координатного треугольника XYZ и единичную точку E соответственно в точки Y, Z, E и X.

16. Коллинеарное соответствие плоских полей в декартовых координатах выражается формулами:

$$x = \frac{2x' + y' - 1}{x' + y' + 1}, \qquad y = \frac{x' - y' + 5}{x' + y' + 1}.$$

Написать уравнения прямых, соответственных осям координат и несобственной прямой плоскости XY. Написать формулы обратного преобразования.

17. Написать (в декартовых координатах) формулы коллинеарного преобразования, преобразующего единичный квадрат O (0, 0), E_1 (1, 0), E (1, 1), E_2 (0, 1) в ромб O' (0, 0), E'_1 (4, 1), E' (0, 2), E'_2 (— 4, 1).

18. Коллинеарное соответствие совмещенных плоских полей задано двойной точкой X и двумя соответственными треугольниками ABC и $A'B'C'$.

Построить двойную прямую x, ассоциированную двойной точке X.

19. Коллинеарное соответствие совмещенных плоских полей задано двойной прямой x и двумя соответственными трехсторонниками abc и $a'b'c'$. Построить двойную точку X, ассоциированную двойной прямой x.

20. Коллинеарное соответствие совмещенных плоских полей задано, как в задаче 18. Для данной точки M найти (построить) ей соответственную точку M'.

21. Коллинеарное соответствие совмещенных плоских полей задано, как в задаче 19. Для данной прямой m построить ей соответственную прямую m'.

22. Коллинеация совмещенных плоских полей определена соответствием двух четырехугольников. Дана прямая g. Найти на этой прямой пару соответственных точек коллинеации.

23. Коллинеарное преобразование плоского поля в себя определяется соответствием двух четырехугольников. Дана точка G. Построить пару соответственных прямых, проходящих через эту точку.

24. Доказать, что из трех вершин полярного треугольника PQR две вершины лежат вне, а одна вершина—внутри основной кривой второго порядка k

25. Даны вершина и проходящая через нее сторона полярного треугольника. Построить полярный треугольник, предполагая, что основная кривая второго порядка начерчена.

26. Даны четыре точки пересечения двух прямых, выходящих из точки P, с кривой второго порядка k, остальные точки которой неизвестны. Требуется построить поляру точки P.

27. Даны (начерчены) окружность и точка вне ее. Через данную точку провести касательные к окружности с помощью одной линейки.

28. Через точку P, заданную внутри кривой второго порядка, провести хорду, которая делилась бы точкой P пополам.

Указание. Искомая прямая проходит через несобственную точку поляры точки P.

29. Даны четыре точки A, B, C, D на кривой второго порядка k. Касательные к кривой k в этих точках образуют описанный четырехугольник. Доказать, что прямая, на которой лежат точки пересечения противоположных сторон описанного четырехугольника и вписанного четырехугольника $ABCD$, является полярой точки, через которую проходят диагонали этих четырехугольников.

30. Даны две пары касательных из точек P и Q к кривой второго порядка k. Построить полюс прямой PQ. Кривая k не дана.

31. В кривую второго порядка вписан произвольный треугольник ABC. Касательные в точках A, B и C образуют треугольник $A'B'C'$, описанный около кривой. Прямые AS, BS и CS, соединяющие вершины вписанного треугольника с произвольной точкой S, пересекают противолежащие стороны треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1.

Требуется доказать, что три прямые $A'A_1$, $B'B_1$ и $C'C_1$ пересекаются в одной точке.

Указание. Соответственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ по теореме Дезарга пересекаются в трех точках A_0, B_0 и C_0, лежащих на одной прямой. Прямые $A'A_1$, $B'B_1$ и $C'C_1$ являются полярами точек A_0, B_0 и C_0. (Задача предложена Э. Хилькевичем, Тюмень.)

32. Дана окружность, определяющая полярное преобразование плоского поля. Показать, что центр основной окружности является ортоцентром любого полярного треугольника.

33. Коррелятивное преобразование плоского поля в себя определено как полярное преобразование относительно данного круга с последующим центрально симметричным преобразованием относительно центра круга. Показать, что такая корреляция является полярным преобразованием. Что можно сказать об основной кривой описанного полярного преобразования (известного под названием «антиполярного»)?

34. Показать, что в антиполярном преобразовании (см. предшествующую задачу) имеется равносторонний полярный треугольник. Определить его размеры через радиус данного круга.

35. Даны (начерчены) основная кривая второго порядка k и полярный треугольник PQR, а также прямая g, пересекающая стороны полярного треугольника в точках A, B и C. Построить точки, соответственные точкам A, B и C в инволюции сопряженных точек, определяемых кривой k на сторонах полярного треугольника.

36. Даны (начерчены) основная кривая второго порядка k и полярный треугольник PQR, а также точка G. Построить прямые, соответственные прямым GP, GQ и GR в инволюциях, определяемых кривой k в пучках с центрами P, Q и R.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПРОЕКТИВНАЯ, АФФИННАЯ И МЕТРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ГРУППЫ

§ 66. Предварительные замечания.

Обыкновенная метрическая геометрия евклидова пространства является предметом преподавания в средней школе. В начале нашего курса мы на базе элементарной геометрии и не выходя из рамок евклидова пространства занимались изучением аффинных свойств геометрических фигур. Эти свойства в своей совокупности образуют так называемую аффинную геометрию, которой и была посвящена первая глава книги.

Для изучения проективных свойств фигур оказалось необходимым сконструировать новое, проективное пространство, дополнив евклидово пространство несобственными элементами. В этом пространстве были развиты основные факты проективной геометрии на плоскости.

Проективные свойства фигур рассматривались как свойства, инвариантные по отношению ко всем коллинеарным преобразованиям плоскости в себя. При этом выяснилось, что аффинные преобразования являются лишь тем частным случаем коллинеарных, когда несобственная прямая переходит в себя. Далее будет показано, что и метрические свойства фигур можно свести к проективным, выделив на проективной плоскости некоторые особые элементы (несобственная прямая и абсолютная инволюция на ней).

Такая проективная точка зрения позволяет построить аффинную и метрическую геометрии на плоскости в общей проективной форме, т. е. совершенно независимо от частных свойств рассматриваемой проективной плоскости (евклидова плоскость, дополненная несобственной прямой). Благодаря этому становится возможным сравнение геометрических систем и четкое разграничение проективных, аффинных и метрических свойств фигур.

Нет необходимости доказывать, что все это имеет большое значение для преподавателя математики в школе. С другой стороны, изучение вопросов элементарной метрической геометрии с этой более общей точки зрения всегда представляет некоторые трудности и требует достаточно подробного изложения, как это и сделано в отношении геометрии на плоскости.

В § 77 дан краткий очерк проективного развития геометрических систем в пространстве.

§ 67. Проективная геометрия и ее группа.

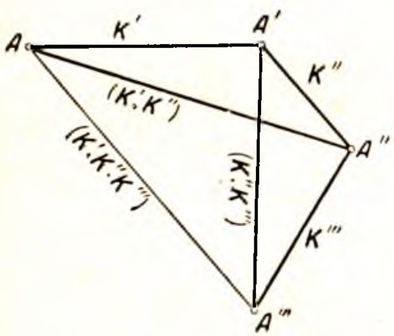
В предыдущих главах были изложены основные понятия и факты проективной геометрии на плоскости. Как уже было упомянуто, *под проективными свойствами мы разумеем такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех коллинеарных преобразованиях плоскости в себя*. Покажем, что совокупность всех коллинеаций плоского поля образует группу. Будем называть группой такую совокупность преобразований плоского поля, которая удовлетворяет нижеприведенным условиям. Говоря об этих условиях, мы одновременно покажем, что совокупность коллинеаций удовлетворяет им и, следовательно, образует группу.

1°. *Произведение двух любых преобразований совокупности представляет собой преобразование той же совокупности.*

Покажем, что это условие выполняется для совокупности всех коллинеаций плоского поля в себя. Обозначим буквой $\mathbf{K}$ произвольную коллинеацию, а через $\{\mathbf{K}\}$ — совокупность всех коллинеаций плоского поля. Докажем, что

$$\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}'' = \mathbf{K}'''.$$

В самом деле, коллинеация $\mathbf{K}'$ переводит каждую точку A в точку A', каждую прямую a — в прямую a', сохраняя при этом инцидентное расположение элементов. Коллинеация $\mathbf{K}''$ переводит точку A' в точку A'', прямую a' — в прямую a'', точно так же охраняя инцидентное расположение элементов. Отсюда заключаем, что произведение $(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}'')$ двух коллинеаций является преобразованием, которое переводит каждую точку (A) в точку (A'') и каждую прямую (a)—в прямую a'' и сохраняет инцидентное расположение элементов.



Черт. 230.

Следовательно, это результирующее преобразование $\mathbf{K}'''$ также является коллинеацией.

2°. *Произведения преобразований совокупности удовлетворяют ассоциативному закону*, т. е.

$$(\mathbf{K}' \cdot \mathbf{K}'') \cdot \mathbf{K}''' = \mathbf{K}' \cdot (\mathbf{K}'' \cdot \mathbf{K}''').$$

Докажем, что и это требование выполняется для совокупности всех коллинеаций. Так, если коллинеация $\mathbf{K}'$ переводит точку A в точку A', коллинеация $\mathbf{K}''$ переводит точку A' в точку A'', а коллинеация $\mathbf{K}'''$ переводит точку A'' в точку A''', то левую часть написанной выше формулы можно представить ломаной $AA''A'''$, в то время как правая часть изобразится ломаной $AA'A'''$ (черт. 230) Ясно, что в обоих случаях получаем одно и то же результирующее преобразование, переводящее точку A в точку A'''.

3°. *Среди преобразований совокупности содержится тождественное преобразование.*

Предположим, что каждая точка и каждая прямая плоского поля переходит в себя, т. е. все элементы поля остаются неподвижными. Такое преобразование называется тождественным. Ясно, что его можно рассматривать как коллинеацию, так как в этом преобразовании точке соответствует точка, прямой — прямая, а инцидентные элементы переходят в инцидентные.

4°. *Для каждого преобразования совокупности существует обратное ему преобразование, принадлежащее той же совокупности. Произведение двух таких преобразований является тождественным преобразованием.*

Предположим, что коллинеация **K** преобразует плоское поле ω в плоское поле ω'. Рассмотрим обратное преобразование поля ω' в поле ω. Это преобразование также является коллинеацией. Мы обозначим его через $\mathbf{K}^{-1}$. Если произведем преобразование **K**, а затем преобразование $\mathbf{K}^{-1}$, то будем иметь тождественное преобразование, так как все элементы поля перейдут в себя.

Будем иметь следующее символическое равенство:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}^{-1} = 1.$$

Так как совокупность всех коллинеаций $\{\mathbf{K}\}$ удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3° и 4°, то она образует группу. Эта группа $\{\mathbf{K}\}$ и носит название г р у п п ы п р о е к т и в н о й г е о м е т р и и.

Мы уже знаем, что проективная геометрия занимается изучением тех свойств фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы.

В главах II—V были изложены основные понятия и теоремы проективной геометрии. В частности, в главе IV была построена проективная теория кривых второго порядка. Таким образом, мы достаточно подробно ознакомились с содержанием этой дисциплины. Посмотрим теперь, какое место по отношению к проективной геометрии занимает аффинная геометрия и какова ее группа.

§ 68. Аффинная геометрия и ее группа.

1. Кроме проективных свойств фигур, инвариантных при любых коллинеациях плоского поля, можно рассматривать такие свойства геометрических фигур, которые сохраняются лишь при некоторых коллинеациях группы $\{\mathbf{K}\}$.

Так, *аффинными свойствами фигур будем называть такие, которые остаются инвариантными лишь при аффинных коллинеациях*. Напомним (§ 50), что аффинными называются коллинеации, переводящие несобственную прямую в себя[1]. Таким образом,

[1] Так как мы рассматриваем коллинеации плоских полей, расположенных на одном и том же носителе, то несобственная прямая в аффинной коллинеации переходит в себя.

аффинные свойства фигур связаны с особенной ролью несобственной прямой. Как мы видели, с проективной точки зрения все прямые совершенно равноправны. Поэтому безразлично, какую прямую плоскости мы назовем несобственной. Выбрав какую-либо прямую плоского поля в качестве «несобственной»[1], мы переходим к построению аффинной геометрии. С этой целью мы рассмотрим те коллинеации, которые переводят фиксированную «несобственную» прямую в себя. Такие коллинеации мы назовем аффинными. Нетрудно убедиться в том, что совокупность аффинных коллинеаций образует группу $\{\mathbf{A}\}$, которая является подгруппой[2] совокупности всех коллинеаций $\{\mathbf{K}\}$. Для этого достаточно показать, что совокупность $\{\mathbf{A}\}$ удовлетворяет четырем условиям, формулированным в § 67.

Рассмотрим условие 1° (§ 67). Пусть $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$ — две какие-либо аффинные коллинеации плоского поля. Докажем, что

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}'' = \mathbf{A}''',$$

где $\mathbf{A}'''$ также аффинная коллинеация. В самом деле, преобразование $\mathbf{A}'''$ есть коллинеация, так как $\mathbf{A}'''$ представляет собой произведение двух коллинеаций $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{A}''$. Каждая из этих последних переводит «несобственную» прямую в себя, поэтому в результирующем преобразовании $\mathbf{A}'''$ «несобственная» прямая также переходит в себя. Следовательно, преобразование $\mathbf{A}'''$ является аффинным. Что же касается условий 2°, 3° и 4°, то рассуждения, приведенные в § 67, без всяких изменений могут быть повторены для аффинных коллинеаций.

Таким образом, убеждаемся, что совокупность аффинных коллинеаций образует группу. Эта группа $\{\mathbf{A}\}$ называется группой аффинной геометрии.

Аффинная геометрия занимается изучением тех свойств геометрических фигур, которые остаются инвариантными при всех аффинных коллинеациях, но не являются свойствами проективными, т. е. среди всех преобразований $\{\mathbf{K}\}$ имеются и такие, которые нарушают аффинные свойства.

2. Мы уже знаем важнейшие понятия и свойства аффинной геометрии, они были освещены в главе I и затем позднее (в проективной форме) в § 50 и 51.

Проективное истолкование аффинной геометрии позволяет осуществить ее построение на проективной плоскости в общем виде, т. е. выбирая произвольную прямую в качестве «несобственной».

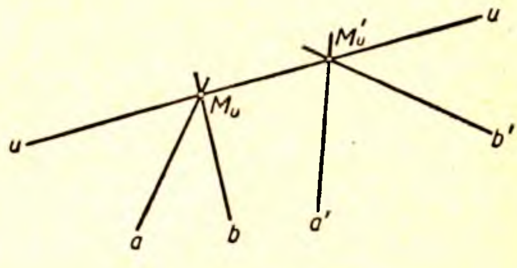
Предположим, что прямая u (черт. 231) является «несобственной» прямой плоского поля. В таком случае каждая точка этой прямой является «несобственной» точкой. Если прямые a и b пересекаются в точке M_u, лежащей на прямой u, то мы должны

---

[1] В этом более общем понимании «несобственной» прямой мы отмечаем слово «несобственная» кавычками.

[2] Т. е. совокупность преобразований $\{\mathbf{A}\}$ представляет собой часть совокупности $\{\mathbf{K}\}$, и в то же время совокупность $\{\mathbf{A}\}$ образует группу.

назвать такие прямые «параллельными», так как они пересекаются в «несобственной» точке M_u. В аффинной коллинеации прямая u переходит в себя, поэтому точке M_u соответствует точка M_u' той же прямой. Прямые a и b перейдут в прямые a' и b'. Последние «параллельны», так как пересекаются в «несобственной» точке M'_u. Следовательно, если прямые a и b «параллельны», то и соответственные прямые a' и b' также «параллельны». Параллелизм есть понятие инвариантное по отношению к группе {A} всех аффинных коллинеаций. Это понятие аффинной геометрии.

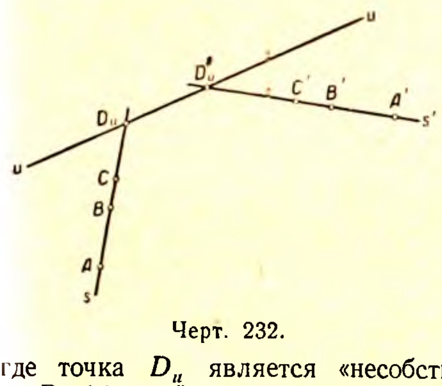


Черт. 231.

Точно так же мы можем перенести в эту более общую концепцию понятие простого отношения трех точек прямой, проективное определение которого было получено в конце § 25. Именно в этом параграфе было показано, что

$$(ABC) = (ABCD_\infty),$$

где D_∞ — несобственная точка прямой ABC. Иначе говоря, простое отношение трех точек A, B, C прямой определяется через сложное отношение четырех точек, причем к трем данным точкам A, B, C присоединяется несобственная точка D_∞ прямой ABC.



Черт. 232.

Предположим, что прямая u выбрана в качестве «несобственной» (черт. 232). Тогда мы определим «простое отношение» трех точек (ABC) следующим образом:

$$(ABC) = (ABCD_u),$$

где точка D_u является «несобственной» точкой прямой ABC.

В аффинной коллинеации прямая u переходит в себя. Поэтому «несобственной» точке D_u прямой s соответствует «несобственная» точка D_u' прямой s'. Так как сложное отношение четырех точек инвариантно при всяком коллинеарном преобразовании, то будем иметь:

$$(ABCD_u) = (A'B'C'D_u').$$

Но согласно установленному определению

$$(ABC) = (ABCD_u), \quad (A'B'C') = (A'B'C'D_u').$$

Поэтому имеем:

$$(ABC) = (A'B'C'),$$

т. е. «простое отношение» трех точек прямой инвариантно относительно всех аффинных коллинеаций. Это понятие, следовательно, также принадлежит аффинной геометрии.

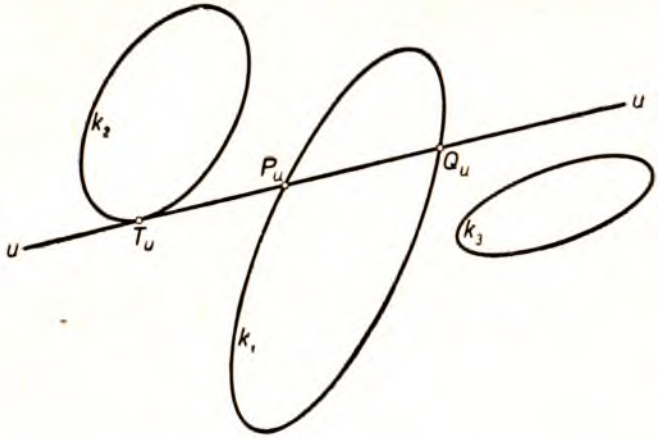
Заметим, что деление отрезка пополам представляет собой тот частный случай, когда делящая точка гармонически сопряжена с несобственной точкой данной прямой. Поэтому на чертеже 232 точка B делит «пополам» отрезок AC в том случае, если пара B, D_u гармонически разделена парой A, C. Таким образом, можем развивать аффинную геометрию в этой более общей проективной форме, использовав в качестве «несобственной» произвольную прямую плоскости.

§ 69. Аффинные свойства кривых второго порядка

1. Обратим внимание на те свойства кривых второго порядка, которые связаны с несобственной прямой. Прежде всего само подразделение кривых второго порядка на гиперболы, параболы и эллипсы основано на относительном положении кривой и несобственной прямой. Именно мы называем г и п е р б о л о й такую кривую второго порядка, которая имеет две различные несобственные точки, т. е. пересекает несобственную прямую в двух действительных точках. П а р а б о л о й называется такая кривая второго порядка, которая имеет одну несобственную точку или две совпавшие точки пересечения с несобственной прямой. Следовательно, парабола касается несобственной прямой. Наконец, э л л и п с о м называется кривая второго порядка, не имеющая несобственных точек или общих точек с несобственной прямой. Можно также сказать, что эллипс пересекает несобственную прямую в двух мнимых точках, а именно в мнимых двойных точках эллиптической инволюции, определяемой эллипсом на несобственной прямой (§ 59).

Переходим к аффинной геометрии в ее общей проективной форме. Предполагая, как это уже неоднократно было сделано, что роль «несобственной» прямой выполняет произвольно выбранная прямая u, мы можем и в этом случае сохранить аффинную классификацию кривых второго порядка (черт. 233). Так, если кривая второго порядка k_1 пересекает «несобственную» прямую u в точках P_u и Q_u, то она должна быть отнесена к «гиперболам». Кривая k_2, касающаяся прямой u в точке T_u, относится к «параболам». Наконец, кривая k_3, не имеющая общих точек с прямой u, — к «эллипсам».

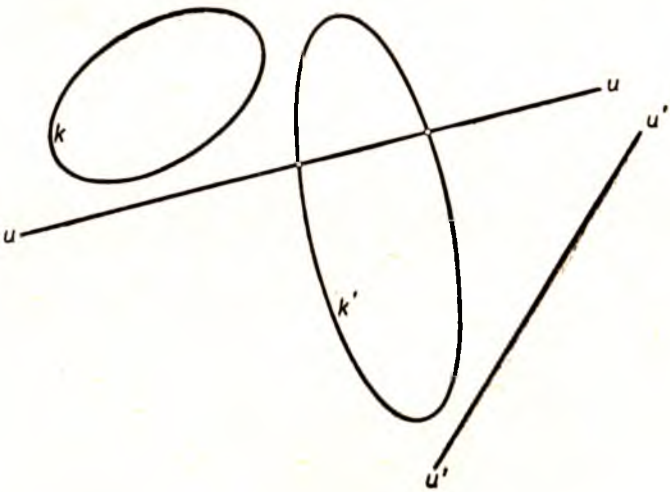
Такая классификация является инвариантной в аффинной геометрии. В самом деле, любая аффинная коллинеация преобразует «несобственную» прямую в себя, поэтому кривая второго порядка, имеющая две точки пересечения с «несобственной» прямой, перейдет в кривую второго порядка, также имеющую две точки пересечения с «несобственной» прямой. Другими словами, «гипербола»



Черт. 233.

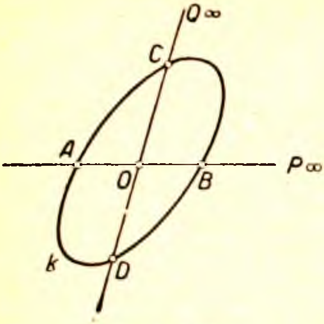
всегда преобразуется в «гиперболу». Аналогично «парабола» переходит только в «параболу» и «эллипс» — только в «эллипс». Следовательно, в аффинных преобразованиях эта классификация кривых не подвергается никаким изменениям.

С другой стороны, нетрудно заметить, что она, напротив, не имеет значения в проективной геометрии, так как существуют коллинеации, которые переводят эллипс в гиперболу или гиперболу в параболу[1]. Это показывает, что проективная геометрия не



Черт. 234.

[1] Если установлена такая классификация по отношению к какой-либо прямой u как «несобственной». Без последней, очевидно, и самая классификация невозможна.



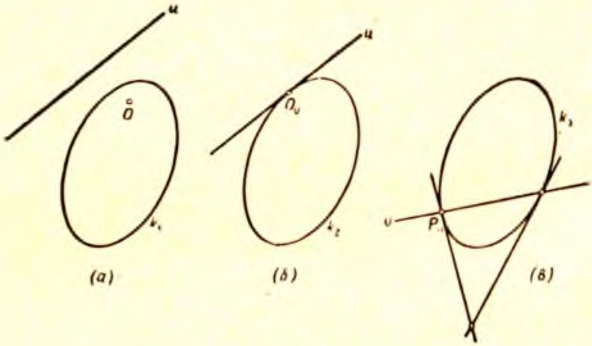
Черт. 235.

различает виды кривых второго порядка. Все эти виды проективно тождественны.

Для иллюстрации сказанного приведем следующие соображения. Предположим, что какая-либо коллинеация **K** преобразует кривую второго порядка k в кривую k' (черт. 234). Проведем прямую u так, чтобы она не пересекала кривой k, но пересекала бы кривую k'. Примем затем прямую u за несобственную. Тогда кривая k согласно установленной выше классификации является «эллипсом», в то время как кривая k' — «гиперболой». Таким образом, окажется, что коллинеация **K** переводит «эллипс» k в «гиперболу» k'.

2. Следующая группа вопросов теории кривых второго порядка, связанных с несобственной прямой, — э т о у ч е н и е о ц е н т р е и д и а м е т р а х (в частности, с о п р я ж е н н ы х д и а м е т р а х).

Рассмотрим эти понятия с проективной точки зрения.



Черт. 236.

Если имеем центральную кривую второго порядка k (т. е. кривую, центром которой является собственная точка плоскости), то центр O кривой можно определить как точку, в которой все хорды делятся пополам (черт. 235). Это значит, что центр O является точкой, гармонически сопряженной несобственной точке каждой проходящей через центр секущей относительно точек пересечения ее с кривой k. Так, для секущей AB имеем:

$$(ABOP_\infty) = -1.$$

Точно так же для секущей CD

$$(CDOQ_\infty) = -1.$$

и так для каждой секущей, проходящей через центр O.

Но это означает, что несобственная прямая является полярой центра O, так как она представляет собой геометрическое место четвертых гармонических к точке O относительно точек пересечения секущих с кривой k.

Таким образом, с проективной точки зрения центр кривой второго порядка может быть определен как полюс несобственной прямой.

Принимая это определение, мы придем к следующим выводам, которые интерпретируем в аффинной геометрии с произвольно выбранной «несобственной» прямой, что позволяет сделать их очень наглядными.

В случае «эллипса» кривая второго порядка (k_1) не имеет общих точек с «несобственной» прямой u (черт. 236, *а*). Поэтому «центр» O является внутренней точкой эллипса. В самом деле, если бы через точку O проходила касательная к кривой k_1, то точка прикосновения ее принадлежала бы поляре точки O, т. е. «несобственной» прямой u, что противоречит сделанному предположению.

В случае «параболы» кривая (k_2) касается «несобственной» прямой u (черт. 236, *б*). Полюсом прямой u является точка прикосновения O_u к «параболе». Следовательно, «центром» «параболы» является «несобственная» точка O_u.

Наконец, если кривая второго порядка (k_3) пересекает «несобственную» прямую u, то имеем случай «гиперболы». Построив касательные к кривой k_3 в точках P_u и Q_u ее пересечения с прямой u, найдем полюс O прямой u. Точка O является по определению «центром» «гиперболы». Касательные в «несобственных» точках P_u и Q_u называются «асимптотами». Центр O «гиперболы» есть, очевидно, внешняя точка (черт. 236, *в*).

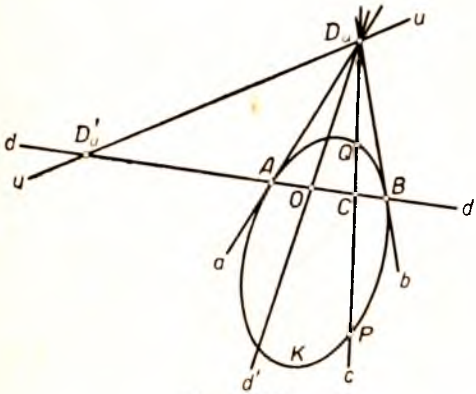
При всех аффинных коллинеациях «центр» кривой второго порядка переходит в «центр» соответственной кривой. Это видно из следующих соображений.

Полюс и поляра связаны относительно кривой второго порядка проективной конструкцией, которая инвариантна при всех коллинеациях. Поэтому полюс и поляра относительно кривой k переходят в коллинеарном преобразовании в полюс и поляру относительно соответственной кривой k'.

«Центр» кривой второго порядка является полюсом «несобственной» прямой. Любая аффинная коллинеация преобразует «несобственную» прямую в себя. Пусть «центру» O кривой k в аффинном преобразовании соответствует точка O'. Так как точка O есть полюс прямой u относительно k, то точка O' должна быть полюсом прямой u' относительно соответственной кривой k'. Но прямая u' совпадает с u. Поэтому O', будучи полюсом «несобственной» прямой, есть «центр» кривой второго порядка k'.

Итак, понятие центра кривой второго порядка должно быть отнесено к аффинной геометрии.

3. В § 59 было установлено понятие сопряженных точек и сопряженных прямых с помощью полярного соответствия.



Черт. 237.

Понятие (полярной) сопряженности проективно. Но если это понятие связано с несобственной прямой, то оно относится к аффинной геометрии. Так, в § 59 мы рассмотрели инволюции сопряженных элементов на прямой и в пучке. Выберем центр пучка в центре O кривой второго порядка. Тогда лучами пучка O являются диаметры кривой второго порядка. Понятие сопряженности может быть перенесено и на диаметры кривой. Именно *два диаметра называются сопряженными, если каждый из них проходит через полюс другого.*

Так как центр кривой второго порядка является полюсом несобственной прямой, то полюсы диаметров лежат на последней, т. е. полюс любого диаметра есть несобственная точка.

Предположим, что прямая u служит «несобственной» прямой плоскости и точка O является «центром» кривой второго порядка k (черт. 237). Тогда полюс D_u «диаметра» d можно построить с помощью касательных, проходящих через концы A и B этого «диаметра». Так как эти касательные a и b пересекаются в несобственной точке D_u, то они «параллельны». Следовательно, имеем:

Касательные в концах произвольного «диаметра» кривой второго порядка «параллельны».

«Диаметр» d', проходящий через полюс D_u «диаметра» d, есть по определению «диаметр», сопряженный «диаметру» d. Таким образом, сопряженный «диаметр» d' «параллелен» касательным в концах данного «диаметра». Проведем произвольную секущую c, «параллельную» сопряженному «диаметру» d'. Это значит, что секущая c проходит через точку D_u. Но данный «диаметр» d является полярой точки D_u. Поэтому точки пересечения P и Q секущей c с кривой k делятся гармонически точками D_u и C:

$$(PQD_uC) = -1.$$

Но это означает, что точка C является «серединой» отрезка PQ. Следовательно, *«Диаметр» d делит «пополам» хорды, «параллельные» сопряженному «диаметру» d'.*

Таким образом, определение сопряженности диаметров, установленное с помощью полярного соответствия, совпадает с обычным.

4. Рассмотрим инволюцию сопряженных диаметров отдельно в случае гиперболы, параболы и эллипса.

Гипербола пересекает несобственную прямую в двух точках. Последние являются двойными точками гиперболической инволюции сопряженных точек, устанавливаемой гиперболой на несобственной прямой (см. § 59). Центр гиперболы есть внешняя точка по отношению к кривой, поэтому инволюция сопряженных диаметров имеет две двойные прямые, касательные к гиперболе из ее центра (черт. 236, *в*). Последние, как уже было упомянуто, называются асимптотами гиперболы. Таким образом, асимптоты являются двойными прямыми инволюции сопряженных диаметров гиперболы (ср. с черт. 212).

Парабола касается несобственной прямой и определяет на ней параболическую инволюцию сопряженных точек. Центром параболы служит точка ее прикосновения к несобственной прямой. Отсюда следует, во-первых, что все диаметры параболы параллельны и, во-вторых, что пучок диаметров образует параболическую инволюцию, в которой все диаметры сопряжены несобственной прямой (касательной в центре пучка; ср. с черт. 215).

Эллипс не имеет общих точек с несобственной прямой и определяет на последней эллиптичесую инволюцию. Центр эллипса является внутренней точкой по отношению к кривой. Поэтому сопряженные диаметры эллипса образуют эллиптическую инволюцию, не имеющую действительных двойных прямых (или имеющую пару мнимых двойных прямых; ср. с черт. 216).

Самые названия инволюционных соответствий в формах первой ступени гиперболические (при двух действительных двойных элементах), параболические (при двух совпавших двойных элементах) и эллиптические (при двух мнимых двойных элементах) происходят от тех инволюций, которые связаны, как мы видели выше, с гиперболой, параболой и эллипсом.

На этом мы заканчиваем краткий обзор аффинных свойств кривых второго порядка.

§ 70. Метрическая геометрия и ее группа.

1. Аффинная подгруппа коллинеаций была выделена как часть группы всех коллинеаций при помощи условия инвариантности параллелизма, т. е. преобразования несобственной прямой в себя.

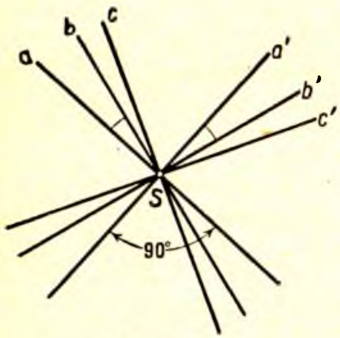
Однако аффинные преобразования не сохраняют форму фигуры. Так, квадрат переходит в аффинном преобразовании в параллелограмм, круг — в эллипс. Таким образом, аффинная геометрия не выделяет квадрата из параллелограммов и окружности из эллипсов. Это различие устанавливается в метрической геометрии. Для определения группы преобразований метрической геометрии потребуем от аффинного преобразования инвариантности перпендикулярного положения двух прямых.

Пусть прямым a, b, c, ... пучка S соответствуют перпендикулярные к ним прямые a', b', c', ... того же пучка S (черт. 238). Таким образом, имеем:

$$a \perp a', \quad b \perp b', \quad c \perp c' \ldots .$$

Посмотрим, какими свойствами обладает такое соответствие перпендикулярных прямых пучка S.

Так как прямые a', b' соответственно перпендикулярны прямым a, b, то угол (a', b') равен углу (a, b). Следовательно, углы, образованные соответственными прямыми, всегда равны. Два пучка прямых, обладающие этим свойством, называются *конгруентными*. Очевидно, что конгруентные пучки проективны. В самом деле, сложные отношения соответственных прямых таких пучков равны, так как они выражаются через синус углов, образованных этими прямыми. По этой причине соответствие перпендикулярных прямых в пучке S является проективным. Кроме того, каждая пара перпендикулярных прямых соответствует взаимно. Так, например, если прямой a соответствует (перпендикулярная к ней) прямая a', то и, обратно, прямой a' соответствует (перпендикулярная к ней) прямая a. Отсюда заключаем, что соответствие перпендикулярных прямых в пучке S представляет собой инволюцию. Последняя называется *ортогональной инволюцией*. Ортогональная инволюция не имеет двойных прямых, так как прямая не может совпадать с перпендикулярной к ней прямой. Это эллиптическая инволюция прямых пучка.



Черт. 238.

Найдем сечение пучка S несобственной прямой. Получим ряд точек, перспективный пучку S. Инволюция прямых пучка S будет соответствовать инволюции точек перспективного ряда на несобственной прямой. Обозначая несобственные точки прямых a, b, ... пучка S буквами A_∞, B_∞, ..., а несобственные точки перпендикулярных к ним прямых a', b', ... того же пучка буквами A'_∞, B'_∞, получим инволюцию на несобственной прямой. В этой инволюции точкам A_∞, B_∞,... соответствуют точки A'_∞, B'_∞... (черт. 239).

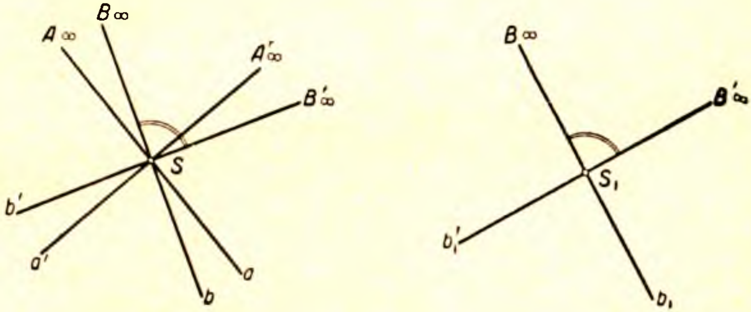
Такая инволюция точек несобственной прямой называется *абсолютной инволюцией*.

Абсолютная инволюция является сечением ортогональной инволюции прямых пучка. При этом выбор центра пучка не имеет никакого значения, так как ортогональная инволюция прямых пучка S_1 определяет на несобственной прямой ту же самую инволюцию, что и ортогональная инволюция пучка S. Это ясно из того, что каждой паре перпендикулярных прямых b_1 и b_1' пучка S_1 соответствует пара перпендикулярных прямых b и b' пучка S, причем

$$b \parallel b_1 \quad \text{и} \quad b' \parallel b_1'.$$

Поэтому пара прямых b_1, b_1' определяет на несобственной прямой ту же самую пару точек B_∞ и B'_∞ абсолютной инволюции, что и пара прямых $b \parallel b'$.

Абсолютная инволюция является, очевидно, эллиптической и не имеет действительных двойных точек.



Черт. 239.

Установив понятие абсолютной инволюции точек несобственной прямой, мы можем дать проективное определение перпендикулярности прямых:

Две прямые называются перпендикулярными, если их несобственные точки представляют собою пару соответственных точек абсолютной инволюции.

В самом деле, если несобственные точки B_∞ и B'_∞ двух каких-либо прямых b_1 и b_1' являются соответственными в абсолютной инволюции, то это означает, что через точки B_∞ и B'_∞ проходит пара перпендикулярных прямых ортогональной инволюции. Пусть это будут прямые b и b'. Тогда имеем:

$$b_1 \parallel b \quad \text{и} \quad b_1' \parallel b'.$$

А так как $b \perp b'$, то и $b_1 \perp b_1'$. Обратно, как мы уже видели, каждая пара перпендикулярных прямых ($b_1 \perp b_1'$) пересекает несобственную прямую в соответственных точках (B_∞, B'_∞) абсолютной инволюции.

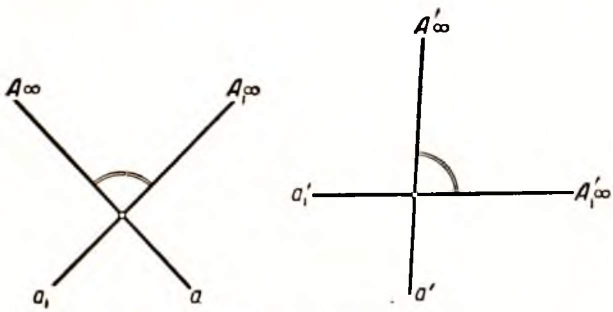
2. Таким образом, проективное определение перпендикулярности прямых связано с абсолютной инволюцией на несобственной прямой. Несобственная прямая и абсолютная инволюция на ней называются а б с о л ю т о м   п л о с к о с т и. Мы пришли к этому понятию, занимаясь разысканием проективного определения перпендикулярности прямых, но, как увидим далее, с понятием абсолюта связаны также и другие метрические свойства фигур. Поэтому, если нужно выделить такие коллинеации, которые не нарушают метрических свойств фигур, то необходимо выставить требование, чтобы *эти коллинеации оставляли неизменным абсолют плоскости*.

Это значит, что мы выделяем те коллинеации, которые не только преобразуют несобственную прямую в себя (этому требованию удовлетворяют все коллинеации аффинной группы), но также преобразуют абсолютную инволюцию в себя, т. е. пару соответственных точек этой инволюции переводят в пару также соответственных точек ее. Покажем, что совокупность таких коллинеаций образует группу. Мы будем обозначать эту группу через $\{\mathbf{M}\}$, а каждую коллинеацию в отдельности — через $\mathbf{M}$.

В самом деле, коллинеации $\mathbf{M}$ удовлетворяют требованиям, сформулированным в § 67. Если $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{M}''$ — две какие-либо коллинеации совокупности $\{\mathbf{M}\}$, то, как нетрудно убедиться, их произведение представляет собой коллинеацию той же совокупности. Так, коллинеация $\mathbf{M}'$ оставляет абсолют плоскости неизменным. Точно так же не изменяет его и коллинеация $\mathbf{M}''$. В результате последовательного выполнения коллинеаций $\mathbf{M}'$ и $\mathbf{M}''$ мы получим коллинеацию, сохраняющую абсолют плоскости неизменным. Поэтому можем написать:

$$\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'' = \mathbf{M}'''.$$

Что же касается других требований, предъявляемых к совокупности преобразований, если они представляют собой группу, то рассуждения, совершенно идентичные тем, которые были

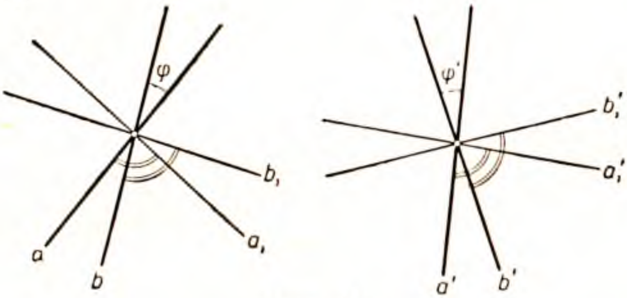


Черт. 240.

приведены по поводу группы всех коллинеаций (§ 67), показывают, что совокупность преобразований $\{\mathbf{M}\}$ удовлетворяет и этим требованиям.

Таким образом, приходим к выводу, что совокупность коллинеаций $\{\mathbf{M}\}$, не изменяющих абсолюта плоскости, образует группу.

3. Из предыдущего ясно, что метрические коллинеации сохраняют перпендикулярность двух прямых. Так, если имеем пару перпендикулярных прямых $(a \perp a_1)$, то несобственные точки этих прямых A_∞ и $A_{1\infty}$ представляют собой пару соответственных точек абсолютной инволюции (черт. 240). Коллинеация $\mathbf{M}$ переводит пару точек A_∞, $A_{1\infty}$ в пару соответственных точек A'_∞, $A'_{1\infty}$ абсолютной инволюции. Поэтому прямые a' и a_1', соответственные прямым a и a_1', должны быть перпендикулярными как проходящие через пару соответственных точек A'_∞, $A'_{1\infty}$ абсолютной инволюции.



Черт. 241.

Однако это свойство еще не вполне характеризует группу $\{\mathbf{M}\}$. Мы покажем, что *всякая коллинеация* $\mathbf{M}$ *сохраняет угол, образованный двумя прямыми без изменения.*

Предположим, что прямые a и b образуют острый угол φ (черт. 241). Проведем через вершину угла φ прямые a_1 и b_1, соответственно перпендикулярные к прямым a и b. Следовательно,

$$a_1 \perp a, \qquad\qquad b_1 \perp b.$$

Коллинеация $\mathbf{M}$ переводит четверку прямых a, b, a_1, b_1 в четверку соответственных прямых a', b', a_1', b_1'. Так как коллинеация $\mathbf{M}$ не нарушает перпендикулярности прямых, будем иметь:

$$a_1' \perp a', \qquad\qquad b_1' \perp b'.$$

Найдем сложное отношение четверки прямых a, b, a_1, b_1:

$$(aba_1b_1) = \frac{\sin(a,\ a_1) \cdot \sin(b,\ b_1)}{\sin(b,\ a_1) \cdot \sin(a,\ b_1)} = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}.$$

Аналогично для четверки прямых a', b', a_1', b_1' будем иметь:

$$(a'b'a_1'b_1') = \frac{1}{\cos^2\varphi'}.$$

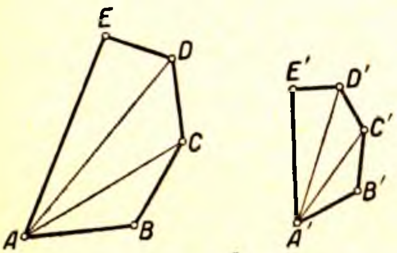
Но коллинеации не нарушают сложного отношения, поэтому должно быть:

$$(aba_1b_1) = (a'b'a'_1b'_1),$$

или

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi'}.$$

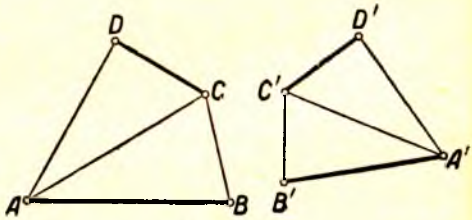
Заметим, что через φ мы обозначили острый угол прямых a и b. Последний можно определить как такой угол, который не содержит перпендикуляров a_1, b_1. Ему соответствует по коллинеации угол φ', который также не содержит перпендикуляров a'_1, b'_1. Поэтому соответственный угол φ' также острый. В таком случае из предыдущего равенства имеем:



Черт. 242.

$$\cos\varphi = \cos\varphi'; \quad \varphi = \varphi'.$$

Из доказанной теоремы заключаем, что произвольный треугольник ABC преобразуется коллинеацией **M** в подобный ему треугольник $A'B'C'$. Вообще всякая фигура Ф переходит в подобную ей фигуру Ф′. Это прежде всего может быть обнаружено для многоугольников (черт. 242), так как каждый многоугольник $ABCDE$ может быть разбит на треугольники. Следовательно, соответственный многоугольник $A'B'C'D'E'$ разобьется на подобные треугольники, откуда вытекает подобие самих многоугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$. Затем можно убедиться в том, что вообще отношение двух соответственных отрезков всегда постоянно.



Черт. 243.

Предположим, что двум произвольно взятым отрезкам AB и CD соответствуют в коллинеации **M** отрезки $A'B'$ и $C'D'$ (черт. 243). Тогда четырехугольник $A'B'C'D'$ подобен четырехугольнику $ABCD$, так как эти четырехугольники состоят из двух пар подобных треугольников. Поэтому имеем:

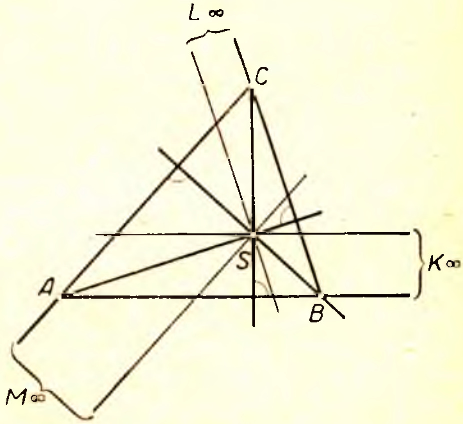
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = k.$$

Таким образом, отношение двух соответственных отрезков постоянно. Это показывает, что коллинеация **M** является преобразованием подобия[1]. На этом основании группу метрических коллинеаций $\{\mathbf{M}\}$ называют также группой подобия.

4. Нашей ближайшей задачей будет дальнейшее изучение основных понятий метрической геометрии с проективной точки зрения, что позволит установить инвариантность этих понятий по отношению к группе коллинеаций $\{\mathbf{M}\}$.

В качестве примера применения проективного определения перпендикулярности прямых приведем следующее доказательство теоремы о том, что *три высоты треугольника пересекаются в одной точке*.

Вторая теорема Дезарга (двойственная) гласит, что *три пары противоположных вершин полного четырехугольника проектируются из произвольной точки S плоскости тремя парами прямых, принадлежащих одной и той же инволюции* (§ 33). Применим эту теорему к четырехсторонику, образованному следующими прямыми: тремя сторонами данного треугольника ABC и несобственной прямой.



Черт. 244.

Точку S поместим в точке пересечения двух высот треугольника ABC (черт. 244):

$$S = AS \times BS.$$

Докажем, что и третья высота CS пройдет через точку S.

Противоположными вершинами нашего четырехсторонника будут пары точек:

$$A \text{ и } L_\infty, \quad B \text{ и } M_\infty, \quad C \text{ и } K_\infty.$$

Тогда получим следующие пары соответственных прямых инволюции:

$$SA, \ SL_\infty; \ \ SB, SM_\infty; SC, SK_\infty.$$

Из чертежа видно, что первые две пары ортогональны ($SA \perp SL_\infty$, $SB \perp SM_\infty$). Следовательно, инволюция прямых пучка S есть ортогональная инволюция. Поэтому и третья пара ортогональна, т. е.

$$SC \perp SK_\infty$$

(ч. т. д.).

[1] Коллинеации **M** называют также эквиформными, т. е. не изменяющими формы фигур.

§ 71. Учение о конгруентности фигур с проективной точки зрения. Группы движений.

1. Как будет показано в настоящем параграфе, учение о конгруентности фигур в обыкновенной метрической геометрии может быть построено в проективной форме. А это в свою очередь позволит установить, что понятие конгруентности фигур является инвариантным в отношении некоторой группы коллинеаций, которые называются *движениями*.

Рассмотрим прежде всего учение о конгруентности фигур, как оно обыкновенно развивается в элементарной геометрии. Геометрические фигуры рассматриваются как неизменяемые системы, которые могут занимать различные положения на плоскости. Переход от одного положения фигуры к другому ее положению называется движением. Предположим, что движение переводит данную плоскую фигуру F в новое положение F'. В таком случае говорят, что фигура F может быть совмещена с фигурой F', или еще иначе, фигура F накладывается на фигуру F'[1]. Такие две фигуры F и F' называются конгруентными.

Так как две конгруентные фигуры с этой точки зрения представляют собой лишь два различных положения одной и той же неизменяемой (жесткой) системы, то каждой точке A фигуры F соответствует точка A' фигуры F'. Эти точки A и A' приходят в совпадение при совмещении фигур F и F'. Отсюда ясно, что учение о конгруентности фигур можно рассматривать как учение о взаимно однозначных соответствиях их элементов, обладающих определенными свойствами.

Движения можно рассматривать как геометрические преобразования, переводящие фигуру F в конгруентную ей фигуру F'[2]. С другой стороны, если мы установим, какие преобразования плоского поля в себя являются движениями, то можем само понятие конгруентности определить при помощи этих преобразований — движений.

Принимая такой план построения учения о конгруентности, мы должны: 1) выделить те движения (геометрические преобразования), которые необходимы и достаточны для перемещения произвольно заданной плоской фигуры в любое новое положение на плоскости; 2) дать этим преобразованиям проективное истолкование и 3) построить учение о конгруентности фигур в проективной форме, отнеся его к определенной группе коллинеаций.

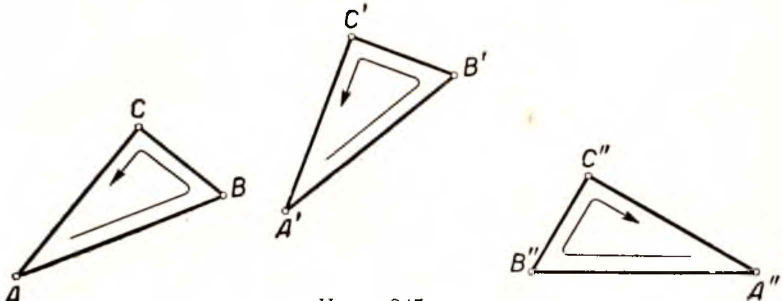
Для реализации этого плана надо прежде всего изучить вопрос о конгруентности фигур в обыкновенной (евклидовой) геометрии на плоскости.

2. Предположим, что имеются два конгруентных треугольника ABC и $A'B'C'$ (черт. 245). Из конгруентности этих треугольни-

[1] При помощи обратного движения фигура F' может быть совмещена с фигурой F.

[2] Такие преобразования называются также «ортогональными».

ков следует конгруентность их соответственных сторон и углов. Кроме того, треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковые обходы. Будем называть положительным такой обход сторон треугольника, при котором площадь его расположена по левую сторону от направления движения (иначе говоря, обход против стрелки часов). Таким именно свойством обладает обход ABC первого треугольника. Тем же свойством обладает и соответственный обход $A'B'C'$ конгруентного ему второго треугольника. Оба эти треугольника имеют одинаковые (положительные) обходы (на черт. 245 обходы показаны стрелками). Иначе будет обстоять дело,



Черт. 245.

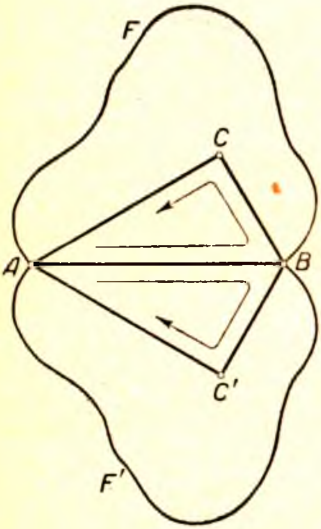
если мы рассмотрим треугольник $A''B''C''$ (черт. 245), также конгруентный треугольнику ABC. Хотя все соответственные элементы (стороны и углы) этих треугольников равны, но обходы их противоположны. В самом деле, положительному обходу ABC первого треугольника соответствует отрицательный обход $A''B''C''$ второго (при обходе сторон треугольника в порядке $A''B''C''$ площадь его расположена справа от направления движения).

Говорят также, что треугольники ABC и $A''B''C''$ различно ориентированы, в то время как треугольники ABC и $A'B'C'$ одинаково ориентированы. Таким образом, две конгруентные фигуры могут быть одинаково или различно ориентированными на плоскости. Это обстоятельство необходимо учитывать при рассмотрении движений, совмещающих одну из двух конгруентных фигур с другой.

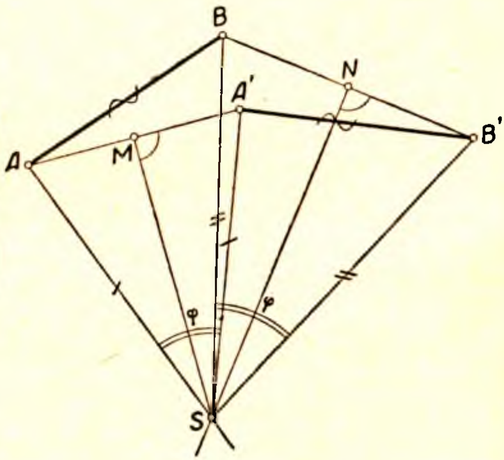
Предположим, что две точки A и B произвольной плоской фигуры F закреплены. В таком случае сама фигура F может занимать одно из двух возможных положений (F и F' на черт. 246).

В самом деле, если C — какая-нибудь точка фигуры F, отличная от точек A и B, то треугольник ABC может занимать два различных положения на плоскости, симметричных относительно прямой AB (треугольники ABC и ABC'). То же самое, очевидно, может быть сказано относительно всякой точки фигуры F. Отсюда заключаем, что фигура F, две точки которой A и B фиксированы на плоскости, может занимать лишь два различных положения F и F', симметричных относительно прямой AB. Эти два положения отличаются, как это видно из чертежа, направлением обхода (треугольники ABC и ABC'), поэтому фигуры F и F' являются различно ориентированными.

Если же имеют в виду фигуру F с определенной ориентацией, то положение такой фигуры на плоскости однозначно определяется заданием двух каких-либо ее точек.



Черт. 246.



Черт. 247.

Докажем теперь следующую теорему[1]:

Две конгруентные фигуры, расположенные в одной плоскости, могут быть приведены в совпадение либо с помощью одного вращения (с собственным или несобственным центром), *либо с помощью вращения и отражения.*

Как мы видели, положение пары точек какой-либо фигуры определяет два возможных положения самой фигуры, из которых одно симметрично другому.

Поэтому мы можем заменить каждую фигуру парой точек или отрезком, концы которого принадлежат этой фигуре. Так, на чертеже 247 первая из конгруентных фигур изображена отрезком AB, а вторая — соответственным отрезком $A'B'$.

Проведем прямые AA' и BB'. В серединах M и N отрезков AA' и BB' построим перпендикуляры MS и NS к последним. Обозначим через S точку пересечения указанных перпендикуляров. Те-

[1] Эта теорема в несколько иной формулировке известна в кинематике под названием теоремы Шаля — Эйлера.

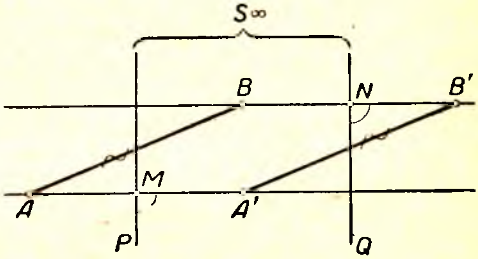
перь нетрудно убедиться в том, что в р а щ е н и е вокруг центра S на угол $\varphi = \angle ASA' = \angle BSB'$ переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$. В самом деле, треугольники SAB и $SA'B'$ конгруентны, так как $SA = SA'$; $SB = SB'$ и $AB = A'B'$. Из равенства треугольников получаем:

$$\angle ASB = \angle A'SB'.$$

Прибавляя к каждому из этих углов угол BSA', будем иметь:

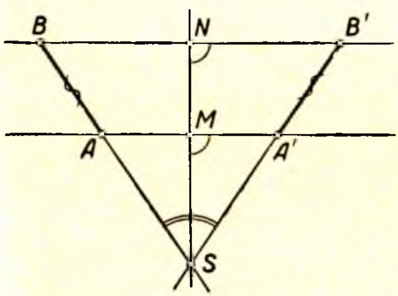
$$\angle ASA' = \angle BSB' = \varphi.$$

Поворот на этот угол вокруг точки S переводит точку A в точку A' и точку B в точку B'. Следовательно, отрезок AB переходит при таком повороте в отрезок $A'B'$.



Черт. 248.

Приведенное здесь рассуждение было бы невозможно, если бы перпендикуляры MS и NS оказались параллельными или сливающимися. Разберем этот случай (черт. 248 и 249). Если $MP \parallel NQ$, то $AA' \parallel BB'$. Но это значит, что конгруентные отрезки AB и $A'B'$ могут иметь либо параллельное расположение (как на черт. 248), либо симметричное расположение (как на черт. 249), образуя в первом случае параллелограмм, а во втором случае равнобедренную трапецию. В последнем случае оба перпендикуляра в точках M и N сливаются, и каждую точку прямой MN можно рассматривать как общую точку этих перпендикуляров. В качестве центра вращения S выбираем точку пересечения прямых AB и $A'B'$:



Черт. 249.

$$S = AB \times A'B'.$$

Точка S, очевидно, лежит на прямой MN. Значит, ее можно рассматривать как точку пересечения совпавших перпендикуляров MN. Поворот отрезка AB вокруг центра S на угол $ASA' = \varphi$ переводит его в отрезок $A'B'$.

В случае, когда отрезки AB и $A'B'$ п а р а л л е л ь н ы (черт. 248), они могут быть совмещены при помощи п а р а л л е л ь н о г о п е р е н о с а, определяемого вектором $\overrightarrow{AA'}$. Заметим, что при введении несобственных элементов параллельные перпендикуляры MP и NQ можно рассматривать как пересекающиеся в несобственной точке

S_∞. Такая точка зрения позволяет и случай параллельного переноса трактовать как вращение с несобственным центром S_∞. Далее, при переходе к проективной форме преобразований мы будем иметь все основания для этого.

Таким образом, при помощи вращения с собственным или несобственным центром (параллельного переноса) мы можем совместить отрезок AB с отрезком $A'B'$. После этого фигуры F и F' окажутся либо совпавшими, либо симметричными относительно прямой $A'B'$. В последнем случае отражение (осевая симметрия) относительно прямой $A'B'$ приводит фигуру F в совпадение с фигурой F'. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы прямо следует, что для обоснования учения о конгруентности фигур на плоскости с проективной точки зрения должны быть проанализированы геометрические преобразования, соответствующие вращениям и параллельным переносам фигур, а также их отражениям или осевым симметриям. В дальнейшем будет показано, что все указанные преобразования могут быть сведены к одному последнему, т. е. отражению. Поэтому мы начнем рассмотрение движений с отражения, которое будем мыслить как некоторое проективное преобразование (коллинеацию) плоского поля в себя.

3. Отражение, или осевая симметрия (черт. 250). Мы уже неоднократно встречались с этим преобразованием; отнесем его к аффинным гомологиям (§ 51) или перспективно-аффинным преобразованиям. Центр S_∞ этой гомологии является несобственной точкой всех проектирующих прямых AA', BB', CC', ..., перпендикулярных оси s гомологии. Припоминая проективное определение перпендикулярности (§ 70), можем сказать, что центр S_∞ гомологии в случае осевой симметрии соответствует в абсолютной инволюции несобственной точке S^*_∞ оси гомологии s (являющейся также и осью симметрии). Таким образом, осевая симметрия (отражение) получает свое проективное определение:

Отражение есть аффинная гомология, несобственный центр которой соответствует в абсолютной инволюции несобственной точке оси гомологии.

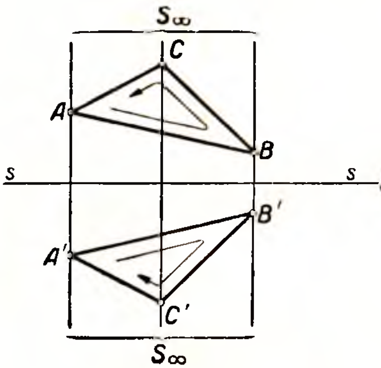
Как несобственный центр S_∞ осевой симметрии, так и несобственная точка S^*_∞ ее оси s являются двойными точками несобственной прямой. Остальные точки последней меняют свои места на ней (оставаясь, конечно, на несобственной прямой). При этом, однако, следует отметить важное свойство осевой симметрии: *она переводит каждую пару соответственных точек абсолютной инволюции в пару соответственных точек той же инволюции.* Или, короче, *осевая симметрия преобразует абсолютную инволюцию в себя.*

Это свойство легко проверить. Пару соответственных точек абсолютной инволюции A_∞, B_∞ определим при помощи проходящих через них прямых MA и MB (черт. 251). Если мы потребуем, чтобы прямые MA и MB были перпендикулярны, то их несобственные точки представят собой пару соответственных точек абсолютной инволюции. Отражение преобразует прямые MA и MB соответственно в прямые $M'A$ и $M'B$, причем очевидно:

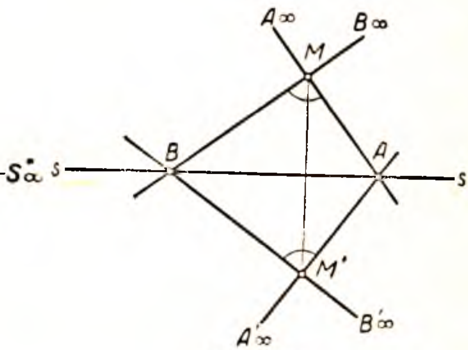
$$M'A \perp M'B.$$

Точке A_∞ прямой MA соответствует в отражении точка A'_∞ прямой $M'A$; точке B_∞ прямой MB соответствует в отражении точка B'_∞ прямой $M'B$. При этом точки A'_∞ и B'_∞ являются соответственными в абсолютной инволюции. Таким образом, пары точек абсолютной инволюции переходят в пары той же инволюции.

Это свойство отражений показывает, что отражения должны быть отнесены к числу коллинеаций, составляющих группу $\{\mathbf{M}\}$.



Черт. 250.



Черт. 251.

Остановимся еще на другом важном свойстве отражений. Как видно из чертежа 250, треугольник ABC переходит после отражения в треугольник $A'B'C'$. При этом направление обхода изменилось на противоположное (положительный обход треугольника ABC перешел в отрицательный обход треугольника $A'B'C'$). Следовательно:

Отражение изменяет ориентацию фигуры на противоположную.

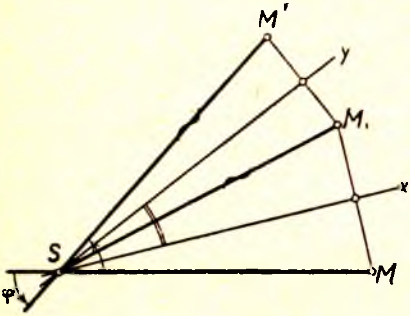
Изучив основные свойства отражения и его проективное истолкование как коллинеации группы $\{\mathbf{M}\}$, переходим к рассмотрению вращения.

4. В р а щ е н и е (с собственным центром). В элементарной геометрии вращение определяется как такое преобразование плоского поля в себя, при котором радиусы-векторы всех точек, проведенные из точки S (центра вращения), поворачиваются на определенный угол φ (заданный по величине и направлению).

Докажем следующую т е о р е м у:

Всякое вращение можно представить как произведение двух отражений, причем осью одного отражения может служить произвольная прямая, проходящая через центр вращения.

Доказательство. Предположим, что вращение задано центром S и углом поворота $\varphi = MSM'$. Пусть прямая x, проходящая через точку S, должна служить осью одного отражения (черт. 252). Отметим произвольную точку M плоскости и произведем преобразование отражения с осью x. Обозначим M_1 точку, в которую перейдет при этом отражении точка M, и через M' — точку, в которую перейдет точка M при заданном вращении. Проведем через точку S прямую y, перпендикулярную к прямой M_1M', и примем ее за ось второго отражения. Так как треугольник M_1SM' равнобедренный, то его высота y служит одновременно его медианой и биссектрисой. Отсюда заключаем, что отражение с осью y переведет точку M_1 в точку M'. Таким образом, два последовательных отражения с осями x и y переводят точку M в точку M'. Однако, чтобы убедиться в том, что упомянутые два отражения заменяют данное вращение, надо показать, что и вторая ось y остается постоянной, какую бы точку M плоскости мы ни подвергли вращению.



Черт. 252.

Фиксируем ось x первого отражения. Тогда угол, образованный осями y и x, оказывается постоянным и выражается через угол поворота следующим образом:

$$\angle (x, y) = \angle xSM_1 + \angle M_1Sy =$$
$$= \angle \frac{MSM_1}{2} + \angle \frac{M_1SM'}{2} = \angle \frac{MSM'}{2} = \frac{\varphi}{2} = \text{const}.$$

Отсюда заключаем, что ось y остается постоянной для всех точек плоскости. Следовательно, данное вращение может быть заменено двумя отражениями, причем осью одного из них служит ранее выбранная прямая x. Полученный результат изобразим следующим символическим равенством:

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y,$$

где буквой V обозначено вращение, а буквами S_x и S_y — отражения, соответственно с осями x и y.

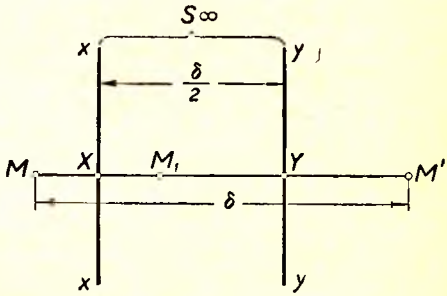
Переходим к рассмотрению параллельного переноса.

5. Параллельный перенос, или вращение с несобственным центром. Под параллельным переносом разумеют такое преобразование плоского поля, когда все его точки получают параллельные перемещения на одно и то же расстояние. Смещение точек вполне определяется вектором $\overrightarrow{MM'}$, который называется вектором параллельного переноса.

Докажем теорему:

Параллельный перенос всегда можно представить как произведение двух отражений, оси которых перпендикулярны к направлению вектора переноса, причем одна из этих осей может быть выбрана произвольно.

Доказательство. Предположим, что параллельный перенос определяется вектором $\overrightarrow{MM'}$. Выберем произвольную прямую x, перпендикулярную к прямой MM', в качестве оси первого отражения (черт. 253). Обозначим через M_1 точку, в которую переходит точка M при первом отражении. Осью второго отражения будет служить прямая y, перпендикулярная к прямой MM' и проходящая через середину отрезка M_1M'. Тогда отражение S_x переводит точку M в точку M_1, а отражение S_y переводит точку M_1 в точку M'. Покажем, что оси x и y первого и второго отражений остаются постоянными для всех точек плоского поля. С этой целью фиксируем положение оси x первого отражения и докажем, что положение оси y второго отражения не зависит от выбора точки M[1]. Определяя расстояние XY оси y от оси x, будем иметь:



Черт. 253.

$$XY = \frac{MM_1}{2} + \frac{M_1M'}{2} = \frac{MM'}{2} = \frac{\delta}{2} = \text{const}.$$

Отсюда ясно, что вторая ось y постоянна для всех точек плоского поля и два отражения с осями x и y эквивалентны параллельному переносу $\overrightarrow{MM'}$.

Таким образом, параллельный перенос можно определить как преобразование, представляющее собой результат двух отражений с параллельными осями (x и y). Но совершенно так же выражается, как мы видели, вращение плоского поля вокруг центра **S**, который является точкой пересечения осей x и y составляющих отражений.

В случае параллельного переноса мы имеем несобственную точку пересечения осей отражений, которую обозначим буквой S_∞. С точки зрения проективной геометрии мы не имеем здесь различных преобразований. Поэтому мы вправе отнести преобразование параллельного переноса к числу вращений, обозначая его как $\mathbf{V}_\infty$ (вращение с несобственным центром):

$$\mathbf{V}_\infty = \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y.$$

[1] Но, конечно, положение оси отражения y зависит от выбора оси x.

С другой стороны, в § 51 мы рассматривали параллельный перенос как аффинную гомологию с несобственным центром и несобственной осью. Ясно, что несобственный центр этой гомологии определяется направлением вектора переноса $\overrightarrow{MM'}$, в то время как несобственный центр вращения $\mathbf{S}_\infty$ определяется направлением, перпендикулярным вектору $\overrightarrow{MM'}$. Отсюда заключаем, что в случае параллельного переноса *несобственный центр вращения* S_∞ *соответствует в абсолютной инволюции несобственному центру гомологии* S^*_∞. Это замечание будет нам полезно в дальнейшем.

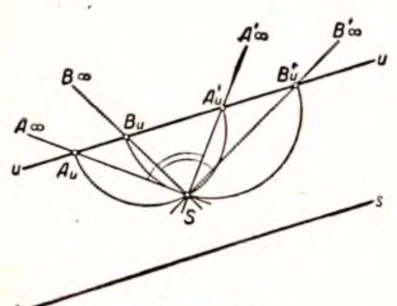
Отметим следующее важное свойство вращений (с собственным или несобственным центром).

Вращение не изменяет ориентации фигуры на плоскости.

В самом деле, вращение может быть представлено как произведение двух отражений. Так как каждое отражение изменяет ориентацию фигуры на противоположную, то их произведение оставляет ориентацию фигуры такой же, какой она была до преобразования.

Теперь ясно, что если на плоскости имеем две конгруентные фигуры с одинаковой ориентацией, то они могут быть совмещены одним вращением (с собственным или несобственным центром). Если же конгруентные фигуры имеют различную ориентацию, они могут быть совмещены при помощи вращения и отражения. Это дополнение уточняет формулировку вышеприведенной теоремы Шаля — Эйлера.

6. Из предыдущего видно, что для обоснования учения о конгруентности можно воспользоваться д в и ж е н и я м и, т. е. преобразованиями, приводящими в совпадение конгруентные фигуры. Такими преобразованиями являются вращения (с собственными и несобственными центрами) и отражения. В конечном счете, как было показано, все эти преобразования сводятся к отражениям. Но отражения являются коллинеациями специального вида, входящими в группу $\{\mathbf{M}\}$. Таким образом, учение о конгруентности фигур в обыкновенной евклидовой геометрии получает свое и с т о л к о в а н и е с проективной точки зрения. Это позволяет п о с т р о и т ь учение о конгруентности на проективной плоскости в общем виде.



Черт. 254.

Предположим, что произвольная прямая u выбрана в качестве «несобственной» (черт. 254). Пусть на этой прямой задана некоторая эллиптическая инволюция, играющая роль «абсолютной инволюции». Обозначим буквами A_u, A'_u и B_u, B'_u две пары соответственных точек этой инволюции. Как нетрудно убедиться, можно с помощью коллинеарного преобразования плоского поля перевести прямую u в несобственную прямую плоскости, а эллиптическую инволюцию (A_u, A'_u), (B_u, B'_u) —в абсолютную инволюцию на ней. В самом деле, построим на отрезках $A_u A'_u$ и $B_u B'_u$ как на диаметрах два круга и обозначим одну из точек их пересечения буквой S[1]. Тогда любая гомология с центром S, переводящая прямую u в несобственную прямую, преобразует также данную эллиптическую инволюцию в абсолютную. Это следует из того, что согласно построению точки S будем иметь:

$$SA_u \perp SA'_u \quad \text{и} \quad SB_u \perp SB'_u.$$

Поэтому пары A_u, A'_u и B_u, B'_u эллиптической инволюции гомология преобразует в пары A_∞, A'_∞ и B_∞, B'_∞ абсолютной инволюции.

Заметим кстати, что центром гомологии S нам послужила одна из двух таких точек плоскости, из которых данная эллиптическая инволюция проектируется ортогональной инволюцией (или, иначе, видна под прямым углом). Точки, обладающие этим свойством, называются точками Лагерра (Laguerre). Для полного определения гомологии достаточно задать ось гомологии s, которой может быть любая прямая, параллельная прямой u (так как она должна проходить через точку пересечения прямой u с соответствующей ей несобственной прямой).

7. Итак, для осуществления проективной картины метрической геометрии мы будем предполагать заданным «абсолют» плоскости в следующем виде.

Дана «несобственная» прямая u и на ней «абсолютная» инволюция (черт. 255). Мы уже знаем, что для этой цели может служить произвольная прямая плоскости и заданная на ней произвольная эллиптическая инволюция. Покажем, как в этой схеме будут осуществляться «отражения» и «вращения», а следовательно, и построение «конгруентных» фигур.

На чертеже 255 показано построение треугольника $A'B'C'$, соответственного данному треугольнику ABC в «отражении» с осью s. «Центром» S такого «отражения» должна, как мы знаем, служить «несобственная» точка, соответственная «несобственной» точке S_* оси «отражения» s в «абсолютной» инволюции на прямой u. Построив такую точку S (§ 33), мы проводим прямые SA, SC и SB и находим на них точки A', B' и C' как четвертые гармонические к тройкам:

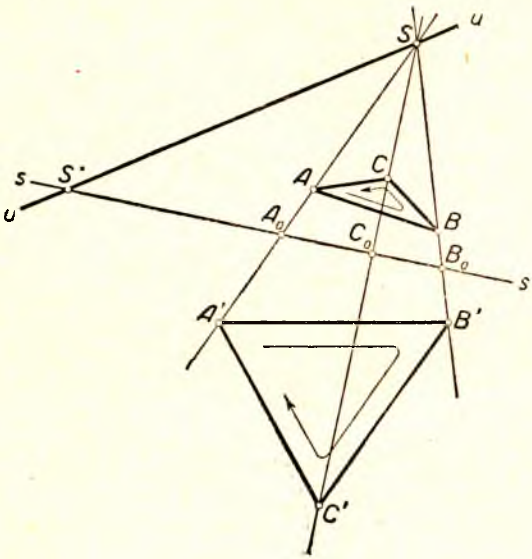
$$SA_0A, \quad SB_0B, \quad SC_0C.$$

Ясно, что при этих условиях прямые AA', BB' и CC' оказываются «перпендикулярными» к оси «отражения» s и соответствующие

---

[1] Рассматриваемые круги всегда пересекаются, так как $A_uA'_u \div B_u B'_u$.

отрезки делятся в точках A_0, B_0 и C_0 «пополам». «Отразив» треугольник ABC, мы получили «конгруентный» ему треугольник $A'B'C'$, но отличающийся своей ориентацией.



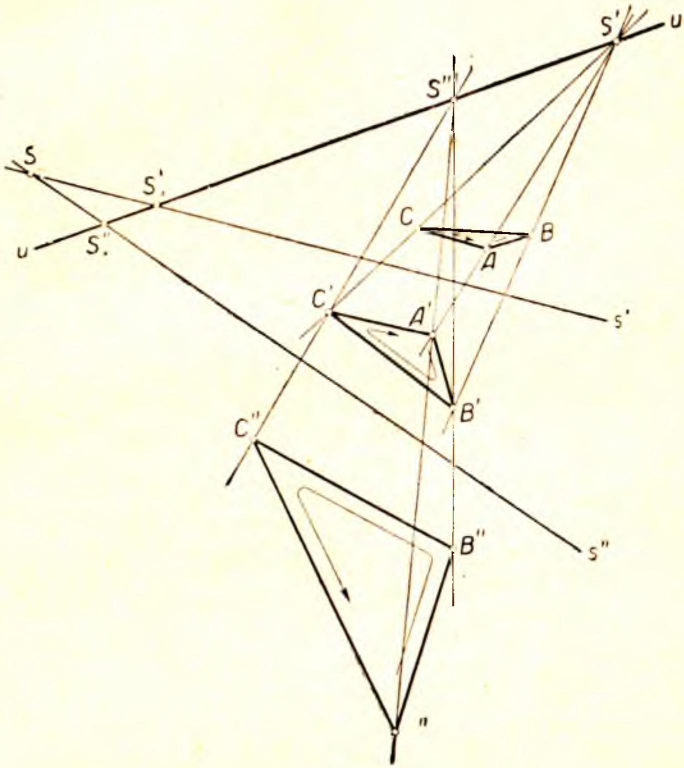
Черт. 255.

Заметим, что «отражение» является **инволюционной гомологией**. В самом деле, если точке A соответствует точка A', то и, обратно, точке A' соответствует точка A как четвертая гармоническая к тройке точек SA_0A'. Поэтому двукратное «отражение» приводит к тождеству. Чертеж 256 изображает «вращение» треугольника ABC «вокруг центра» S, состоящее из двух «отражений»: одного — с осью s' и другого — с осью s''. «Несобственные» точки осей S'_* и S''_* соответствуют центрам S' и S'' «отражений» в «абсолютной» инволюции на «несобственной» прямой u. Треугольники ABC, $A'B'C'$ и $A''B''C''$ с точки зрения «метрической геометрии», построенной на чертеже 256, являются «конгруентными», причем два из них (ABC и $A''B''C''$) одинаково ориентированы, а третий ($A'B'C'$) отличается от них своей ориентацией.

Нетрудно представить себе «параллельный перенос» как «вращение» с «несобственным» центром. В этом случае оси s' и s'' обоих «отражений» пересекаются в точке S «несобственной» прямой u. Таким образом, мы имеем частный случай «вращения», когда точки S'_* и S''_* совпадают с точкой S, а следовательно, совпадают и точки S'' и S'. Вследствие этого все построение упрощается.

Покажем, что «параллельный» перенос прямой линии преобразует последнюю в прямую, ей «параллельную».

Предположим, что «параллельный перенос» определяется двумя «отражениями» с осями s' и s'', пересекающимися в «несобственной»



Черт. 256.

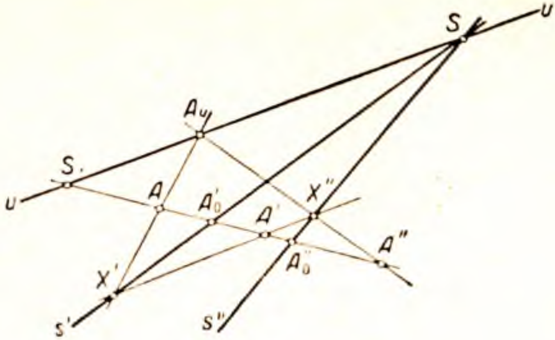
точке S (черт. 257). Посмотрим, какая прямая соответствует в этом «параллельном переносе» данной прямой AA_u. Выполняя первое «отражение» (с осью s'), мы строим точку S_*, соответствующую в «абсолютной» инволюции точке S. Прямая S_*A «перпендикулярна» к оси s'. Находим на прямой S_*A точку A' так, чтобы

$$(S_*A'_0\ AA') = -1.$$

Тогда точка A' является «отражением» точки A относительно прямой s'. Поэтому первое «отражение» переводит прямую AX' (AA_u) в прямую $A'X'$ $(A'X'')$.

Второе «отражение» (с осью s'') переводит точку A' в точку A'', причем

$$(S_*\ A''_0\ A'\ A'') = -1.$$



Черт. 257.

Следовательно, прямая $A'X''$ перейдет в прямую $A''X''$.

Докажем, что полученная прямая $A''X''$ «параллельна» данной прямой AA_u, т. е. проходит через «несобственную» точку A_u последней. Для доказательства рассмотрим два проективных пучка с центрами в точках X' и X''. Лучи X' (S_*, A'_0, A, A') образуют гармоническую четверку, точно так же лучи X'' (S_*, A''_0, A'', A') образуют гармоническую четверку. Поэтому можем считать их соответственными. В установленном соответствии пучков X' и X'' луч $X'X''$ сам себе соответствует ($X'A'$ соответствует $X''A'$). Следовательно, рассматриваемые пучки перспективны. Осью их перспективности служит «несобственная» прямая u, так как пары соответствующих лучей $X'S_*$ $X''S_*$ и X' A'_0, $X''A''_0$ пересекаются в точках S_* и S этой прямой. Отсюда заключаем, что соответственные лучи $X'A$ и $X''A''$ также должны пересекаться в точке, лежащей на «несобственной» прямой u, т. е. в точке A_u. Следовательно, прямая $A''X''$, в которую перешла данная прямая AA_u при «параллельном переносе», ей «параллельна» (ч. т. д.).

Таким образом, геометрические преобразования, необходимые для осуществления «движений» на плоскости, получили свое проективное определение.

Все они должны быть отнесены к числу коллинеаций группы $\{\mathbf{M}\}$ как не меняющие «абсолюта» плоскости.

8. Будем обозначать преобразование «вращения» (с «собственным» или «несобственным» центром) буквой **V**, а «отражение» — буквой **S**. Тогда, по определению, фигурой, «конгруентной» данной фигуре, называется такая, которая может быть получена из данной преобразованием **V** или преобразованием **V** · **S**. Мы знаем, что преобразования **V** не изменяют ориентации фигуры на плоскости, в то время как преобразования **V** · **S** изменяют ориентацию фигуры. Поэтому преобразования **V** называют также «движениями»

первого рода, а преобразования $\mathbf{V} \cdot \mathrm{S}$ — «движениями» второго рода.

Покажем, что *«движения» первого и второго рода образуют группу, являющуюся подгруппой группы метрических коллинеаций* $\{\mathbf{M}\}$.

Для этого достаточно убедиться, что совокупность всех «движений», т. е. преобразований $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$, удовлетворяет условиям, формулированным в § 67. Рассмотрим каждое из этих условий в отдельности, расположив их в несколько ином порядке.

1°. *Произведения преобразований совокупности удовлетворяют закону ассоциативности.*

Так как ассоциативный закон был показан в § 67 для произведений любых коллинеаций, то он остается в силе и для преобразований, которые мы назвали «движениями». Последние, как мы знаем, принадлежат к числу коллинеаций.

2°. *Среди преобразований совокупности содержится тождественное преобразование.*

Таким преобразованием является следующее:

$$\mathbf{V} = \mathrm{S} \cdot \mathrm{S} = \mathrm{S}^2 = 1.$$

В самом деле, как мы видели, двукратное отражение приводит к тождественному преобразованию.

3°. *Для каждого преобразования совокупности существует обратное ему преобразование, принадлежащее той же совокупности.*

Действительно, как мы знаем, преобразование, обратное отражению, является тем же самым отражением, т. е.

$$\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}; \quad \mathrm{S}^2 = 1.$$

Поэтому для преобразования вида $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ обратным будет преобразование

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}_1,$$

что легко проверяется, так как

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathrm{S}_1 \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1 \cdot \mathrm{S}_2^2 \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1 \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1^2 = 1.$$

Для преобразований вида $\mathbf{V} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}$ обратным является преобразование

$$\mathrm{S} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathrm{S} \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}_1.$$

В самом деле,

$$(\mathbf{V} \cdot \mathrm{S}) \cdot (\mathrm{S} \cdot \mathbf{V}^{-1}) = \mathrm{S}_1 \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{S} \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1 \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}^2 \cdot \mathrm{S}_2 \cdot \mathrm{S}_1 =$$
$$= \mathrm{S}_1 \cdot \mathrm{S}_2^2 \cdot \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_1^2 = 1$$

4°. *Произведение двух любых преобразований совокупности представляет собой преобразование той же совокупности.*

В этом легко убедиться, исходя из следующих соображений. Преобразования совокупности состоят либо из четного числа отражений ($\mathbf{V}=\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$), либо из нечетного числа отражений ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}$). Поэтому их произведения представят собой преобразования, также составленные из отражений в четном или нечетном числе. Покажем, что в первом случае эти преобразования являются «движениями» первого рода ($\mathbf{V}$), а во втором случае — «движениями» второго рода.

Для этого убедимся прежде всего в том, что произведение двух любых «вращений» является также «вращением».

Пусть $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ — два произвольных «вращения». Обозначим через S_1 и S_2 центры этих «вращений». «Отражение» с осью S_1S_2 обозначим буквой $\mathbf{S}$. Тогда данные «вращения» можно представить следующим образом (см. стр. 285):

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_2.$$

Оси «отражений» $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ легко определяются (см. стр. 286), причем ось «отражения» $\mathbf{S}_1$ находится из обратного преобразования $\mathbf{V}_1^{-1} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_1$. Составим произведение данных «вращений» $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Получим:

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \mathbf{V}_3,$$

т. е. некоторое «вращение». Теперь уже нетрудно доказать свойство 4° для двух любых «движений». В самом деле, как уже было сказано, произведение двух «движений» будет состоять из «отражений» в четном или нечетном числе. В первом случае можно разбить все преобразование на пары «отражений»:

$$(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2) \cdot (\mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4) \ldots (\mathbf{S}_{2n-1} \cdot \mathbf{S}_{2n}) = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{V}'' \ldots \mathbf{V}^{(n)} = \mathbf{V}.$$

Следовательно, в результате будем иметь «вращение» («движение» первого рода).

Во втором случае, кроме последовательных пар «отражений», имеем еще одно «отражение». Ясно, что этот случай приведет к следующему преобразованию:

$$\mathbf{V}' \cdot \mathbf{V}'' \ldots \mathbf{V}^{(n)} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S},$$

т. е. получим «движение» второго рода.

Так как все условия 1—4° выполняются для совокупности преобразований, которые мы называли «движениями», то эта совокупность образует группу. Будем называть ее группой «движений» $\{\mathbf{W}\}_0$.

9. При построении учения о «конгруентности» фигур мы должны были предварительно изучить геометрические преобразования, которые мы называли «движениями». Теперь мы можем ввести понятие «конгруентности» фигур как свойство, инвариантное по отношению ко всем «движениям».

Будем говорить, что фигура F является «конгруентной» фигуре F', если существует такое «движение», которое преобразует фигуру F в фигуру F'.

Из свойств преобразований, называющихся «движениями», можно заключить о свойствах понятия «конгруентности» фигур. Так, из того, что тождественное преобразование можно рассматривать как «движение», вытекает, что *каждая фигура сама себе конгруентна.*

Предположим, что фигура F «конгруентна» фигуре F'. Согласно определению это значит, что существует «движение», переводящее фигуру F в фигуру F'. Тогда, как мы видели, существует обратное «движение», переводящее фигуру F' в фигуру F. Следовательно, фигура F' также «конгруентна» фигуре F. Получаем известное свойство конгруентных фигур:

Если фигура F конгруентна фигуре F', то и F' конгруентна F.

Далее, пусть фигура F «конгруентна» фигуре F', а последняя «конгруентна» фигуре F''. В таком случае существуют «движения», переводящие фигуру F в F' и фигуру F' в F''. Произведение этих «движений» и переводит фигуру F в F''. Следовательно, фигуры F и F'' также «конгруентны». Получаем следующее свойство «конгруентных» фигур:

Если фигура F «конгруентна» фигуре F', а фигура F' «конгруентна» фигуре F'', то фигуры F и F'' также «конгруентны».

Таким образом, может быть построено учение о «конгруентности» фигур на плоскости как специальный раздел проективной геометрии, связанный с рассмотрением коллинеаций особого вида («движений»). Последние же в свою очередь связаны с «абсолютом» плоскости, т. е. выбором «несобственной» прямой и эллиптической инволюции на ней.

§ 72. Подобие фигур с проективной точки зрения.

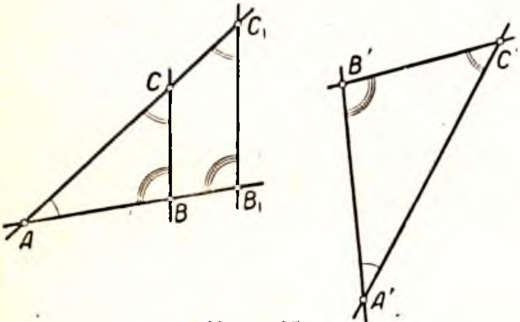
Изучая в § 70 преобразования группы $\{\mathbf{M}\}$, т. е. коллинеации, не нарушающие абсолюта плоскости, мы убедились в том, что все такие коллинеации являются преобразованиями подобия. Нетрудно видеть, что и, обратно, всякое преобразование подобия является коллинеацией $\mathbf{M}$. В самом деле, преобразование подобия переводит прямые в прямые и сохраняет параллелизм и ортогональность. Следовательно, это преобразование является аффинной коллинеацией, преобразующей абсолютную инволюцию в себя. Отсюда ясно, что преобразования подобия относятся к группе коллинеаций $\{\mathbf{M}\}$.

Предположим, что коллинеация $\mathbf{M}$ преобразует треугольник ABC в подобный треугольник $A'B'C'$ (черт. 258). Отложим на прямой AB от точки A отрезок $AB_1 = A'B'$. Выполним гомотетию с центром в точке A и коэффициентом $k = \frac{AB_1}{AB}$. В этой гомотетии треугольник ABC преобразуется в треугольник AB_1C_1, конгруентный треугольнику $A'B'C'$. Отсюда видно, что от треугольника ABC можно перейти к треугольнику $A'B'C'$ с помощью двух коллинеаций: гомотетии $\mathbf{H}$, преобразующей треугольник ABC в треугольник AB_1C_1, и движения $\mathbf{W}$, преобразующего треугольник AB_1C_1 в треугольник $A'B'C'$. Следовательно, коллинеация $\mathbf{M}$ может быть представлена в виде произведения преобразований $\mathbf{H}$ и $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{W}. \tag{1}$$

Эта формула показывает, что преобразование подобия является произведением гомотетии и движения. Гомотетия является лишь тем частным случаем преобразования подобия, когда движение $\mathbf{W}$ есть тождественное преобразование. В самом деле, в этом случае, полагая в формуле (1) $\mathbf{W} = 1$, будем иметь:

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}.$$



Черт. 258.

Отсюда ясно, почему гомотетию называют иногда в элементарной геометрии *подобием с подобным расположением*.

Группа $\{\mathbf{M}\}$ состоит из преобразований подобия, которые, как мы только что убедились, сводятся к гомотетии и движению. Таким образом, можно сказать, что метрическая группа $\{\mathbf{M}\}$ содержит преобразования отражения, гомотетии и их произведения. Действительно, движения являются произведениями отражений, а произведения гомотетии и движений дают все преобразования подобия, т. е. преобразования группы $\{\mathbf{M}\}$.

Феликс Клейн[1] определял элементарную геометрию как учение о группе преобразований $\{\mathbf{M}\}$ и об инвариантах этой группы. Группу $\{\mathbf{M}\}$ он называл также *главной группой*.

Все изложенное показывает, что учение о подобии фигур может быть в известном смысле истолковано как проективное. Следовательно, является возможным построить его в общем виде на проективной плоскости.

§ 73. Метрические свойства кривых второго порядка.

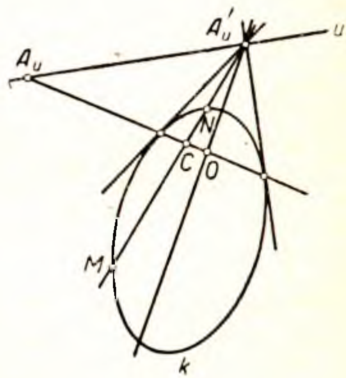
В главе V была построена проективная теория кривых второго порядка, которая содержала свойства кривых второго порядка, инвариантные по отношению ко всем коллинеациям $\{\mathbf{K}\}$. Далее, в § 69 были рассмотрены аффинные свойства кривых второго порядка

---

[1] См. исторический очерк, стр. 357.

(аффинная классификация, центр, сопряженные диаметры и т. д.). Эти свойства остаются инвариантными лишь в аффинных коллинеациях, образующих группу $\{\mathbf{A}\}$. Поставим теперь вопрос о таких свойствах кривых второго порядка, которые оставались бы инвариантными лишь для метрических коллинеаций $\{\mathbf{M}\}$, т. е. коллинеаций, не изменяющих абсолюта плоскости. Такие свойства кривых второго порядка естественно назвать **метрическими**.

Проективное истолкование метрических понятий, проведенное в предшествующих параграфах этой главы, позволяет изложить ту часть учения о метрических свойствах кривых второго порядка, которая содержится в n° **1** и n° **2** настоящего параграфа, в общей проективной форме. Напротив, в той части, которая содержится в n° **3** и n° **4**, было целесообразно вести исследование в евклидовой плоскости, дополненной несобственной прямой, так как здесь необходимо более широкое применение метрических понятий.



Черт. 259.

1. Оси кривой второго порядка. Пусть u есть «несобственная» прямая плоскости. Рассмотрим инволюцию сопряженных точек (чертеж 259), определяемую на прямой u данной кривой второго порядка k. Пусть A_u и A'_u —пара соответственных точек этой инволюции. «Центр» O кривой второго порядка k является полюсом «несобственной» прямой u. Прямые OA_u и OA'_u — сопряженные диаметры кривой k. Это значит, что точка A_u является полюсом «диаметра» OA'_u, а точка A'_u — полюсом «диаметра» OA_u. Проведем через точку A_u произвольную прямую MN. Так как прямая MN проходит через полюс A'_u «диаметра» OA_u, то она сопряжена с этим «диаметром». Мы знаем, что «диаметр» делит хорды сопряженных ему прямых «пополам» (например, хорду MN в точке C), что в проективной форме изображается равенством:

$$(MNA'_uC) = -1.$$

Итак, каждому «диаметру» OA_u кривой k второго порядка сопряжены прямые, проходящие через его полюс A'_u, причем «несобственная» точка A_u «диаметра» и его полюс A'_u являются соответственной парой инволюции, устанавливаемой кривой k на «несобственной» прямой u.

Осью кривой второго порядка называется диаметр кривой, перпендикулярный к сопряженным ему прямым.

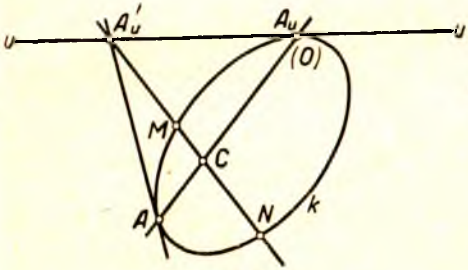
Это значит, что «диаметр» OA_u является *осью* кривой k в том случае, если он «перпендикулярен» к прямым, проходящим через его полюс A'_u. Так как в силу проективного определения «перпендикулярными» называются прямые, проходящие через пару точек, соответственных в абсолютной инволюции, то «диаметр» OA_u представляет собой «ось» кривой второго порядка в том и только в том случае, если точки A_u и A'_u являются соответственными в «абсолютной инволюции».

Таким образом, задача разыскания «осей» кривой второго порядка приводится к отысканию таких пар точек A_u и A'_u, которые были бы соответственными одновременно в инволюции, определяемой на «несобственной» прямой данной кривой второго порядка, и в «абсолютной» инволюции. Другими словами, дело сводится к нахождению общих пар этих двух инволюций. Так как «абсолютная» инволюция эллиптическая, то согласно теореме § 32 существует одна общая пара двух инволюций на «несобственной» прямой. Поэтому задача о разыскании «осей» кривой второго порядка всегда имеет решение. *Если «центр» O кривой k является «собственной» точкой плоскости (эллипс, гипербола), то задача имеет два решения, т. е. существуют два диаметра, удовлетворяющие поставленным условиям. Если же «центр» O кривой k есть «несобственная» точка (парабола), то существует лишь один «диаметр», служащий «осью» кривой.*

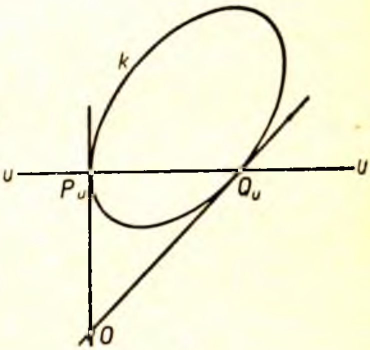
Рассмотрим подробнее оба случая. На чертеже 259 представлен первый случай. «Центр» O кривой является «собственной» точкой.

Предположим, что A_u и A'_u — пара точек, соответственных как в инволюции, определяемой кривой k на «несобственной» прямой, так и в «абсолютной» инволюции. Тогда каждый из «диаметров» OA_u и OA_u является «осью» кривой второго порядка k. В самом деле, каждый из этих «диаметров» «перпендикулярен» к сопряженным ему прямым, в частности ко второму «диаметру». Рассмотрим «диаметр» OA_u — «ось» кривой k. Полюсом прямой OA_u является точка A'_u. Любая секущая MN, проходящая через точку A'_u, «перпендикулярна» к «оси» OA_u. Кроме того, точки MN гармонически разделены точками C и A_u. Это значит, что точки M и N кривой второго порядка k расположены «симметрично» относительно «оси» OA_u. Поэтому «ось» кривой k является в то же время «осью симметрии». Все сказанное в одинаковой мере относится к обеим «осям» (OA_u и OA'_u) кривой. Самое построение точек A_u и A'_u — общих точек двух инволюций — может быть сведено, как это видно из теорем § 32, к нахождению двойных точек некоторого проективного соответствия на прямой u. Такая задача была нами рассмотрена в § 46.

Если «центр» O кривой k является «несобственной» точкой, т. е. принадлежит своей поляре u, то последняя касается кривой второго порядка в точке O (черт. 260). Мы имеем случай «параболы», которая определяет на «несобственной» прямой u параболическую инволюцию, в которой все точки соответствуют точке прикосновения. Обозначая последнюю буквой A_u, отметим точку A'_u, соответственную точке A_u в «абсолютной» инволюции. Тогда пара точек (A_u, A'_u) является соответственной в обеих инволюциях. Поэтому «диаметр» A_uA, являющийся полярой точки A'_u, есть в то же время «ось» кривой второго порядка («параболы»). В самом деле, «диаметру» A_uA сопряжены прямые, проходящие через точку A'_u, но эти прямые «перпендикулярны» к прямой A_uA (оси параболы). В частности, прямая A'_uA является касательной, перпендикулярной к «оси» A_uA «параболы» в ее «вершине» A. «Ось» A_uA «параболы» есть в то же время «ось симметрии». Из чертежа видно, что «парабола» имеет лишь одну «ось», так как все «диаметры» параболы проходят через «несобственную» точку A_u.



Черт. 260.



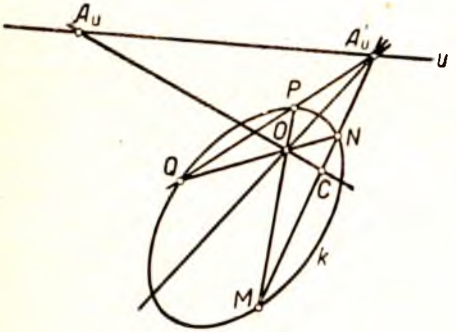
Черт. 261.

2. Метрические особенности кривых второго порядка. Окружность. Рассмотрим те метрические особенности кривых второго порядка, которые связаны с инволюцией, образованной кривой на несобственной прямой. Предположим, что кривая k пересекает «несобственную» прямую u в двух точках P_u и Q_u (черт. 261). В этом случае кривая называется «гиперболой» (§ 69). Если точки P_u и Q_u, служащие двойными точками гиперболической инволюции, осуществляемой кривой k на «несобственной» прямой, являются в то же время соответственными точками «абсолютной» инволюции, то кривая k называется «равносторонней гиперболой». «Асимптоты» OP_u и OQ_u «равносторонней гиперболы» взаимно «перпендикулярны». Указанное метрическое свойство не разрушается коллинеациями группы $\{\mathbf{M}\}$, в то время как в аффинной группе равносторонняя гипербола не может быть выделена из класса гипербол.

Посмотрим, как обстоит дело в случае эллиптической инволюции, определяемой кривой второго порядка k («эллипсом») на «несобственной» прямой u. Может ли эта инволюция совпадать с «абсолютной инволюцией»?

Задание инволюции на прямой, устанавливаемой кривой второго порядка, соответствует заданию двух точек кривой, именно точек пересечения ее с упомянутой прямой, которые являются двойными точками инволюции. Поэтому требование, чтобы кривая второго порядка k («эллипс») устанавливала «абсолютную» инволюцию на «несобственной» прямой, эквивалентно заданию двух ее точек. Так как кривая второго порядка определяется пятью точками, то три точки остаются свободными и могут быть выбраны произвольно, но при условии, чтобы они не лежали на одной прямой и чтобы ни одна из них не лежала на «несобственной» прямой u.

Таким образом, через каждые три точки плоскости, удовлетворяющие этим требованиям, можно провести кривую второго порядка, устанавливающую «абсолютную инволюцию» на «несобственной» прямой. Эта кривая называется *окружностью*. Она принадлежит к классу «эллипсов», так как «абсолютная» инволюция есть инволюция эллиптическая.



Черт. 262.

Рассмотрим два сопряженных «диаметра» OA_u и OA'_u «окружности» k (черт. 262). Так как точки A_u и A'_u соответственны в «абсолютной» инволюции, то сопряженные «диаметры» OA_u и OA'_u «перпендикулярны». Это относится к любой паре сопряженных диаметров «окружности». На этом основании *«окружность» может быть определена как такая кривая второго порядка, сопряженные «диаметры» которой образуют «ортогональную» инволюцию*. С другой стороны, мы называли «осью» кривой второго порядка такой ее «диаметр», который «перпендикулярен» сопряженным ему прямым. Отсюда следует, что к а ж д ы й «д и а м е т р» «о к р у ж н о с т и» я в л я е т с я «о с ь ю». Так как «ось» кривой второго порядка есть в то же время «ось симметрии» кривой, то «отражение» «окружности» относительно любого ее «диаметра» преобразует «окружность» в себя, но изменяет ее ориентацию на противоположную.

Предположим, что MP и NQ — два произвольных «диаметра» «окружности» (черт. 262). Прямая MN пересекает «несобственную» прямую u в точке A'_u. Последней соответствует в «абсолютной» инволюции точка A_u. Следовательно, прямая OA_u является «осью» «перпендикулярной» к сопряженным прямым пучка A'_u.

Если выполним «отражение» с осью OA_u, то точка M перейдет в «симметричную» с ней точку N, а «диаметр» MP — в «диаметр» NQ. Отсюда заключаем, что «диаметры» MP и NQ «конгруентны». Так как эти «диаметры» были выбраны произвольно, то можем сказать, что *все диаметры «окружности» «конгруентны»*.

Отрезок OM, концами которого служат «центр» O и произвольная точка M «окружности», называется ее «радиусом». В какие бы точки «окружности» мы ни провели ее радиусы, получим отрезки, «конгруентные» между собой. Другими словами:

«Окружность» отсекает на всех прямых, проходящих через ее «центр», отрезки, «конгруентные» между собой.

Это важное метрическое свойство окружности позволяет откладывать на всех направлениях масштаб для измерения отрезков (§ 74).

Заметим еще, что всякое «вращение» окружности вокруг центра O последней переводит окружность в себя. В самом деле, такое «вращение» есть, по определению, произведение двух «отражений», оси которых проходят через точку O. Но, как мы видели, каждое такое «отражение» переводит «окружность» в себя.

Мы знаем, что точками пересечения кривой второго порядка с прямой линией являются двойные точки инволюции, устанавливаемой на ней данной кривой. Так как всякая «окружность» устанавливает на «несобственной прямой» и «абсолютную» инволюцию, то:

Все «окружности» плоскости пересекают «несобственную» прямую в мнимых двойных точках «абсолютной» инволюции. Последние носят название мнимых циклических или круговых точек.

Мы уже говорили о том, что «вращение» вокруг «центра» «окружности» переводит последнюю в себя. Поэтому «центр» и произвольная точка «окружности» вполне определяют последнюю. В самом деле, каждую точку «окружности» можно получить из заданной точки путем «вращения» ее вокруг центра O.

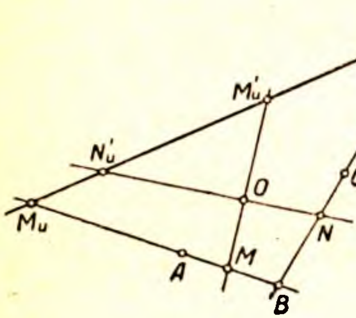
Все «окружности» проходят через мнимые «циклические» точки плоскости, поэтому для определения положения «окружности» необходимо и достаточно задать три ее точки (которые не должны лежать все три на одной прямой, и никакая из них не должна лежать на «несобственной» прямой). Три заданные точки вместе с двумя «циклическими» точками плоскости составляют пять точек, определяющих кривую второго порядка—«окружность». В качестве примера решим следующую задачу:

Даны «несобственная» прямая и «абсолютная» инволюция на ней. Требуется построить «центр» «окружности», проходящей через три данные точки A, B, C (черт. 263).

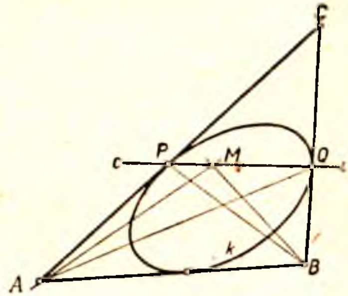
Решение задачи в проективной форме вполне аналогично обычному решению ее в элементарной геометрии. Хорду AB «делим пополам» в точке M (строим четвертую гармоническую к «несобственной» точке M_u прямой AB). Через «середину» M хорды AB проводим «перпендикуляр» MM'_u к прямой AB (точка M'_u соответствует точке M_u в «абсолютной» инволюции). Подобным же образом проводим «перпендикуляр» NN'_u к прямой BC в «середине» хорды BC. Точка O пересечения прямых MM'_u и NN'_u является искомым «центром» «окружности», проходящей через точки A, B и C.

3. Фокусы и директрисы кривых второго порядка. Как будет видно из дальнейшего, учение о фокусах и директрисах кривых второго порядка должно быть отнесено к метрической геометрии, занимающейся группой коллинеаций, не нарушающих абсолюта плоскости, и свойствами фигур, инвариантных по отношению к этой группе.

Предварительно докажем следующую лемму Штаудта:



Черт. 263.



Черт. 264.

Если ABC — треугольник, описанный около кривой второго порядка k, и M — точка, сопряженная одной из его вершин, то прямые, соединяющие точку M с двумя другими вершинами треугольника ABC, сопряжены относительно k.

Пусть имеем треугольник ABC, описанный около кривой второго порядка k (черт. 264). Предположим, что точка M сопряжена вершине C треугольника. Это значит, что M лежит на поляре PQ точки C. Рассмотрим два пучка прямых с центрами в точках A и B. Установим соответствие прямых этих пучков следующим образом: каждой прямой одного пучка соответствует сопряженная прямая второго пучка. Такое соответствие пучков A и B является проективным, так как один пучок (например, пучок A) проективен ряду полюсов своих прямых, в то время как прямые второго пучка (например, пучка B) проходят через соответствующие полюсы и, следовательно, второй пучок перспективен тому же ряду полюсов. Отсюда заключаем, что пучки A и B проективны. Нетрудно заметить, что они в то же время перспективны, так как общий луч AB сам себе соответствует (полюсом касательной AB служит ее точка прикосновения, поэтому лучу AB соответствует луч BA). Построим ось перспективности пучков A и B. Для этого достаточно найти две пары соответственных лучей этих пучков. Прямой AC первого пучка соответствует прямая BP второго пучка, проходящая через точку P прикосновения стороны AC. Лучи AC и BP пересекаются в точке P. Аналогично найдем, что два других соответственных луча BC и AQ пересекаются в точке Q прикосновения стороны BC. Следовательно, точки P и Q определяют ось перспективности с пучков A и B. Так как точка M лежит на оси перспективности, то прямые AM и BM являются соответственными лучами пучков A и B, а следовательно, они сопряжены относительно кривой второго порядка k (ч. т. д.).

Переходим к вопросу о фокусах кривой второго порядка. Предположим, что на плоскости задана кривая второго порядка k. Эта кривая определяет на каждой прямой инволюцию сопряженных точек и в каждой точке — инволюцию сопряженных прямых.

Определение. *Фокусом кривой k называется такая точка плоскости, для которой инволюция сопряженных прямых, определяемая кривой k, ортогональна.*

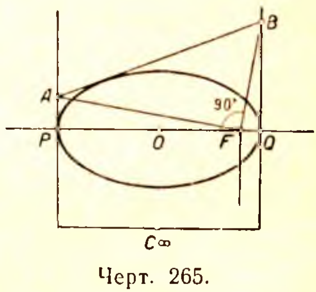
Поставим задачу о разыскании фокусов кривой второго порядка k. Метод решения этой задачи заключается в том, что, постепенно исключая те точки плоскости, которые не могут быть фокусами данной кривой второго порядка, мы приходим к точному определению положения фокусов на плоскости.

Предположим, что нам задана кривая второго порядка k. По определению фокуса точки, лежащие вне кривой k (т. е. такие, из которых можно провести две касательные к кривой), равно как и точки, лежащие на кривой (через каждую из них проходит одна касательная к кривой), не могут служить фокусами кривой k. В самом деле, инволюция сопряженных прямых в фокусе кривой является ортогональной и, следовательно, эллиптической. Поэтому фокусами могут быть лишь внутренние точки кривой k, имеющие эллиптическую инволюцию сопряженных прямых.

Предположим, что точка F является фокусом кривой второго порядка k (черт. 265). Проведем диаметр OF через фокус F. По определению фокуса прямая, сопряженная диаметру OF, должна быть перпендикулярна последнему. Отсюда заключаем, что диаметр OF является осью кривой k.

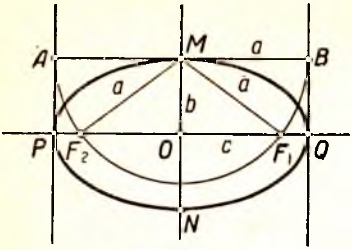
Итак, фокус лежит на оси кривой второго порядка.

Чтобы еще точнее определить положение фокусов кривой второго порядка k, применим лемму Штаудта. Предположим, что F есть фокус кривой k. Тогда диаметр OF является осью кривой. Обозначим через P и Q вершины кривой k, соответствующие оси OF (точки пересечения оси OF с кривой k). Так как F—внутренняя точка кривой, то вершины P и Q—действительные точки[1]. Построим касательные PA и QB в верши-



Черт. 265.

[1] Более подробное обоснование этого положения может быть дано из рассмотрения инволюции на кривой второго порядка (см.: Н. А. Глаголев, Проективная геометрия, стр. 121), откуда, между прочим, следует, что фокусы гиперболы лежат на ее действительной оси.



Черт. 266.

нах P и Q. Эти касательные должны быть перпендикулярными к оси OF как прямые, сопряженные последней. Несобственная точка C_∞ является полюсом оси OF (или PQ). Предположим, что дана произвольная касательная AB к кривой k. Тогда имеем треугольник ABC_∞, описанный около кривой, и можем к нему применить лемму Штаудта. Фокус F как точка, лежащая на поляре PQ несобственной вершины C_∞ треугольника ABC_∞, сопряжен с этой вершиной. Согласно лемме Штаудта прямые FA и FB, соединяющие фокус F с двумя другими вершинами описанного треугольника, должны быть сопряжены относительно кривой k. Но, по определению, сопряженные прямые в фокусе образуют ортогональную инволюцию. Поэтому будем иметь:

$$FA \perp FB.$$

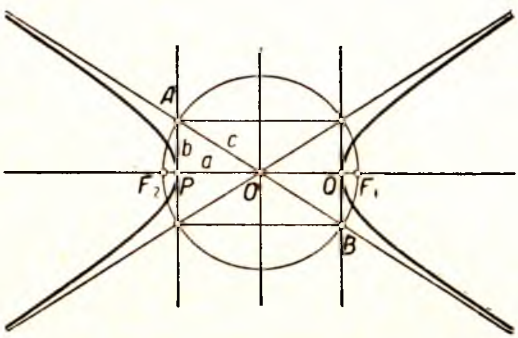
Отсюда приходим к следующему свойству фокуса:

Отрезок касательной (AB), образованный двумя касательными в вершинах, лежащих на одной оси кривой второго порядка, виден из фокуса, находящегося на той же оси, под прямым углом.

С другой стороны, можно утверждать и обратное. Если на оси PQ кривой второго порядка k будет найдена точка F, обладающая указанным выше свойством, то эта точка является фокусом кривой k.

В самом деле, точка F окажется центром ортогональной инволюции сопряженных прямых, которая определяется двумя сопряженными и ортогональными парами: (FA, FB) и (FP, FC_∞).

Полученное выше свойство фокуса кривой второго порядка дает возможность найти его положение на оси с помощью простого



Черт. 267.

построения. Выполним это построение для эллипса, гиперболы и параболы отдельно.

Пусть на чертеже 266 имеем эллипс $PQMN$, осями которого служат диаметры PQ и MN. Построим касательные PA и QB в вершинах P и Q эллипса и третью касательную AB в точке M. Тогда касательная AB параллельна PQ. Предположим, что PQ—большая ось эллипса ($PQ=2a$), а MN—его малая ось ($MN=2b$). На отрезке AB как на диаметре построим окружность. Последняя пересекает большую ось PQ в двух точках F_1 и F_2, причем $MF_1 = MF_2 = a$. Так как расстояние M центра окружности M до оси PQ меньше (по предположению) радиуса окружности a, то точки пересечения F_1 и F_2 действительны и являются фокусами эллипса. В самом деле, касательная AB видна из точек F_1 и F_2 под прямым углом, и, следовательно, каждая из них является центром ортогональной инволюции, т. е. фокусом эллипса.

Покажем, что найденные нами фокусы эллипса совпадают с теми, которые были ранее известны читателю из аналитической геометрии на плоскости. Для этого достаточно подсчитать расстояния фокусов F_1 и F_2 от центра O. Обозначая через c расстояние OF_1 из прямоугольного треугольника OF_1M, найдем:

$$OF_1^2 = F_1M^2 - OM^2,$$

или

$$c^2 = a^2 - b^2; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

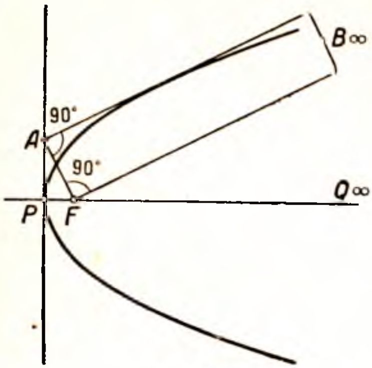
Фокус F_2 определяется как точка, симметричная точке F_1 относительно оси MN. Полученные формулы показывают, что точки F_1 и F_2 являются фокусами эллипса в смысле аналитической геометрии.

Если станем искать фокусы на малой оси MN эллипса при помощи аналогичного построения, то заметим, что окружность из центра P радиуса $PA = b$ не пересечет оси MN. Следовательно, фокусы, лежащие на малой оси, мнимы. *Эллипс имеет только два действительных фокуса на большой оси.*

В случае окружности должны иметь $a = b$ или $c = 0$, т. е. фокусы совпадают с центром окружности. Это вытекает также и непосредственно из того, что сопряженные диаметры окружности образуют ортогональную инволюцию. Поэтому центр O окружности является фокусом.

Переходим к разысканию фокусов гиперболы (черт. 267). Сопряженные диаметры гиперболы образуют гиперболическую инволюцию, двойными прямыми которой являются асимптоты. Поэтому асимптоты гиперболы должны делить гармонически любую пару сопряженных диаметров, в частности оси гиперболы. Следовательно, асимптоты расположены симметрично относительно осей.

Как уже было сказано, фокусы лежат на действительной оси PQ гиперболы. Для их построения воспользуемся отрезком AB, отсекаемым на асимптоте касательными в вершинах P и Q гиперболы.



Черт. 268.

Так как согласно доказанному выше этот отрезок должен быть виден из фокуса под прямым углом, то строим на отрезке AB как на диаметре окружность и обозначим через F_1 и F_2 точки пересечения последней с действительной осью PQ гиперболы. Точки F_1 и F_2 являются центрами ортогональных инволюций сопряженных прямых, т. е. фокусами гипербол. Обозначим через c половину фокусного расстояния, т. е. $OF_1 = F_2O = c$, через a — действительную полуось, т. е. $OQ = PO = a$, и через b—половину отрезка касательной в вершине, т. е. $AP = BQ = b$. Тогда из треугольника OAP получим:

$$OA^2 = PA^2 + PO^2,$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Таково выражение половины фокусного расстояния. Из него мы видим, что найденные точки являются фокусами гиперболы и в прежде установленном смысле (в аналитической геометрии).

Переходим к параболе и будем искать фокусы на ее оси (черт. 268). Одна из вершин параболы Q_∞ является несобственной точкой. Поэтому касательными в вершинах будут прямая PA и несобственная прямая, которой касается парабола в своей несобственной вершине Q_∞. Произвольная третья касательная AB_∞ пересекает две упомянутые касательные в точках A и B_∞. Если F — фокус параболы, то луч FA должен быть перпендикулярен к лучу FB_∞. Но этот последний параллелен прямой AB_∞, так как имеет с ней общую несобственную точку B_∞. Поэтому имеем:

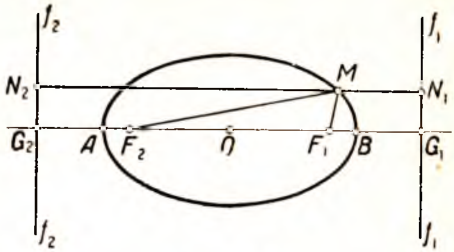
$$FA \perp AB_\infty\,.$$

Следовательно, для построения фокуса параболы достаточно провести произвольную касательную к ней и из точки пересечения A последней с касательной в вершине P восставить перпендикуляр AF, который и пересечет ось параболы в искомой точке F — фокусе параболы. Из самого построения видно, что парабола имеет только один фокус.

Заметим, что точка A является основанием перпендикуляра, опущенного из фокуса F параболы на выбранную касательную. Изменяя положение последней, получим следующее предложение:

Геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса на касательные к параболе, есть касательная к параболе в ее вершине.

Исследовав вопрос о фокусах кривых второго порядка, введем понятие о д и р е к т р и с а х тех же кривых.



Черт. 269.

Каждому фокусу кривой второго порядка k как полюсу соответствует некоторая прямая — поляра фокуса. Эта прямая и называется д и р е к т р и с о й кривой второго порядка. Для каждого фокуса имеется своя директриса — поляра фокуса. Эллипс и гипербола, имеющие по два фокуса, имеют также и по две директрисы. Парабола, имеющая один фокус, имеет одну директрису.

Положение каждой директрисы легко определить. Директриса как поляра фокуса сопряжена всякой прямой, проходящей через фокус. Так как фокус лежит на оси кривой второго порядка, то директриса этого фокуса сопряжена оси кривой и, следовательно, перпендикулярна к ней. Точка пересечения G_1 директрисы с осью кривой должна быть четвертой гармонической к фокусу F_1 относительно вершин A и B.

Рассмотрим сначала случай эллипса и гиперболы (обе вершины A и B — собственные точки плоскости). Предположим, что речь идет о директрисе f_1, соответствующей фокусу F_1 (черт. 269). Тогда будем иметь:

$$\frac{AF_1}{F_1B} = \frac{AG_1}{BG_1}.$$

Если O — центр кривой, то можем переписать эту пропорцию следующим образом:

$$\frac{AO + OF_1}{OB - OF_1} = \frac{AO + OG_1}{OG_1 - OB}$$

и затем, принимая во внимание, что $AO = OB$:

$$\frac{AO + OF_1}{AO - OF_1} = \frac{AO + OG_1}{OG_1 - AO}.$$

Отсюда после упрощений получаем:

$$AO^2 = BO^2 = OF_1 \cdot OG_1. \qquad (1)$$

Подставляя в этой формуле $AO = BO = a$ и $OF_1 = c$, будем иметь:

$$OG_1 = \frac{a^2}{c}. \tag{2}$$

Так выражается расстояние от центра кривой до правой (а следовательно, и левой) директрисы.

В случае гиперболы чертеж имеет несколько иное расположение (черт. 270), но формула (2) остается в силе.

Заметим, что для эллипса

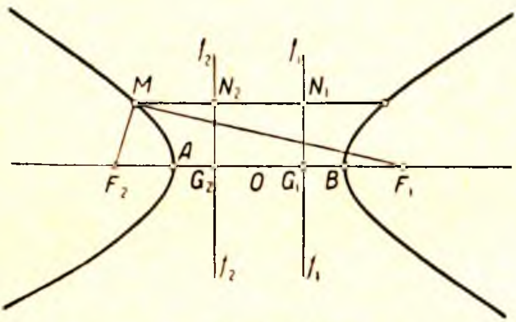
$$OG_1 = \frac{a^2}{c} = a \cdot \frac{a}{c} > a,$$

т. е. директрисы эллипса расположены за его вершинами.

Для гиперболы имеем:

$$OG_1 = \frac{a^2}{c} = a \cdot \frac{a}{c} < a,$$

т. е. директрисы гиперболы расположены между его вершинами.

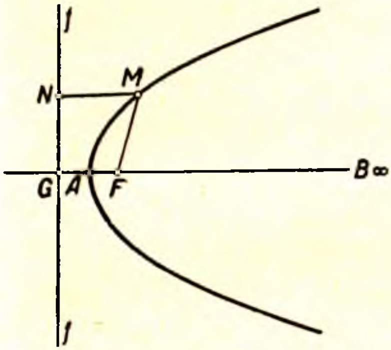


Черт. 270.

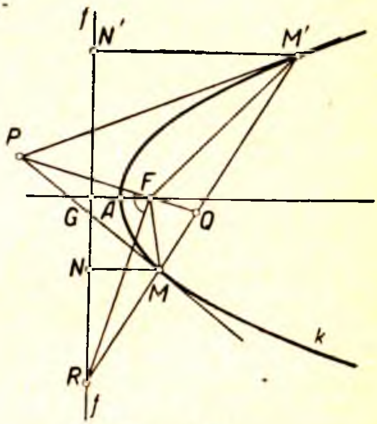
Особенно простой случай представляет директриса параболы. Одна из вершин параболы является несобственной точкой B_∞, поэтому другая вершина параболы A (собственная вершина) должна делить отрезок FG пополам (черт. 271). Следовательно, фокус F и директриса f всегда находятся на одинаковом расстоянии от вершины параболы. Заметим еще, что для окружности фокус совпадает с центром. Поэтому директрисой окружности является несобственная прямая.

4. Кривые второго порядка как геометрические места. Метрические свойства кривых второго порядка, развитые в настоящем параграфе, позволяют рассматривать эти кривые как геометрические места точек, удовлетворяющие известным закономерностям. Это позволяет в свою очередь установить тождественность рассматриваемых кривых с кривыми второго порядка, изучаемыми в аналитической геометрии.

Предположим, что мы имеем кривую второго порядка k, ее фокус F и соответствующую ему директрису f (черт. 272). Отметим две произвольные точки M и M' кривой k и обозначим через R точку пересечения секущей MM' с директрисой f. Далее, построим касательные к кривой k в точ-



Черт. 271.



Черт. 272.

ках M и M' и обозначим через P точку их пересечения. Точка P является, очевидно, полюсом прямой MM'. Наконец, проведем прямую PF, пересекающую прямую MM' в точке Q, и прямые FM, FM' и FR.

Прямая PF, как проходящая через полюсы прямых MM' и NN' (или f), является полярой точки R пересечения этих прямых. Поэтому

$$(MM'RQ) = -1.$$

С другой стороны, прямые FP и FR как сопряженные (R — полюс прямой FP) принадлежат ортогональной инволюции фокуса F. Следовательно,

$$FP \perp FR.$$

Но если два луча из гармонической четверки лучей взаимно перпендикулярны, то они являются биссекторами углов, образованных другой парой лучей. Поэтому прямые FQ и FR делят пополам углы, образованные прямыми FM и FM'. На этом основании можем написать:

$$\frac{MR}{M'R} = \frac{FM}{FM'}.$$

Пусть MN и $M'N'$ — перпендикуляры, опущенные из точек M и M' на директрису f. Тогда

$$\frac{MR}{M'R} = \frac{MN}{M'N'}.$$

Сравнивая обе пропорции, находим:

$$\frac{FM}{FM'} = \frac{MN}{M'N'},$$

или

$$\frac{FM}{MN} = \frac{FM'}{M'N'} = \text{const}, \tag{3}$$

т. е. *отношение расстояний произвольной точки кривой второго порядка от фокуса (FM) и соответствующей директрисы (MN) постоянно.*

Постоянное отношение, выраженное формулой (3), знакомо читателям из аналитической геометрии. Оно называется э к с ц е н т р и с и т е т о м кривой второго порядка.

Значение эксцентриситета можно определить, предполагая, что точка M является вершиной кривой второго порядка k. В этом случае отношение ее расстояний до фокуса и до директрисы имеет простое выражение. Так, для эллипса [принимая во внимание формулу (2)] будем иметь:

$$e = \frac{FA}{AG} = \frac{OA - OF}{OG - OA} = \frac{a - c}{\frac{a^2}{c} - a} = \frac{c}{a} < 1.$$

Для гиперболы аналогичным образом получим:

$$e = \frac{FA}{AG} = \frac{OF - OA}{OA - OG} = \frac{c - a}{a - \frac{a^2}{c}} = \frac{c}{a} > 1.$$

Наконец, для параболы:

$$e = \frac{FA}{AG} = 1.$$

Вернемся к чертежу 269. Пусть M — произвольная (текущая) точка эллипса и прямая MN_1 перпендикулярна к директрисе f_1. Тогда будем иметь:

$$\frac{F_1M}{MN_1} = \frac{F_2M}{MN_2} = e.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{F_1M + F_2M}{MN_1 + MN_2} = e,$$

или

$$F_1M + F_2M = e \cdot N_2N_1 = e \cdot 2\frac{a^2}{c} = 2\frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c} = 2a.$$

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{4}$$

Получили известное геометрическое свойство эллипса:

Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна (2*a*).

В случае гиперболы (черт. 270) будем иметь:

$$\frac{F_1M}{MN_1} = \frac{F_2M}{MN_2} = e.$$

Отсюда находим:

$$\frac{F_1M - F_2M}{MN_1 - MN_2} = e,$$

или

$$F_1M - F_2M = e \cdot N_2N_1 = e \cdot 2\frac{a^2}{c} = 2\,\frac{c}{a} \cdot \frac{a^2}{c} = 2a,$$

$$F_1M - F_2M = 2a. \qquad (5)$$

Гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна (2*a*).

Наконец, в случае параболы (черт. 271) имеем:

$$\frac{FM}{MN} = e = 1,$$

или

$$FM = MN. \qquad (6)$$

Парабола есть геометрическое место точек, расстояния которых от фиксированной точки (фокус параболы) и *фиксированной прямой* (директриса параболы) *равны.*

В аналитической геометрии этими свойствами кривых второго порядка пользуются как определениями и выводят из них простейшие уравнения кривых. Так, для эллипса и гиперболы (черт. 269 и 270), принимая центр кривой O за начало координат и направляя оси координат по осям кривой, находят следующие «канонические» уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (эллипс)}; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (гипербола)}.$$

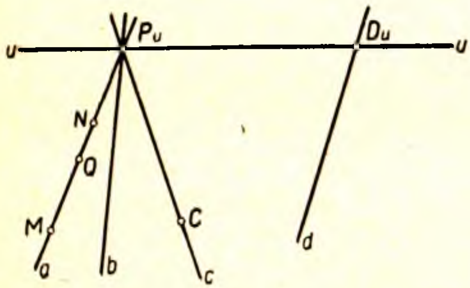
Для параболы (черт. 271), принимая за начало координат вершину A, ось параболы — за ось абсцисс, а касательную в вершине — за ось ординат, получим «каноническое» уравнение в виде:

$$y^2 = 2px.$$

Таким образом, наряду с методом аналитической геометрии возможен синтетический метод исследования кривых второго порядка, изложенный в предлагаемой книге.

§ 74. Геометрические построения. Окружность Штейнера.

1. В § 46 мы уже говорили о тех задачах на построение, которые могут быть разрешены при помощи одной линейки. Но в то время мы не имели возможности заняться вопросом о тех условиях, при которых такие построения являются осуществимыми. Теперь, когда аффинные и метрические свойства фигур получили проективное изображение, мы можем установить отчетливую точку зрения на геометрические построения и возможность их выполнения. Все исследование этого вопроса значительно выигрывает в наглядности и убедительности, если его провести в общей проективной форме.



Черт. 273.

Напомним прежде всего, что в течение всего изложения мы рассмотрели ряд задач первой степени, разрешимых с помощью одной линейки (§ 46). Но среди них отсутствовали задачи аффинного и метрического характера. Остановимся на этих задачах, предполагая, что речь идет о геометрических построениях на проективной плоскости. Ясно, что для проективного решения задач аффинного характера на плоскости должна быть определена «несобственная» прямая. Поэтому условия задачи должны быть такими, которые содержали бы данные относительно положения «несобственной» прямой.

2. П а р а п а р а л л е л ь н ы х п р я м ы х. Предположим, что на плоскости имеем пару «параллельных» прямых a и b (черт. 273). Тогда точка пересечения P_u этих прямых является точкой «несобственной» прямой u. Таким образом, пара «параллельных» прямых определяет одну точку «несобственной» прямой u, в остальном последняя остается неопределенной, т. е. может быть любой прямой пучка P_u.

Какие задачи могут быть решены при этих условиях с помощью одной линейки? Очевидно, что могут быть решены те задачи аффинного характера, которые связаны с «несобственной» точкой P_u. Приведем примеры.

1) Ч е р е з д а н н у ю т о ч к у C п р о в е с т и п р я м у ю, п а р а л л е л ь н у ю д а н н о й п р я м о й a.

В самом деле, прямая CP_u будет служить решением задачи.

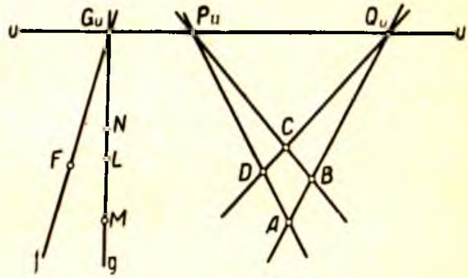
2) О т р е з о к MN р а з д е л и т ь «п о п о л а м».

Как мы видели, деление отрезка «пополам» означает построение четвертой геометрической точки Q к «несобственной» точке P_u

относительно концов отрезка M и N. Такая задача может быть решена при помощи одной линейки (§ 30).

Этот пример показывает, что возможно обращение данных и искомых. Так, если на прямой a дан отрезок MN, разделенный в точке Q «пополам», то «несобственная» точка P_u прямой может быть построена как четвертая гармоническая к точке Q относительно пары M, N. Поэтому можно строить прямые (b, c), «параллельные» прямой a.

Следует, однако, отметить, что построение прямой, «параллельной» произвольной прямой d, остается невозможным, так как «несобственная» прямая u может быть любым лучом пучка P_u, и, следовательно, «несобственная» точка D_u прямой d остается неопределенной.



Черт. 274.

3. Параллелограмм (две пары параллельных прямых). Предположим, что даны две пары «параллельных» прямых, образующих «параллелограмм» $ABCD$ (черт. 274). В этом случае мы имеем две «несобственные» точки P_u и Q_u, в которых пересекаются противоположные стороны параллелограмма. «Несобственная» прямая $P_u Q_u$ вполне определена. Следовательно, все задачи, связанные с «несобственной» прямой проективными отношениями, могут быть решены с помощью одной линейки. Приведем примеры.

1) Через точку F требуется провести прямую, параллельную данной прямой g (черт. 274).

Так как несобственная точка G_u прямой g может быть построена

$$G_u = g \times u,$$

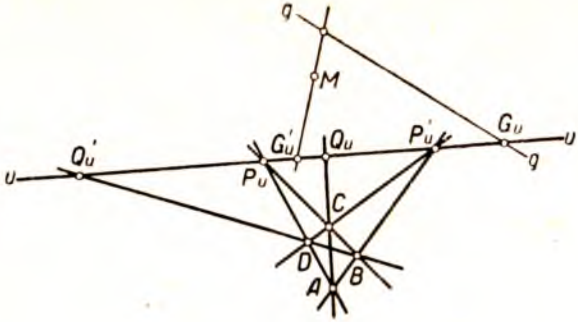
то прямая FG_u является решением задачи.

2) Произвольный отрезок MN требуется разделить «пополам» (черт. 274).

Для решения задачи следует построить точку L, которая была бы четвертой гармонической к точке G_u по отношению к паре M, N.

4. Квадрат. «Квадрат» может быть определен как такой «параллелограмм», у которого смежные стороны «перпендикулярны» и диагонали также «перпендикулярны».

Пусть $ABCD$ — данный «квадрат» (черт. 275). Тогда противоположные стороны AD и BC определяют «несобственную» точку P_u, а стороны AB и DC «несобственную» точку P_u'. Так как прямые AD и AB «перпендикулярны», то их «несобственные» точ-



Черт. 275.

ки P_u и P'_u являются соответственными в «абсолютной» инволюции на прямой. То же самое можно сказать о «несобственных» точках Q_u и Q'_u диагоналей AC и BD. Таким образом, «абсолютная» инволюция на «несобственной» прямой u вполне определена двумя соответственными парами:

$$(P_u, P'_u) \text{ и } (Q_u, Q'_u).$$

Это показывает, что данная фигура («квадрат») определяет «абсолют» плоскости.

Предположим, что «квадрат» $ABCD$ задан (черт. 275). Тогда могут быть решены с помощью одной линейки те задачи, которые в своем проективном выражении требуют знания «абсолюта» плоскости. Приведем примеры.

1) Дана прямая g и точка M. Требуется из данной точки M опустить перпендикуляр на данную прямую g.

Так как «абсолютная» инволюция задана двумя парами точек $[(P_u, P'_u)$ и $(Q_u, Q'_u)]$, то с помощью одной линейки можем построить точку G'_u, соответственную в «абсолютной» инволюции «несобственной» точке G_u данной прямой g (§ 33). Тогда прямая MG'_u является искомым «перпендикуляром» к прямой g. В самом деле, прямые MG'_u и g проходят через соответственные точки «абсолютной» инволюции.

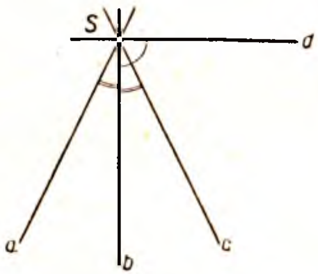
2) Удвоить данный угол (a, b). Чтобы дать этой задаче проективную форму, рассмотрим ее в условиях обычной метрической геометрии (черт. 276). Пусть S — вершина, а b и a — стороны данного угла. При удвоении угла (a, b) получим новую прямую c, причем $\angle (bc) = \angle (ab)$.

Следовательно, прямая b является биссектрисой угла (a, c). Прямая d, перпендикулярная прямой b, является второй биссектрисой угла (a, c). Тогда будем иметь:

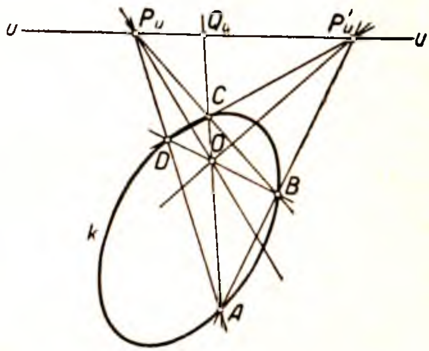
$$(acbd) = -1,$$

т. е. искомая прямая c гармонически сопряжена прямой a относительно прямых b и d.

Этот анализ задачи показывает, что она может быть решена при помощи одной линейки, если задан квадрат. В самом деле, возвращаясь к условиям чертежа 275, видим, что все построения требуют лишь проведения прямых линий. Прямую d, «перпендикулярную» к данной прямой b и проходящую через вершину угла S, можно построить аналогично построению «перпендикуляра» MG'_u на чертеже 275. После этого прямую c строим как четвертую гармоническую к трем прямым: a, b и d. Все построение выполняется одной линейкой. Очевидно, что подобным же образом может быть решена и более общая задача об умножении данного угла на целое число.



Черт. 276.



Черт. 277.

5. Окружность и ее центр (построения Штейнера). Предположим, что на проективной плоскости дана «окружность» k и ее «центр» O (черт. 277). Будем считать, что все точки «окружности» k фактически построены на чертеже, т. е. «окружность» дана как начерченная кривая. Проведем через «центр» O два произвольных «диаметра» AC и BD. Построим затем полный четырехугольник $ABCD$, диагональными точками которого являются «центр» O и точки P_u и P'_u. Последние определяют «несобственную» прямую — поляру «центра» O данной «окружности». «Диаметры» OP_u и OP'_u являются сопряженными (так как треугольник $OP_uP'_u$ есть полярный), а следовательно, «взаимно перпендикулярными». Поэтому «несобственные» точки P_u и P'_u соответственны в «абсолютной» инволюции. Так как можно построить сколько угодно пар сопряженных «диаметров», то будем иметь сколько угодно пар соответственных точек «абсолютной» инволюции на «несобственной» прямой u. Отсюда заключаем, что данная «окружность» и ее «центр» вполне определяют «абсолют» плоскости.

Напротив, если «центр» данной «окружности» неизвестен, то его нельзя построить с помощью одной линейки (т. е. проводя прямые линии), так как «центр» является полюсом «несобственной» прямой u, положение же последней остается произвольным.

Все эти важные выводы являются теперь совершенно очевидными.

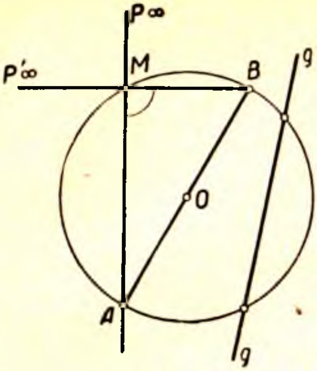
После всего сказанного ясно, что при задании начерченной «окружности» и ее «центра» могут быть решены все задачи, разрешимые при заданном «квадрате», а также в других ранее разобранных случаях. Однако, как было впервые обнаружено Штейнером, *задание окружности и ее центра позволяет решить с помощью одной линейки все вообще задачи на построение, для решения которых достаточно проведения прямых линий и окружностей, т. е. все задачи, разрешимые линейкой и циркулем.*

Этот фундаментальный результат Штейнера может быть обоснован следующим образом. Всякое геометрическое построение, выполненное линейкой и циркулем, состоит из ряда операций, в число которых, кроме операций линейкой, т. е. проведения прямых линий, могут входить и операции с участием циркуля. Эти последние сводятся в конечном счете к определению точек пересечения: 1) окружности с прямой и 2) двух окружностей.

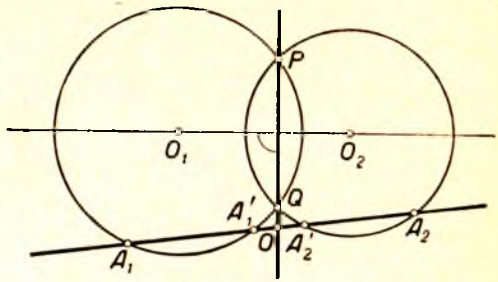
Предложение Штейнера будет доказано, если будет показано, что обе приведенные выше операции могут быть выполнены одной линейкой при наличии заданной окружности с ее центром (штейнерова окружность). При этом, разумеется, всякая другая окружность, участвующая в построении, определяется какими-либо своими данными (например, центром и радиусом), но не может быть вычерчена (так как пользование циркулем исключено).

Обращаясь к первой операции, предположим, что требуется построить точки пересечения окружности, заданной центром O и точкой A, с данной прямой g (черт. 278).

Так как абсолют плоскости определяется заданием штейнеровой окружности, то мы можем при помощи одной линейки построить сколько угодно точек окружности (O, A). Для этого находим точку B окружности, гармонически сопряженную с точкой A относительно пары O, N_∞, где через N_∞ обозначена несобственная точка прямой OA. Далее, проводим произвольную прямую через точку A и строим перпендикулярную к ней прямую в точке B. Эта операция также выполняется одной линейкой, так как абсолютная инволюция вполне определяется штейнеровой окружностью (ср. с черт. 277). Точка M пересечения прямых AM и BM принадлежит окружности (O, A). Итак, может быть построено (с помощью одной линейки) сколько угодно точек этой окружности. В таком случае построение точек пересечения последней с прямой g представляет собой задачу, рассмотренную в более общей форме в § 46. Как было показано в этом параграфе, задача разрешается одной линейкой при условии задания начерченной кри-



Черт. 278.



Черт. 279.

вой второго порядка. Такой кривой в нашем случае является окружность Штейнера.

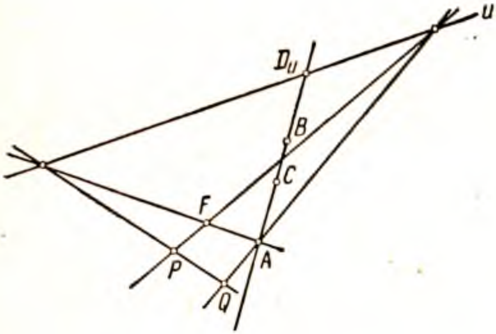
Переходим ко второй операции (черт. 279). Предположим, что требуется построить точки пересечения окружностей (O_1, A_1) и (O_2, A_2). Эта задача может быть сведена к предыдущей, если удастся построить радикальную ось PQ обеих окружностей. В самом деле, тогда искомые точки явятся точками пересечения одной из окружностей с радикальной осью. Покажем, как можно с помощью одной линейки построить точку радикальной оси. Соединим точку A_1 первой окружности с точкой A_2 второй. Найдем точки A_1' и A_2', в которых прямая A_1A_2 вторично пересекает данные окружности. Как мы знаем, построение точек A_1' и A_2' может быть выполнено одной линейкой. Таким образом, мы будем иметь две соответственные пары точек (A_1, A_1') и (A_2, A_2') инволюции, образованной на прямой A_1A_2 пучком окружностей с радикальной осью PQ (ср. § 34). Как было показано в § 34, радикальная ось PQ окружностей пересекает прямую A_1A_2 в центре O инволюции. Но центр O инволюции может быть построен (одной линейкой) как точка инволюции, соответственная несобственной точке прямой A_1A_2. Так может быть построена точка O радикальной оси. Выбрав затем вместо A_1A_2 другую пару точек обеих окружностей (мы знаем, что их можно построить сколько угодно), найдем вторую точку радикальной оси[1]. Следовательно, задача сведется к определению точек P и Q пересечения одной из окружностей с радикальной осью. Мы уже рассмотрели решение этой задачи при помощи одной линейки, если на плоскости дана окружность Штейнера. Таким образом, предложение Штейнера доказано.

---

[1] Вместо этого можем поступить иначе: опустить перпендикуляр из точки O на прямую O_1O_2

§ 75. Проективная мера отрезка и угла.

В § 71 мы рассмотрели учение о конгруентности фигур как о свойстве, инвариантном по отношению к тем геометрическим преобразованиям, которые называются движениями. При этом оказалось возможным изложить весь вопрос в проективном виде. В этой общепроективной схеме, частным случаем которой является обыкновенная метрическая геометрия, «движения» являются такими коллинеациями, которые не изменяют «абсолюта» плоскости. Основными инвариантами «движений», как мы знаем, в метрической геометрии являются: р а с с т о я н и е д в у х т о ч е к и у г о л д в у х п р я м ы х. Если мы хотим включить эти понятия в проективное построение метрической геометрии, то мы должны каждому из них дать такое определение, которое, будучи инвариантным по отношению к «движениям» как проективным преобразованиям, вместе с тем обладало бы свойствами аналогичных понятий обыкновенной метрической геометрии.



Черт. 280.

1. Рассмотрим прежде всего вопрос об измерении отрезков. Предположим, что на плоскости фиксирована «несобственная» прямая u (черт. 280). Кроме того, дан отрезок PQ, служащий масштабом для измерения отрезков и имеющий длину, равную единице. Пусть, наконец, AB — данный отрезок, измерением которого мы и будем заниматься. Всегда можно на прямой AB построить отрезок AC, «конгруентный» масштабному отрезку PQ. Для этого можно поступить следующим образом. Строим «параллелограмм» $PQAF$ при помощи «несобственных» точек прямых PQ и QA. Тогда отрезок FA «конгруентен» отрезку PQ.

Остается решить задачу: определить точки пересечения «окружности» (A, F) с прямой AB. Мы выбираем ту из двух точек пересечения (точку C), для которой порядок ACD_u совпадает с порядком ABD_u. Отрезок AC «конгруентен» масштабному отрезку PQ, поэтому он имеет «длину», равную единице.

Рассмотрим сложное отношение четырех следующих точек: концов отрезка AB, масштабной точки C и «несобственной» точки D_u, записывая их в порядке AD_uBC. Это *сложное отношение мы и назовем «длиной» отрезка AB*:

$$\delta_{AB} = (AD_uBC).$$

Покажем, что величина δ_{AB} представляет собой проективное обобщение понятия длины отрезка в обыкновенной метрической геометрии. Если точка B совпадает с точкой C, то будем иметь:

$$\delta_{AC} = (AD_u CC) = 1.$$

Следовательно, как это и должно быть, «длина» масштабного отрезка равна единице.

Если точка B стремится к «несобственной» точке D_u, то получаем:

$$\delta_{AB} = (AD_u BC) = \frac{(AD_u B)}{(AD_u C)} = \frac{AB}{D_u B\,(AD_u C)},$$

$$\delta_{AB} \to \infty \quad (\text{при } B \to D_u).$$

Следовательно, «длина» отрезка, один из концов которого стремится к «несобственной» точке, стремится к бесконечности.

Наконец, покажем, что величина δ_{AB}, составленная в условиях обыкновенной метрической геометрии, совпадает с мерой отрезка AB при единице измерения AC.

Действительно, в этих предположениях будем иметь:

$$\delta_{AB} = (AD_\infty BC) = (BCAD_\infty) = \frac{(BCA)}{(BCD_\infty)} = (BCA) = \frac{BA}{CA} = \frac{AB}{AC}.$$

Нетрудно убедиться в том, что введенная здесь проективная «мера» отрезка удовлетворяет аддитивному закону. Это значит, что для трех точек A, B и C, лежащих на одной прямой, будем иметь:

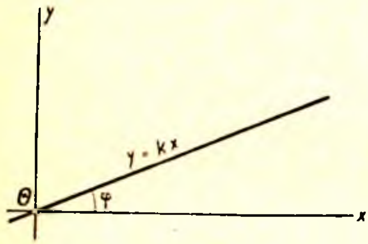
$$\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}.$$

В самом деле, всегда можно произвести коллинеарное преобразование плоскости, переводящее «несобственную» прямую u в несобственную прямую плоскости, а эллиптическую инволюцию на «несобственной прямой» в абсолютную инволюцию (§ 71, черт. 280). При этом числа δ_{AB}, δ_{BC} и δ_{AC}, выражающие меру отрезков в проективной форме, не изменятся. В то же время они будут теперь представлять расстояния соответствующих трех точек одной прямой в обыкновенной евклидовой геометрии, а поэтому должны удовлетворять указанному выше аддитивному закону.

Отсюда видно, что сложное отношение δ_{AB} является искомой проективной формой, выражающей «длину» отрезка. Так как величина δ_{AB} зависит, кроме концов A и B данного отрезка, еще от масштабной точки C и «несобственной» точки D_u, то она остается инвариантной при таких коллинеациях, которые не меняют «несобственной» прямой и преобразуют «масштабный» отрезок в «конгруентный» ему отрезок. Такими коллинеациями являются все «движения». Поэтому можно сказать, что *найденная «длина» отрезка δ_{AB} остается инвариантной при всех «движениях» последнего.*

2. Переходим к проективному определению меры угла. Подобно тому как для проективного обобщения расстояния двух точек мы прибегли к сложному отношению четырех точек, так для определения меры угла в проективной форме используем сложное отношение четырех лучей, проходящих через вершину этого угла.

Двумя из них являются стороны угла, а двумя другими — так называемые **изотропные прямые**, т. е. мнимые прямые, проходящие через мнимые циклические точки на несобственной прямой (§ 73)[1]. Чтобы составить сложное отношение этих четырех прямых, воспользуемся методом координат. Принимая одну из сторон угла за ось OX, а вершину его за начало O прямоугольной декартовой системы координат, напишем уравнение второй стороны в форме $y = kx$ (черт. 281).



Черт. 281.

Чтобы найти уравнения изотропных прямых, заметим, что они проходят через точки пересечения круга произвольного радиуса $x^2 + y^2 = r^2$ с несобственной прямой, т. е. через мнимые циклические точки. Для определения последних перепишем уравнение круга в однородных координатах:

$$x^2 + y^2 = r^2t^2$$

и полагаем в нем $t = 0$. Будем иметь:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Это уравнение представляет пару мнимых изотропных прямых:

$$(x + iy)\ (x - iy) = 0,$$

уравнения которых можно переписать в следующем виде:

$$y = ix;\ y = -ix.$$

Можно было бы также найти уравнения этих прямых как двойных прямых ортогональной инволюции. Так как угловые коэффициенты соответственных прямых ортогональной инволюции связаны условием перпендикулярности:

$$k \cdot k' + 1 = 0,$$

то для двойных прямых будем иметь:

$$k^2 + 1 = 0, \text{ или } k^2 = -1;\ k = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Получим угловые коэффициенты изотропных прямых.

[1] Изотропные прямые можно также определить как мнимые двойные прямые ортогональной инволюции.

Таким образом, имеем четыре следующие прямые, проходящие через вершину данного угла:

$$\left.\begin{aligned} y &= kx \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{стороны угла;} \quad \left.\begin{aligned} y &= \ \ \ ix \\ y &= -ix \end{aligned}\right\} \text{изотропные прямые,}$$

сложное отношение которых составим по формуле (2) § 35 через их угловые коэффициенты:

$$\nu = \frac{k-i}{0-i} : \frac{k+i}{0+i} = -\frac{k-i}{k+i} = \frac{1+ik}{1-ik}.$$

Замечая, что угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, получим для ν следующее выражение через данный угол φ:

$$\nu = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}.$$

Применяя формулу Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, находим:

$$\nu = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}.$$

Из этого равенства можно выразить величину угла φ через сложное отношение ν четырех прямых следующим образом:

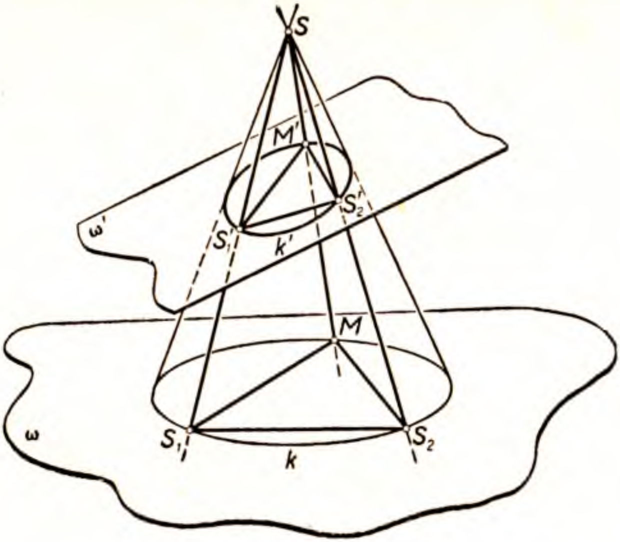
$$\varphi = \frac{1}{2i}\ln\nu.$$

Эта формула была найдена Л а г е р р о м и носит его имя. Формула Лагерра дает выражение меры угла в проективной форме, а именно через сложное отношение четырех прямых, проходящих через вершину угла: сторон угла и двух изотропных прямых. Поэтому равными будут всякие два угла, для которых соответствующие сложные отношения равны.

В предшествующих параграфах было доказано, что движения представляют собой такие коллинеации, которые преобразуют абсолютную инволюцию в себя; при этом мнимые круговые точки (двойные точки) переходят в себя. Отсюда следует, что при всех движениях изотропным прямым будут соответствовать опять изотропные прямые. Другими словами, сложное отношение ν не будет изменяться. Таким образом, *полученная мера угла в проективной форме является инвариантом группы движений на плоскости*.

§ 76. Конические сечения.

Предположим, что на плоскости ω мы имеем кривую второго порядка k (черт. 282). Будем проектировать эту кривую из произвольной точки S пространства (не принадлежащей плоскости ω). Полученная совокупность проектирующих прямых называется конусом второго порядка. Точка S называется в е р ш и н о й к о н у с а, к р и в а я k — н а п р а в л я ю щ е й к о н у с а, а п р о е к т и р у ю щ и е п р я м ы е — е г о о б р а з у ю щ и м и. Покажем, что:



Черт. 282.

Всякое сечение конуса второго порядка плоскостью является кривой второго порядка.

Пусть ω' — секущая плоскость. Кривая k, как известно, проектируется из любых двух своих точек двумя проективными пучками. Пусть S_1 и S_2 — центры этих пучков. Тогда S_1M и S_2M — соответственные лучи образующих пучков. Кривую k' можно рассматривать как соответственную кривой k в перспективной коллинеации плоскостей ω и ω', установленной с помощью центральной проекции из точки S. Поэтому проективным пучкам S_1 и S_2 будут соответствовать на плоскости ω' проективные пучки S'_1 и S'_2. Последние образуют геометрическое место точек пересечения соответственных прямых — кривую второго порядка k'. Итак, любое сечение конуса второго порядка плоскостью есть кривая второго порядка. В частности, плоскость, проходящая через вершину конуса S, пересекает последний по двум прямым—образующим конуса. Следовательно, в этом случае кривая второго порядка k' распадается на пару прямых.

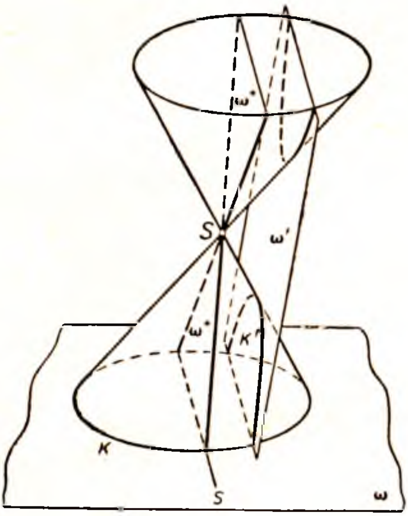
В силу самого определения конуса второго порядка, данного в начале настоящего параграфа:

Всякая кривая второго порядка является плоским сечением конуса второго порядка.

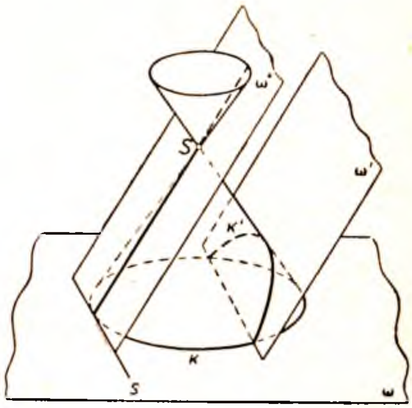
Поэтому оба эти понятия являются идентичными, и в литературе кривые второго порядка часто называются к о н и ч е с к и м и с е ч е н и я м и.

Вид конического сечения легко установить, проводя через вершину S конуса плоскость ω^*, параллельную секущей плоскости ω'.

Образующие конуса второго порядка, лежащие в плоскости ω^*, очевидно, параллельны плоскости ω'. Последняя пересекает эти образующие в несобственных точках, которые являются также несобственными точками конического сечения, образованного плоскостью ω'. Плоскость, проходящая через вершину конуса второго порядка, может пересекать конус по двум образую-

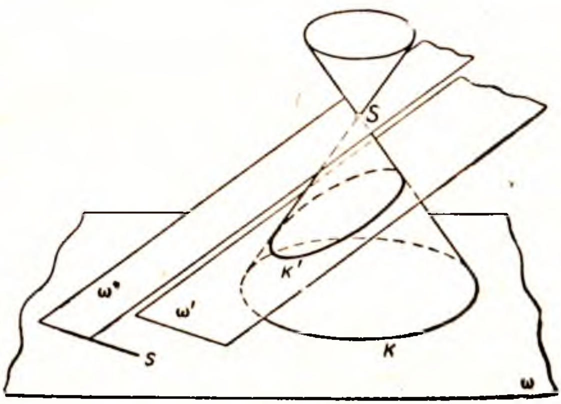


Черт. 283.



Черт. 284.

щим, одной образующей или иметь только одну общую с ним точку — вершину конуса. Эти три случая соответствуют различному положению следа s плоскости ω^* относительно направляющей кривой второго порядка k.



Черт. 285.

Если прямая s пересекает кривую k в двух точках (черт. 283), то плоскость ω^* пересекает конус по двум образующим, параллельным плоскости ω'. Следовательно, коническое сечение k' имеет две несобственные точки, оно представляет собой гиперболу. Если прямая s касается кривой k (черт. 284), то плоскость ω^* касается конуса по образующей, параллельной плоскости ω'. Коническое сечение k' имеет одну несобственную точку и является параболой.

Наконец, если плоскость ω^* образует на плоскости ω след s, не имеющий общих точек с направляющей кривой k, то, очевидно, не существует образующих, параллельных плоскости ω'. Это означает, что все точки конического сечения k' собственные и последнее является эллипсом (черт. 285).

§ 77. Проективная, аффинная и метрическая геометрия в пространстве.

1. Мы рассмотрели группы проективной, аффинной и метрической геометрий на плоскости и свойства фигур, инвариантные по отношению к преобразованиям соответствующей группы. В этом обзоре было установлено, что проективная геометрия занимается изучением тех свойств геометрических фигур, которые остаются инвариантными при любых коллинеарных преобразованиях плоского поля в себя. Из группы всех коллинеаций $\{K\}$ проективной геометрии мы затем выделили подгруппу аффинных коллинеаций $\{A\}$, переводящих несобственную прямую в себя. Изучение свойств фигур, инвариантных по отношению к этим коллинеациям, составляет предмет аффинной геометрии. Далее, из группы аффинных коллинеаций $\{A\}$ была выделена подгруппа метрических коллинеаций $\{M\}$, не изменяющих абсолюта плоскости. Было показано, что обыкновенная метрическая геометрия занимается изучением свойств фигур, инвариантных по отношению ко всей группе $\{M\}$, как свойство подобия или тех свойств фигур, которые не изменяются лишь при некоторой части преобразований группы $\{M\}$, образующей в свою очередь группу преобразований. Таково учение о конгруентности фигур как о свойстве, инвариантном по отношению к группе движений $\{W\}$.

С этой точки зрения наиболее общий характер имеет проективная геометрия с группой $\{K\}$, затем идет аффинная геометрия с группой $\{A\}$, далее метрическая геометрия подобия с группой $\{M\}$ и, наконец, метрическая геометрия движений (учение о конгруентности) с группой $\{W\}$. Каждая последующая группа преобразований является подгруппой предыдущей, поэтому все они могут быть расположены в следующем порядке:

$$\{K\} \supset \{A\} \supset \{M\} \supset \{W\}.$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены группы проективных преобразований пространства в себя и построено учение о проективной, аффинной и метрической геометриях с проективной точки зрения.

Этим вопросом мы и предполагаем заняться в настоящем параграфе, остановившись на некоторых особенностях построения намеченной схемы для пространства.

2. Коллинеарным преобразованием пространства в себя будем называть такое геометрическое преобразование элементов пространства, в котором каждая его точка переходит в точку того же пространства, а каждая плоскость переходит в плоскость, причем точка, принадлежащая плоскости, переходит в точку, принадлежащую соответственной плоскости. При этом определении прямая как геометрическое место точек, принадлежащих двум каким-нибудь проходящим через нее плоскостям, переходит в прямую как геометрическое место точек, принадлежащих двум соответственным плоскостям.

Из определения коллинеарного преобразования пространства в себя можно вывести ряд его свойств. Остановимся на следующем важном свойстве коллинеарного преобразования:

При коллинеарном преобразовании пространства в себя каждое плоское поле переходит в коллинеарно-соответственное плоское поле и каждая связка — в коллинеарно-соответственную связку. В самом деле, рассмотрим плоское поле. При коллинеарном преобразовании пространства плоскость ω переходит в плоскость ω'. При этом каждая точка первой плоскости переходит в соответственную точку второй, каждая прямая плоскости ω — в прямую плоскости ω'. Наконец, инцидентные элементы переходят в инцидентные. Следовательно, преобразование плоского поля ω в плоское поле ω' является коллинеацией. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и относительно связок.

Совокупность всех коллинеарных преобразований пространства образует группу преобразований $\{K\}$. В этом легко убедиться с помощью рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые были проведены в § 67 при рассмотрении группы коллинеаций на плоскости.

Таким образом, может быть построена проективная геометрия в пространстве как дисциплина, изучающая свойства фигур, инвариантных по отношению к группе коллинеарных преобразований пространства $\{K\}$.

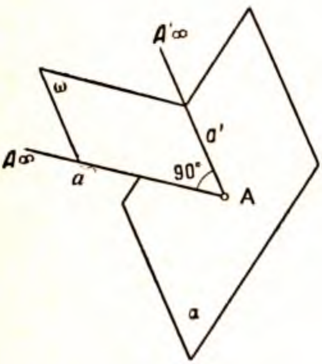
3. Будем называть аффинным преобразованием такое коллинеарное преобразование пространства, которое переводит несобственную плоскость в себя.

Из этого определения следует, что каждое плоское поле ω переходит при аффинном преобразовании пространства в аффинно-соответственное поле ω'.

Прямолинейный ряд точек переходит в аффинно-соответственный, т. е. подобный ряд точек. Совокупность всех аффинных преобразований пространства образует группу преобразований $\{A\}$, являющуюся подгруппой группы $\{K\}$. Для читателя не составит никаких затруднений провести соответствующие рассуждения самостоятельно (ср. § 68).

Геометрия, занимающаяся изучением свойств фигур, инвариантных при аффинных преобразованиях пространства, называется *аффинной геометрией*.

4. Чтобы сделать дальнейший шаг, рассмотрим ортогонально-полярное соответствие прямых и плоскостей в связке. Такое полярное соответствие уже встречалось нам в § 58. Напомним, что это соответствие определяется следующим образом. Пусть Ω — центр связки. Тогда каждой прямой, принадлежащей связке Ω, соответствует перпендикулярная к ней плоскость той же связки и обратно. В том же § 58 было показано, что всякое плоское сечение ортогонально-полярного соответствия (в связке Ω) представляет собой полярное соответствие точек и прямых на секущей плоскости с мнимой основной кривой второго порядка. В частности, на несобственной плоскости пространства будем иметь полярное соответствие такого же типа, которое называется **абсолютным полярным соответствием**. Несобственная плоскость и ее абсолютное полярное соответствие (с мнимой основной кривой второго порядка) называются **абсолютом** пространства.



Черт. 286.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Пусть ω — произвольная плоскость (черт. 286). Отметим в ней произвольную точку A и проведем через A произвольную прямую a. Плоскость α, перпендикулярная к прямой a и проходящая через точку A, сопряжена прямой a в ортогонально-полярном соответствии.

Поэтому несобственная прямая a_∞ плоскости α является полярой несобственной точки A_∞ прямой a в абсолютном полярном соответствии на несобственной плоскости. Рассмотрим ту инволюцию сопряженных точек, которую образует на несобственной прямой o_∞ плоскости ω абсолютное полярное соответствие. Прямая o_∞ пересекает поляру a_∞ в точке A'_∞, которая является несобственной точкой линии пересечения a' плоскостей ω и α. Таким образом, точки A_∞ и A'_∞ являются сопряженными в отношении абсолютного полярного соответствия. С другой стороны, прямая a' перпендикулярна прямой a и лежит в плоскости ω. Отсюда заключаем, что точки A_∞ и A'_∞ являются также соответственными в абсолютной инволюции на несобственной прямой o_∞. Это показывает, что инволюция сопряженных точек на несобственной прямой o_∞, образованная абсолютным полярным соответствием, совпадает с абсолютной инволюцией на этой прямой. Коротко этот результат можно выразить следующими словами:

Абсолют пространства определяет на каждой собственной плоскости абсолют этой плоскости.

5. Возвратимся теперь к вопросу о построении геометрии с метрическими свойствами.

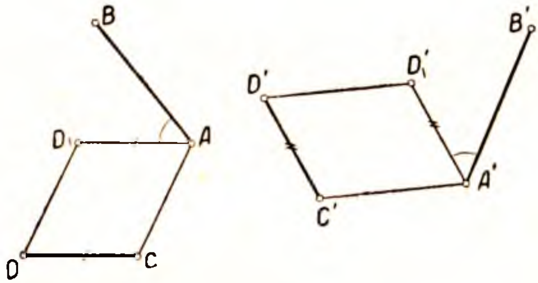
Рассмотрим такие коллинеарные преобразования пространства в себя, которые не изменяют абсолюта пространства, т. е. преобразуют несобственную плоскость и абсолютное полярное соответствие этой плоскости в себя. Такие преобразования будем называть **преобразованиями подобия**. Рассмотрим некоторые свойства преобразований подобия.

1) Преобразование подобия переводит всякую плоскость в коллинеарно-подобную плоскость.

В самом деле, несобственная прямая a_∞ плоскости ω переходит в несобственную прямую a'_∞ плоскости ω' (так как имеем аффинное преобразование). Кроме того, абсолютная инволюция на несобственной прямой a_∞ переходит в абсолютную инволюцию на прямой a'_∞ (так как абсолютное полярное соответствие переходит в себя). Но при этих условиях, как было показано в § 70, коллинеарное преобразование плоскости ω в плоскость ω' является преобразованием подобия.

2) Угол, образованный двумя произвольными прямыми пространства, не изменяет своей величины.

3) Отношение двух произвольных отрезков не изменяется.



Черт. 287.

Оба эти положения могут быть доказаны следующим образом. Пусть имеем два произвольных отрезка AB и CD (черт. 287), которым соответствуют отрезки $A'B'$ и $C'D'$. Построим в точке A отрезок $AD_1 \# CD$. Тогда фигура AD_1DC есть параллелограмм. Так как преобразование подобия аффинно, то параллелограмм AD_1DC переходит в параллелограмм $A'D'_1D'C'$. Следовательно, плоскость ABD_1 преобразуется в коллинеарно-подобную плоскость $A'B'D'_1$. Поэтому должны иметь:

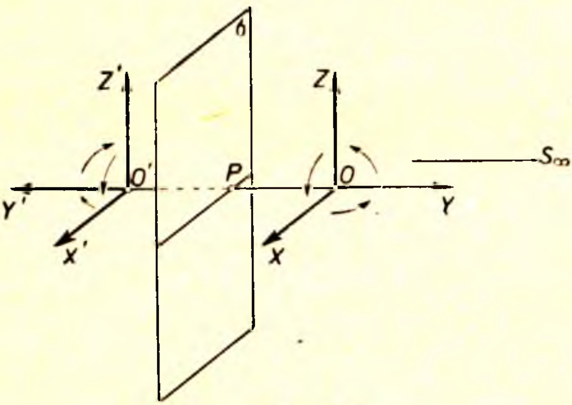
$$\angle BAD_1 = \angle B'A'D'_1$$

и

$$\frac{AB}{AD_1} = \frac{A'B'}{A'D'_1}, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ (ч. т. д.).}$$

Из доказанных выше свойств 1), 2) и 3) преобразования подобия следует, что всякая геометрическая фигура переходит в этом преобразовании в подобную ей фигуру.

Следовательно, преобразование подобия не изменяет формы фигуры. На этом основании такие преобразования называют иногда эквиформными. Совокупность всех преобразований подобия, как в этом легко убедиться, образует группу, являющуюся подгруппой группы аффинных преобразований {**А**}. Обозначим группу преобразований подобия через {**М**}. Из самого определения преобразований подобия **М** видно, что произведение двух таких преобразований дает преобразование той же совокупности. Таким образом, может быть построена метрическая



Черт. 288.

геометрия подобия как учение о свойствах фигур, инвариантных по отношению к группе преобразований {**М**}.

6. Учение о конгруентности. Чтобы обосновать понятие конгруентности фигур в пространстве, мы должны рассмотреть движения как коллинеарные преобразования пространства в себя.

Две конгруентные фигуры пространства могут отличаться своей ориентацией. Предположим, что мы имеем две прямоугольные системы осей $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ (черт. 288). Первая из них называется правой системой, вторая — левой системой. Если будем смотреть на плоскость OXY сверху (т. е. со стороны вектора OZ), то расположение векторов OX и OY будет соответствовать вращению против стрелки часов. Наоборот, при рассматривании плоскости $O'X'Y'$ сверху (со стороны вектора $O'Z'$) увидим обратное расположение векторов $O'X'$ и $O'Y'$ (т. е. по стрелке часов). Таким образом, правая и левая системы осей отличаются своей ориентацией.

Предположим, что мы имеем конгруентные фигуры F и F'. Пусть O и O' — соответственные точки этих фигур. Принимая точку O за начало координат, построим правую систему осей $OXYZ$. Обозначим через $O'X'Y'Z'$ соответственную систему осей фигуры F'[1]. Если система осей $O'X'Y'Z'$ также правая, то фигуры F и F' имеют одинаковую ориентацию. Если система осей $O'X'Y'Z'$ левая, то фигуры F и F' имеют различную ориентацию.

Остановимся теперь на тех преобразованиях, которые переводят одну из двух конгруентных фигур в другую. Эти преобразования будем называть движениями.

Отражение, или ортогональная симметрия относительно плоскости. С проективной точки зрения это коллинеарное преобразование пространства представляет собой частный случай гомологии в пространстве, а именно гомологию с несобственным центром S_∞, сопряженным в абсолютном полярном соответствии несобственной прямой s_∞ плоскости гомологии σ (черт. 288). Симметрия является вместе с тем гармонической (инволюционной) гомологией, так как каждая пара соответственных точек (OO') гармонически разделена центром S_∞ гомологии и точкой P пересечения прямой OO' с плоскостью σ гомологии. Отражение относительно плоскости переводит данную фигуру F в конгруентную ей фигуру F'. При этом **ориентация фигуры изменяется на обратную.**

В последнем можно убедиться из чертежа 288. На этом чертеже представлена правая система осей $OXYZ$, которая после отражения перешла в левую систему $O'X'Y'Z'$.

Вращение вокруг собственной или несобственной оси. Это преобразование можно определить как произведение двух отражений. В случае, если плоскости составляющих отражений пересекаются по собственной прямой, мы имеем вращение вокруг собственной оси (линии пересечения плоскостей составляющих отражений). Если же плоскости составляющих отражений параллельны, то имеем вращение с несобственной осью, или параллельное перемещение. С проективной точки зрения оба эти преобразования могут быть объединены, как это и сделано выше. Очевидно, что ориентация фигуры не изменяется при вращении (вокруг собственной или несобственной оси).

Как будет видно из дальнейшего, для обоснования учения о конгруентности достаточно трех рассмотренных коллинеарных преобразований пространства: отражения ($\mathbf{S}$), вращения ($\mathbf{V}$) и параллельного переноса ($\mathbf{V}_\infty$). Движениями $\mathbf{W}$ будем называть произведения вида $\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}$ и $\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}$. Так как $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^2 = 1$, т. е. тождественное преобразование, то среди вращений и параллельных переносов существуют тождественные:

$$\mathbf{V} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 1, \text{ или } \mathbf{V}_\infty = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 1.$$

[1] При этом соответственными точками конгруентных фигур F и F' считаются те точки, которые совпадают при совмещении фигур.

Поэтому среди движений $\mathbf{W}$ также существуют тождественные преобразования:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Кроме того, очевидно, что отражения, вращения и параллельные переносы также являются движениями:

$$\mathbf{W} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V} = \mathbf{S} \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{S},$$
$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V} = 1 \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V},$$
$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty \cdot 1 = \mathbf{V}_\infty.$$

7. Установим прежде всего следующее важное свойство движений:

Движения являются коллинеарными преобразованиями пространства, не изменяющими абсолюта пространства.

В самом деле, отражение, или плоскостная симметрия, как аффинное преобразование, переводит несобственную плоскость в себя. Кроме того, прямая и перпендикулярная к ней плоскость переходят в отражении в прямую и перпендикулярную к ней плоскость. Это значит, что абсолютное полярное соответствие при отражении преобразуется в себя. Таким образом, отражение не изменяет абсолюта пространства. Но все движения являются лишь произведениями отражений, поэтому они также не изменяют абсолюта пространства.

Далее легко убедиться в справедливости следующего предложения:

Если три собственные точки пространства, не лежащие на одной прямой, неподвижны, то возможно только одно движение — отражение относительно плоскости, проходящей через неподвижные точки.

В самом деле, всякое иное движение не сохраняет неподвижной собственной плоскости (плоскости, определяемой тремя неподвижными точками). В частности, это предложение соответствует следующему положению учения о конгруентных фигурах:

Если три какие-либо точки фигуры закреплены, то сама фигура может иметь лишь два симметричных (относительно плоскости закрепленных точек) *возможных положения в пространстве.*

Для обоснования учения о конгруентности фигур имеет большое значение следующая теорема.

Теорема Д'Аламбера. *Две конгруентные и одинаково ориентированные фигуры, у которых имеется пара совпавших соответственных точек, могут быть переведены одна в другую при помощи одного вращения вокруг оси, проходящей через точку, совпадающую со своей соответственной.*

Обозначим буквой O неподвижную точку (пару совпавших соответственных точек) данных фигур и буквами A и A' — пару соответственных точек этих фигур (черт. 289.) Если из центра O опишем сферу радиусом OA, то она пройдет также и через A', так как $OA' = OA$. Пусть B и B' — другая пара соответственных точек конгруентных фигур, лежащих на сфере (O)[1]. Проведем дуги больших кругов через пары точек A, B и A', B'. Надо показать, что существует вращение, переводящее дугу AB в дугу $A'B'$.

Проведем еще большие круги AA' и BB'. Пусть M и N — середины дуг AA' и BB'. Проведем через точки M и N большие круги, перпендикулярные соответственно кругам AA' и BB'. Обозначим через S одну из точек их пересечения (безразлично какую). Покажем теперь, что с помощью вращения вокруг оси OS дуга AB может быть совмещена с дугой $A'B'$. В самом деле, сферические треугольники SAB и $SA'B'$, очевидно, конгруентны, так как они имеют три пары соответственно равных сторон ($SA=SA'$, $SB=SB'$ и $AB=A'B'$). Отсюда заключаем, что

$$\angle ASB = \angle A'SB'.$$

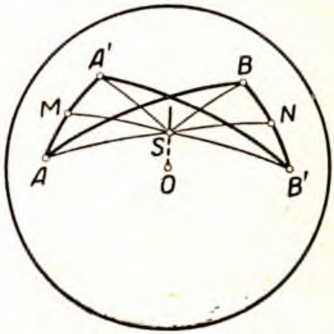
Но

$$\angle ASA' = \angle ASB - \angle A'SB,$$

$$\angle BSB' = \angle A'SB' - \angle A'SB,$$

следовательно,

$$\angle ASA' = \angle BSB' = \varphi.$$



Черт. 289.

Поэтому поворот на угол φ вокруг оси OS приведет в совпадение дугу AB с дугой $A'B'$. Тогда данные фигуры будут иметь три пары совпавших точек (точка O и точки A, A' и B, B'). Так как ориентации фигур предполагались одинаковыми, то симметричность их расположения исключена. Следовательно, данные конгруентные фигуры совместятся всеми своими точками. Теорема доказана.

8. Теперь уже нетрудно доказать **основное предложение** учения о конгруентных фигурах:

Две любые конгруентные фигуры F и F' могут быть совмещены при помощи движения $\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}$ или движения $\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}$[2].

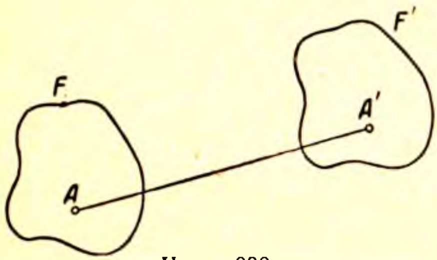
В самом деле, пусть имеем две конгруентные фигуры F и F' (черт. 290). Предположим, что они одинаково ориентированы, и пусть A и A' — две соответственные точки этих фигур. Составим движение $\mathbf{W}$ следующим образом. Параллельное перемещение $\mathbf{V}_\infty$ определим вектором AA'. Это перемещение приводит фигуры в такое положение, когда они имеют пару совпавших соответ-

[1] Если бы таких точек на сфере (O) не оказалось, мы могли бы присоединить их к данным фигурам, не нарушая их конгруентности.

[2] Т. е., как их иногда называют, движения первого и второго рода.

ственных точек (A, A'). Вращение $\mathbf{V}$ определяем так, как это было сделано при доказательстве теоремы Д'Аламбера. Тогда движение $\mathbf{W} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}$ приводит фигуру F в совпадение с фигурой F'.

Если же данные конгруентные фигуры различно ориентированы, то произведем отражение $\mathbf{S}$ относительно произвольной плоскости. Получим конгруентную фигуру F_1, одинаково ориентированную с фигурой F'. После чего повторяем движение предыдущего случая. Следовательно, во втором случае движение $\mathbf{W} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}$ приводит обе фигуры в совпадение (ч. т. д.).



Черт. 290.

9. Рассмотрим совокупность движений $\mathbf{W}$. Среди движений существует тождественное преобразование:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Каждое движение $\mathbf{W}$ переводит фигуру F в конгруентную ей фигуру F'[1]. Следовательно, существует обратное движение $\mathbf{W}^{-1}$. Это — движение, преобразующее фигуру F' в конгруентную ей фигуру F. Если, наконец, выполним последовательно два каких-либо движения $\mathbf{W}'$ и $\mathbf{W}''$, то произведение этих движений также является движением $\mathbf{W}'''$. В самом деле, движение $\mathbf{W}'$ переводит фигуру F в конгруентную ей фигуру F', а движение $\mathbf{W}''$ переводит фигуру F' в фигуру F'', конгруентную F' (и F). Поэтому на основании доказанной выше теоремы существует движение $\mathbf{W}'''$, переводящее фигуру F в фигуру F''.

Из этих соображений видим, что совокупность пребразований $\mathbf{W}$ или движений образует группу. Обозначим эту группу через $\{\mathbf{W}\}$.

10. Учению о конгруентности фигур обыкновенной метрической геометрии в пространстве, как видно из предыдущего, может быть дано проективное строение, если фиксирована несобственная плоскость пространства и абсолютное полярное соответствие в этой плоскости.

В самом деле, рассмотрим коллинеарные преобразования пространства $\mathbf{W}$, которые мы определяем как произведения преобразований вида:

$$(\mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}), \text{ или } (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}).$$

Эти преобразования $\mathbf{W}$ будем называть д в и ж е н и я м и. Каждое движение, равно как и составляющие его преобразования, может быть определено в проективной форме, что и было показано выше.

[1] Так как движение является произведением отражений.

Фигуру F' мы назовем **конгруентной** фигуре F, если существует движение, преобразующее фигуру F в фигуру F'. Таким образом, шаг за шагом осуществляется проективное построение учения о конгруентности.

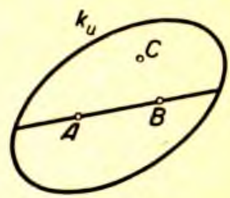
Так как каждое движение **W** является коллинеарным преобразованием пространства, не изменяющим его абсолюта, то группа преобразований $\{\mathbf{W}\}$ является подгруппой группы подобия $\{\mathbf{M}\}$[1].

Поэтому учение о конгруентности фигур как о свойствах фигур, инвариантных по отношению к преобразованиям группы $\{\mathbf{W}\}$, должно быть отнесено к метрической геометрии группы движений $\{\mathbf{W}\}$.

На этом закончим краткий очерк развития проективной, аффинной и метрической геометрий в пространстве.

§ 78. Геометрия Лобачевского в проективной форме.

В § 70—72 была показана возможность построения обыкновенной евклидовой геометрии в проективной форме. С этой целью на проективной плоскости был задан так называемый «абсолют». В качестве последнего служила произвольно выбранная на плоскости прямая и произвольная эллиптическая инволюция на ней. Тогда, рассматривая упомянутую прямую как «несобственную» прямую на плоскости, а эллиптическую инволюцию на ней как «абсолютную» инволюцию этой плоскости, можно чисто проективным путем установить необходимые метрические понятия обыкновенной евклидовой геометрии. В частности, рассматривая те коллинеарные преобразования проективной плоскости, которые переводят указанный «абсолют» в себя, мы получили в их числе проективные «движения», позволяющие установить понятие конгруентности фигур. Именно, конгруентными назывались те фигуры, которые могли быть совмещены при помощи движений, определяемых указанным выше способом (§ 71).



Черт. 291.

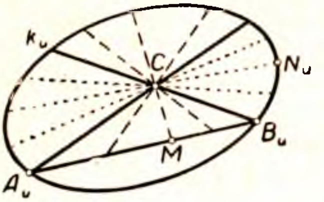
Как будет показано далее, аналогичным образом можно осуществить на проективной плоскости и неевклидову геометрию, если выбрать соответствующий «абсолют» на проективной плоскости.

Так, можно построить геометрию Лобачевского, если в качестве «абсолюта» выбрать невырожденную кривую второго порядка (или так называемую «овальную» кривую второго порядка).

Пусть на проективной плоскости задана овальная кривая второго порядка k_u, которую и будем считать абсолютом плоскости (черт. 291). Эта кривая разделяет проективную плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Точки внутренней области будем

---

[1] Метрически эта подгруппа выделяется тем, что отношение подобия равно единице для всех преобразований **W**.



Черт. 292.

называть «собственными» или «действительными» точками. Точки самой овальной кривой, служащей абсолютом плоскости, назовем «несобственными» или «бесконечно удаленными». Наконец, точки внешней области будем называть «идеальными». «Собственные» точки и являются точками неевклидовой геометрии.

В качестве «прямых» нашей неевклидовой геометрии будут служить хорды овальной кривой (лежащие в ее внутренней области). Так как концы этих хорд являются несобственными точками, то «прямые» неевклидовой геометрии являются открытыми отрезками.

В указанной системе (собственных) точек и прямых могут быть сохранены те же отношения принадлежности, порядка и непрерывности, которые имеют место как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского.

Так, например, придавая понятию «принадлежность» обычный смысл, будем иметь: «две различные точки A и B определяют единственную принадлежащую им прямую (AB)».

«Существуют три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой», и т. д.

Далее, можно установить обычные как для геометрии Евклида, так и для геометрии Лобачевского отношения порядка. Точка на прямой разбивает последнюю на две части. Две точки A, B прямой устанавливают порядок точек на прямой и определяют отрезок AB. Прямая делит неевклидову плоскость (под которой мы разумеем внутреннюю область овальной кривой k_u) на две части. Задание точки C, не лежащей на этой прямой, определяет соответствующую ей часть плоскости[1].

Сохраняется в рассматриваемой геометрии и свойство непрерывности точек на прямой, непрерывности всей неевклидовой плоскости. Однако с точки зрения аксиомы о параллельных мы обнаружим, что в построенной геометрической системе имеет место аксиома Лобачевского, если будем называть «параллельными» две прямые, пересекающиеся в несобственной или бесконечно удаленной точке. В самом деле, пусть имеем прямую A_uB_u и не лежащую на ней точку C (черт. 292). В таком случае через точку C можно провести две прямые, параллельные прямой A_uB_u, а именно прямые CA_u и CB_u. Эти две прямые разбивают пучок прямых с центром C на две части: 1) прямые, пересекающие прямую A_uB_u, как например прямая CM, и 2) прямые, не пересекающие прямой A_uB_u, к числу которых принадлежит, например, прямая CN_u.

Таким образом, в рассматриваемой геометрической системе имеет место аксиома о параллельных Лобачевского.

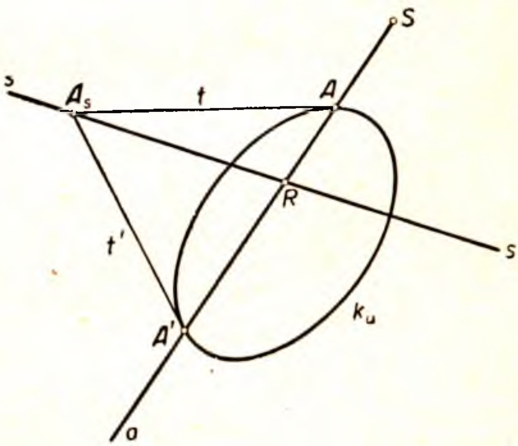
---

[1] Иными словами, будет иметь место так называемая аксиома Паша (см. «Основания геометрии» В. Костина, § 3).

Покажем далее, что в рассматриваемой системе можно осуществить метрическую геометрию Лобачевского в проективной форме. Для этого введем понятие «движения» аналогично тому, как это было сделано в главе VI при построении метрической евклидовой геометрии. Будем называть «движениями» коллинеарные преобразования плоскости, сохраняющие неизменным ее абсолют, т. е. кривую k_u. Такие проективные преобразования носят названия *автоморфизмов* относительно данного абсолюта.

В частности, назовем «отражением» преобразование гомологии, переводящее овальную кривую второго порядка, т. е. абсолют плоскости, в себя. Напомним, что при построении евклидовой геометрии в проективной форме мы также называли отражениями гомологии, переводящие абсолют плоскости (несобственную прямую с эллиптической инволюцией на ней) в себя.

Рассмотрим теперь какую-либо гомологию на проективной плоскости с центром S и осью s, обладающую тем свойством, что она преобразует овальную кривую, т. е. абсолют плоскости, в себя (черт. 293).



Черт. 293.

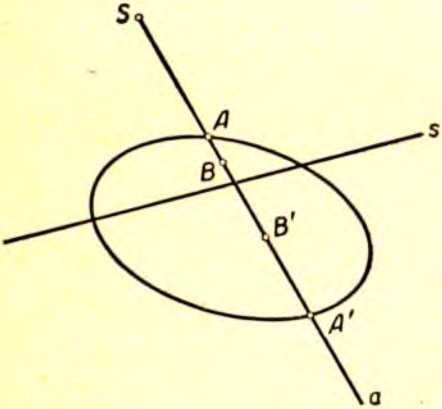
Пусть a—какая-либо прямая, проходящая через центр гомологии S и пересекающая абсолют в точках A и A'. Если эти точки не лежат на оси гомологии, то они не являются двойными и преобразуются одна в другую. Обозначим буквами t и t' касательные в точках A и A' к кривой k_u. Гомология преобразует касательную t в точке A в касательную t' в точке A'. Прямые t и t' как соответственные в гомологии должны пересекаться на оси гомологии s. Отсюда заключаем, что полюс A_s прямой a лежит на оси гомологии s. Поэтому прямая a проходит через полюс оси гомологии s. Так как это заключение справедливо по отношению к каждой прямой пучка S, пересекающей абсолют плоскости, то отсюда приходим к выводу, что центр гомологии S и является полюсом оси гомологии s.

Предположим, что S и s взаимно полярны относительно абсолютной кривой k_u. В таком случае каждая прямая a, пересекающая абсолютную кривую и принадлежащая пучку S, образует гармоническую четверку точек, а именно: пару точек A и A' пересечения с овальной кривой k и пару точек S, R (буквой R

обозначена точка пересечения этой прямой с полярой s). Полюс S как центр гомологии, поляра s как ось гомологии и пара точек A, A' как соответственные точки гомологии определяют, следовательно, инволюционную гомологию, в которой точки A и A' преобразуются одна в другую и абсолютная кривая k_u переходит в себя.

Таким образом, мы установили, что гомологии, переводящие абсолютную кривую в себя, т. е. *гомологии, названные нами «отражениями», имеют взаимно полярные центр и ось относительно абсолютной кривой.*

С другой стороны, каждая взаимно полярная пара, состоящая из точки и прямой, является центром и осью гомологии, переводящей абсолютную кривую в себя, т. е. центром и осью «отражения».



Черт. 294.

Далее мы убедимся в том, что каждое «отражение» преобразует точки внутренней области овальной кривой в точки той же внутренней области. Пусть, например, имеем «отражение» с центром S и осью s, переводящее точку B в B' (черт. 294).

Обозначим буквами A и A' точки пересечения прямой a с абсолютной кривой k_u. Мы предполагаем, что точка B собственная, т. е. лежит внутри абсолютной кривой k_u. Если центром отражения является собственная точка, то $SB \mathrel{\ddot{-}} AA'$, а следовательно, $SB' \mathrel{\ddot{-}} A'A$.

Если же центр «отражения» — идеальная точка, т. е. лежит вне кривой k_u, то имеем $SB \div AA'$, но тогда $SB' \div A'A$.

Следовательно, во всех случаях точка B' оказывается собственной, т. е. лежит внутри овальной кривой.

Можно было бы доказать, что всякая коллинеация, преобразующая абсолютную кривую k_u в себя, сводится к произведению конечного числа «отражений».

Поэтому мы можем сказать, что «движениями» являются коллинеации, полученные путем умножения «отражений».

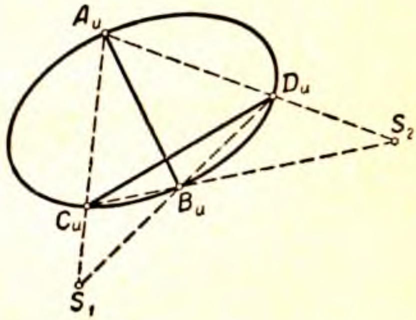
Нетрудно убедиться, что «движения» образуют группу преобразований. Доказательство этого положения можно провести совершенно так же, как это было сделано в случае построения евклидовой геометрии (§ 71).

При помощи проективных «движений» может быть построено учение о конгруентности фигур в геометрии Лобачевского. Как и в случае обыкновенной евклидовой геометрии, фигуру Ф будем называть «конгруентной» фигуре Ф′, если существует «движение», преобразующее фигуру Ф в фигуру Ф′.

Свойства понятия «конгруентности» фигур могут быть выведены из свойств «движений» (ср. § 71).

Для того чтобы показать некоторые особенности метрической геометрии Лобачевского, надо провести дальнейшее исследование проективных «движений».

Покажем, что всегда существуют два «отражения», с помощью которых одну из заданных прямых можно преобразовать в любую другую. Так, если на чертеже 295 имеем прямые A_uB_u и $C_u D_u$, то каждую из них можно преобразовать в другую с помощью «отражений» (S_1) и (S_2). Различие в этих «движениях» заключается в том, что первое переводит несобственные точки A_u и B_u одной прямой соответственно в несобственные точки C_u и D_u другой. Второе «движение» те же несобственные точки первой прямой переводит соответственно в точки D_u и C_u второй.



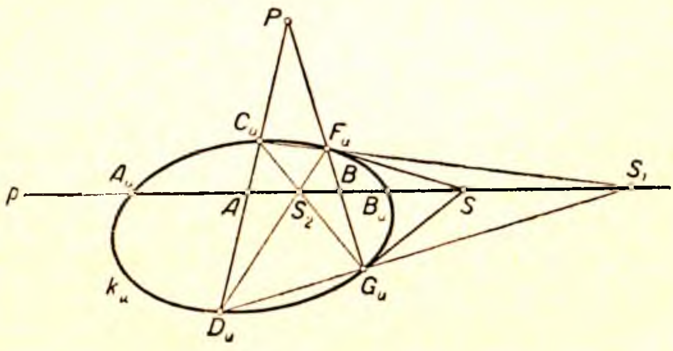
Черт. 295.

Далее, как мы сейчас увидим, каждую прямую можно так «передвигать» по самой себе, что заданная на этой прямой точка будет совмещена с любой другой точкой той же прямой.

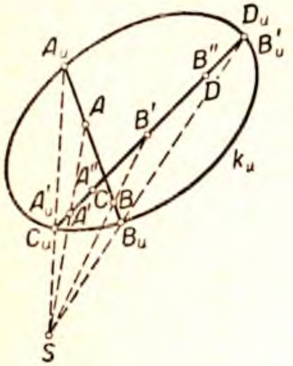
Предположим, например, что на прямой $A_uB_u \equiv p$ даны точки A и B (черт. 296).

Покажем, что существует движение, преобразующее прямую p в себя, причем точка A прямой преобразуется в точку B.

Обозначим буквой P полюс прямой p относительно абсолюта k_u.



Черт. 296.



Черт. 297.

Проведем прямые PA и PB. Точки их пересечения с кривой k_u обозначим соответственно буквами C_u, D_u и F_u, G_u.

В полном четырехугольнике $C_uD_uF_uG_u$ точки P, S_1, S_2 как точки пересечения противоположных сторон являются диагональными. Поэтому поляра p полюса P проходит через S_1 и S_2.

Каждое из «отражений» с центрами S_1 и S_2, очевидно, преобразует прямую p в себя как двойную прямую. При этом точки A_u и B_u поменяются своими местами. Так как, кроме того, прямая C_uD_u перейдет в прямую F_uG_u[1], то, следовательно, точка A перейдет в точку B.

Заметим, что «движение» может быть выполнено и таким образом, что несобственные точки A_u и B_u прямой p останутся на своих местах. Для этого достаточно после выполнения «отражения» S_1 (или S_2) произвести дополнительно «отражение» с центром в полюсе S прямой PB. Это «отражение» возвратит точки A_u и B_u в первоначальное положение и не изменит положение точки A ($\equiv B$).

Таким образом, движение будет состоять из произведения двух отражений: $S_1 \cdot S$ (или $S_2 \cdot S$).

На основании определения конгруентных фигур в построенной геометрической системе два отрезка считаются конгруентными, если существует «движение», переводящее каждый из них в другой. Предположим, что речь идет об отрезках AB и CD. Отрезок AB лежит на прямой A_uB_u, причем $AB_u \div BA_u$. Отрезок CD лежит на прямой C_uD_u, причем $CD_u \div DC_u$ (черт. 297).

Докажем, что для конгруентности этих отрезков *необходимо и достаточно* выполнение следующего условия:

$$(ABA_uB_u) = (CDC_uD_u).$$

Необходимость указанного условия вытекает из того, что согласно определению конгруентности должно существовать «движение», переводящее прямую $A_u B_u$ в прямую C_uD_u, а отрезок AB в отрезок CD. При этом порядок расположения точек каждой четверки на прямой, разумеется, не может измениться. Поэтому при совпадении точек A_u и B_u соответственно с точками C_u и D_u точка A необходимо совпадет с точкой C, а точка B с точкой D.

Следовательно, обозначая знаком штрих (′) положение точек после выполнения движения, можем написать:

---

[1] Или в прямую G_uF_u (в случае «отражения» (S_2)).

$$(A'B'A'_uB'_u) = (CDC_uD_u) = (ABA_uB_u).$$

Достаточность условия может быть доказана, исходя из следующих соображений. Пусть имеем отрезки AB и CD, причем выполняется условие:

$$(ABA_uB_u) = (CDC_uD_u).$$

Произведем «отражение» S', переводящее прямую A_uB_u в прямую C_uD_u (черт. 297).

При этом будем иметь:

$$(ABA_uB_u) = (A'B'A'_uB'_u) = (A'B'C_uD_u).$$

Далее произведем «движение» прямой по себе, оставляющее несобственные точки C_u, D_u, на месте и совмещающее точку A' с точкой C. Тогда будем иметь:

$$(A'B'C_uD_a) = (A''B''C_uD_u) = (CB''C_uD_u),$$

откуда следует:

$$(CB''C_uD_u) = (ABA_uB_u) = (CDC_uD_u), \text{ или } B'' \equiv D.$$

А это означает, что отрезок AB «конгруентен» отрезку CD.

Виды движений в геометрии Лобачевского. До сих пор мы имели дело преимущественно с «отражениями», как одним из видов «движений» в рассматриваемой геометрической системе. В этом случае «движение» представляет собой преобразование гомологии, центр и ось которой взаимно полярны относительно абсолюта k_u и преобразуют последний в себя.

В более общей форме «движения» являются коллинеациями, преобразующими абсолют k_u в себя. Исследуем подробнее свойства проективных «движений» в геометрии Лобачевского. Как было выяснено ранее (см. § 55), коллинеация, не являющаяся гомологией, не может иметь более трех двойных точек и всегда имеет по крайней мере одну (действительную) двойную точку. Каждой двойной точке соответствует (ассоциированная) двойная прямая и обратно. Очевидно, что «движение» как коллинеация, сохраняющая без изменения абсолют k_u, для каждой двойной точки будет иметь в качестве ассоциированной двойной прямой поляру этой точки относительно абсолюта. Равным образом каждой двойной прямой «движения» будет соответствовать ее полюс относительно абсолюта как ассоциированная двойная точка.

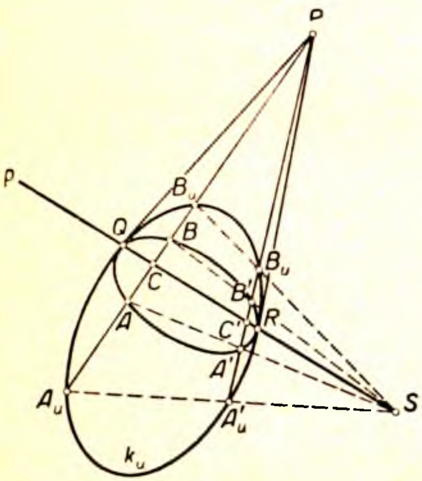
В связи со сказанным в геометрии Лобачевского возможны три вида «движений», не являющихся «отражениями».

1) *Перенесение вдоль прямой.*

Предположим, что двойная прямая p «движения» пересекает абсолют в точках Q и R. Так как «движение» оставляет абсолют k_u и двойную прямую на месте, то их общие точки Q и R также остаются на месте, т. е. являются двойными. Третьей двойной точкой является полюс P двойной прямой. Двойная прямая $P \equiv QR$ и касательные PQ и PR представляют тройку двойных прямых «движения».

Обозначим указанное «движение» буквой Π. Пусть «движение» Π преобразует точку A в точку A' (черт. 298). В таком случае прямая PA преобразуется в прямую PA' и будем иметь: $(ACA_uB_u) = (A'C'A'_uB'_u)$, где буквами C и C' обозначены точки пересечения упомянутых прямых с двойной прямой p, а буквами A_u, B_u и A'_u, B'_u — несобственные точки этих прямых.

Отсюда заключаем, что отрезок AC преобразуется в конгруентный отрезок $A'C'$ ($AC = A'C'$). То же самое можно сказать об отрезке BC ($BC = B'C'$). Заметим еще, что «отражение» с центром P и осью p преобразует прямую PC в себя, причем точки A_u, и B_u меняются местами. Следовательно, $\angle A_uCQ = \angle B_uCQ$ и прямая PC перпендикулярна к прямой p. То же самое можно сказать и о прямой PC' ($PC' \perp p$). Таким образом, можем сказать, что точки A и A' находятся на равных «расстояниях» от прямой p.



Черт. 298.

Рассмотрим геометрическое место точек, «одинаково удаленных» от прямой p. Например, отстоящих от прямой p на «расстояние» CA (предположим, что A— одна из точек этого геометрического места).

Чтобы построить на нашем чертеже искомое геометрическое место, рассмотрим гомологию с центром P и осью p, преобразующую точку A_u в точку A. Пусть A'_u — произвольная точка абсолюта k_u. Построим ей соответственную в указанной гомологии. Эта точка найдется как точка пересечения прямых PA'_u и AS. (Напомним, что прямая $A_uA'_u$ должна пересекаться со своей соответственной прямой AS на оси гомологии p.) Следовательно, имеем:

$$A' = PA'_u \times AS.$$

С другой стороны, точка P является полюсом прямой p, поэтому прямая p должна проходить через точку пересечения прямых $A_uA'_u$ и $B_uB'_u$. Следовательно, эта точка совпадает с точкой S. Прямые PC и PC' «перпендикулярны» к прямой p, и, кроме того, в силу перспективного расположения точек на прямых PC и PC' будем иметь:

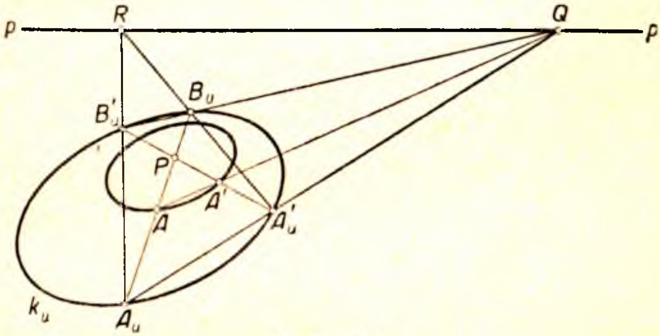
$$(ACA_uB_u) = (A'C'A'_uB'_u).$$

Поэтому можем сказать, что точка A' удалена от прямой p на такое же «расстояние», как и точка A, т. е. обе эти точки принадлежат искомому геометрическому месту. Отсюда заключаем, что последнее представляет собой на нашем чертеже кривую второго порядка, соответственную абсолюту k_u в гомологии с центром P и осью p. Эта кривая касается абсолюта k_u в его точках пересечения с осью p. В геометрии Лобачевского она носит название «линии равных расстояний» или «эквидистанты».

Возвращаемся к рассмотрению «движения», двойная прямая которого пересекает абсолют в точках Q и R. Теперь мы видим, что каждая точка в этом «движении» перемещается по «эквидистанте», проходящей через эту точку и имеющей своим основанием двойную прямую p. Отсюда и название рассматриваемого «движения» — «перенесение вдоль прямой p». Отметим, что все «эквидистанты», основанием которых служит прямая p, преобразуются таким движением в себя.

2) *Вращение вокруг собственного центра.*

Предположим, что двойная прямая p «движения» не пересекает абсолют k_u. Следовательно, имеем идеальную двойную прямую и собственную двойную точку P — полюс двойной прямой. Других



Черт. 299.

(действительных) двойных элементов указанное «движение», очевидно, не может иметь

Обозначим такое «движение» буквой V. Предположим, что движение V преобразует точку A в точку A' (черт. 299). При этом прямая PA преобразуется в прямую PA' и будем иметь:

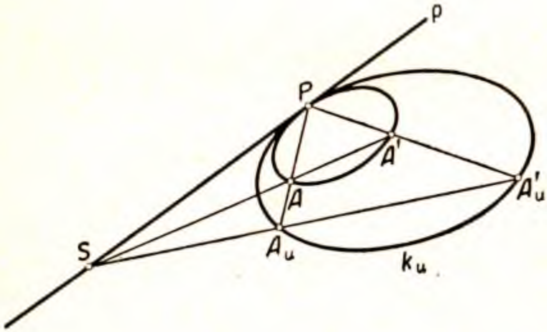
$$(APA_uB_u) = (A'PA'_uB'_u),$$

где буквами A_uB_u и $A'_uB'_u$ обозначены несобственные точки пересечения упомянутых прямых с абсолютом k_u.

Следовательно, отрезок AP преобразуется в конгруентный ему отрезок $A'P$. Иными словами, «движение» не изменяет расстояний точек от точки P, которую естественно назвать «центром» «движения», а само «движение» — «вращением вокруг центра P».

Рассмотрим геометрическое место точек, «равно удаленных от точки P». Это геометрическое место можно назвать «окружностью» на плоскости Лобачевского. Построим на нашем чертеже «окружность» радиуса PA. Для этого рассмотрим гомологию с центром P и осью p, преобразующую точку A_u в точку A. Пусть A'_u — произвольная точка абсолюта k_u. Построим соответствующую ей точку в указанной гомологии. Обозначим буквой Q точку пересечения прямых $A_uA'_u$ и $B_uB'_u$. Точка Q как диагональная для четырехугольника $A_uA'_uB_uB'_u$ должна лежать на поляре p (см. § 57). Теперь нетрудно построить точку, соответственную точке A'_u в гомологии (P, p; A_u, A). Она найдется как точка пересечения прямой PA'_u с прямой AQ:

$$PA'_u \times AQ = A'.$$



Черт. 300.

Из перспективного расположения точек на прямых PA и PA' видим, что $(APA_uB_u)=(A'PA'_uB'_u)$, или $A'P=AP$. Но это означает, что точка A' является точкой «окружности» с центром P и радиусом AP. Таким образом, на нашем чертеже эта окружность изобразится кривой второго порядка, соответствующей абсолюту k_u в гомологии (P, p; A_u, A).

Из сказанного заключаем, что «вращение вокруг центра» переводит каждую точку A в точку «окружности», проходящей через точку A. «Вращение с центром P» преобразует все «окружности» с тем же центром в себя.

3) «*Вращение с несобственным центром*».

В этом случае двойная прямая «движения» касается абсолюта k_u. Следовательно, обе точки пересечения двойной прямой с абсолютом совпадают с точкой прикосновения. С той же точкой совпадает полюс P двойной прямой. Таким образом, все три двойные точки такого «движения» находятся в точке P.

Рассматривая этот случай как предельный, мы можем от чертежа 299 перейти к чертежу 300. При этом точки B_u, B'_u и P,

R совпадают, а прямая $B_u B'_u$ совпадает с двойной прямой p. В результате мы получаем чертеж 300.

Как и в предыдущих случаях, мы можем чертеж 300 истолковывать двояким образом: либо как преобразование «движения» («вращения с несобственным центром P»), переводящего точку A в точку A', а точку A_u в точку A'_u, либо как гомологию с центром P и осью p, в которой точка A_u переходит в точку A, а точка A'_u в точку A'. В этой гомологии абсолютная кривая k_u переходит в кривую второго порядка, касающуюся абсолюта в точке P. В геометрии Лобачевского такая линия носит название «предельной» или «орицикла».

«Вращение с несобственным центром» перемещает все точки плоскости Лобачевского по соответствующим «орициклам» с центром в точке P. «Орициклы» являются инвариантными линиями в этом «движении».

На этом мы заканчиваем краткий очерк построения геометрии Лобачевского в проективной форме. Более подробные сведения можно найти в специальной литературе, посвященной этому вопросу. Отметим только, что осуществление геометрии Лобачевского в проективной форме является безупречным доказательством ее непротиворечивости.

К этому надо добавить, что и третья геометрическая система, известная под названием *геометрии Римана*, может быть построена в проективной форме, если в качестве абсолюта плоскости будет принята *мнимая кривая второго порядка*, например мнимая окружность: $x^2 + y^2 = -1$, все точки которой, очевидно, мнимые. Это показывает, что иногда целесообразно строить проективную геометрию с использованием комплексных чисел. Тогда можно в проективной форме построить геометрию Римана, используя аналитический аппарат. Для этого следует рассмотреть автоморфизмы относительно мнимого абсолюта ($x^2 + y^2 = -1$).

Аналогично геометрии Лобачевского можно находить точки пересечения прямых с мнимым абсолютом и составлять сложное отношение четырех точек прямолинейного ряда и четырех прямых пучка. Таким путем может быть построена метрика геометрии Римана.

Заметим, что неевклидова геометрия Лобачевского называется также гиперболической, а неевклидова геометрия Римана—эллиптической. Как мы видим, геометрия Евклида и обе неевклидовы могут быть рассмотрены с проективной точки зрения.

Благодаря этому стало возможным сравнительное изучение трех геометрических систем (Евклида, Лобачевского и Римана) в проективной форме. Большое принципиальное значение такого исследования является очевидным.

УПРАЖНЕНИЯ

1. На плоскости даны «несобственная» прямая и три вершины A, B, C «параллелограмма». Построить четвертую вершину D.

2. Даны «несобственная» прямая и треугольник ABC. Провести «медианы» треугольника.

3. Даны «несобственная» прямая, а также диагональ AC «параллелограмма» $ABCD$, направление (прямая g) другой его диагонали BD и направление (прямая f) стороны AB «параллелограмма». Построить «параллелограмм».

4. Даны «несобственная» прямая и треугольник ABC. Показать, что «средняя» линия треугольника «параллельна» соответствующей стороне.

5. Даны кривая второго порядка (начерчена) и произвольная точка плоскости O. Принимая точку O за «центр» данной кривой, построить «несобственную» прямую плоскости.

6. Даны два «диаметра» кривой второго порядка (отрезки AB и CD, пересекающиеся в точке O). Построить «несобственную» прямую.

7. Даны «несобственная» прямая u плоскости, а также «центр» O и хорда AB кривой второго порядка. Построить направление диаметра, «сопряженного» хорде AB.

8. Доказать из соображений проективного характера, что отрезок касательной, отсекаемый асимптотами гиперболы, делится в точке прикосновения пополам.

9. Показать, что отрезки, образованные точками пересечения произвольной секущей с гиперболой и ее асимптотами, всегда равны.

10. Даны «несобственная» прямая u, а также кривая второго порядка (начерчена) и произвольная прямая g; построить касательные к данной кривой, «параллельные» направлению g.

11. Дана «несобственная» прямая u и «абсолютная» инволюция на ней (две пары соответственных точек произвольной эллиптической инволюции). Построить «высоты» данного треугольника ABC и его «ортоцентр».

12. Дан «абсолют» плоскости (как и в предыдущей задаче). Кроме того, дана диагональ AC «прямоугольника» и направление его стороны AB. Построить «прямоугольник».

13. Показать, что «отражение» относительно «оси» кривой второго порядка преобразует последнюю в себя.

14. Дан «абсолют» плоскости. Дан произвольный отрезок AB. Показать, что коллинеацию, совмещающую отрезок OA с отрезком OB, где O — «середина» отрезка AB, можно рассматривать как частный случай «вращения».

Указание. «Вращение» является произведением двух «отражений», оси которых проходят через O.

15. Дан «абсолют» плоскости. Дан также «параллелограмм» $ABCD$. Совместить две противоположные стороны «параллелограмма» при помощи «параллельного» переноса, составленного из двух подходящим образом выбранных «отражений».

16. Дан «абсолют» плоскости и треугольник ABC. Построить треугольник $A'B'C'$, «подобный» данному в «подобии», определяемом как произведение следующих двух преобразований: «гомотетии», в которой прямой AB соответствует «параллельная» прямая $A'B'$ (дана на чертеже), и «отражения» с осью AB.

17. Показать, что вращения с общим центром образуют коммутативную[1] группу.

18. Показать, что параллельные переносы образуют группу.

19. Показать, что все движения первого рода образуют группу, в то время как движения второго рода группы не образуют.

20. Показать, что совокупность гомологий не образует группы.

Указание. Воспользоваться теоремой § 52 о возможности представить всякую коллинеацию в виде произведения двух гомологий.

21. Показать, что все шары пространства проходят через мнимую основную кривую второго порядка абсолютного полярного соответствия несобственной плоскости (мнимый круг).

Указание. Воспользоваться для этого секущими плоскостями.

---

[1] Группа называется коммутативной (или абелевой), если произведение двух любых преобразований группы не зависит от порядка их выполнения.

22. Приведите примеры коллинеаций, произведение которых не обладает переместительностью. Что можно сказать о коммутативности групп:

$$\{\mathrm{K}\}, \quad \{\mathrm{A}\}, \quad \{M\} \text{ и } \{\mathrm{W}\} \ ?$$

23. При помощи линейки и неподвижной окружности Штейнера постройте квадрат $ABCD$, сторона которого AB дана на чертеже.

24. При тех же условиях построить равносторонний треугольник ABC по данной на чертеже его стороне AB.

25. Даны «абсолют» плоскости и сторона AB «квадрата» $ABCD$. Пользуясь гомологией, преобразующей данную «абсолютную» инволюцию прямой и в абсолютную инволюцию на несобственной прямой (§ 71, стр. 278), построить «квадрат» $ABCD$ как фигуру, соответственную квадрату $A'B'C'D'$ в указанной гомологии.

26. Выполнить построение «равностороннего» треугольника ABC по заданной его стороне AB в условиях, аналогичных предшествующей задаче.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

§ 79. Элементарная геометрия у древних греков. Первые понятия проективной геометрии.

Вся история развития геометрии дает поучительный пример того, как эта наука, материальные корни которой берут свое начало из жизненных потребностей человеческого общества (землемерие, постройка жилищ, живопись, в дальнейшем фабрично-заводская промышленность и т. д.), достигла высокого теоретического уровня, выработала свои специфические и вместе с тем весьма общие методы, которые в свою очередь сделали возможным новые плодотворные применения геометрии к практическим вопросам.

«Прежде чем прийти к мысли выводить *форму* цилиндра из вращений прямоугольника вокруг одной из его сторон, нужно было исследовать некоторое количество реальных прямоугольников и цилиндров, хотя бы и в очень несовершенных формах. Как и все другие науки, математика возникла из *практических нужд* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные от реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться» (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1952, стр. 37).

Изучение окружающих предметов действительного мира приводило к установлению геометрических закономерностей различного характера, в частности закономерностей, связанных с измерением геометрических тел, или «метрических» закономерностей и закономерностей «позиционных», зависящих от взаимного расположения тел и их элементов. Эти последние закономерности привели к созданию той ветви геометрии, которая получила название «геометрии положения» или «проективной геометрии».

Как увидит читатель из этого очерка, для возникновения и развития проективной геометрии большое значение имели стремления человечества в различные исторические эпохи своего существования изображать окружающие предметы на каких-либо поверхностях. Попытки изображений, зарисовок имеют более древнее происхождение, чем возникновение письменности. Рисунки на примитивных предметах первобытного инвентаря, стенная живопись и живопись на вазах, иконопись и тому подобные изображения отражали быт, верования людей, а также их эстетические стремления.

Поэтому понятно, что первые зачатки и идеи будущего геометрического учения о соответствии точек изображаемого объекта с точками его изображения на плоскости или какой-либо поверхности относятся к глубокой древности. Эти древнейшие изображения постепенно развивались, и подмеченные правила послужили началом для образования метода проекций, следы которого можно видеть уже у многих греческих математиков. В частности, отметим «Оптику» Евклида и Гелиодора в III в. до нашей эры и стереографическую проекцию, открытую Гиппархом в 161—126 гг. до н. э.[1]. Геометрия достигла в древней Греции блестящего развития как со стороны фактического материала, так и в смысле подведения некоторого теоретического фундамента. В этом отношении особенно замечательная роль принадлежит «Началам» Евклида, в которых была сделана попытка систематизировать весь накопленный геометрический материал и построить его на основе выделенных в начале аксиом, постулатов и определений. Что же касается геометрических фактов, то каждый школьник в курсе элементарной математики слышит о теореме Пифагора (VI в. до н. э.), луночках Гиппократа (V в. до н. э.), постулате Евклида (III в. до н. э.), теореме Птолемея (II в до н. э.) и т. п.

Одним из самых замечательных достижений греческих геометров является разработанная ими элементарная теория конических сечений. Открытие этих кривых приписывается Менехму (IV в. до н. э.), ученику Платона, который, однако, не заметил их стереометрического происхождения как сечений конуса вращения[2]. Сочинения, специально посвященные коническим сечениям, были написаны Аристеем (IV в. до н. э.), Евклидом (III в. до н. э.) и Аполлонием Пергским (250—190 гг. до н. э.).

Последний написал «Конические сечения» в восьми книгах. Это сочинение «можно назвать венцом всей греческой геометрии» (Ващенко-Захарченко). В нем содержится систематическое учение о конических сечениях, в частности свойства сопряженных диаметров, асимптоты гиперболы и др. Помимо большого количества нового фактического материала, следует отметить принципиальную и методологическую ценность работы Аполлония. Так, он первый получил все три вида конических сечений на одном и том же конусе, рассматривая не только конусы вращения, но и косой конус с круговым основанием. Кроме того, он считал его состоящим из двух полостей. Наконец, ему же принадлежат и самые

---

[1] Некоторые историки приписывают эту работу Птолемею.
[2] См.: Ц а х а р и а с, Введение в проективную геометрию, 1922.

названия: эллипс, парабола и гипербола, хотя некоторые из них употреблялись и другими греческими математиками.

Следует отметить, что Аполлонию были известны гармонические свойства полного четырехугольника.

В богатом наследстве древних греков мы отметим еще те работы и отдельные факты, которые послужили для дальнейшего развития геометрии в проективно-синтетическом направлении. Сюда относятся главным образом сочинение Паппа (III в. н. э.) и отчасти Серена (II в. н. э.) и Менелая (I в. н. э.). Сочинение первого носит название «Математические коллекции» и состоит из восьми книг. Впрочем, из них сохранились до нашего времени только шесть последних и небольшой отрывок из второй книги. В этой работе имеются первые начатки понятия об инволюции, и в частности об инволюционном соотношении трех пар точек, которое затем много позднее было открыто Дезаргом. Паппом было также доказано предложение, являющееся частным случаем теоремы Паскаля о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, а именно тот случай, когда коническое сечение представляет собой пару прямых. Сереном написано сочинение «О сечении цилиндра и конуса». Он дал теорему, которая на современном математическом языке может быть выражена так: «При пересечении гармонического пучка прямой линией получаем на ней гармонический ряд точек».

Теорема Менелая о трансверсалях в треугольнике и в настоящее время помещается в учебниках по элементарной, аналитической или проективной геометрии[1].

§ 80. Учение о перспективе в эпоху Возрождения.

Хотя уже древние греки и римляне достигли некоторых успехов в перспективе, но настоящий расцвет ее относится к эпохе Ренессанса и совпадает с блестящим периодом в истории живописи.

Так, Альбрехт Дюрер (1471—1528) написал труд, посвященный исследованию законов перспективы и изданный в 1525 г. в Нюрнберге. В этом сочинении он рассматривает плоскость, пересекающую пирамиду лучей, направленных из точки зрения к различным точкам предмета (картинную плоскость), и пользуется методом ортогональных проекций (план и вертикальная проекция).

Дюрер пользовался также «точками расстояний» (Distanzpunkten) для построения масштаба глубин. После него очень многие немецкие живописцы писали о перспективе.

В первой половине XV в. в Италии целый ряд художников и архитекторов применяют в своем искусстве правила перспективы.

---

[1] У Менелая теорема была дана для сферического треугольника, пересекаемого большим кругом.

Талантливый архитектор и ученый Альберти (1402—1472) первый написал книгу о перспективе (как предполагают, около 1446 г.), которая была издана на латинском языке в 1511 г. под названием «De Pittura».

В этом сочинении Альберти описывает способ построения перспективы при помощи сетки, имеющий большое практическое значение. Он применяет в своих построениях также масштабные точки, в которых должны сходиться диагонали квадратов. Доказательства этого свойства масштабных точек он не дает, много раз замечая, что тем, которые не понимают справедливости его построений с первого взгляда, никакое красноречие не поможет.

Разносторонний гений Леонардо да Винчи (1452—1519) проявил себя и в области перспективы. Леонардо написал систематическое, превосходное для своего времени изложение законов перспективы под заглавием «Trattato della Pittura».

Величайшие мастера итальянской живописи, как Рафаэль Микеланджело, Тициан, Веронезе и другие, применяют в своем искусстве правила перспективы. При этом Рафаэль и Микеланджело придерживаются их особенно строго, в то время как, например, Веронезе допускает значительные отступления. Так, в его картине «Брак в Кане» имеется семь точек зрения и пять линий горизонта.

С научной стороны особенное значение имело сочинение о перспективе, написанное Гвидо Убальди в 1600 г. В этом сочинении разработано общее учение о точках схода, которые Убальди назвал puncti concursi; даны 23 правила построения перспективы и сделаны первые шаги в установлении понятия коллинеации. Убальди занимался также определением натуральных размеров фигур по их изображениям, положив этим начало той ветви начертательной геометрии, которая в дальнейшем в связи с изобретением фотографии получила самостоятельное значение и стала называться «фотограмметрией». Уже из этого перечисления видно капитальное значение труда Убальди, но оно еще усиливается его исследованиями вопросов рельефной перспективы, построения теней и пр.

Что же касается применения перспективы в русском изобразительном искусстве этого периода, то, как можно судить по некоторым миниатюрам из рукописей XVI в., элементы перспективы находили свое место в связи с условиями композиции изображения. Развитие перспективных проекций в русском изобразительном искусстве шло самостоятельными путями. Русские художники XVIII в. (Шибанов, Фирсов, Алексеев и др.) уже вполне владели теорией перспективы и применяли ее с большим мастерством.

Блестящее развитие живописи и архитектуры в эпоху Ренессанса вызвало громадное внимание к вопросам перспективы и в такой степени продвинуло ее теоретическую разработку, что значение этих результатов для самой геометрии не замедлило сказаться.

§ 81. Период создания проективной геометрии.

Ж. Дезарг.

Задачи перспективы послужили источником замечательных обобщений и положили начало проективной геометрии.

В 1636 г. Дезарг написал небольшое сочинение под заглавием «Общий метод изображения предметов в перспективе» (Париж, 1636). В этой работе он впервые применяет метод координат для построения перспективных масштабов. В качестве одной из осей он выбирает линию пересечения картинной и предметной плоскостей, второй осью служит перпендикуляр к предметной плоскости, лежащий в картинной плоскости, а третьей — перпендикуляр к картинной плоскости, лежащий в предметной. Следовательно, картинная и предметная плоскости служат двумя координатными плоскостями, а третья к ним перпендикулярна.

На осях координат наносятся масштабы широт, высот и глубин, при этом последний дается в перспективе[1].

Другое сочинение Дезарга, посвященное вопросу о пересечении конуса плоскостью («Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan», 1639), было утеряно, и только случайно в 1845 г. французский геометр и историк математики М. Шаль нашел у одного парижского букиниста рукописную копию с этого замечательного труда.

В нем Дезарг впервые рассматривает конические сечения как перспективу круга. Благодаря этому все учение о конических сечениях принимает чрезвычайно простую изящную форму, охватывая в одном методе все три вида кривых (эллипс, парабола и гипербола). Пользуясь перспективой как общим методом исследования, Дезарг пришел к необходимости рассматривать так называемые бесконечно удаленные элементы пространства. Он считал, что все параллельные прямые пересекаются в точке, которая является таким бесконечно удаленным элементом. Этим шагом Дезарг положил начало проективному представлению пространства (полное проективное пространство) и сделал возможным изучение проективных преобразований.

Наконец, третьим важнейшим результатом работы Дезарга является его исследование инволюционного соответствия точек

[1] Любопытно, что эта работа вызвала ряд нападок, в ответ на которые Дезарг объявил, что он уплатит 100 пистолей тому, кто найдет ошибку в его методе, и 1000 франков тому, кто предложит лучший метод.

прямолинейного ряда. Здесь и самый термин «инволюция» принадлежит Дезаргу и взят им из ботанического словаря[1]. Прямую, на которой расположен ряд точек, он называет «древом», точку отсчета отрезков — «стволом», самые отрезки — «ветвями» и т. д.

Б. Паскаль.

Дезарг рассматривал инволюционное расположение пар точек на прямой и ему принадлежит доказательство весьма общей теоремы о том, что пучок конических сечений, проходящих через четыре неподвижных центра, в пересечении с прямой дает инволюцию[2]. Наконец, необходимо упомянуть о теореме Дезарга относительно гомологических треугольников, подробно разобранной в настоящем курсе (§ 23). Фундаментальное значение этой теоремы для геометрии может быть замечено даже в настоящем кратком курсе.

Работы Дезарга заложили научные основы проективной геометрии, поэтому его следует по справедливости считать основоположником этой дисциплины. «Первые мысли, относящиеся к проективной геометрии, возникли в мастерской техника. Жирар Дезарг из Лиона — отец новой синтетической геометрии — был архитектор и инженер, интимный друг знаменитого философа и математика Декарта»[3].

Сочинение другого выдающегося французского геометра Паскаля появилось в виде афиши, которая должна была привлечь внимание к его основной работе о конических сечениях. Свой первый труд Паскаль назвал «Опыт исследования конических сечений» (Париж, 1649). Он написал его в возрасте 16 лет.

В этом замечательном сочинении уже была дана теорема о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, которая носит имя Паскаля. Последний предполагал разработать полную теорию конических сечений и, по свидетельству Шаля, получил из своей теоремы, которую он называл Hexagramma mysticum, до 400 следствий. Значение этой теоремы для теории конических сечений чрезвычайно велико, так как она устанавливает проективную связь шести точек конического сечения. Если пять из этих точек считать данными, то они определяют коническое сечение, и лю-

---

[1] Слово «инволюция» означает скрученное состояние молодых листьев.

[2] Частным случаем этой теоремы является инволюция, образованная пучком окружностей.

[3] Ц а х а р и а с, Введение в проективную геометрию, стр. 9.

Ж. В. Понселе.

бая шестая точка («текущая») должна удовлетворять некоторому условию, которое и выражает теорема Паскаля. Таким образом, эту теорему можно рассматривать как своего рода «проективный эквивалент» уравнения конического сечения.

Необходимо отметить, что внимание математиков этого периода было привлечено к новым методам исследования геометрических вопросов. Речь идет об аналитической геометрии, разработанной главным образом Ферма (1590—1663) и Декартом (1596—1650). Этим объясняется некоторое замедление в дальнейшем развитии проективно-синтетического направления геометрии. Однако через полтораста лет после смерти Дезарга и Паскаля (последний умер в 1662 г., а Дезарг на год раньше) наступает новый творческий период в области проективной геометрии, о котором идет речь далее. Особенно выдающееся значение для проективной геометрии имели работы французского геометра Жана-Виктора Понселе (1788—1867). Основное сочинение Понселе носило название «Трактат о проективных свойствах фигур, труд полезный для лиц, занимающихся приложениями начертательной геометрии и геометрическими измерениями на земной поверхности» (1822).

В этой работе, выполненной во время пребывания в русском плену в Саратове (с весны 1813 г. до осени 1814 г.), Понселе, подобно Дезаргу и Паскалю, пользуется центральной или конической проекцией для исследования геометрических свойств фигур. Так, изучение конических сечений приводится к окружности, изучение четырехсторонника — к параллелограмму и т. д. Исходя из операций проектирования и пересечения, Понселе рассматривает те свойства фигур, которые остаются неизменными (инвариантными) при этих операциях, т. е. проективные свойства. К ним относятся как «графически-проективные», так и «метрически-проективные» свойства. Последние связаны с понятием так называемого «двойного отношения», которое Понселе рассматривал для гармонических четверок (т. е. в случаях, когда двойное отношение равно — 1).

Понселе подверг изучению пространственные гомологии и ввел понятие бесконечно удаленной прямой как линии пересечения двух параллельных плоскостей.

Наконец, Понселе разработал учение о полярном соответствии точек и прямых и применил его к исследованию свойств фигур.

Честь этого открытия вместе с Понселе разделяет Жергонн, которому принадлежит и самый термин «поляра»[1]. Жергонн применил в своих исследованиях принцип двойственности, являющийся одним из плодотворнейших методов новой геометрии.

Я. Штейнер.

Именно благодаря этому методу Брианшон (1906) получил свою теорему об описанном шестистороннике, двойственную теорему Паскаля. Заметим также, что Брианшону принадлежит термин «гармонические пары».

Упомянем еще о «Геометрии положения» (1803) французского геометра Карно, в которой он выводит понятие полного четырехсторонника. Таким образом, были заложены основы новой, или проективной, геометрии как самостоятельной дисциплины.

Следует упомянуть также о начертательной геометрии, созданной главным образом трудами крупнейшего французского геометра Гаспара Монжа.

Монж был современником Великой французской революции, занимал одно время пост морского министра и был основателем знаменитой Политехнической школы. Метод ортогональных проекций на две плоскости был вызван к жизни развитием техники, теми многочисленными практическими задачами, которые требовали геометрического чертежа. Таковы различные вопросы архитектуры, фортификации, обделки камней, гномоники и т. п. Метод Монжа и до сего времени остается основным приемом построения инженерно-технических чертежей.

Только после Монжа, собравшего в стройное целое отдельные, весьма частные приемы начертательной геометрии, последнюю можно рассматривать как самостоятельную дисциплину, имеющую не только большое практическое, но и теоретическое значение. Вот что говорит об этом М. Шаль («История геометрии», стр. 240): «С появлением начертательной геометрии мгновенно расширилась как по понятиям, так и по средствам остававшаяся около века в пренебрежении чистая геометрия — наука, прославившая Евклида, Архимеда, Аполлония, бывшая в руках Галилея, Кеплера, Паскаля, Гюйгенса единственным орудием при их великих открытиях законов природы, наконец, наука, породившая бессмертные «Principia» Ньютона».

Существенное значение для развития проективной геометрии имело сочинение Мебиуса «Барицентрическое исчисление» (Лейпциг, 1827). В нем исследование проективных свойств фигур полу-

[1] Введенный им почти одновременно с математиком Сервуа (1810).

Н. И. Лобачевский.

чило полную общность. Так, Мебиусом была доказана проективность двойного отношения четырех точек на прямой. Он пришел к понятию взаимно однозначного соответствия (или преобразования) на плоскости и в пространстве, рассматривая, в частности, такие преобразования, которые являются коллинеациями, т. е. относят точке точку, а прямой — прямую. Но вместе с тем он рассматривает также и корреляции, т. е. преобразования, относящие точке прямую, а прямой — точку. Примером таких преобразований являются взаимно полярные преобразования точек в прямые и обратно относительно данного конического сечения.

Таким образом, Мебиус установил с полной общностью понятие проективитета как взаимно однозначного соответствия плоских полей. Вскоре после выхода в свет работы Мебиуса было опубликовано классическое сочинение Штейнера (1769—1863) под довольно длинным заголовком, начало которого гласило: «Систематическое изложение зависимости геометрических фигур одна от другой...» (Берлин, 1832).

В нем были даны замечательные теоремы (прямая и обратная) относительно образования конических сечений при помощи двух проективных пучков и, следовательно, впервые было найдено такое их определение, которое зависит лишь от равенства двойного отношения пучков и не опирается на метод проекций в пространстве. Развивая свою мысль, Штейнер дал методы проективного образования конуса и поверхностей второго порядка, пространственных кривых третьего порядка, поверхностей третьего порядка и т. д.

В своем изложении Штейнер пользуется принципом двойственности, открытым Понселе и Жергонном, и пишет теоремы в два столбца.

Упомянем еще об его известной работе, посвященной вопросу о геометрических построениях, выполняемых одной линейкой, если в плоскости чертежа дан постоянный круг. Эта работа Штейнера, как и работа итальянского геометра Маскерони «Геометрия циркуля» (1797), навсегда останется классическим трудом в области геометрических построений[1].

[1] Как установлено в последнее время, геометрические построения, выполняемые одним циркулем, были описаны значительно ранее датским математиком Георгом Мором в его книге «Евклид по-датски» (1672) (см. БСЭ, т. 10).

Почти одновременно со Штейнером и независимо от него обоснование и развитие проективной геометрии на основе двойного отношения было дано уже упоминавшимся ранее М. Шалем, работа которого под названием «Трактат о высшей геометрии» появилась в 1852 г. В других сочинениях Шаль обосновал так называемую «теорию характеристик». Он показал, в частности, что число конических сечений, касающихся одновременно пяти данных конических сечений, равно 3264.

В историческом очерке проективной геометрии нельзя обойти молчанием выдающегося значения для развития геометрической мысли работ великого русского ученого Николая Ивановича Лобачевского (1793—1856). Лобачевский впервые построил геометрию, логически столь же безупречную, как и геометрия Евклида, и в то же время существенно отличную от нее, основанную на допущении аксиомы, противоположной евклидовой аксиоме о параллельных. Этим была разрушена наивная вера в евклидову геометрию как единственно возможную, независимую от действительного мира и его опытного познания, априорную геометрическую систему.

Идеалистическому учению Канта был нанесен сокрушительный удар. Лобачевский проводил в своих работах материалистическую идею о том, что абстрактная геометрическая система отражает свойства действительного мира и ее применимость проверяется опытными данными.

После открытия Лобачевским неевклидовой геометрии стало развиваться стремление изучать и другие возможные геометрические системы (абстрактные геометрические «пространства») и соответствующие им свойства или явления действительного мира.

В дальнейшем это движение нашло свое выражение в построении различных геометрических систем, каждая из которых характеризуется присущей ей группой преобразований (Клейн). Источником всех этих идей явилось великое открытие Лобачевского, которого называли «Коперником геометрии» (Клиффорд), отмечая его выдающуюся роль в развитии науки.

Но, возвращаясь к нашему краткому очерку развития синтетической, проективной геометрии, мы остановимся теперь на том ее периоде, когда дальнейшее стремление к теоретической общности толкало геометров к новым абстракциям, к попыткам совершенно освободиться от метрических понятий при построении основных принципов и положений проективной геометрии.

Основное значение в этом новом методологическом направлении имеют работы немецкого геометра X. Штаудта (1798—1867), изданные им под заглавиями: «Геометрия положения» и «Материалы для геометрии положения» (в 1847 г. и 1856—1860 гг.).

Вместо того чтобы основывать проективное соответствие на равенстве двойных отношений, содержащих метрические понятия, Штаудт принимает в качестве исходного пункта понятие гармонической четверки, которое может быть установлено чисто геомет-

Х. Штаудт.

рически с помощью полного четырехугольника. Определение двух проективных рядов получает у него следующий вид:

Два ряда (пучка) называются проективными, если они приведены во взаимно однозначное соответствие так, что каждой гармонической группе одного соответствует гармоническая группа другого.

Основной вопрос заключается в том, совпадает ли это определение Штаудта с определением проективитета как цепи перспектив или, иначе, равны ли при этом двойные отношения любых соответственных четверок элементов (§ 47)? Штаудт дал утвердительный ответ на этот вопрос. Он доказал (не вполне строго) следующую теорему, которая называется основным предложением проективной геометрии:

Если два проективных ряда (пучка) имеют три элемента соответственно общих, то они имеют и остальные свои элементы соответственно общими.

Основное предложение Штаудта особенно интересовало геометров с аксиоматической стороны (в частности, этим вопросом занимались К. А. Андреев, А. К. Власов и др.), при этом было выяснено, что для строгого его доказательства необходимо введение аксиомы непрерывности.

Штаудт поставил задачу построения геометрического алгоритма, совершенно свободного от всяких метрических понятий. Он создал своеобразное «проективное исчисление», в котором роль чисел играют четверки элементов формы первой ступени, называемые им «вурфами».

Исследованием метода Штаудта и, в частности, распространением его на формы высших ступеней занимались после Штаудта многие математики. Существенные результаты в этой области в наше время были получены московской математической школой, и в частности проф. А. К. Власовым и проф. Н. А. Глаголевым (см. § 82).

Успехи в чисто геометрическом обосновании проективной геометрии вызвали новую гениально смелую мысль о возможности построить проективным путем и самую метрическую геометрию. Отдельные намеки на эту идею можно проследить уже у французских геометров (Понселе, Шаль), которые пользовались рассмотрением бесконечно удаленных элементов для разыскания метрических свойств в проективной форме[1]. Но полное решение зада-

[1] Простейшим примером этого рода является деление отрезка пополам, если одна из точек гармонической четверки оказывается бесконечно удаленной.

чи было найдено в работах Кэли (1821—1895) и Клейна (1849—1925), которыми было построено так называемое «проективное мероопределение». Суть его заключается в том, что метрические свойства фигур можно рассматривать как проективные отношения их к особым геометрическим образам, называемым «абсолютами». Так, абсолютом на плоскости являются мнимые круговые точки несобственной прямой. Эта новая концепция оказалась настолько общей, что она охватила, кроме евклидовой, и другие (неевклидовы) геометрические системы.

Ф. Клейн.

Общие взгляды Клейна на геометрию были сформулированы им в знаменитой «Эрлангенской программе»[1]. В этом сочинении он высказал мнение, что геометрия представляет собой учение о преобразованиях, образующих группы.

Клейн показал, что каждая геометрическая система может быть охарактеризована свойственной ей группой. Так, группу проективной геометрии образует совокупность $\{K\}$ всех коллинеарных преобразований проективного пространства в себя. Группу аффинной геометрии образуют лишь те коллинеации $\{A\}$ пространства, которые преобразуют несобственную плоскость в себя. Наконец, группу метрической геометрии (главная группа, по выражению Клейна) образуют те коллинеации $\{M\}$ пространства, которые не изменяют его абсолюта. Задачей геометрии является изучение свойств этих групп и их инвариантов.

Общность точки зрения Клейна особенно усиливает ее принципиальное значение для геометрии[2].

§ 82. Труды отечественных ученых в области проективной геометрии.

Одним из первых русских ученых, посвятивших свою научную деятельность в значительной степени вопросам проективной геометрии, был проф. Московского университета Василий Яковлевич Цингер (1836—1907). В. Я. Цингер читал курс проективной геометрии в Московском университете, сплачивая вокруг себя мно-

[1] Русский перевод проф. Синцова под заглавием «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» помещен в «Известиях физ.-мат. общества при Казанском университете», т. V.

[2] Однако не следует думать, что схема Клейна является всеобъемлющей; так, например, она не охватывает геометрические системы на произвольных поверхностях евклидова пространства.

гочисленных учеников, увлекавшихся геометрией. Среди них были известные, впоследствии выдающиеся геометры К. А. Андреев, Б. К. Млодзиевский и А. К. Власов.

В. Я. Цингера следует считать основателем московской геометрической школы. Н. Е. Жуковский в своем докладе, посвященном памяти В. Я. Цингера, говорил: «Мы чествуем память математика, которого по справедливости можно назвать главою русской геометрической школы». О том же говорил профессор Б. К. Млодзиевский, который в своих воспоминаниях о В. Я. Цингере замечает, что «большое значение придавал он также точным и отчетливым чертежам и моделям, как необходимому пособию геометрического преподавания. Сам искусный чертежник, он требовал и от учеников правильного и отчетливого изображения геометрических форм»

В вопросах основания геометрии В. Я. Цингер не был свободен от идеалистических воззрений и считал, что аксиомы геометрии созданы человеком независимо от его практической жизни и окружающего действительного мира.

Среди учеников-проективистов В. Я. Цингера следует прежде всего назвать Константина Алексеевича Андреева (1848—1921). Воспитанник Московского университета К. А. Андреев был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Свою преподавательскую деятельность он начал в Харьковском университете, где в это время работали такие выдающиеся математики, как А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов.

В 1875 г. К. А. Андреев защитил магистерскую диссертацию «О геометрическом образовании плоских кривых», а затем в 1879 г.—докторскую диссертацию «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий». В этих работах К. А. Андреев исследует многозначные проективные соответствия форм первой ступени и использует их для построения алгебраических кривых высших порядков.

В другой работе К. А. Андреев рассматривает круговые многосторонники и устанавливает ряд их интересных свойств. Круговыми многосторонниками называются фигуры, образованные дугами окружностей, проходящих через одну точку. Каждые две окружности, помимо упомянутой общей точки, имеют еще одну точку пересечения, которая и является вершиной кругового многосторонника.

Результаты К. А. Андреева опубликованы в статье «Вывод одного общего свойства многосторонников» («Математический сборник», т. VI, 1873).

В работе «Семиугольники Шретера» («Сообщения Харьковского математического общества», 1889) К. А. Андреев дает новое изящное доказательство теоремы Шретера в следующей формулировке:

«Если около конического сечения описан семиугольник, то, соединяя прямыми линиями по порядку каждую вершину со следующей за нею после двух пропущенных, будем иметь, что точки пересечения каждой из этих прямых со следующей в том же круговом порядке лежат на некотором другом коническом сечении».

К. А. Андреев занимался так называемыми «многоугольниками Понселе», т. е. многоугольниками, описанными около одного конического сечения и вписанными в другое. Этим вопросам посвящены две работы К. А. Андреева, опубликованные в «Сообщениях Харьковского математического общества» (1884).

К. А. Андреев.

Кроме того, К. А. Андреевым создана весьма оригинальная работа «К вопросу о конфигурациях» («Сообщения Харьковского математического общества», 1891), в которой автор исследовал свойства конфигураций, образованных из 2^{n-1} точек и 2^{n-1} плоскостей, причем в каждой плоскости лежит n точек и через каждую точку проходят n плоскостей.

Выдающаяся научная деятельность геометра-проективиста проф. К. А. Андреева была отмечена избранием его в члены-корреспонденты Российской Академии наук (1884). Он в то время вел большую преподавательскую работу сначала в Харьковском, а затем в Московском университете. В последнем он занимал профессорскую кафедру с 1898 по 1917 г. В итоге этой деятельности К. А. Андреев оставил ряд учебных пособий для университетов, среди которых следует отметить «Основной курс аналитической геометрии» и «Сборник упражнений по аналитической геометрии».

В 1897 г. вышел в свет обстоятельный курс проф. Киевского университета Михаила Егоровича Ващенко-Захарченко (1825—1912) под названием «Проективная геометрия». Этот курс содержал основной материал по проективной геометрии, включая проективные соответствия форм первой ступени первого и второго порядков, коллинеарные и коррелятивные преобразования форм второй и третьей ступени, проективное образование поверхностей и связок плоскостей второго порядка и теорию полярного преобразования на плоскости и в пространстве и др.

Капитальная работа М. Е. Ващенко-Захарченко имела большое значение в деле популяризации идей проективной геометрии. «Едва ли какая-нибудь часть геометрии, — писал М. Е., — имеет такое громадное практическое приложение, как проективная геометрия; упомянем только о графической статике, которой основанием служит эта часть геометрии».

Из других сочинений М. Е. Ващенко-Захарченко укажем его фундаментальную «Историю математики», т. I (Киев, 1883), посвященную в основном историческому очерку геометрии, и его перевод «Начал» Евклида (с пояснительным введением и толкованиями) (Киев, 1880).

Глубокие и оригинальные работы в области проективной геометрии принадлежат ученику В. Я. Цингера проф. Московского университета Алексею Константиновичу Власову (1868—1922). Магистерская диссертация А. К. Власова «Линейные системы конических сечений» была защищена им в 1901 г. и опубликована в «Ученых записках Московского университета» (Отдел физ.-матем., вып. 18, стр. 1 — 208). В этой богатой содержанием работе автор не только развивает проективные свойства линейных систем конических сечений, но и впервые дает исследование их метрических свойств, рассматривая их строение относительно несобственной прямой и мнимых круговых точек, т. е. относительно абсолюта плоскости. В своей докторской диссертации «Полярные системы высших порядков в формах первой ступени» («Ученые записки Московского университета», вып. 25, стр. 1—186) А. К. Власов дает построение геометрической теории, соответствующей теории алгебраических уравнений и форм. Задачу построения образов высших порядков в формах первой ступени А. К. Власов решает, определяя эти образы как полярные системы и основываясь на теории «аполярности» образов второго порядка. При этом для построения теории полярных систем пятого и шестого порядков А. К. Власов должен был развить синтетическую теорию аполярности в трехмерном и четырехмерном пространствах.

А. К. Власову принадлежат также глубокие исследования в области аксиоматики, в частности аксиоматического значения теоремы Паскаля. Он рассматривал аналогичные конфигурации в многомерных пространствах. А. К. Власов предпринял попытку проективного определения трансцендентных функций $\lg x$ и $\sin x$. Наконец, занимаясь вопросами проективного обоснования начертательной геометрии, А. К. дал новое изящное доказательство известной теоремы Польке-Шварца.

Блестящий лектор, пробуждавший в своих слушателях стремление к научным изысканиям, А. К. Власов сильно содействовал развитию интереса к проективной и начертательной геометрии у своих многочисленных учеников.

Ученик А. К. Власова проф. Московского университета Нил Александрович Глаголев (1888—1945) успешно продолжал развивать те геометрические направления, которые пропагандировал его учитель. Наиболее крупной его работой в области проективной геометрии является решение общей задачи проективного исчисления, начало которому было положено в работах Штейнера и Штаудта. Это исследование Н. А. Глаголев опубликовал в своем университетском курсе «Проективная геометрия» (Москва, 1936) в главе «Арифметизация проективного пространства» (§ 2 и 3, стр. 239—255).

В работе найдены все виды коммутативных алгебраических тел, элементами которых являются точки или группы точек пространства, а арифметические действия выполняются при помощи коллинеарных преобразований пространства. В 1938 г. была опубликована работа Н. А. Глаголева, в которой общая задача проективного исчисления исследуется в n-мерном пространстве («Journal de mathematiques pures et appliques», IX, 1938).

А. К. Власов.

Будучи одним из крупнейших ученых в области номографии, Н. А. Глаголев применял проективные методы и в этой области. В его книге «Теоретические основы номографии» (изд. 2, 1936) полярное преобразование применяется для перехода от системы намеченных линий к системе намеченных точек (глава IV). Проективные методы применяются также для упрощения построения номограмм.

Следует отметить также, что известный учебник Н. А. Глаголева по начертательной геометрии («Начертательная геометрия», изд. 1, 1936; изд. 2, 1938) в значительной мере опирается на геометрические преобразования, проективные и аффинные.

В последнее время в Советском Союзе вопросами проективной геометрии занимаются многие отечественные ученые, среди которых можно назвать имена акад. А. Н. Колмогорова, профессоров П. К. Рашевского, Н. В. Ефимова, А. А. Глаголева и др.

Работа А. Н. Колмогорова посвящена обоснованию проективной геометрии[1]. В ней рассматривается аксиоматика действительного и комплексного проективных пространств с точки зрения топологии.

Две работы П. К. Рашевского, опубликованные в «Математическом сборнике» в 1940 г.[2], посвящены исследованию аксиоматики проективной геометрии на плоскости. В первой из упомянутых работ («О единственности проективной геометрии на плоскости») автор приходит к выводу о том, что роль конфигураций Дезарга и Паппа в проективной геометрии на плоскости

[1] А. Н. Колмогоров, Zur Begründung der projektiven Geometrie [«Ann. of Math.» 33 (1932)].

[2] П. К. Рашевский, «О единственности проективной геометрии на плоскости», «О проективной геометрии с новыми конфигурационными аксиомами» («Математич. сборник», т. 8 (50) : 1,2; 1940).

Н. А. Глаголев.

(с аксиомами связи, порядка и непрерывности) не случайна. Оказывается, что всякая попытка потребовать выполнения какой-либо иной «конфигурационной аксиомы» автоматически приводит к геометрии с аксиомой Дезарга или Паппа. В другой работе («О проективной геометрии с новыми конфигурационными аксиомами») П. К. Рашевский рассматривает плоские проективные геометрии, организованные при помощи аксиом связи и одной из конфигурационных аксиом, отличных от аксиом Дезарга и Паппа.

Работы Н. А. Глаголева посвящены теории инволюций высших порядков[1], исследованию кривых третьего и четвертого порядка[2], вопросам, связанным с геометрическими работами Бурместра[3], и др.

Н. В. Ефимовым опубликован обширный курс под названием «Высшая геометрия» (ГТТИ, М.—Л., 1945), в котором дано аналитическое и синтетическое изложение проективной геометрии, а также ее аксиоматика.

В работах Л. А. Скорнякова дано систематическое и оригинальное изложение теории проективных плоскостей[4]. В этих работах с каждой плоскостью связываются определенные алгебраические образования, называемые «тернарами». С помощью этих «тернаров» определяются натуральные тела и изучаются их свойства.

В. А. Маневич в своей работе[5] (а) дал полное решение проблемы

---

[1] Диссертация на степень доктора физ.-матем. наук (1946), а также статья «Чисто геометрическое определение инволюции третьего порядка» (Труды II Всесоюзного съезда математиков, т. I (1936).

[2] «Применение плоскостных вурфов к определению пространственной кривой четвертого порядка первого рода» («Матем. сборник», 32, 1925), «Новое определение кривой третьего порядка» (ДАН, 53, 1946).

[3] «О построении точек Бурместра» (ДАН, 58, 1947).

[4] Л. А. Скорняков, Натуральные тела веблен-веддербарновой проективной плоскости. «Известия АН СССР. Математика», 13, 1949; его же. Право-альтернативные тела. «Известия АН СССР. Математика», 15, 1951; его же, Теория проективных плоскостей. «Успехи математических наук», т. VI, вып. 6, 1951.

[5] В. А. Маневич, Обобщенная проблема Кели и связанные с ней вопросы. ДАН СССР, т. 143, № 6, 1962 (A. Cayley, On a correspondence of points in relation to two tetrahedra (Proceedings of the London Mathematical Society, 4, 1873); его же, Три задачи центральной аксонометрии. «Успехи математических наук», т. XVII, вып. 1 (103), 1962; его же, О представлении элементов систем коллинеаций 2-й и 3-й ступени в виде произведения двух полярных соответствий и о некоторых свойствах коллинеаций, связанных с этим вопросом, Математический сб., т. 41 (83), № 2, 1957; его же, Комплекс прямых шестой степени, порождаемый тетраэдральным комплексом. ДАН СССР, 1958, т. 122, № 2.

А. Кели (и ее частных случаев), заключающейся в следующем: даны два тетраэдра $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Найти геометрические места точек P и P', таких, чтобы связки $P\,(PA,\ PB,\ PC,\ PD,\ \ldots)$ и $P'\,(P'A',\ P'B',\ P'C',\ P'D',\ \ldots)$ были конгруентны. Им же показаны (б) приложения этой проблемы к решению задач центральной аксонометрии. Кроме того, он показал чисто синтетически (в), что произвольная коллинеация в пространстве представляется в виде произведения двух полярных соответствий. В другой его статье (г) изучены свойства комплекса шестой степени, порожденного тетраэдральным комплексом.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Исторический очерк

Редактор В. Г. Долгополов

Художественный редактор В. С. Эрденко

Технический редактор О. Семина

Корректор Г. Д. Дудина

Сдано в набор 16/VII 1968 г. Подписано к печати 18/III 1969г. 60×90$^1/_{16}$ Бум. типогр. №2 Печ. л. 23. Уч.-изд. л. 22,98. Тираж 40 тыс. экз. (Тем. пл. 1968 г. № 20)

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР Москва. 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР, Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 277.

Цена без переплета 64 к.
бум. ледерин 13 к.

77 коп.