А. Н. КОЛМОГОРОВ
С. В. ФОМИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. Н. КОЛМОГОРОВ
С. В. ФОМИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Государственным комитетом СССР по народному образованию в качестве учебника для студентов математических специальностей университетов

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.162
К60
УДК 517.5

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. **Элементы теории функций и функционального анализа;** Учебник для вузов. — 6-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 624 с.— ISBN 5-02-013993-9

Содержит строгое систематизированное изложение основ функционального анализа и тонких вопросов теории функций действительного переменного.

Основой явился курс функционального анализа (вначале «Анализ III»), читавшийся академиком А. Н. Колмогоровым в течение ряда лет на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

5-е изд. — 1981 г.

Для студентов университетов, аспирантов, преподавателей, а также для научных работников в области математики и в смежных областях.

Ил. 24. Библиогр. 57 назв.

К $\frac{1602080000 - 074}{053\ (02)-89}$ 46-89

ISBN 5-02-013993-9

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1976; с изменениями, 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие В. М. Тихомирова 11
Предисловие к четвертому изданию 13
Предисловие к третьему изданию 13
Из предисловия ко второму изданию 14
Основные обозначения 16

Глава I

Элементы теории множеств

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами 17
1. Основные определения (17). 2. Операции над множествами (18).

§ 2. Отображения. Разбиения на классы 21
1. Отображение множеств. Общее понятие функции (21). 2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности (23).

§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества 26
1. Конечные и бесконечные множества (26). 2. Счетные множества (28). 3. Эквивалентность множеств (30). 4. Несчетность множества действительных чисел (32). 5. Теорема Кантора — Бернштейна (34). 6. Понятие мощности множества (34).

§ 4. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа 38
1. Частично упорядоченные множества (38). 2. Отображения, сохраняющие порядок (39). 3. Порядковые типы. Упорядоченные множества (39). 4. Упорядоченная сумма упорядоченных множеств (41). 5. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитные числа (41). 6. Сравнение порядковых чисел (44). 7. Аксиома выбора, теорема Цермело и другие эквивалентные им утверждения (46). 8. Трансфинитная индукция (48).

§ 5. Системы множеств 49
1. Кольцо множеств (49). 2. Полукольцо множеств (51). 3. Кольцо, порожденное полукольцом (53). 4. σ-алгебры (54). 5. Системы множеств и отображения (55).

Глава II

Метрические и топологические пространства

§ 1. Понятие метрического пространства 57
1. Определение и основные примеры (57). 2. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия (65).

§ 2. Сходимость. Открытые и замкнутые множества 67
1. Предельные точки. Замыкание (67). 2. Сходимость (69). 3. Плотные подмножества (70). 4. Открытые и замкнутые множества (71). 5. Открытые и замкнутые множества на прямой (73).

§ 3. Полные метрические пространства 78
1. Определение и примеры полных метрических пространств (78). 2. Теорема о вложенных шарах (81). 3. Теорема Бэра (83). 4. Пополнение пространства (83).

§ 4. Принцип сжимающих отображений и его применения . . 87
1. Принцип сжимающих отображений (87). 2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений (88). 3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений (91). 4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям (94).

§ 5. Топологические пространства 98
1. Определение и примеры топологических пространств (98). 2. Сравнение топологий (100). 3. Определяющие системы окрестностей. База. Аксиомы счетности (101). 4. Сходящиеся последовательности в T (106). 5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм (107). 6. Аксиомы отделимости (109). 7. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость (114).

§ 6. Компактность 115
1. Понятие компактности (115). 2. Непрерывные отображения компактных пространств (118). 3. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах (118). 4. Счетная компактность (121). 5. Предкомпактные множества (123).

§ 7. Компактность в метрических пространствах 124
1. Полная ограниченность (124). 2. Компактность и полная ограниченность (126). 3. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах (127). 4. Теорема Арцела (128). 5. Теорема Пеано (130). 6. Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов (132). 7. Обобщенная теорема Арцела (133).

§ 8. Непрерывные кривые в метрических пространствах 135

Глава III

Нормированные и топологические линейные пространства

§ 1. Линейные пространства 139
1. Определение и примеры линейных пространств (139). 2. Линейная зависимость (142). 3. Подпространства (142). 4. Фактор-пространства (144). 5. Линейные функционалы (145). 6. Геометрический смысл линейного функционала (147).

§ 2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана — Банаха 149
1. Выпуклые множества и выпуклые тела (149). 2. Одно-

родно-выпуклые функционалы (152). 3. Функционал Минковского (153). 4. Теорема Хана—Банаха (156). 5. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве (160).

§ 3. Нормированные пространства 161
1. Определение и примеры нормированных пространств (161). 2. Подпространства нормированного пространства (163). 3. Фактор-пространства нормированного пространства (164).

§ 4. Евклидовы пространства 166
1. Определение евклидовых пространств (166). 2. Примеры (169). 3. Существование ортогональных базисов, ортогонализация (171). 4. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы (173). 5. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса — Фишера (177). 6. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме (180). 7. Подпространства, ортогональные дополнения, прямая сумма (183). 8. Характеристическое свойство евклидовых пространств (187). 9. Комплексные евклидовы пространства (191).

§ 5. Топологические линейные пространства 194
1. Определение и примеры (194). 2. Локальная выпуклость (197). 3. Счетно-нормированные пространства (198).

Глава IV

Линейные функционалы и линейные операторы

§ 1. Непрерывные линейные функционалы 203
1. Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах (203). 2. Линейные функционалы на нормированных пространствах (204). 3. Теорема Хана — Банаха в нормированном пространстве (208). 4. Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве (211).

§ 2. Сопряженное пространство 211
1. Определение сопряженного пространства (211). 2. Сильная топология в сопряженном пространстве (212). 3. Примеры сопряженных пространств (215). 4. Второе сопряженное пространство (221).

§ 3. Слабая топология и слабая сходимость 223
1. Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве (223). 2. Слабая сходимость в нормированных пространствах (225). 3. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве (229). 4. Ограниченные множества в сопряженном пространстве (231).

§ 4. Обобщенные функции 235
1. Расширение понятия функции (235). 2. Пространство основных функций (236). 3. Обобщенные функции (237). 4. Действия над обобщенными функциями (239). 5. Достаточность запаса основных функций (243). 6. Восстановление функции по производной. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций (244). 7. Некоторые обобщения (247).

§ 5. Линейные операторы . . . . . .
1. Определение и примеры линейных операторов (251). 2. Непрерывность и ограниченность (255). 3. Сумма и произведение операторов (257). 4. Обратный оператор, обратимость (259). 5. Сопряженные операторы (265). 6. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы (267). 7. Спектр оператора. Резольвента (269).

§ 6. Компактные операторы . . . . . .
1. Определение и примеры компактных операторов (272). 2. Основные свойства компактных операторов (277). 3. Собственные значения компактного оператора (281). 4. Компактные операторы в гильбертовом пространстве (282). 5. Самосопряженные компактные операторы в H (282).

Глава V

Мера, измеримые функции, интеграл

§ 1. Мера плоских множеств . . . . . .
1. Мера элементарных множеств (288). 2. Лебегова мера плоских множеств (293). 3. Некоторые дополнения и обобщения (301).

§ 2. Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и σ-аддитивность . . . . . .
1. Определение меры (303). 2. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо (304). 3. σ-аддитивность (307).

§ 3. Лебегово продолжение меры . . . . . .
1. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей (311). 2. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы (314). 3. Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры (317). 4. Продолжение меры по Жордану (320). 5. Однозначность продолжения меры (322).

4. Измеримые функции . . . . . .
1. Определение и основные свойства измеримых функций (323). 2. Действия над измеримыми функциями (325). 3. Эквивалентность (327). 4. Сходимость почти всюду (328). 5. Теорема Егорова(329). 6. Сходимость по мере (330). 7. Теорема Лузина. C-свойство (333).

5. Интеграл Лебега . . . . . .
1. Простые функции (335). 2. Интеграл Лебега для простых функций (336). 3. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры (338). 4. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега (341). 5. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (346). 6. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры (350). 7. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана (352).

§ 6. Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини . . . . . .
1. Произведение систем множеств (355). 2. Произведения

мер (357). 3. Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега (360). 4. Теорема Фубини (363).

Глава VI

Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования

§ 1. Монотонные функции. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу 368
1. Основные свойства монотонных функций (368). 2. Дифференцируемость монотонной функции (372). 3. Производная интеграла по верхнему пределу (380).

§ 2. Функции с ограниченным изменением 381

§ 3. Производная неопределенного интеграла Лебега 387

§ 4. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции 389

§ 5. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона—Никодима 400
1. Заряды. Разложение Хана и разложение Жордана (400). 2. Основные типы зарядов (404). 3. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима (404).

§ 6. Интеграл Стилтьеса 408
1. Меры Стилтьеса (408). 2. Интеграл Лебега — Стилтьеса (411). 3. Некоторые применения интеграла Лебега— Стилтьеса в теории вероятностей (413). 4. Интеграл Римана — Стилтьеса (415). 5. Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса (419). 6. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространстве непрерывных функций (423).

Глава VII

Пространства суммируемых функций

§ 1. Пространство L_1 430
1. Определение и основные свойства пространства L_1 (430). 2. Всюду плотные множества в L_1 (432).

§ 2. Пространство L_2 436
1. Определение и основные свойства (436). 2. Случай бесконечной меры (440). 3. Всюду плотные множества в L_2. Теорема об изоморфизме (442). 4. Комплексное пространство L_2 (443). 5. Сходимость в среднем квадратичном и ее связь с другими типами сходимости функциональных последовательностей (444).

§ 3. Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам 447
1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье (447). 2. Тригонометрические системы на отрезке $[0, \pi]$ (450). 3. Ряд Фурье в комплексной форме (451).

4. Многочлены Лежандра (453). 5. Ортогональные системы в произведениях. Кратные ряды Фурье (455). 6. Многочлены, ортогональные относительно данного веса (458). 7. Ортогональный базис в пространствах $L_2(-\infty, \infty)$ и $L_2(0, \infty)$ (459). 8. Ортогональные многочлены с дискретным весом (461). 9. Системы Хаара и Радемахера — Уолша (463).

Глава VIII

Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье

§ 1. Условия сходимости ряда Фурье . . . . . .
1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке (466). 2. Условия равномерной сходимости ряда Фурье (473).

§ 2. Теорема Фейера . . . . . .
1. Теорема Фейера (476). 2. Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса (480). 3. Теорема Фейера для пространства L_1 (481).

§ 3. Интеграл Фурье . . . . . .
1. Основная теорема (481). 2. Интеграл Фурье в комплексной форме (485).

§ 4. Преобразование Фурье, свойства и применения . . . . . .
1. Преобразование Фурье и формула обращения (486). 2. Основные свойства преобразования Фурье (491). 3. Полнота функций Эрмита и Лагерра (494). 4. Преобразование Фурье быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций (495). 5. Преобразование Фурье и свертка функций (496). 6. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности (497). 7. Преобразование Фурье функций нескольких переменных (500).

§ 5. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ . . .
1. Теорема Планшереля (503). 2. Функции Эрмита (507).

§ 6. Преобразование Лапласа . . . . . .
1. Определение и основные свойства преобразования Лапласа (511). 2. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений (операторный метод) (512).

§ 7. Преобразование Фурье — Стилтьеса . . . . . .
1. Определение преобразования Фурье — Стилтьеса (515). 2. Применения преобразования Фурье — Стилтьеса в теории вероятностей (517).

§ 8. Преобразование Фурье обобщенных функций . . . . . .

Глава IX

Линейные интегральные уравнения

§ 1. Основные определения. Некоторые задачи, приводящие к интегральным уравнениям . . . . . .

1. Типы интегральных уравнений (523). 2. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям (524).

§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма 528
1. Интегральный оператор Фредгольма (528). 2. Уравнения с симметрическим ядром (532). 3. Теоремы Фредгольма. Случай вырожденных ядер (533). 4. Теоремы Фредгольма для уравнений с произвольными ядрами (536). 5. Уравнения Вольтерра (542). 6. Интегральные уравнения первого рода (542).

§ 3. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Метод Фредгольма 544
1. Спектр компактного оператора в H (544). 2. Отыскание решения в виде ряда по степеням λ. Детерминанты Фредгольма (545).

Глава X

Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах

§ 1. Дифференцирование в линейных пространствах 551
1. Сильный дифференциал (дифференциал Фреше) (551). 2. Слабый дифференциал (дифференциал Гато) (553). 3. Формула конечных приращений (554). 4. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью (555). 5. Дифференцируемые функционалы (557). 6. Абстрактные функции (557). 7. Интеграл (557). 8. Производные высших порядков (560). 9. Дифференциалы высших порядков (563). 10. Формула Тейлора (563).

§ 2. Теорема о неявной функции и некоторые ее применения. 565
1. Теорема о неявной функции (565). 2. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных (569). 3. Касательные многообразия. Теорема Люстерника (570).

§ 3. Экстремальные задачи 574
1. Необходимое условие экстремума (574). 2. Второй дифференциал. Достаточные условия экстремума функционала (578). 3. Экстремальные задачи с ограничениями (581).

§ 4. Метод Ньютона 584

Дополнение

Банаховы алгебры

§ 1. Определения и примеры банаховых алгебр 589
1. Банаховы алгебры, изоморфизмы банаховых алгебр (589). 2. Примеры банаховых алгебр (590). 3. Максимальные идеалы (592).

§ 2. Спектр и резольвента 593
1. Определения и примеры (593). 2. Свойства спектра (594). 3. Теорема о спектральном радиусе (596).

§ 3. Некоторые вспомогательные результаты 597
1. Теорема о фактор-алгебре (597). 2. Три леммы (598).

§ 4. Основные теоремы 599
1. Линейные непрерывные мультипликативные функционалы и максимальные идеалы (599). 2. Топология во множестве $\mathscr{M}$. Основные теоремы (600). 3. Теорема Винера; упражнения (603).

Список литературы 607
Распределение литературы по главам 609

Предметный указатель 610

ПРЕДИСЛОВИЕ В. М. ТИХОМИРОВА

Это издание выходит после смерти Андрея Николаевича Колмогорова. Он был инициатором создания в рамках университетского образования курса теории функций и функционального анализа, получившего более короткое название «Анализ III». Андрей Николаевич разработал программу, был первым лектором этого курса на механико-математическом факультете МГУ (1946/47 гг.), а при повторном чтении (1952/53 гг.) задумал написать учебник. Для этой цели А. Н. Колмогоров привлек Сергея Васильевича Фомина (читавшего аналогичный курс на физическом факультете), научные, педагогические и человеческие качества которого он очень высоко ценил. Так образовался авторский коллектив, создавший замечательную книгу, по которой на протяжении почти тридцати пяти лет ведется преподавание курса «Анализ III» в большинстве наших университетов.

Первое издание учебника вышло отдельными выпусками — в 1954 и 1960 г. в издательстве МГУ. Считаю необходимым сказать здесь о большой роли, которую сыграли в судьбе того издания (1954 г.) Т. Д. Вентцель и О. С. Кулагина. Они вели подробный конспект лекций Андрея Николаевича, потом авторы доверили им (тогда еще студентам) роль редакторов издания, и они исполняли ее с высоким чувством ответственности.

В замысле курса «Анализ III» отразились разнообразные общие педагогические идеи А. Н. Колмогорова. Прежде всего — о единстве абстрактной и прикладной математики, о необходимости (как сказано в предисловии ко второму изданию) «приучить студентов к двойному зрению: с одной стороны, следить за внутренней логикой теории множеств, общей теории непрерывных отображений метрических и топологических пространств, линейных пространств и функционалов и операторов на них, чистой теории меры и интегрирования в общих «пространствах с мерой», с другой — не упускать из виду обслуживаемую этими более абстрактными областями математики проблематику классического и даже прикладного анализа».

Далее, А. Н. Колмогоров всегда пропагандировал мысль о необходимости «синтетических» курсов, идею

образования, как бы напоминающего движение по спирали, где обучающийся со все более и более высокого уровня обозревает весь пройденный путь. В этом учебнике осуществляется синтез идей, с которыми уже на начальном этапе образования студенту приходилось сталкиваться в курсах классического анализа «Анализ I», алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений («Анализ II»). Сам же курс «Анализ III» объединил материал, ранее входивший на мехмате в курсы теории функций действительного переменного, функционального анализа, интегральных уравнений, вариационного исчисления и др. Андрей Николаевич считал, что университетские учебники должны быть написаны просто и доступно, с привлечением большого числа примеров, которые служили бы мотивировкой для развития абстрактной теории. Так и написана эта книга.

Сначала учебник был очень кратким (и это соответствовало первоначальному замыслу А. Н. Колмогорова), но затем авторы решили значительно расширить материал книги с тем, чтобы преподаватели различных университетов могли отбирать для себя то, что им более всего подходит. Это расширение было, в основном, осуществлено С. В. Фоминым при втором, третьем и четвертом изданиях. По просьбе авторов тогда мною было написано «Дополнение», посвященное банаховым алгебрам. И здесь снова хочется сказать о большой помощи авторам в тот период работы над книгой ее редакторов — Д. П. Желобенко (1960 г.), Ф. В. Широкова (1972 г. — третье издание) и В. М. Алексеева (1976 г. — четвертое издание). Смерть С. В. Фомина прервала его работу над книгой, многие замыслы (в основном связанные с переработкой десятой главы) остались нереализованными. С пятого издания существенных изменений не вносилось. В этом издании несколько модифицирован список литературы.

Учебник А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина переиздавался в издательстве «Наука» в 1968, 1972, 1976 и 1981 г. Он был переведен на многие иностранные языки: выдержал два издания на английском и японском языках, был издан в ГДР, ЧССР и ВНР, переведен на французский и испанский языки. В 1988 г. вышел в издательстве «Мир» на языке дари.

Уверен, что еще долгое время книга А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина будет нужна новым поколениям математиков.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Это издание выходит уже после смерти Сергея Васильевича Фомина. Он успел, однако, проделать всю основную работу по усовершенствованию книги. Существенно переработана десятая глава. В ней добавлен параграф, посвященный теореме о неявной функции и изменен параграф «Экстремальные задачи». Эти изменения повлекли за собой необходимость изменений в четвертой главе (следствия из теоремы Хана—Банаха и теоремы Банаха об обратном операторе).

Текст книги был просмотрен В. М. Алексеевым и В. М. Тихомировым, которым я выражаю искреннюю благодарность.

А. Колмогоров

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке нового издания мы сохранили общий план книги и постарались не увеличивать ее объем. Вместе с тем весь текст книги был заново просмотрен и отредактирован. Большую помощь в этой работе нам оказал Ф. В. Широков. В главах I и IV сделаны некоторые перестановки и изменения, облегчающие, на наш взгляд, переход от более простых понятий к более сложным (например, от банаховых пространств к более общим в гл. IV). Довольно существенно переработано изложение теории меры (гл. V).

В последние годы в курс «Анализ III» часто включаются элементы теории банаховых алгебр и спектрального анализа. Поэтому мы сочли целесообразным включить в нашу книгу написанное В. М. Тихомировым дополнение, посвященное этим вопросам.

А. Колмогоров
С. Фомин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание «Элементов теории функций и функционального анализа» вышло двумя отдельными выпусками в 1954 и 1960 годах. Появление этих выпусков было связано с включением в конце 40-х годов в программу механико-математического факультета МГУ курса «Анализ III», объединявшего элементы теории меры и теории функций, интегральные уравнения, сведения из функционального анализа, а позже и вариационное исчисление. Этот курс, читавшийся в МГУ сперва А. Н. Колмогоровым, а потом и другими лекторами, в том числе С. В. Фоминым, вошел в дальнейшем в программы и других университетов.

В свое время замена в МГУ отдельных курсов теории функций действительного переменного, интегральных уравнений и вариационного исчисления единым курсом «Анализ III» вызвала большие споры. Перед курсом была поставлена задача приучить студентов к двойному зрению: с одной стороны, следить за внутренней логикой развития теории множеств, общей теории непрерывных отображений метрических и топологических пространств, линейных пространств и функционалов и операторов на них, чистой теории меры и интегрирования в общих «пространствах с мерой», с другой, — не упускать из виду обслуживаемую этими более абстрактными областями математики проблематику классического и даже прикладного анализа.

При решении этой задачи мы в планировке книги отдаем предпочтение абстрактной линии построения курса. От общей теории множеств (глава I) можно перейти к метрическим и топологическим пространствам и их непрерывным отображениям (глава II) либо непосредственно к пространствам с мерой (без топологии) и интегрированию в них (глава V). В главах III и IV изучаются линейные пространства и линейные функционалы и операторы в них. От этих глав возможен прямой переход к главе X (нелинейные дифференцируемые операторы и функционалы). В главе VII изучаются линейные пространства суммируемых функций. Лишь в главах VI и VIII внимание, по существу, сосредоточено на функциях действительного переменного.

Хотя в первую очередь в нашей книге излагаются общие понятия теории функций и функционального ана-

лиза, внимание к примыкающей сюда классической проблематике читатель может проследить почти во всех главах. Включение в книгу глав VI (теория дифференцирования), VIII (тригонометрические ряды и интеграл Фурье) и IX (линейные интегральные уравнения) приводит к тому, что сейчас наша книга охватывает всю программу принятого в МГУ курса «Анализ III», кроме вариационного исчисления. Мы не включили этот раздел в нашу книгу, ограничившись лишь изложением в главе X самых первых представлений о нелинейном функциональном анализе.

В новом издании, как и в первоначальном, значительное место занимает общая теория меры. В последнее время появилось довольно много изложений теории интегрирования, основанной на схеме Даниеля, не использующей аппарата теории меры. Мы полагаем, однако, что теория меры достаточно важна и сама по себе, независимо от введения понятия интеграла, и заслуживает включения в университетский курс.

Включение новых глав заметно увеличило объем книги. Старые главы тоже существенно переработаны и в них включены новые параграфы (например, о порядковых типах и трансфинитных числах, топологических пространствах, обобщенных функциях и др.).

Перерабатывая нашу книгу и включая в нее новые разделы, мы старались, однако, сохранить в ней тот сравнительно элементарный стиль изложения, который был выдержан, как нам кажется, в первом издании. Мы надеемся, что она найдет свое естественное место в университетском преподавании наряду с другими руководствами, в частности, с книгой Г. Е. Шилова «Математический анализ, специальный курс», в которой более подчеркнута аналитическая сторона дела, а интерес к метрическим и топологическим пространствам, мерам и т. д. как самостоятельным объектам культивируется в меньшей степени.

А. Колмогоров
С. Фомин

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathscr{A}$ 591
B_T 606
$B(x_0, r)$ 66
$B[x_0, r]$ 68
$B(X^2, Y)$ 562
BC (X, Y) 558
$\mathfrak{B}(\mathbb{S})$ 55
C 589
$C = C[0, 1]$ 60
$C[a, b]$ 60
C_T 591
$C^1[a, b]$ 428
$C^n[a, b]$ 201
$C_2[a, b]$ 61
$C_E^1[t_0, t_1]$ 569
C^∞ 195
$CBV[0, 1]$ 606
c 34
$DF(x, h)$ 553
$D(\lambda)$, $D(s, t; \lambda)$ 550
dF, d^2F, d^nF 563
E^*, $E^{\#}$ 211
(E^*, b) 226
$(E^*, \|\cdot\|)$ 212
$f: M \to N$ 21
$f(A)$ 21
$f^{-1}(b)$ 21
$f^{-1}(\tau)$ 108
F'' 560
$\mathscr{FL}(E, E_1)$ 263
Im 251
$J(E)$ 149
$K[a, b]$ 195
Ker 251
L_1, $L_1(X, \mu)$ 430
L_2, $L_2(X, \mu)$ 437
$L_p(X, \mu)$ 442
$\mathscr{L}(E, E_1)$ 258
L/L' 144
$L(\{x_\alpha\})$ 144
l_1 186, 592
l_2 60
l_p 64
$\mathscr{M}$ 598
m 61
$N(X^n, Y)$ 563
$\mathfrak{N}(\mathbb{S})$ 51
S_∞ 250
S_∞^* 520
T_{x_0} 571
V_a^b 381
$V_0[a, b]$ 387
W 592
Z 453
$\rho_1(x, y)$ 60
$\rho_p(x, y)$ 64
$\rho_\infty(x, y)$ 60
$\tau(\mathbb{E})$ 101
$\aleph$ 34
$\aleph_0$ 34
$\aleph_1$ 46
$\varnothing$ 17
$\bigcup$ 18
$\bigcap$ 18
Δ 19
$\diagup$ 19
$\mathbf{C}$ 20
$\sim$ 31
$\tilde{\varphi}$ 24

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами

1. Основные определения. В математике встречаются самые разнообразные *множества*. Можно говорить о множестве граней многогранника, точек на прямой, множестве натуральных чисел и т. д. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «множество» его синонимами: совокупность, собрание элементов и т. п.

Роль, которую понятие множества играет в современной математике, определяется не только тем, что сама теория множеств стала в настоящее время весьма обширной и содержательной дисциплиной, но главным образом тем влиянием, которое теория множеств, возникшая в конце прошлого столетия, оказывала и оказывает на всю математику в целом. Не ставя своей задачей сколько-нибудь полное изложение этой теории, мы здесь лишь введем основные обозначения и приведем первоначальные теоретико-множественные понятия, используемые в дальнейшем.

Множества мы будем обозначать прописными буквами A, B, ..., а их элементы — малыми a, b, ... Утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$ (или $A \ni a$); запись $a \notin A$ (или $A \not\ni a$) означает, что элемент a не принадлежит A. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A *подмножеством* множества B и пишем $A \subset B$. Например, целые числа образуют подмножество в множестве всех действительных чисел.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого* множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Мы будем обозначать его символом $\varnothing$. Любое множество содержит $\varnothing$ в качестве

подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными*.

2. Операции над множествами. Пусть A и B — произвольные множества; их *суммой*, или *объединением* $C = A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1).

Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α — произвольные множества, то их сумма $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α.

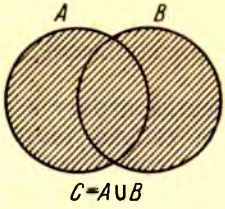


Рис. 1

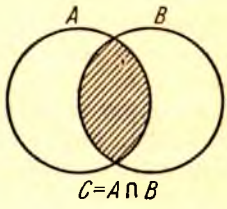


Рис. 2

Назовем *пересечением* $C = A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B (рис. 2). Например, пересечение множества всех четных чисел и множества всех чисел, делящихся на три, состоит из всех целых чисел, делящихся без остатка на шесть. Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

Операции сложения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, т. е.

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \tag{1}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \tag{2}$$

Действительно, проверим, например, первое из этих равенств [1]). Пусть элемент x принадлежит множеству, стоящему в левой части равенства (1), т. е. $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что x входит в C и, кроме того, по крайней мере в одно из множеств A или B. Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, т. е. входит в правую часть рассматриваемого равенства. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in C$ и, кроме того, x входит в A или B, т. е. $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$. Равенство (1) доказано. Аналогично проверяется равенство (2).

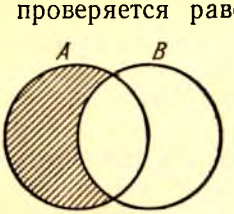


Рис. 3

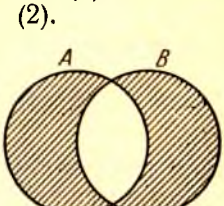


Рис. 4

Определим для множеств операцию вычитания. Назовем *разностью* $C = A \setminus B$ множеств A и B совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B (рис. 3). При этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$. Вместо $A \setminus B$ иногда пишут $A - B$.

Иногда (например, в теории меры) удобно рассматривать так называемую *симметрическую разность* двух множеств A и B, которая определяется как сумма разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ (рис. 4). Симметрическую разность C множеств A и B мы будем обозначать символом $A \triangle B$. Таким образом, по определению,

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Упражнение. Показать, что

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основ-

[1]) Равенство двух множеств $A = B$ понимается как тождественное равенство, т. е. оно означает, что каждый элемент множества A принадлежит B, и наоборот. Иначе говоря, равенство $A = B$ равносильно тому, что выполнены оба включения: $A \subset B$ и $B \subset A$.

ного множества S, например, различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $S \setminus A$ называют *дополнением* множества A и обозначают $\mathbf{C}A$ или A'.

В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет так называемый принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях:

1. *Дополнение суммы равно пересечению дополнений*

$$S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{3}$$

2. *Дополнение пересечения равно сумме дополнений*

$$S \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{4}$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества S, совершенно автоматически может быть получено другое — двойственное — равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств — пересечениями, а пересечений — суммами. Примером использования этого принципа может служить вывод теоремы $3'$ из теоремы 3 § 2 гл. II.

Приведем доказательство соотношения (3).

Пусть $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup_\alpha A_\alpha$, т. е. не входит ни в одно из множеств A_α. Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $S \setminus A_\alpha$ и потому $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Обратно, пусть $x \in \bigcap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, т. е. x входит в каждое $S \setminus A_\alpha$; тогда x не входит ни в одно из множеств A_α, т. е. не принадлежит их сумме $\bigcup_\alpha A_\alpha$, а тогда $x \in S \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$. Равенство (3) доказано. Соотношение (4) доказывается аналогично. (Проведите доказательство.)

Название «симметричная разность» для операции $A \triangle B$ не совсем удачно; эта операция во многом аналогична операции взятия суммы множеств $A \cup B$. Действительно, $A \cup B$ означает, что мы связываем *неисключающим* «или» два утверждения: «элемент принадлежит A» и «элемент принадлежит B», а $A \triangle B$ означает, что те же самые два утверждения связываются *исключающим* «или»: элемент x принадле-

жит $A \triangle B$ тогда и только тогда, когда он принадлежит либо *только* A, либо *только* B. Множество $A \triangle B$ можно было бы назвать «суммой по модулю два» множеств A и B (берется объединение этих двух множеств, но элементы, которые при этом встречаются дважды, выбрасываются).

§ 2. Отображения. Разбиения на классы

1. Отображение множеств. Общее понятие функции. В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве о п р е д е л е н а ф у н к ц и я f, если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При том X называется *областью определения* данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, — ее *областью значений*.

Если же вместо числовых рассматривать множества какой угодно природы, то мы придем к самому общему понятию функции. Пусть M и N — два произвольных множества. Говорят, что на M определена функция f, принимающая значения из N, если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент y из N. Для множеств произвольной природы (как, впрочем, и в случае числовых множеств) вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое. При специализации природы множеств M и N возникают специальные типы функций, которые носят особые названия «вектор-функция», «мера», «функционал», «оператор» и т. д. Мы столкнемся с ними в дальнейшем.

Для обозначения функции (отображения) из M в N мы будем часто пользоваться записью $f\colon M \to N$.

Если a — элемент из M, то отвечающий ему элемент $b = f(a)$ из N называется *образом* a (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из M, образом которых является данный элемент $b \in N$, называется *прообразом* (или, точнее, *полным прообразом*) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть A — некоторое множество из M; совокупность $\{f(a) : a \in A\}$ всех элементов вида $f(a)$, где $a \in A$, называется *образом* A и обозначается $f(A)$. В свою очередь для каждого множества B из N определяется его (полный!) прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из M, образы которых принадлежат B.

Может оказаться, что ни один элемент b из B не имеет непустого прообраза, тогда и прообраз $f^{-1}(B)$ будет пустым множеством.

Здесь мы ограничимся рассмотрением самых общих свойств отображений.

Введем следующую терминологию. Мы будем говорить, что f есть отображение множества M «на» множество N, если $f(M) = N$; такое отображение называют также *сюръекцией*. В общем случае, т. е. когда $f(M) \subset N$, говорят, что f есть отображение M «в» N.

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется *инъекцией*. Отображение $f: M \to N$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием между M и N*.

Установим основные свойства отображений.

Теорема 1. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов*:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Доказательство. Пусть элемент x принадлежит множеству $f^{-1}(A \cup B)$. Это означает, что $f(x) \in A \cup B$, т. е. $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$. Но тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$, т. е. $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$, т. е. $f(x)$ принадлежит хотя бы одному из множеств A или B, следовательно, $f(x) \in A \cup B$, но тогда $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Теорема 2. *Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов*:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Доказательство. Если $x \in f^{-1}(A \cap B)$, то $f(x) \in A \cap B$, т. е. $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, т. е. $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, т. е. $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$. Иначе говоря, $f(x) \in A \cap B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Теорема 3. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов*:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Доказательство. Если $y \in f(A \cup B)$, то это означает, что $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B. Следовательно, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B, т. е. $x \in A \cup B$ и, следовательно, $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

Теоремы 1, 2 и 3 остаются в силе для сумм и пересечений любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Заметим, что *образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов.* Например, пусть рассматриваемое отображение представляет собой проектирование плоскости на ось x. Тогда отрезки

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 0,$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = 1$$

не пересекаются, а в то же время их образы совпадают.

Упражнение. Докажите, что прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Верно ли аналогичное утверждение для образа дополнения?

2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности. В самых различных вопросах встречаются разбиения тех или иных множеств на попарно пересекающиеся подмножества. Например, плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси x, трехмерное пространство можно представить как объединение концентрических сфер различных радиусов (начиная с $r = 0$), жителей данного города можно разбить на группы по их году рождения и т. п.

Каждый раз, когда некоторое множество M представлено тем или иным способом как сумма попарно непересекающихся подмножеств, мы говорим *о разбиении множества M на классы.*

Обычно приходится иметь дело с разбиениями, построенными на базе того или иного признака, по которому элементы множества M объединяются в классы. Например, множество всех треугольников на плоскости можно разбить на классы равных между собой или на классы равновеликих треугольников, все функции от x можно разбить на классы, собирая в один класс функции, принимающие в данной точке одинаковые значения, и т. д.

Признаки, по которым элементы множества разбиваются на классы, могут быть самыми разнообразными.

Но все же такой признак не вполне произволен. Предположим, например, что мы захотели бы разбить все действительные числа на классы, включая число b в тот же класс, что и число a, в том и только в том случае, когда $b > a$. Ясно, что никакого разбиения действительных чисел на классы таким путем получить нельзя, так как если $b > a$, т. е. если b следует зачислить в тот же класс, что и a, то $a < b$, т. е. число a *нельзя* включить в тот же класс, что и b. Кроме того, так как a не больше, чем само a, то a *не должно попасть* в один класс с самим собой! Другой пример. Попробуем разбить точки плоскости на классы, относя две точки к одному классу в том и только том случае, когда расстояние между ними меньше 1. Ясно, что добиться этого нельзя, так как если расстояние от a до b меньше 1 и расстояние от b до c меньше 1, то это вовсе не означает, что расстояние от a до c меньше 1. Таким образом, зачисляя a в один класс с b, а b в один класс с c, мы получим, что в один и тот же класс могут попасть две точки, расстояние между которыми больше 1.

Приведенные примеры подсказывают условия, при которых тот или иной признак действительно позволяет разбить элементы некоторого множества на классы.

Пусть M — некоторое множество и пусть некоторые из пар (a, b) элементов этого множества являются «отмеченными» [1]). Если (a, b) — «отмеченная» пара, то мы будем говорить, что элемент a связан с b отношением φ, и обозначать это символом $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Например, если имеется в виду разбиение треугольников на классы равновеликих, то $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает «треугольник a имеет ту же площадь, что и треугольник b». Данное отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами.

1. Рефлексивность: $a \underset{\varphi}{\sim} a$ для любого элемента $a \in M$.
2. Симметричность: если $a \underset{\varphi}{\sim} b$, то $b \underset{\varphi}{\sim} a$.
3. Транзитивность: если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ и $b \underset{\varphi}{\sim} c$, то $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы отношение φ (признак!) позволяло разбить множество M на классы. В самом деле, в с я к о е разбиение

---

[1]) При этом элементы a и b берутся в определенном порядке, т. е. (a, b) и (b, a) — две, вообще говоря, различные пары.

данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Действительно, если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает «a находится в том же классе, что и b», то отношение φ будет, как легко проверить, рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Обратно, пусть φ — некоторое отношение эквивалентности между элементами множества M и K_a — класс элементов x из M, эквивалентных данному элементу a: $x \underset{\varphi}{\sim} a$. В силу свойства рефлексивности элемент a сам принадлежит классу K_a. Покажем, что два класса K_a и K_b либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть некоторый элемент c принадлежит одновременно и K_a и K_b, т. е. $c \underset{\varphi}{\sim} a$ и $c \underset{\varphi}{\sim} b$. Тогда в силу симметричности $a \underset{\varphi}{\sim} c$ и в силу транзитивности

$$a \underset{\varphi}{\sim} b. \tag{1}$$

Если теперь x — произвольный элемент из K_a, т. е. $x \underset{\varphi}{\sim} a$, то в силу (1) и свойства транзитивности $x \underset{\varphi}{\sim} b$, т. е. $x \in K_b$.

Точно так же доказывается, что всякий элемент $y \in K_b$ входит в K_a. Таким образом, два класса K_a и K_b, имеющих хотя бы один общий элемент, совпадают между собой. Мы получили разбиение множества M на классы по заданному отношению эквивалентности.

Понятие разбиения множества на классы тесно связано с рассмотренным в предыдущем пункте понятием отображения.

Пусть f — отображение множества A в множество B. Собрав в один класс все элементы из A, образы которых в B совпадают, мы получим, очевидно, некоторое разбиение множества A. Обратно, рассмотрим произвольное множество A и некоторое его разбиение на классы. Пусть B — совокупность тех классов, на которые разбито множество A. Ставя в соответствие каждому элементу $a \in A$ тот класс (т. е. элемент из B), к которому a принадлежит, мы получим отображение множества A на множество B.

Примеры. 1. Спроектируем плоскость xy на ось x. Прообразы точек оси x — вертикальные прямые. Следовательно, этому отображению отвечает разбиение плоскости на параллельные прямые.

2. Разобьем все точки трехмерного пространства на классы, объединив в один класс точки, равноудаленные от начала координат. Каждый класс представляет собой сферу некоторого радиуса. Совокупность всех этих классов можно отождествить с множеством всех точек, лежащих на луче $[0, \infty)$. Итак, разбиению трехмерного пространства на концентрические сферы отвечает отображение этого пространства на полупрямую.

3. Объединим в один класс все действительные числа с одинаковой дробной частью. Этому разбиению отвечает отображение прямой линии на окружность единичной длины.

Понятие эквивалентности является частным случаем более общего понятия б и н а р н о г о о т н о ш е н и я. Пусть M — произвольное множество. Обозначим через $M \times M$ или M^2 совокупность всех упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in M$. Говорят, что в M задано *бинарное отношение* φ, если в M^2 выделено произвольное подмножество R_φ. Точнее говоря, мы скажем, что элемент a находится в отношении φ к элементу b — обозначение $a\varphi b$ — в том и только том случае, когда пара (a, b) принадлежит R_φ. Примером бинарного отношения может служить отношение тождества ε; именно, $a\varepsilon b$ в том и только том случае, если $a = b$; иначе говоря, это — отношение, задаваемое диагональю Δ в $M \times M$, т. е. подмножеством пар вида (a, a). Ясно, что всякое отношение эквивалентности φ в некотором множестве M есть бинарное отношение, подчиненное следующим условиям:

1) Диагональ Δ принадлежит R_φ (рефлексивность).

2) Если $(a, b) \in R_\varphi$, то и $(b, a) \in R_\varphi$ (симметричность).

3) Если $(a, b) \in R_\varphi$ и $(b, c) \in R_\varphi$, то и $(a, c) \in R_\varphi$ (транзитивность).

Итак, эквивалентность — это бинарное отношение, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и симметричности. В § 4 мы рассмотрим другой важный частный случай бинарного отношения — частичную упорядоченность.

§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества

1. Конечные и бесконечные множества. Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно, если не фактически, то хотя бы примерно, указать число элементов в данном множестве. Таковы, например, мно-

жество всех вершин некоторого многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данного числа, множество всех молекул воды на Земле и т. д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости, всех многочленов с рациональными коэффициентами и т. д. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т. д., причем после каждого такого шага в этом множестве еще останутся элементы.

Два конечных множества мы можем сравнивать по числу элементов и судить, одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Спрашивается, можно ли подобным же образом сравнивать бесконечные множества? Иначе говоря, имеет ли смысл, например, вопрос о том, чего больше: кругов на плоскости или рациональных точек на прямой, функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, или прямых в пространстве, и т. д.?

Посмотрим, как мы сравниваем между собой два конечных множества. Можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить и иначе, именно, попытаться установить *биекцию*, т. е. взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, иначе говоря, такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого, и наоборот. Ясно, что взаимно однозначное соответствие между двумя конечными множествами можно установить тогда и только тогда, когда число элементов в них одинаково. Например, чтобы проверить, одинаково ли число студентов в группе и стульев в аудитории, можно, не пересчитывая ни тех, ни других, посадить каждого студента на определенный стул. Если мест хватит всем и не останется ни одного лишнего стула, т. е. если будет установлена биекция между этими двумя множествами, то это и будет означать, что число элементов в них одинаково.

Заметим теперь, что если первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения к о н е ч-

ных множеств, второй (установление взаимно однозначного соответствия) пригоден и для бесконечных.

2. Счетные множества. Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел. Назовем *счетным множеством* всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами. Иначе говоря, счетное множество — это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Приведем примеры счетных множеств.

1. *Множество всех целых чисел.* Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:

$$0 — 1 \quad 1 — 2 \quad 2 \ldots,$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots,$$

вообще, неотрицательному числу $n \geqslant 0$ сопоставим нечетное число $2n + 1$, а отрицательному $n < 0$ — четное число $2 \mid n \mid$:

$$n \leftrightarrow 2n + 1 \text{ при } n \geqslant 0,$$
$$n \leftrightarrow 2 \mid n \mid \text{ при } n < 0.$$

2. *Множество всех четных положительных чисел.* Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множество* 2, 4, 8, ..., 2^n, ... *степеней числа* 2. Здесь соответствие также очевидно. Каждому числу 2^n сопоставляется число n.

4. Рассмотрим более сложный пример, а именно, покажем, что *множество всех рациональных чисел* счетно. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$, $q > 0$. Назовем сумму $|p| + q$ *высотой* рационального числа α. Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет только число 0/1, высоту 2 — числа 1/1 и —1/1, высоту 3 — числа 2/1, 1/2, —2/1 и —1/2 и т. д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сперва выпишем числа высоты 1, потом — числа высоты 2 и т. д. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.

Установим некоторые общие свойства счетных множеств.

1. *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Доказательство. Пусть A — счетное множество, а B — его подмножество. Занумеруем элементы множества A: $a_1, \ldots a_n \ldots$ Пусть $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ — те из них, которые входят в B. Если среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ есть наибольшее, то B конечно, в противном случае B счетно, поскольку его члены $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ занумерованы числами 1, 2, ...

2. *Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть снова счетное множество.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — счетные множества. Мы можем считать, что они попарно не пересекаются, так как иначе мы рассмотрели бы вместо них множества A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ... — каждое из которых не более чем счетно, — имеющие ту же самую сумму, что и множества $A_1, A_2, \ldots$ Все элементы множеств $A_1, A_2, \ldots$ можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array},$$

где в первой строке стоят элементы множества A_1, во второй — элементы множества A_2 и т. д. Занумеруем теперь все эти элементы «по диагоналям», т. е. за первый элемент примем a_{11}, за второй a_{12}, за третий a_{21} и т. д., двигаясь в порядке, указанном стрелками на следующей таблице:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} \rightarrow & a_{12} & a_{13} \rightarrow & a_{14} & \ldots \\ \swarrow & \nearrow & \swarrow & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\ \downarrow & \nearrow & \swarrow & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\ & \swarrow & & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}.$$

Ясно, что при этом каждый элемент каждого из множеств получит определенный номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми элементами всех множеств A_1, A_2, ..., и всеми натуральными числами. Наше утверждение доказано.

Упражнения. 1. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

2. Число ξ называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно.

3. Доказать, что множество всех рациональных интервалов (т. е. интервалов с рациональными концами) на прямой счетно.

4. Доказать, что множество всех точек плоскости, имеющих рациональные координаты, счетно.

Указание. Воспользоваться свойством 2.

3. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство. Пусть M — бесконечное множество. Выберем в нем произвольный элемент a_1. Поскольку M бесконечно, в нем найдется элемент a_2, отличный от a_1, затем найдется элемент a_3, отличный от a_1 и от a_2 и т. д. Продолжая этот процесс (который не может оборваться из-за «нехватки» элементов, ибо M бесконечно), мы получаем счетное подмножество

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$$

множества M. Предложение доказано.

Это предложение показывает, что среди бесконечных множеств счетные являются «самыми маленькими». Ниже мы выясним, существуют ли несчетные бесконечные множества.

3. Эквивалентность множеств. Сравнивая те или иные бесконечные множества с натуральным рядом, мы пришли к понятию счетного множества. Ясно, что множества можно сравнивать не только с множеством натуральных чисел; установление взаимно однозначного соответствия (биекции) позволяет сравнивать между собой любые два множества. Введем следующее определение.

Определение. Два множества, M и N, называются *эквивалентными* (обозначение $M \sim N$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Понятие эквивалентности применимо к любым множествам, как конечным, так и бесконечным. Два конечных множества эквивалентны между собой тогда (и только

тогда), когда число элементов у них одинаково. Определение счетного множества можно теперь сформулировать следующим образом: *множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.* Ясно, что два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны

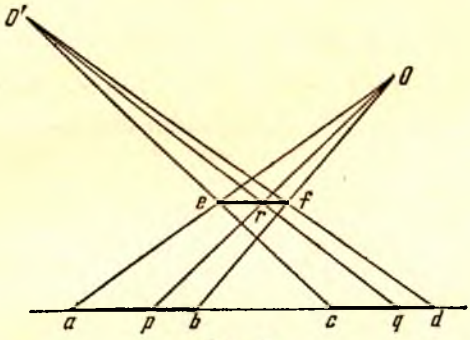


Рис. 5

между собой; в частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

Примеры. 1. Множества точек на любых двух отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ эквивалентны между собой. Из рис. 5 ясно, как установить между ними биекцию. Именно, точки p и q соответствуют друг другу, если они являются проекциями одной и той же точки r вспомогательного отрезка ef.

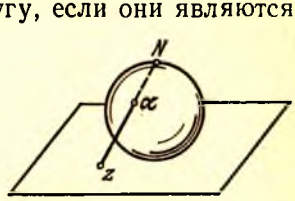


Рис. 6

2. Множество всех точек на расширенной комплексной плоскости эквивалентно множеству всех точек на сфере. Биекцию $\alpha \leftrightarrow z$ можно установить, например, с помощью стереографической проекции (рис. 6).

3. Множество всех чисел в интервале (0, 1) эквивалентно множеству всех точек на прямой. Соответствие можно установить, например, с помощью функции

$$y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Рассматривая примеры, приведенные здесь и в п. 2, можно заметить, что иногда бесконечное множество оказывается эквивалентным своей истинной части. Например, натуральных чисел оказывается «столько же», сколько и всех целых или даже всех рациональных; на интервале

(0, 1) «столько же» точек, сколько и на всей прямой, и т. д. Это явление характерно для бесконечных множеств. Действительно, в п. 2 (свойство 3) мы показали, что из всякого бесконечного множества M можно выбрать счетное подмножество; пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ такое подмножество.

Разобьем его на два счетных подмножества

$$A_1 = \{a_1, a_3, a_5, \ldots\} \text{ и } A_2 = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\}$$

и установим между A и A_1 взаимно однозначное соответствие. Это соответствие можно затем продолжить до взаимно однозначного соответствия между множествами $A \cup (M \setminus A) = M$ и $A_1 \cup (M \setminus A) = M \setminus A_2$, отнеся каждому элементу из $M \setminus A$ сам этот элемент. Между тем множество $M \setminus A_2$ не совпадает с M, т. е. является собственным подмножеством для M. Мы получаем, таким образом, следующее предложение:

Всякое бесконечное множество эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Это свойство можно принять за определение бесконечного множества.

Упражнение. Доказать, что если M — произвольное бесконечное множество и A счетно, то $M \sim M \cup A$.

4. Несчетность множества действительных чисел. В п. 2 мы привели примеры счетных множеств. Число этих примеров можно было бы увеличить. Кроме того, как мы показали, сумма конечного или счетного числа счетных множеств снова есть счетное множество.

Естественно возникает вопрос: а существуют ли вообще несчетные множества? Положительный ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 1. *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Доказательство. Предположим, что дано какое-то счетное множество (всех или только некоторых) действительных чисел α, лежащих на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0, \quad a_{11}a_{12}a_{13} \ldots a_{1n} \ldots, \\
&\alpha_2 = 0, \quad a_{21}a_{22}a_{23} \ldots a_{2n} \ldots, \\
&\alpha_3 = 0, \quad a_{31}a_{32}a_{33} \ldots a_{3n} \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_n = 0, \quad a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots a_{nn} \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь a_{ik} — k-я десятичная цифра числа α_i. Построим дробь

$$\beta = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

диагональной процедурой Кантора, а именно: за b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{11}, за b_2 — произвольную цифру, не совпадающую с a_{22}, и т. д.; вообще, за b_n примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{nn}. Эта десятичная дробь не может совпасть ни с одной дробью, содержащейся в перечне (1). Действительно, от α_1 дробь β отличается по крайней мере первой цифрой, от α_2 — второй цифрой и т. д.; вообще, так как $b_n \neq a_{nn}$ для всех n, то дробь β отлична от любой из дробей α_i, входящих в перечень (1). Таким образом, никакое счетное множество действительных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, не исчерпывает этого отрезка.

Приведенное доказательство содержит небольшой «обман». Дело в том, что некоторые числа (а именно, числа вида $p/10^q$) могут быть записаны в виде десятичной дроби двумя способами: с бесконечным числом нулей или с бесконечным числом девяток; например,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5000 \ldots = 0{,}4999 \ldots$$

Таким образом, несовпадение двух десятичных дробей еще не гарантирует различия изображаемых ими чисел.

Однако если дробь β строить осторожнее, так, чтобы она не содержала ни нулей, ни девяток, полагая, например, $b_n = 2$, если $a_{nn} = 1$, и $b_n = 1$, если $a_{nn} \neq 1$, то доказательство становится вполне корректным.

Упражнение. Показать, что числа, обладающие двумя различными десятичными разложениями, образуют счетное множество.

Итак, отрезок $[0, 1]$ дает пример несчетного множества. Приведем некоторые примеры множеств, эквивалентных отрезку $[0, 1]$.

1. Множество всех точек любого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b).
2. Множество всех точек на прямой.
3. Множество всех точек плоскости, пространства, поверхности сферы, точек, лежащих внутри сферы, и т. д.
4. Множество всех прямых на плоскости.
5. Множество всех непрерывных функций одного или нескольких переменных.

В случаях 1 и 2 доказательство не представляет труда (см. примеры 1 и 3 п. 3). В остальных случаях непосредственное доказательство довольно сложно.

Упражнение. Используя результаты этого пункта и упражнение 2 п. 2, доказать существование *трансцендентных* чисел, т. е. чисел, не являющихся алгебраическими.

5. Теорема Кантора — Бернштейна. Следующая теорема является одной из основных в теории множеств.

Теорема 2 (Кантор—Бернштейн). *Пусть A и B — два произвольных множества. Если существуют взаимно однозначное отображение f множества A на подмножество B_1 множества B и взаимно однозначное отображение g множества B на подмножество A_1 множества A, то A и B эквивалентны.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что A и B не пересекаются. Пусть x — произвольный элемент из A. Положим $x = x_0$ и определим последовательность элементов $\{x_n\}$ следующим образом. Пусть элемент x_n уже определен. Тогда, если n четно, то за x_{n+1} примем элемент из B, удовлетворяющий условию $g(x_{n+1}) = x_n$ (если такой элемент существует), а если n нечетно, то x_{n+1} — элемент из A, удовлетворяющий условию $f(x_{n+1}) = x_n$ (если он существует). Возможны два случая.

1°. При некотором n элемента x_{n+1}, удовлетворяющего указанным условиям, не существует. Число n называется *порядком элемента x*.

2°. Последовательность $\{x_n\}$ бесконечна [1]). Тогда x называется *элементом бесконечного порядка*.

Разобьем теперь A на три множества: A_E, состоящее из элементов четного порядка, A_O — множество элементов нечетного порядка и A_I — множество всех элементов бесконечного порядка. Разбив аналогичным образом множество B, заметим, что f отображает A_E на B_O и A_I на B_I, а g^{-1} отображает A_O на B_E. Итак, взаимно однозначное отображение ψ, совпадающее с f на $A_E \cup A_I$ и с g^{-1} на A_O, есть взаимно однозначное отображение всего A на все B.

6. Понятие мощности множества. Если эквивалентны два конечных множества, то они состоят из одного и того

[1]) При этом число *различных* элементов x_n может быть и конечно: они могут «зацикливаться», образуя *бесконечную* последовательность, содержащую лишь *конечное* число попарно различных элементов.

же числа элементов. Если же эквивалентные между собой множества M и N произвольны, то говорят, что M и N имеют одинаковую *мощность*. Таким образом, мощность — это то общее, что есть у любых двух эквивалентных между собой множеств. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества. Мощность множества натуральных чисел (т. е. любого счетного множества) обозначается символом $\aleph_0$ (читается: «алеф нуль»). Про множества, эквивалентные множеству всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$, говорят, что они имеют *мощность континуума*. Эта мощность обозначается символом c (или символом $\aleph$).

Весьма глубокий вопрос о существовании мощностей, промежуточных между $\aleph_0$ и c, будет затронут ниже в § 4. Как правило, бесконечные множества, встречающиеся в анализе, или счетны, или имеют мощность континуума.

Для мощностей конечных множеств, т. е. для натуральных чисел кроме понятия равенства имеются также понятия «больше» и «меньше». Попытаемся распространить эти последние на бесконечные мощности.

Пусть A и B — два произвольных множества, а $m(A)$ и $m(B)$ — их мощности. Тогда логически возможны следующие случаи:

1. A эквивалентно некоторой части множества B, а B эквивалентно некоторой части множества A.

2. A содержит некоторую часть, эквивалентную B, но в B нет части, эквивалентной A.

3. B содержит некоторую часть, эквивалентную A, но в A нет части, эквивалентной B.

4. Ни в одном из этих двух множеств нет части, эквивалентной другому.

В первом случае множества A и B в силу теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентны между собой, т. е. $m(A) = m(B)$. Во втором случае естественно считать, что $m(A) > m(B)$, а в третьем, что $m(A) < m(B)$. Наконец, в четвертом случае нам пришлось бы считать, что мощности множеств A и B несравнимы между собой. Но на самом деле этот случай невозможен! Это следует из теоремы Цермело, о которой речь будет идти в § 4.

Итак, *любые два множества A и B либо эквивалентны между собой* (*и тогда* $m(A) = m(B)$), либо удовлетворяют одному из двух соотношений: $m(A) < m(B)$ или $m(A) > m(B)$.

Мы отметили выше, что счетные множества — это «самые маленькие» из бесконечных множеств, а затем показали, что существуют и бесконечные множества, бесконечность которых имеет более «высокий порядок», — это множества мощности континуума. А существуют ли бесконечные мощности, превосходящие мощность континуума? Вообще, существует ли какая-то «наивысшая» мощность или нет? Оказывается, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть M — некоторое множество и пусть $\mathfrak{M}$ — множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M. Тогда $\mathfrak{M}$ имеет мощность бо́льшую, чем мощность исходного множества M.*

Доказательство. Легко видеть, что мощность $\mathfrak{m}$ множества $\mathfrak{M}$ не может быть меньше мощности m исходного множества M; действительно, «одноэлементные» подмножества из M образуют в $\mathfrak{M}$ часть, эквивалентную множеству M. Остается доказать, что мощности $\mathfrak{m}$ и m не совпадают. Пусть между элементами a, b, ... множества M и какими-то элементами A, B, ... множества $\mathfrak{M}$ (т. е. какими-то подмножествами из M) установлено взаимно однозначное соответствие

$$a \leftrightarrow A, \quad b \leftrightarrow B, \ldots$$

Покажем, что оно наверняка не исчерпывает всего $\mathfrak{M}$. Именно, сконструируем такое множество $X \subset M$, которому не соответствует никакой элемент из M. Пусть X — совокупность элементов из M, не входящих в те подмножества, которые им соответствуют. Подробнее: если $a \leftrightarrow A$ и $a \in A$, то элемент a мы не включаем в X, а если $a \leftrightarrow A$ и $a \notin A$, то мы включаем элемент a в X. Ясно, что X есть подмножество множества M, т. е. некоторый элемент из $\mathfrak{M}$. Покажем, что подмножеству X не может соответствовать никакой элемент из M. Допустим, что такой элемент $x \leftrightarrow X$ существует; посмотрим, будет ли он содержаться в X или нет? Пусть $x \notin X$; но ведь по определению в X входит в с я к и й элемент, не содержащийся в подмножестве, которое ему соответствует, следовательно, элемент x должен быть включен в X. Обратно, предположив, что x содержится в X, мы получим, что x н е м о ж е т содержаться в X, так как в X включены только те элементы, которые не входят в соответствующие им подмножества. Итак, элемент x, отвечающий подмножеству X, должен одновременно и содержаться

и не содержаться в X. Отсюда следует, что такого элемента вообще не существует, т. е. что взаимно однозначного соответствия между элементами множества M и всеми его подмножествами установить нельзя. Теорема доказана.

Итак, для любой мощности мы действительно можем построить множество большей мощности, затем еще большей и т. д., получая, таким образом, не ограниченную сверху шкалу мощностей.

Замечание. Мощность множества $\mathfrak{M}$ обозначают символом 2^m, где m — мощность M. (Читатель легко поймет смысл этого обозначения, рассмотрев случай конечного M.) Таким образом, предыдущую теорему можно выразить неравенством $m < 2^m$. В частности, при $m = \aleph_0$ получаем неравенство $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Покажем, что $2^{\aleph_0} = \aleph$, т. е. покажем, что *мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощности континуума.*

Разобьем подмножества натурального ряда на два класса, $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}$, — на те (класс $\mathfrak{P}$), у которых дополнение бесконечно, и на те (класс $\mathfrak{G}$), у которых оно конечно. К классу $\mathfrak{G}$ относится, в частности, сам натуральный ряд, ибо его дополнение пусто. Число подмножеств в классе $\mathfrak{G}$ счетно (доказать). Класс $\mathfrak{G}$ не влияет на мощность множества $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{G}$.

Между подмножествами класса $\mathfrak{P}$ и действительными числами α из полусегмента $[0, 1)$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Именно, сопоставим подмножеству $A \in \mathfrak{P}$ число α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ с двоичным разложением

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \cdots,$$

где $\varepsilon_n = 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит ли n множества A или нет. Проверку деталей предоставляем читателю.

Упражнение. Доказать, что совокупность всех числовых функций (или вообще функций, принимающих значения в множестве, содержащем не менее двух элементов), определенных на некотором множестве M, имеет мощность бо́льшую, чем мощность множества M.

Указание. Воспользоваться тем, что множество всех *индикаторов*, т. е. функций на M, принимающих только два значения, 0 и 1, эквивалентно множеству всех подмножеств из M.

§ 4. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа

В этом параграфе изложен ряд понятий, связанных с идеей упорядоченности множеств. Мы ограничимся здесь самыми первоначальными сведениями; более подробное изложение можно найти в литературе, указанной в конце книги.

1. Частично упорядоченные множества. Пусть M — произвольное множество и φ — некоторое бинарное отношение в нем (определяемое некоторым множеством $R_\varphi \subset M \times M$). Мы назовем это отношение *частичной упорядоченностью*, если оно удовлетворяет условиям:

1) *рефлексивности:* $a\varphi a$,

2) *транзитивности:* если $a\varphi b$ и $b\varphi c$, то $a\varphi c$,

3) *антисимметричности:* если $a\varphi b$ и $b\varphi a$, то $a = b$.

Частичную упорядоченность принято обозначать символом $\leqslant$. Таким образом, запись $a \leqslant b$ означает, что пара (a, b) принадлежит соответствующему множеству R_φ. Про элемент a при этом говорят, что он *не превосходит* b или что он *подчинен* b. Множество, в котором задана некоторая частичная упорядоченность, называется *частично упорядоченным*.

Приведем примеры частично упорядоченных множеств.

1. Всякое множество можно тривиальным образом рассматривать как частично упорядоченное, если положить $a \leqslant b$ в том и только том случае, когда $a = b$. Иначе говоря, за частичную упорядоченность всегда можно принять бинарное отношение тождества ε. Этот пример не представляет, конечно, большого интереса.

2. Пусть M — множество всех непрерывных функций на отрезке $[\alpha, \beta]$. Положив $f \leqslant g$ в том и только том случае, когда $f(t) \leqslant g(t)$ для всех t $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ мы получим, очевидно, частичную упорядоченность.

3. Множество всех подмножеств некоторого фиксированного множества частично упорядочено по включению: $M_1 \leqslant M_2$ означает, что $M_1 \subset M_2$.

4. Множество всех натуральных чисел частично упорядочено, если $a \leqslant b$ означает «b делится без остатка на a».

Пусть M — произвольное частично упорядоченное множество. В случае, когда $a \leqslant b$ и $a \neq b$, мы будем пользоваться символом $<$, т. е. писать $a < b$ и говорить, что *a меньше b* или что *a строго подчинено b.*

Наряду с записью $a \leqslant b$ мы будем пользоваться равносильной записью $b \geqslant a$ и говорить при этом, что b *не меньше* a (*больше* a, если $b \neq a$) или что b *следует* за a. Элемент a называется *максимальным*, если из $a \leqslant b$ следует, что $b = a$. Элемент a называется *минимальным*, если из $c \leqslant a$ следует, что $c = a$.

Частично упорядоченное множество, для любых двух точек a, b которого найдется следующая за ними точка c ($a \leqslant c$, $b \leqslant c$), называется *направленным*.

2. Отображения, сохраняющие порядок. Пусть M и M' — два частично упорядоченных множества и пусть f есть отображение M в M'. Мы скажем, что это отображение *сохраняет порядок*, если из $a \leqslant b$, где $a, b \in M$, следует, $f(a) \leqslant f(b)$ (в M'). Отображение f называется *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств M и M', если оно биективно, а соотношение $f(a) \leqslant f(b)$ выполнено в том *и только том* случае, когда $a \leqslant b$. Сами множества M и M' называются при этом *изоморфными* между собой.

Пусть, например, M есть множество натуральных чисел, частично упорядоченное по «делимости» (см. пример 4 п. 1), а M' — то же самое множество, но упорядоченное естественным образом, т. е. так, что $b \geqslant a$, если $b - a$ — положительное число. Тогда отображение M на M', ставящее в соответствие каждому числу n его само, сохраняет порядок (но не является изоморфизмом).

Отношение изоморфизма между частично упорядоченными множествами представляет собой, очевидно, отношение эквивалентности (оно симметрично, транзитивно и рефлексивно). Следовательно, если у нас имеется какой-то запас [1]) частично упорядоченных множеств, то все эти множества можно разбить на классы изоморфных между собой. Ясно, что если нас интересует не природа элементов множества, а только имеющаяся в нем частичная упорядоченность, то два изоморфных между собой частично упорядоченных множества можно рассматривать просто как тождественные.

3. Порядковые типы. Упорядоченные множества. Про изоморфные между собой частично упорядоченные мно-

[1]) Мы воздерживаемся от понятий вроде «все частично упорядоченные множества», так как они, подобно понятию «множество всех множеств», по существу, внутренне противоречивы и не могут быть включены в четкие математические концепции.

жества мы будем говорить, что они имеют один и тот же *порядковый тип*. Таким образом, порядковый тип — это то общее, что присуще любым двум изоморфным между собой частично упорядоченным множествам, подобно тому как мощность — это то общее, что присуще эквивалентным между собой множествам (рассматриваемым независимо от какого бы то ни было отношения порядка в них).

Пусть a и b — элементы частично упорядоченного множества. Может оказаться, что ни одно из соотношений $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ не имеет места. В этом случае элементы a и b называются *несравнимыми*. Таким образом, отношение порядка определено лишь для некоторых пар элементов, поэтому мы и говорим о частичной упорядоченности. Если же в частично упорядоченном множестве M несравнимых элементов нет, то множество M называется *упорядоченным* (*линейно упорядоченным*, *совершенно упорядоченным*). Итак, множество M упорядочено, если оно частично упорядочено и если для любых двух различных элементов a, $b \in M$ обязательно либо $a < b$, либо $b < a$.

Ясно, что всякое подмножество упорядоченного множества само упорядочено.

Множества, указанные в примерах 1—4 п. 1, являются лишь частично упорядоченными. Простейшими примерами линейно упорядоченных множеств могут служить натуральные числа, совокупность всех рациональных чисел, всех действительных чисел на отрезке $[0, 1]$ и т. п. (с естественными отношениями «больше» и «меньше», которые в этих множествах имеются).

Поскольку упорядоченность есть частный случай частичной упорядоченности, к упорядоченным множествам применимо понятие отображения, сохраняющего порядок, и, в частности, понятие изоморфизма. Поэтому можно говорить о порядковом типе упорядоченного множества. Ряд натуральных чисел 1, 2, 3, ... с естественным отношением порядка между его элементами представляет собой простейший пример бесконечного упорядоченного множества. Его порядковый тип принято обозначать символом ω.

Если два частично упорядоченных множества изоморфны между собой, то они, конечно, имеют одинаковую мощность (изоморфизм — это биекция), поэтому можно говорить о мощности, отвечающей данному порядковому типу (например, типу ω отвечает мощность $\aleph_0$). Однако обратное неверно; множество данной мощности может быть упорядочено, вообще говоря, многими разными

способами. Лишь порядковый тип линейно упорядоченного конечного множества однозначно определяется числом n его элементов (и обозначается также через n). Уже для счетного множества натуральных чисел возможен, например, наряду с его «естественным» типом ω, такой тип:

$$1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots,$$

т. е. такой, когда любое четное число следует за любым нечетным, а нечетные и четные числа между собой упорядочены по возрастанию. Можно показать, что число различных порядковых типов, отвечающих мощности $\aleph_0$, бесконечно и даже несчетно.

4. Упорядоченная сумма упорядоченных множеств. Пусть M_1 и M_2 — два непересекающихся упорядоченных множества с порядковыми типами θ_1 и θ_2. В объединении $M_1 \cup M_2$ множеств M_1 и M_2 можно ввести порядок, считая, что два элемента из M_1 упорядочены как в M_1, два элемента из M_2 упорядочены как в M_2 и что всякий элемент из M_1 предшествует всякому элементу из M_2. (Проверьте, что это действительно линейная упорядоченность!) Такое упорядоченное множество мы будем называть *упорядоченной суммой* множеств M_1 и M_2 и обозначать $M_1 + M_2$. Подчеркнем, что здесь важен порядок слагаемых: сумма $M_2 + M_1$ не изоморфна, вообще говоря, сумме $M_1 + M_2$. Порядковый тип суммы $M_1 + M_2$ мы будем называть *упорядоченной суммой* порядковых типов θ_1 и θ_2 и обозначать $\theta_1 + \theta_2$.

Это определение легко распространяется на произвольное конечное число слагаемых $\theta_1, \ldots, \theta_m$.

Пример. Рассмотрим порядковые типы ω и n. Легко видеть, что $n + \omega = \omega$; действительно, если мы к натуральному ряду $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ припишем слева конечное число членов, то мы получим тот же порядковый тип ω. В то же время порядковый тип $\omega + n$, т. е. порядковый тип множества $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots, a_1, \ldots, a_n$, не равен, очевидно, ω.

5. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитные числа. Выше мы ввели понятия частичной упорядоченности и упорядоченности. Введем еще более узкое, но весьма важное понятие полной упорядоченности.

Определение. Упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое

подмножество содержит наименьший (т. е. предшествующий всем элементам этого подмножества) элемент.

Если упорядоченное множество конечно, то оно, очевидно, и вполне упорядочено. Примером упорядоченного, но не вполне упорядоченного множества может служить отрезок $[0, 1]$. Само это множество содержит наименьший элемент — число 0, но его подмножество, состоящее из положительных чисел, наименьшего элемента не содержит.

Ясно, что *всякое (непустое) подмножество вполне упорядоченного множества само вполне упорядочено.*

Порядковый тип вполне упорядоченного множества называют *порядковым числом* (*трансфинитным порядковым числом* или, короче *трансфинитом*, когда хотят подчеркнуть, что речь идет о бесконечном множестве).

Натуральный ряд (с естественным отношением порядка) представляет собой множество не только упорядоченное, но и вполне упорядоченное. Таким образом, его порядковый тип ω есть порядковое число (трансфинит!). Порядковым числом будет и $\omega + k$, т. е. тип множества

$$1, \ldots, n, \ldots, a_1, \ldots, a_k.$$

Напротив, множество

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1 \qquad (1)$$

упорядочено, но не вполне упорядочено. Здесь в каждом непустом подмножестве есть наибольший элемент (т. е. следующий за всеми), но, вообще говоря, нет наименьшего (например, наименьшего элемента нет во всем множестве (1)). Порядковый тип (не являющийся порядковым числом!) множества (1) принято обозначать символом ω^*.

Докажем следующий простой, но важный факт.

Лемма 1. *Упорядоченная сумма конечного числа вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

В самом деле, пусть M — произвольное подмножество упорядоченной суммы $M_1 + \ldots + M_n$ вполне упорядоченных множеств; рассмотрим первое из множеств M_k, содержащее элементы из M. Пересечение $M \cap M_k$ является подмножеством вполне упорядоченного множества M_k и, значит, имеет первый элемент. Этот элемент будет первым элементом и всего M.

Следствие. *Упорядоченная сумма порядковых чисел является порядковым числом.*

Мы можем, таким образом, отправляясь от некоторого запаса порядковых чисел, строить новые порядковые числа. Например, отправляясь от натуральных чисел (т. е. конечных порядковых чисел) и порядкового числа ω, можно получить порядковые числа

$$\omega + n, \quad \omega + \omega, \quad \omega + \omega + n, \quad \omega + \omega + \omega \text{ и т. д.}$$

Читатель легко построит вполне упорядоченные множества, отвечающие этим трансфинитам.

Наряду с упорядоченной суммой порядковых типов можно ввести *упорядоченное произведение*. Пусть M_1 и M_2 — множества, упорядоченные по типам θ_1 и θ_2. Возьмем много экземпляров множества M_1 — по одному на каждый элемент M_2 — и заменим в множестве M_2 его элементы этими экземплярами M_1. Полученное множество называется упорядоченным произведением M_1 и M_2 и обозначается символом $M_1 \times M_2$. Формально $M_1 \cdot M_2$ строится как множество пар (a, b), где $a \in M_1$ и $b \in M_2$, причем $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$, если $b_1 < b_2$ (при любых a_1, a_2), и $(a_1, b) < (a_2, b)$, если $a_1 < a_2$.

Аналогично определяется упорядоченное произведение любого конечного числа сомножителей $M_1 \cdot M_2 \ldots M_p$. Порядковый тип θ произведения $M_1 \cdot M_2$ упорядоченных множеств называется *произведением порядковых типов* θ_1 и θ_2:

$$\theta = \theta_1 \theta_2.$$

Как и упорядоченная сумма, упорядоченное произведение некоммутативно.

Лемма 2. *Упорядоченное произведение двух вполне упорядоченных множеств есть вполне упорядоченное множество.*

Доказательство. Пусть M — некоторое подмножество произведения $M_1 \cdot M_2$; множество M есть множество пар (a, b). Рассмотрим все вторые элементы b пар, входящих в M. Они образуют некоторое подмножество в M_2. В силу полной упорядоченности M_2 это подмножество имеет первый элемент. Обозначим его b_0 и рассмотрим все пары вида (a, b_0), входящие в M. Их первые элементы a образуют некоторое подмножество в M_1. В силу полной упорядоченности M_1 среди них имеется первый элемент. Обозначим его a_0. Тогда пара (a_0, b_0), как легко видеть, и будет первым элементом M.

Следствие. *Упорядоченное произведение порядковых чисел является порядковым числом.*

Примеры. Легко видеть, что $\omega + \omega = \omega \cdot 2$, $\omega + \omega + \omega = \omega \cdot 3$. Легко также построить множества, упорядоченные по типам $\omega \cdot n$, ω^2, $\omega^2 \cdot n$, ω^2, ..., ω^p, ... Все эти множества будут иметь счетную мощность.

Можно определить и другие действия над порядковыми типами, например, возведение в степень, и ввести в рассмотрение такие порядковые числа, как, скажем, ω^ω, ω^{ω^ω} и т. д.

6. Сравнение порядковых чисел. Если n_1 и n_2 — два конечных порядковых числа, то они или совпадают, или одно из них больше другого. Распространим это отношение порядка на трансфинитные порядковые числа. Введем для этого следующие понятия. Всякий элемент a линейно упорядоченного множества M определяет *начальный отрезок* P (совокупность элементов $<a$) и *остаток* Q (совокупность элементов $\geqslant a$).

Пусть α и β — два порядковых числа, а M и N — множества, типа α и β соответственно. Мы скажем, что $\alpha = \beta$, если множества M и N изоморфны, что $\alpha < \beta$, если M изоморфно какому-либо начальному отрезку множества N, и что $\alpha > \beta$, если, обратно, N изоморфно начальному отрезку множества M.

Теорема 1. *Любые два порядковых числа α и β связаны между собой одним и только одним из соотношений:*

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta \text{ или } \alpha > \beta.$$

Для доказательства установим прежде всего следующую лемму.

Лемма 3. *Если f — изоморфное отображение вполне упорядоченного множества A на какое-либо его подмножество B, то $f(a) \geqslant a$, для всех $a \in A$.*

Действительно, если бы имелись такие элементы $a \in A$, что $f(a) < a$, то среди них был бы первый (полная упорядоченность!). Пусть это — элемент a_0 и пусть $b_0 = f(a_0)$. Тогда $b_0 < a_0$ и, поскольку f — изоморфизм, $f(b_0) < f(a_0) = b_0$, т. е. a_0 не был бы первым среди элементов с указанным свойством.

Из этой леммы сразу же вытекает, что вполне упорядоченное множество не может быть изоморфно своему отрезку. Если бы A было изоморфно отрезку, определяемому элементом a, то выполнялось бы соотношение $f(a) < a$. Поэтому соотношения $\alpha = \beta$ и $\alpha < \beta$ не могут иметь места одновременно. Аналогично не может быть одновременно $\alpha = \beta$ и $\alpha > \beta$. Точно так же несовместны соотношения $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$, так как иначе мы получили бы (транзитивность!), что $\alpha < \alpha$, а это, как мы видели, невозможно. Итак, мы показали, что наличие одного из соотношений $\alpha \lessgtr \beta$ исключает два остальных. Покажем теперь, что одно из этих соотношений всегда имеет место, т. е. что любые два порядковых числа сравнимы.

Сначала для каждого порядкового числа α построим множество $W(\alpha)$, служащее его «стандартным представителем». Именно, примем за $W(\alpha)$ множество всех порядковых чисел, меньших α. Числа, входящие в $W(\alpha)$, все сравнимы между собой, а само множество $W(\alpha)$ (упорядоченное по величине порядковых чисел) имеет тип α. Действительно, если множество

$$A = \{\ldots, a, \ldots, b, \ldots\}$$

имеет тип α, то, по самому определению, порядковые числа, меньшие, чем α, взаимно однозначно отвечают начальным отрезкам множества A, а следовательно, и элементам этого множества. Иначе говоря, элементы множества, имеющего тип α, можно перенумеровать с помощью порядковых чисел, меньших α:

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_\lambda, \ldots).$$

Пусть теперь α и β — два порядковых числа; тогда $A = W(\alpha)$ и $B = W(\beta)$ — множества типов α и β соответственно. Пусть, далее, $C = A \cap B$ — пересечение множеств A и B, т. е. совокупность порядковых чисел, меньших α и β одновременно. Множество C вполне упорядочено; обозначим его тип γ. Покажем, что $\gamma \leqslant \alpha$. Действительно, если $C = A$, то $\gamma = \alpha$, если же $C \neq A$, то C есть отрезок множества A и тогда

$$\gamma < \alpha.$$

В самом деле, при всех $\xi \in C$, $\eta \in A \setminus C$ числа ξ и η сравнимы, т. е. $\xi \leqslant \eta$. Но соотношение $\eta < \xi < \alpha$ невозможно, так как тогда $\eta \in C$. Итак, $\xi < \eta$, откуда и видно, что C есть отрезок множества A и $\gamma < \alpha$. Кроме того, γ есть первый элемент множества $A \setminus C$. Итак,

$$\gamma \leqslant \alpha \text{ и аналогично } \gamma \leqslant \beta.$$

При этом случай $\gamma < \alpha$, $\gamma < \beta$ невозможен, так как тогда мы имели бы $\gamma \in A \setminus C$, $\gamma \in B \setminus C$, т. е., с одной стороны, $\gamma \notin C$, с другой стороны, $\gamma \in A \cap B = C$. Следовательно, возможны лишь случаи

$$\gamma = \alpha, \quad \gamma = \beta, \quad \alpha = \beta,$$
$$\gamma = \alpha, \quad \gamma < \beta, \quad \alpha < \beta,$$
$$\gamma < \alpha, \quad \gamma = \beta, \quad \alpha > \beta,$$

т. е. α и β сравнимы. Теорема полностью доказана.

Каждому порядковому числу отвечает определенная мощность, а из сравнимости порядковых чисел следует, очевидно, и сравнимость соответствующих мощностей. Поэтому:

Если A и B — два вполне упорядоченных множества, то либо они эквивалентны между собой (равномощны), либо же мощность одного из них больше, чем мощность другого (т. е. вполне упорядоченные множества не могут иметь несравнимых мощностей).

Рассмотрим совокупность всех порядковых чисел, отвечающих конечной или счетной мощности. Они образуют вполне упорядоченное множество. Нетрудно убедиться в том, что само это множество уже несчетно. Действительно, обозначим, в соответствии с общепринятой символикой, через ω_1 порядковый тип множества всех счетных трансфинитов. Если бы отвечающая ему мощность была счетной, то счетным было бы и множество, имеющее порядковый тип $\omega_1 + 1$. Вместе с тем число ω_1 следует, очевидно, за всеми трансфинитами, отвечающими конечной или счетной мощности.

Обозначим мощность, отвечающую порядковому трансфиниту ω_1, сиволом $\aleph_1$. Легко видеть, что никаких мощностей m, удовлетворяющих неравенству

$$\aleph_0 < m < \aleph_1,$$

нет. Действительно, если бы такая мощность m существовала, то в множестве $W(\omega_1)$ всех порядковых трансфинитов, предшествующих ω_1, имелось бы подмножество мощности m. Это подмножество вполне упорядочено и несчетно. Но тогда его порядковый тип α предшествовал бы ω_1 и в то же время следовал за всеми счетными трансфинитами. Мы получили бы противоречие с определением ω_1.

7. Аксиома выбора, теорема Цермело и другие эквивалентные им утверждения. Сравнимость вполне упорядоченных множеств по мощности подсказывает следующую постановку вопроса: нельзя ли всякое множество вполне упорядочить каким-либо образом? Положительный ответ означал бы, в частности, что несравнимых мощностей вообще не существует. Такой ответ дал Цермело, доказав, что *каждое множество может быть вполне упорядочено.* Доказательство этой теоремы (мы не будем воспроизводить его здесь, см., например, [2]) существенно опирается

на так называемую *аксиому выбора*, состоящую в следующем.

Пусть A — некоторое множество индексов α и пусть для каждого α задано некоторое произвольное множество M_α. Тогда, как утверждает аксиома выбора, *можно построить функцию* φ *на* A, *относящую каждому* $\alpha \in A$ *некоторый элемент* m_α *из соответствующего множества* M_α. Иными словами, можно составить некоторое множество, выбрав из каждого M_α по одному и только одному элементу.

Теория множеств в той форме, в которой мы ее излагаем, восходит к Кантору и Цермело и является «наивной» теорией множеств. Аксиома выбора, называемая также аксиомой Цермело, возникшая в рамках наивной теории множеств вместе с другими вопросами, такими, как континуум-гипотеза, т. е. вопрос о совпадении мощности континуума с первой несчетной мощностью $\aleph_1$, привела к многочисленным спорам и к длинной серии работ по математической логике и основаниям математики. Были построены аксиоматические теории множеств Гёделя — Бернайса и Цермело — Френкеля. В рамках этих теорий была установлена непротиворечивость и независимость аксиомы выбора. Мы отсылаем читателя к специальным работам: А. Френкель и И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, «Мир», 1966; П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза, «Мир», 1969. Заметим, что отказ от аксиомы выбора существенно обедняет теоретико-множественные построения.

Вместе с тем критика наивной теории множеств и попытки обойтись без аксиомы выбора повели к созданию таких замечательных теорий, как теория рекурсивных функций, и таких понятий, как понятие вычислимого числа.

Сформулируем некоторые предложения, каждое из которых эквивалентно аксиоме выбора (т. е. каждое из них может быть доказано, если принять аксиому выбора, и обратно, аксиому выбора можно доказать, допустив справедливость какого-либо из этих предложений). Прежде всего ясно, что таким предложением является сама теорема Цермело. Действительно, если предположить, что каждое из множеств M_α вполне упорядочено, то для построения функции φ, существование которой утверждается аксиомой выбора, достаточно в каждом M_α взять первый элемент.

Для формулировки других предложений, эквивалентных аксиоме выбора, введем следующие понятия. Пусть M — частично упорядоченное множество. Всякое его подмножество A, в котором любые два элемента сравнимы между собой (в смысле введенной в M частичной упорядоченности), будем называть *цепью*. Цепь называется

максимальной, если она не содержится в качестве собственного подмножества ни в какой другой цепи, принадлежащей M. Далее, назовем в частично упорядоченном множестве M элемент *а верхней гранью* подмножества $M' \subset M$, если любой элемент $a' \in M'$ подчинен a.

Теорема Хаусдорфа. *В частично упорядоченном множестве всякая цепь содержится в некоторой его максимальной цепи.*

Следующее предложение представляет собой, пожалуй, наиболее удобную из всех формулировок, эквивалентных аксиоме выбора.

Лемма Цорна. *Если всякая цепь в частично упорядоченном множестве M имеет верхнюю грань, то всякий элемент из M подчинен некоторому максимальному.*

Доказательство равносильности всех приведенных утверждений (аксиома выбора, теорема Цермело, теорема Хаусдорфа, лемма Цорна) имеется, например, в книге А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, 1962; см. также [8]. Мы не будем его здесь воспроизводить.

Если множество верхних граней подмножества A имеет наименьший элемент a, то a называют *точной верхней гранью* подмножества A; аналогично определяется *точная нижняя грань*. Частично упорядоченное множество, всякое непустое *конечное* подмножество которого обладает точной верхней гранью и точной нижней гранью, называется *решеткой*, или *структурой*.

8. Трансфинитная индукция. Широко распространенный метод доказательства тех или иных утверждений — это метод математической индукции. Он, как известно, состоит в следующем. Пусть имеется некоторое утверждение $P(n)$, которое формулируется для каждого натурального числа n, и пусть известно, что:

1) утверждение $P(1)$ верно;

2) из того, что $P(k)$ верно для всех $k \leqslant n$, следует, что $P(n+1)$ верно.

Тогда утверждение $P(n)$ верно для всех $n = 1, 2, \ldots$ Действительно, в противном случае среди тех n, для которых $P(n)$ неверно, нашлось бы наименьшее число, скажем, n_1. Очевидно, что $n_1 > 1$, т. е. $n_1 - 1$ тоже натуральное число, и мы приходим к противоречию с условием 2).

Аналогичный прием может быть использован с заменой натурального ряда любым вполне упорядоченным множеством. В этом случае он носит на-

звание *трансфинитной индукции*. Таким образом, метод трансфинитной индукции состоит в следующем. Пусть дано некоторое вполне упорядоченное множество A (если угодно, его можно считать множеством всех порядковых трансфинитов, меньших некоторого данного) и пусть $P(a)$ — некоторое утверждение, формулируемое для каждого $a \in A$ и такое, что $P(a)$ верно для первого элемента из A и верно для a, если оно верно для всех элементов, предшествующих a. Тогда $P(a)$ верно для всех $a \in A$. Действительно, если бы существовали элементы в A, для которых $P(a)$ не имеет места, то в множестве таких элементов нашелся бы первый, скажем, a^*, и мы пришли бы к противоречию, поскольку для всех $a < a^*$ утверждение $P(a)$ было бы верно.

Так как в силу теоремы Цермело всякое множество можно вполне упорядочить, трансфинитная индукция может быть, в принципе, применена к любому множеству. Однако практически бывает удобнее пользоваться заменяющей ее леммой Цорна, которая опирается лишь на наличие частично упорядоченности в рассматриваемом множестве. А некоторая частичная упорядоченность рассматриваемых объектов в задачах, требующих применения леммы Цорна, обычно возникает естественным образом, «сама собой».

§ 5. Системы множеств [1])

1. Кольцо множеств. *Системой множеств* называется всякое множество, элементы которого сами представляют собой какие-либо множества. Если не оговорено противное, мы будем рассматривать системы таких множеств, каждое из которых является подмножеством некоторого фиксированного множества X. Системы множеств мы будем обозначать прописными готическими буквами. Основной интерес для нас будут представлять системы множеств, удовлетворяющие (по отношению к введенным в § 1 операциям) некоторым определенным условиям замкнутости.

---

[1]) Рассматриваемые в этом параграфе понятия понадобятся нам в гл. V при изложении общей теории меры. Поэтому чтение данного параграфа может быть отложено. Читатель, решивший ограничиться при изучении теории меры мерой на плоскости (§ 1 гл. V), может этот параграф пропустить совсем.

Определение 1. Непустая система множеств $\mathfrak{R}$ называется *кольцом*, если она обладает тем свойством, что из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует $A \triangle B \in \mathfrak{R}$ и $A \cap B \in \mathfrak{R}$.

Так как для любых A и B

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B) \text{ и } A \setminus B = A \triangle (A \cap B),$$

то из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ вытекает также принадлежность к $\mathfrak{R}$ множеств $A \cup B$ и $A \setminus B$. Таким образом, кольцо множеств есть система множеств, замкнутая по отношению к взятию суммы и пересечения, вычитанию и образованию симметрической разности. Очевидно, что кольцо замкнуто и по отношению к образованию любых конечных сумм и пересечений вида

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Любое кольцо содержит пустое множество $\varnothing$, так как всегда $A \setminus A = \varnothing$. Система, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Множество E называется *единицей* системы множеств $\mathfrak{S}$, если оно принадлежит $\mathfrak{S}$ и если для любого $A \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство

$$A \cap E = A.$$

Таким образом, единица системы множеств $\mathfrak{S}$ есть не что иное, как максимальное множество этой системы, содержащее все другие входящие в $\mathfrak{S}$ множества.

Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй* множеств.

Примеры. 1. Для любого множества A система $\mathfrak{M}(A)$ всех его подмножеств представляет собой алгебру множеств с единицей $E = A$.

2. Для любого непустого множества A система $\{\varnothing, A\}$, состоящая из множества A и пустого множества $\varnothing$, образует алгебру множеств с единицей $E = A$.

3. Система всех конечных подмножеств произвольного множества A представляет собой кольцо множеств. Это кольцо будет алгеброй в том и только том случае, когда множество A само конечно.

4. Система всех ограниченных подмножеств числовой прямой является кольцом множеств, не содержащим единицы.

Из определения кольца множеств непосредственно вытекает

Теорема 1. *Пересечение* $\mathfrak{R} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha$ *любого множества колец есть кольцо.*

Установим следующий простой, но важный для дальнейшего факт.

Теорема 2. *Для любой непустой системы множеств* $\mathfrak{S}$ *существует одно и только одно кольцо* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$, *содержащее* $\mathfrak{S}$ *и содержащееся в любом кольце* $\mathfrak{R}$, *содержащем* $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Легко видеть, что кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ определяется системой $\mathfrak{S}$ однозначно. Для доказательства его существования рассмотрим объединение $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ всех множеств A, входящих в $\mathfrak{S}$, и кольцо $\mathfrak{M}(X)$ всех подмножеств множества X. Пусть $\sum$ — совокупность всех колец множеств, содержащихся в $\mathfrak{M}(X)$ и содержащих $\mathfrak{S}$. Пересечение $\mathfrak{P} = \bigcap_{\mathfrak{R} \in \sum} \mathfrak{R}$ всех этих колец и будет, очевидно, искомым кольцом $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

Действительно, каково бы ни было кольцо $\mathfrak{R}^*$, содержащее $\mathfrak{S}$, пересечение $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^* \cap \mathfrak{M}(X)$ будет кольцом из $\sum$ и, следовательно, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}^*$, т. е. $\mathfrak{P}$ действительно удовлетворяет требованию минимальности. Это кольцо называется *минимальным кольцом* над $\mathfrak{S}$ или кольцом, *порожденным* $\mathfrak{S}$, и обозначается $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$.

2. Полукольцо множеств. В ряде вопросов, например, в теории меры наряду с понятием кольца важную роль играет более общее понятие полукольца множеств.

Определение 2. Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *полукольцом*, если она содержит пустое множество $\varnothing$, замкнута по отношению к образованию пересечений и обладает тем свойством, что из принадлежности к $\mathfrak{S}$ множеств A и $A_1 \subset A$ вытекает возможность представления A в виде $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, где A_k — попарно непересекающиеся множества из $\mathfrak{S}$, первое из которых есть заданное множество A_1.

В дальнейшем всякий набор попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_n$, объединение которых есть заданное множество A, мы будем называть *конечным разложением* множества A.

Всякое кольцо множеств $\mathfrak{R}$ является полукольцом, так как если A и $A_1 \subset A$ входят в $\mathfrak{R}$, то имеет место разложение

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ где } A_1 = A \setminus A_1 \in \mathfrak{R}.$$

Примером полукольца, не являющегося кольцом множеств, может служить совокупность всех интервалов (a, b), отрезков $[a, b]$ и полуинтервалов $[a, b)$ и $(a, b]$ на числовой прямой [1]). Еще одним примером служит совокупность всех «полуоткрытых» прямоугольников $a < x \leqslant b$, $c < y \leqslant d$ на плоскости или совокупность всех полуоткрытых параллелепипедов в пространстве.

Установим следующие свойства полуколец множеств.

Лемма 1. *Пусть множества $A_1, \ldots, A_n$, A принадлежат полукольцу $\mathfrak{S}$, причем множества A_i попарно не пересекаются и все содержатся в A. Тогда набор множеств A_i $(i = 1, \ldots, n)$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{S}$ до конечного разложения*

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \quad s \geqslant n,$$

множества A.

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ справедливость утверждения леммы вытекает из определения полукольца. Предположим, что это утверждение справедливо для $n = m$ и рассмотрим $m + 1$ множеств $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$, удовлетворяющих условиям леммы. По сделанному предположению,

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p,$$

где все множества B_q $(q = 1, \ldots, p)$ принадлежат $\mathfrak{S}$. Положим $B_{q1} = A_{m+1} \cap B_q$. По определению полукольца, имеется разложение $B_q = B_{q1} \cup \ldots \cup B_{qr}$, где все B_{qj} принадлежат $\mathfrak{S}$. Легко видеть, что

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup A_{m+1} \cup \bigcup_{q=1}^{p} \left(\bigcup_{j=2}^{r_q} B_{qj} \right).$$

Таким образом, утверждение леммы доказано для $n = m + 1$, а следовательно, и вообще для всех n.

---

[1]) При этом в число интервалов включается, конечно, «пустой» интервал (a, a), а в число отрезков — отрезок, состоящий из одной точки $[a, a]$.

Лемма 2. *Какова бы ни была конечная система множеств* $A_1, \ldots, A_n$, *принадлежащих полукольцу* $\mathfrak{S}$, *в* $\mathfrak{S}$ *найдется такая конечная система попарно непересекающихся множеств* $B_1, \ldots, B_t$, *что каждое* A_k *может быть представлено в виде суммы*

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

некоторых из множеств B_s.

Доказательство. При $n = 1$ лемма тривиальна, так как достаточно положить $t = 1$, $B_1 = A_1$. Допустим, что она справедлива для $n = m$, и рассмотрим в $\mathfrak{S}$ некоторую систему множеств $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$. Пусть $B_1, \ldots, B_t$ — множества из $\mathfrak{S}$, удовлетворяющие условиям леммы по отношению к $A_1, \ldots, A_m$. Положим

$$B_{s1} = A_{m+1} \cap B_s.$$

В силу леммы 1 имеет место разложение

$$A_{m+1} = \bigcup_{s=1}^{t} B_{s1} \cup \bigcup_{p=1}^{q} B'_p, \quad B'_p \in \mathfrak{S}, \tag{1}$$

а в силу самого определения полукольца имеет место разложение

$$B_s = B_{s1} \cup \ldots \cup B_{st_s}, \quad B_{sj} \in \mathfrak{S}.$$

Легко видеть, что

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} \bigcup_{j=1}^{t_s} B_{sj}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

и что множества

$$B_{sj}, \quad B'_p$$

попарно не пересекаются. Таким образом, множества B_{sj}, B'_p удовлетворяют условиям леммы по отношению к $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$.

3. Кольцо, порожденное полукольцом. Мы уже видели в п. 1, что для каждой системы множеств $\mathfrak{S}$ существует единственное минимальное кольцо, содержащее $\mathfrak{S}$. Однако для произвольной системы $\mathfrak{S}$ фактическое построение кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ по $\mathfrak{S}$ довольно сложно. Оно становится вполне обозримым в том важном случае, когда $\mathfrak{S}$ представляет собой полукольцо. Это построение дается следующей теоремой.

Теорема 3. *Если* $\mathfrak{S}$ *— полукольцо, то* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ *совпадает с системой* $\mathfrak{Z}$ *множеств* A, *допускающих конечные разложения*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

на множества $A_k \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Покажем, что система $\mathfrak{Z}$ образует кольцо. Если A и B — два произвольных множества из $\mathfrak{Z}$, то имеют место разложения

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_i \in \mathfrak{S}, \quad B_j \in \mathfrak{S}.$$

Так как $\mathfrak{S}$ — полукольцо, то множества

$$C_{ij} = A_i \cap B_j$$

тоже входят в $\mathfrak{S}$. В силу леммы 1 имеют место разложения

$$A_i = \bigcup_j C_{ij} \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} D_{ik}; \quad B_j = \bigcup_i C_{ij} \cup \bigcup_{l=1}^{s_j} E_{jl}, \tag{2}$$

где D_{ik}, $E_{jl} \in \mathfrak{S}$. Из равенств (2) вытекает, что множества $A \cap B$ и $A \triangle B$ допускают разложения

$$A \cap B = \bigcup_{i,\,j} C_{ij}, \quad A \triangle B = \bigcup_{i,\,k} D_{ik} \cup \bigcup_{j,\,l} E_{jl}$$

и, следовательно, входят в $\mathfrak{Z}$. Таким образом, $\mathfrak{Z}$ действительно представляет собой кольцо; его минимальность среди всех колец, содержащих $\mathfrak{S}$, очевидна.

4. σ-алгебры. В различных вопросах, в частности, в теории меры, приходится рассматривать суммы и пересечения не только конечного, но и счетного числа множеств. Поэтому целесообразно, помимо понятия кольца множеств, ввести еще следующие понятия.

Определение 3. Кольцо множеств называется *σ-кольцом*, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ содержит сумму

$$S = \bigcup_n A_n.$$

Определение 4. Кольцо множеств называется *δ-кольцом*, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ содержит пересечение

$$D = \bigcap_n A_n.$$

Естественно назвать *σ-алгеброй* σ-кольцо с единицей и *δ-алгеброй* δ-кольцо с единицей. Легко, однако, видеть, что эти два понятия совпадают: каждая σ-алгебра является в то же время δ-алгеброй, а каждая δ-алгебра — σ-алгеброй. Это вытекает из соотношений двойственности (см. § 1)

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n), \quad \bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

Простейшим примером σ-алгебры является совокупность всех подмножеств некоторого множества A.

Если имеется некоторая система множеств $\mathfrak{S}$, то всегда существует хотя бы одна σ-алгебра, содержащая эту систему. Действительно, положим

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$$

и рассмотрим систему $\mathfrak{B}$ всех подмножеств множества X. Ясно, что $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{B}$ — произвольная σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{S}$ и $\tilde{X}$ — ее единица, то каждое $A \in \mathfrak{S}$ содержится в $\tilde{X}$ и, следовательно, $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A \subset \tilde{X}$. Назовем σ-алгебру $\mathfrak{B}$ *неприводимой* (по отношению к системе $\mathfrak{S}$), если $\tilde{X} = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$. Иначе говоря, неприводимая σ-алгебра — это σ-алгебра, не содержащая точек, не входящих ни в одно из $A \in \mathfrak{S}$. Естественно в каждом случае рассмотрением только таких σ-алгебр и ограничиваться.

Для неприводимых σ-алгебр имеет место теорема, аналогичная теореме 2, доказанной выше для колец.

Теорема 4. *Для любой непустой системы множеств $\mathfrak{S}$ существует неприводимая (по отношению к этой системе) σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$, содержащая $\mathfrak{S}$ и содержащаяся в любой σ-алгебре, содержащей $\mathfrak{S}$.*

Доказательство проводится в точности тем же методом, что и доказательство теоремы 2; σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ называется *минимальной σ-алгеброй над системой $\mathfrak{S}$*.

В анализе важную роль играют так называемые *борелевские множества*, или *B-множества* — множества на числовой прямой, принадлежащие минимальной σ-алгебре над совокупностью всех сегментов $[a, b]$.

5. Системы множеств и отображения. Отметим следующие факты, которые нам понадобятся при изучении измеримых функций.

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на множестве M и принимающая значения из множества N, и пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая система подмножеств множества M. Обозначим через $f(\mathfrak{M})$ систему всех образов $f(A)$ множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{N}$ — некоторая система множеств, содержащихся в N, и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ — система всех прообразов $f^{-1}(A)$ множеств, входящих в $\mathfrak{N}$. Справедливы следующие утверждения, проверка которых предоставляется читателю:

1) Если $\mathfrak{N}$ есть кольцо, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть кольцо.
2) Если $\mathfrak{N}$ есть алгебра, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть алгебра.
3) Если $\mathfrak{N}$ есть σ-алгебра, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть σ-алгебра.
4) $\mathfrak{R}(f^{-1}(\mathfrak{B})) = f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{B}))$.
5) $\mathfrak{B}(f^{-1}(\mathfrak{B})) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$.

Останутся ли эти утверждения справедливыми, если f^{-1} заменить на f, а $\mathfrak{N}$ — на $\mathfrak{M}$?

ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие метрического пространства

1. Определение и основные примеры. Одной из важнейших операций анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты анализа не связаны с алгебраической природой действительных чисел (т. е. с тем, что они образуют поле), а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства — одному из важнейших понятий современной математики. Ниже мы изложим основные факты теории метрических пространств и их обобщения — топологических пространств. Результаты этой главы существенны для всего дальнейшего изложения.

Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого *множества* (пространства) X *элементов* (точек) и *расстояния*, т. е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Само метрическое пространство, т. е. пару (X, ρ), мы будем обозначать, как правило, одной буквой:

$$R = (X, \rho).$$

В случаях, когда недоразумения исключены, мы будем зачастую обозначать метрическое пространство тем же символом, что и сам «запас точек» X.

Пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на множестве M и принимающая значения из множества N, и пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая система подмножеств множества M. Обозначим через $f(\mathfrak{M})$ систему всех образов $f(A)$ множеств, принадлежащих $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{N}$ — некоторая система множеств, содержащихся в N, и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ — система всех прообразов $f^{-1}(A)$ множеств, входящих в $\mathfrak{N}$. Справедливы следующие утверждения, проверка которых предоставляется читателю:

1) Если $\mathfrak{N}$ есть кольцо, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть кольцо.
2) Если $\mathfrak{N}$ есть алгебра, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть алгебра.
3) Если $\mathfrak{N}$ есть σ-алгебра, то и $f^{-1}(\mathfrak{N})$ есть σ-алгебра.
4) $\mathfrak{R}(f^{-1}(\mathfrak{B})) = f^{-1}(\mathfrak{R}(\mathfrak{B}))$.
5) $\mathfrak{B}(f^{-1}(\mathfrak{B})) = f^{-1}(\mathfrak{B}(\mathfrak{N}))$.

Останутся ли эти утверждения справедливыми, если f^{-1} заменить на f, а $\mathfrak{N}$ — на $\mathfrak{M}$?

ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Понятие метрического пространства

1. Определение и основные примеры. Одной из важнейших операций анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Многие фундаментальные факты анализа не связаны с алгебраической природой действительных чисел (т. е. с тем, что они образуют поле), а опираются лишь на понятие расстояния. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию метрического пространства — одному из важнейших понятий современной математики. Ниже мы изложим основные факты теории метрических пространств и их обобщения — топологических пространств. Результаты этой главы существенны для всего дальнейшего изложения.

Определение. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого *множества* (пространства) X *элементов* (точек) и *расстояния*, т. е. однозначной, неотрицательной, действительной функции $\rho(x, y)$, определенной для любых x и y из X и подчиненной следующим трем аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Само метрическое пространство, т. е. пару (X, ρ), мы будем обозначать, как правило, одной буквой:

$$R = (X, \rho).$$

В случаях, когда недоразумения исключены, мы будем зачастую обозначать метрическое пространство тем же символом, что и сам «запас точек» X.

Приведем примеры метрических пространств. Некоторые из этих пространств играют в анализе весьма важную роль.

1. Положив для элементов произвольного множества

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

мы получим, очевидно, метрическое пространство. Его можно назвать пространством изолированных точек.

2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

образует метрическое пространство $\mathbf{R}^1$.

3. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} \tag{1}$$

называется *n-мерным арифметическим евклидовым пространством* $\mathbf{R}^n$. Справедливость аксиом 1) и 2) для $\mathbf{R}^n$ очевидна. Покажем, что в $\mathbf{R}^n$ выполнена и аксиома треугольника.

Пусть

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n), \quad z = (z_1, \ldots, z_n);$$

тогда аксиома треугольника записывается в виде

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2}. \tag{2}$$

Полагая $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, получаем $z_k - x_k = a_k + b_k$, а неравенство (2) принимает при этом вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}. \tag{3}$$

Но это неравенство сразу следует из известного неравен-

ства Коши—Буняковского [1])

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{4}$$

Действительно, в силу этого неравенства имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 +$$

$$+ 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2;$$

тем самым неравенство (3), а следовательно и (2), доказано.

4. Рассмотрим то же самое множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, но расстояние определим в нем формулой

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|. \tag{5}$$

Справедливость аксиом 1) —3) здесь очевидна. Обозначим это метрическое пространство символом $\mathbf{R}_1^n$.

5. Возьмем снова то же самое множество, что и в примерах 3 и 4, и определим расстояние между его элементами формулой

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k - x_k|. \tag{6}$$

Справедливость аксиом 1)—3) очевидна. Это пространство, которое мы обозначим $\mathbf{R}_\infty^n$, во многих вопросах анализа не менее удобно, чем евклидово пространство $\mathbf{R}^n$.

Последние три примера показывают, что иногда и в самом деле важно иметь различные обозначения для самого метрического пространства и для множества его точек, так как один и тот же запас точек может быть по-разному метризован.

---

[1]) Неравенство Коши — Буняковского вытекает из тождества

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - b_i a_j)^2,$$

которое проверяется непосредственно.

6. Множество $C[a, b]$ всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте $[a, b]$, с расстоянием

$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t) - f(t)| \tag{7}$$

также образует метрическое пространство. Аксиомы 1)—3) проверяются непосредственно. Это пространство играет очень важную роль в анализе. Мы будем его обозначать тем же символом $C[a, b]$, что и само множество точек этого пространства. Вместо $C[0, 1]$ мы будем писать просто C.

7. Обозначим через l_2 метрическое пространство, точками которого служат всевозможные последовательности $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{8}$$

Из элементарного неравенства $(x_k \pm y_k)^2 \leqslant 2(x_k^2 + y_k^2)$ следует, что функция $\rho(x, y)$ имеет смысл для всех x, $y \in l_2$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2$ сходится, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 < \infty.$$

Покажем теперь, что функция (8) удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Аксиомы 1) и 2) очевидны, а аксиома треугольника принимает здесь вид

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}. \tag{9}$$

В силу сказанного выше каждый из трех написанных здесь рядов сходится. С другой стороны, при каждом n справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - x_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z_k - y_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$$

(см. пример 4). Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем (9), т. е. неравенство треугольника в l_2.

8. Рассмотрим, как и в примере 6, совокупность всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но расстояние определим иначе, а именно, положим

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Такое метрическое пространство мы будем обозначать $C_2[a, b]$ и называть *пространством непрерывных функций с квадратичной метрикой*. Здесь аксиомы 1) и 2) метрического пространства опять-таки очевидны, а аксиома треугольника непосредственно вытекает из интегральной формы неравенства Коши—Буняковского [1])

$$\left(\int_a^b x(t) y(t) \, dt \right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t) \, dt \cdot \int_a^b y^2(t) \, dt.$$

9. Рассмотрим множество всех ограниченных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел. Положив

$$\rho(x, y) = \sup_k |y_k - x_k|, \tag{11}$$

мы получим метрическое пространство, которое обозначим m. Справедливость аксиом 1)—3) очевидна.

10. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел с расстоянием

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}, \tag{12}$$

где p — любое фиксированное число $\geqslant 1$, представляет собой метрическое пространство, которое мы обозначим $\mathbf{R}_p^n$. Справедливость аксиом 1) и 2) здесь опять-таки

---

[1]) Это неравенство может быть получено, например, из легко проверяемого тождества

$$\left(\int_a^b x(t) y(t) \, dt \right)^2 =$$

$$= \int_a^b x^2(t) \, dt \int_a^b y^2(t) \, dt - \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [x(s) y(t) - y(s) x(t)]^2 \, ds \, dt.$$

очевидна. Проверим аксиому 3). Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — три точки из $\mathbf{R}_p^n$. Положим $y_k - x_k = a_k$, $z_k - y_k = b_k$, тогда неравенство

$$\rho_p(x, z) \leqslant \rho_p(x, y) + \rho_p(y, z),$$

справедливость которого мы должны установить, примет вид

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}. \quad (13)$$

Это — так называемое *неравенство Минковского*. При $p = 1$ неравенство Минковского очевидно (модуль суммы не превосходит суммы модулей), поэтому будем считать, что $p > 1$ [1]).

Доказательство неравенства (13) при $p > 1$ основано на так называемом *неравенстве Гёльдера*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}, \quad (14)$$

где числа $p > 1$ и $q > 1$ связаны условием

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ т. е. } q = \frac{p}{p-1}. \quad (15)$$

Заметим, что неравенство (14) однородно. Это значит, что если оно выполнено для каких-либо двух векторов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$, то оно выполнено и для векторов λa и μb, где λ и μ — произвольные числа. Поэтому неравенство (14) достаточно доказать для случая, когда

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q = 1. \quad (16)$$

Итак, пусть выполнено условие (16); докажем, что

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1. \quad (17)$$

---

[1]) При $p < 1$ неравенство Минковского не имеет места. Иначе говоря, если бы мы захотели рассматривать пространство $\mathbf{R}_p^n$ при $p < 1$, то в таком пространстве не была бы выполнена аксиома треугольника.

Рассмотрим на плоскости (ξ, η) кривую, определяемую уравнением $\eta = \xi^{p-1}$ $(\xi > 0)$, или, что то же самое, уравнением $\xi = \eta^{q-1}$ (рис. 7). Из рисунка ясно, что при любом выборе положительных значений a и b будет $S_1 + S_2 \geqslant ab$. Вычислим площади S_1 и S_2:

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = \frac{a^p}{p}, \quad S_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Таким образом, справедливо числовое неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Заменив здесь a на $|a_k|$ и b на $|b_k|$ и суммируя по k от 1 до n, получим, учитывая (15) и (16),

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant 1.$$

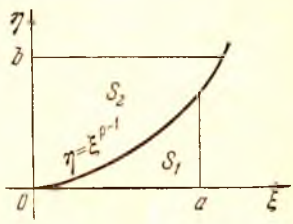


Рис. 7

Неравенство (17), а следовательно, и общее неравенство (14) доказаны. При $p = 2$ неравенство Гёльдера (14) переходит в неравенство Коши—Буняковского (4).

Перейдем теперь к доказательству неравенства Минковского. Для этого рассмотрим тождество

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1}|a| + (|a| + |b|)^{p-1}|b|.$$

Заменяя в написанном тождестве a на a_k и b на b_k и суммируя по k от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^{p-1}|b_k|.$$

Применяя теперь к каждой из двух сумм, стоящих справа, неравенство Гёльдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{1/q} \left(\left[\sum_{k=1} |a_k|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right]^{1/p}\right).$$

Деля обе части этого неравенства на

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/q},$$

получим

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p},$$

откуда сразу следует неравенство (13). Тем самым установлена аксиома треугольника в пространстве $\mathbf{R}_p^n$.

Рассмотренная в этом примере метрика ρ_p превращается в евклидову метрику (пример 3) при $p=2$ и в метрику примера 4 при $p=1$. Можно показать, что метрика

$$\rho_\infty(x,\ y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k-x_k|,$$

введенная в примере 5, является предельным случаем метрики $\rho_p(x,\ y)$, именно:

$$\rho_\infty(x,\ y)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Из неравенства

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

установленного выше, легко выводится и *интегральное неравенство Гёльдера*

$$\int_a^b|x(t)\,y(t)|\,dt\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|y(t)|^q\,dt\right)^{1/q},$$

справедливое для любых функций $x(t)$ и $y(t)$, для которых стоящие справа интегралы имеют смысл. Отсюда в свою очередь получается *интегральное неравенство Минковского*

$$\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

11. Укажем еще один интересный пример метрического пространства. Его элементами являются всевозможные последовательности действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

где $p \geqslant 1$ — некоторое фиксированное число, а расстояние определяется формулой

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}. \tag{18}$$

Это метрическое пространство мы обозначим l_p.

В силу неравенства Минковского (13) имеем при любом n

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

Так как, по предположению, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p$$

сходятся, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p} < \infty. \tag{19}$$

Таким образом, доказано, что формула (18), определяющая расстояние в l_p, действительно имеет смысл для любых $x, y \in l_p$. Одновременно неравенство (19) показывает, что в l_p выполнена аксиома треугольника. Остальные аксиомы очевидны.

Неограниченное количество дальнейших примеров дает следующий прием. Пусть $R = (X, \rho)$ — метрическое пространство и M — любое подмножество в X. Тогда M с той же функцией $\rho(x, y)$, которую мы считаем теперь определенной для x и y из M, тоже представляет собой метрическое пространство; оно называется *подпространством* пространства R.

2. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия. Пусть X и Y — два метрических пространства и f — отображение пространства X в Y.

Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Это отображение называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ таких, что

$$\rho(x, x_0) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(здесь ρ — расстояние в X, а ρ_1 — расстояние в Y). Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f *непрерывно* на X. Если X и Y — числовые множества, т. е. f — числовая функция, определенная на некотором подмножестве X числовой оси, то приведенное определение непрерывности отображения превращается в хорошо известное из элементарного анализа определение непрерывности функции.

Аналогично можно определить непрерывную функцию (отображение) f от нескольких переменных $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ (где $X_1, \ldots, X_n$ — метрические пространства) со значениями в метрическом пространстве Y.

Заметим, в этой связи, что само расстояние $\rho(x, y)$, если рассматривать его как функцию переменных x и y из X, непрерывно. Это сразу же следует из неравенства

$$|\rho(x, y) - \rho(x_0, y_0)| \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y),$$

легко выводимого из неравенства треугольника.

Если отображение $f\colon X \to Y$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение $x = f^{-1}(y)$ пространства Y на пространство X. Если отображение f взаимно однозначно и взаимно непрерывно (т. е. f и f^{-1} — непрерывные отображения), то оно называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом*, а сами пространства X и Y, между которыми можно установить гомеоморфизм, называются *гомеоморфными* между собой. Примером гомеоморфных метрических пространств могут служить вся числовая прямая $(-\infty, \infty)$ и интервал, например, интервал $(-1, 1)$. В этом случае гомеоморфизм устанавливается формулой

$$y = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Важным частным случаем гомеоморфизма является так называемое изометрическое отображение.

Говорят, что биекция f между метрическими пространствами $R = (X, \rho)$ и $R' = (Y, \rho')$ является *изометрией*, если

$$\rho(x_1, x_2) = \rho'(f(x_1), f(x_2))$$

для любых $x_1, x_2 \in R$. Пространства R и R', между которыми можно установить изометрическое соответствие, называются *изометричными*.

Изометрия пространства R и R' означает, что метрические связи между их элементами одни и те же; различной может быть лишь природа их элементов, что с точки зрения теории метрических пространств несущественно. В дальнейшем изометричные между собой пространства мы будем рассматривать просто как тождественные.

К изложенным здесь понятиям (непрерывность, гомеоморфизм) мы вернемся, с более общей точки зрения, в конце § 5 этой главы.

§ 2. Сходимость. Открытые и замкнутые множества

1. Предельные точки. Замыкание. Мы введем здесь некоторые понятия теории метрических пространств. Эти понятия мы неоднократно используем в дальнейшем.

Открытым шаром $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве R мы будем называть совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) < r.$$

Точка x_0 называется *центром* этого шара, а число r — его *радиусом*.

Замкнутым шаром $B[x_0, r]$ мы назовем совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) \leqslant r.$$

Открытый шар радиуса ε с центром x_0 мы будем называть также *ε-окрестностью* точки x_0 и обозначать символом $O_\varepsilon(x_0)$.

Упражнение. Привести пример метрического пространства и таких двух шаров $B(x, \rho_1)$, $B(y, \rho_2)$ в нем, что $\rho_1 > \rho_2$, и тем не менее $B(x, \rho_1) \subset B(y, \rho_2)$.

Множество $M \subset R$ называется *ограниченным*, если оно содержится целиком в некотором шаре.

Точка $x \in R$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит

хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M обозначается $[M]$ и называется *замыканием* этого множества. Таким образом, мы определили для множеств метрического пространства *операцию замыкания* — переход от множества M к его замыканию $[M]$.

Теорема 1. *Операция замыкания обладает следующими свойствами*:

1) $M \subset [M]$,
2) $[[M]] = [M]$,
3) *если* $M_1 \subset M_2$, *то* $[M_1] \subset [M_2]$,
4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как всякая точка, принадлежащая M, является для M точкой прикосновения. Докажем второе.

Пусть $x \in [[M]]$. Тогда в любой окрестности $O_\varepsilon(x)$ этой точки найдется точка $x_1 \in [M]$. Положим $\varepsilon - \rho(x, x_1) = \varepsilon_1$ и рассмотрим шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Этот шар целиком лежит внутри шара $O_\varepsilon(x)$. Действительно, если $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, то $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$, и так как $\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1$, то по аксиоме треугольника

$$\rho(z, x) < \varepsilon_1 + (\varepsilon - \varepsilon_1) = \varepsilon,$$

т. е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Так как $x_1 \in [M]$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ найдется точка $x_2 \in M$. Но тогда $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Так как $O_\varepsilon(x)$ — произвольная окрестность точки x, то $x \in [M]$. Второе утверждение доказано.

Третье свойство очевидно. Докажем, наконец, четвертое свойство.

Если $x \in [M_1 \cup M_2]$, то x содержится по крайней мере в одном из множеств $[M_1]$ или $[M_2]$, т. е.

$$[M_1 \cup M_2] \subset [M_1] \cup [M_2].$$

Так как $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ и $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, то обратное включение следует из свойства 3). Теорема доказана полностью.

Точка $x \in R$ называется *предельной точкой* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать M. Например, если M — множество рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, то каждая точка этого отрезка — предельная для M.

Точка x, принадлежащая M, называется *изолированной точкой* этого множества, если в достаточно малой ее окрестности $O_\varepsilon(x)$ нет точек из M, отличных от x. Предлагаем читателю доказать в качестве упражнения следующее утверждение:

Всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.

Отсюда можно заключить, что замыкание $[M]$ состоит, вообще говоря, из точек трех типов:

1) изолированные точки множества M;

2) предельные точки множества M, принадлежащие M;

3) предельные точки множества M, не принадлежащие M. Таким образом, замыкание $[M]$ получается присоединением к M всех его предельных точек.

2. Сходимость. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность точек в метрическом пространстве R. Говорят, что эта последовательность *сходится к точке* x, если каждая окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x содержит все точки x_n, начиная с некоторой, т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_ε, что $O_\varepsilon(x)$ содержит все точки x_n с $n > N_\varepsilon$. Точка x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Это определение можно, очевидно, сформулировать еще и следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

Непосредственно из определения предела вытекает, что 1) никакая последовательность не может иметь двух различных пределов, и что 2) если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x, то и всякая ее подпоследовательность сходится к той же самой точке.

Следующая теорема устанавливает тесную связь между понятиями точки прикосновения и предела.

Теорема 2. *Для того чтобы точка x была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\}$ точек из M, сходящаяся к x.*

Доказательство. Условие необходимо, так как если x — точка прикосновения множества M, то в каждой ее окрестности $O_{1/n}(x)$ содержится хотя бы одна точка $x_n \in M$. Эти точки образуют последовательность, сходящуюся к x. Достаточность очевидна.

Если x — предельная точка множества M, то точки $x_n \in O_{1/n}(x) \cap M$, отвечающие разным n, можно выбрать попарно различными. Таким образом, *для того чтобы точка x была предельной для M, необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x.*

Понятие непрерывности отображения метрического пространства X в метрическое пространство Y, введенное в § 1, можно теперь сформулировать в терминах сходимости последовательностей. Именно, отображение $y = f(x)$ непрерывно в точке x_0, если для всякой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{y_n = f(x_n)\}$ сходится к $y_0 = f(x_0)$. Доказательство равносильности этого определения приведенному в § 1 ничем не отличается от доказательства равносильности двух определений непрерывности («на языке ε, δ» и «на языке последовательностей») функций числового аргумента и может быть предоставлено читателю.

3. Плотные подмножества. Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве R. Множество A называется *плотным* в B, если $[A] \supset B$. В частности, множество A называется *всюду плотным* (в пространстве R), если его замыкание $[A]$ совпадает со всем пространством R. Например, множество рациональных чисел всюду плотно на числовой прямой. Множество A называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в одном шаре, т. е. если в каждом шаре $B \subset R$ содержится другой шар B', не имеющий с A ни одной общей точки.

Примеры пространств, имеющих всюду плотное счетное множество. Пространства, в которых имеется счетное всюду плотное множество, называют *сепарабельными*. Рассмотрим с этой точки зрения примеры, которые приведены в § 1.

1. «Дискретное» пространство, описанное в примере 1 § 1, содержит счетное всюду плотное в нем множество тогда и только тогда, когда оно само состоит лишь из счетного числа точек. Дело в том, что замыкание $[M]$ любого множества M в этом пространстве совпадает с M.

Все пространства, перечисленные в примерах 2—8 § 1, содержат счетные всюду плотные множества. Укажем в каждом из них по такому множеству, настоятельно рекомендуя читателю провести подробные доказательства.

2. На действительной оси $\mathbf{R}$ — рациональные точки.

3—5. В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ и в пространствах $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_\infty^n$ — совокупность векторов с рациональными координатами.

6. В пространстве $C[a, b]$ — совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами.

7. В пространстве l_2 — совокупность последовательностей, в каждой из которых все члены рациональны и лишь конечное (свое для каждой последовательности) число этих членов отлично от нуля.

8. В пространстве $C_2[a, b]$ — совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами.

Вместе с тем *пространство ограниченных последовательностей* m (пример 9 § 1) несепарабельно.

Действительно, рассмотрим всевозможные последовательности, состоящие из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуума (так как между ними и подмножествами натурального ряда можно установить взаимно однозначное соответствие). Расстояние между двумя такими точками, определяемое формулой (11) § 1, равно 1. Окружим каждую из этих точек открытым шаром радиуса 1/2. Эти шары не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в m, то каждый из построенных шаров должен содержать хотя бы по одной точке из этого множества, и, следовательно, оно не может быть счетным.

4. Открытые и замкнутые множества. Рассмотрим важнейшие типы множеств в метрическом пространстве, а именно, открытые и замкнутые множества.

Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием: $[M] = M$. Иначе говоря, множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

В силу теоремы 1 замыкание любого множества M есть замкнутое множество. Из той же теоремы вытекает, что $[M]$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M. (Докажите это!)

Примеры. 1. Всякий отрезок $[a, b]$ числовой прямой есть замкнутое множество.

2. Замкнутый шар представляет собой замкнутое множество. В частности, в пространстве $C[a, b]$ множество функций f, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leqslant K$, замкнуто.

3. Множество функций в $C[a, b]$, удовлетворяющих условию $|f(t)| < K$ (открытый шар), не замкнуто; его

замыкание есть совокупность функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leqslant K$.

4. Каково бы ни было метрическое пространство R, пустое множество $\varnothing$ и все R замкнуты.

5. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто.

Основные свойства замкнутых множеств можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пересечение любого числа и сумма любого конечного числа замкнутых множеств суть замкнутые множества.*

Доказательство. Пусть $F = \bigcap F_\alpha$ — пересечение замкнутых множеств F_α и пусть x — предельная точка для F. Это означает, что любая ее окрестность $O_\varepsilon(x)$ содержит бесконечно много точек из F. Но тогда тем более $O_\varepsilon(x)$ содержит бесконечно много точек из каждого F_α и, следовательно, так как все F_α замкнуты, точка x принадлежит каждому F_α; таким образом, $x \in F = \bigcap F_\alpha$, т. е. F замкнуто.

Пусть теперь F — сумма конечного числа замкнутых множеств: $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, и пусть точка x не принадлежит F. Покажем, что x не может быть предельной для F. Действительно, x не принадлежит ни одному из замкнутых множеств F_i, следовательно, не является предельной ни для одного из них. Поэтому для каждого i можно найти такую окрестность $O_{\varepsilon_i}(x)$ точки x, которая содержит ни более чем конечное число точек из F_i. Взяв из окрестностей $O_{\varepsilon_1}(x), \ldots, O_{\varepsilon_n}(x)$ наименьшую, мы получим окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x, содержащую не более чем конечное число точек из F.

Итак, если точка x не принадлежит F, то она не может быть предельной для F, т. е. F замкнуто. Теорема доказана.

Точка x называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность $O_\varepsilon(x)$ этой точки, целиком содержащаяся в M.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Примеры. 6. Интервал (a, b) числовой прямой $\mathbf{R}^1$ есть открытое множество; действительно, если $a < \alpha < b$, то $O_\varepsilon(\alpha)$, где $\varepsilon = \min(\alpha - a, b - \alpha)$, целиком содержится в интервале (a, b).

7. Открытый шар $B(a, r)$ в любом метрическом пространстве R есть открытое множество. Действительно, если $x \in B(a, r)$, то $\rho(a, x) < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho(a, x)$. Тогда $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

8. Множество непрерывных функций на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $f(t) < g(t)$, где $g(t)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция, представляет собой открытое подмножество пространства $C[a, b]$.

Теорема 4. *Для того чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \setminus M$ до всего пространства R было замкнуто.*

Доказательство. Если M открыто, то каждая точка x из M имеет окрестность, целиком принадлежащую M, т. е. не имеющую ни одной общей точки с $R \setminus M$. Таким образом, ни одна из точек, не принадлежащих $R \setminus M$, не может быть точкой прикосновения для $R \setminus M$, т. е. $R \setminus M$ замкнуто. Обратно, если $R \setminus M$ замкнуто, то любая точка из M имеет окрестность, целиком лежащую в M, т. е. M открыто.

Так как пустое множество и все R замкнуты и в то же время служат дополнениями друг друга, то *пустое множество и все R открыты.*

Из теоремы 3 и из принципа двойственности (пересечение дополнений равно дополнению суммы, сумма дополнений равна дополнению пересечения, см. с. 200) вытекает следующая важная теорема, двойственная теореме 3.

Теорема 3′. *Сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств суть открытые множества.*

Множества, принадлежащие σ-алгебре, порожденной всеми открытыми и замкнутыми подмножествами пространства R, называются *борелевскими множествами.*

5. Открытые и замкнутые множества на прямой. Структура открытых и замкнутых множеств в том или ином метрическом пространстве может быть весьма сложной. Это относится к открытым и замкнутым множествам даже евклидова пространства двух или большего числа измерений. Однако в одномерном случае, т. е. на прямой, исчерпывающее описание всех открытых множеств (а следовательно, и всех замкнутых) не представляет труда. Оно дается следующей теоремой.

Теорема 5. *Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или*

счетного числа попарно непересекающихся интервалов [1]).

Доказательство. Пусть G — открытое множество на прямой. Введем для точек из G отношение эквивалентности, считая, что $x \sim y$, если существует такой интервал (α, β), что $x, y \in (\alpha, \beta) \subset G$. Очевидно, это отношение рефлексивно и симметрично, оно и транзитивно, так как если $x \sim y$ и $y \sim z$, то существуют такие интервалы (α, β) и (γ, δ), что

$$x, y \in (\alpha, \beta) \subset G \text{ и } y, z \in (\gamma, \delta) \subset G.$$

Но тогда $\gamma < \beta$ и интервал (α, δ) лежит целиком в G и содержит точки x и z. Следовательно, G распадается на непересекающиеся классы I_τ эквивалентных между собой точек:

$$G = \bigcup I_\tau.$$

Докажем, что каждое I_τ есть интервал (a, b), где $a = \inf I_\tau$, $b = \sup I_\tau$. Включение $I_\tau \subset (a, b)$ очевидно. С другой стороны, если $x, y \in I_\tau$, то по самому определению I_τ интервал (x, y) содержится в I_τ. В любой близости от a справа и в любой близости от b слева есть точки из I_τ. Поэтому I_τ содержит любой интервал (a', b'), концы которого принадлежат (a, b), откуда $I_\tau = (a, b)$. Система таких непересекающихся интервалов I_τ не более чем счетна; действительно, выбрав в каждом из этих интервалов произвольным образом рациональную точку, мы установим взаимно однозначное соответствие между этими интервалами и некоторым подмножеством множества рациональных чисел. Теорема доказана.

Так как замкнутые множества — это дополнения открытых, то из теоремы 5 следует, что всякое замкнутое множество на прямой получается выбрасыванием из прямой конечного или счетного числа интервалов.

Простейшие примеры замкнутых множеств — отрезки, отдельные точки и суммы конечного числа таких множеств. Рассмотрим более сложный пример замкнутого множества на прямой — так называемое *канторово множество*.

Пусть F_0 — отрезок $[0, 1]$. Выбросим из него интервал $(1/3, 2/3)$, а оставшееся замкнутое множество обозна-

---

[1]) Множества вида $(-\infty, \infty)$, (α, ∞) и $(-\infty, \beta)$ мы при этом также включаем в число интервалов.

чим F_1. Затем выбросим из F_1 интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$, а оставшееся замкнутое множество (состоящее из четырех отрезков) обозначим F_2. В каждом из этих четырех отрезков выбросим средний интервал длины $(1/3)^3$ и т. д. (рис. 8). Продолжая этот процесс, получим убывающую последовательность замкнутых множеств F_n. Положим

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n.$$

Множество F — замкнутое (как пересечение замкнутых); оно получается из отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием счетного числа интервалов.

Рассмотрим структуру множества F. Ему принадлежат, очевидно, точки

$$0,\ 1,\ 1/3,\ 2/3,\ 1/9,\ 2/9,\ 7/9,\ 8/9,\ \ldots \qquad (1)$$

— концы выбрасываемых интервалов. Однако множество F не исчерпывается этими точками. Действительно, точки отрезка $[0, 1]$, которые входят в множество F, можно охарактеризовать следующим образом. Запишем каждое из чисел x, $0 \leqslant x \leqslant 1$ в троичной системе счисления

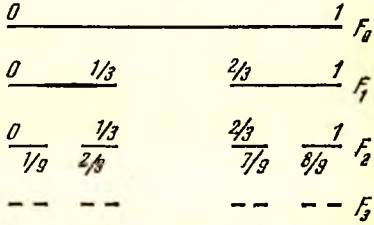


Рис. 8

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots,$$

где числа a_n могут принимать значения 0, 1 и 2. Как и в случае десятичных дробей, некоторые числа допускают двоякую запись. Например,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \ldots + \frac{0}{3^n} + \ldots =$$

$$= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$$

Легко проверить, что множеству F принадлежат те и только те числа x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, которые могут быть записаны хотя бы одним способом в виде троичной дроби так, чтобы в последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ни разу

не встретилась единица. Таким образом, каждой точке $x \in F$ можно поставить в соответствие последовательность

$$a_1, \ldots, a_n, \ldots, \tag{2}$$

где a_n равно 0 или 2. Совокупность таких последовательностей образует множество мощности континуума. В этом можно убедиться, поставив в соответствие каждой последовательности (2) последовательность

$$b_1, \ldots, b_n, \ldots, \tag{2'}$$

где $b_n = 0$, если $a_n = 0$, и $b_n = 1$, если $a_n = 2$. Последовательность (2') можно рассматривать как запись некоторого действительного числа y, $0 \leqslant y \leqslant 1$, в виде двоичной дроби. Таким образом, мы получаем отображение множества F на весь отрезок $[0, 1]$. Отсюда вытекает, что F имеет мощность континуума [1]). Так как множество точек (1) счетно, то эти точки не могут исчерпывать все F.

Упражнения. 1. Доказать непосредственно, что точка 1/4 принадлежит множеству F, не являясь концом ни одного из выбрасываемых интервалов.

Указание. Точка 1/4 делит отрезок $[0, 1]$ в отношении $1 : 3$. Отрезок $[0, 1/3]$, остающийся после первого выбрасывания, она делит также в отношении $1 : 3$ и т. д.

Точки (1) называются точками *первого рода* множества F, остальные его точки называются точками *второго рода*.

2. Доказать, что точки первого рода образуют в F всюду плотное множество.

3. Показать, что числа вида $t_1 + t_2$, где $t_1, t_2 \in F$, заполняют весь отрезок $[0, 2]$.

Мы показали, что множество F имеет мощность континуума, т. е. содержит столько же точек, сколько и весь отрезок $[0, 1]$.

С этим фактом интересно сопоставить следующий результат: сумма длин $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$ всех выброшенных интервалов составляет в точности единицу!

---

[1]) Установленное соответствие между F и отрезком $[0, 1]$ однозначно, но не взаимно однозначно (из-за того, что одно и то же число иногда может изображаться различными дробями). Отсюда следует, что F имеет мощность не меньше, чем мощность континуума. Но F — часть отрезка $[0, 1]$, следовательно, его мощность не может быть больше, чем мощность континуума.

Дополнительные замечания.

(1) Пусть M — некоторое множество в метрическом пространстве R и x — точка этого же пространства. *Расстоянием от точки x до множества M* называется число

$$\rho(x, M) = \inf_{a \in M} \rho(x, a).$$

Если $x \in M$, то $\rho(x, M) = 0$, однако из того, что $\rho(x, M) = 0$, не следует, что $x \in M$. Из определения точки прикосновения непосредственно получаем, что $\rho(x, M) = 0$ в том и только том случае, когда x — точка прикосновения множества M. Таким образом, операцию замыкания можно определить как присоединение к множеству всех тех точек, расстояние от которых до множества равно нулю.

(2) Аналогично определяется расстояние между двумя множествами. Если A, B — два множества в метрическом пространстве R, то

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \rho(a, b).$$

Если $A \cap B \neq \varnothing$, то $\rho(A, B) = 0$; обратное, вообще говоря, неверно.

(3) Пусть M_K — множество всех функций f из $C[a, b]$, удовлетворяющих условию Липшица: для всех $t_1, t_2 \in [a, b]$

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leqslant K|t_2 - t_1|,$$

где K — некоторое фиксированное число. Множество M_K замкнуто. Оно совпадает с замыканием множества всех дифференцируемых на $[a, b]$ функций таких, что $|f'(t)| \leqslant K$.

(4) Множество $M = \bigcup_K M_K$ всех функций, каждая из которых удовлетворяет условию Липшица при каком-либо K, не замкнуто. Его замыкание есть все $C[a, b]$.

(5) Открытое множество G в n-мерном евклидовом пространстве называется *связным*, если любые две точки $x, y \in G$ могут быть соединены ломаной, целиком лежащей в G. Например, внутренность круга $x^2 + y^2 < 1$ — связное множество. Наоборот, сумма двух кругов

$$x^2 + y^2 < 1 \text{ и } (x - 2)^2 + y^2 < 1$$

— не связное множество (хотя у этих кругов есть общая точка прикосновения!). Открытое подмножество H открытого множества G называется *компонентой* множества G, если оно связно и не содержится ни в каком большем связном открытом подмножестве G. Введем в G отношение эквивалентности; $x \sim y$, если существует открытое связное подмножество H из G, накрывающее x и y:

$$x, y \in H \subset G.$$

Как и в случае прямой, легко проверяется транзитивность и поэтому G распадается на непересекающиеся классы: $G = \bigcup I$. Эти классы — открытые компоненты G. Число их не более чем счетно.

В случае $n = 1$, т. е. на прямой, всякое связное открытое множество есть интервал (в число интервалов включаются и бесконечные интервалы $(-\infty, a)$, (b, ∞) и $(-\infty, \infty)$). Таким образом, теорема 5 о строении

открытых множеств на прямой состоит из двух утверждений): а) всякое открытое множество на прямой есть сумма конечного или счетного числа компонент и б) связное открытое множество на прямой есть интервал. Первое из этих утверждений верно и для множеств в n-мерных евклидовых пространствах (и допускает дальнейшие обобщения), а второе относится именно к прямой.

§ 3. Полные метрические пространства

1. Определение и примеры полных метрических пространств. С первых шагов изучения математического анализа мы видим, сколь важную роль играет в анализе свойство полноты числовой прямой, т. е. тот факт, что всякая фундаментальная последовательность действительных чисел сходится к некоторому пределу. Числовая прямая служит простейшим примером так называемых полных метрических пространств, основные свойства которых мы рассмотрим в этом параграфе.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R мы будем называть *фундаментальной*, если она удовлетворяет критерию Коши, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε, что $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ для всех $n' > N_\varepsilon$, $n'' > N_\varepsilon$.

Из аксиомы треугольника непосредственно следует, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Действительно, если $\{x_n\}$ сходится к x, то для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такое число N_ε, что $\rho(x_n, x) < \varepsilon/2$ для всех $n > N_\varepsilon$. Тогда $\rho(x_{n'}, x_{n''}) \leqslant \rho(x_{n'}, x) + \rho(x_{n''}, x) < \varepsilon$ для любых $n' > N_\varepsilon$ и $n'' > N_\varepsilon$.

Определение 1. Если в пространстве R любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным*.

Примеры. Все пространства, рассмотренные в § 1, за исключением указанного в примере 8, полные. Действительно:

1. В пространстве изолированных точек (пример 1 § 1) фундаментальны только стационарные последовательности, т. е. такие, в которых, начиная с некоторого номера, повторяется все время одна и та же точка. Всякая такая последовательность, конечно, сходится, т. е. это пространство полно.

2. Полнота евклидова пространства $\mathbf{R}$ — совокупности действительных чисел — известна из анализа.

3. Полнота евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ непосредственно вытекает из полноты $\mathbf{R}$. В самом деле, пусть

$\{x^{(p)}\}$ — фундаментальная последовательность точек из $\mathbf{R}^n$; это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N_\varepsilon$, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right)^2 < \varepsilon^2$$

при всех p, q бо́льших, чем N. Здесь $x^{(p)} = \{x_1^{(p)}, \ldots, x_n^{(p)}\}$. Тогда для каждого $k = 1, \ldots, n$ получаем соответствующее неравенство для координаты $x_k^{(p)}$:

$$\left|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right| < \varepsilon$$

для всех $p, q > N$, т. е. $\{x_k^{(p)}\}$ — фундаментальная числовая последовательность. Положим

$$x_k = \lim_{p\to\infty} x_k^{(p)} \quad \text{и} \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{p\to\infty} x^{(p)} = x.$$

4—5. Полнота пространств $\mathbf{R}_\infty^n$ и $\mathbf{R}_1^n$ доказывается совершенно аналогично.

6. Докажем полноту пространства $C[a, b]$. Пусть $\{x_n(t)\}$ — некоторая фундаментальная последовательность в $C[a, b]$. Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

при $n, m > N$ для всех t $(a \leqslant t \leqslant b)$. Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится. Как известно, в этом случае ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией. Устремляя в предыдущем неравенстве m к бесконечности, получим

$$|x_n(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon$$

для всех t и для всех $n > N$, а это и означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C[a, b]$.

7. Пространство l_2. Пусть $\{x^{(n)}\}$ — фундаментальная последовательность в l_2. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\rho^2\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)^2 < \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N. \quad (1)$$

Здесь $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$. Из (1) следует, что при любом k $(x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon$, т. е. при каждом k последовательность действительных чисел $\{x_k^{(n)}\}$ фундаментальна и потому сходится. Положим $x_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Обозначим через x последовательность $(x_1, \ldots, x_k \ldots)$. Нужно показать, что:

а) $$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty, \text{ т. е. } x \in l_2,$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = 0.$$

Сделаем это. Из неравенства (1) следует, что для любого фиксированного M

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(m)})^2 < \varepsilon.$$

В этой сумме теперь только конечное число слагаемых, и мы можем, зафиксировав n, перейти к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\sum_{k=1}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon.$$

Это равенство верно при любом M. Восстановим бесконечный ряд, переходя к пределу при $M \to \infty$; получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2 \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$ (в силу элементарного неравенства $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$), т. е. утверждение а) доказано. Далее, так как ε произвольно мало, то неравенство (2) означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} = 0,$$

т. е. $x^{(n)} \to x$ в метрике l_2. Утверждение б) доказано.

8. Легко убедиться в том, что пространство $C_2[a, b]$ не полно. Рассмотрим, например, последовательность непрерывных функций

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leqslant t \leqslant -1/n, \\ nt & \text{при } -1/n \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1 & \text{при } 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Она фундаментальна в $C_2[-1, 1]$, так как

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \varphi_m(t))^2 \, dt \leqslant \frac{2}{\min(n, m)}.$$

Однако она не сходится ни к какой функции из $C_2[-1, 1]$. Действительно, пусть f — некоторая функция из $C_2[-1, 1]$ и ψ — разрывная функция, равная -1 при $t < 0$ и $+1$ при $t \geqslant 0$.

В силу интегрального неравенства Минковского (справедливого, очевидно, и для кусочно-непрерывных функций) имеем

$$\left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \psi(t))^2 \, dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 \, dt\right)^{1/2} + \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \psi(t))^2 \, dt\right)^{1/2}.$$

В силу непрерывности функции f интеграл в левой части отличен от нуля. Далее, ясно, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - \psi(t))^2 \, dt = 0.$$

Поэтому $\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 \, dt$ не может стремиться к нулю при $n \to \infty$.

Упражнение. Доказать, что пространство всех ограниченных последовательностей (пример 9 § 1) полно.

2. Теорема о вложенных шарах. В анализе широко используется так называемая лемма о вложенных отрезках. В теории метрических пространств аналогичную роль играет следующая теорема, называемая теоремой о вложенных шарах.

Теорема 1. *Для того чтобы метрическое пространство R было полным, необходимо и достаточно,*

чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.

Доказательство. Необходимость. Пусть пространство R полно и пусть B_1, B_2, B_3, ... — последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров. Пусть r_n — радиус, а x_n — центр шара B_n. Последовательность центров $\{x_n\}$ фундаментальна, поскольку $\rho(x_n, x_m) < r_n$ при $m > n$, а $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как R полно, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует. Положим $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; тогда $x \in \bigcap\limits_n B_n$. Действительно, шар B_n содержит все точки последовательности $\{x_k\}$, за исключением, быть может, точек x_1, ..., x_{n-1}. Таким образом, x является точкой прикосновения для каждого шара B_n. Но так как B_n — замкнутое множество, то $x \in B_n$ для всех n.

Достаточность. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Докажем, что она имеет предел. В силу фундаментальности мы можем выбрать такую точку x_{n_1} нашей последовательности, что $\rho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ при всех $n \geqslant n_1$. Примем точку x_n за центр замкнутого шара радиуса 1. Обозначим этот шар B_1. Выберем затем x_{n_2} из $\{x_n\}$ так, чтобы было $n_2 > n_1$ и $\rho(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ при всех $n \geqslant n_2$. Примем точку x_{n_2} за центр шара радиуса $1/2$ и обозначим этот шар B_2. Вообще, если точки x_{n_1}, ..., x_{n_k} уже выбраны $(n_1 < \ldots < n_k)$, то выберем точку $x_{n_{k+1}}$ так, чтобы было $n_{k+1} > n_k$ и $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < 1/2^{k+1}$ при всех $n \geqslant n_{k+1}$, и окружим ее замкнутым шаром B_{k+1} радиуса $1/2^k$. Продолжая это построение, получим последовательность замкнутых шаров B_k, вложенных друг в друга, причем шар B_k имеет радиус $1/2^{k-1}$. Эта последовательность шаров имеет, по предположению, общую точку; обозначим ее x. Ясно, что эта точка x служит пределом подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$. Но если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся к x подпоследовательность, то она сама сходится к тому же пределу. Таким образом, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Упражнения. 1. Доказать, что пересечение замкнутых вложенных шаров в предыдущей теореме сводится к одной точке.

2. *Диаметром* множества M в метрическом пространстве называется число

$$d(M) = \sup_{x,\, y \in M} \rho(x, y).$$

Доказать, что в полном метрическом пространстве всякая последовательность вложенных друг в друга непустых замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

3. Привести пример полного метрического пространства и последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров в нем, имеющей пустое пересечение.

4. Доказать, что подпространство полного метрического пространства R полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в R.

3. Теорема Бэра. В теории полных метрических пространств фундаментальную роль играет следующая теорема.

Теорема 2 (Бэр). *Полное метрическое пространство R не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, где каждое из множеств M_n нигде не плотно. Пусть S_0 — некоторый замкнутый шар радиуса 1. Поскольку множество M_1, будучи нигде не плотным, не плотно в S_0, существует замкнутый шар S_1 радиуса меньше 1/2, такой, что $S_1 \subset S_0$ и $S_1 \cap M_1 = \varnothing$. Поскольку множество M_2 не плотно в S_1, по той же причине в шаре S_1 содержится замкнутый шар S_2 радиуса меньше 1/3, для которого $S_2 \cap M_2 = \varnothing$ и т. д. Мы получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\{S_n\}$, радиусы которых стремятся к нулю, причем $S_n \cap M_n = \varnothing$. В силу теоремы 1 пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ содержит некоторую точку x. Эта точка по построению не принадлежит ни одному из множеств M_n, следовательно, $x \notin \bigcup_n M_n$, т. е. $R \neq \bigcup_n M_n$, в противоречии с предположением.

В частности, *всякое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно*. Действительно, в таком пространстве каждое множество, содержащее лишь одну точку, нигде не плотно.

4. Пополнение пространства. Если пространство R не полно, то его всегда можно включить некоторым (и, по существу, единственным) способом в полное пространство.

Определение 2. Пусть R — метрическое пространство. Полное метрическое пространство R^* называется *пополнением* пространства R, если:

1) R является подпространством пространства R^*;

2) R всюду плотно в R^*, т. е. $[R] = R^*$.

(Здесь $[R]$ означает, естественно, замыкание пространства R в R^*.)

Например, пространство всех действительных чисел является пополнением пространства рациональных чисел.

Теорема 3. *Каждое метрическое пространство R имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из R.*

Доказательство. Начнем с единственности. Нам нужно доказать, что если R^* и R^{**} — два пополнения пространства R, то существует такое взаимно однозначное отображение φ пространства R^* на R^{**}, что

1) $\varphi(x) = x$ для всех $x \in R$;

2) если $x^{**} = \varphi(x^*)$ и $y^{**} = \varphi(y^*)$, то $\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**})$, где ρ_1 — расстояние в R^*, а ρ_2 — расстояние в R^{**}.

Отображение φ определим следующим образом. Пусть x^* — произвольная точка из R^*. Тогда, по определению пополнения существует последовательность $\{x_n\}$ точек из R, сходящаяся к x^*. Точки $\{x_n\}$ входят и в R^{**}. Так как R^{**} полно, то $\{x_n\}$ сходится в R^{**} к некоторой точке x^{**}. Ясно, что x^{**} не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся в точке x^*. Положим $\varphi(x^*) = x^{**}$. Отображение φ и есть искомое изометрическое отображение.

Действительно, по построению $\varphi(x) = x$ для всех $x \in R$. Далее, пусть

$$\{x_n\} \to x^* \text{ в } R^* \text{ и } \{x_n\} \to x^{**} \text{ в } R^{**},$$
$$\{y_n\} \to y^* \text{ в } R^* \text{ и } \{y_n\} \to y^{**} \text{ в } R^{**};$$

тогда в силу непрерывности расстояния,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

и, аналогично,

$$\rho_2(x^{**}, y^{**}) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Следовательно,

$$\rho_1(x^*, y^*) = \rho_2(x^{**}, y^{**}).$$

Докажем теперь существование пополнения. Идея этого доказательства та же, что и в канторовой теории действительных чисел. Положение здесь даже проще,

чем в теории действительных чисел, так как там для вновь вводимых объектов — иррациональных чисел — требуется еще определить все арифметические операции.

Пусть R — произвольное метрическое пространство. Назовем две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ из R эквивалентными (обозначение $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$. Название «эквивалентность» оправдано, поскольку это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Отсюда следует, что все фундаментальные последовательности, которые можно составить из точек пространства R, распадаются на классы эквивалентных между собой последовательностей. Определим теперь пространство R^*. За его точки мы примем всевозможные классы эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей, а расстояние между ними зададим следующим образом. Пусть x^* и y^* — два таких класса. Выберем в каждом из этих классов по одному представителю, т. е. по некоторой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Положим [1])

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Докажем корректность этого определения расстояния, т. е. докажем, что предел (3) существует и не зависит от выбора представителей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$.

В силу неравенства

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{4}$$

получаем, что для всех достаточно больших n и m

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| < \varepsilon,$$

так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальные.

Таким образом, последовательность действительных чисел $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ удовлетворяет критерию Коши и, следовательно, имеет предел.

Этот предел не зависит от выбора $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$. Действительно, пусть

$$\{x_n\},\ \{x'_n\} \in x^* \quad \text{и} \quad \{y_n\},\ \{y'_n\} \in y^*.$$

Выкладка, в точности аналогичная (4), дает

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

---

[1]) Чтобы не усложнять запись, мы обозначаем расстояние в R^* тем же символом ρ, что и расстояние в исходном пространстве R.

Поскольку $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Докажем, что в R^* выполнены аксиомы метрического пространства.

Аксиома 1) непосредственно вытекает из определения эквивалентности фундаментальных последовательностей.

Аксиома 2) очевидна.

Проверим аксиому треугольника. Так как в исходном пространстве R аксиома треугольника выполнена, то

$$\rho(x_n, z_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n),$$

т. е.

$$\rho(x^*, z^*) \leqslant \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

Докажем теперь, что R можно рассматривать как подпространство пространства R^*.

Каждой точке $x \in R$ отвечает некоторый класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, именно, совокупность всех последовательностей, сходящихся к точке x. Этот класс непуст, поскольку он содержит стационарную последовательность, все члены которой равны x. При этом, если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то

$$\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Следовательно, соотнеся каждой точке $x \in R$ класс x^* сходящихся к ней фундаментальных последовательностей, мы изометрически отобразим R в пространство R^*. В дальнейшем мы можем не различать само пространство R и его образ в R^* и рассматривать R как подпространство в R^*.

Покажем теперь, что R всюду плотно в R^*. Действительно, пусть x^* — некоторая точка из R^* и $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем в x^* представителя, т. е. некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Пусть N таково, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n, m > N$. Тогда имеем

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$$

при $n > N$, т. е. произвольная окрестность точки x^* содержит некоторую точку из R. Таким образом, замыкание R в R^* есть все R^*.

Остается доказать полноту R^*. Заметим, прежде всего, что по построению R^* любая фундаментальная последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точек из R сходится в R^* к некоторой точке, а именно, к точке $x^* \in R^*$, определяемой самой этой последовательностью. Далее, так как R плотно в R^*, то для любой фундаментальной последовательности $x_1^*, \ldots, x_n^*, \ldots$ точек из R^* можно построить эквивалентную ей последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точек из R. Для этого достаточно в качестве x_n взять любую точку из R, такую, что $\rho(x_n, x_n^*) < 1/n$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в R и, по определению, сходится к некоторой точке $x^* \in R^*$. Но тогда к x^* сходится и последовательность $\{x_n^*\}$.

§ 4. Принцип сжимающих отображений и его применения

1. Принцип сжимающих отображений. Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа (например, дифференциальных уравнений), можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях один из простейших и в то же время наиболее важных — так называемый *принцип сжимающих отображений*.

Пусть R — метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется *сжимающим отображением*, или короче, *сжатием*, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in R$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y). \tag{1}$$

Всякое сжимающее отображение непрерывно. Действительно, если $x_n \to x$, то в силу (1) и $Ax_n \to Ax$.

Точка x называется *неподвижной точкой* отображения A, если $Ax = x$. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения $Ax = x$.

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка в R. Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1 = A^2x_0$ и т. д.; вообще, $x_n = Ax_{n-1} = A^nx_0$.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Действительно, считая для определенности $m \geqslant n$, имеем

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^mx_0) \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^n\{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Так как $\alpha < 1$, то при достаточно большом n эта величина сколь угодно мала. В силу полноты R последовательность $\{x_n\}$, будучи фундаментальной, имеет предел. Положим

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Тогда в силу непрерывности отображения A

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Итак, существование неподвижной точки доказано. Докажем ее единственность. Если

$$Ax = x,\ Ay = y,$$

то неравенство (1) принимает вид

$$\rho(x, y) \leqslant \alpha\rho(x, y);$$

так как $\alpha < 1$, отсюда следует, что

$$\rho(x, y) = 0, \text{ т. е. } x = y.$$

Упражнение. Показать на примере, что отображение A, удовлетворяющее условию $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ для всех $x \neq y$, может не иметь ни одной неподвижной точки.

2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений. Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству теорем существования и

единственности решений для уравнений различных типов. Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения $Ax = x$, принцип сжимающих отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения (*метод последовательных приближений*). Рассмотрим следующие простые примеры.

1. Пусть f — функция, которая определена на сегменте $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

с константой $K < 1$ и отображает сегмент $[a, b]$ в себя.

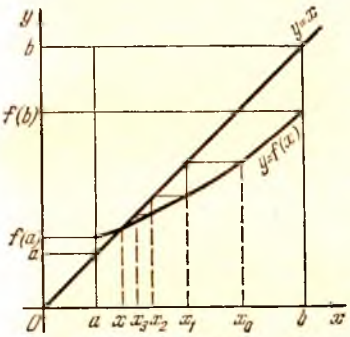


Рис. 9

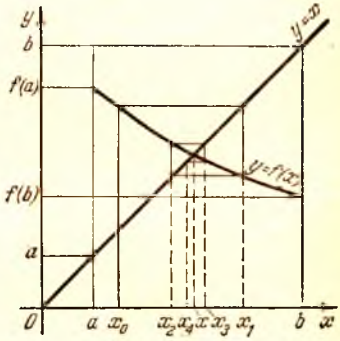


Рис. 10

Тогда f есть сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

В частности, условие сжимаемости выполнено, если функция имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \leqslant K < 1$.

На рис. 9 и 10 изображен ход последовательных приближений в случае $0 < f'(x) < 1$ и в случае $-1 < f'(x) < 0$.

Пусть теперь мы имеет дело с уравнением вида $F(x) = 0$, причем $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и $0 < K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ на $[a, b]$. Введем функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$ и будем искать решение уравнения $x = f(x)$, равносильного уравнению $F(x) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Так как $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda K_1$ и не-

трудно подобрать число λ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений. Это — распространенный метод отыскания корня.

2. Рассмотрим отображение A n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если A есть сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = Ax$.

При каких же условиях отображение A будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве. Рассмотрим три варианта.

а) Пространство $\mathbf{R}^n_\infty$, т. е. $\rho(x, y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \Big|\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}||x'_j - x''_j| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| =$$

$$= \Big(\max_i \sum_j |a_{ij}|\Big)\, \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

б) Пространство $\mathbf{R}^n_1$, т. е. $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}||x'_j - x''_j| \leqslant \Big(\max_j \sum_i |a_{ij}|\Big)\, \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

в) Пространство $\mathbf{R}^n$, т. е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

На основании неравенства Коши—Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \Big(\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_i \sum_j a_{ij}^2\Big)\, \rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий [1]) (2)—(4), то существует одна и только одна точка $(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$, причем последовательные приближения к этому решению имеют вид

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \\ x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^{(k)} &= (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

где

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i,$$

а в качестве $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ можно взять любую точку из $\mathbf{R}^n$.

Каждое из условий (2)—(4) *достаточно* для того, чтобы отображение $y = Ax$ было сжатием. Относительно условий (2) и (3) можно было бы доказать, что они *необходимы* для того, чтобы отображение $y = Ax$ было сжатием (в смысле метрик а) или б) соответственно).

Ни одно из условий (2)—(4) не необходимо для применимости метода последовательных приближений.

Если $|a_{ij}| < 1/n$, то все три условия (2)—(4) выполнены и метод последовательных приближений заведомо применим.

Если $|a_{ij}| \geqslant 1/n$, то ни одно из условий (2)—(4) не выполнено.

3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений. В предыдущем пункте были

---

[1]) В частности, из любого из условий (2) — (4) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

даны два простейших примера применения принципа сжимающих отображений в одномерном и в n-мерном пространствах. Однако наиболее существенны для анализа применения этого принципа в бесконечномерных функциональных пространствах. Сейчас мы покажем, как с его помощью можно получить теоремы существования и единственности решения для некоторых типов дифференциальных и интегральных уравнений.

1. Задача Коши. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$dy/dx = f(x, y) \tag{5}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \tag{6}$$

причем функция f определена и непрерывна в некоторой плоской области G, содержащей точку (x_0, y_0), и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant M |y_1 - y_2|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|x - x_0| \leqslant d$ существует, и притом только одно, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию (6) (теорема Пикара).

Уравнение (5) вместе с начальным условием (6) эквивалентно интегральному уравнению

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{7}$$

В силу непрерывности функции f имеем $|f(x, y)| \leqslant K$ в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку (x_0, y_0). Подберем $d > 0$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $(x, y) \in G'$, если $|x - x_0| \leqslant d$, $|y - y_0| \leqslant Kd$;

2) $Md < 1$.

Обозначим через C^* пространство непрерывных функций φ, определенных на сегменте $|x - x_0| \leqslant d$ и таких, что $|\varphi(x) - y_0| \leqslant Kd$, с метрикой $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$.

Пространство C^* полно, так как оно является замкнутым в пространством полного пространства всех непре-

рывных функций на $[x_0 - d,\ x_0 + d]$. Рассмотрим отображение $\psi = A\varphi$, определяемое формулой

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt,$$

где $|x - x_0| \leqslant d$. Это отображение переводит полное пространство C^* в себя и является в нем сжатием. Действительно, пусть $\varphi \in C^*$, $|x - x_0| \leqslant d$. Тогда

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \leqslant Kd$$

и, следовательно, $A(C^*) \subset C^*$. Кроме того,

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant Md \max_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Так как $Md < 1$, то A — сжатие.

Отсюда вытекает, что уравнение $\varphi = A\varphi$ (т. е. уравнение (7)) имеет одно и только одно решение в пространстве C^*.

2. Задача Коши для системы уравнений. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (8)$$

с начальными условиями

$$\varphi_i(x_0) = y_{0i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (9)$$

причем функции f_i определены и непрерывны в некоторой области G пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, и удовлетворяют условию Липшица

$$|f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(2)}, \ldots, y_n^{(2)})| \leqslant$$

$$\leqslant M \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|.$$

Докажем, что тогда на некотором сегменте $|x - x_0| \leqslant d$ существует одно и только одно решение начальной задачи (8), (9), т. е. одна и только одна система функций φ_i, удовлетворяющих уравнениям (8) и начальным условиям (9).

Система (8) вместе с начальными условиями (9) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\varphi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (10)$$

В силу непрерывности функции f_i ограничены в некоторой области $G' \subset G$, содержащей точку $(x_0, y_{01}, \ldots, y_{0n})$, т. е. существует такое постоянное число K, что $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant K$.

Подберем $d > 0$ так, чтобы выполнялись условия:

1) $(x, y_1, \ldots, y_n) \in G'$, если $|x - x_0| \leqslant d$, $|y_i - y_{0i}| \leqslant Kd$ $(i = 1, \ldots, n)$;

2) $Md < 1$.

Рассмотрим пространство C_n^*, элементами которого являются наборы $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ из n функций, определенных и непрерывных при $|x - x_0| \leqslant d$, и таких, что $|\varphi_i(x) - y_{0i}| \leqslant Kd$. Определим метрику формулой

$$\rho(\varphi, \psi) = \max_{x,\ i} |\varphi_i(x) - \psi_i(x)|.$$

Введенное пространство полно. Отображение $\psi = A\varphi$, задаваемое системой равенств

$$\psi_i(x) = y_{0i} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\,dt,$$

есть сжимающее отображение полного пространства C_n^* в себя. Действительно,

$$\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} [f_i(t, \varphi_1^{(1)}(t), \ldots, \varphi_n^{(1)}(t)) - f_i(t, \varphi_1^{(2)}(t), \ldots, \varphi_n^{(2)}(t))]\,dt$$

и, следовательно,

$$\max_{x,\ i} |\psi_i^{(1)}(x) - \psi_i^{(2)}(x)| \leqslant Md \max_{x,\ i} |\varphi_i^{(1)}(x) - \varphi_i^{(2)}(x)|.$$

Отображение A — сжимающее, поскольку $Md < 1$.

Отсюда вытекает, что операторное уравнение $\varphi = A\varphi$ имеет одно и только одно решение в пространстве C_n^*.

4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям.

1. Уравнения Фредгольма. Применим теперь метод сжимающих отображений для доказательства

существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, т. е. уравнения

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x), \tag{11}$$

где K (так называемое *ядро*) и φ суть данные функции, f — искомая функция, а λ — произвольный параметр.

Мы увидим, что наш метод применим лишь при достаточно малых значениях параметра λ.

Предположим, что $K(x, y)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и, следовательно, $|K(x, y)| \leqslant M$. Рассмотрим отображение $g = Af$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, задаваемое формулой

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x).$$

Имеем

$$\rho(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M(b-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Следовательно, при $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ отображение A — сжимающее.

Из принципа сжимающих отображений заключаем, что для всякого λ с $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма имеет единственное непрерывное решение. Последовательные приближения к этому решению f_0, f_1, ..., f_n, ... имеют вид

$$f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f_{n-1}(y)\, dy + \varphi(x),$$

где в качестве $f_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию.

2. Нелинейные интегральные уравнения. Принцип сжимающих отображений можно применить и к нелинейному интегральному уравнению вида

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))\, dy + \varphi(x), \tag{12}$$

где K и φ непрерывны и, кроме того, ядро K удовлетворяет условию Липшица по своему «функциональному» аргументу:

$$|K(x, y; z_1) - K(x, y; z_2)| \leqslant M|z_1 - z_2|.$$

В этом случае для отображения $g = Af$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, заданного формулой

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x, y; f(y))\, dy + \varphi(x), \tag{13}$$

имеет место неравенство

$$\max|g_1(x) - g_2(x)| \leqslant |\lambda| M(b-a) \max|f_1(x) - f_2(x)|,$$

где $g_1 = Af_1$, $g_2 = Af_2$. Следовательно, при $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ отображение A будет сжимающим.

3. Уравнения Вольтерра. Рассмотрим, наконец, интегральное уравнение типа Вольтерра

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x). \tag{14}$$

Здесь, в отличие от уравнений Фредгольма, верхний предел в интеграле — переменная величина x. Формально это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, доопределив функцию K равенством: $K(x, y) = 0$ при $y > x$.

Однако в случае интегрального уравнения Фредгольма мы были вынуждены ограничиться малыми значениями параметра λ, а к уравнениям Вольтерра принцип сжимающих отображений (и метод последовательных приближений) применим при всех значениях λ. Точнее, речь идет о следующем обобщении принципа сжимающих отображений.

Пусть A — такое непрерывное отображение полного метрического пространства R в себя, что некоторая его степень $B = A^n$ является сжатием; тогда уравнение

$$Ax = x$$

имеет одно и только одно решение.

Действительно, пусть x — неподвижная точка отображения B, т. е. $Bx = x$. Имеем

$$Ax = AB^k x = B^k Ax = B^k x_0 \to x, \quad k \to \infty,$$

ибо отображение B — сжимающее, а потому последовательность Bx_0, B^2x_0, B^3x_0, ... для любого $x_0 \in R$ сходится к неподвижной точке x отображения B. Следовательно,

$$Ax = x.$$

Эта неподвижная точка единственна, поскольку всякая точка, неподвижная относительно A, неподвижна и относительно сжимающего отображения A^n, для которого неподвижная точка может быть только одна.

Покажем теперь, что некоторая степень отображения

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy + \varphi(x)$$

является сжатием. Пусть f_1 и f_2 — две непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$|Af_1(x) - Af_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x, y)(f_1(y) - f_2(y))\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda| M(x - a) \max |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Здесь $M = \max |K(x, y)|$. Отсюда

$$|A^2f_1(x) - A^2f_2(x)| \leqslant |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2} \max |f_1(x) - f_2(x)|$$

и, вообще,

$$|A^nf_1(x) - A^nf_2(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} m \leqslant |\lambda|^n M^n m \frac{(b-a)^n}{n!},$$

где $m = \max |f_1(x) - f_2(x)|$.

При любом значении λ число n можно выбрать настолько большим, что

$$\frac{|\lambda|^n M^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение A^n будет сжатием. Итак, уравнение Вольтерра (14) при любом λ имеет решение, и притом единственное.

§ 5. Топологические пространства

1. Определение и примеры топологических пространств. Основные понятия теории метрических пространств (предельная точка, точка прикосновения, замыкание множества и т. д.) мы вводили, опираясь на понятие окрестности или, что, по существу, то же самое, на понятие открытого множества. Эти последние понятия (окрестность, открытое множество) в свою очередь определялись с помощью метрики, заданной в рассматриваемом пространстве. Можно, однако, стать на другой путь и, не вводя в данном множестве R метрику, непосредственно определить в R систему открытых множеств посредством аксиом. Этот путь, обеспечивая значительно бо́льшую свободу действий, приводит нас к *топологическим пространствам*, по отношению к которым метрические пространства представляют собой хотя и весьма важный, но несколько специальный случай.

О п р е д е л е н и е. Пусть X — некоторое множество — пространство-носитель. *Топологией* в X называется любая система τ его подмножеств G, удовлетворяющая двум требованиям:

1°. Само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ.

2°. Сумма $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) и пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ.

Множество X с заданной в нем топологией τ, т. е. пара (X, τ), называется *топологическим пространством*.

Множества, принадлежащие системе τ, называются *открытыми*.

Так же как метрическое пространство есть совокупность множества точек — «носителя» и введенной в этом множестве метрики, топологическое пространство есть совокупность множества точек и введенной в нем топологии. Таким образом, задать топологическое пространство — это значит задать некоторое множество X и задать в нем топологию τ, т. е. указать те подмножества, которые считаются в X открытыми.

Ясно, что в одном и том же множестве X можно вводить разные топологии, превращая его тем самым в различные топологические пространства. И все же то-

пологическое пространство, т. е. пару (X, τ), мы будем обозначать о д н о й буквой, скажем, T. Элементы топологического пространства мы будем называть *точками*.

Множества $T \setminus G$, дополнительные к открытым, называются *замкнутыми* множествами топологического пространства T. Из аксиом 1° и 2° в силу соотношений двойственности (§ 1 гл. I) вытекает, что:

1. Пустое множество $\varnothing$ и все T замкнуты.

2. Пересечение любого (конечного или бесконечного) числа и сумма конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

На основе этих определений естественно вводятся во всяком топологическом пространстве понятия окрестности, точки прикосновения, замыкания множества и т. д. Именно:

Окрестностью точки $x \in T$ называется всякое открытое множество $G \subset T$, содержащее точку x; точка $x \in T$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset T$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M; x называется *предельной точкой* множества M, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M, отличную от x. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется *замыканием* множества M и обозначается символом $[M]$. Легко доказать (проведите это доказательство), что *замкнутые множества* (определенные нами выше как дополнения открытых), *и только они, удовлетворяют условию* $[M] = M$. *Как и в случае метрического пространства,* $[M]$ *есть наименьшее замкнутое множество, содержащее* M.

У п р а ж н е н и е. Докажите, что операция замыкания $[M]$, определенная с помощью топологии, обладает свойствами 1)—4), сформулированными в теореме 1 § 2.

П р и м е р ы. 1. В силу теоремы 3′ § 2 открытые множества во всяком метрическом пространстве удовлетворяют аксиомам 1° и 2° определения топологического пространства. Таким образом, всякое метрическое пространство является и топологическим пространством.

2. Пусть T — произвольное множество. Будем считать открытыми все его подмножества. Аксиомы 1° и 2° при этом, очевидно, выполнены, т. е. мы действительно получаем топологическое пространство. В нем все множества одновременно и открыты и замкнуты, и, значит, каждое из них совпадает со своим замыканием. Такой

дискретной топологией обладает, например, метрическое пространство, указанное в примере 1 § 1.

3. В качестве другого крайнего случая рассмотрим в произвольном множестве X тривиальную топологию, состоящую только из двух множеств: всего X и пустого множества $\varnothing$. Здесь замыкание каждого непустого множества есть все X. Такое топологическое пространство можно назвать «*пространством слипшихся точек*».

4. Пусть T состоит из двух точек a и b, причем открытыми множествами мы считаем все T, пустое множество и множество, состоящее из одной точки b. Аксиомы 1° и 2° здесь выполнены. В этом пространстве (которое часто называют *связным двоеточием*) замкнуты такие подмножества: все T, пустое множество и точка a. Замыкание одноточечного множества $\{b\}$ есть все T.

Упражнение. Постройте все топологии в пространстве X, состоящем из двух, трех, четырех и пяти точек.

2. Сравнение топологий. Пусть на одном и том же носителе X заданы две топологии τ_1 и τ_2 (тем самым определены два топологических пространства: $T_1 = (X, \tau_1)$ и $T_2 = (X, \tau_2)$. Мы скажем, что топология τ_1 *сильнее*, или *тоньше* топологии τ_2, если система множества τ_2 содержится в τ_1. Про топологию τ_2 при этом говорят, что она *слабее*, или *грубее*, чем τ_1.

В совокупности всех возможных топологий множества X естественным образом вводится частичная упорядоченность (топология τ_2 предшествует τ_1, если она слабее, чем τ_1). В этой совокупности топологий есть максимальный элемент — топология, в которой все множества открыты (пример 2), — и минимальный — топология, в которой открыты только все X и $\varnothing$ (пример 3).

Теорема 1. *Пересечение произвольного множества топологий* $\tau = \bigcap\limits_{\alpha} \tau_\alpha$ *в* X *есть топология в* X. *Эта топология* τ *слабее любой из топологий* τ_α.

Доказательство. Ясно, что $\bigcap\limits_{\alpha} \tau_\alpha$ содержит X и $\varnothing$. Далее, из того, что каждое τ_α замкнуто относительно взятия любых сумм и конечных пересечений, следует, что этим свойством обладает и $\tau = \bigcap\limits_{\alpha} \tau_\alpha$.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *произвольный запас подмножеств множества* X; *тогда существует минимальная топология в* X, *содержащая* $\mathfrak{B}$.

Действительно, топологии, содержащие $\mathfrak{B}$, существуют (например, та, в которой все $A \subset X$ открыты). Пересечение всех топологий, содержащих $\mathfrak{B}$, и есть искомая. Эта минимальная топология называется топологией, *порожденной системой* $\mathfrak{B}$, и *обозначается* $\tau(\mathfrak{B})$.

Пусть X — произвольное множество и A — его подмножество. *Следом* системы множеств $\mathfrak{B}$ на подмножестве A называется система $\mathfrak{B}_A$, состоящая из подмножеств вида $A \cap B$, $B \in \mathfrak{B}$. Легко видеть, что след (на A) топологии τ (заданной в X) является топологией τ_A в A. Таким образом, всякое подмножество A любого топологического пространства само оказывается топологическим пространством. Топологическое пространство (A, τ_A) называется *подпространством* исходного топологического пространства (X, τ). Ясно, что две различные топологии, τ_1 и τ_2, в X могут порождать одну и ту же топологию в $A \subset X$. Топология τ_A называется *относительной топологией в* A.

3. Определяющие системы окрестностей. База. Аксиомы счетности. Как мы видели, задать в пространстве T топологию — это значит задать в нем систему открытых множеств. Однако в конкретных задачах бывает удобно задавать не всю топологию, а лишь некоторую ее часть, т. е. некоторый запас открытых множеств, по которому однозначно определяется совокупность всех открытых подмножеств. Так, например, в метрическом пространстве мы ввели сначала понятие открытого шара (ε-окрестности), а затем определили открытые множества как такие, в которых каждая точка содержится вместе с некоторой своей шаровой окрестностью. Иными словами, в метрическом пространстве открыты те и только те множества, которые можно представить как суммы открытых шаров (в конечном или бесконечном числе). В частности, на прямой открыты множества, представимые в виде сумм интервалов, и только они. Эти соображения приводят нас к важному понятию б а з ы топологического пространства.

О п р е д е л е н и е. Совокупность $\mathscr{L}$ открытых подмножеств называется *базой топологии* пространства T, если всякое открытое множество в T может быть представлено как сумма некоторого числа (конечного или бесконечного) множеств из $\mathscr{L}$.

Так, например, совокупность всех открытых шаров (с произвольным центром и радиусом) образует базу

в метрическом пространстве. В частности, система всех интервалов — база на прямой. Базу на прямой образуют и одни только интервалы с рациональными концами, поскольку в виде суммы таких интервалов можно представить любой интервал, а значит, и любое открытое множество на прямой.

Итак, топологию τ пространства T можно задать, указав в этом пространстве некоторую ее базу $\mathcal{G}$; эта топология τ совпадает с совокупностью множеств, представимых как суммы множеств из $\mathcal{G}$.

Всякая база $\mathcal{G}$ в топологическом пространстве $T = (X, \tau)$ обладает следующими двумя свойствами:

1) *любая точка $x \in X$ содержится хотя бы в одном $G \in \mathcal{G}$;*

2) *если x содержится в пересечении двух множеств G_1 и G_2 из $\mathcal{G}$, то существует такое $G_3 \in \mathcal{G}$, что*

$$x \in G_3 \subset G_1 \cap G_2.$$

Действительно, свойство 1) просто означает, что все X, будучи открытым, должно представляться как сумма каких-то множеств из $\mathcal{G}$, а 2) вытекает из того, что $G_1 \cap G_2$ открыто и, следовательно, есть сумма каких-то элементов базы.

Обратно, пусть X — произвольное множество и $\mathcal{G}$ — система подмножеств в X, обладающая свойствами 1) и 2). Тогда совокупность множеств, представимых как суммы множеств из $\mathcal{G}$, образует в X топологию (т. е. удовлетворяет аксиомам 1° и 2° определения топологического пространства).

Действительно, пусть $\tau(\mathcal{G})$ — совокупность всех множеств из X, представимых как суммы множеств из $\mathcal{G}$. Тогда пустое множество [1]) и все X принадлежат $\tau(\mathcal{G})$ и сумма любого числа множеств из $\tau(\mathcal{G})$ также принадлежит $\tau(\mathcal{G})$. Покажем, что пересечение любого конечного числа множеств из $\tau(\mathcal{G})$ принадлежит $\tau(\mathcal{G})$. Достаточно проверить это для двух множеств. Пусть $A = \bigcup_\alpha G_\alpha$ и $B = \bigcup_\beta G_\beta$, тогда $A \cap B = \bigcup_{\alpha, \beta} (G_\alpha \cap G_\beta)$. Из условия 2) следует, что каждое $G_\alpha \cap G_\beta$ содержится в $\tau(\mathcal{G})$. Но тогда и $A \cap B \in \tau(\mathcal{G})$.

---

[1]) Оно получается как сумма пустого множества элементов системы $\mathcal{G}$.

Итак, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. *Для того чтобы система $\mathcal{G}$ подмножества G множества X была базой некоторой топологии в X необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{G}$ обладала свойствами* 1) *и* 2).

Пусть теперь в пространстве T задана некоторая фиксированная топология τ. Взяв в T некоторую систему $\mathcal{G}$ открытых множеств, обладающую свойствами 1) и 2), и приняв ее за базу, мы очевидно получили в T топологию $\tau(\mathcal{G})$, или совпадающую с исходной топологией τ, или более слабую. Установим условия, при которых $\mathcal{G}$ порождает именно данную топологию τ.

Теорема 3. *Для того чтобы система $\mathcal{G} \subset \tau$ была базой данной топологии τ, необходимо и достаточно следующее условие:*

3) *для каждого открытого множества G и каждой точки $x \in G$ существует такое $G_x \in \mathcal{G}$, что $x \in G_x \subset G$.*

Доказательство. Если условие 3) выполнено, то всякое открытое множество G представимо в виде

$$G = \bigcup_{x \in G} G_x,$$

т. е. $\mathcal{G}$ есть база топологии τ. Обратно, если $\mathcal{G}$ есть база топологии τ, то всякое $G \in \tau$ представимо в виде суммы множеств из $\mathcal{G}$, а тогда для всякого $x \in G$ найдется такое $G_x \in \mathcal{G}$, что $x \in G_x \subset G$.

Упражнение. Пусть $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ — две базы в X (т. е. две системы множеств, удовлетворяющих условиям 1) и 2) стр. 87), а τ_1 и τ_2 — определяемые ими топологии. Докажите, что $\tau_1 \subset \tau_2$ в том и только том случае, если для любого $G_1 \in \mathcal{G}_1$ и любой точки $x \in G_1$ существует такое $G_2 \in \mathcal{G}_2$, что $x \in G_2 \subset G_1$.

С помощью теоремы 3 легко установить, например, что во всяком метрическом пространстве совокупность всех открытых шаров образует базу его топологии. Совокупность всех шаров с рациональными радиусами также представляет собой базу. На прямой базой может служить, например, совокупность всех рациональных интервалов (т. е. интервалов с рациональными концами).

Важный класс топологических пространств образуют пространства со счетной базой, т. е. такие пространства, в которых существует хотя бы одна база, состоящая не более чем из счетного числа множеств. Пространства со счетной базой называют также *пространствами со второй аксиомой счетности.*

Если в топологическом пространстве T имеется счетная база, то в нем обязательно имеется счетное всюду плотное множество, т. е. такое счетное множество, замыкание которого есть все T. Действительно, пусть $\{G_n\}$ — такая база. Выберем в каждом из элементов этой базы произвольную точку x_n. Счетное множество $X = \{x_n\}$ всюду плотно в T, так как в противном случае непустое открытое множество $G = T \setminus [X]$ не содержало бы ни одной точки из X, что невозможно, поскольку G есть сумма некоторых множеств из системы $\{G_n\}$, а $x_n \in G_n$.

Топологические пространства со счетным всюду плотным множеством, как и метрические, называются *сепарабельными*.

Для метрических пространств верно утверждение, обратное только что доказанному:

Если метрическое пространство R сепарабельно, то в R есть и счетная база. Действительно, такую базу образуют, например, открытые шары $B\left(x_n, 1/m\right)$, где $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное множество, а n и m независимо пробегают все натуральные числа. Таким образом, справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 4. *Метрическое пространство R имеет счетную базу тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.*

В силу этой теоремы все примеры сепарабельных метрических пространств могут служить и примерами метрических пространств со второй аксиомой счетности. Несепарабельное пространство ограниченных последовательностей (см. пример 9 § 1) не имеет и счетной базы.

З а м е ч а н и е. Теорема 4, вообще говоря, неверна для произвольных (не метрических) топологических пространств: можно указать примеры сепарабельных пространств без счетной базы. Поясним происходящие здесь явления. Для каждой точки x метрического пространства R существует с ч е т н а я система $\mathfrak{U}$ ее окрестностей (например, система открытых шаров $B\left(x, 1/n\right)$), обладающая следующим свойством: каково бы ни было открытое множество G, содержащее точку x, найдется окрестность из системы $\mathfrak{U}$, целиком лежащая в G. Такая система окрестностей называется *определяющей системой окрестностей* точки x.

Если точка x топологического пространства T имеет счетную определяющую систему окрестностей, то говорят, что в этой точке выполнена *первая аксиома счет-*

ности. Если это верно для каждой точки пространства T, то пространство T называется *пространством с первой аксиомой счетности*.

Всякое метрическое пространство, даже и несепарабельное, автоматически удовлетворяет первой аксиоме счетности. Однако в произвольном топологическом пространстве (даже если оно состоит лишь из счетного числа точек) первая аксиома счетности может не иметь места. Поэтому те рассуждения, с помощью которых мы для метрического пространства вывели из наличия счетного всюду плотного множества существование в таком пространстве счетной базы, не переносятся на случай произвольного топологического пространства. Но даже и в сепарабельном топологическом пространстве с первой аксиомой счетности счетной базы может не быть.

Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется *покрытием* множества X, если $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \supset X$. Покрытие топологического пространства T, состоящее из открытых (замкнутых) множеств, называется *открытым* (*замкнутым*) покрытием. Если некоторая часть $\{M_{\alpha_i}\}$ покрытия $\{M_\alpha\}$ сама образует покрытие пространства T, то $\{M_{\alpha_i}\}$ называется *подпокрытием* покрытия $\{M_\alpha\}$.

Теорема 5. *Если T — топологическое пространство со счетной базой, то из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное или счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть $\{O_\alpha\}$ — некоторое открытое покрытие пространства T. Тогда каждая точка $x \in T$ содержится в некотором O_α. Пусть $\{G_n\}$ — счетная база в T. Для каждого $x \in T$ существует такой элемент $G_n(x)$ этой базы, что $x \in G_n(x) \subset O_\alpha$. Совокупность выбранных таким образом множеств $G_n(x)$ конечна или счетна и покрывает все T. Выбрав для каждого $G_n(x)$ одно из содержащих его множеств O_α, мы и получим конечное или счетное подпокрытие покрытия $\{O_\alpha\}$. Теорема доказана.

По определению топологического пространства пустое множество и все пространство T одновременно открыты и замкнуты. Пространство, в котором нет никаких других множеств, одновременно открытых и замкнутых, называется *связным*. Прямая линия $\mathbf{R}$ представляет собой один из простейших примеров связных пространств. Если же из $\mathbf{R}$ удалить одну или несколько точек, то оставшееся пространство уже не будет связным.

4. Сходящиеся последовательности в T. На топологические пространства легко переносится знакомое нам в случае метрических пространств понятие сходящейся последовательности. Именно, последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ точек из T называется *сходящейся к точке* x, если любая окрестность точки x содержит все точки этой последовательности, начиная с некоторой. Однако в топологических пространствах это понятие сходимости не играет той фундаментальной роли, которая ему принадлежит в метрических пространствах. Дело в том, что в метрическом пространстве R точка x есть точка прикосновения множества $M \subset R$ в том и только том случае, когда в M существует последовательность, сходящаяся к x, тогда как в топологическом пространстве это, вообще говоря, не так. Из того, что x есть точка прикосновения для M (т. е. принадлежит $[M]$) в топологическом пространстве T, не вытекает существование в M последовательности, сходящейся к x. Возьмем в качестве примера отрезок $[0, 1]$ и назовем открытыми те его подмножества (наряду с пустым множеством), которые получаются из него выбрасыванием любого конечного или счетного числа точек. Легко проверить, что требования 1° и 2° (с. 98) при этом будут выполнены, т. е. мы получим топологическое пространство. В этом пространстве сходящимися будут только стационарные последовательности, т. е. такие, элементы которых, начиная с некоторого номера, совпадают: $x_n = x_{n+1} = \ldots$ (докажите это!). С другой стороны, если мы возьмем, например, в качестве M полуинтервал $(0, 1]$, то точка 0 будет для него точкой прикосновения (проверьте!), но никакая последовательность точек из M не сходится к 0 в нашем пространстве.

Сходящиеся последовательности «восстанавливаются в своих правах», если мы рассматриваем не произвольные топологические пространства, а пространства с первой аксиомой счетности, т. е. если у каждой точки x пространства T существует счетная определяющая система окрестностей. В этом случае каждая точка прикосновения x произвольного множества $M \subset T$ может быть представлена как предел некоторой последовательности точек из M. Действительно, пусть $\{O_n\}$ — счетная определяющая система окрестностей точки x. Можно считать, что $O_{n+1} \subset O_n$ (иначе мы заменили бы O_n на $\bigcap_{k=1}^{n} O_k$).

Пусть x_k — произвольная точка из M, содержащаяся в O_k ($k = 1, 2, \ldots$). Ясно, что такое x_k существует, иначе x не было бы точкой прикосновения для M. Последовательность $\{x_k\}$, очевидно, сходится к x.

Первой аксиоме счетности удовлетворяют, как мы отмечали, все метрические пространства. Именно поэтому мы и смогли все такие понятия, как замыкание, точка прикосновения и т. д., сформулировать для метрических пространств в терминах сходимости последовательностей.

5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Понятие непрерывного отображения, введенное нами для метрических пространств в § 1, естественно обобщается на произвольные топологические пространства.

Определение. Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение f пространства X в пространство Y называется *непрерывным в точке* x_0, если для любой окрестности U_{y_0} точки $y_0 = f(x_0)$ найдется такая окрестность V_{x_0} точки x_0, что $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. В частности, непрерывное отображение топологического пространства X в числовую прямую называется *непрерывной функцией* на этом пространстве.

Легко убедиться, что для метрических пространств это определение действительно превращается в то определение непрерывности отображения одного метрического пространства в другое, которое было дано в § 1.

Данное нами определение носит «локальный» характер. Непрерывность отображения f на всем X определяется через непрерывность f в каждой точке. Оказывается, что понятие непрерывности отображения одного топологического пространства в другое можно сформулировать в терминах открытых множеств, т. е. в терминах топологии этих пространств.

Теорема 6. *Для того чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз $\Gamma = f^{-1}(G)$ всякого открытого множества $G \subset Y$ был открыт (в X).*

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение f непрерывно и пусть G — открытое множество в Y. Докажем, что $\Gamma = f^{-1}(G)$ открыто. Пусть

x — произвольная точка множества Γ и $y = f(x)$. Тогда G служит окрестностью точки y. По определению непрерывности найдется такая окрестность V_x точки x, что $f(V_x) \subset G$, т. е. $V_x \subset \Gamma$. Иначе говоря, если $x \in \Gamma$, то существует окрестность V_x этой точки, содержащаяся в Γ. Но это и значит, что Γ открыто.

Достаточность. Пусть $\Gamma = f^{-1}(G)$ открыто, если $G \subset Y$ открыто. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и произвольную окрестность U_y точки $y = f(x)$. Поскольку $y \in U_y$, точка x принадлежит множеству $f^{-1}(U_y)$. Это открытое множество и служит той окрестностью точки x, образ которой содержится в U_y.

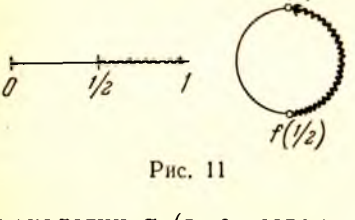


Рис. 11

Замечание. Пусть X и Y — произвольные множества и f — отображение X в Y. Если в Y задана некоторая топология τ (т. е. система множеств, содержащая $\varnothing$ и Y и замкнутая относительно взятия любых сумм и конечных пересечений), то прообраз топологии τ (т. е. совокупность всех множеств $f^{-1}(G)$, где $G \in \tau$) будет топологией в X.

Для доказательства достаточно вспомнить теоремы о прообразе суммы и пересечения множеств (см. § 2 гл. I). Мы обозначим эту топологию $f^{-1}(\tau)$. Если теперь X и Y — топологические пространства с топологиями τ_x и τ_y, то теорему 6 можно сформулировать так: *отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в том и только том случае, если топология τ_x сильнее топологии $f^{-1}(\tau_y)$.*

Из того, что прообраз дополнения есть дополнение прообраза, следует теорема, двойственная к теореме 6.

Теорема 6′. *Для того чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы прообраз всякого замкнутого множества из Y был замкнут (в X).*

Легко убедиться, что образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязательно открыт (замкнут). Рассмотрим, например, отображение полуинтервала $X = [0, 1)$ на окружность. Множество $[1/2, 1)$, замкнутое в $[0, 1)$, переходит при этом в незамкнутое множество на окружности (рис. 11).

Отображение называется *открытым*, если оно переводит каждое открытое множество снова в открытое. Отображение, переводящее каждое замкнутое множество в замкнутое, называется *замкнутым*.

Для непрерывных отображений справедлива следующая теорема, аналогичная хорошо известной из анализа теореме о непрерывности сложной функции.

Теорема 7. *Пусть X, Y и Z — топологические пространства и пусть f и φ — непрерывные отображения X в Y и Y в Z соответственно. Тогда отображение $x \mapsto \varphi(f(x))$ пространства X в Z непрерывно.*

Доказательство этой теоремы сразу получается из теоремы 6.

На топологические пространства распространяется понятие гомеоморфизма, введенное нами в § 1 для метрических пространств, а именно, отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно; пространства X и Y при этом называют *гомеоморфными*. Гомеоморфные пространства обладают одними и теми же топологическими свойствами, и с топологической точки зрения их можно рассматривать просто как два экземпляра одного и того же пространства. Топологии в двух гомеоморфных пространствах служат образами и прообразами друг друга. Отношение гомеоморфности рефлексивно, симметрично и транзитивно; поэтому любая совокупность топологических пространств распадается на непересекающиеся классы гомеоморфных между собой пространств.

Замечание. Следует иметь в виду, что метрические свойства двух гомеоморфных между собой метрических пространств могут быть различны [1]). Так, одно из них может быть полно, а другое — нет. Например, интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ гомеоморфен числовой прямой (соответствующий гомеоморфизм можно задать функцией $x \to \operatorname{tg} x$), но при этом прямая — полное пространство, а интервал — нет.

6. Аксиомы отделимости. Хотя многие из основных понятий теории метрических пространств легко переносятся на произвольные топологические пространства,

---

[1]) Метрика пространства R однозначно определяет его топологию, но не наоборот: одну и ту же топологию в $R = (X, \rho)$ можно получить, задавая в X различные метрики.

все же такие пространства представляют собой объект, слишком общий с точки зрения задач анализа. Здесь возникают ситуации, существенно отличающиеся от того, что может иметь место в метрических пространствах. Так, мы видели, что конечное множество точек в топологическом пространстве может быть не замкнутым (пример 4, с. 100) и т. п.

Среди топологических пространств можно выделить пространства, более близкие по своим свойствам к пространствам метрическим. Для этого следует к аксиомам 1° и 2° топологического пространства (с. 98) присоединить еще те или иные дополнительные условия. Такими условиями служат, например, аксиомы счетности; они позволяют изучать топологию пространства на основе понятия сходимости. Другой важный тип дополнительных условий составляют требования иной природы — так называемые *аксиомы отделимости*. Мы перечислим эту серию аксиом в порядке их постепенного усиления.

Аксиома T_1 (*первая аксиома отделимости*): для любых двух различных точек x и y пространства T существуют окрестность O_x точки x, не содержащая точку y, и окрестность O_y точки y, не содержащая точки x.

Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются T_1-*пространствами*. Примером топологического пространства, не являющегося T_1-пространством, может служить связное двоеточие.

В T_1-пространстве любая точка есть замкнутое множество. Действительно, если $x \neq y$, то существует окрестность O_y точки y, не содержащая x, т. е. $y \notin [x]$. Поэтому $[x] = x$. Следовательно, в T_1-пространстве замкнуто и любое конечное множество точек. Более того, как легко проверить, аксиома T_1 в точности равносильна требованию замкнутости всех таких множеств.

Выше (см. с. 99) мы определили предельную точку x множества M в топологическом пространстве T как такую точку, для которой пересечение $U \cap M \setminus \{x\}$ непусто. Здесь U — произвольная окрестность точки x.

В пространствах, не удовлетворяющих аксиоме T_1, предельные точки могут иметь даже множества M, состоящие только из конечного числа точек. Пусть T — связное двоеточие с топологией, состоящей из $\varnothing$, $\{b\}$ и $\{a, b\}$. Тогда точка a является предельной для множества $M = \{b\}$.

В T_1-пространствах такое явление уже не может иметь места. Именно, верно следующее утверждение.

Л е м м а. *Для того чтобы точка x была предельной для множества M в T_1-пространстве, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность U этой точки содержала бесконечно много точек из M.*

Достаточность этого условия очевидна. Установим его необходимость. Пусть x — предельная точка для M; допустим, что существует такая окрестность U точки x, которая содержит только конечное число точек из M. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — все эти точки, кроме самой x (если таковая принадлежит M). Тогда $V = U - \{x_1, \ldots, x_n\}$ — окрестность x и $V \cap M \setminus \{x\} = \varnothing$.

Всякое метрическое пространство заведомо является T_1-пространством. Поэтому за определение предельной точки множества в метрическом пространстве и было принято свойство, указанное в лемме.

Усилением первой аксиомы отделимости является аксиома T_2.

Аксиома T_2 (вторая, или хаусдорфова, аксиома отделимости): любые две различные точки x и y топологического пространства T имеют непересекающиеся окрестности O_x и O_y.

Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме, называются *T_2-пространствами*, или *хаусдорфовыми* пространствами. Всякое хаусдорфово пространство есть T_1-пространство, но не наоборот. Примером не хаусдорфова T_1-пространства может служить отрезок $[0, 1]$, в котором открытыми считаются пустое множество и все множества, получающиеся из отрезка выбрасыванием не более чем счетного числа точек.

Аксиома T_3 (третья аксиома отделимости): любая точка и не содержащее ее замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности. При этом *окрестностью множества M* в топологическом пространстве T называется всякое открытое множество U, содержащее M.

Этой аксиоме можно дать следующую эквивалентную формулировку:

Любая окрестность U произвольной точки x содержит меньшую окрестность той же точки, входящую в U вместе со своим замыканием.

Читатель может доказать это в качестве упражнения.

Поскольку в произвольном топологическом пространстве точка может не быть замкнутым множеством, третья

аксиома отделимости интересна только для пространств, удовлетворяющих аксиоме T_1. Пространства, удовлетворяющие обеим аксиомам T_1 и T_3, называются *регулярными*.

Всякое регулярное пространство, разумеется, хаусдорфово. Примером хаусдорфова пространства, не являющегося регулярным, может служить отрезок $[0, 1]$, в котором окрестности всех точек, кроме точки 0, определяются обычным способом, а окрестностями нуля считаются всевозможные полуинтервалы $[0, \alpha)$, из которых выкинуты точки вида $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Это — хаусдорфово пространство, но в нем точка 0 и не содержащее ее замкнутое множество $\{1/n\}$ не отделимы друг от друга непересекающимися окрестностями, т. е. аксиома T_3 не выполнена.

Обычно в анализе не приходится встречаться с пространствами более общими, чем регулярные. Более того, как правило, интересные с точки зрения анализа пространства удовлетворяют и следующему более сильному требованию, так называемой нормальности пространства.

Аксиома T_4 (*аксиома нормальности*): T_1-пространство называется *нормальным*, если в нем всякие два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся окрестности.

К нормальным пространствам относятся, в частности, все метрические пространства. Действительно, пусть X и Y — два непересекающихся замкнутых множества в метрическом пространстве R. Каждая точка $x \in X$ имеет окрестность O_x, не пересекающуюся с Y и, следовательно, находится от Y на некотором положительном расстоянии ρ_x. Аналогично расстояние каждой точки $y \in Y$ от X есть положительная величина ρ_y. Рассмотрим открытые множества [1])

$$U = \bigcup_{x \in X} B(x, \rho_x/2) \text{ и } V = \bigcup_{y \in Y} B(y, \rho_y/2),$$

содержащие X и Y соответственно, и покажем, что их пересечение пусто. Допустим, что $z \in U \cap V$. Тогда в X существует такая точка x_0, что $\rho(x_0, z) \leqslant \rho_{x_0}/2$,

---

[1]) Здесь, как обычно, $B(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром x.

а в Y — такая точка y_0, что $\rho(z, y_0) < \rho_{y_0}/2$. Пусть для определенности $\rho_{x_0} \leqslant \rho_{y_0}$. Тогда

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(z, x_0) < \rho_{x_0}/2 + \rho_{y_0}/2 < \rho_{y_0},$$

т. е. $x_0 \in B(y_0, \rho_{y_0})$, но это противоречит определению ρ_{y_0}. Наше утверждение доказано.

Всякое подпространство метрического пространства само является метрическим пространством и поэтому всегда обладает свойством нормальности. Это, вообще говоря, неверно для произвольных нормальных пространств: подпространство нормального пространства не обязано быть нормальным. Таким образом, нормальность пространства не есть наследственное свойство [1]).

Наследственным свойством является так называемая *полная регулярность* топологических пространств, представляющая собой важное усиление свойства регулярности. Топологическое T_1-пространство называется *вполне регулярным*, если для каждого замкнутого множества $F \subset T$ и каждой точки $x_0 \in T \setminus F$ существует непрерывная на T действительная функция f, равная нулю в точке x_0, единице на F и удовлетворяющая условию $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Всякое нормальное пространство вполне регулярно [2]), но не обратно. Любое подпространство вполне регулярного (в частности, нормального) пространства само вполне регулярно. А. Н. Тихонов, которому принадлежит и само понятие вполне регулярного пространства, показал, что класс вполне регулярных пространств совпадает с классом всех подпространств нормальных пространств. С точки зрения анализа вполне регулярные пространства важны потому, что на всяком таком пространстве имеется «достаточно много» непрерывных функций, именно, для любых различных точек x, y вполне регулярного пространства T существует определенная на T непрерывная вещественная функция, принимающая в этих точках различные значения.

---

[1]) Свойство P называется *наследственным*, если из того, что им обладает данное топологическое пространство T, следует, что им обладают и все его подпространства.

[2]) Этот (совсем не очевидный) факт вытекает из следующей теоремы П. С. Урысона: если T — нормальное пространство и F_1, F_2 — два его непересекающихся замкнутых подмножества, то на T существует непрерывная функция, f ($0 \leqslant f(x) \leqslant 1$) равная нулю на F_1 и единице на F_2.

7. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость. Самый прямой способ задать топологию в некотором пространстве состоит в том, чтобы непосредственно указать те множества, которые мы считаем открытыми. Набор этих множеств должен удовлетворять требованиям 1° и 2° (см. с. 98). Равносильный этому двойственный способ — указать набор замкнутых множеств. Такой набор должен, очевидно, удовлетворять условиям 1 и 2 (с. 99). Однако фактически этот способ редко может быть применен. Так, например, даже в случае плоскости вряд ли можно дать непосредственное описание в с е х открытых подмножеств (как это удается сделать для прямой (теорема 5 § 2)).

Распространенный способ задания топологии состоит в выборе некоторой базы; фактически именно так и вводится топология в метрических пространствах, где мы, опираясь на метрику, задаем базу — совокупность открытых шаров.

Еще один из возможных способов задать топологию в пространстве — это ввести в нем понятие сходимости. Однако за пределами метрических пространств такой способ не всегда удобен, поскольку, как уже указывалось в п. 4, не всегда переход от множества к его замыканию можно описать в терминах сходящихся последовательностей. Этот способ можно сделать универсальным, обобщив соответствующим образом само понятие сходящейся последовательности (см., например, [29], гл. 2).

Можно ввести в пространстве топологию, определив в нем аксиоматически операцию замыкания. Именно, говорят, что в множестве X задана *операция замыкания*, если каждому $A \subset X$ поставлено в соответствие некоторое множество $[A] \subset X$, называемое *замыканием* A, причем операция перехода от A к $[A]$ обладает свойствами 1)—4), указанными в теореме 1 § 2. Определив после этого замкнутые множества как те, для которых $[A] = A$, легко показать, что этот класс множеств удовлетворяет условиям 1 и 2 (с. 99), т. е. действительно определяет в X топологию.

Задание метрики — один из важнейших способов введения топологии, хотя и далеко не универсальный. Как мы уже видели, всякое метрическое пространство нормально и удовлетворяет первой аксиоме счетности. В пространстве, лишенном хотя бы одного из этих двух свойств, топологию нельзя задать с помощью какой бы то ни было метрики.

О п р е д е л е н и е. Топологическое пространство T называется *метризуемым*, если его топологию можно задать с помощью какой-либо метрики.

В силу только что сказанного нормальность пространства и первая аксиома счетности представляет собой н е о б х о д и м ы е условия метризуемости пространства. Вместе с тем ни каждое из этих условий в отдельности, ни даже их совокупность н е д о с т а т о ч н ы для метризуемости пространства. Однако имеет место следующая теорема, принадлежащая П. С. Урысону:

Для того чтобы топологическое пространство со счетной базой было метризуемо, необходимо и достаточно, чтобы оно было нормально.

Необходимость этого условия ясна; доказательство достаточности имеется, например, в [2].

§ 6. Компактность

1. Понятие компактности. Фундаментальную роль в анализе играет следующий факт, известный под названием л е м м ы Г е й н е—Б о р е л я:

Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ *числовой прямой интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Это утверждение останется справедливым, если вместо интервалов рассматривать любые открытые множества: *из всякого открытого покрытия отрезка* $[a, b]$ *можно выделить конечное подпокрытие.*

Отправляясь от этого свойства отрезка числовой прямой, введем следующее важное понятие.

О п р е д е л е н и е. Топологическое пространство T называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит к о н е ч н о е п о д п о к р ы т и е.

Компактное топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости Хаусдорфа, называется *компактом*.

Как мы увидим ниже, свойством компактности наряду с отрезками обладают все замкнутые ограниченные подмножества евклидова пространства любой конечной размерности. Наоборот, прямая, плоскость, трехмерное пространство служат простейшими примерами некомпактных пространств.

Назовем некоторую систему подмножеств $\{A\}$ множества T *центрированной*, если любое конечное перссе-

чение $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ членов этой системы не пусто. Из сформулированного определения компактности и соотношений двойственности вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы топологическое пространство T было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию:*

(R) каждая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

Действительно, пусть $\{F_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств в T и пусть T компактно. Множества $G_\alpha = T \setminus F_\alpha$ открыты, причем из того факта, что никакое конечное пересечение $\bigcap_{j=1}^{n} F_i$ не пусто, следует, что никакая конечная система множеств $G_i = T \setminus F_i$ не покрывает все T. Но тогда и все G_α не образуют покрытия (компактность!), а это значит, что $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$. Итак, если T компактно, то в нем условие (R) выполнено. Обратно, пусть T удовлетворяет условию (R) и $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства T. Положив $F_\alpha = T \setminus G_\alpha$, получим, что $\bigcap F_\alpha = \varnothing$, откуда следует (условие (R)), что система $\{F_\alpha\}$ не может быть центрированной, т. е. существуют такие $F_1, \ldots, F_n$, что $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \varnothing$. Но тогда соответствующие $G_i = T \setminus F_i$ образуют конечное подпокрытие покрытия $\{G_\alpha\}$. Итак, условие (R) равносильно компактности.

Установим некоторые основные свойства компактных пространств.

Теорема 2. *Если T — компактное пространство, то каждое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку.*

Доказательство. Если T содержит бесконечное множество X, не имеющее ни одной предельной точки, то в нем можно взять счетное множество $X_1 = (x_1, x_2, \ldots)$, также не имеющее ни одной предельной точки. Но тогда множества $X_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$ образуют центрированную систему замкнутых множеств в T, имеющую пустое пересечение, т. е. T не компактно.

Теорема 3. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое подмножество компактного пространства T и $\{F_\alpha\}$ — произ-

вольная центрированная система замкнутых подмножеств подпространства $F \subset T$. Тогда каждое F_α замкнуто и в T, т. е. $\{F_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых множеств в T. Следовательно, $\bigcap F_\alpha \neq \varnothing$. В силу теоремы 1 отсюда следует компактность F.

Поскольку подпространство хаусдорфова пространства само хаусдорфово, отсюда получаем:

Следствие. *Замкнутое подмножество компакта есть компакт.*

Теорема 4. *Компакт замкнут в любом содержащем его хаусдорфовом пространстве.*

Доказательство. Пусть K — компактное множество в хаусдорфовом пространстве T и пусть $y \notin K$. Тогда для любой точки $x \in K$ существуют окрестность U_x точки x и окрестность V_x точки y такие, что

$$U_x \cap V_x = \varnothing.$$

Окрестности U_x образуют открытое покрытие множества K. В силу компактности K из него можно выделить конечное подпокрытие $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Положим

$$V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}.$$

Тогда V — окрестность точки y, не пересекающаяся с $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n} \supset K$. Следовательно, $y \notin [K]$ и значит, K замкнуто. Теорема доказана.

Теоремы 3 и 4 показывают, что в классе хаусдорфовых пространств компактность есть *внутреннее* свойство пространства, т. е. всякий компакт остается компактом, в какое бы более широкое хаусдорфово пространство мы его ни включали.

Теорема 5. *Всякий компакт представляет собой нормальное пространство.*

Доказательство. Пусть X и Y — два непересекающихся замкнутых подмножества компакта K. Повторив рассуждения, проведенные в доказательстве предыдущей теоремы, легко убедиться в том, что для каждой точки $y \in Y$ существуют такая ее окрестность U_y и такое открытое множество $O_y \supset X$, что $U_y \cap O_y = \varnothing$. Тем самым доказано, что всякий компакт регулярен. Пусть теперь y пробегает множество Y. Выберем из по-

крытия $\{U_\gamma\}$ множества Y конечное подпокрытие U_{γ_1}, ..., U_{γ_n}. Тогда открытые множества

$$O^{(1)} = O_{\gamma_1} \cap \ldots \cap O_{\gamma_n} \text{ и } O^{(2)} = U_{\gamma_1} \cup \ldots \cup U_{\gamma_n}$$

будут удовлетворять условиям

$$O^{(1)} \supset X, \quad O^{(2)} \supset Y \quad \text{и} \quad O^{(1)} \cap O^{(2)} = \varnothing,$$

а это и означает нормальность.

2. Непрерывные отображения компактных пространств. Непрерывные отображения компактных пространств, в частности, компактов, обладают рядом интересных и важных свойств.

Теорема 6. *Непрерывный образ компактного пространства есть компактное пространство.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство и f — его непрерывное отображение в топологическое пространство Y. Рассмотрим какое-либо покрытие $\{V_\alpha\}$ образа $f(X)$ открытыми в $f(X)$ множествами. Положим $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Множества U_α открыты (как прообразы открытых множеств при непрерывном отображении) и образуют покрытие пространства X. Из этого покрытия можно выбрать, в силу компактности X, конечное подпокрытие U_1, ..., U_n. Тогда множества V_1, ..., V_n, где $V_i = f(U_i)$, покрывают весь образ $f(X)$ пространства X.

Теорема 7. *Взаимно однозначное и непрерывное отображение φ компакта X на хаусдорфово пространство Y есть гомеоморфизм.*

Доказательство. Нужно показать, что из условий теоремы вытекает непрерывность обратного отображения φ^{-1}. Пусть F — замкнутое множество в X и $P = \varphi(F)$ — его образ в Y. В силу предыдущей теоремы P — компакт и, следовательно, P замкнуто в Y. Таким образом, прообраз при отображении φ^{-1} всякого замкнутого множества $F \subset X$ замкнут. А это и означает непрерывность отображения φ^{-1}.

3. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах. В предыдущем пункте речь шла о непрерывных отображениях компакта в хаусдорфово пространство. Частным случаем таких отображений являются отображения компактов в числовую прямую, т. е. числовые функции на компактах. Для таких функ-

ций сохраняются основные свойства функций на отрезке, известные из анализа.

Т е о р е м а 8. *Пусть T — компактное пространство и f — непрерывная на нем числовая функция. Тогда f ограничена на T и достигает на T верхней и нижней граней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывная функция есть непрерывное отображение T в числовую прямую $\mathbf{R}$. Образ T в $\mathbf{R}$ в силу общей теоремы 6 компактен. Но, как читателю известно из курса анализа (см. также п. 2 § 7), компактное подмножество числовой прямой замкнуто и ограничено и потому не только имеет конечные верхнюю и нижнюю грани, но и содержит эти грани. Теорема доказана.

У п р а ж н е н и е. Пусть K — компактное метрическое пространство и A — такое отображение K в себя, что $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ при $x \neq y$. Показать, что отображение A имеет в K единственную неподвижную точку.

Утверждения последней теоремы допускают обобщение и на более широкий класс функций, а именно, на так называемые полунепрерывные функции.

Функция $f(x)$ называется *полунепрерывной снизу* (*сверху*) в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ (соответственно, $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$).

Например, функция «целая часть от x», $f(x) = E(x)$ полунепрерывна сверху. Если увеличить (уменьшить) значение $f(x_0)$ непрерывной функции в какой-либо одной точке x_0, то мы получим полунепрерывную сверху (снизу) функцию. Если $f(x)$ полунепрерывна сверху, то — $f(x)$ полунепрерывна снизу. Эти два замечания позволяют сразу построить большое число примеров полунепрерывных функций.

При изучении свойств полунепрерывности действительных функций удобно допускать для них бесконечные значения. Если $f(x_0) = -\infty$, то функцию f будем считать полунепрерывной снизу в точке x_0; если же для любого $h > 0$ имеется окрестность точки x_0, в которой $f(x) < -h$, то будем считать, что функция f полунепрерывна и сверху в точке x_0.

Если $f(x_0) = +\infty$, то функцию f будем считать полунепрерывной сверху в x_0; если же для любого $h > 0$ имеется окрестность точки x_0, в которой $f(x) > h$, то будем считать, что функция f полунепрерывна и снизу в точке x_0.

Пусть $f(x)$ — действительная функция на метрическом пространстве R. *Верхним пределом* $\overline{f}(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 называется величина (конечная или бесконечная) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [\sup\limits_{x \in B(x_0, \varepsilon)} f(x)]$. *Нижний предел* $\underline{f}(x_0)$ определяется аналогично с заменой верхней грани на нижнюю. Разность $\omega f(x_0) = \overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$ (если она имеет смысл, т. е. если числа $\overline{f}(x_0)$ и $\underline{f}(x_0)$ не равны бесконечности одного знака) называется *колебанием* функции $f(x)$ в точке x_0. Легко видеть, что для непрерывности $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы $\omega f(x_0) = 0$, т. е. чтобы $-\infty < \underline{f}(x_0) = \overline{f}(x_0) < \infty$.

Для любой функции $f(x)$, заданной на метрическом пространстве, функция $\overline{f}(x)$ полунепрерывна сверху, а функция $\underline{f}(x)$ полунепрерывна снизу. Это легко вытекает из определения верхнего и нижнего пределов.

Рассмотрим метрическое пространство M, элементами x которого служат все действительные ограниченные функции $\varphi(t)$, заданные на сегменте $[a, b]$. Метрику в M зададим равенством

$$\rho(x, y) = \rho(\varphi, \psi) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Функции на M, как это обычно делается, будем называть *функционалами*, чтобы отличать их от функций $\varphi(t)$ — элементов M.

Рассмотрим один важный пример полунепрерывного функционала. Определим длину кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ как функционал

$$L_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

где верхняя грань (которая может быть равна $+\infty$) берется по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$. Этот функционал определен на всем пространстве M. Для непрерывных функций он совпадает со значением предела

$$\lim_{\max |x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Наконец, для функций с непрерывной производной его можно записать в виде

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Функционал $L_a^b(f)$ полунепрерывен снизу в M, что легко следует из его определения.

На полунепрерывные функции обобщается установленная выше теорема.

Теорема 8а. *Полунепрерывная снизу (сверху) конечная функция на компактном T_1-пространстве T ограничена снизу (сверху).*

Действительно, допустим, что $\inf f(x) = -\infty$. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $f(x_n) < -n$. Поскольку пространство T компактно, его бесконечное множество $\{x_n\}$ имеет (в силу теоремы 2) хотя бы одну предельную точку x_0. По предположению, функция f конечная и полунепрерывна снизу; поэтому найдется такая окрестность U точки x_0, что $f(x) > f(x_0) - 1$ при $x \in U$. Но тогда окрестность U может содержать лишь конечное число точек множества $\{x_n\}$, а это противоречит тому, что точка x_0 — предельная для этого множества.

Аналогично доказывается теорема и для случая полунепрерывной сверху функции.

Теорема 8б. *Полунепрерывная снизу (сверху) конечная функция на компактном T_1-пространстве T достигает своей нижней (верхней) грани.*

Пусть функция $f(x)$ полунепрерывна снизу. Тогда по теореме 8а она имеет конечную нижнюю грань, и существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $f(x_n) \leqslant \inf f(x) + 1/n$.

Поскольку T компактно, множество $\{x_n\}$ имеет предельную точку x_0. Если бы было $f(x_0) > \inf f$, то, в силу полунепрерывности функции f снизу, нашлись бы такая окрестность U точки x_0 и такое $\delta > 0$, что $f(x) > \inf f + \delta$ при $x \in U$. Но тогда окрестность U не могла бы содержать никакого бесконечного подмножества множества $\{x_n\}$. Следовательно, $f(x_0) = \inf f$, что и требовалось доказать.

4. Счетная компактность. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е. Пространство T называется *счетно-компактным*, если каждое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказанная в п. 1 теорема 2 означает, что всякое компактное пространство счетно-компактно. Обратное, вообще говоря, неверно. Вот «традиционный» пример счетно-компактного, но не компактного пространства. Рассмотрим множество X всех порядковых чисел α, меньших первого несчетного порядкового числа ω_1. Назовем и н т е р в а л о м (α, β) в X совокупность всех порядковых чисел γ, удовлетворяющих неравенствам $\alpha < \gamma < \beta$. Открытым множеством в X назовем объединение произвольного числа интервалов. Легко проверить, что построенное пространство счетно-компактно, но не компактно.

Соотношение между понятиями компактности и счетной компактности становится ясным из следующей теоремы.

Т е о р е м а 9. *Для того чтобы топологическое пространство было счетно-компактным, необходимо и достаточно любое из следующих двух условий*:

1) *Каждое счетное открытое покрытие пространства T содержит конечное подпокрытие.*

2) *Каждая счетная центрированная система замкнутых множеств в T имеет непустое пересечение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равносильность условий 1) и 2) непосредственно следует из соотношений двойственности. Далее, если T не счетно-компактно, то, повторив рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, мы получим, что в T существует счетная центрированная система замкнутых множеств с пустым пересечением. Тем самым достаточность условия 2) (а значит, и 1)) установлена. Докажем необходимость условия 2). Пусть T счетно-компактно и $\{F_n\}$ — счетная центрированная си-

стема замкнутых множеств в T. Покажем, что $\bigcap\limits_n F_n \neq \varnothing$. Пусть $\Phi_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$. Ясно, что все Φ_n замкнуты, не пусты (в силу центрированности $\{F_n\}$) и образуют невозрастающую систему $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots$, и что $\bigcap\limits_n \Phi_n = \bigcap\limits_n F_n$. Возможны два случая:

1) Начиная с некоторого номера n_0

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots$$

Тогда, очевидно, $\bigcap\limits_n \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing$.

2) Среди Φ_n имеется бесконечно много попарно различных. При этом достаточно рассмотреть случай, когда все Φ_n различны между собой. Пусть

$$x_n \in \Phi_n \backslash \Phi_{n+1}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ представляет собой бесконечное множество различных точек из T; в силу счетной компактности T она должна иметь хотя бы одну предельную точку, скажем, x_0. Так как Φ_n содержит все точки x_n, x_{n+1}, ..., то x_0 — предельная точка для Φ_n и в силу замкнутости Φ_n, $x_0 \in \Phi_n$. Следовательно, $\bigcap\limits_n \Phi_n \ni x_0$, т. е. $\bigcap\limits_n \Phi_n \neq \varnothing$.

Таким образом, и компактные и счетно-компактные пространства характеризуются «поведением» своих открытых покрытий. И в том, и в другом случае из открытого покрытия можно выбрать конечное, но в первом случае речь идет о любых покрытиях, а во втором — только о счетных.

Хотя в общем случае из счетной компактности компактность не вытекает, имеет место следующий факт.

Теорема 10. *Для пространств со счетной базой понятия компактности и счетной компактности совпадают.*

Действительно, из любого открытого покрытия пространства T, имеющего счетную базу, можно выбрать счетное подпокрытие (теорема 5 § 5). Если же T к тому же и счетно-компактно, то из этого последнего можно в силу предыдущей теоремы выбрать конечное подпокрытие. Тем самым устанавливается, что T компактно.

Замечание. Понятие счетной компактности топологического пространства оказалось на самом деле (в противовес компактности) не очень удачным и естественным. Оно возникло так сказать «по инерции». Дело в том, что для метрических пространств (как и для пространств со счетной базой) эти два понятия совпадают (это будет показано в следующем параграфе). При этом для метрических пространств понятие компактности было поначалу дано именно как наличие у каждого бесконечного подмножества предельной точки, т. е. как определение счетной компактности. «Автоматический» перенос этого определения с метрического случая на топологический и привел к понятию счетно-компактного топологического пространства. Иногда в литературе, особенно более старой, термин «компактность» понимается как «счетная компактность», а топологическое пространство, компактное в нашей терминологии, т. е. такое, из каждого открытого покрытия которого можно выделить конечное подпокрытие, называется *бикомпактным*. При этом компактное хаусдорфово пространство (т. е. компакт) именуется *бикомпактом*, а термин «компакт» резервируется для обозначения метрического компактного пространства. Мы будем придерживаться тех терминов (компактность, счетная компактность), которые введены выше; при этом мы и компактные метрические пространства также будем называть компактами, а в тех случаях, когда наличие метрики желательно специально подчеркнуть, — «*метрическими компактами*».

5. Предкомпактные множества. Если множество M, лежащее в некотором хаусдорфовом пространстве T, не замкнуто в T, то M не может быть компактно. Например, ни одно из незамкнутых подмножеств числовой прямой не является компактом. Может, однако, оказаться, что замыкание $[M]$ такого множества M в T уже обладает свойством компактности. Например, этому условию удовлетворяет любое ограниченное подмножество на числовой прямой или в n-мерном пространстве. Введем следующее определение.

Определение. Множество M, лежащее в некотором топологическом пространстве T, называется *предкомпактным* (или *компактным относительно* T), если его замыкание в T компактно. Аналогично, M называется *счетно-предкомпактным* в T, если всякое бесконечное

подмножество $A \subset M$ имеет хотя бы одну предельную точку (которая может принадлежать, но может и не принадлежать M).

Понятие предкомпактности (в отличие от компактности) связано, очевидно, с тем пространством T, в котором мы данное множество рассматриваем. Например, множество рациональных точек в интервале (0, 1) предкомпактно, если его рассматривать как подмножество числовой прямой, но оно не будет предкомпактным как подмножество пространства всех рациональных чисел.

Понятие предкомпактности наиболее существенно в случае метрических пространств, о чем будет идти речь в следующем параграфе.

§ 7. Компактность в метрических пространствах

1. Полная ограниченность. Поскольку метрические пространства представляют собой частный случай топологических, на них распространяются те определения и факты, которые были изложены в предыдущем параграфе. В метрическом случае компактность тесно связана с понятием полной ограниченности, которое мы сейчас введем.

Пусть M — некоторое множество в метрическом пространстве R и ε — некоторое положительное число. Множество A из R называется *ε-сетью* для M, если для любой точки $x \in M$ найдется хотя бы одна точка $a \in A$, такая, что

$$\rho(x, a) \leqslant \varepsilon.$$

(Множество A не обязано содержаться в M и может даже не иметь с M ни одной общей точки, однако, имея для M некоторую ε-сеть A, можно построить 2ε-сеть $B \subset M$.)

Например, целочисленные точки образуют на плоскости $1/\sqrt{2}$-сеть. Множество M называется *вполне ограниченным*, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Ясно, что вполне ограниченное множество обязательно ограничено, как сумма конечного числа ограниченных множеств. Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает приводимый ниже пример 2.

Часто бывает полезно следующее очевидное замечание: *если множество M вполне ограничено, то его замыкание $[M]$ также вполне ограничено.*

Из определения полной ограниченности сразу следует, что *если само метрическое пространство R вполне ограничено, то оно сепарабельно.* Действительно, построим для каждого n в R конечную $1/n$-сеть. Сумма их по всем n представляет собой счетное всюду плотное в R-множество. Поскольку сепарабельное метрическое пространство имеет счетную базу (теорема 4 § 5), мы получаем, что *всякое вполне ограниченное метрическое пространство имеет счетную базу.*

Примеры. 1. В n-мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с обычной ограниченностью, т. е. с возможностью заключить данное множество в достаточно большой куб. Действительно, если такой куб разбить на кубики с ребром ε, то вершины этих кубиков будут образовывать конечную $(\sqrt{n}/2)$ ε-сеть в исходном кубе, а значит, и подавно, в любом множестве, лежащем внутри этого куба.

2. Единичная сфера S в пространстве l_2 дает нам пример ограниченного, но не вполне ограниченного множества. Действительно, рассмотрим в S точки вида

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Расстояние между любыми двумя такими точками e_n и e_m $(n \neq m)$ равно $\sqrt{2}$. Отсюда видно, что в S не может быть конечной ε-сети ни при каком $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

3. Рассмотрим в l_2 множество Π точек $x = (x_1, \ldots, x_n \ldots)$, подчиненных условиям

$$|x_1| \leqslant 1, \quad |x_2| \leqslant 1/2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqslant 1/2^{n-1}, \quad \ldots$$

Это множество называется *основным параллелепипедом* («гильбертовым кирпичом») пространства l_2. Оно служит примером бесконечномерного вполне ограниченного множества. Для доказательства его полной ограниченности поступим следующим образом.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем n так, что $1/2^{n-1} < \varepsilon/2$. Каждой точке

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \tag{1}$$

из Π сопоставим точку

$$x^* = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \tag{2}$$

из того же множества. При этом

$$\rho(x, x^*) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество Π^* точек вида (2) из Π вполне ограничено (как ограниченное множество в n-мерном пространстве). Выберем в Π^* конечную $\varepsilon/2$-сеть. Ясно, что она будет в то же время ε-сетью во всем Π.

2. Компактность и полная ограниченность.

Теорема 1. *Если метрическое пространство R счетно-компактно, то оно вполне ограничено.*

Доказательство. Предположим, что R не вполне ограничено. Это значит, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ в R не существует конечной ε_0-сети. Возьмем в R произвольную точку a_1. В R найдется хотя бы одна такая точка, скажем, a_2, что $\rho(a_1, a_2) \geqslant \varepsilon_0$ (иначе точка a_1 была бы ε_0-сетью для R). Далее, в R найдется такая точка a_3, что $\rho(a_1, a_3) > \varepsilon_0$ и $\rho(a_2, a_3) > \varepsilon_0$, иначе пара точек a_1, a_2 была бы ε_0-сетью. Если точки $a_1, \ldots, a_k$ уже фиксированы, то выберем точку $a_{k+1} \in R$ так, что $\rho(a_i, a_{k+1}) \geqslant \varepsilon_0$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Это построение дает нам бесконечную последовательность $a_1, a_2, \ldots$, которая не имеет ни одной предельной точки, поскольку $\rho(a_i, a_j) > \varepsilon_0$ при $i \neq j$. Но тогда R не счетно-компактно. Теорема доказана.

Итак, мы показали, что для метрических пространств счетная компактность влечет полную ограниченность, которая в свою очередь влечет наличие счетной базы.

В силу теоремы 10 § 6 отсюда получаем такой важный результат.

Следствие. *Всякое счетно-компактное метрическое пространство компактно.*

Мы показали, что полная ограниченность есть необходимое условие компактности метрического пространства. Это условие не достаточно; например, совокупность рациональных точек отрезка $[0, 1]$ с обычным определением расстояния между ними есть вполне ограниченное, но не компактное пространство: последовательность точек этого пространства

$$0;\ 0{,}4;\ 0{,}41;\ 0{,}414;\ 0{,}4142;\ \ldots,$$

т. е. последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2} - 1$, не имеет в нем предельной точки. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы метрическое пространство R было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно*:

1) *вполне ограниченным*,

2) *полным*.

Доказательство. Необходимость полной ограниченности уже отмечалась. Необходимость полноты очевидна: в самом деле, если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в R, не имеющая предела, то эта последовательность не имеет в R ни одной предельной точки.

Покажем теперь, что если R вполне ограничено и полно, то оно компактно. В силу следствия из теоремы 1 для этого достаточно установить, что R счетно-компактно, т. е. что всякая последовательность $\{x_n\}$ точек из R имеет хотя бы одну предельную точку.

Построим вокруг каждой из точек, образующих 1-сеть в R, замкнутый шар радиуса 1. Так как эти шары покрывают все R, а число их конечно, то по крайней мере один из них, назовем его B_1, содержит некоторую бесконечную подпоследовательность $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots$ последовательности $\{x_n\}$. Далее, выберем $^1/_2$-сеть в B_1 и вокруг каждой из точек этой сети построим замкнутый шар радиуса 1/2. По крайней мере один из этих шаров, назовем его B_2, содержит бесконечную подпоследовательность $x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$ последовательности $\{x_n^{(1)}\}$. Далее, найдем замкнутый шар B_3 с центром в B_2 радиуса 1/4, содержащий бесконечную подпоследовательность $x_1^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}, \ldots$ последовательности $\{x_n^{(2)}\}$ и т. д. Рассмотрим теперь наряду с каждым шаром B_n замкнутый шар A_n с тем же центром, но в два раза большего радиуса. Легко видеть, что шары A_n вложены друг в друга. В силу полноты пространства R пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ не пусто и состоит из одной точки x_0. Эта точка — предельная для исходной последовательности $\{x_n\}$, так как каждая ее окрестность содержит некоторый шар B_k, а значит, и бесконечную подпоследовательность $\{x_n^{(k)}\}$ последовательности $\{x_n\}$.

3. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах. Понятие предкомпактности, введенное нами

в предыдущем параграфе для подмножеств произвольного топологического пространства, применимо, в частности, к подмножествам метрического пространства. При этом, очевидно, понятие счетной предкомпактности совпадает здесь с понятием предкомпактности. Отметим следующий простой, но важный факт.

Теорема 3. *Для того чтобы множество M, лежащее в полном метрическом пространстве R, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.*

Доказательство сразу следует из теоремы 2 и того очевидного факта, что замкнутое подмножество полного метрического пространства само полно.

Значение этой теоремы состоит в том, что, как правило, легче установить полную ограниченность того или иного множества, чем непосредственно доказать его предкомпактность. Вместе с тем для применений в анализе важна обычно предкомпактность.

4. Теорема Арцела. Вопрос о компактности того или иного множества в метрическом пространстве — довольно распространенная в анализе задача. Между тем, попытка непосредственно применить теорему 2 сталкивается с трудностями. Поэтому для множеств в конкретных пространствах полезно дать специальные критерии компактности (или предкомпактности), более удобные на практике.

В n-мерном евклидовом пространстве предкомпактность множества равносильна, как мы видели, его ограниченности. Однако для более общих метрических пространств это уже неверно.

Одним из важнейших в анализе метрических пространств является пространство $C[a, b]$. Для его подмножеств важный и часто используемый критерий предкомпактности доставляет так называемая теорема Арцела. Чтобы ее сформулировать, нам понадобятся следующие понятия.

Семейство Φ функций φ, определенных на некотором отрезке $[a, b]$, называется *равномерно ограниченным*, если существует такое число K, что

$$|\varphi(x)| < K$$

для всех $x \in [a, b]$ и всех $\varphi \in \Phi$.

Семейство $\Phi = \{\varphi\}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$$

для всех x_1 и x_2 из $[a, b]$ таких, что $\rho(x_1, x_2) < \delta$, и для всех $\varphi \in \Phi$.

Теорема 4 (Арцела). *Для того чтобы семейство Φ непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, было предкомпактно в $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть семейство Φ предкомпактно в $C[a, b]$. Тогда по предыдущей теореме для каждого положительного ε в семействе Φ существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Каждая из функций φ_i, как непрерывная функция на отрезке, ограничена: $|\varphi_i(x)| \leqslant K_i$.

Положим $K = \max K_i + \varepsilon/3$. По определению $\varepsilon/3$-сети, для всякого $\varphi \in \Phi$ имеем, хотя бы для одного φ_i,

$$\rho(\varphi, \varphi_i) = \max_x |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon/3.$$

Следовательно,

$$|\varphi(x)| \leqslant |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant K.$$

Итак, Φ равномерно ограничено.

Далее, так как каждая из функций φ_i, образующих $\varepsilon/3$-сеть, непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна на $[a, b]$, то для данного $\varepsilon/3$ существует такое δ_i, что

$$|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \varepsilon/3,$$

если $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Положим $\delta = \min \delta_i$. Для произвольной функции $\varphi \in \Phi$ выберем φ_i так, чтобы $\rho(\varphi, \varphi_i) < \varepsilon/3$; тогда при $|x_1 - x_2| < \delta$ будем иметь

$$|\varphi_1(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi_i(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность Φ также доказана.

Достаточность. Пусть Φ — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций. В силу теоремы 3 для доказательства его предкомпактности в $C[a, b]$ достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ для него в $C[a, b]$ существует конечная ε-сеть. Пусть $|\varphi(x)| \leqslant K$ для всех $\varphi \in \Phi$ и пусть $\delta > 0$ выбрано так, что $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon/5$ при $|x_1 - x_2| < \delta$ для всех

$\varphi \in \Phi$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на оси x точками $x_0 = a_1 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на промежутки длины меньше δ и проведем через эти точки вертикальные прямые. Отрезок $[-K, K]$ на оси y разобьем точками $y_0 = -K < y_1 < \ldots < y_m = K$ на промежутки длины меньше $\varepsilon/5$ и проведем через точки деления горизонтальные прямые. Таким образом, прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $-K \leqslant y \leqslant K$ разобьется на ячейки с горизонтальной стороной меньше δ и вертикальной стороной меньше $\varepsilon/5$. Сопоставим теперь каждой функции $\varphi \in \Phi$ ломаную $\psi(x)$ с вершинами в точках (x_k, y_l), т. е. в узлах построенной сетки, и уклоняющуюся в точках x_k от функции $\varphi(x)$ меньше чем на $\varepsilon/5$ (существование такой ломаной очевидно).

Поскольку по построению $|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \varepsilon/5$, $|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \varepsilon/5$, $|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})| < \varepsilon/5$, то

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < 3\varepsilon/5.$$

Так как между точками x_k и x_{k+1} функция $\psi(x)$ линейна, то $|\psi(x_k) - \psi(x)| < 3\varepsilon/5$ для всех $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Пусть теперь x — произвольная точка отрезка $[a, b]$ и x_k — ближайшая к x слева из выбранных нами точек деления. Тогда

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, ломаные $\psi(x)$ по отношению к Φ образуют ε-сеть. Число их очевидно, конечно; таким образом, Φ вполне ограничено. Теорема полностью доказана.

5. Теорема Пеано. Покажем, как применяется теорема Арцела на примере следующей теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью.

Теорема 5 (Пеано). *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Если функция f непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G, то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит хотя бы одна интегральная кривая данного уравнения.

Доказательство. Так как функция f непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она ограничена: $|f(x, y)| < M = \text{const}$.

Проведем через точку (x_0, y_0) прямые с угловыми коэффициентами M и $-M$. Проведем, далее, вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$ так, чтобы отсекаемые ими два треугольника с общей вершиной (x_0, y_0) целиком лежали внутри области G.

Эта пара треугольников образует замкнутое множество Δ.

Построим теперь для данного уравнения так называемые ломаные Эйлера следующим образом: проведем из точки (x_0, y_0) прямую с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$. На этой прямой возьмем некоторую точку (x_1, y_1) и проведем через нее прямую с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$. На этой прямой возьмем точку (x_2, y_2), проведем через нее прямую с угловым коэффициентом $f(x_2, y_2)$ и т. д. Рассмотрим теперь последовательность ломаных Эйлера $L_1, \ldots, L_n, \ldots$, проходящих через точку (x_0, y_0), таких, что длина наибольшего из звеньев линии L_k стремится к нулю при $k \to \infty$. Пусть φ_k — функция, график которой есть линия L_k. Функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots$ обладают следующими свойствами:

1) они определены на одном и том же отрезке $[a, b]$,

2) они равномерно ограничены,

3) они равностепенно непрерывны.

На основании теоремы Арцела из последовательности $\{\varphi_k\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность. Пусть это будет последовательность $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(k)}, \ldots$

Положим $\varphi(x) = \lim \varphi^{(k)}(x)$ при $k \to \infty$. Ясно, что $\varphi(x_0) = y_0$. Остается проверить, что φ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ данному дифференциальному уравнению. Для этого требуется показать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi(x')) \right| < \varepsilon,$$

если только величина $|x'' - x'|$ достаточно мала. Для доказательства этого в свою очередь нужно установить, что при достаточно больших k

$$\left| \frac{\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x')}{x'' - x'} - f(x', \varphi^{(k)}(x')) \right| < \varepsilon,$$

если только разность $|x'' - x'|$ достаточно мала.

Так как f непрерывна в области G, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon, \quad y' = \varphi(x'),$$

если

$$|x - x'| < 2\eta \text{ и } |y - y'| < 4M\eta.$$

Совокупность точек $(x, y) \in G$, удовлетворяющих этим двум неравенствам, представляет собой некоторый прямоугольник Q. Пусть теперь K настолько велико, что для всех $k > K$

$$|\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)| < 2M\eta$$

и все звенья ломаной L_k имеют длину меньше η. Тогда при $|x - x'| < 2\eta$ все ломаные Эйлера $\varphi^{(k)}$, для которых $k > K$, целиком лежат внутри Q.

Далее, пусть $(a_0, b_0), \ldots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ — вершины ломаной L_k, причем

$$a_0 \leqslant x' < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < x'' \leqslant a_{n+1}$$

(мы для определенности считаем $x'' > x'$; аналогично рассматривается случай $x'' < x'$). Тогда для соответствующей функции $\varphi^{(k)}$ имеем

$$\varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x'),$$

$$\varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).$$

Отсюда при $|x'' - x'| < \eta$ получаем

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') < \varphi^{(k)}(a_1) - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x'),$$

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \varphi^{(k)}(a_{i+1}) - \varphi^{(k)}(a_i) < [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i); \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n).$$

Суммируя эти неравенства, находим

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \varphi^{(k)}(x'') - \varphi^{(k)}(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x'),$$

что и требовалось доказать.

Разные подпоследовательности ломаных Эйлера могут сходиться к разным решениям уравнения (3). Поэтому решение уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через точку (x_0, y_0), вообще говоря, не единственно.

6. Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов. Для отображений метрического пространства в метрическое пространство, в частности, для числовых функций на метрических пространствах, наряду с понятием непрерывности имеет смысл важное для анализа понятие равномерной непрерывности: отображение F метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *равномерно непрерывным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\rho_2(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$ как только $\rho_1(x_1, x_2) < \delta$ (здесь ρ_1 — расстояние в X, а ρ_2 — расстояние в Y), причем δ зависит только от ε, но не от x_1 и x_2.

Упражнение. Показать, что числовая функция $F(x) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} x(t)$ равномерно непрерывна на пространстве $C[a, b]$.

Для непрерывных отображений метрических компактов имеет место следующая теорема, обобщающая хорошо

известную из элементарного курса анализа теорему о непрерывных функциях на отрезке.

Теорема 6. *Непрерывное отображение метрического компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть отображение F метрического компакта K в метрическое пространство M непрерывно, но не равномерно непрерывно. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и каждого натурального n найдутся в K такие точки x_n и x'_n, что $\rho_1(x_n, x'_n) < 1/n$ и в то же время $\rho_2(F(x_n), F(x'_n)) \geqslant \varepsilon$ (ρ_1 — расстояние в K, ρ_2 — расстояние в M). Из последовательности $\{x_n\}$ в силу компактности K можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x \in K$. Тогда и $\{x'_{n_k}\}$ сходится к x; но при этом для каждого k должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\rho_2(F(x), F(x_{n_k})) \geqslant \varepsilon/2; \quad \rho_2(F(x), F(x'_{n_k})) \geqslant \varepsilon/2,$$

что противоречит непрерывности отображения F в точке x.

7. Обобщенная теорема Арцела. Пусть X и Y — два метрических компакта и пусть C_{XY} — множество всех непрерывных отображений f компакта X в Y. Введем в C_{XY} расстояние при помощи формулы

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Легко проверить, что таким образом C_{XY} превращается в метрическое пространство.

Теорема 7 (обобщенная теорема Арцела). *Для предкомпактности множества $D \subset C_{XY}$ необходимо и достаточно, чтобы входящие в D функции f были равностепенно непрерывны.*

Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать такое $\delta > 0$, что из

$$\rho(x', x'') < \delta \tag{4}$$

вытекает

$$\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon, \tag{5}$$

каковы бы ни были f из D и x' и x'' из X.

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как и в теореме 4.

Докажем достаточность. Для этого погрузим C_{XY} в пространство M_{XY} всех отображений компакта X в компакт Y с той же самой метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)),$$

которая была введена в C_{XY}, и докажем предкомпактность множества D в M_{XY}. Так как C_{XY} замкнуто в M_{XY} [1]), то из предкомпактности множества D в M_{XY} следует его предкомпактность в C_{XY}.

Зададим $\varepsilon > 0$ произвольно и выберем δ так, чтобы из (4) вытекало (5) для всех f из D и всех x', x'' из X. Легко видеть, что X можно представить как сумму конечного числа непересекающихся множеств E_i, таких, что из x', $x'' \in E_i$ следует $\rho(x', x'') < \delta$. Действительно, для этого достаточно выбрать точки $x_1, \ldots, x_n$ так, чтобы они образовали $\delta/2$-сеть в X и положить, например,

$$E_i = B(x_i, \delta/2) \setminus \bigcup_{j<i} B(x_j, \delta/2),$$

где $B(x_i, \delta/2)$ — шар радиуса $\delta/2$ с центром x_i.

Рассмотрим теперь в компакте Y некоторую конечную ε-сеть $y_1, \ldots, y_m$, и пусть L — совокупность функций $g(x)$, принимающих на множествах E_i значения y_j. Число таких функций, очевидно, конечно. Покажем, что они образуют 2ε-сеть по отношению к D в M_{XY}. Действительно, пусть $f \in D$. Для всякой точки x_i из $x_1, \ldots, x_n$ найдется такая точка y_j из $y_1, \ldots, y_m$, что $\rho(f(x_i), y_j) < \varepsilon$.

Пусть функция $g \in L$ выбрана так, что $g(x_i) = y_j$. Тогда

$$\rho(f(x), g(x)) \leqslant \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(x)) < 2\varepsilon,$$

если i выбрано так, что $x \in E_i$.

Отсюда вытекает, что конечное множество L действительно есть 2ε-сеть для D и, таким образом, D предкомпактно в M_{XY}, а следовательно, и в C_{XY}.

---

[1]) Поскольку предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений есть также непрерывное отображение. Указанное предложение представляет собой непосредственное обобщение известной теоремы анализа и доказывается так же, как и эта теорема.

§ 8. Непрерывные кривые в метрических пространствах [1])

Пусть задано непрерывное отображение

$$P = f(t)$$

отрезка $a \leqslant t \leqslant b$ в метрическое пространство R. Когда t «пробегает» отрезок от a до b, соответствующая точка P «пробегает» некоторую «непрерывную кривую» в пространстве R. Нам предстоит дать строгие

Рис. 12

Рис. 13

Рис. 14

определения, связанные с изложенной сейчас грубой идеей. Порядок, в котором проходятся точки кривой, существен. Одно и то же множество, изображенное на рис. 12, проходимое в направлениях, указанных на рис. 13 и 14, мы будем считать р а з л и ч н ы м и кривыми. В качестве другого примера рассмотрим действительную функцию, определенную на отрезке [0, 1], которая изображена на рис. 15. Она определяет «кривую», расположенную на отрезке [0, 1] оси y, отличную от этого отрезка, однократно пройденного от точки 0 до точки 1, так как отрезок $[A, B]$ проходится трижды (два раза вверх и один раз вниз).

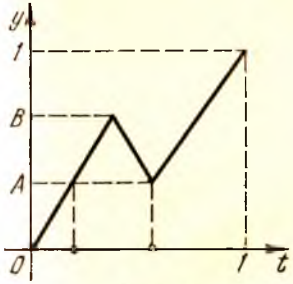


Рис. 15

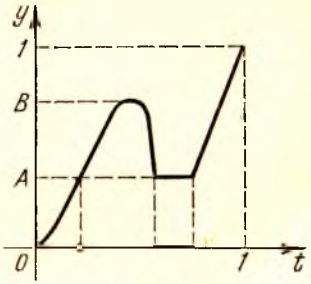


Рис. 16

Однако при о д и н а к о в о м п о р я д к е прохождения точек пространства выбор «параметра» t мы будем считать несущественным. Например, функции, изображенные на рис. 15 и 16, определяют одну и ту же «кривую», расположенную на оси y, хотя значения параметра t, отвечающие какой-либо точке кривой, в случаях рис. 15 и 16 могут быть различными. Например, в случае рис. 15 точке A соответствуют

[1]) Этот параграф не связан с дальнейшим изложением. При желании читатель может его опустить.

на оси t две изолированные точки, а в случае рис. 16 — одна изолированная точка и лежащий правее нее отрезок (когда t пробегает этот отрезок, точка на кривой остается на месте). (Допускать такие отрезки неподвижности $P = f(t)$ будет удобно в дальнейшем при исследовании компактности систем кривых.)

Перейдем к формальным определениям. Две непрерывные функции

$$P = f'(t'), \quad P = f''(t''),$$

определенные соответственно на отрезках

$$a' \leqslant t' \leqslant b', \quad a'' \leqslant t'' \leqslant b''$$

и принимающие значения в метрическом пространстве $\mathbf{R}$, назовем *эквивалентными*, если существуют две непрерывные неубывающие функции

$$t' = \varphi'(t), \quad t'' = \varphi''(t),$$

определенные на некотором отрезке

$$a \leqslant t \leqslant b$$

и обладающие свойствами

$$\varphi'(a) = a', \quad \varphi'(b) = b',$$
$$\varphi''(a) = a'', \quad \varphi''(b) = b'',$$
$$f'[\varphi'(t)] = f''[\varphi''(t)]$$

для всех $t \in [a, b]$.

Легко видеть, что так введенное отношение эквивалентности рефлексивно (f эквивалентно f), симметрично (если f' эквивалентно f'', то f'' эквивалентно f'). Можно показать, что оно и транзитивно (из эквивалентности f' и f'' и эквивалентности f'' и f''' вытекает эквивалентность f' и f'''). Поэтому все непрерывные функции рассматриваемого типа разбиваются на классы функций, эквивалентных между собой. Каждый такой класс и определяет *непрерывную кривую* в пространстве R.

Для любой функции $P = f'(t')$, определенной на каком-либо отрезке $[a', b']$, найдется эквивалентная ей функция, определенная на отрезке $[a'', b''] = [0, 1]$. Действительно, достаточно положить [1])

$$t' = \varphi'(t) = (b' - a')\,t + a', \quad t'' = \varphi''(t) = t.$$

Таким образом, всякую кривую можно предполагать заданной параметрически при помощи функции, определенной на отрезке $[0, 1]$.

Поэтому целесообразно ввести в рассмотрение пространство C_{IR} непрерывных отображений f отрезка $I = [0, 1]$ в пространство R с метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_t \rho(f(t), g(t)).$$

Будем считать, что последовательность кривых $L_1, \ldots, L_n, \ldots$ сходится к кривой L, если кривые L_n можно параметрически представить в виде

$$P = f_n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

---

[1]) Мы считаем, что всегда $a < b$. Однако мы не исключаем «кривых», которые состоят из одной-единственной точки и получаются, если на $[a, b]$ функция $f(t)$ постоянна. Это тоже удобно для дальнейшего.

а кривую L — в виде

$$P = f(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

так что $\rho(f, f_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Применяя обобщенную теорему Арцела (теорема 7 § 7), легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если последовательность кривых $L_1, \ldots, L_n, \ldots$, лежащих в компакте K, можно представить параметрически при помощи равностепенно непрерывных функций на отрезке* $[0, 1]$, *то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Определим теперь длину кривой, заданной параметрически функцией

$$P = f(t),\quad a \leqslant t \leqslant b,$$

как верхнюю грань сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(f(t_{i-1}),\ f(t_i)),$$

где точки t_i подчинены лишь условиям

$$a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_i \leqslant \ldots \leqslant t_n = b.$$

Легко видеть, что длина кривой не зависит от выбора ее параметрического представления. Если ограничиться параметрическими представлениями посредством функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, то легко доказать, что длина кривой есть полунепрерывный снизу функционал от f (в пространстве C_{lR}). На геометрическом языке этот результат можно выразить в виде следующей теоремы о полунепрерывности.

Теорема 2. *Если последовательность кривых L_n сходится к кривой L, то длина кривой L не больше нижнего предела длин кривых L_n.*

Рассмотрим теперь специально кривые конечной длины. Пусть кривая определена параметрически функцией

$$P = f(t),\quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Функция f, рассматриваемая лишь на отрезке $[a, T]$, где $a \leqslant T \leqslant b$, определяет «начальный отрезок» кривой от точки $P_a = f(a)$ до точки $P_T = f(T)$. Пусть $s = \varphi(T)$ — его длина. Легко устанавливается, что

$$P = g(s) = f[\varphi^{-1}(s)]$$

есть новое параметрическое представление той же кривой. При этом s пробегает отрезок $0 \leqslant s \leqslant S$, где S — длина всей рассматриваемой кривой. Это представление удовлетворяет требованию

$$\rho(g(s_1),\ g(s_2)) \leqslant |s_2 - s_1|$$

(длина дуги не меньше хорды).

Переходя к отрезку $[0, 1]$, получим параметрическое представление

$$P = F(\tau) = g(s),\ \tau = s/S,$$

удовлетворяющее условию Липшица

$$\rho(F(\tau_1),\ F(\tau_2)) \leqslant S\,|\tau_1 - \tau_2|.$$

Мы видим, таким образом, что *для всех кривых длины* $S \leqslant M$, *где* M — *некоторая константа, возможно параметрическое представление равностепенно непрерывными функциями, заданными на отрезке* $[0, 1]$. К ним, следовательно, применима теорема 1.

Покажем силу полученных общих результатов на примере доказательства следующего важного предложения.

Теорема 3. *Если в комплекте* K *две точки,* A *и* B, *можно соединить непрерывной кривой конечной длины, то среди таких кривых существует кривая наименьшей длины.*

В самом деле, пусть Y есть нижняя грань длин кривых, соединяющих A и B в компакте K. Пусть длины кривых $L_1, \ldots, L_n, \ldots$, соединяющих A и B, стремятся к Y. Из последовательности L_n по теореме 1 можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. По теореме 2 предельная кривая этой подпоследовательности не может иметь длину больше Y.

Отметим, что даже в случае, когда K является замкнутой гладкой (надлежащее число раз дифференцируемой) поверхностью в евклидовом трехмерном пространстве, эта теорема не вытекает непосредственно из результатов, устанавливаемых в курсе дифференциальной геометрии, где ограничиваются обычно случаем достаточно близких друг к другу точек A и B.

Все изложенное выше приобрело бы бо́льшую прозрачность, если бы мы наделили множество всех кривых данного метрического пространства R структурой метрического пространства. Это можно сделать, определяя расстояние между кривыми L_1, L_2 формулой

$$\rho(L_1, L_2) = \inf \rho(f_1, f_2),$$

где нижняя грань берется по всем возможным парам параметрических представлений кривой L_1 при помощи функции $P = f_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и кривой L_2 при помощи функции $P = f_2(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Доказательство того, что это расстояние удовлетворяет обычным аксиомам, очень просто, за исключением одного пункта: представляет некоторые трудности доказать, что из $\rho(L_1, L_2) = 0$ вытекает тождество кривых L_1, L_2. Этот факт является непосредственным следствием того обстоятельства, что нижняя грань в формуле, которой мы определили расстояние $\rho(L_1, L_2)$, достигается при надлежащем выборе параметрических представлений f_1, f_2. Но доказательство этого последнего утверждения тоже не очень просто.

ГЛАВА III

НОРМИРОВАННЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Линейные пространства

Понятие линейного пространства относится к числу самых основных в математике. Оно будет играть важную роль не только в этой главе, но и во всем дальнейшем изложении.

1. Определение и примеры линейных пространств.

Определение 1. Непустое множество L элементов x, y, z, ... называется *линейным*, или *векторным*, *пространством*, если оно удовлетворяет таким условиям:

I. Для любых двух элементов x, $y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$, причем

1) $x + y = y + x$ (коммутативность),

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность),

3) в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля),

4) для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).

II. Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (*произведение* элемента x на число α), причем

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$,

2) $1 \cdot x = x$,

3) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$,

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

В зависимости от того, какой запас чисел (все комплексные или только действительные) используется, различают комплексные и действительные линейные пространства [1]). Всюду, где не оговорено противное, наши построения будут верны как для действительных, так и для комплексных пространств.

---

[1]) Можно было бы рассматривать и линейные пространства над произвольным полем.

Заметим, что всякое комплексное линейное пространство можно рассматривать как некоторое действительное пространство, если ограничиться в нем умножением векторов на действительные числа.

Рассмотрим некоторые примеры линейных пространств, предоставив читателю проверить для каждого из них сформулированные выше аксиомы.

1. Прямая линия $\mathbf{R}$, т. е. совокупность действительных чисел, с обычными арифметическими операциями сложения и умножения, представляет собой линейное пространство.

2. Совокупность всевозможных наборов n действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где сложение и умножение на число определяются формулами

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha (x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),$$

также является линейным пространством. Оно называется действительным *n-мерным* [1]) *арифметическим пространством* и обозначается символом $\mathbf{R}^n$. Аналогично, комплексное n-мерное арифметическое пространство $\mathbf{C}^n$ определяется как совокупность наборов n комплексных чисел (с умножением на любые комплексные числа).

3. Непрерывные (действительные или комплексные) функции на некотором отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a, b]$, являющееся одним из важнейших для анализа.

4. Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности чисел (действительных или комплексных)

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \tag{1}$$

с операциями

$$(x_1, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, \ldots, y_n, \ldots) =$$
$$= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots),$$
$$\alpha (x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n, \ldots),$$

---

[1]) Этот термин будет разъяснен в дальнейшем.

является линейным пространством. Тот факт, что сумма двух последовательностей, удовлетворяющих условию (1), также удовлетворяет этому условию, вытекает из элементарного неравенства $(a_1 + a_2)^2 \leqslant 2a_1^2 + 2a_2^2$.

5. Сходящиеся последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с покоординатными операциями сложения и умножения на числа образуют линейное пространство. Обозначим его c.

6. Последовательности, сходящиеся к 0, с теми же операциями сложения и умножения, также образуют линейное пространство. Обозначим его c_0.

7. Совокупность m всех ограниченных числовых последовательностей, с теми же операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4—6, тоже представляет собой линейное пространство.

8. Наконец, совокупность $\mathbf{R}^\infty$ всевозможных числовых последовательностей, с теми же самыми операциями сложения и умножения на числа, что и в примерах 4—7, тоже является линейным пространством.

Поскольку свойства линейного пространства — это свойства операций сложения элементов и умножения их на числа, естественно ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. Линейные пространства L и L^* называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями в L и L^*. Это означает, что из

$$x \leftrightarrow x^*,$$
$$y \leftrightarrow y^*$$

($x, y \in L$, $x^*, y^* \in L^*$) следует

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$

и

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

(α — произвольное число).

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации о д н о г о и т о г о же пространства. Примерами изоморфных линейных пространств могут служить арифметическое n-мерное пространство (действительное или комплексное) и пространство всех многочленов степени $\leqslant n - 1$ (соответственно с действительными или комплексными коэффициентами) с обычными

операциями сложения многочленов и умножения их на числа (докажите изоморфность!).

2. **Линейная зависимость.** Элементы x, y, ..., w линейного пространства L называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа α, β, ..., λ, не все равные 0, что

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = 0. \tag{2}$$

В противном случае эти элементы называются *линейно независимыми*. Иначе говоря, элементы x, y, ..., w линейно независимы, если из равенства (2) вытекает, что $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$.

Бесконечная система элементов x, y, ... пространства L называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет *размерность* n. Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L *бесконечномерно*. *Базисом* в n-мерном пространстве L называется любая система из n линейно независимых элементов. Пространства $\mathbf{R}^n$ в действительном случае и $\mathbf{C}^n$ в комплексном имеют, как легко проверить, размерность n, оправдывая тем самым свое название.

В курсе линейной алгебры рассматриваются линейные пространства конечной размерности. Наоборот, мы, как правило, будем заниматься пространствами бесконечного числа измерений, представляющими основной интерес с точки зрения анализа. Мы предоставляем читателю проверить, что каждое из пространств, указанных в примерах 3—8, имеет бесконечную размерность

3. **Подпространства.** Непустое подмножество L' линейного пространства L называется *подпространством*, если оно само образует линейное пространство по отношению к определенным в L операциям сложения и умножения на число.

Иначе говоря, $L' \subset L$ есть подпространство, если из $x \in L'$, $y \in L'$ следует, что $\alpha x + \beta y \in L'$ при любых α и β.

Во всяком линейном пространстве L имеется подпространство, состоящее из одного нуля, — нулевое под-

пространство. С другой стороны, все L можно рассматривать как свое подпространство. Подпространство, отличное от L и содержащее хотя бы один ненулевой элемент, называется *собственным*.

Приведем примеры собственных подпространств.

1. Пусть L — какое-либо линейное пространство и x — некоторый его ненулевой элемент. Совокупность элементов $\{\lambda x\}$, где λ пробегает все числа (соответственно действительные или комплексные), образует, очевидно, одномерное подпространство. Оно является собственным, если размерность L больше 1.

2. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ (пример 3 п. 1) и в нем совокупность всех многочленов $P[a, b]$. Ясно, что многочлены образуют в $C[a, b]$ подпространство (имеющее, как и все $C[a, b]$, бесконечную размерность). В то же время само пространство $C[a, b]$ можно рассматривать как подпространство более обширного пространства всех, непрерывных и разрывных, функций на $[a, b]$.

3. Рассмотрим, наконец, пространства l_2, c_0, c, m и $\mathbf{R}^\infty$ (примеры 4—8 п. 1). Каждое из них является собственным подпространством последующего.

Пусть $\{x_\alpha\}$ — произвольное непустое множество элементов линейного пространства L. Тогда в L существует наименьшее подпространство (быть может, совпадающее с L), которое содержит $\{x_\alpha\}$. Действительно, по крайней мере одно подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$, в L существует: это все L. Далее ясно, что *пересечение любого множества $\{L_\gamma\}$ подпространств есть снова подпространство*. В самом деле, если $L^* = \bigcap_\gamma L_\gamma$ и $x, y \in L^*$, то и $\alpha x + \beta y \in L^*$ при всех α, β. Возьмем теперь все подпространства, содержащие систему векторов $\{x_\alpha\}$, и рассмотрим их пересечение. Это и будет наименьшее подпространство, содержащее систему $\{x_\alpha\}$. Такое минимальное подпространство мы назовем *подпространством, порожденным множеством $\{x_\alpha\}$*, или *линейной оболочкой* множества $\{x_\alpha\}$. Мы будем обозначать это подпространство $L(\{x_\alpha\})$.

Упражнения. Линейно независимая система $\{x_\alpha\}$ элементов линейного пространства L называется *базисом Гамеля*, если ее линейная оболочка совпадает с L. Доказать следующие утверждения:

1) В каждом линейном пространстве существует базис Гамеля.

Указание. Использовать лемму Цорна.

2) Если $\{x_\alpha\}$ — базис Гамеля в L, то каждый вектор $x \in L$ единственным образом представляется в виде конечной линейной комбинации некоторых векторов системы $\{x_\alpha\}$.

3) Любые два базиса Гамеля в линейном пространстве равномощны; мощность базиса Гамеля линейного пространства иногда называют *алгебраической размерностью* этого пространства.

4) Линейные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую алгебраическую размерность.

4. Фактор-пространства. Пусть L — линейное пространство, и L' — некоторое его подпространство. Скажем, что два элемента x и y из L *эквивалентны*, если их разность $x - y$ принадлежит L'. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. определяет разбиение всех $x \in L$ на классы. Класс эквивалентных элементов называется *классом смежности* (по подпространству L'). Совокупность всех таких классов мы назовем *фактор-пространством* L по L' и обозначим L/L'.

В любом фактор-пространстве, естественно, вводятся операции сложения и умножения на числа. Именно, пусть ξ и η — два класса, представляющих собой элементы из L/L'. Выберем в каждом из этих классов по представителю, скажем, x и y соответственно, и назовем суммой классов ξ и η тот класс ζ, который содержит элемент $x + y$, а произведением класса ξ на число α тот класс, который содержит элемент αx. Легко проверить, что результат не изменится от замены представителей x и y какими-либо другими представителями x' и y' тех же классов ξ и η. Таким образом, мы действительно определили линейные операции над элементами фактор-пространства L/L'. Непосредственная проверка показывает, что эти операции удовлетворяют всем требованиям, содержащимся в определении линейного пространства (проведите эту проверку!). Иначе говоря, *каждое фактор-пространство* L/L' (с теми операциями сложения и умножения на числа, которые мы сейчас в нем определили) *представляет собой линейное пространство.*

Если L — пространство n измерений, а его подпространство L' имеет размерность k, то фактор-пространство L/L' имеет размерность $n - k$ (докажите это!).

Пусть L — произвольное линейное пространство и L' — некоторое его подпространство. Размерность фактор-пространства L/L' называется *коразмерностью* подпространства L' в пространстве L.

Если подпространство $L' \subset L$ имеет конечную коразмерность n, то в L можно выбрать элементы $x_1, \ldots, x_n$

так, что всякий элемент $x \in L$ будет (однозначно) представим в виде

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числа и $y \in L'$. Действительно, пусть фактор-пространство L/L' имеет размерность n. Выберем в этом фактор-пространстве базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и из каждого класса ξ_k выберем по представителю x_k. Пусть теперь x — любой элемент из L и ξ — тот класс в L/L', который содержит x. Тогда

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n.$$

По определению это значит, что каждый элемент из ξ, в частности x, отличается лишь на элемент из L' от такой же линейной комбинации элементов $x_1, \ldots, x_n$, т. е.

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + y.$$

Однозначность такой записи предоставляем доказать читателю.

5. Линейные функционалы. Числовую функцию f, определенную на некотором линейном пространстве L, мы будем называть *функционалом*. Функционал f называется *аддитивным*, если

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ для всех } x, y \in L;$$

он называется *однородным*, если

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \ (\alpha \text{ — произвольное число}).$$

Функционал f, определенный в комплексном линейном пространстве, называется *сопряженно-однородным*, если $f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$, где $\bar{\alpha}$ — число, комплексно сопряженное α.

Аддитивный однородный функционал называется *линейным функционалом*. Аддитивный сопряженно-однородный функционал называется *сопряженно-линейным*, а иногда *полулинейным*.

Укажем примеры линейных функционалов.

1. Пусть $\mathbf{R}^n$ есть n-мерное арифметическое пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — произвольный набор из n фиксированных чисел. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

— линейный функционал в $\mathbf{R}^n$. Выражение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i$$

представляет собой сопряженно-линейный функционал в $\mathbf{C}^n$.

2. Интегралы

$$I[x] = \int_a^b x(t)\,dt, \quad \overline{I}[x] = \int_a^b \overline{x(t)}\,dt$$

представляют собой соответственно линейный и сопряженно-линейный функционалы в пространстве $C[a, b]$.

3. Рассмотрим более общий пример. Пусть y_0 — некоторая фиксированная непрерывная функция на $[a, b]$. Положим для любой функции $x \in C[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, y_0(t)\,dt.$$

Линейность этого функционала следует из основных свойств операции интегрирования. Функционал

$$\overline{F}(x) = \int_a^b \overline{x(t)}\, y_0(t)\,dt$$

будет сопряженно-линейным (в комплексном пространстве $C[a, b]$).

4. Рассмотрим в том же самом пространстве $C[a, b]$ линейный функционал другого типа, а именно, положим $\delta_{t_0}(x) = x(t_0)$, так что значение функционала δ_{t_0} на функции x равно значению этой функции в фиксированной точке t_0.

Этот функционал обычно записывают в виде

$$\delta_{t_0}(x) = \int_a^b x(t)\,\delta(t - t_0)\,dt,$$

понимая под δ «функцию», которая равна нулю всюду, кроме точки $t = 0$, и интеграл от которой равен единице (δ-функция Дирака). Такие «функции» получили строгое определение в рамках теории обобщенных функций, элементы которой будут изложены в § 4 следующей главы.

5. Приведем пример линейного функционала в пространстве l_2. Пусть k — фиксированное целое положительное число. Для каждого $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ из l_2 положим $f_k(x) = x_k$. Линейность такого функционала очевидна. Эти функционалы допускают «распространение» на другие пространства последовательностей, например, на c_0, c, m, $\mathbf{R}^\infty$ (примеры 5—8 п. 1).

6. Геометрический смысл линейного функционала. Пусть f — некоторый отличный от тождественного нуля линейный функционал на линейном пространстве L. Совокупность тех элементов x из L, которые удовлетворяют условию

$$f(x) = 0,$$

представляет собой подпространство пространства L — *подпространство нулей* или *ядро* функционала f. Действительно, если $f(x) = f(y) = 0$, то

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0.$$

Это подпространство обозначается $\operatorname{Ker} f$ [1]).

Подпространство $\operatorname{Ker} f$ имеет коразмерность 1. Действительно, возьмем какой-либо элемент x_0, не входящий в $\operatorname{Ker} f$, т. е. такой элемент, что $f(x_0) \neq 0$. Такой элемент найдется, поскольку $f(x) \not\equiv 0$. Без ограничения общности можно считать, что $f(x_0) = 1$, ибо в противном случае мы заменили бы x_0 на $\frac{x_0}{f(x_0)}$. $\left(\text{Ясно, что } f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right) = 1.\right)$ Для каждого элемента x положим $y = x - f(x)\, x_0$; тогда $f(y) = f(x - f(x)\, x_0) = 0$, т. е. $y \in \operatorname{Ker} f$. Представление элемента x в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in \operatorname{Ker} f$, при фиксированном элементе x_0 единственно. В самом деле, пусть $x = \alpha x_0 + y$, $y \in \operatorname{Ker} f$, $x = \alpha' x_0 + y'$, $y' \in \operatorname{Ker} f$. Тогда $(\alpha - \alpha')\, x_0 = y' - y$. Если здесь $\alpha = \alpha'$, то очевидно, что $y' = y$. Если же $\alpha \neq \alpha'$, то $x_0 = \frac{y' - y}{\alpha - \alpha'} \in \operatorname{Ker} f$, что противоречит выбору x_0.

Отсюда следует, что два элемента x_1 и x_2 тогда и только тогда принадлежат одному классу смежности по подпространству $\operatorname{Ker} f$, когда $f(x_1) = f(x_2)$.

Действительно, из $x_1 = f(x_1)\, x_0 + y_1$, $x_2 = f(x_2)\, x_0 + y_2$ вытекает, что $x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2))\, x_0 + (y_1 - y_2)$. Отсюда видно, что $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker} f$ тогда и только

[1]) От английского слова kernel — ядро.

тогда, когда коэффициент при x_0, т. е. $f(x_1) - f(x_2)$, равен 0.

Всякий класс ξ по подпространству $\operatorname{Ker} f$ определяется любым из своих представителей. В качестве такого представителя можно взять элемент вида αx_0. Отсюда видно, что подпространство $L/\operatorname{Ker} f$ действительно одномерно, т. е. $\operatorname{Ker} f$ имеет коразмерность 1.

Подпространство $\operatorname{Ker} f$ определяет линейный функционал, обращающийся на нем в нуль, с точностью до постоянного множителя.

В самом деле, пусть функционалы f и g имеют одно и то же ядро: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Выберем элемент x_0 так, чтобы $f(x_0) = 1$. Мы утверждаем, что $g(x_0) \neq 0$. Действительно,

$$x = f(x)\, x_0 + y,\ y \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g,$$
$$g(x) = f(x)\, g(x_0) + g(y) = f(x)\, g(x_0).$$

Если бы значение $g(x_0)$ равнялось 0, то функционал g был бы тождественным нулем. Из равенства $g(x) = g(x_0) f(x)$ и вытекает пропорциональность функционалов g и f.

Для всякого подпространства L' коразмерности 1 можно указать такой функционал f, что $\operatorname{Ker} f = L'$. Достаточно выбрать произвольный элемент $x_0 \notin L'$ и представить каждый элемент $x \in L$ в виде $x = \alpha x_0 + y$. Такое представление единственно. Положив $f(x) = \alpha$, мы получим линейный функционал f, для которого $\operatorname{Ker} f = L'$ (проверить это!).

Пусть L' — какое-нибудь подпространство коразмерности 1 в линейном пространстве L; тогда всякий класс смежности пространства L по подпространству L' называется *гиперплоскостью*, параллельной подпространству L' (в частности, само подпространство L' является гиперплоскостью, содержащей 0, т. е. «проходящей через начало координат»). Иными словами, гиперплоскость M', параллельная подпространству L', — это множество, получающееся из L' параллельным переносом (сдвигом) на какой-нибудь вектор $x_0 \in L$:

$$M' = L' + x_0 = \{y: y = x + x_0,\ x \in L'\}.$$

Ясно, что если $x_0 \in L'$, то $M' = L'$; если же $x_0 \notin L'$, то $M' \neq L'$. Если f — нетривиальный линейный функционал на пространстве L, то множество $M_f = \{x: f(x) =$

$= 1\}$ является гиперплоскостью, параллельной подпространству $\operatorname{Ker} f$ (действительно, фиксируя какой-нибудь элемент x_0, для которого $f(x_0) = 1$, мы можем всякий вектор $x \in M_f$ представить в виде $x = x_0 + y$, где $y \in \operatorname{Ker} f$). С другой стороны, если M' — какая-нибудь гиперплоскость, параллельная подпространству L' (коразмерности 1) и не проходящая через начало координат, то существует единственный линейный функционал f такой, что $M' = \{x: f(x) = 1\}$. Действительно, пусть $M' = L' + x_0$, $x_0 \in L$; тогда всякий элемент $x \in L$ однозначно представим в виде $x = \alpha x_0 + y$, где $y \in L'$. Полагая, как и выше, $f(x) = \alpha$, мы получим искомый линейный функционал; единственность следует из того, что если $g(x) \equiv 1$ при $x \in M'$, то $g(y) \equiv 0$ при $y \in L'$, так что

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y).$$

Таким образом, *установлено взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными линейными функционалами, определенными на L, и всеми гиперплоскостями в L, не проходящими через начало координат.*

Упражнение. Пусть $f, f_1, \ldots, f_n$ — такие линейные функционалы на линейном пространстве L, что из $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$ вытекает $f(x) = 0$. Тогда существуют такие постоянные $a_1, \ldots, a_n$, что $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ для всех $x \in L$.

§ 2. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана — Банаха

1. Выпуклые множества и выпуклые тела. В основе многих важных разделов теории линейных пространств лежит понятие *выпуклости*. Оно опирается на наглядные геометрические представления, но вместе с тем допускает и чисто аналитическую формулировку.

Пусть L — некоторое линейное действительное пространство и x, y — две его точки. Назовем *замкнутым отрезком* в L, соединяющим точки x и y, совокупность всех элементов вида

$$\alpha x + \beta y, \text{ где } \alpha, \beta \geqslant 0, \ \alpha + \beta = 1.$$

Отрезок без концевых точек x и y называется *открытым отрезком*.

Множество $M \subset L$ называется *выпуклым*, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок.

Назовем *ядром* $J(E)$ произвольного множества $E \subset L$ совокупность таких точек x, что для каждого $y \in L$ найдется такое число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, что $x + ty \in E$ при $|t| < \varepsilon$.

Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется *выпуклым телом*.

Примеры. 1. В трехмерном евклидовом пространстве куб, шар, тетраэдр, полупространство представляют собой выпуклые тела. Отрезок, плоскость, треугольник в том же пространстве — выпуклые множества, но не выпуклые тела.

2. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ множество функций, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leqslant 1$. Это множество выпукло; действительно, если $|f(t)| \leqslant 1$ и $|g(t)| \leqslant 1$, то при $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$

$$|\alpha f(t) + \beta g(t)| \leqslant \alpha + \beta = 1.$$

Упражнение. Проверить, является ли это множество выпуклым телом.

3. Единичный шар в l_2, т. е. совокупность таких точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, что $\sum x_n^2 \leqslant 1$, есть выпуклое тело. Его ядро состоит из точек x, удовлетворяющих условию $\sum x_n^2 < 1$.

4. Основной параллелепипед Π в l_2 — выпуклое множество, но не выпуклое тело. В самом деле, пусть $x \in \Pi$; это означает, что $|x_n| \leqslant 1/2^{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Положим $y_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$. Пусть $x + ty_0 \in \Pi$, т. е. $|x_n + t/n| \leqslant 1/2^{n-1}$; тогда

$$\left|\frac{t}{n}\right| \leqslant \left|x_n + \frac{t}{n}\right| + |x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

откуда $t = 0$, т. е. ядро множества Π пусто.

Упражнения. 1. Пусть Φ — совокупность точек $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ из l_2, удовлетворяющих условию $\sum n^2 x_n^2 \leqslant 1$. Доказать, что Φ — выпуклое множество, но не выпуклое тело.

2. Доказать то же самое для множества точек в l_2, каждая из которых имеет лишь конечное число отличных от нуля координат.

Если M — выпуклое множество, то его ядро $J(M)$ тоже выпукло. Действительно, пусть $x, y \in J(M)$ и $z =$

$= \alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда для данного $a \in L$ найдутся такие $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, что при $|t_1| < \varepsilon_1$, $|t_2| < \varepsilon_2$ точки $x + t_1 a$ и $y + t_2 a$ принадлежат множеству M, следовательно, ему принадлежит и точка $\alpha(x + ta) + \beta(y + ta) = z + ta$ при $|t| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, т. е. $z \in J(M)$.

Установим следующее важное свойство выпуклых множеств.

Теорема 1. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Доказательство. Пусть $M = \bigcap_\alpha M_\alpha$ и все M_α — выпуклые множества. Пусть, далее, x и y — две произвольные точки из M. Тогда отрезок, соединяющий точки x и y, принадлежит каждому M_α, а следовательно, и M. Таким образом, M действительно выпукло.

Заметим, что пересечение выпуклых тел (будучи выпуклым множеством) не обязано быть выпуклым телом (приведите пример).

Для произвольного множества A в линейном пространстве L существует наименьшее выпуклое множество, которое его содержит; им будет пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A (по крайней мере одно выпуклое множество, содержащее A, существует — это все L). Минимальное выпуклое множество, содержащее A, мы назовем *выпуклой оболочкой* множества A.

Рассмотрим один важный пример выпуклой оболочки. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — точки некоторого линейного пространства. Мы скажем, что эти точки находятся в *общем положении*, если векторы $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$ линейно независимы. (Это равносильно тому, что из $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$ вытекает, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$). Выпуклая оболочка точек $x_1, \ldots, x_{n+1}$, находящихся в общем положении, называется n-мерным *симплексом*, а сами точки $x_1, \ldots, x_{n+1}$ — его вершинами. Нульмерный симплекс — это одна точка. Одномерный симплекс — отрезок, двумерный — треугольник, трехмерный — тетраэдр.

Если точки $x_1, \ldots, x_{n+1}$ находятся в общем положении, то любые $k + 1$ из них ($k < n$) также находятся в общем положении и, следовательно, порождают некоторый k-мерный симплекс, называемый *k-мерной гранью* данного n-мерного симплекса. Например, тетраэдр с вершинами

e_1, e_2, e_3, e_4 имеет четыре двумерные грани, определяемые соответственно тройками вершин (e_2, e_3, e_4), (e_1, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_4), (e_1, e_2, e_3), шесть одномерных граней и четыре нульмерных.

Теорема 2. *Симплекс с вершинами* $x_1, \ldots, x_{n+1}$ *есть совокупность всех точек, которые можно представить в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1. \tag{1}$$

Доказательство. Легко проверить, что совокупность S точек вида (1) представляет собой выпуклое множество, содержащее точки $x_1, \ldots, x_{n+1}$. С другой стороны, всякое выпуклое множество, содержащее эти точки, должно содержать и точки вида (1); следовательно, S является наименьшим выпуклым множеством, содержащим точки $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

2. Однородно-выпуклые функционалы. С понятием выпуклого множества тесно связано важное понятие однородно-выпуклого функционала. Пусть L — действительное линейное пространство. Определенный на L функционал p называется *выпуклым*, если

$$p(\alpha x + (1-\alpha) y) \leqslant \alpha p(x) + (1-\alpha) p(y) \tag{2}$$
$$\text{для всех } x, y \in L \text{ и } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Функционал p называется *положительно-однородным*, если

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \text{ для всех } x \in L \text{ и всех } \alpha > 0. \tag{3}$$

Для выпуклого положительно-однородного функционала выполнено неравенство:

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y). \tag{2'}$$

Действительно

$$p(x+y) = 2p\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant 2\left(p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(\frac{y}{2}\right)\right) =$$
$$= p(x) + p(y).$$

Легко понять, что условие (2') вместе с условием (3) обеспечивает выпуклость функционала p. Положительно-однородный выпуклый функционал мы будем называть короче *однородно-выпуклым*. Укажем некоторые простейшие свойства однородно-выпуклых функционалов.

1. Полагая в равенстве (3) $x = 0$, получаем

$$p(0) = 0. \tag{4}$$

2. Из (2′) и (4) следует, что

$$0 = p(x + (-x)) \leqslant p(x) + p(-x) \text{ для всех } x \in L. \tag{5}$$

Это неравенство означает, в частности, что если $p(x) < 0$, то обязательно $p(-x) > 0$. Таким образом, ненулевой однородно-выпуклый функционал может быть всюду неотрицателен, но если всюду $p(x) \leqslant 0$, то $p(x) \equiv 0$.

3. При любом α

$$p(\alpha x) \geqslant \alpha p(x).$$

При $\alpha > 0$ это следует из (3), при $\alpha = 0$ — из (4); если же $\alpha < 0$, то в силу (5) получаем

$$0 \leqslant p(\alpha x) + p(|\alpha| x) = p(\alpha x) + |\alpha| p(x),$$

т. е.

$$p(\alpha x) \geqslant -|\alpha| p(x) = \alpha p(x).$$

Примеры. 1. Всякий линейный функционал является, очевидно, однородно-выпуклым. Однородно-выпуклым будет и функционал $p(x) = |f(x)|$, если f линеен.

2. Длина вектора в n-мерном евклидовом пространстве есть однородно-выпуклый функционал. Здесь условие (2′) означает, что длина суммы двух векторов не превосходит суммы их длин (неравенство треугольника), а (3) непосредственно следует из определения длины вектора в $\mathbf{R}^n$.

3. Пусть m — пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Функционал

$$p(x) = \sup_n |x_n|$$

— однородно-выпуклый.

3. **Функционал Минковского.** Пусть L — произвольное линейное пространство и A — выпуклое тело в L, ядро которого содержит точку 0. Функционал

$$p_A(x) = \inf\left\{r: \frac{x}{r} \in A, r > 0\right\} \tag{6}$$

называется *функционалом Минковского* выпуклого тела A.

Теорема 3. *Функционал Минковского* (6) — *однородно-выпуклый и неотрицательный. Обратно, если* $p(x)$—

произвольный однородно-выпуклый неотрицательный функционал на линейном пространстве L и k — положительное число, то

$$A = \{x: p(x) \leqslant k\} \tag{7}$$

есть выпуклое тело, ядром которого служит множество $\{x: p(x) < k\}$ (*содержащее точку* 0). *Если в* (7) $k = 1$, *то исходный функционал* $p(x)$ *есть функционал Минковского для* A.

Доказательство. Для всякого $x \in L$ элемент x/r принадлежит A, если r достаточно велико; поэтому величина $p_A(x)$, определяемая равенством (6), неотрицательна и конечна. Проверим положительную однородность функционала (6). Если $t > 0$ и $y = tx$, то

$$p_A(y) = \inf\{r > 0: y/r \in A\} = \inf\{r > 0: tx/r \in A\} =$$
$$= \inf\{tr' > 0: x/r' \in A\} = t \inf\{r' > 0: x/r \in A\} = tp_A(x) \tag{8}$$

Проверим выпуклость $p_A(x)$. Пусть $x_1, x_2 \in L$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем числа r_i $(i = 1, 2)$ так, что $p_A(x_i) < r_i < p_A(x_i) + \varepsilon$; тогда $x_i/r_i \in A$. Положим $r = r_1 + r_2$, тогда точка $(x_1 + x_2)/r = r_1x_1/(rr_1) + r_2x_2/(rr_2)$ принадлежит отрезку с концами x_1/r_1 и x_2/r_2. В силу выпуклости A этот отрезок, а значит, и точка $(x_1 + x_2)/r$ принадлежат A, откуда

$$p_A(x_1 + x_2) \leqslant r = r_1 + r_2 < p_A(x_1) + p_A(x_2) + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно, то

$$p_A(x_1 + x_2) \leqslant p_A(x_1) + p_A(x_2).$$

Следовательно, $p_A(x)$ удовлетворяет условиям (2′) и (3), а потому это — неотрицательный однородно-выпуклый функционал.

Рассмотрим теперь множество (7). Если $x, y \in A$ и $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, то

$$p(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha p(x) + \beta p(y) \leqslant k,$$

т. е. A выпукло. Далее, пусть $p(x) < k$, $t > 0$ и $y \in L$, тогда

$$p(x \pm ty) \leqslant p(x) + tp(\pm y).$$

Если $p(-y) = p(y) = 0$, то $x \pm ty \in A$ при всех t; если же хотя бы одно из неотрицательных чисел $p(y)$, $p(-y)$ отлично от 0, то $x \pm ty \in A$ при

$$t < \frac{k - p(x)}{\max[p(y), p(-y)]}.$$

Непосредственно из введенных определений ясно, что p служит функционалом Минковского для множества $\{x: p(x) \leqslant 1\}$.

Итак, введя понятие функционала Минковского, мы установили соответствие между неотрицательными однородно-выпуклыми функционалами и выпуклыми телами с ядром, содержащим точку 0.

Примеры. 1. При $A = L$ имеем, очевидно,

$$p_L(x) \equiv 0.$$

2. Пусть A — шар с центром 0 и радиусом r в $\mathbf{R}^n$. Тогда

$$p_A(x) = \|x\|/r,$$

где $\|x\|$ — длина вектора x.

3. Пусть A — «слой» $-1 \leqslant x_1 \leqslant 1$ в пространстве l_2 последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Тогда

$$p_A(x) = |x_1|.$$

Замечания. 1. Иногда удобно рассматривать однородно-выпуклые функционалы, которые могут принимать не только конечные значения, но и значение $+\infty$ (но не $-\infty$). Тогда из равенства $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ (где $\alpha \geqslant 0$) следует, что $p(0) = 0$ или $p(0) = \infty$. Легко проверить, что в этом последнем случае можно, не нарушая однородной выпуклости функционала, изменить его значение в одной точке, положив $p(0) = 0$ вместо $p(0) = +\infty$. Так обычно и делают.

Если $p(x)$ — однородно-выпуклый, но не обязательно конечный, функционал, то $A = \{x: p(x) \leqslant k\}$ есть выпуклое множество, но не обязательно выпуклое тело. Обратно, если A — произвольное выпуклое множество, содержащее точку 0, то для него можно определить функционал Минковского формулой (6), но при этом придется для r допускать и значение $+\infty$.

2. Если $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — однородно-выпуклые функционалы, то таковы же $p_1(x) + p_2(x)$ и $\alpha p_1(x)$ при $\alpha > 0$.

Далее, если $\{p_s(x)\}_{s\in S}$ — произвольное семейство однородно-выпуклых функционалов, то таков и функционал $p(x) = \sup\limits_{s\in S} p_s(x)$. В частности, верхняя грань $p(x) = \sup\limits_{s\in S} f_s(x)$ любого непустого множества линейных функционалов на L есть однородно-выпуклый функционал. Воспользовавшись теоремой Хана — Банаха, легко показать, что так можно представить всякий (конечный) однородно-выпуклый функционал.

Упражнение. Множество A в линейном пространстве L называется *поглощающим*, если для всякого $x \in L$ существует такое $\alpha > 0$, что $x \in \lambda A$ для всех $\lambda \geqslant \alpha$. Доказать, что выпуклое множество A — поглощающее в том и только том случае, если его ядро содержит точку O.

4. Теорема Хана — Банаха. Пусть L — действительное линейное пространство и L_0 — некоторое его подпространство. Пусть, далее, на подпространстве L_0 задан некоторый линейный функционал f_0. Линейный функционал f, определенный на всем пространстве L, называется *продолжением* функционала f_0, если

$$f(x) = f_0(x) \text{ для всех } x \in L_0.$$

Задача о продолжении линейного функционала часто встречается в анализе. Основную роль во всем этом круге вопросов играет следующая теорема.

Теорема 4 (Хан — Банах). *Пусть p — однородно-выпуклый функционал, определенный на действительном линейном пространстве L, и пусть L_0 — линейное подпространство в L. Если f_0 — линейный функционал на L_0, подчиненный на L_0 функционалу $p(x)$,* т. е. *если на L_0*

$$f_0(x) \leqslant p(x), \tag{9}$$

то f_0 может быть продолжен до линейного функционала f на L, подчиненного $p(x)$ на всем L.

Доказательство. Покажем, что если $L_0 \neq L$, то функционал f_0 можно продолжить с L_0 на некоторое большее подпространство L' с сохранением условия (9). Действительно, пусть z — произвольный элемент из L, не принадлежащий L_0, и пусть L' — подпространство, порожденное L_0 и z. Каждый элемент из L' имеет вид $tz + x$, где $x \in L_0$.

Если f' — искомое продолжение функционала f_0 на L', то

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f_0(x),$$

или, если положить $f'(z) = c$,

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

Теперь выберем c так, чтобы сохранить на L' условие подчинения (9), т. е. так, чтобы при всех $x \in L_0$ и всех действительных t выполнялось неравенство $f_0(x) + tc \leqslant p(x + tz)$. При $t > 0$ оно равносильно условию

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \leqslant p\left(\frac{x}{t} + z\right), \text{ или } c \leqslant p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right),$$

а при $t < 0$ — условию

$$f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t} - z\right),$$

или

$$c \geqslant -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right).$$

Покажем, что всегда существует число c, удовлетворяющее этим двум условиям. Пусть y' и y'' — произвольные элементы из L_0. Тогда

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \geqslant -f_0(y') - p(-y' - z). \quad (10)$$

Это вытекает из неравенства

$$f_0(y'') - f_0(y') \leqslant p(y'' - y') = p((y'' + z) - (y' + z)) \leqslant$$
$$\leqslant p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

Положим

$$c'' = \inf_{y''} (-f_0(y'') + p(y'' + z)),$$

$$c' = \sup_{y'} (-f_0(y') - p(-y' - z)).$$

Из (9) в силу произвольности y' и y'' следует, что $c'' \geqslant c'$. Выбрав c так, что $c'' \geqslant c \geqslant c'$, определим функционал f' на L' формулой

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

Этот функционал удовлетворяет условию подчинения (9).

Итак, мы показали, что если функционал f_0 определен на некотором подпространстве $L_0 \subset L$ и удовлетворяет

на L_0 условию (9), то f_0 можно продолжить с сохранением этого условия на некоторое большее подпространство L'.

Если в L можно выбрать счетную систему элементов $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, порождающую все L, то функционал на L строим по индукции, рассматривая возрастающую цепочку подпространств

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\}, \quad L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\}, \ldots$$

(здесь $\{L^{(k)}, x_{k+1}\}$ означает минимальное линейное подпространство в L, содержащее $L^{(k)}$ и x_{k+1}). Тогда каждый элемент $x \in L$ войдет в некоторое $L^{(k)}$ и, следовательно, функционал будет продолжен на все L.

В общем случае (т. е. когда счетного множества, порождающего L, не существует) доказательство заканчивается применением леммы Цорна. Совокупность $\mathfrak{F}$ всевозможных продолжений функционала f_0, удовлетворяющих условию подчинения (9), частично упорядочена, и каждое ее линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{F}_0$ обладает верхней гранью; этой верхней гранью служит функционал, определенный на объединении областей определения функционалов $f' \in \mathfrak{F}_0$ и совпадающий с каждым таким f' на его области определения. В силу леммы Цорна во всем $\mathfrak{F}$ существует максимальный элемент f. Этот максимальный элемент f и представляет собой искомый функционал. Действительно, он является продолжением исходного функционала f_0, удовлетворяет условию (9) на своей области определения и задан на всем L, так как иначе мы продолжили бы его описанным выше способом с того собственного подпространства, на котором он определен, на бо́льшее подпространство, и f не был бы максимальным.

Теорема доказана.

Приведем еще комплексный вариант теоремы Хана — Банаха.

Неотрицательный функционал p на комплексном линейном пространстве L называется *однородно-выпуклым*, если для всех $x, y \in L$ и всех комплексных чисел λ

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y),$$
$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Теорема 4а. *Пусть p — однородно-выпуклый функционал на комплексном линейном пространстве L, а f_0 — линейный функционал, определенный на некотором*

линейном подпространстве $L_0 \subset L$ и удовлетворяющий на нем условию

$$|f_0(x)| \leqslant p(x), \quad x \in L_0.$$

Тогда существует линейный функционал f, определенный на всем L и удовлетворяющий условиям

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in L, \qquad f(x) = f_0(x), \quad x \in L_0.$$

Доказательство. Обозначим через L_R и L_{0R} пространства L и L_0, рассматриваемые как действительные линейные пространства. Ясно, что p — однородно-выпуклый функционал на L_R, а $f_{0R}(x) = \operatorname{Re} f_0(x)$ — действительный линейный функционал на L_{0R}, удовлетворяющий условию

$$|f_{0R}(x)| \leqslant p(x)$$

и, тем более, условию

$$f_{0R}(x) \leqslant p(x).$$

В силу теоремы 4 существует действительный линейный функционал f_R, определенный на всем L_R и удовлетворяющий условиям

$$f_R(x) \leqslant p(x), \qquad x \in L_R (= L),$$
$$f_R(x) = f_{0R}(x), \qquad x \in L_{0R} (= L_0).$$

Ясно, что $-f_R(x) = f_R(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$, так что

$$|f_R(x)| \leqslant p(x), \qquad x \in L_R (= L). \tag{11}$$

Определим функционал f на L, полагая

$$f(x) = f_R(x) - if_R(ix)$$

(здесь мы пользуемся тем, что L — комплексное линейное пространство, так что в нем определено умножение на комплексные числа). Непосредственная проверка показывает, что f — комплексный линейный функционал на L, причем

$$f(x) = f_0(x) \text{ при } x \in L_0,$$
$$\operatorname{Re} f(x) = f_R(x) \text{ при } x \in L.$$

Осталось показать, что $f|(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in L$. Допустим противное; тогда для некоторого $x_0 \in L$ имеем $|f(x_0)| > p(x_0)$. Представим комплексное число $f(x_0)$ в виде $f(x_0) = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho > 0$, и положим $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$.

Тогда $f_R(y_0) = \operatorname{Re} f(y_0) = \operatorname{Re}[e^{-i\varphi} f(x_0)] = \rho \geqslant p(x_0) = p(y_0)$, что противоречит условию (11).

Теорема доказана.

Упражнение. Покажите, что условие конечности функционала p в теореме Хана — Банаха можно опустить.

5. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве. Пусть L — действительное линейное пространство, а M и N — два его подмножества. Говорят, что определенный на L линейный функционал f *разделяет* эти множества, если существует такое число C, что

$$f(x) \geqslant C \quad \text{при} \quad x \in M \quad \text{и} \quad f(x) \leqslant C \quad \text{при} \quad x \in N,$$

т. е. если

$$\inf_{x \in M} f(x) \geqslant \sup_{x \in N} f(x).$$

Функционал f называется *строго разделяющим* множества M и N, если выполнено строгое неравенство

$$\inf_{x \in M} f(x) > \sup_{x \in N} f(x).$$

Следующие два утверждения непосредственно вытекают из определения разделимости.

1) Линейный функционал f разделяет множества M и N в том и только том случае, когда он разделяет множества $M - N$ и $\{0\}$ (т. е. множества всех элементов вида $x - y$, где $x \in M$, $y \in M$, и точку 0).

2) Линейный функционал f разделяет множества M и N в том и только том случае, когда при каждом $x \in L$ он разделяет множества $M - x$ и $N - x$.

Из теоремы Хана — Банаха легко получается следующая теорема об отделимости выпуклых множеств в линейном пространстве, имеющая многочисленные применения.

Теорема 5. *Пусть M и N — выпуклые множества в действительном линейном пространстве L, причем ядро хотя бы одного из них, скажем M, не пусто и не пересекается с другим множеством. Тогда существует ненулевой линейный функционал на L, разделяющий M и N.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точка 0 принадлежит ядру $\mathring{M}$ множества M. (Иначе мы рассмотрели бы множества $M - x_0$ и $N - x_0$, где $x_0 \in \mathring{M}$.) Пусть $y_0 \in N$, тогда точка $-y_0$

принадлежит ядру множества $M - N$, а 0 принадлежит ядру $\mathring{K}$ множества $K = M - N + y_0$. Так как $\mathring{M} \cap N = \varnothing$, то 0 не принадлежит ядру $M - N$ и $y_0 \notin \mathring{K}$. Пусть p — функционал Минковского для $\mathring{K}$. Тогда $p(y_0) \geqslant 1$, поскольку $y_0 \notin \mathring{K}$. Введем линейный функционал

$$f_0(\alpha y_0) = \alpha p(y_0).$$

Он определен на одномерном пространстве, состоящем из элементов вида αy_0, и удовлетворяет условию

$$f_0(\alpha y_0) \leqslant p(\alpha y_0),$$

поскольку $p(\alpha y_0) = \alpha p(y_0)$ при $\alpha \geqslant 0$, и $f_0(\alpha y_0) = \alpha f_0(y_0) < 0 < p(\alpha y_0)$ при $\alpha < 0$. По теореме Хана — Банаха функционал f_0 можно продолжить до линейного функционала f, определенного на всем L и удовлетворяющего на L условию $f(y) \leqslant p(y)$. Отсюда следует, что $f(y) \leqslant 1$ при $y \in K$ и в то же время $f(y_0) \geqslant 1$. Таким образом, f разделяет множества K и $\{y_0\}$, а следовательно, f разделяет $M - N$ и $\{0\}$; но тогда f разделяет множества M и N.

Теорема доказана.

§ 3. Нормированные пространства

В главе II мы занимались топологическими и, в частности, метрическими пространствами, т. е. множествами, в которых введено, тем или иным способом, понятие близости элементов, а в предыдущих параграфах данной главы мы имели дело с линейными пространствами. До сих пор каждое из этих понятий стояло особняком. Однако в анализе приходится иметь дело с пространствами, в которых введены как операции сложения элементов и умножения их на числа, так и некоторая топология, т. е. рассматривать так называемые *топологические линейные пространства*. Среди последних важный класс образуют *нормированные пространства*. Теория этих пространств была развита в работах С. Банаха и ряда других авторов.

1. Определение и примеры нормированных пространств. *Определение* 1. Пусть L — линейное пространство. Однородно-выпуклый функционал p, определенный

на L, называется *нормой*, если он удовлетворяет следующим дополнительным условиям (помимо выпуклости)

1) $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для всех α.

Таким образом, вспоминая определения из п. 2 § 2, мы можем сказать, что нормой в L называется функционал, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $p(x) \geqslant 0$, причем $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, $x, y \in L$,

3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, каково бы ни было число α.

Определение 2. Линейное пространство L, в котором задана некоторая норма, мы назовем *нормированным пространством*. Норму элемента $x \in L$ мы будем обозначать символом $\|x\|$.

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Справедливость аксиом метрического пространства тотчас же вытекает из свойств 1)—3) нормы. На нормированные пространства переносятся, таким образом, все те понятия и факты, которые были изложены в гл. II для метрических пространств.

Полное нормированное пространство называется *банаховым пространством* или, короче, *B-пространством*.

Примеры нормированных пространств. Многие из пространств, рассматривавшихся в гл. II в качестве примеров метрических (а в § 1 данной главы — линейных) пространств, в действительности могут быть наделены естественной структурой нормированного пространства.

1. Прямая линия $\mathbf{R}$ становится нормированным пространством, если для всякого числа $x \in \mathbf{R}$ положить $\|x\| = |x|$.

2. Если в действительном n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$ с элементами $x = (x_1, \ldots, x_n)$ положить

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \tag{1}$$

то все аксиомы нормы будут выполнены. Формула

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

определяет в $\mathbf{R}^n$ ту самую метрику, которую мы в этом пространстве уже рассматривали.

В этом же линейном пространстве можно ввести норму

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \tag{2}$$

или норму

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|. \tag{3}$$

Эти нормы определяют в $\mathbf{R}^n$ метрики, которые мы рассматривали в примерах 4 и 5 п. 1 § 1 гл. II. Проверка того, что в каждом из этих случаев аксиомы нормы действительно выполнены, не составляет труда.

В комплексном n-мерном пространстве $\mathbf{C}^n$ можно ввести норму

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

или любую из норм (2) или (3).

3. В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим норму формулой

$$\|f\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|. \tag{4}$$

Соответствующее расстояние уже рассматривалось в примере 6 п. 1 § 1 гл. II.

4. Пусть m — пространство ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Положим

$$\|x\| = \sup_n |x_n|. \tag{5}$$

Условия 1)—3) определения нормы здесь, очевидно, выполнены. Метрика, которая индуцируется в m этой нормой, совпадает с той, которую мы уже рассматривали (гл. II, § 1, п. 1, пример 9).

2. Подпространства нормированного пространства. Мы определили подпространство линейного пространства L (не снабженного какой-либо топологией) как непустое множество L_0, обладающее тем свойством, что если $x, y \in L_0$, то $\alpha x + \beta y \in L_0$. В нормированном пространстве основной интерес представляют *замкнутые* линейные подпространства, т. е. подпространства, содержащие все свои предельные точки. В конечномерном нормированном про-

странстве всякое подпространство автоматически замкнуто (докажите это!). В бесконечномерном случае это не так. Например, в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций с нормой (4) многочлены образуют подпространство, но не замкнутое [1]).

Другой пример: в пространстве m ограниченных последовательностей последовательности, содержащие лишь конечное число отличных от нуля членов, образуют подпространство. Однако оно не замкнуто по норме (5): в его замыкании содержится, например, последовательность $(1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$.

Как правило, мы будем рассматривать только замкнутые подпространства, поэтому естественно изменить терминологию, которая была установлена в § 1. *Подпространством* нормированного пространства мы будем называть теперь только *замкнутое* подпространство: в частности, подпространством, порожденным данной системой элементов $\{x_\alpha\}$, мы будем называть наименьшее *замкнутое* подпространство, содержащее $\{x_\alpha\}$. Мы будем говорить о нем, как о *линейном замыкании* системы $\{x_\alpha\}$. Совокупность элементов (не обязательно замкнутую), содержащую вместе с x и y их произвольную линейную комбинацию $\alpha x + \beta y$, будем называть *линейным многообразием*.

Систему элементов, лежащую в нормированном пространстве E, мы будем называть *полной*, если порожденное ею (замкнутое!) подпространство есть все E. Например, в силу теоремы Вейерштрасса совокупность всех функций $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ полна в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

3. Фактор-пространства нормированного пространства. Пусть R — нормированное пространство и M — некоторое его подпространство. Рассмотрим фактор-пространство $P = R/M$. В соответствии со сказанным в п. 4 § 1 этой главы P есть линейное пространство. Определим в нем норму, положив для каждого класса смежности ξ

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|. \tag{6}$$

Покажем, что при этом выполнены сформулированные

[1]) В силу теоремы Вейерштрасса, гласящей, что всякая непрерывная функция на отрезке есть предел равномерно сходящейся последовательности многочленов, замыкание подпространства многочленов в $C[a, b]$ есть все $C[a, b]$.

в п. 1 аксиомы нормированного пространства. Ясно, что всегда $\|\xi\| \geqslant 0$. Если ξ_0 — нулевой элемент факторпространства P (т. е. ξ_0 совпадает с подпространством M), то в качестве $x \in \xi_0$ можно взять нуль пространства R, и тогда получаем, что $\|\xi_0\| = 0$. Обратно, если $\|\xi\| = 0$, то из определения нормы (6) следует существование в классе ξ последовательности, сходящейся к нулю. Но так как M замкнуто, то замкнут и каждый класс смежности, значит, $0 \in \xi$, а это означает, что $\xi = M$, т. е. ξ есть нулевой элемент в P. Итак, $\|\xi\| \geqslant 0$ и $\|\xi\| = 0$ лишь тогда, когда ξ — нуль пространства P.

Далее, для всякого $x \in R$ и всякого α имеем

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

Беря в обеих частях этого равенства нижнюю грань по $x \in \xi$, получаем

$$\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|.$$

Наконец, пусть $\xi, \eta \in P$ и $x \in \xi$, $y \in \eta$. Тогда

$$\|\xi + \eta\| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Беря в правой части этого неравенства нижнюю грань по всем $x \in \xi$, $y \in \eta$, получаем, что

$$\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|.$$

Итак, все аксиомы нормированного пространства для P выполнены. Покажем теперь, что если R полно, то и $P = R/M$ полно. Действительно, согласно (6) для каждого $\xi \in R/M$ найдется такой элемент $x \in \xi$, что

$$\|\xi\| \geqslant \frac{1}{2}\|x\|.$$

Пусть $\{\xi_n\}$ — фундаментальная последовательность в P. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_{n+1} - \xi_n\|$$

сходится. Добавив к $\{\xi_n\}$ еще ξ_0 — нулевой элемент пространства P, — выберем $x_n \in \xi_{n+1} - \xi_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) так, что

$$\|\xi_{n+1} - \xi_n\| \geqslant \frac{1}{2}\|x_n\|.$$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \| x_n \|$ сходится, а значит, в силу полноты пространства R сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Положив $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ и обозначив через ξ класс, содержащий x, получим (поскольку $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \in \xi_n$ при каждом n)

$$\| \xi - \xi_n \| \leqslant \left\| x - \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т. е. $\xi = \lim_{n \to \infty} \xi_n$. Итак:

фактор-пространство банахова пространства по любому его (замкнутому) подпространству есть банахово пространство.

Упражнения. 1. Пусть R — банахово пространство, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров в нем. Докажите, что она имеет непустое пересечение (не предполагается, что радиусы этих шаров стремятся к 0; ср. с упражнением 3 на с. 83). Приведите пример последовательности вложенных непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств в некотором B-пространстве, имеющих пустое пересечение.

2. Пусть R — бесконечномерное B-пространство; тогда его алгебраическая размерность (см. упражнение 3 на с. 144) несчетна.

3. Пусть R — линейное нормированное пространство; доказать справедливость следующих утверждений:

1) всякое конечномерное линейное многообразие в R замкнуто;

2) если M — подпространство, а N — конечномерное подпространство в R, то их сумма

$$M + N = \{x: x = y + z,\ y \in M,\ z \in N\}$$

замкнута; привести пример двух (замкнутых) линейных подпространств в l_2, сумма которых не замкнута;

3) пусть Q — открытое выпуклое множество в R, и пусть $x_0 \notin Q$; тогда существует гиперплоскость, проходящая через точку x_0 и не пересекающая Q.

4. Две нормы, $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$, в линейном пространстве R называются *эквивалентными*, если существуют такие постоянные a, $b > 0$, что $a \| x \|_1 \leqslant \| x \|_2 \leqslant b \| x \|_1$ для всех $x \in R$. Доказать, что если пространство R конечномерно, то любые две нормы в нем эквивалентны.

§ 4. Евклидовы пространства

1. Определение евклидовых пространств. Один из хорошо известных способов введения нормы в линейном пространстве — это задание в нем скалярного произведения. Напомним, что *скалярным произведением* в действи-

тельном линейном пространстве R называется действительная функция (x, y), определенная для каждой пары элементов $x, y \in R$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$,
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. В евклидовом пространстве R вводится норма с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Из свойств 1)—4) скалярного произведения следует, что все аксиомы нормы при этом выполнены.

Действительно, выполнение аксиом 1) и 3) нормы (п. 1 § 3) очевидно, а выполнение аксиомы 2) (неравенство треугольника) вытекает из *неравенства Коши — Буняковского*

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|, \tag{1}$$

которое мы сейчас докажем.

Рассмотрим квадратный трехчлен от действительной переменной λ, неотрицательный при всех значениях λ:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x, x) + 2\lambda (x, y) + (y, y) = \\ = \|x\|^2 \lambda^2 + 2 (x, y) \lambda + \|y\|^2.$$

Так как это выражение представляет собой скалярный квадрат некоторого вектора, то $\varphi(\lambda) \geqslant 0$ при всех λ. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена меньше или равен нулю, т. е. $4 (x, y)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в евклидовом пространстве сумма, произведение на число и скалярное произведение непрерывны, т. е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \to \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \to x + y,$$
$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$
$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

Доказательство этих фактов основано на использовании неравенства Коши — Буняковского (1) и предоставляется читателю в качестве упражнения.

Наличие в R скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т. е. длину) вектора, но и угол между векторами: именно, угол φ между векторами x и y определяется формулой

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\cdot\|y\|}. \tag{2}$$

При этом из неравенства Коши — Буняковского (1) вытекает, что выражение, стоящее в (2) справа, по модулю не превосходит 1 и, следовательно, формула (2) действительно для любых ненулевых x и y определяет некоторый угол φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Если $(x, y) = 0$, то из (2) получаем, что $\varphi = \pi/2$; в этом случае векторы x и y называются *ортогональными*.

Система ненулевых векторов $\{x_\alpha\}$ из R называется *ортогональной*, если

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

Если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы. В самом деле, пусть

$$a_1 x_{\alpha_1} + a_2 x_{\alpha_2} + \ldots + a_n x_{\alpha_n} = 0;$$

поскольку $\{x_\alpha\}$ — ортогональная система, имеем

$$(x_{\alpha_i}, a_1 x_{\alpha_1} + \ldots + a_n x_{\alpha_n}) = a_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) = 0,$$

но $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}) \neq 0$ и, значит, $a_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ *полна* (т. е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все R), то она называется *ортогональным базисом*. Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система $\{x_\alpha\}$ называется *ортогональным нормированным базисом*. Вообще, если система $\{x_\alpha\}$ (полная или нет) такова, что

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при } \alpha = \beta, \end{cases}$$

то она называется *ортогональной нормированной* (короче *ортонормальной*) *системой*. Ясно, что если $\{x_\alpha\}$ — ортогональная система, то $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ — ортогональная нормированная система.

2. Примеры. Рассмотрим некоторые примеры евклидовых пространств и ортогональных базисов в них.

1. n-мерное арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$, с обычными операциями сложения и умножения и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{3}$$

представляет собой хорошо известный пример евклидова пространства. Ортогональный нормированный базис в нем (один из бесконечного числа возможных) образуют векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

2. Пространство l_2 с элементами

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots), \text{ где } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \tag{4}$$

есть евклидово пространство. Действительно, сходимость ряда, стоящего в (4) справа, следует из неравенства (4) гл. II, § 1. Свойства 1)—4) скалярного произведения проверяются непосредственно. Простейший ортогональный нормированный базис в l_2 образуют векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Ортогональность и нормированность этой системы ясны вместе с тем система (5) полна: пусть $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ — любой вектор из l_2 и $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Тогда

$x^{(n)}$ есть линейная комбинация векторов $e_1, \ldots, e_n$ и $\| x^{(n)} - x \| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Пространство $C_2[a, b]$, состоящее из непрерывных на $[a, b]$ действительных функций, со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{6}$$

также является евклидовым. Среди различных ортогональных базисов, которые можно указать в нем, важнейшим является тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos n \frac{2\pi t}{b-a}, \quad \sin n \frac{2\pi t}{b-a}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Ортогональность этой системы проверяется непосредственно.

Если рассматриваются непрерывные функции на отрезке длины 2π, скажем, на $[-\pi, \pi]$, то соответствующая тригонометрическая система есть: $1/2$, $\cos nt$, $\sin nt$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

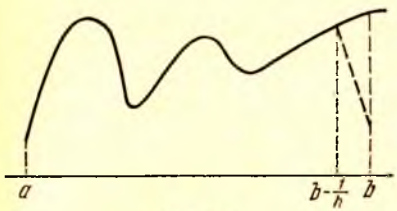


Рис. 17

Система (7) полна. Действительно, согласно теореме Вейерштрасса, всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция φ, принимающая в точках a и b одинаковые значения, может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности тригонометрических многочленов, т. е. линейных комбинаций элементов системы (7). Такая последовательность и подавно сходится к φ по норме пространства $C_2[a, b]$. Если же f — произвольная функция из $C_2[a, b]$, то ее можно представить как предел (по норме пространства $C_2[a, b]$) последовательности функций φ_n, каждая из которых совпадает с f на отрезке $[a, b - 1/n]$, линейна на $[b - 1/n, b]$ и в точке b принимает то же значение, что и в точке a (рис. 17). Следовательно, каждый элемент из $C_2[a, b]$ можно приблизить сколь угодно точно (в метрике этого пространства) линейными комбинациями элементов системы (7), а это и означает ее полноту.

3. Существование ортогональных базисов, ортогонализация. На протяжении оставшейся части этого параграфа мы ограничимся сепарабельными евклидовыми пространствами (т. е. содержащими счетное всюду плотное множество). Каждое из пространств, указанных в предыдущем пункте, сепарабельно (докажите это!). Пример несепарабельного евклидова пространства можно построить так. Рассмотрим на прямой всевозможные функции x, для каждой из которых множество точек t_1, t_2, ..., в которых она отлична от нуля, не более чем счетно, а сумма $\sum x^2(t)$, взятая по всем таким точкам, конечна. Операции сложения и умножения на числа определим в этом пространстве как обычные сложение и умножение функций, а скалярное произведение определим формулой

$$(x, y) = \sum x(t)\, y(t),$$

где сумма берется по множеству тех точек t, в которых $x(t)\, y(t) \neq 0$. Доказательство того, что в этом пространстве нет счетного всюду плотного подмножества, мы предоставляем читателю. Отметим, что это пространство — полное.

Итак, пусть R — сепарабельное евклидово пространство. Покажем, *что в таком пространстве всякая ортогональная система не более чем счетна.*

Действительно, без ограничения общности можно считать рассматриваемую систему $\{\varphi_\alpha\}$ не только ортогональной, но и нормированной (иначе мы заменили бы ее системой $\{\varphi_\alpha/\|\varphi_\alpha\|\}$). При этом

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{2}, \quad \text{если} \quad \alpha \neq \beta.$$

Рассмотрим совокупность шаров $B(\varphi_\alpha, 1/2)$. Эти шары не пересекаются. Если счетное множество $\{\psi_n\}$ всюду плотно в R, то в каждом таком шаре есть по крайней мере один элемент из $\{\psi_n\}$. Следовательно, число таких шаров (а значит, и элементов φ_α) не более чем счетно.

В каждом из приведенных выше примеров евклидовых пространств мы указали по ортогональному базису. Докажем теперь следующую общую теорему, аналогичную теореме о существовании ортогонального базиса в n-мерном евклидовом пространстве.

Теорема 1 (об ортогонализации). *Пусть*

$$f_1, \ldots, f_n, \ldots \tag{8}$$

— линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве R. Тогда в R существует система элементов

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{9}$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) *система* (9) *ортогональная и нормированная*;

2) *каждый элемент* φ_n *есть линейная комбинация элементов* $f_1, \ldots, f_n$:

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nn}f_n,$$

причем $a_{nn} \neq 0$;

3) *каждый элемент* f_n *представляется в виде*

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad \text{причем} \quad b_{nn} \neq 0.$$

Каждый элемент системы (9) *определяется условиями* 1)—3) *однозначно с точностью до множителя* ± 1.

Доказательство. Элемент φ_1 ищется в виде $\varphi_1 = a_{11}f_1$; при этом a_{11} определяется из условия

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a_{11}^2 (f_1, f_1) = 1,$$

откуда

$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{(f_1, f_1)}}.$$

Ясно, что φ_1 определяется этим однозначно (с точностью до знака). Пусть элементы φ_k $(k < n)$, удовлетворяющие условиям 1)—3), уже построены. Тогда f_n можно представить в виде

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{n,\,n-1}\varphi_{n-1} + h_n,$$

где

$$(h_n, \varphi_k) = 0 \text{ при } k < n.$$

Действительно, соответствующие коэффициенты b_{hk}, а значит, и элемент h_n, однозначно определяются из условий

$$(h_n, \varphi_k) = (f_n - b_{n1}\varphi_1 - \ldots - b_{n,\,n-1}\varphi_{n-1}, \varphi_k) =$$
$$= (f_n, \varphi_k) - b_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) = 0.$$

Очевидно, что $(h_n, h_n) > 0$ (предположение $(h_n, h_n) = 0$ противоречило бы линейной независимости системы (8)). Положим

$$\varphi_n = \frac{h_n}{\sqrt{(h_n, h_n)}}.$$

Из индуктивного построения ясно, что h_n, а значит, и φ_n, выражаются через $f_1, \ldots, f_n$, т. е. $\varphi_n = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nn}f_n$, где $a_{nn} = \dfrac{1}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \neq 0$. Кроме того,

$$(\varphi_n, \varphi_n) = 1, \quad (\varphi_n, \varphi_k) = 0, \quad k < n,$$

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad b_{nn} = \sqrt{(h_n, h_n)} \neq 0,$$

т. е. φ_n удовлетворяет условиям теоремы.

Переход от системы (8) к системе (9), удовлетворяющей условиям 1)—3), называется *процессом ортогонализации*.

Ясно, что подпространства, порожденные системами (8) и (9), совпадают между собой. Следовательно, эти системы полны или не полны одновременно.

Следствие. *В сепарабельном евклидовом пространстве R существует ортогональный нормированный базис.*

Действительно, пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в R. Выберем из него полную систему линейно независимых элементов $\{f_n\}$. Для этого достаточно из последовательности $\{\psi_n\}$ исключить все те элементы ψ_k, каждый из которых может быть представлен как линейная комбинация ψ_i с $i < k$. Применив к полученной таким образом полной системе линейно независимых элементов процесс ортогонализации, мы и построим ортогональный нормированный базис.

Упражнения. 1. Привести пример (несепарабельного) евклидова пространства, в котором нет ни одного ортогонального базиса. Доказать, что в полном евклидовом пространстве (не обязательно сепарабельном) существует ортогональный нормированный базис.

2. Доказать, что в полном евклидовом пространстве (не обязательно сепарабельном) всякая последовательность непустых вложенных выпуклых замкнутых ограниченных множеств имеет непустое пересечение (ср. с упражнениями на с. 83 и 166).

4. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы. Выбрав в n-мерном евклидовом пространстве ортогональный нормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, можно каждый вектор $x \in \mathbf{R}^n$ записать в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{10}$$

где

$$c_k = (x, e_k). \tag{11}$$

Выясним, как обобщить разложение (10) на случай евклидова бесконечномерного пространства. Пусть

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{12}$$

— ортогональная нормированная система в евклидовом пространстве R и f — произвольный элемент из R. Сопоставим элементу $f \in R$ последовательность чисел

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{13}$$

числа c_k мы будем называть *координатами*, или *коэффициентами Фурье* элемента f по системе $\{\varphi_k\}$, и ряд (пока формальный)

$$\sum_k c_k \varphi_k, \tag{14}$$

который мы назовем *рядом Фурье* элемента f по системе $\{\varphi_n\}$.

Естественно возникает вопрос: сходится ли ряд (14), т. е. стремится ли последовательность его частичных сумм (в смысле метрики пространства R) к какому-либо пределу, и если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f?

Чтобы ответить на эти вопросы, рассмотрим предварительно следующую задачу: при заданном n подобрать коэффициенты α_k $(k = 1, \ldots, n)$ так, чтобы расстояние между f и суммой

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{15}$$

было минимальным. Вычислим это расстояние. Так как система (12) ортогональна и нормирована, то

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) =$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k,\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_j\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Ясно, что минимум этого выражения достигается тогда, когда последнее слагаемое равно 0, т. е. при

$$\alpha_k = c_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

В этом случае

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \tag{17}$$

Мы показали, что среди всех сумм вида (15) при данном n наименее уклоняется от f частичная сумма ряда Фурье элемента f. Геометрически этот результат можно пояснить следующим образом. Элемент

$$f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

ортогонален всем линейным комбинациям вида

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k,$$

т. е. ортогонален подпространству, порожденному элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в том и только том случае, когда выполняется условие (16) (проверьте это!). Таким образом, полученный нами результат представляет собой обобщение известной теоремы элементарной геометрии: длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую или плоскость, меньше, чем длина любой наклонной, проведенной из той же точки.

Так как всегда $\|f - S_n\|^2 \geqslant 0$, то из равенства (17) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Здесь n произвольно, а правая часть не зависит от n; следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{18}$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя*. Геометрически оно означает, что сумма квадратов проекций вектора f на взаимно ортогональные направления не превосходит квадрата длины самого вектора f.

Введем следующее важное понятие.

Определение 1. Ортогональная нормированная система (12) называется *замкнутой*, если для любого $f \in R$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \tag{19}$$

называемое *равенством Парсеваля*.

Из тождества (17) следует, что замкнутость системы (12) равносильна тому, что для каждого $f \in R$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ сходятся к f.

Понятие замкнутости ортогональной нормированной системы тесно связано с введенным выше понятием полноты системы.

Теорема 2. *В сепарабельном евклидовом пространстве R всякая полная ортогональная нормированная система является замкнутой, и обратно.*

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ замкнута; тогда, каков бы ни был элемент $f \in R$, последовательность частичных сумм его ряда Фурье сходится к f. Это означает, что линейные комбинации элементов системы $\{\varphi_n\}$ всюду плотны в R, т. е. система $\{\varphi_n\}$ полна. Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ полна, т. е. любой элемент $f \in R$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ элементов системы $\{\varphi_n\}$; частичная сумма $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ ряда Фурье для f дает не менее точную аппроксимацию. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ сходится к f, и равенство Парсеваля имеет место.

В предыдущем пункте мы доказали существование полных ортогональных нормированных систем в сепарабельном евклидовом пространстве. Поскольку для ортогональных нормированных систем понятия замкнутости и полноты совпадают, существование замкнутых ортогональных систем в R не нуждается в новом доказательстве, а приведенные в предыдущем пункте примеры полных ортогональных нормированных систем являются в то же время примерами замкнутых систем.

Выше мы все время предполагали рассматриваемые ортогональные системы нормированными. Можно пере-

формулировать понятия коэффициентов Фурье, ряда Фурье и т. д. и для любых ортогональных систем. Пусть $\{\varphi_n\}$ — произвольная ортогональная система. По ней можно построить нормированную систему, состоящую из элементов $\psi_n = \varphi_n/\|\varphi_n\|$. Для любого $f \in R$ имеем

$$c_n = (f, \psi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|}(f, \varphi_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\|\varphi_n\|}\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n,$$

где

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{20}$$

Коэффициенты a_n, определяемые формулой (20), мы назовем *коэффициентами Фурье* элемента f по ортогональной (ненормированной) системе $\{\varphi_n\}$. Подставив в неравенство (18) вместо c_n их выражения $c_n = a_n\|\varphi_n\|$ из (20), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 a_n^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{21}$$

— неравенство Бесселя для произвольной ортогональной системы.

5. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса—Фишера. Начиная с п. 3 мы рассматривали сепарабельные евклидовы пространства; с этого момента мы будем, кроме того, предполагать, что рассматриваемые пространства полны.

Итак, пусть R — полное сепарабельное евклидово пространство и $\{\varphi_n\}$ — некоторая ортогональная нормированная система в нем (не обязательно полная). Из неравенства Бесселя следует, что для того чтобы числа $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ служили коэффициентами Фурье какого-либо элемента $f \in R$, необходимо, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

сходился. Оказывается, что в полном пространстве это условие не только необходимо, но и достаточно. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (Рисс — Фишер). *Пусть* $\{\varphi_n\}$ — *произвольная ортогональная нормированная система в полном евклидовом пространстве* R, *и пусть числа*

$$c_1, \ldots, c_n, \ldots$$

таковы, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \tag{22}$$

сходится. Тогда существует такой элемент $f \in R$, *что*

$$c_k = (f, \varphi_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f) = \|f\|^2.$$

Доказательство. Положим

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k.$$

Тогда

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Так как ряд (22) сходится, то отсюда в силу полноты R вытекает сходимость последовательности $\{f_n\}$ к некоторому элементу $f \in R$. Далее

$$(f, \varphi_i) = (f_n, \varphi_i) + (f - f_n, \varphi_i), \tag{23}$$

причем справа первое слагаемое при $n \geqslant i$ равно c_i, а второе стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$|(f - f_n, \varphi_i)| \leqslant \|f - f_n\| \cdot \|\varphi_i\|.$$

Левая часть равенства (23) от n не зависит; поэтому, переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

Так как, по определению f,

$$\|f - f_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (f, f).$$

Действительно,

$$\left(f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right) = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

при $n \to \infty$.

Установим в заключение следующую полезную теорему.

Теорема 4. *Для того чтобы ортогональная нормированная система* $\{\varphi_n\}$ *в полном сепарабельном евклидовом пространстве была полна, необходимо и достаточно, чтобы в* R *не существовало ненулевого элемента, ортогонального всем элементам системы* $\{\varphi_n\}$.

Доказательство. Пусть система $\{\varphi_n\}$ полна и, следовательно, замкнута. Если f ортогонален всем элементам системы $\{\varphi_n\}$, то все его коэффициенты Фурье равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля получаем

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0,$$

т. е. $f = 0$.

Обратно, пусть система $\{\varphi_n\}$ не полна. Тогда в R существует такой элемент $g \neq 0$, что

$$(g, g) > \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad \text{где } c_k = (g, \varphi_k).$$

На основании теоремы Рисса — Фишера существует такой элемент $f \in R$, что

$$(f, \varphi_k) = c_k, \quad (f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Элемент $f - g$ ортогонален всем φ_i. Из неравенства

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < (g, g)$$

следует, что $f - g \neq 0$.

Упражнения. 1. Пусть H — полное евклидово пространство (не обязательно сепарабельное); тогда в нем существует полная ортогональная нормированная система $\{\varphi_\alpha\}$ (см. упражнение 1 на с. 173). Доказать, что для всякого вектора $f \in H$ справедливы разложения

$$f = \sum_{\alpha} (f, \varphi_\alpha)\varphi_\alpha, \quad \|f\|^2 = \sum_{\alpha} (f, \varphi_\alpha)^2,$$

где в суммах, стоящих справа, имеется не более счетного числа отличных от 0 слагаемых.

2. Система $\{\varphi_\alpha\}$ векторов евклидова пространства R называется *тотальной*, если в R не существует отличных от 0 векторов, ортогональных ко всем φ_α. Теорема 4 означает, что в полном евклидовом пространстве тотальность системы векторов эквивалентна ее полноте. Показать, что в неполных пространствах могут существовать тотальные, но не полные системы.

6. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме. Продолжим рассмотрение полных евклидовых пространств. При этом нас, как и до сих пор, будут интересовать бесконечномерные пространства, а не конечномерные, исчерпывающее описание которых дается в курсах линейной алгебры. По-прежнему мы, как правило, будем предполагать наличие в рассматриваемых пространствах счетного всюду плотного множества. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 2. Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется *гильбертовым пространством* [1]).

Таким образом, гильбертовым пространством называется совокупность H элементов f, g, ... произвольной природы, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам).

I. H есть евклидово пространство (т. е. линейное пространство с заданным в нем скалярным произведением).

II. Пространство H п о л н о в смысле метрики $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

III. Пространство H б е с к о н е ч н о м е р н о, т. е. в нем для любого n можно найти n линейно независимых элементов.

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, т. е. пространства, удовлетворяющие еще одной аксиоме.

IV. H с е п а р а б е л ь н о, т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество.

Примером сепарабельного гильбертова пространства может служить действительное пространство l_2.

В дальнейшем мы будем рассматривать только сепарабельный случай.

---

[1]) По имени знаменитого немецкого математика Д. Гильберта (1862—1943), который ввел это понятие.

Аналогично определению 2 из § 1 два евклидовых пространства, R и R^*, называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если

$$x \leftrightarrow x^*, \quad y \leftrightarrow y^*,$$
$$x, y \in R; \quad x^*, y^* \in R^*,$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*,$$
$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

и

$$(x, y) = (x^*, y^*).$$

Иначе говоря, изоморфизм евклидовых пространств — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение.

Как известно, любые два n-мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и, следовательно, каждое такое пространство изоморфно арифметическому пространству $\mathbf{R}^n$ (пример 1, п. 2). Евклидовы пространства бесконечного числа измерений не обязательно изоморфны друг другу. Например, пространства l_2 и $C_2\{a, b\}$ между собой не изоморфны. Это видно, например, из того, что первое из них полно, а второе — нет.

Однако имеет место следующий факт.

Теорема 5. *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Покажем, что каждое гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2. Тем самым будет доказано утверждение теоремы. Выберем в H произвольную полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и поставим в соответствие элементу $f \in H$ совокупность $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ его коэффициентов Фурье по этой системе. Так как $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то последовательность $(c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ есть некоторый элемент из l_2. Обратно, в силу теоремы Рисса — Фишера всякому элементу $(c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ из l_2 отвечает некоторый элемент $f \in H$, имеющий числа $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ своими коэффициентами Фурье. Уста-

новленное соответствие между элементами из H в l_2 взаимно однозначно. Далее, если

$$f \leftrightarrow (c_1, \ldots, c_n, \ldots),$$
$$g \leftrightarrow (d_1, \ldots, d_n, \ldots),$$

то

$$f + g \leftrightarrow (c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n, \ldots),$$
$$\alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \ldots, \alpha c_n, \ldots),$$

т. е. сумма переходит в сумму, а произведение на число — в произведение соответствующего элемента на это же число. Наконец, из равенства Парсеваля следует, что

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n. \tag{24}$$

Действительно, из того, что

$$(f, f) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad (g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2,$$

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$$

вытекает (24). Таким образом, установленное нами соответствие между элементами пространств H и l_2 действительно является изоморфизмом.

Доказанная теорема означает, что, с точностью до изоморфизма, существует л и ш ь о д н о (сепарабельное) гильбертово пространство (т. е. система аксиом I—IV полна) и что пространство l_2 можно рассматривать как его «координатную реализацию», подобно тому как n-мерное арифметическое пространство со скалярным произведением $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ представляет собой координатную реализацию евклидова пространства n измерений, заданного аксиоматически.

Другую реализацию гильбертова пространства можно получить, взяв функциональное пространство $C_2[a, b]$ и рассмотрев его пополнение. Действительно, легко проверить, что пополнение R^* всякого евклидова пространства R (в том смысле, как мы определили пополнение

метрического пространства в § 3 гл. II) становится линейным евклидовым пространством, если в нем определить линейные операции и скалярное произведение, продолжая их по непрерывности с пространства R, т. е. полагая

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n), \quad \alpha x = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n,$$
$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n),$$

где $x_n \to x$ и $y_n \to y$, $x_n, y_n \in R$. (Существование всех этих пределов и их независимость от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ легко устанавливается.) Тогда пополнение пространства $C_2[a, b]$ будет полным евклидовым пространством, очевидно, бесконечномерным и сепарабельным, т. е. гильбертовым пространством. В главе VII мы вернемся к этому вопросу и покажем, что те элементы, которые нужно присоединить к $C_2[a, b]$, чтобы получить полное пространство, тоже можно представить как функции, но только уже не непрерывные (а именно, как функции, квадрат которых суммируем в смысле Лебега).

7. Подпространства, ортогональные дополнения, прямая сумма. В соответствии с общими определениями § 3 *линейным многообразием* в гильбертовом пространстве H мы назовем такую совокупность L элементов из H, что если $f, g \in L$, то $\alpha f + \beta g \in L$ для любых чисел α и β. Замкнутое линейное многообразие называется *подпространством*. Приведем некоторые примеры подпространств гильбертова пространства.

1. Пусть h — произвольный элемент из H. Совокупность всех элементов $f \in H$, ортогональных к h, образует в H подпространство.

2. Пусть H реализовано как l_2, т. е. его элементы суть такие последовательности $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ чисел, что $\sum_k x_k^2 < \infty$. Элементы, подчиненные условию $x_1 = x_2$, образуют подпространство.

3. Пусть снова H реализовано как пространство l_2. Элементы $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, у которых $x_n = 0$ при $n = 2, 4, 6, \ldots$ (и x_n произвольны при $n = 1, 3, 5, \ldots$), образуют подпространство.

Читателю рекомендуется проверить, что указанные в примерах 1—3 совокупности векторов действительно являются подпространствами.

Всякое подпространство гильбертова пространства либо является конечномерным евклидовым пространством, либо само представляет собой гильбертово пространство. Действительно, справедливость аксиом I—III для каждого такого подпространства очевидна, а справедливость аксиомы IV вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Любое подмножество R' сепарабельного метрического пространства R само сепарабельно.*

Доказательство. Пусть

$$\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$$

— счетное всюду плотное множество в R и

$$a_n = \inf_{\eta \in R'} \rho(\xi_n, \eta).$$

Для любых натуральных n и m найдется такая точка $\eta_{nm} \in R'$, что

$$\rho(\xi_n, \eta_{nm}) < a_n + 1/m.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $1/m < \varepsilon/3$; для любого $\eta \in R'$ найдется такое n, что $\rho(\xi_n, \eta) < \varepsilon/3$ и, следовательно,

$$\rho(\xi_n, \eta_{nm}) < a_n + 1/m < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3;$$

но тогда $\rho(\eta, \eta_{nm}) < \varepsilon$, т. е. не более чем счетное множество $\{\eta_{nm}\}$ ($n, m = 1, 2, \ldots$) всюду плотно в R'.

Подпространства гильбертова пространства обладают некоторыми специальными свойствами (не имеющими места для подпространств произвольного нормированного пространства). Эти свойства связаны с наличием в гильбертовом пространстве скалярного произведения и основанного на нем понятия ортогональности.

Применив процесс ортогонализации к какой-либо счетной всюду плотной последовательности элементов произвольного подпространства гильбертова пространства, получаем следующую теорему.

Теорема 6. *В каждом подпространстве M пространства H содержится ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$, линейное замыкание которой совпадает с M.*

Пусть M — подпространство гильбертова пространства H. Обозначим через

$$M^{\perp} = H \ominus M$$

множество элементов $g \in H$, ортогональных ко всем элементам $f \in M$, и докажем, что $M^\perp$ тоже есть подпространство пространства H. Линейность $M^\perp$ очевидна, так как из $(g_1, f) = (g_2, f) = 0$ вытекает $(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f) = 0$. Для доказательства замкнутости допустим, что элементы g_n принадлежат $M^\perp$ и сходятся к g. Тогда для любого $f \in M$

$$(g, f) = \lim_{n\to\infty} (g_n, f) = 0,$$

и потому g тоже входит в $M^\perp$.

Подпространство $M^\perp$ называется *ортогональным дополнением* подпространства M.

Из теоремы 6 легко получается следующая теорема.

Теорема 7. *Если M — (замкнутое!) линейное подпространство пространства H, то любой элемент $f \in H$ единственным образом представим в виде $f = h + h'$, где $h \in M$ и $h' \in M^\perp$.*

Доказательство. Докажем сначала существование такого разложения. Для этого найдем в M полную ортогональную нормированную систему $\{\varphi_n\}$ и положим

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad c_n = (f, \varphi_n).$$

Так как (по неравенству Бесселя) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится, то элемент h существует и принадлежит M. Положим

$$h' = f - h.$$

Очевидно, что для всех n $(h', \varphi_n) = 0$ и, поскольку произвольный элемент ζ из M представим в виде

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

имеем

$$(h', \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (h', \varphi_n) = 0,$$

т. е. $h' \in M^\perp$.

Допустим теперь, что, кроме построенного нами разложения $f = h + h'$, существует другое разложение:

$$f = h_1 + h_1', \quad h_1 \in M, \quad h_1' \in M^\perp.$$

Тогда при всех n

$$(h_1, \varphi_n) = (f, \varphi_n) = c_n,$$

откуда следует, что

$$h_1 = h, \ h_1' = h'.$$

Из теоремы 7 вытекают некоторые полезные следствия.

Следствие 1. *Ортогональное дополнение к ортогональному дополнению линейного подпространства M совпадает с самим M.*

Таким образом, можно говорить о взаимно дополнительных подпространствах пространства H. Если M и $M^\perp$ — два таких дополняющих друг друга подпространства и $\{\varphi_n\}$, $\{\varphi_n'\}$ — полные (соответственно в M и $M^\perp$) ортогональные системы, то соединение систем $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ дает полную ортогональную систему во всем пространстве H. Поэтому имеет место следствие:

Следствие 2. *Каждая ортогональная нормированная система может быть расширена до системы, полной в H.*

Если система $\{\varphi_n\}$ конечна, то число входящих в нее элементов равно размерности подпространства M, порожденного $\{\varphi_n\}$, и коразмерности подпространства $M^\perp$. Таким образом, получаем еще одно следствие:

Следствие 3. *Ортогональное дополнение к пространству конечной размерности n имеет коразмерность n, и наоборот.*

Если каждый вектор $f \in H$ представим в виде $f = h + h'$, $h \in M$, $h' \in M^\perp$ ($M^\perp$ — ортогональное дополнение M), то говорят, что H есть *прямая сумма* взаимно ортогональных подпространств M и $M^\perp$ и пишут

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Ясно, что понятие прямой суммы может быть непосредственно обобщено на любое конечное или даже счетное число подпространств; именно, говорят, что H есть прямая сумма своих подпространств $M_1, \ldots, M_n, \ldots$

$$H = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus \ldots,$$

если

1) подпространства M_i попарно ортогональны, т. е. любой вектор из M_i ортогонален любому вектору из M_k при $i \neq k$;

2) каждый элемент $f \in H$ может быть представлен в виде

$$f = h_1 + \ldots + h_n + \ldots, \quad h_n \in M_n,$$

причем если число подпространств M_n бесконечно, то $\sum_n \|h_n\|^2$ — сходящийся ряд. Легко проверить, что если такое представление элемента f существует, то оно единственно и что

$$\|f\|^2 = \sum_n \|h_n\|^2.$$

Наряду с прямой суммой подпространств можно говорить о прямой сумме конечного или счетного числа произвольных гильбертовых пространств. Именно, если H_1 и H_2 — два гильбертовых пространства, то их прямая сумма H определяется следующим образом: элементы пространства H — это всевозможные пары (h_1, h_2), где $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$, а скалярное произведение двух таких пар равно

$$((h_1, h_2), (h_1', h_2')) = (h_1, h_1') + (h_2, h_2').$$

В пространстве H содержатся, очевидно, взаимно ортогональные подпространства, состоящие из пар вида $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно; первое из них можно естественным образом отождествить с пространством H_1, а второе — с пространством H_2.

Аналогично определяется сумма любого конечного числа пространств. Сумма $H = \sum \oplus H_n$ счетного числа пространств $H_1, \ldots, H_n, \ldots$ определяется так: элементы пространства H — это всевозможные последовательности вида

$$h = (h_1, \ldots, h_n, \ldots), \quad h_n \in H_n,$$

такие, что $\sum_n \|h_n\|^2 < \infty$. Скалярное произведение (h, g) элементов h и g из H равно

$$\sum_n (h_n, g_n).$$

8. Характеристическое свойство евклидовых пространств. Рассмотрим следующий вопрос. Пусть R — нормированное пространство. Каким дополнительным условиям должна удовлетворять норма, определенная в R,

чтобы пространство R было евклидовым, т. е. чтобы норма в нем определялась некоторым скалярным произведением? Иначе говоря, как охарактеризовать евклидовы пространства в классе всех нормированных пространств? Такую характеристику дает следующая теорема.

Теорема 8. *Для того чтобы нормированное пространство R было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов, f и g, выполнялось равенство*

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2). \tag{25}$$

Поскольку $f+g$ и $f-g$ — это диагонали параллелограмма, построенного на сторонах f и g, равенство (25) выражает известное свойство параллелограмма в евклидовом пространстве: *сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон*. Таким образом, необходимость условия очевидна. Докажем его достаточность. Положим

$$(f, g)=\frac{1}{4}(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2), \tag{26}$$

и покажем, что если равенство (25) выполнено, то функция (26) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Поскольку при $f=g$ имеем

$$(f, f)=\frac{1}{4}(\|2f\|^2-\|f-f\|^2)=\|f\|^2, \tag{27}$$

это и будет то скалярное произведение, которое порождает в пространстве R заданную там норму.

Прежде всего, из (26) сразу видно, что

$$(f, g)=(g, f),$$

т. е. выполнено свойство 1) скалярного произведения. Кроме того, в силу (27) имеет место и свойство 4). Для установления свойства 2) рассмотрим функцию трех векторов

$$\Phi(f, g, h)=4[(f+g, h)-(f, h)-(g, h)],$$

т. е.

$$\Phi(f, g, h)=\|f+g+h\|^2-\|f+g-h\|^2-$$
$$-\|f+h\|^2+\|f-h\|^2-\|g+h\|^2+\|g-h\|^2. \tag{28}$$

Покажем, что она тождественно равна нулю. В силу (25) имеем

$$\|f+g\pm h\|^2 = 2\|f\pm h\|^2 + 2\|g\|^2 - \|f\pm h-g\|^2.$$

Подставив соответствующие выражения в (28), получим

$$\Phi(f, g, h) = -\|f+h-g\|^2 + \|f-h-g\|^2 + \\ + \|f+h\|^2 - \|f-h\|^2 - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2. \quad (29)$$

Взяв полусумму (28) и (29), имеем

$$\Phi(f, g, h) = \frac{1}{2}(\|g+h+f\|^2 + \|g+h-f\|^2) - \\ - \frac{1}{2}(\|g-h+f\|^2 + \|g-h-f\|^2) - \|g+h\|^2 + \|g-h\|^2.$$

В силу (25) первое слагаемое равно

$$\|g+h\|^2 + \|f\|^2,$$

а второе — равно

$$-\|g-h\|^2 - \|f\|^2.$$

Таким образом,

$$\Phi(f, g, h) \equiv 0.$$

Установим, наконец, свойство 3) — однородность скалярного произведения. Рассмотрим для этого при любых фиксированных f и g функцию

$$\varphi(c) = (cf, g) - c(f, g).$$

Из (26) сразу следует, что

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}(\|g\|^2 - \|g\|^2) = 0$$

и $\varphi(-1) = 0$, поскольку $(-f, g) = -(f, g)$. Поэтому для любого целого n

$$(nf, g) = (\operatorname{sgn} n\,(f + \ldots + f), g) = \\ = \operatorname{sgn} n\,[(f, g) + \ldots + (f, g)] = |n| \operatorname{sgn} n\,(f, g) = n(f, g),$$

т. е. $\varphi(n) = 0$. При целых p, q и $q \neq 0$

$$\left(\frac{p}{q}f, g\right) = p\left(\frac{1}{q}f, g\right) = \frac{p}{q}q\left(\frac{1}{q}f, g\right) = \frac{p}{q}(f, g),$$

т. е. $\varphi(c) = 0$ при всех рациональных c; поскольку функция φ непрерывна,

$$\varphi(c) \equiv 0.$$

Тем самым мы показали, что функция (f, g) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Примеры. 1. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbf{R}_p^n$, в котором норма определена формулой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

При $p \geqslant 1$ все аксиомы нормы выполнены, однако евклидовым пространством $\mathbf{R}_p^n$ будет только при $p = 2$. Действительно, рассмотрим в $\mathbf{R}_p^n$ два вектора:

$$f = (1, 1, 0, 0, \ldots, 0);$$
$$g = (1, -1, 0, 0, \ldots, 0);$$

имеем

$$f + g = (2, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$f - g = (0, 2, 0, \ldots, 0),$$

откуда

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 2^{1/p}, \quad \|f+g\|_p = \|f-g\|_p = 2,$$

так что тождество параллелограмма (25) при $p \neq 2$ не выполняется.

2. Рассмотрим пространство непрерывных функций на отрезке $[0, \pi/2]$. Положим

$$f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin t.$$

Имеем

$$\|f\| = \|g\| = 1$$

и

$$\|f+g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} |\cos t + \sin t| = \sqrt{2},$$
$$\|f-g\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2} |\cos t - \sin t| = 1.$$

Отсюда видно, что

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 \neq 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

Таким образом, норму пространства $C\,[0,\ \pi/2]$ нельзя задать с помощью какого бы то ни было скалярного произведения. Легко видеть, что и пространство непрерывных функций $C\,[a,\ b]$ на любом отрезке $[a,\ b]$ не есть евклидово пространство.

9. Комплексные евклидовы пространства. Наряду с действительным может быть введено и комплексное евклидово пространство (т. е. комплексное линейное пространство со скалярным произведением в нем). Однако аксиомы 1)—4), сформулированные в начале этого параграфа, не могут быть в комплексном пространстве выполнены одновременно. Действительно, из 1) и 3) следует

$$(\lambda x,\ \lambda x) = \lambda^2\,(x,\ x),$$

откуда при $\lambda = i$ имеем

$$(ix,\ ix) = -(x,\ x),$$

т. е. скалярные квадраты векторов x и ix не могут быть одновременно положительны. Иными словами, аксиомы 1) и 3) несовместимы с аксиомой 4). Поэтому аксиомы, с помощью которых определяется скалярное произведение, в комплексном случае должны быть несколько изменены по сравнению с действительным. В комплексном пространстве скалярное произведение мы определим как числовую (комплекснозначную) функцию двух векторов, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $(x,\ y) = \overline{(y,\ x)}$,

2) $(\lambda x,\ y) = \lambda\,(x,\ y)$,

3) $(x_1 + x_2,\ y) = (x_1,\ y) + (x_2,\ y)$,

4) $(x,\ x) \geqslant 0$, причем $(x,\ x) > 0$, если $x \neq 0$. (Таким образом, мы внесли поправку в первую аксиому, сохранив три остальные без изменений.) Из условий 1) и 2) следует, что $(x,\ \lambda y) = \bar{\lambda}\,(x,\ y)$. Действительно,

$$(x,\ \lambda y) = \overline{(\lambda y,\ x)} = \overline{\lambda\,(y,\ x)} = \bar{\lambda}\,(x,\ y).$$

Хорошо известный пример комплексного евклидова пространства n измерений — это линейное пространство $\mathbf{C}^n$ (§ 1, пример 2), в котором скалярное произведение элементов

$$x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \text{ и } y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$$

определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k.$$

Как известно, всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно этому пространству.

Примерами бесконечномерных комплексных евклидовых пространств могут служить:

1) комплексное пространство l_2, в котором элементы — это последовательности комплексных чисел

$$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$

удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

а скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n;$$

2) пространство $C_2[a, b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt.$$

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, как и в действительном случае, формулой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Понятие угла между векторами в комплексном случае обычно не вводят (поскольку величина $\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$, вообще говоря, комплексна и может не быть косинусом какого-либо действительного угла); однако понятие ортогональности сохраняется: элементы x и y называются *взаимно ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Если $\{\varphi_n\}$ — какая-либо ортогональная система в комплексном евклидовом пространстве R, и f — произвольный элемент из R, то, как и в действительном случае, числа

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(f, \varphi_n)$$

называются *коэффициентами Фурье*, а ряд

$$\sum_n a_n \varphi_n$$

— *рядом Фурье* элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}$. Имеет место неравенство Бесселя:

$$\sum_n \|\varphi_n\|^2 |a_n|^2 \leqslant (f, f).$$

В частности, если система $\{\varphi_n\}$ ортогональна и нормирована, то коэффициенты Фурье по такой системе определяются формулами

$$c_n = (f, \varphi_n),$$

а неравенство Бесселя имеет вид

$$\sum_n |c_n|^2 \leqslant (f, f).$$

Полное комплексное евклидово пространство бесконечной размерности называется *комплексным гильбертовым пространством*. На комплексный случай переносится теорема об изоморфизме гильбертовых пространств:

Т е о р е м а 9. *Все сепарабельные комплексные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Простейшей реализацией комплексного гильбертова пространства является комплексное пространство l_2. С другой, функциональной, реализацией комплексного гильбертова пространства мы познакомимся в гл. VII.

Предоставляем читателю проверить, что все теоремы, доказанные выше для действительных евклидовых, в частности гильбертовых, пространств, справедливы (с незначительными изменениями, учитывающими комплексность скалярного произведения) и для комплексных пространств.

§ 5. Топологические линейные пространства

1. Определение и примеры. Задание нормы — лишь один из возможных способов введения топологии в линейном пространстве. Развитие таких областей функционального анализа, как теория обобщенных функций (о них будет сказано в следующей главе), показало, что во многих случаях полезно рассматривать линейные пространства с топологией, задаваемой не с помощью нормы, а каким-либо иным способом.

Определение 1. Множество E называется *топологическим линейным пространством*, если

I. E представляет собой линейное пространство (с умножением элементов на действительные или комплексные числа).

II. E является топологическим пространством.

III. Операция сложения и умножения на числа в E непрерывны относительно заданной в E топологии. Подробнее последнее условие означает следующее:

1) если $z_0 = x_0 + y_0$, то для каждой окрестности U точки z_0 можно указать такие окрестности V и W точек x_0 и y_0 соответственно, что $x + y \in U$ при $x \in V$, $y \in W$;

2) если $\alpha_0 x_0 = y_0$, то для любой окрестности U точки y_0 существуют такая окрестность V точки x_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha x \in U$ при $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ и $x \in V$.

Из связи, существующей в линейном топологическом пространстве между алгебраическими операциями и топологией, вытекает, что топология в таком пространстве полностью определяется заданием *системы окрестностей нуля*. Действительно, пусть x — точка линейного топологического пространства E, и U — некоторая окрестность нуля в E. Тогда $U + x$ — «сдвиг» этой окрестности на x — есть окрестность точки x, очевидно, что любая окрестность любой точки $x \in E$ может быть получена таким способом.

Из непрерывности операций сложения и умножения на числа в топологическом линейном пространстве E непосредственно вытекают следующие утверждения.

1. *Если U, V — открытые множества в E, то и множество $U + V$* (т. е. совокупность всех элементов вида $x + y$, $x \in U$, $y \in V$) *открыто.*

2. *Если U открыто, то и множество λU* (т. е. совокупность всех элементов вида λx, $x \in U$) *при любом $\lambda \neq 0$ открыто.*

3. *Если F замкнутое множество в E, то и λF замкнуто при любом λ.*

Примеры. 1. К топологическим линейным пространствам относятся прежде всего все нормированные пространства. Действительно, из свойств нормы сразу следует, что операции сложения векторов и умножения их на числа в нормированном пространстве непрерывны в той топологии, которая определяется нормой.

2. Зададим определяющую систему окрестностей нуля в пространстве $\mathbf{R}^\infty$ всевозможных числовых последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ так. Каждая окрестность $U(k_1, \ldots, k_r; \varepsilon)$ определяется целыми числами $k_1, \ldots, k_r$ и числом $\varepsilon > 0$ и состоит из всех тех $x \in \mathbf{R}^\infty$, которые удовлетворяют условиям:

$$|x_{k_i}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Легко проверить, что задание этой системы окрестностей превращает $\mathbf{R}^\infty$ в линейное топологическое пространство. (Наряду с $\mathbf{R}^\infty$ можно рассматривать пространство $\mathbf{C}^\infty$ всех комплексных последовательностей.)

3. Пусть $K[a, b]$ — пространство бесконечно дифференцируемых [1]) функций на отрезке $[a, b]$. Топологию в $K[a, b]$ определим с помощью следующей системы окрестностей нуля. Каждая такая окрестность $U_{m\varepsilon}$ определяется номером m и числом $\varepsilon > 0$ и состоит из всех функций φ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

где $\varphi^{(k)}$ — производная k-го порядка от функции φ.

Тот факт, что в топологическом линейном пространстве топология связана с линейными операциями, определенными в нем, накладывает на его топологию довольно жесткие ограничения. Именно, *в топологическом линейном пространстве E точка x и не содержащее ее замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности.*

При доказательстве этого утверждения достаточно рассмотреть точку $x = 0$ и любое не содержащее ее замкнутое множество F. Положим $U = E \setminus F$. В силу непрерывности

[1]) Т. е. имеющих производные всех порядков.

операции вычитания в E найдется такая окрестность нуля W, что $W - W \subset U$. В качестве W можно взять пересечение окрестностей нуля W_1 и W_2 таких, что $x - y \in U$, если $x \in W_1$ и $y \in W_2$. Проверим, что замыкание окрестности W содержится в U. Пусть $y \in [W]$. Тогда каждая окрестность точки y, в частности, $y + W$, содержит какую-либо точку z из W. Следовательно, $z - y \in W$, т. е. $y \in W - W \subset U$, что и утверждалось. При этом W и $E \setminus [W]$ — искомые окрестности точки 0 и множества F соответственно.

Топологическое пространство называется T_1-пространством, если оно удовлетворяет аксиоме отделимости T_1, т. е. если любое его одноточечное подмножество замкнуто; очевидно, что линейное топологическое пространство есть T_1-пространство тогда и только тогда, когда пересечение всех окрестностей нуля не содержит ненулевых элементов. Топологические пространства, удовлетворяющие аксиомам отделимости T_1 и T_3, мы назвали в гл. II *регулярными*; из доказанного в предыдущем абзаце следует, что *топологическое линейное T_1-пространство регулярно*.

В нормированных пространствах важную роль играет понятие ограниченного множества. Хотя там это понятие вводится при помощи нормы, оно может быть естественно сформулировано и для любых линейных топологических пространств.

Множество M, лежащее в топологическом линейном пространстве E, назовем *ограниченным*, если для каждой окрестности нуля U существует такое $n > 0$, что $\lambda U \supset M$ при всех $|\lambda| \geqslant n$.

Ясно, что для нормированных пространств это понятие ограниченности совпадает с ограниченностью по норме (т. е. с возможностью поместить данное множество внутрь некоторого шара $\|x\| \leqslant R$). Пространство E называется *локально ограниченным*, если в нем существует хотя бы одно непустое открытое ограниченное множество. Всякое нормированное пространство локально ограничено. Примером пространства, не являющегося локально ограниченным, может служить пространство $\mathbf{R}^\infty$, указанное в примере 2 (докажите это!).

Упражнения. 1. Пусть E — топологическое линейное пространство; докажите справедливость следующих утверждений:

(а) множество $M \subset E$ ограничено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ и любой последовательности по-

ложительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, стремящейся к нулю, последовательность $\varepsilon_n x_n$ стремится к нулю;

(б) если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ и $x_n \to x$, то $\{x_n\}$ — ограниченное множество;

(в) если E локально ограничено, то в нем выполняется первая аксиома счетности.

Выполнена ли первая аксиома счетности в пространстве $\mathbf{R}^{\infty}$?

2. Мы скажем, что множество M в топологическом линейном пространстве E *поглощается* окрестностью нуля U, если существует такое $\lambda > 0$, что $\lambda U \supset M$. Доказать, что в локально ограниченном пространстве существует фундаментальная система окрестностей нуля, взаимно поглощающих друг друга. Что можно принять за такую систему в нормированном пространстве?

2. Локальная выпуклость. Произвольные топологические линейные пространства могут обладать свойствами, слишком уж далекими от привычных свойств евклидовых или нормированных пространств. Важный класс пространств, более общих, чем нормированные, но сохраняющих многие свойства последних, образуют так называемые *локально выпуклые* пространства.

Определение 2. Топологическое линейное пространство называется *локально выпуклым*, если в нем всякое непустое открытое множество содержит непустое выпуклое открытое подмножество.

Заметим, что если пространство E локально выпукло, то для любой точки $x \in E$ и любой ее окрестности U найдется такая выпуклая ее окрестность V, что $x \in V \subset U$. Действительно, достаточно проверить справедливость этого утверждения для точки $x = 0$. Пусть U — какая-нибудь окрестность нуля. Найдется такая окрестность нуля V; что $V - V \subset U$. Так как E локально выпукло, то найдется непустое выпуклое открытое множество $V' \subset V$; пусть $y \in V'$, тогда $V' - y$ — выпуклая окрестность нуля, содержащаяся в U.

Всякое нормированное пространство локально выпукло. Действительно, в нем любое непустое открытое множество содержит некоторый шар. Таким образом, *всякое нормированное пространство локально ограничено и локально выпукло.* Можно показать, что, по существу, нормированными пространствами и исчерпывается класс пространств, обладающих обоими этими свойствами. Именно, назовем линейное топологическое пространство E *нормируемым*, если та топология, которая имеется в E, может быть задана с помощью некоторой нормы. Имеет место следующая теорема: *всякое отделимое локально выпуклое*

и локально ограниченное линейное топологическое пространство нормируемо.

Упражнения. 1. Докажите, что открытое множество U в топологическом линейном пространстве выпукло тогда и только тогда, когда $U + U = 2U$.

2. Пусть E — линейное пространство; множество $U \subset E$ называется *симметричным*, если из $x \in U$ следует $-x \in U$. Пусть $\mathscr{B}$ — семейство всех выпуклых симметричных подмножеств пространства E, совпадающих со своим ядром (см. § 2). Доказать справедливость следующих утверждений.

(а) Семейство $\mathscr{B}$ является определяющим семейством окрестностей нуля для некоторой локально выпуклой отделимой топологии в пространстве E (эта топология называется *ядерно-выпуклой*).

(б) Ядерно-выпуклая топология является сильнейшей из локально выпуклых топологий, в которых линейные операции в E непрерывны.

(в) Всякий линейный функционал на E непрерывен относительно ядерно-выпуклой топологии.

3. Счетно-нормированные пространства. Очень важным для анализа классом линейных топологических пространств оказались так называемые *счетно-нормированные пространства*. Для того чтобы сформулировать соответствующее определение, нам понадобится одно вспомогательное понятие.

Пусть в линейном пространстве E заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Они называются *согласованными*, если всякая последовательность $\{x_n\}$ из E, фундаментальная по каждой из этих норм и сходящаяся к некоторому пределу $x \in E$ по одной из них, сходится к тому же пределу x и по второй норме.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ *не слабее*, чем $\|\cdot\|_2$, если существует такая постоянная $c > 0$, что $\|x\|_1 \geqslant c\,\|x_2\|$ для всех $x \in E$.

Если первая норма не слабее второй, а вторая — не слабее первой, то эти две нормы называются *эквивалентными*. Две нормы называются *сравнимыми*, если одна из них слабее другой.

Определение 3. *Счетно-нормированным* пространством называется линейное пространство E, в котором задана счетная система попарно согласованных норм $\|\cdot\|_n$. Всякое счетно-нормированное пространство становится линейным топологическим, если за определяющую систему окрестностей нуля принять совокупность множеств $U_{r\varepsilon}$, каждое из которых определяется номером r и положительным числом ε и состоит из всех тех элементов $x \in E$, которые удовлетворяют условиям

$$\|x\|_1 < \varepsilon, \ \ldots, \ \|x\|_r < \varepsilon.$$

Мы предоставляем читателю проверить, что такая система окрестностей нуля действительно определяет в E топологию, в которой операции сложения элементов и умножения их на числа непрерывны.

Заметим, что всякое счетно-нормированное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, поскольку систему окрестностей нуля $U_{r\varepsilon}$ можно заменить (не изменяя топологии) счетной подсистемой, в которой ε принимает лишь значения 1, 1/2, 1/3, ..., $1/n$, ... Более того, топология в счетно-нормированном пространстве может быть задана при помощи некоторой метрики, например, такой:

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}, \quad x, y \in E. \tag{1}$$

Предлагаем читателю проверить, что функция $\rho(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам расстояния и инвариантна относительно сдвигов (т. е. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$, $x, y, z \in E$) и что порождаемая ею топология совпадает с исходной. Таким образом, мы получаем возможность говорить о полноте счетно-нормированного пространства, понимая под этим полноту относительно введенной выше метрики. Заметим еще, что последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна относительно метрики (1) тогда и только тогда, когда она фундаментальна относительно каждой из норм $\|\cdot\|_n$, и сходится (в этой метрике) к элементу $x \in E$ тогда и только тогда, когда она сходится к x по каждой из норм $\|\cdot\|_n$. Иными словами, полнота счетно-нормированного пространства означает, что в нем всякая последовательность, фундаментальная по каждой из норм $\|\cdot\|_n$, сходится.

Примеры. 1. Важным примером счетно-нормированного пространства служит рассмотренное выше пространство $K[a, b]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке, если считать, что норма $\|\cdot\|_m$ в этом пространстве определяется формулой

$$\|f\|_m = \sup_{\substack{a \le t \le b \\ 0 \le k \le m}} \left| f^{(k)}(t) \right|.$$

Очевидно, что все эти нормы согласованы между собой и что они определяют в $K[a, b]$ ту самую топологию, которая была описана выше.

2. Пусть S_∞ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на прямой, стремящихся на бесконечности к нулю вместе со всеми своими производными быстрее, чем $1/|t|$ в любой степени (т. е. удовлетворяющих условию $t^k f^{(q)}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ при любых фиксированных k и q). В этом пространстве определим счетную систему норм, положив

$$\|f\|_m = \sup_{\substack{k,\ q \leqslant m \\ -\infty < t < m}} \left| t^k f^{(q)}(t) \right|, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Нетрудно проверить, что эти нормы согласованы между собой. Таким образом, S_∞ — счетно-нормированное пространство.

3. Важный частный случай счетно-нормированных пространств — так называемые счетно-гильбертовы пространства. Пусть H — линейное пространство, в котором задана счетная система скалярных произведений $(\varphi, \psi)_n$, причем предположим, что нормы $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi, \varphi)_n}$, отвечающие этим скалярным произведениям, согласованы между собой. Если такое пространство полно, то оно называется *счетно-гильбертовым* пространством.

4. Конкретным примером счетно-гильбертова пространства может служить следующее пространство. Пусть Φ — совокупность всех таких числовых последовательностей $\{x_n\}$, для которых при каждом целом $k \geqslant 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^k x_n^2$$

сходится. Зададим в этом пространстве счетную систему норм, положив

$$\|x\|_k = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2}.$$

Нетрудно проверить, что эти нормы согласованы между собой и что Φ полно в указанном выше смысле. Ясно,

что каждую из норм $\|\cdot\|_k$ можно задать с помощью скалярного произведения

$$(x,\ y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n,$$

т. е. Ф есть счетно-гильбертово пространство. Оно называется *пространством быстро убывающих последовательностей.*

Если E — счетно-нормированное пространство, то заданные в нем нормы $\|\cdot\|_k$ можно считать удовлетворяющими условию

$$\|x\|_k \leqslant \|x\|_l \quad \text{при} \quad k < l, \tag{2}$$

так как иначе мы могли бы нормы $\|x\|_k$ заменить нормами

$$\|x\|_k' = \sup(\|x\|_1, \ \ldots, \ \|x\|_k),$$

определяющими в E ту же самую топологию, что и исходная система норм. Пополнив пространство E по каждой из норм $\|\cdot\|_k$, мы получим систему полных нормированных пространств E_k. При этом из соотношения (2) и согласованности норм следует, что имеются естественные вложения

$$E_k \supset E_l \quad \text{при} \quad k < l.$$

Таким образом, каждому счетно-нормированному пространству E можно сопоставить убывающую цепочку полных нормированных пространств

$$E_1 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \supset E.$$

Можно показать, что пространство E полно тогда и только тогда, когда $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ (докажите это!). Так, например, пространство $K[a, b]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ есть пересечение полных нормированных пространств $C^n[a, b]$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), где $C^n[a, b]$ состоит из функций, имеющих непрерывные

производные до n-го порядка включительно, а норма в нем определяется формулой

$$\|f\|_n = \sup_{\substack{a \leqslant t \leqslant b \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} \left| f^{(k)}(t) \right|.$$

В 30-х годах, когда в основном в работах Банаха была построена теория линейных нормированных пространств, сложилось впечатление, что этот класс пространств достаточно широк для того, чтобы обслуживать все конкретные нужды анализа. Впоследствии, однако, выяснилось, что это не так. Оказалось, что в ряде вопросов важны такие пространства, как пространство бесконечно дифференцируемых функций, пространство всех числовых последовательностей $\mathbf{R}^\infty$ и другие пространства, в которых естественная для них топология не может быть задана с помощью какой бы то ни было нормы. Таким образом, линейные пространства — топологические, но не нормируемые — это вовсе не обязательно «экзотика» или «патология». Наоборот, некоторые из этих пространств представляют собой не менее естественные и важные обобщения конечномерного евклидова пространства, чем, скажем, гильбертово пространство.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Непрерывные линейные функционалы

1. Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах. В § 1 гл. III мы уже рассматривали функционалы, определенные на линейном пространстве. Если речь идет о функционалах, заданных на т о п о л о г и ч е с к о м линейном пространстве, то основной интерес представляют н е п р е р ы в н ы е функционалы; как обычно, функционал f, определенный на пространстве E, называется *непрерывным*, если для всякого $x_0 \in E$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U элемента x_0, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ при } x \in U. \qquad (1)$$

Это определение относится, в частности, и к линейным функционалам.

Если E — к о н е ч н о м е р н о е топологическое линейное пространство, то всякий линейный функционал на E автоматически непрерывен. В общем случае из линейности функционала его непрерывность не вытекает.

Следующее утверждение существенно для дальнейшего, хотя и почти очевидно.

Если линейный функционал f непрерывен в какой-либо одной точке $x \in E$, то он непрерывен и всюду на E.

Действительно, пусть y — произвольная точка в E и пусть $\varepsilon > 0$. Выберем окрестность U точки x так, чтобы выполнялось условие (1). Тогда сдвиг этой окрестности

$$V = U + (y - x)$$

будет искомой окрестностью точки y, так как если $z \in V$, то $z + x - y \in U$ и, следовательно,

$$|f(z) - f(y)| = |f(z - y + x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Таким образом, проверять непрерывность линейного функционала достаточно в одной точке, например в точке 0.

Если E — пространство с первой аксиомой счетности, то непрерывность линейного функционала на E можно сформулировать в терминах последовательностей: функционал f называется непрерывным в точке $x \in E$, если

из $x_n \to x$ следует $f(x_n) \to f(x)$. Проверка равносильности этого определения непрерывности приведенному выше (при наличии первой аксиомы счетности) предоставляется читателю.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы линейный функционал f был непрерывен на E, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность нуля в E, на которой функционал f ограничен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функционал f непрерывен в точке 0, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля, на которой

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Обратно, пусть U — такая окрестность нуля, что

$$|f(x)| < C \quad \text{при} \quad x \in U,$$

и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\frac{\varepsilon}{C} U$ есть та окрестность нуля, на которой $|f(x)| < \varepsilon$. Тем самым доказана непрерывность f в точке 0, а значит, и всюду.

У п р а ж н е н и е. Пусть E — топологическое линейное пространство; докажите справедливость следующих утверждений.

(а) Линейный функционал f на E непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое открытое множество $U \subset E$ и такое число t, что $t \notin f(U)$, где $f(U)$ — множество значений f на U.

(б) Линейный функционал f на E непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро $\{x : f(x) = 0\}$ замкнуто в E.

(в) Если всякий линейный функционал на E непрерывен, то топология в E совпадает с ядерно-выпуклой топологией (см. упражнение 2 на с. 198).

(г) Если E бесконечномерно и нормируемо, то на нем существует не непрерывный линейный функционал (воспользуйтесь существованием в E базиса Гамеля; см. упражнение на с. 143).

(д) Пусть в E существует определяющая система окрестностей нуля, мощность которой не превосходит алгебраической размерности пространства E (т. е. мощности базиса Гамеля в E; см. упражнение на с. 144). Тогда на E существует не непрерывный линейный функционал.

(е) Для того чтобы линейный функционал f был непрерывен на E, необходимо, а в случае, когда E удовлетворяет первой аксиоме счетности, и достаточно, чтобы он был ограничен на каждом ограниченном множестве.

2. Линейные функционалы на нормированных пространствах. Пусть рассматриваемое пространство E нормировано. По теореме 1 всякий непрерывный линейный функционал f ограничен в некоторой окрестности нуля. Но в нормированном пространстве всякая окрестность нуля содержит шар и, значит, f ограничен на некотором шаре. В силу линейности функционала это равносильно

его ограниченности на любом шаре, в частности, на единичном $\|x\| \leqslant 1$. Обратно, из ограниченности функционала f на единичном шаре следует, в силу той же теоремы 1, его непрерывность (ибо внутренность этого шара представляет собой окрестность нуля).

Итак, *в нормированном пространстве линейный функционал непрерывен в том и только том случае, когда его значения на единичном шаре ограничены в совокупности.*

Пусть f — непрерывный линейный функционал в нормированном пространстве E. Число

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|, \tag{2}$$

т. е. точную верхнюю грань значений $|f(x)|$ на единичном шаре пространства E, мы назовем *нормой* функционала f. Отметим следующие почти очевидные свойства $\|f\|$:

1)

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|};$$

это сразу следует из того, что для всякого $x \neq 0$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right|.$$

2) Для любого $x \in E$

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

Действительно, если $x \neq 0$, то элемент $\frac{x}{\|x\|}$ принадлежит единичному шару, следовательно, по определению нормы функционала,

$$\left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|f\|,$$

откуда следует (3). Если же $x = 0$, то в (3) справа и слева стоят нули.

Упражнение. Пусть $C \geqslant 0$ — такое число, что

$$|f(x)| \leqslant C\|x\| \tag{4}$$

при любом x. Доказать, что $\|f\| = \inf C$, где inf берется по всем C, удовлетворяющим неравенству (4).

Рассмотрим примеры линейных функционалов в нормированных пространствах.

1. Пусть $\mathbf{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство и a — какой-либо фиксированный вектор в нем. Скалярное произведение

$$l(x) = (x, a),$$

где x пробегает все $\mathbf{R}^n$, представляет собой, очевидно, линейный функционал на $\mathbf{R}^n$. В силу неравенства Коши—Буняковского

$$|f(x)| = |(x, a)| \leqslant \|x\| \cdot \|a\|; \tag{5}$$

следовательно, этот функционал ограничен, а значит, и непрерывен на $\mathbf{R}^n$. Из неравенства (5) получаем, что

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|.$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от x, то

$$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant \|a\|,$$

т. е. $\|f\| \leqslant \|a\|$. Но положив $x = a$, получим

$$|f(a)| = (a, a) = \|a\|^2, \text{ т. е. } \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|.$$

Поэтому $\|f\| = \|a\|$.

2. Интеграл

$$I(x) = \int_a^b x(t)\, dt,$$

где $x(t)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, представляет собой линейный функционал в пространстве $C[a, b]$. Этот функционал ограничен, а его норма равна $b - a$. Действительно,

$$|I(x)| = \left| \int_a^b x(t)\, dt \right| \leqslant \max |x(t)| (b - a) = \|x\| (b - a),$$

причем при $x \equiv \text{const}$ достигается равенство.

3. Рассмотрим более общий пример. Пусть $y_0(t)$ — фиксированная непрерывная функция на $[a, b]$. Положим для любой функции $x(t) \in C[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b x(t)\, y_0(t)\, dt.$$

Этот функционал линеен. Он ограничен, так как

$$|F(x)| = \left| \int_a^b x(t)\, y_0(t)\, dt \right| \leqslant \|x\| \int_a^b |y_0(t)|\, dt. \tag{6}$$

В силу линейности и ограниченности он непрерывен. Из (6) следует оценка его нормы:

$$\|F\| \leqslant \int_a^b |y_0(t)|\,dt.$$

(Докажите, что на самом деле здесь имеет место точное равенство!)

4. Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ линейный функционал

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0),$$

уже упоминавшийся в п. 5 § 1 гл. III. Его значение на функции $x(t)$ определяется как значение $x(t)$ в данной точке t_0. Ясно, что

$$|x(t_0)| \leqslant \|x\|,$$

причем для $x \equiv \text{const}$ имеет место равенство. Отсюда сразу следует, что норма функционала δ_{t_0} равна 1.

5. В любом евклидовом пространстве X можно определить линейный функционал так же, как и в $\mathbf{R}^n$, выбрав некоторый фиксированный элемент $a \in X$ и положив для любого $x \in X$

$$F(x) = (x, a).$$

Как в случае $\mathbf{R}^n$, легко проверить, что при этом

$$\|F\| = \|a\|.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные линейные функционалы, а слово «непрерывный» будем для краткости опускать.

Понятию нормы линейного функционала можно дать следующую наглядную интерпретацию. Мы уже видели (гл. III, § 1), что всякому ненулевому линейному функционалу можно сопоставить гиперплоскость L, определяемую уравнением

$$f(x) = 1.$$

Найдем расстояние d от этой гиперплоскости до точки 0. По определению, $d = \inf\limits_{f(x)=1} \|x\|$. В силу оценки

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$$

на гиперплоскости $f(x) = 1$ будем иметь $\|x\| \geqslant 1/\|f\|$ и, значит, $d \geqslant 1/\|f\|$. С другой стороны, в силу определения

нормы f для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент x_ε, подчиненный условию $f(x_\varepsilon) = 1$, что

$$1 > (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|;$$

поэтому

$$d = \inf_{f(x)=1} \|x\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, получаем

$$d = 1/\|f\|,$$

т. е. *норма линейного функционала f обратна расстоянию гиперплоскости $f(x) = 1$ от точки 0.*

3. Теорема Хана — Банаха в нормированном пространстве. В § 2 гл. III мы доказали общую теорему Хана—Банаха, согласно которой всякий линейный функционал f_0, определенный на некотором подпространстве L линейного пространства E и удовлетворяющий условию

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \tag{7}$$

(p — фиксированный однородно-выпуклый функционал на E), может быть продолжен на все E с сохранением этого условия. Применительно к нормированным пространствам эту теорему можно сформулировать следующим образом:

Пусть E — действительное нормированное пространство, L — его подпространство и f_0 — ограниченный линейный функционал на L. Этот линейный функционал может быть продолжен до некоторого линейного функционала f на всем пространстве E без увеличения нормы, т. е. так, что

$$\|f_0\|_{\text{на } L} = \|f\|_{\text{на } E}.$$

Действительно, пусть

$$\|f_0\|_{\text{на } L} = k.$$

Ясно, что $k\|x\|$ — однородно-выпуклый функционал. Взяв его в качестве p и применяя общую теорему Хана—Банаха, получим требуемый результат.

Эта форма теоремы Хана—Банаха допускает следующую геометрическую интерпретацию. Уравнение

$$f_0(x) = 1 \tag{8}$$

определяет в подпространстве L гиперплоскость, лежащую на расстоянии $1/\|f_0\|$ от нуля. Продолжая функционал f_0 без увеличения нормы до функционала на всем E, мы проводим через эту частичную гиперплоскость «большую»

гиперплоскость во всем E, причем «не позволяем» ей приблизиться к нулю.

Комплексный вариант теоремы Хана—Банаха (теорема 4а § 2 гл. III), дает нам комплексный аналог предыдущей теоремы:

Пусть E — комплексное нормированное пространство, f_0 — линейный ограниченный функционал, определенный на подпространстве $L \subset E$. Тогда существует линейный ограниченный функционал f, определенный на всем E и удовлетворяющий условиям

$$f(x) = f_0(x), \quad x \in L,$$

$$\|f\|_{\text{на } E} = \|f_0\|_{\text{на } L}.$$

Укажем некоторые важные факты, вытекающие из теоремы Хана—Банаха для нормированных пространств. Предварительно сделаем следующее замечание. Выпуклое множество в линейном пространстве мы назвали выпуклым телом, если оно имеет непустое ядро. Можно показать, что в нормированном пространстве ядро выпуклого множества совпадает с совокупностью его внутренних точек. Таким образом, в нормированном пространстве выпуклое тело — это выпуклое множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку. Отсюда и из теоремы 5 § 2 гл. III вытекает следующий факт.

Следствие 1 (первая теорема отделимости). *Пусть A и B — выпуклые множества в нормированном пространстве X, причем хотя бы одно из них, скажем A, является выпуклым телом и его ядро не пересекается с B. Тогда существует ненулевой непрерывный линейный функционал, разделяющий A и B.*

Существование ненулевого функционала, разделяющего A и B, обеспечивается самой теоремой 5 § 2 гл. III. Покажем, что соответствующий функционал обязательно непрерывен. Действительно, если

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{x \in B} f(x), \tag{9}$$

то функционал f ограничен на A сверху. Пусть x_0 — внутренняя точка множества A и $U(x_0)$ — ее шаровая окрестность, целиком лежащая в A. В силу (9) функционал f ограничен на $U(x_0)$ сверху. Но тогда он ограничен на $U(x_0)$ и снизу (проведите доказательство!). Так как линейный функционал, ограниченный на каком-либо шаре, непрерывен, то наше утверждение доказано.

Следствие 2 (вторая теорема отделимости). *Пусть A — замкнутое выпуклое множество в нормированном пространстве X и $x_0 \in X$ — точка, не принадлежащая A. Тогда существует непрерывный линейный функционал, строго разделяющий x_0 и A.*

Действительно, достаточно взять некоторую выпуклую окрестность U точки x_0, не пересекающуюся с A, и рассмотреть функционал, разделяющий U и A. (Проведите доказательство того, что ненулевой функционал, разделяющий U и A, непременно строго разделяет x_0 и A.)

Следствие 3 (лемма об аннуляторе). *Для всякого (замкнутого) собственного подпространства L нормированного пространства X существует ненулевой непрерывный линейный функционал f, равный нулю на L.*

Действительно, пусть $x_0 \notin L$ и f — непрерывный линейный функционал, строго разделяющий x_0 и L:

$$f(x_0) > \sup_{x \in L} f(x).$$

Тогда $f(x) \equiv 0$ на L, так как иначе верхняя грань справа была бы равна $+\infty$.

Совокупность функционалов, равных нулю на данном подпространстве, называется *аннулятором* этого подпространства и обозначается $L^{\perp}$ [1]).

Следствие 4. *Если x_0 — ненулевой элемент в нормированном пространстве X, то существует такой непрерывный линейный функционал f на X, что*

$$\|f\| = 1, \quad f(x_0) = \|x_0\|. \tag{10}$$

Действительно, определив сперва функционал f на одномерном подпространстве, состоящем из элементов вида αx_0, формулой $f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$, а затем продолжив его без увеличения нормы на все X, мы и получим функционал, удовлетворяющий условиям (10).

Замечание. Для произвольных локально-выпуклых пространств следствия 1—3 остаются в силе без изменений, а следствие 4 может быть заменено утверждением: для всякого $x_0 \neq 0$ существует такой непрерывный линейный функционал f, что $f(x_0) \neq 0$.

[1]) В § 4 гл. III мы обозначили так ортогональное дополнение подпространства в евклидовом пространстве. Как будет видно в следующем параграфе, в евклидовом пространстве понятия ортогонального дополнения и аннулятора равносильны, поэтому совпадение обозначений оправдано.

4. Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве. Пусть E — счетно-нормированное пространство с нормами $\|\cdot\|_k$ ($k = 1, 2, \ldots$); не ограничивая общности, можно считать (см. с. 201), что для всякого $x \in E$

$$\|x\|_1 \leqslant \cdots \leqslant \|x\|_n \leqslant \cdots \tag{11}$$

Пусть f — непрерывный линейный функционал на E; тогда в E существует окрестность нуля U, на которой f ограничен. В силу определения топологии в счетно-нормированном пространстве найдутся такое натуральное k и такое $\varepsilon > 0$, что шар $B_{k\varepsilon} = \{x : \|x\|_k < \varepsilon\}$ целиком лежит в U; тогда функционал f ограничен на этом шаре и потому ограничен и непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_k$, т. е. существует такое $C > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|_k, \quad x \in E.$$

С другой стороны, очевидно, что если линейный функционал ограничен по какой-либо из норм $\|\cdot\|_n$, то он непрерывен на E. Таким образом, если E_n^* — запас всех линейных функционалов на E, непрерывных относительно нормы $\|\cdot\|_n$, а E^* — запас в с е х линейных непрерывных функционалов на E, то

$$E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^*. \tag{12}$$

Кроме того, из условия (11) следует, что

$$E_1^* \subset \cdots \subset E_n^* \subset \cdots$$

Если f — непрерывный линейный функционал на E, т. е. $f \in E^*$, то его *порядком* называется наименьшее из чисел n, для которых $f \in E_n^*$; в силу равенства (12) *каждый непрерывный линейный функционал на E имеет конечный порядок.*

§ 2. Сопряженное пространство

1. Определение сопряженного пространства. Для линейных функционалов можно определить операции сложения и умножения их на числа. Пусть f_1 и f_2 — два линейных функционала на некотором линейном пространстве E. Их *суммой* $f_1 + f_2$ называется линейный функционал

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in E.$$

Произведением αf_1 линейного функционала f_1 на число α называется функционал

$$f(x) = \alpha f_1(x), \quad x \in E.$$

Равенства, определяющие $f_1 + f_2$ и αf_1, можно записать и так:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (\alpha f_1)(x) = \alpha f_1(x).$$

Ясно, что сумма $f_1 + f_2$ и произведение αf_1 представляют собой линейные функционалы. Кроме того, если пространство E топологическое, то из непрерывности функционалов f_1 и f_2 следует, что $f_1 + f_2$ и αf_1 тоже непрерывны на E.

Легко проверить, что так определенные операции сложения функционалов и умножения их на числа удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Иначе говоря, совокупность всех непрерывных линейных функционалов, определенных на некотором топологическом линейном пространстве E, образует линейное пространство. Оно называется пространством, *сопряженным с* E, и обозначается E^*.

Упражнение. Совокупность всех линейных функционалов на E, не обязательно непрерывных, называется *алгебраически сопряженным* пространством и обозначается $E^{\#}$. Привести пример топологического векторного пространства E такого, что

$$E^* \neq E^{\#}.$$

В сопряженном пространстве E^* можно различными способами ввести топологию. Важнейшие из них — это *сильная* и *слабая* топологии.

2. Сильная топология в сопряженном пространстве. Начнем с того простейшего случая, когда исходное пространство E нормировано. Для непрерывных линейных функционалов, заданных на нормированном пространстве, мы ввели понятие нормы, положив

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Эта величина удовлетворяет всем требованиям, содержащимся в определении нормированного пространства. Действительно,

1) $\|f\| > 0$ для любого ненулевого линейного функционала f,

2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$,

3) $\|f_1 + f_2\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f_1(x) + f_2(x)|}{\|x\|} \leqslant$

$$\leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{|f_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x \neq 0} \frac{|f_2(x)|}{\|x\|} = \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Таким образом, пространство E^*, сопряженное к нормированному, можно наделить естественной структурой нормированного пространства. Топология в E^*, отвечающая введенной норме, называется *сильной топологией* в E^*. Желая подчеркнуть, что E^* рассматривается как нормированное пространство, мы будем вместо E^* писать $(E^*, \|\cdot\|)$.

Установим следующее важное свойство пространства, сопряженного к нормированному.

Теорема 1. *Сопряженное пространство* $(E^*, \|\cdot\|)$ *полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность линейных функционалов. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для всех $n, m \geqslant N$. Отсюда для любого $x \in E$ получаем

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|,$$

т. е. при любом $x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится.

Положим

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Проверим, что f представляет собой непрерывный линейный функционал. Линейность проверяется непосредственно:

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to \infty} f_n(\alpha x + \beta y) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Для доказательства непрерывности функционала f вернемся к неравенству $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|$ и перейдем в нем к пределу при $m \to \infty$; получим

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \|x\|.$$

Отсюда вытекает, что функционал $f - f_n$ ограничен. Но тогда ограничен, и значит, непрерывен и функционал $f = f_n + (f - f_n)$. Кроме того, отсюда же следует, что $\|f - f_n\| \leqslant \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$, т. е., что $\{f_n\}$ сходится к f.

Подчеркнем еще раз, что эта теорема справедлива независимо от того, полно или нет исходное пространство.

Замечание. *Если нормированное пространство E не полно, а $\overline{E}$ — его пополнение, то пространства E^* и $(\overline{E})^*$ изоморфны.*

Действительно, если E вложено в $\overline{E}$ в качестве всюду плотного подмножества, то всякий линейный непрерывный на E функционал f продолжается по непрерывности с E на все $\overline{E}$. Обозначим это (единственное!) продолжение $\bar{f}$. Ясно, что $\bar{f} \in (\overline{E})^*$, $\|\bar{f}\| = \|f\|$, и что всякий функционал из $(\overline{E})^*$ служит продолжением некоторого функционала из $(E)^*$ (а именно, своего сужения на E). Следовательно, отображение $f \to \bar{f}$ представляет собой изоморфное отображение пространства E^* на все пространство $(\overline{E})^*$.

Определим теперь *сильную топологию* в пространстве, сопряженном к произвольному линейному топологическому. В пространстве, сопряженном к нормированному, мы определили окрестность нуля как совокупность функционалов, удовлетворяющих условию

$$\|f\| < \varepsilon.$$

Иначе говоря, за окрестность нуля в пространстве E^*, сопряженном к нормированному, принимается совокупность функционалов, для которых $|f(x)| < \varepsilon$, когда x пробегает в E единичный шар $\|x\| \leqslant 1$. Беря всевозможные ε, получим определяющую систему окрестностей нуля. В случае, когда E — не нормированное, а топологическое линейное пространство, вместо единичного шара в E естественно взять произвольное ограниченное множество A. Окрестность нуля $U_{\varepsilon, A}$ в E^* определяется как совокупность линейных функционалов, удовлетворяющих условию

$$|f(x)| < \varepsilon \text{ при всех } x \in A.$$

Варьируя ε и A, получим определяющую систему окрестностей нуля в E.

Итак, *сильная топология в E^** задается совокупностью окрестностей нуля, зависящих от положительного числа ε и ограниченного множества $A \subset E$. Мы не будем здесь проверять, хотя это и несложно (см., например, [9]), что такая система окрестностей действительно превращает E^* в линейное топологическое пространство. Ясно, что в случае нормированного пространства E только что описанная

сильная топология в E^* совпадает с той, которая определялась с помощью нормы.

Заметим, что сильная топология в E^* обязательно удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 и локально выпукла (независимо от топологии в E). Действительно, если $f_0 \in E^*$ и $f_0 \neq 0$, то найдется такой элемент $x_0 \in E$, что $f_0(x_0) = 0$; положим $\varepsilon = \frac{1}{2}|f_0(x_0)|$ и $A = \{x_0\}$, тогда $f_0 \notin U_{\varepsilon A}$, т. е. E^* — T_1-пространство. Для доказательства локальной выпуклости сильной топологии в E^* достаточно заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого ограниченного $A \subset E$ окрестность $U_{\varepsilon A}$ выпукла в E. Сильную топологию в E^* обозначим символом b; желая подчеркнуть, что E^* рассматривается в сильной топологии, мы будем писать (E^*, b) вместо E^*.

3. Примеры сопряженных пространств.

1. Пусть E — n-мерное линейное пространство (действительное или комплексное). Выберем в нем какой-нибудь базис $e_1, \ldots, e_n$; тогда всякий вектор $x \in E$ однозначно представим в виде $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Если f — линейный функционал на E, то ясно, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, x_i; \tag{1}$$

следовательно, линейный функционал однозначно определяется своими значениями на векторах базиса $e_1, \ldots, e_n$, причем эти значения можно задать произвольно. Определим линейные функционалы $g_1, \ldots, g_n$, полагая

$$g_j(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, что эти функционалы линейно независимы. Ясно, что $g_j(x) = x_j$, поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, g_i(x).$$

Таким образом, функционалы $g_1, \ldots, g_n$ составляют базис в пространстве E^*, т. е. E^* есть n-мерное линейное пространство; базис $g_1, \ldots, g_n$ в E^* называют *двойственным* по отношению к базису $e_1, \ldots, e_n$ в E.

Различные нормы в пространстве E индуцируют различные нормы в E^*. Вот несколько примеров пар соответ-

ствующих друг другу норм в E и E^* (читателю рекомендуется аккуратно провести соответствующие доказательства):

(a) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$, $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2\right)^{1/2}$;

(b) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)^{1/q}$;

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < p < \infty;$$

(c) $\|x\| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|$;

(d) $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|f\| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i|$.

В этих формулах $x_1, \ldots, x_n$ — это координаты вектора $x \in E$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а $f_1, \ldots, f_n$ — координаты функционала $f \in E^*$ в двойственном базисе $g_1, \ldots, g_n$.

Упражнение. Доказать, что все перечисленные нормы определяют в n-мерном пространстве одну и ту же топологию.

2. Рассмотрим пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$ и покажем, что *сопряженное к нему пространство* $(c_0^*, \|\cdot\|)$ *изоморфно пространству* l_1 *всех абсолютно суммируемых последовательностей* $f = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ *с нормой* $\|f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Любая последовательность $f \in l_1$ определяет в пространстве c_0 линейный ограниченный функционал $\tilde{f}$ по формуле

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n; \tag{2}$$

ясно, что $|\tilde{f}(x)| \leqslant \|x\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$, так что $\|\tilde{f}\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| \leqslant \|f\|$.

Рассмотрим в c_0 векторы

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и положим $x^{(N)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{f_n}{|f_n|} e_n$ (если $f_n = 0$, то считаем, что $\frac{f_n}{|f_n|} = 0$). Тогда $x^{(N)} \in c_0$, $\|x^{(N)}\| \leqslant 1$ и

$$\tilde{f}(x^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{|f_n|} \tilde{f}(e_n) = \sum_{n=1}^{N} |f_n|,$$

так что $\lim\limits_{N\to\infty} \tilde{f}(x^{(N)}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|$. Следовательно, $\|\tilde{f}\| \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$; сопоставляя это с доказанным выше противоположным неравенством, заключаем, что $\|\tilde{f}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| = \|f\|$.

Таким образом, мы построили линейное изометрическое отображение $f \to \tilde{f}$ пространства l_1 в пространство c_0^*; остается проверить, что образ пространства l_1 при этом отображении совпадает со всем c_0^*, т. е. что всякий функционал $\tilde{f} \in c_0^*$ представим в виде (2), где $f = \{f_n\} \in l_1$. Для всякого $x = \{x_n\} \in c_0$ имеем $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, причем ряд, стоящий справа, сходится в c_0 к элементу x, ибо $\left\| x - \sum\limits_{n=1}^{N} x_n e_n \right\| = \sup\limits_{n>N} |x_n| \to 0$ при $N \to \infty$. Так как функционал $\tilde{f} \in c_0^*$ непрерывен, то $\tilde{f}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \tilde{f}(e_n)$; поэтому достаточно проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$. Полагая $x^{(N)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\overline{\tilde{f}(e_n)}}{|\tilde{f}(e_n)|} e_n$ и замечая, что $x^{(N)} \in c_0$, $\|x^{(N)}\| \leqslant 1$, имеем

$$\sum_{n=1}^{N} |\tilde{f}(e_n)| = \sum_{n=1}^{N} \frac{\overline{\tilde{f}(e_n)}}{|\tilde{f}(e_n)|} \tilde{f}(e_n) = \tilde{f}(x^{(N)}) \leqslant \|\tilde{f}\|,$$

откуда в силу произвольности N заключаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$.

3. Нетрудно доказать, что пространство l_1^*, сопряженное к пространству l_1, изоморфно пространству m, состоящему из всех ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup_n |x_n|$.

4. Пусть $p > 1$ и l_p — пространство всех последовательностей $x = \{x_n\}$, для которых

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty;$$

можно доказать, что сопряженное к нему пространство l_p^* изоморфно пространству l_q, $1/p + 1/q = 1$. Общий вид линейного непрерывного функционала на l_p:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n; \quad x = \{x_n\} \in l_p, \quad f = \{f_n\} \in l_q.$$

Доказательство основано на применении неравенства Гельдера.

5. Выясним структуру пространства, сопряженного к гильбертову.

Теорема 2. *Пусть H — действительное гильбертово пространство. Для всякого непрерывного линейного функционала f на H существует единственный элемент $x_0 \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, x_0), \quad x \in H, \tag{3}$$

причем $\|f\| = \|x_0\|$. Обратно, если $x_0 \in H$, то формула (3) *определяет такой непрерывный линейный функционал f, что $\|f\| = \|x_0\|$. Таким образом, равенство* (3) *определяет изоморфизм $f \to x_0$ между пространствами H^* и H.*

Доказательство. Очевидно, что для всякого $x_0 \in H$ формула (3) определяет линейный функционал на H. Так как $|f(x)| = |(x, x_0)| \leqslant \|x\| \cdot \|x_0\|$, то этот функционал непрерывен, а так как $f(x_0) = \|x_0\|^2$, то $\|f\| = \|x_0\|$. Покажем, что всякий непрерывный линейный функционал f на H представим в виде (3). Если $f = 0$, то полагаем $x_0 = 0$. Пусть теперь $f \neq 0$ и $H_0 = \{x : f(x) = 0\}$ — ядро функционала f; так как f непрерывен, то H_0 — замкнутое линейное подпространство в H. В п. 6 § 1 гл. III было показано, что коразмерность ядра любого линейного функционала равна 1. Поэтому, учитывая следствие 3 теоремы 7 из § 4 гл. III, заключаем, что ортогональное дополнение $H_0^{\perp}$ к подпространству H_0 одномерно, т. е. существует такой (ненулевой) вектор y_0, орто-

гональный к H_0, что всякий вектор $x \in H$ однозначно представим в виде $x = y + \lambda y_0$, где $y \in H_0$. Очевидно, можно считать, что $\|y_0\| = 1$; положим $x_0 = \overline{f(y_0)}\, y_0$. Тогда для любого $x \in H$ имеем

$$x = y + \lambda y_0, \quad y \in H_0,$$
$$f(x) = \lambda f(y_0),$$
$$(x, x_0) = \lambda (y_0, x_0) = \lambda \overline{f(y_0)}\, (y_0, y_0) = \lambda f(y_0).$$

Таким образом, $f(x) = (x, x_0)$ для всех $x \in H$. Если $f(x) = (x, x_0')$, $x \in H$, то $(x, x_0 - x_0') = 0$, откуда, полагая $x = x_0 - x_0'$, получаем, что $x_0 = x_0'$.

Замечания. 1. Пусть E — неполное евклидово пространство, а H — гильбертово пространство, являющееся его пополнением. Так как пространства E^* и H^* изоморфны (см. замечание на с. 214), а H^* изоморфно H, то справедливо следующее утверждение: *пространство E^*, сопряженное к неполному евклидову пространству E, изоморфно пополнению H пространства E.*

2. Теорема 2 справедлива и для комплексного гильбертова пространства (доказательство в точности то же, с заменой лишь $x_0 = \overline{f(y_0)}\, y_0$ на $x_0 = \overline{f(y_0)}\, y_0$). Единственное отличие комплексного случая от действительного состоит в том, что теперь отображение H в H^*, сопоставляющее элементу $x_0 \in H$ функционал $f(x) = (x, x_0)$, является *сопряженно-линейным* изоморфизмом, т. е. элементу λx_0 отвечает функционал $\bar{\lambda} f$.

6. В примерах 1—5 рассматривались нормированные пространства. Рассмотрим теперь пространство счетно-нормированное. Пусть Φ — действительное счетно-гильбертово пространство, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}$, для которых

$$\|x\|_k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n^2 \right)^{1/2} < \infty \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Скалярные произведения в Φ суть

$$(x, y)_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n y_n, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пространство Φ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_k$ является евклидовым; пусть Φ_k — его пополнение. Легко видеть, что Φ_k можно отождествить с гильбертовым пространством всех последовательностей $x = \{x_n\}$, у которых $\|x\|_k < \infty$. В силу теоремы 2 пространство Φ_k^*, со-

пряженное к Φ_k, изоморфно пространству Φ_k; при этом изоморфизме каждому непрерывному линейному функционалу $f \in \Phi_k^*$ сопоставляется такая последовательность $\tilde{f} = \{f_n\}$, что

$$\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^k |f_n|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$f(x) = (x, \tilde{f})_k = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n f_n, \quad x = \{x_n\} \in \Phi_k,$$

и обратно, каждая такая последовательность определяет элемент из Φ_k^*. Определим теперь функционал $f \in \Phi_k^*$ не последовательностью $\{f_n\}$, а последовательностью $\{g_n\}$, где $g_n = n^k f_n$. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n \text{ и } \|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, Φ_k^* можно отождествить с гильбертовым пространством последовательностей $\{g_n\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^2 < \infty, \tag{4}$$

и со скалярным произведением

$$(g^{(1)}, g^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} g_n^{(1)} g_n^{(2)}.$$

Так как $\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*$, то Φ^* — пространство всех последовательностей $\{g_n\}$, для каждой из которых существует свое k, такое, что выполняется условие (4).

Значение каждого такого функционала определено на любом элементе $x = \{x_n\} \in \Phi$ и равняется $\sum_{n=1}^{\infty} x_n g_n$.

Итак, если пространство Φ есть пересечение у б ы в а ю щ е й цепочки гильбертовых пространств

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k, \quad \Phi_1 \supset \cdots \supset \Phi_k \supset \cdots,$$

то Φ^* есть сумма в о з р а с т а ю щ е й цепочки гильбертовых пространств

$$\Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^*, \quad \Phi_1^* \subset \cdots \subset \Phi_k^* \subset \cdots$$

Удобно ввести обозначение $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$. Если еще обозначить пространство l_2 через Φ_0, то мы получим такую бесконечную в обе стороны цепочку гильбертовых пространств

$$\cdots \subset \Phi_k \subset \cdots \subset \Phi_1 \subset \Phi_0 \subset \Phi_{-1} \subset \cdots \subset \Phi_{-k} \subset \cdots,$$

в которой $\Phi_k^* = \Phi_{-k}$ при каждом $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Второе сопряженное пространство. Так как непрерывные линейные функционалы на линейном топологическом пространстве E сами образуют линейное топологическое пространство, — сопряженное к E пространство (E^*, b), — то можно говорить о пространстве E^{**} непрерывных линейных функционалов на E^*, т. е. о *втором сопряженном* к E и т. д.

Заметим, что всякий элемент x_0 из E определяет некоторый линейный функционал на E^*. Действительно, положим

$$\psi_{x_0}(f) = f(x_0), \tag{5}$$

где x_0 — фиксированный элемент из E, а f пробегает все E^*. Равенство (5) ставит в соответствие каждому f некоторое число $\psi_{x_0}(f)$, т. е. определяет функционал на E^*. Так как при этом

$$\psi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha\psi_{x_0}(f_1) + \beta\psi_{x_0}(f_2),$$

то этот функционал л и н е е н.

Далее, всякий такой функционал н е п р е р ы в е н на E^*. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ и A — ограниченное множество в E, содержащее x_0. Рассмотрим в E^* окрестность нуля $U(\varepsilon, A)$. По определению $U(\varepsilon, A)$, имеем

$$|\psi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad f \in U(\varepsilon, A).$$

Но это означает, что функционал ψ_{x_0} непрерывен в точке 0, а следовательно, и на всем пространстве E^*.

Мы получили, таким образом, отображение всего пространства E на некоторое подмножество пространства E^{**}. Это отображение, очевидно, линейно. Такое отображение E в E^{**} называется *естественным отображением пространства E во второе сопряженное*. Обозначим его π. Если на E есть достаточно много линейных функционалов (например, если E нормировано или хотя бы локально выпукло и отделимо), то это отображение взаимно однозначно, так как тогда для любых двух различных $x', x'' \in E$ существует такой функционал $f \in E^*$, что $f(x') \neq f(x'')$, т. е. $\psi_{x'}$ и $\psi_{x''}$ — различные функционалы на E^*.

Если к тому же $\pi(E) = E^{**}$, то (отделимое локально выпуклое) пространство E называется *полурефлексивным*. В пространстве E^{**} (как сопряженном к (E^*, b)) можно ввести сильную топологию, которую мы обозначим b^*. Если пространство E полурефлексивно и отображение π: $E \to E^{**}$ непрерывно, то E называется *рефлексивным* пространством. Можно показать, что отображение π^{-1} всегда непрерывно, поэтому, *если E рефлексивно, то естественное отображение π: $E \to E^{**}$ представляет собой изоморфизм между линейными топологическими пространствами E и $E^{**} = (E^{**}, b^*)$.*

Поскольку мы можем теперь каждый элемент из E рассматривать еще и как элемент пространства E^{**}, удобно для значений линейного функционала $f \in E^*$ вместо записи $f(x)$ ввести более симметричное обозначение:

$$f(x) = (f, x). \tag{6}$$

При фиксированном $f \in E^*$ мы можем рассматривать (f, x) как функционал на E, а при фиксированном x — как функционал на E^* (при этом уже x выступает в роли элемента из E^{**}).

Если E — нормированное пространство (следовательно, нормированы и пространства E^*, E^{**} и т. д.), *то естественное отображение пространства E в E^{**} есть изометрия.*

Действительно, пусть x — элемент из E. Обозначим его норму в E символом $\|x\|$, а норму его образа в E^{**} символом $\|x\|_2$. Покажем, что $\|x\| = \|x\|_2$. Пусть f — произвольный ненулевой элемент из E^*. Тогда

$$|(f, x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|, \quad \text{т. е.} \quad \|x\| \geqslant \frac{|(f, x)|}{\|f\|}$$

и, поскольку левая часть последнего неравенства не зависит от f,

$$\|x\| \geqslant \sup \frac{|(f, x)|}{\|f\|} = \|x\|_2.$$

С другой стороны (следствие 4 теоремы Хана — Банаха для нормированных пространств), для каждого $x_0 \in E$ найдется такой ненулевой линейный функционал f_0, что

$$|(f_0, x_0)| = \|f_0\| \cdot \|x_0\|, \tag{7}$$

поэтому

$$\|x\|_2 = \sup_{f \in E^*} \frac{|(f, x)|}{\|f\|} \geqslant \|x\|,$$

т. е. $\|x\| = \|x\|_2$, что и требовалось доказать. Таким образом, нормированное пространство E изометрично (вообще говоря, незамкнутому) линейному многообразию $\pi(E)$ в E^{**}; отождествляя E с $\pi(E)$, можно считать, что $E \subset E^{**}$.

Из изометричности естественного отображения $\pi: E \to E^{**}$ для нормированных пространств следует, что *понятия полурефлексивности и рефлексивности для нормированных пространств совпадают.*

Поскольку пространство, сопряженное к нормированному, полно, *всякое рефлексивное нормированное пространство E полно.*

Конечномерные евклидовы пространства и гильбертово пространство представляют собой простейшие примеры рефлексивных пространств (для них даже $E = E^*$).

Пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей представляет собой пример полного нерефлексивного пространства. Действительно, как мы показали выше (пример 2 § 2), сопряженным к c_0 является пространство l_1 всех абсолютно сходящихся числовых рядов, которому в свою очередь сопряжено пространство m всех ограниченных последовательностей.

Пространство $C[a, b]$ непрерывных функций на некотором отрезке $[a, b]$ тоже нерефлексивно. Мы, однако, не будем здесь приводить доказательства этого утверждения [1]).

Примером рефлексивного пространства, не совпадающего со своим сопряженным, может служить l_p при $1 < p \neq 2$ (так как $l_p^* = l_q$, где $1/p + 1/q = 1$, то $l_p^{**} = l_q^* = l_p$).

Упражнение. Докажите, что замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.

§ 3. Слабая топология и слабая сходимость

1. Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве. Рассмотрим линейное топологическое пространство E и совокупность всех непрерывных функционалов на нем. Если $f_1, \ldots, f_n$ — произволь-

[1]) Можно доказать даже следующее более сильное утверждение: не существует никакого нормированного пространства, для которого $C[a, b]$ было бы сопряженным пространством.

ный конечный набор таких функционалов и ε — положительное число, то множество

$$\{x: |f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{1}$$

открыто в E и содержит точку 0, т. е. представляет собой некоторую окрестность нуля. Пересечение двух таких окрестностей всегда содержит множество вида (1), и, следовательно, в E можно ввести топологию, для которой совокупность множеств вида (1) будет определяющей системой окрестностей нуля. Она называется *слабой топологией* пространства E. Слабая топология в E — это самая слабая из топологий, в которой непрерывны все линейные функционалы, непрерывные в исходной топологии этого пространства.

Ясно, что всякое множество в E, открытое в смысле слабой топологии, открыто и в исходной топологии пространства E, однако обратное, вообще говоря, неверно (множества вида (1) не обязаны образовывать определяющую систему окрестностей нуля в исходной топологии). По терминологии, принятой нами в § 5 гл. II, это означает, что слабая топология пространства E с л а б е е, чем его исходная топология. Тем самым оправдывается принятое для нее название.

Если в E существует достаточно много непрерывных линейных функционалов (например, если E нормировано), то слабая топология в E удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. Легко также проверить, что операции сложения и умножения на числа, определенные в E, непрерывны относительно слабой топологии этого пространства.

Даже в случае нормированных пространств слабая топология в E может не удовлетворять первой аксиоме счетности. Следовательно, эта топология, вообще говоря, не описывается на языке сходящихся последовательностей. Тем не менее сходимость в E, определяемая этой топологией, представляет собой важное понятие. Она называется *слабой сходимостью*. В отличие от нее, сходимость, определяемую исходной топологией пространства E (нормой, если E нормировано), называют *сильной сходимостью*.

Понятие слабой сходимости можно сформулировать следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ элементов из E называется *слабо сходящейся* к $x_0 \in E$, если для любого непрерывного линейного функционала $\varphi(x)$ на E числовая последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ сходится к $\varphi(x_0)$.

Действительно, считая для простоты $x_0 = 0$, предположим, что $\varphi(x_n) \to 0$ при всяком $\varphi \in E^*$. Тогда для всякой слабой окрестности

$$U = \{x: |\varphi_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, k\}$$

точки 0, найдется такое N, что $x_n \in U$ при всех $n \geqslant N$ (для этого достаточно выбрать N_i так, что $|\varphi_i(x_n)| < \varepsilon$ при $n \geqslant N_i$ и затем положить $N = \max N_i$). Обратно, если для каждой слабой окрестности нуля U существует такое N, что $x_n \in U$ для всех $n \geqslant N$, то условие $\varphi(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, очевидно, выполнено для каждого фиксированного $\varphi \in E^*$. Из того, что слабая топология пространства E слабее его сильной топологии, следует, что *всякая сильно сходящаяся последовательность сходится и слабо.* Обратное, вообще говоря, неверно (см. примеры ниже).

2. Слабая сходимость в нормированных пространствах. Рассмотрим подробнее понятие слабой сходимости применительно к нормированным пространствам.

Т е о р е м а 1. *Если $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность в нормированном пространстве, то существует такое постоянное число C, что*

$$\|x_n\| \leqslant C.$$

Иначе говоря, *всякая слабо сходящаяся последовательность в нормированном пространстве ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в E^* множества

$$A_{kn} = \{f: |(f, x_n)| \leqslant k\}, \quad k, n = 1, 2, \ldots$$

Эти множества замкнуты в силу непрерывности (f, x_n) как функции от f при фиксированном x_n. Следовательно, замкнуты (как пересечения замкнутых) и множества $A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$. В силу слабой сходимости $\{x_n\}$ последовательность (f, x_n) ограничена для каждого $f \in E^*$, поэтому

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Так как пространство E^* полно, то по теореме Бэра (§ 3 гл. II) хоть одно из множеств A_k, скажем A_{k_0}, должно быть плотно в некотором шаре $B[f_0, \varepsilon]$, а так как A_{k_0} замкнуто, то это означает, что

$$B[f_0, \varepsilon] \subset A_{k_0}.$$

Но это значит, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена на шаре $B\{f_0, \varepsilon\}$, а следовательно, и на любом шаре в E^*, в частности на единичном шаре этого пространства. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена как последовательность элементов из E^{**}. Но в силу изометричности естественного вложения E в E^{**} это означает ограниченность $\{x_n\}$ и в E.

Замечание. При доказательстве ограниченности последовательности $\{x_n\}$ по норме мы воспользовались лишь тем, что числовая последовательность (f, x_n) ограничена при каждом $f \in E^*$. Таким образом, если последовательность $\{x_n\}$ в E такова, что числовая последовательность (f, x_n) ограничена при каждом $f \in E^*$, то существует такая постоянная C_1, что $\|x_n\| \leqslant C$. Это утверждение можно обобщить: *всякое слабо ограниченное* (т. е. ограниченное в слабой топологии) *подмножество Q нормированного пространства E сильно ограничено* (т. е. содержится в некотором шаре). Действительно, допустим, найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset Q$, что $\|x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Так как Q слабо ограничено, то и множество $\{x_n\}$ слабо ограничено, т. е. поглощается любой слабой окрестностью нуля; в частности, для любого $f \in E^*$ найдется такое N, что $\{x_n\} \subset N\{x : |(f, x)| < 1\}$, откуда $|(f, x_n)| < N$ для всех n. Но это в силу сделанного выше замечания противоречит предположению $\|x_n\| \to \infty$. Если учесть, что слабая ограниченность множества Q означает, что на нем ограничен любой непрерывный линейный функционал, то мы приходим к следующему важному результату: *для того чтобы подмножество Q нормированного пространства было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы на Q был ограничен любой функционал $f \in E^*$.*

Следующая теорема часто бывает полезна для фактической проверки слабой сходимости той или иной последовательности.

Теорема 2. *Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства E слабо сходится к $x \in E$, если:*

1) *$\|x_n\|$ ограничены в совокупности некоторой константой M;*

2) *$f(x_n) \to f(x)$ для всякого $f \in \Delta$, где Δ — некоторое множество, линейная оболочка которого всюду плотна в E^*.*

Доказательство. Из условия 2) и определения действий над линейными функционалами следует, что если φ — линейная комбинация элементов из Δ, то

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

Пусть теперь φ — произвольный элемент из E^* и $\{\varphi_k\}$ — сходящаяся к φ последовательность линейных комбинаций элементов из Δ. Покажем, что $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Пусть M таково, что

$$\|x_n\| \leqslant M,\ n = 1, 2, \ldots, \|x\| \leqslant M.$$

Оценим разность $|\varphi(x_n) - \varphi(x)|$. Так как $\varphi_k \to \varphi$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое K, что $\|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant K$. Поэтому

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leqslant |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|.$$

Но, по условию, $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\varphi(x_n) - \varphi(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всякого $\varphi \in E^*$.

Примеры. Посмотрим, какой смысл имеет понятие слабой сходимости в некоторых конкретных пространствах.

1. *В конечномерном евклидовом пространстве* $\mathbf{R}^n$ слабая сходимость совпадает с сильной. Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — какой-либо ортогональный нормированный базис в $\mathbf{R}^n$ и $\{x_k\}$ — последовательность в $\mathbf{R}^n$, слабо сходящаяся к элементу x. Пусть

$$x_k = x_k^{(1)} e_1 + \cdots + x_k^{(n)} e_n,$$
$$x = x^{(1)} e_1 + \cdots + x^{(n)} e_n.$$

Тогда

$$x_k^{(1)} = (x_k, e_1) \to (x, e_1) = x^{(1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_k^{(n)} = (x_k, e_n) \to (x, e_n) = x^{(n)},$$

т. е. последовательность $\{x_n\}$ покоординатно сходится к x. Но тогда

$$\rho(x_k, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_k^{(i)} - x^{(i)}\right)^2 \right)^{1/2} \to 0,$$

т. е. $\{x_n\}$ сильно сходится к x. Поскольку из сильной сходимости всегда вытекает слабая, равносильность этих сходимостей в $\mathbf{R}^n$ доказана.

2. *Слабая сходимость в* l_2. Для слабой сходимости ограниченной последовательности $\{x_k\}$ к x достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(x_k, e_i) = x_k^{(i)} \to x^{(i)} = (x, e_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ \ldots$$

Действительно, линейные комбинации элементов e_i всюду плотны в пространстве l_2 (совпадающем, как мы видели,

со своим сопряженным). Поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 2.

Таким образом, слабая сходимость ограниченной последовательности $\{x_k\}$ в l_2 означает, что числовая последовательность $x_k^{(i)}$ координат этих векторов сходится для каждого $i = 1, 2, \ldots$ Иначе говоря, слабая сходимость совпадает с покоординатной (при условии ограниченности). Нетрудно видеть, что в l_2 слабая сходимость не совпадает с сильной. Действительно, покажем, что последовательность $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ слабо сходится в l_2 к 0. Всякий линейный функционал f в l_2 записывается как скалярное произведение $f(x) = (x, a)$ вектора $x \in l_2$ на некоторый фиксированный вектор $a = (a_1, a_2, \ldots)$. Поэтому $f(e_n) = a_n$, и поскольку $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ для всякого $a \in l_2$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0$$

для каждого линейного функционала в l_2.

В то же время в сильном смысле последовательность $\{e_n\}$ ни к какому пределу не сходится.

Упражнения. 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства H слабо сходится к элементу x, причем $\|x_n\| \to \|x\|$ при $n \to \infty$. Доказать, что в этом случае последовательность $\{x_n\}$ сильно сходится к x, т. е. $\|x_n - x\| \to 0$.

2. Доказать, что утверждение упражнения 1 сохранится, если условие $\|x_n\| \to \|x\|$ заменить условием $\|x_n\| \leqslant \|x\|$ для всех n или условием $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant \|x\|$.

3. Пусть H — (сепарабельное) гильбертово пространство и Q — его ограниченное подмножество. Тогда топология в Q, индуцируемая слабой топологией пространства H, может быть задана некоторой метрикой.

4. Докажите, что всякое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства замкнуто в слабой топологии (в частности, всякое замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства слабо замкнуто). Приведите пример замкнутого множества в гильбертовом пространстве, не являющегося слабо замкнутым.

3. *Слабая сходимость в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций.* Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность функций из $C[a, b]$, слабо сходящаяся к функции $x(t)$. Последовательность $\{x_n(t)\}$ ограничена по норме $C[a, b]$. Среди функционалов, определенных на $C[a, b]$, имеются, в частности, функционалы δ_{t_0}, каждый из которых есть значение функции в некоторой фиксированной точке t_0 (см. пример 4 п. 2 § 1). Для каждого такого функционала δ_{t_0} условие

$$\delta_{t_0}(x_n) \to \delta_{t_0}(x)$$

означает, что

$$x_n(t_0) \to x(t_0).$$

Таким образом, если последовательность $\{x_n(t)\}$ слабо сходится, то она:

1) равномерно ограничена, т. е. $|x_n(t)| \leqslant C$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ и $a \leqslant t \leqslant b$;

2) сходится в каждой точке.

Можно показать, что совокупность этих двух условий не только необходима, но и достаточна для слабой сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$ в $C[a, b]$. Иначе говоря, слабая сходимость в $C[a, b]$ совпадает с поточечной (при условии ограниченности).

Ясно, что эта сходимость не совпадает со сходимостью по норме $C[a, b]$, т. е. равномерной сходимостью непрерывных функций. (Приведите соответствующий пример.)

3. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве. В п. 2 предыдущего параграфа мы ввели в сопряженном пространстве E^* топологию, названную нами сильной, приняв за систему окрестностей нуля совокупность множеств вида

$$U_{\varepsilon A} = \{f: |f(x)| < \varepsilon,\ x \in A\},$$

где A — произвольное ограниченное множество в E, а ε — произвольное положительное число. Если мы здесь вместо всех ограниченных множеств будем рассматривать все конечные подмножества $A \subset E$, то мы получим так называемую *слабую топологию в сопряженном пространстве* E^*. Поскольку всякое конечное множество $A \subset E$ ограничено (обратное, вообще говоря, не верно), ясно, что слабая топология пространства E^* слабее, чем сильная топология этого пространства. Вообще говоря, эти две топологии не совпадают.

Слабая топология, введенная в E^*, определяет в этом пространстве некоторую сходимость, называемую *слабой сходимостью функционалов*. Слабая сходимость линейных функционалов представляет собой важное понятие, играющее существенную роль во многих вопросах функционального анализа, в частности, в теории так называемых обобщенных функций, о которых будет идти речь в следующем параграфе.

Слабая сходимость последовательности $\{\varphi_n\}$ линейных функционалов есть, очевидно, сходимость этой последовательности на каждом фиксированном элементе

из E. Иными словами, последовательность $\{\varphi_n\}$ называется *слабо сходящейся к* $\varphi \in E^*$, если для каждого $x \in E$ выполнено соотношение

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x).$$

Ясно, что и в сопряженном пространстве последовательность, сходящаяся в сильной топологии, сходится и слабо (но не наоборот).

Пусть E (а следовательно, и E^*) — банахово пространство. Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 1.

Т е о р е м а 1*. *Если* $\{f_n\}$ *— слабо сходящаяся последовательность линейных функционалов на банаховом пространстве, то существует такое постоянное число* C, *что*

$$\|f_n\| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Иначе говоря, *всякая слабо сходящаяся последовательность элементов пространства, сопряженного банахову пространству, ограничена по норме.*

Доказательство не отличается от доказательства теоремы 1.

Следующая теорема вполне аналогична теореме 2.

Т е о р е м а 2*. *Последовательность линейных функционалов* $\{\varphi_n\}$ *из* E^* *слабо сходится к* $\varphi \in E^*$, *если*:

1) *эта последовательность ограничена, т. е.*

$$\|\varphi_n\| \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

2) *соотношение* $(\varphi_n, x) \to (\varphi, x)$ *выполнено для всех* x, *принадлежащих некоторому множеству, линейные комбинации элементов которого всюду плотны в* E.

Доказательство то же, что в теореме 2.

Рассмотрим п р и м е р. Пусть E есть пространство $C[a, b]$ непрерывных функций [1]) и

$$\varphi(x) = x(0),$$

т. е. φ есть δ-функция (см. § 1, п. 2, пример 4). Пусть, далее, $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность непрерывных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\varphi_n(t) = 0$ при $|t| > 1/n$, $\varphi_n(t) \geqslant 0$;

2) $\int_a^b \varphi_n(t)\,dt = 1$.

[1]) Мы считаем, что $0 \in [a, b]$. Можно было бы, конечно, вместо точки $t = 0$ взять любую другую.

Тогда для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $x(t)$ с помощью теоремы о среднем получаем

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt = \int_{-1/n}^{1/n} \varphi_n(t)\, x(t)\, dt \to x(0) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Выражение

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, x(t)\, dt$$

представляет собой линейный функционал на $C[a, b]$. Таким образом, δ-функцию можно представить как предел в смысле слабой сходимости линейных функционалов на $C[a, b]$ последовательности «обычных» функций.

З а м е ч а н и е. Пространство E^* линейных функционалов на некотором пространстве E мы можем рассматривать двояко: или как пространство, сопряженное к исходному пространству E, или же считать само E^* основным пространством и связывать с ним сопряженное к нему пространство E^{**}. В соответствии с этим мы можем в E^* вводить слабую топологию двумя способами: либо как в пространстве функционалов, определяя окрестности в E^* с помощью всевозможных конечных наборов элементов из E, либо как в основном пространстве, с помощью пространства E^{**}. В случае рефлексивного пространства это, разумеется, одно и то же. Если же E не рефлексивно, то это — две различные топологии в E^*. Чтобы избежать возможной здесь путаницы, будем слабую топологию, определяемую в основном пространстве (т. е. топологию в E^*, определяемую с помощью E^{**}) называть просто *слабой топологией*, а слабую топологию в пространстве функционалов (т. е. топологию в E^*, определяемую с помощью E) называть $*$*-слабой топологией*. Очевидно, что $*$-слабая топология в E^* слабее, чем слабая топология пространства E^* (т. е. в слабой топологии не меньше открытых множеств, чем в $*$-слабой топологии).

4. Ограниченные множества в сопряженном пространстве. В различных применениях понятия слабой сходимости линейных функционалов важную роль играет следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Если E — сепарабельное линейное нормированное пространство, то в любой ограниченной последовательности непрерывных линейных функционалов на E содержится слабо сходящаяся подпоследовательность.*

Доказательство. Выберем в E счетное всюду плотное множество $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Если $\{\varphi_n\}$ — ограниченная (по норме) последовательность линейных функционалов на E, то числовая последовательность

$$\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_1), \ldots$$

ограничена. Поэтому из $\{\varphi_n\}$ можно так выбрать подпоследовательность

$$\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}, \ldots,$$

чтобы числовая последовательность $\varphi_1^{(1)}(x_1), \ldots$ $\ldots, \varphi_n^{(1)}(x_1), \ldots$ сходилась. Далее, из $\{\varphi_n^{(1)}\}$ можно так выбрать подпоследовательность

$$\varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_n^{(2)}, \ldots,$$

чтобы сходилась последовательность $\varphi_1^{(2)}(x_2), \ldots$ $\ldots, \varphi_n^{(2)}(x_2), \ldots$ Продолжая этот процесс, получим такую систему последовательностей

$$\begin{array}{l} \varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)}, \ldots, \\ \varphi_1^{(2)}, \ldots, \varphi_n^{(2)}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(каждая из которых содержится в предыдущей), что $\{\varphi_n^{(k)}\}$ сходится в точках $x_1, \ldots, x_k$. Тогда, взяв «диагональ»

$$\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}, \ldots$$

мы получим такую подпоследовательность линейных функционалов, что $\varphi_1^{(1)}(x_n), \varphi_2^{(2)}(x_n), \ldots$ сходится для всех n. Но тогда (в силу теоремы 2*) последовательность $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(2)}(x), \ldots$ сходится и для любого $x \in E$.

Эта теорема вместе с теоремой 1* означает, что в пространстве E^*, сопряженном сепарабельному банахову пространству, ограниченные подмножества, и только они, являются счетнопредкомпактными в $*$-слабой топологии. Покажем, что на самом деле здесь имеет место предкомпактность, а не только счетная предкомпактность.

Докажем прежде всего следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть S^* — замкнутый единичный шар пространства E^*, сопряженного к сепарабельному нормированному пространству E. Топологию, индуцированную в S^* $*$-слабой топологией пространства E^*, можно задать при помощи метрики*

$$\rho(f, g) = \sum 2^{-n} |(f - g, x_n)|, \qquad (2)$$

где $\{x_n\}$ — *некоторое фиксированное счетное всюду плотное множество в единичном шаре S пространства E.*

Доказательство. Ясно, что функция $\rho(f, g)$ обладает всеми свойствами расстояния; кроме того, она инвариантна относительно сдвигов:

$$\rho(f + h, g + h) = \rho(f, g).$$

Поэтому достаточно проверить, что система окрестностей нуля, определяемая в S^* слабой топологией пространства E^*, эквивалентна системе окрестностей нуля, определяемой в S^* расстоянием (2), т. е. что а) любой «шар»

$$Q_\varepsilon = \{f:\ \rho(f,\ 0) < \varepsilon\}$$

содержит пересечение S^* с некоторой слабой окрестностью нуля в E^* и что б) всякая слабая окрестность нуля в E^* содержит пересечение S^* с некоторым Q_ε.

Выберем N так, что $2^{-N} < \varepsilon/2$ и рассмотрим слабую окрестность нуля

$$V = V_{x_1, \ldots, x_N;\ \varepsilon/2} = \{f: |(f, x_k)| < \varepsilon/2,\quad k = 1, \ldots, N\}.$$

Тогда, если $f \in S^* \cap V$, то

$$\rho(f,\ 0) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |(f,\ x_n)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} |(f,\ x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon,$$

т. е. $S^* \cap V \subset Q_\varepsilon$. Тем самым утверждение а) доказано. Докажем утверждение б). Пусть

$$U = U_{y_1, \ldots, y_m;\ \delta} = \{f:\ |(f,\ y_k)| < \delta,\quad k = 1, \ldots, m\}$$

— некоторая $*$-слабая окрестность нуля в E^*. Можно считать, что $\|y_k\| \leqslant 1, k = 1, \ldots, m$; так как множество $\{x_n\}$ всюду плотно в S, то найдутся такие номера $n_1, \ldots, n_m$, что $\|y_k - x_{n_k}\| < \delta/2$ $(k = 1, \ldots, m)$. Пусть $N = \max(n_1, \ldots, n_m)$ и $\varepsilon = 2^{-(N+1)}\delta$. Тогда при $f \in S^* \cap Q_\varepsilon$ из неравенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |(f,\ x_n)| < \varepsilon$$

получаем, что $|(f, x_n)| < 2^n\varepsilon$; в частности,

$$|(f,\ x_{n_k})| < 2^{n_k}\varepsilon \leqslant 2^N\varepsilon = \delta/2.$$

Следовательно, для всех $k = 1, \ldots, m$ получаем

$$|(f, y_k)| \leqslant |(f, x_{n_k})| + |(f, y_k - x_{n_k})| < \\ < \delta/2 + \|f\| \cdot \|y_k - x_{n_k}\| < \delta.$$

Таким образом, $S^* \cap Q_\varepsilon \subset U$. Теорема доказана.

Ясно, что этот результат автоматически распространяется на любой шар, а значит, и на любое ограниченное подмножество $M \subset E^*$.

Мы показали (теорема 3), что из каждой ограниченной последовательности в E^* можно выбрать $*$-слабо сходящуюся подпоследовательность. Иначе говоря, в пространстве E^*, сопряженном сепарабельному линейному нормированному и снабженном $*$-слабой топологией, каждое ограниченное подмножество M счетно-предкомпактно. Но в силу последней теоремы каждое такое множество есть метризуемое топологическое пространство, а для метрических пространств компактность и счетная компактность совпадают. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 3*. *Всякое ограниченное множество M в пространстве E^*, сопряженном сепарабельному нормированному пространству, предкомпактно в смысле $*$-слабой топологии пространства E^*.*

Покажем теперь, что если E — сепарабельное линейное нормированное пространство, то всякий замкнутый шар в пространстве (E^*, b) замкнут в $*$-слабой топологии пространства E^*.

Так как сдвиг в пространстве E^* переводит класс замкнутых (в $*$-слабой топологии) множеств в себя, то достаточно доказать, что в $*$-слабой топологии замкнут всякий шар вида $S_c^* = \{f: \|f\| \leqslant c\}$. Пусть $f_0 \notin S_c^*$. По определению нормы функционала найдется такой вектор $x \in E$, что $\|x\| = 1$, $f_0(x) = \alpha > c$. Тогда множество $U = \left\{f: f(x) > \frac{\alpha + c}{2}\right\}$ будет $*$-слабой окрестностью функционала f_0, не содержащей ни одного элемента из шара S_c^*; следовательно, шар S_c^* замкнут в $*$-слабой топологии.

Из доказанного утверждения и теоремы 3* вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Всякий замкнутый шар в пространстве, сопряженном сепарабельному нормированному пространству, компактен в $*$-слабой топологии.*

Изложенные выше результаты об ограниченных множествах в сопряженных пространствах могут быть перенесены с нормированных пространств на произвольные локально выпуклые. См. по этому поводу, например, [42].

§ 4. Обобщенные функции

1. Расширение понятия функции. В различных вопросах анализа термин «функция» приходится понимать с разной степенью общности. Иногда рассматриваются непрерывные функции, в других вопросах приходится предполагать, что речь идет о функциях, дифференцируемых один или несколько раз, и т. д. Однако в ряде случаев классическое понятие функции, даже трактуемое в самом широком смысле, т. е. как произвольное правило, относящее каждому значению x из области определения этой функции некоторое число $y = f(x)$, оказывается недостаточным. Вот два важных примера.

1) Распределение масс вдоль прямой удобно задавать плотностью этого распределения. Однако, если на прямой существуют точки, несущие положительную массу, то плотность такого распределения заведомо не может быть описана никакой «обычной» функцией.

2) Применяя аппарат математического анализа к тем или иным задачам, мы сталкиваемся с невыполнимостью некоторых операций, например, функцию, не имеющую производной (в некоторых точках или даже всюду), нельзя дифференцировать, если производную понимать как «обычную» функцию. Конечно, затруднений такого типа можно было бы избежать, ограничившись, скажем, рассмотрением одних только аналитических функций. Однако такое сужение запаса допустимых функций во многих случаях весьма нежелательно.

Оказывается, однако, что подобные затруднения можно преодолеть путем не сужения, а существенного расширения понятия функции, вводя так называемые обобщенные функции. Основой для введения соответствующих определений нам послужит понятие сопряженного пространства, рассмотренное выше.

Подчеркнем еще раз, что введение обобщенных функций было вызвано вовсе не стремлением к возможно большему расширению понятий анализа, а совершенно конкретными задачами. По существу, в физике обобщенные функции использовались уже довольно давно, во всяком

случае раньше, чем была построена строгая математическая теория обобщенных функций.

Прежде чем переходить к точным определениям, изложим основную идею построения.

Пусть f — фиксированная функция на прямой, интегрируемая на каждом конечном интервале, и пусть φ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль вне некоторого конечного интервала (такие функции мы в дальнейшем будем называть *финитными*). Каждой такой функции φ можно с помощью фиксированной функции f сопоставить число

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (1)$$

(фактически, в силу финитности $\varphi(x)$ интеграл берется по некоторому конечному интервалу). Иначе говоря, функцию f можно рассматривать как функционал (линейный, в силу основных свойств интеграла) на некотором пространстве финитных функций. Однако функционалами вида (1) не исчерпываются все функционалы, которые можно ввести на таком пространстве; сопоставляя, например, каждой функции φ ее значение в точке $x = 0$, мы получим линейный функционал, не представимый в виде (1). Таким образом, функции $f(x)$ естественным образом включаются в некоторое более широкое множество — совокупность всех линейных функционалов на финитных функциях.

Запас функций φ можно выбирать различным образом; например, можно было бы взять все непрерывные финитные функции. Однако, как будет ясно из дальнейшего, разумно подчинить допустимые функции φ, помимо непрерывности и финитности, еще и достаточно жестким условиям гладкости.

2. Пространство основных функций. Перейдем теперь к точным определениям. Рассмотрим на прямой совокупность K всех финитных функций φ, имеющих непрерывные производные всех порядков [1]). Функции, принадлежащие K, образуют линейное пространство (с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа). В этом пространстве нельзя ввести норму, которая отвечала бы излагаемой ниже теории, однако в нем естественным способом вводится понятие сходимости.

[1]) Интервал, вне которого функция φ равна 0, может быть различным для различных $\varphi \in K$.

Последовательность $\{\varphi_n\}$ элементов из K называется *сходящейся к функции* $\varphi \in K$; если: 1) существует интервал, вне которого все φ_n равны нулю; 2) последовательность производных [1]) $\{\varphi_n^{(k)}\}$ порядка k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) сходится на этом интервале равномерно к $\varphi^{(k)}$. (Равномерность сходимости по различным k не предполагается.)

Линейное пространство K с той сходимостью, которую мы в нем определили, мы будем называть *основным пространством*, а его элементы — *основными функциями*.

Нетрудно описать топологию в K, которой подчиняется заданная в K сходимость. Такая топология порождается системой окрестностей нуля, каждая из которых задается конечным набором $\gamma_0, \ldots, \gamma_m$ непрерывных положительных функций и состоит из тех принадлежащих K функций, которые при всех x удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(x)| < \gamma_0(x), \quad \ldots, \quad |\varphi^{(m)}(x)| < \gamma_m(x).$$

Проверка того, что этой топологии действительно подчиняется описанная выше сходимость в K, предоставляется читателю.

У п р а ж н е н и е. Обозначим через K_m подпространство пространства K, состоящего из всех функций $\varphi \in K$, равных 0 вне отрезка $[-m, m]$. В пространстве K_m можно ввести структуру счетно-нормированного пространства, полагая

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ |x| \leqslant m}} |\varphi^{(k)}(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Проверьте, что топология (соответственно сходимость последовательностей) в пространстве K_m, порождаемая этой системой норм, совпадает с топологией (соответственно сходимостью), индуцированной в K_m описанной выше топологией (сходимостью) в пространстве K. Ясно, что $K_1 \subset \ldots \subset K_m \subset \ldots$, причем $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$. Покажите, что множество $Q \subset K$ тогда и только тогда ограничено относительно введенной в K топологии, когда существует такое m, что Q является ограниченным подмножеством счетно-нормированного пространства K_m. Пусть T — линейный функционал на пространстве K; докажите, что следующие четыре условия равносильны: (а) функционал T непрерывен относительно топологии пространства K; (б) функционал T ограничен на каждом ограниченном множестве $Q \subset K$; (в) если $\varphi_n \in K$ и $\varphi_n \to 0$ (в смысле введенной в K сходимости последовательностей), то $T(\varphi_n) \to 0$; (г) для каждого m сужение T_m функционала T на подпространство $K_m \subset K$ есть непрерывный функционал на K_m.

3. Обобщенные функции.

О п р е д е л е н и е. 1. *Обобщенной функцией* (заданной на прямой $-\infty < x < \infty$) называется непрерывный функционал $T(\varphi)$ на основном пространстве K. При этом

[1]) Под производной нулевого порядка понимается, как обычно, сама функция.

непрерывность функционала понимается в том смысле, что $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$, если последовательность φ_n сходится к φ в основном пространстве K.

Заметим, прежде всего, что всякая интегрируемая на любом конечном интервале функция $f(x)$ порождает некоторую обобщенную функцию. Действительно, выражение

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

есть непрерывный линейный функционал на K. Такие обобщенные функции мы в дальнейшем будем называть *регулярными*, а все остальные, т. е. не представимые в виде (2), — *сингулярными*.

Приведем некоторые примеры сингулярных обобщенных функций.

1. «δ-функция»:

$$T(\varphi) = \varphi(0).$$

Это — непрерывный линейный функционал на K, т. е., по введенной выше терминологии, обобщенная функция. Этот функционал обычно записывают в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx, \tag{3}$$

понимая по $\delta(x)$ «функцию», равную нулю при всех $x \neq 0$ и обращающуюся в точке $x = 0$ в бесконечность так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Мы рассматривали уже δ-функцию в § 1 как функционал на пространстве всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке. Однако рассмотрение δ-функции как функционала на K имеет определенные преимущества, например, позволяет ввести для нее понятие производной.

2. «Смещенная δ-функция». Пусть

$$T(\varphi) = \varphi(a).$$

Этот функционал естественно записать по аналогии с обозначением (3) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

3. «Производная δ-функции». Каждой $\varphi \in K$ ставится в соответствие число $-\varphi'(0)$. Несколько ниже мы выясним, почему этот функционал естественно считать производной функционала, указанного в первом примере.

4. Рассмотрим функцию $1/x$. Она не интегрируема ни на каком интервале, содержащем точку нуль. Однако для каждой $\varphi \in K$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{x}\, dx$$

существует и конечен в смысле главного значения по Коши. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{x}\, dx = \int_{-R}^{R} \varphi(x) \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \int_{-R}^{R} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx.$$

Здесь $(-R, R)$ — интервал, вне которого φ обращается в нуль. Первый из стоящих справа интегралов существует в обычном смысле (под знаком интеграла стоит непрерывная функция), а второй интеграл равен нулю в смысле главного значения. Таким образом, $1/x$ определяет некоторый функционал на K, т. е. обобщенную функцию. Можно доказать, что ни одна из обобщенных функций, приведенных в примерах 1—4, не является регулярной (т. е. не представляется в виде (2) ни с какой локально интегрируемой функцией f).

4. Действия над обобщенными функциями. Для обобщенных функций, т. е. непрерывных линейных функционалов на K, определены операции сложения и умножения на числа. При этом, очевидно, для регулярных обобщенных функций (т. е. «обычных» функций на прямой) сложение их как обобщенных функций (т. е. линейных функционалов) совпадает с обычной операцией сложения функций. То же самое относится и к умножению на числа.

Введем в пространстве обобщенных функций операцию предельного перехода. Мы скажем, что последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ сходится к f, если для каждого $\varphi \in K$ выполнено соотношение

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi).$$

Иначе говоря, сходимость последовательности обобщенных функций мы определяем как ее сходимость на каждом элементе из K. Пространство обобщенных функций с этой сходимостью будем обозначать K^*.

Если α — бесконечно дифференцируемая функция, то естественно определить произведение α на обобщенную функцию f формулой

$$(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$$

(выражение, стоящее здесь справа, имеет смысл, так как $\alpha\varphi \in K$). Все эти операции — сложение, умножение на числа и на бесконечно дифференцируемые функции, — непрерывны.

Произведение двух обобщенных функций мы не вводим. Можно показать, что определить такое произведение невозможно, если потребовать, чтобы эта операция была непрерывна, а для регулярных обобщенных функций совпадала бы с обычным умножением функций.

Определим теперь для обобщенных функций операцию дифференцирования и рассмотрим ее свойства.

Пусть сначала T — функционал на K, определяемый некоторой непрерывно дифференцируемой функцией f:

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Его производной естественно назвать функционал dT/dx, определяемый формулой

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что каждая основная функция φ обращается в нуль вне некоторого конечного интервала, имеем

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx;$$

таким образом, мы получили для dT/dx выражение, в котором производная функции f не участвует. Эти соображения подсказывают следующее определение:

Определение 2. *Производной* dT/dx обобщенной функции T называется функционал, определяемый формулой

$$\frac{dT}{dx}(\varphi) = -T(\varphi').$$

Ясно, что функционал, определяемый этой формулой, линеен и непрерывен, т. е. представляет собой обобщенную функцию. Аналогично определяются вторая, третья и дальнейшие производные.

Обозначая обобщенную функцию символом f, мы будем обозначать ее производную (понимаемую в определенном только что смысле) обычным символом f'.

Непосредственно из определения производной обобщенной функции вытекает справедливость следующих утверждений:

1. *Всякая обобщенная функция имеет производные всех порядков.*

2. *Если последовательность обобщенных функций* $\{f_n\}$ *сходится к обобщенной функции* f (в смысле определения сходимости обобщенных функций), *то последовательность производных* $\{f_n'\}$ *сводится к производной* f' *предельной функции. То же самое верно и для производных любого порядка.*

Это равносильно тому, что *всякий сходящийся ряд, составленный из обобщенных функций, можно дифференцировать почленно любое число раз.*

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Из сказанного выше ясно, что если f — регулярная (т. е. «настоящая») функция, производная которой существует и непрерывна (или кусочно-непрерывна), то производная от нее как от обобщенной функции совпадает с ее производной в обычном смысле.

2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта функция, называемая *функцией Хевисайда*, определяет линейный функционал

$$(f,\ \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx.$$

В соответствии с определением производной обобщенной функции имеем

$$(f',\ \varphi) = -(f,\ \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0)$$

(поскольку φ обращается в 0 на бесконечности). Таким образом, производная функции Хевисайда (5) есть δ-функция.

3. Из примеров 1 и 2 ясно, что если f — функция, имеющая в точках x_1, x_2, ... скачки, равные h_1, h_2, ... и дифференцируемая (в обычном смысле) в остальных точках, то производная от нее (как от обобщенной функции) представляет собой сумму обычной производной f' (в тех точках, где она существует) и выражения вида $\sum_i h_i \delta(x - x_i)$.

4. Применив определение производной к δ-функции, получим, что эта производная представляет собой функционал, принимающий на каждой функции из K значение $-\varphi'(0)$. А это и есть тот самый функционал, который мы уже назвали «производной от δ-функции».

5. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{6}$$

Его суммой служит функция, имеющая период 2π и определяемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ формулами

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \pi, \\ -\dfrac{\pi + x}{2} & \text{при} \quad -\pi \leqslant x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Обобщенная производная от нее равна

$$-\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \tag{7}$$

Это — некоторая обобщенная функция (применяя ее к любой финитной функции $\varphi(x)$, мы всегда будем получать лишь конечное число отличных от нуля слагаемых). С другой стороны, дифференцируя ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ почленно, мы получаем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

Однако в смысле сходимости обобщенных функций этот ряд сходится [а именно, к выражению (7)]. Таким образом, понятие обобщенной функции позволяет приписать некоторый вполне определенный смысл сумме ряда, который в обычном смысле расходится. То же самое относится

и ко многим расходящимся интегралам. С этим обстоятельством приходится часто встречаться в квантовой теории поля и ряде других областей теоретической физики. Впрочем, такая ситуация возникает уже при решении элементарных задач математической физики с помощью метода Фурье. Например, при решении уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ возникают тригонометрические ряды, имеющие вторые производные по x и по t только в смысле теории обобщенных функций, и значит, удовлетворяющие этому уравнению тоже только в смысле этой теории.

5. **Достаточность запаса основных функций.** Мы определили обобщенные функции как линейные функционалы на некотором пространстве — пространстве K финитных бесконечно дифференцируемых функций. Можно было бы основное пространство выбрать и как-либо иначе. Рассмотрим соображения, которые определили выбор K в качестве пространства основных функций. Они применимы и в других случаях. Наложив на элементы из K жесткие требования финитности и бесконечной дифференцируемости, мы получили, во-первых, большой запас обобщенных функций (сужение основного пространства приводит, очевидно, к расширению сопряженного пространства), а во-вторых, бо́льшую свободу в применении к обобщенным функциям основных операций анализа (предельный переход, дифференцирование). Но вместе с тем пространство основных функций K является не слишком узким. В нем достаточно много элементов для того, чтобы с их помощью можно было различать непрерывные функции. Точнее говоря, *пусть f_1 и f_2 — две различные непрерывные* (а следовательно, и локально интегрируемые) *функции на прямой. Тогда существует такая функция* $\varphi \in K$, *что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\varphi(x)\,dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Действительно, положим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Если $f(x) \not\equiv 0$, то существует такая точка x_0, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда $f(x)$ сохраняет знак в некотором интервале (α, β), содержащем точку x_0. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(\beta-x)(x-\alpha)}} & \text{при } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{при остальных } x; \end{cases}$$

эта функция равна нулю вне (α, β) и положительна внутри этого интервала; кроме того, она имеет производные всех порядков, так что $\varphi \in K$ (проверьте существование производных в точках $x = \alpha$ и $x = \beta$!). При этом, очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0.$$

Мы показали, таким образом, что пространство K достаточно для различения любых двух непрерывных функций [1]).

6. Восстановление функции по производной. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций. Дифференциальные уравнения — одна из основных областей, где применяется теория обобщенных функций. Именно задачи, связанные с уравнениями, в значительной мере и стимулировали развитие этой теории. В основном она применяется к уравнениям в частных производных, которые мы здесь не рассматриваем. Однако мы коснемся здесь некоторых простейших вопросов, относящихся к решению (обыкновенных) дифференциальных уравнений с обобщенными функциями. Начнем с простейшего уравнения вида

$$y' = f(x)$$

($f(x)$ — обобщенная, или «обычная», функция), т. е. с задачи о восстановлении функции по ее производной. Начнем со случая $f(x) \equiv 0$.

Теорема 1. *Только константы служат решениями (в классе обобщенных функций) уравнения*

$$y' = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Уравнение (9) означает, что

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = 0 \tag{10}$$

для любой основной функции $\varphi \in K$. Рассмотрим совокупность $K^{(1)}$ тех основных функций, каждая из которых может быть представлена как производная какой-то основной функции. Очевидно, что $K^{(1)}$ есть линейное подпространство K. Положим $\varphi_1(x) = -\varphi'(x)$; функция φ_1 про-

[1]) Это утверждение можно распространить и на функции, существенно более общие, чем непрерывные, но для этого нужно пользоваться понятием интегрируемости по Лебегу, о чем речь будет идти в следующей главе.

бегает $K^{(1)}$, когда φ пробегает K. Равенство (10) определяет функционал y на $K^{(1)}$.

Заметим теперь, что основная функция φ принадлежит $K^{(1)}$ в том и только том случае, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 0, \tag{11}$$

т. е. $K^{(1)}$ есть ядро функционала $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$. Действительно, если $\varphi(x) = \psi'(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \tag{12}$$

Обратно, выражение

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \tag{13}$$

есть бесконечно дифференцируемая функция. Если (11) выполнено, то $\psi(x)$ — финитная функция. Ее производная равна $\varphi(x)$. В соответствии с результатами п. 6 § 1 гл. III любую основную функцию $\varphi \in K$ можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0, \quad \varphi_1 \in K^{(1)},$$

где φ_0 — фиксированная основная функция, не принадлежащая $K^{(1)}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1.$$

Для этого достаточно положить

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \varphi_1(x) = \varphi(x) - c\varphi_0(x).$$

Таким образом, если задать значение функционала y на основной функции $\varphi_0(x)$, то тем самым он будет однозначно определен на всем K. Положив $(y, \varphi_0) = \alpha$, получим

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) + c(y, \varphi_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\varphi(x)\,dx,$$

т. е. обобщенная функция y есть постоянная α, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что если для двух обобщенных функций f и g выполнено равенство $f' = g'$, то $f - g = \text{const}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$y' = f(x), \tag{14}$$

где $f(x)$ — произвольная обобщенная функция.

Теорема 2. *Уравнение* (14) *при каждом* $f \in K^*$ *имеет решение, принадлежащее* K^*.

Это решение естественно назвать *первообразной* обобщенной функции f.

Доказательство. Уравнение (14) означает, что

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = (f, \varphi) \tag{15}$$

для любой основной функции $\varphi \in K$. Это равенство определяет значение функционала y на всех основных функциях φ_1 из $K^{(1)}$:

$$(y, \varphi_1) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi\right).$$

Используем теперь полученное выше представление

$$\varphi = \varphi_1 + c\varphi_0$$

элементов из K. Положив $(y, \varphi_0) = 0$, мы доопределим тем самым функционал y на всем K: именно,

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\, d\xi\right).$$

Этот функционал, как легко проверить, линеен и непрерывен. Кроме того, он удовлетворяет уравнению (14). Действительно, для всякого $\varphi \in K$

$$(y', \varphi) = (y, -\varphi') = \left(f, \int_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)\, d\xi\right) = (f, \varphi).$$

Итак, для каждой обобщенной функции $f(x)$ существует решение уравнения

$$y' = f(x),$$

т. е. каждая обобщенная функция имеет первообразную. В силу теоремы 1 эта первообразная определяется функцией $f(x)$ однозначно с точностью до постоянного слагаемого.

Полученные результаты легко переносятся на системы линейных уравнений. Ограничимся здесь соответствующими формулировками, опуская доказательства.

Рассмотрим однородную систему n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16}$$

где a_{ik} — бесконечно дифференцируемые функции. Такая система имеет некоторое количество «классических» решений (т. е. решений, представляющих собой «обычные», причем бесконечно дифференцируемые функции). Можно показать, что никаких новых решений в классе обобщенных функций система (16) не имеет.

Для неоднородной системы вида

$$y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + f_i, \tag{17}$$

где f_i — обобщенные, а a_{ik} — «обычные» бесконечно дифференцируемые функции, решение существует в классе обобщенных функций и определяется с точностью до произвольного решения однородной системы (16).

Если в системе (17) не только a_{ik}, но и f_i — «обычные» функции, то все решения этой системы, существующие в K^*, также оказываются обычными функциями.

7. Некоторые обобщения. Выше мы рассматривали обобщенные функции «одного действительного переменного», т. е. обобщенные функции на прямой. Можно, на основе тех же идей, ввести обобщенные функции на ограниченном множестве, скажем, на отрезке или окружности, обобщенные функции нескольких переменных, обобщенные функции комплексного аргумента и т. д. Наконец, и для обобщенных функций на прямой, то определение, которое было дано выше, — далеко не единственно возможное. Рассмотрим вкратце некоторые из указанных типов обобщенных функций.

а) *Функции нескольких переменных.* Рассмотрим в n-мерном пространстве совокупность K^n функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, имеющих частные производные всех порядков по всем аргументам, и таких, что каждая из этих функций равна нулю вне некоторого параллелепипеда

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Совокупность K^n представляет собой линейное пространство (с обычными операциями сложения функций и умно-

жения их на числа), в котором можно ввести сходимость следующим образом: $\varphi_k \to \varphi$, если существует такой параллелепипед $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, вне которого каждая из функций φ_k равна нулю, а в этом параллелепипеде имеет место равномерная сходимость:

$$\frac{\partial^r \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \to \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = r \right),$$

для каждого фиксированного набора целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Обобщенной функцией n переменных называется любой непрерывный линейный функционал на K^n. Всякая «обычная» функция n переменных $f(x)$, интегрируемая в любой ограниченной области n-мерного пространства, есть в то же время и обобщенная функция. Значения отвечающего ей функционала определяются формулой

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad dx = dx_1 \ldots dx_n.$$

Как и в случае $n = 1$ различные непрерывные функции определяют различные функционалы (т. е. представляют собой различные обобщенные функции).

Для обобщенных функций n переменных понятия предельного перехода, производной и т. д. вводятся с помощью тех же методов, что и в случае одного переменного. Например, частные производные обобщенной функции вводятся формулой

$$\left(\frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ \varphi(x) \right) = (-1)^r \left(f(x), \ \frac{\partial^r \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right).$$

Отсюда видно, что каждая обобщенная функция n переменных имеет частные производные всех порядков.

б) *Комплексные обобщенные функции.* Возьмем теперь в качестве основных функций бесконечно дифференцируемые финитные функции на прямой, принимающие комплексные значения. Линейные функционалы на пространстве $\tilde{K}$ таких функций естественно назвать *комплексными обобщенными функциями.* Напомним, что в комплексном линейном пространстве существуют линейные и сопряженно-линейные функционалы. Первые удовлетворяют условию (α — число) $(f, \alpha\varphi) = \alpha (f, \varphi)$, а вторые — условию $(f, \alpha\varphi) = \bar{\alpha} (f, \varphi)$.

Если $f(x)$ — обычная комплекснозначная функция на прямой, то ей можно сопоставить линейный функционал на K двумя способами:

$$(f, \varphi)_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx, \tag{18_1}$$

$$(f, \varphi)_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\varphi(x)\,dx. \tag{18_2}$$

Этой же функции $f(x)$ можно сопоставить два сопряженно-линейных функционала, а именно:

$$_1(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx, \tag{18_3}$$

$$_2(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\,\overline{\varphi(x)}\,dx. \tag{18_4}$$

Выбор одной из этих четырех возможностей означает определенный способ вложения пространства «обычных» функций в пространство обобщенных функций. Операция над комплексными обобщенными функциями определяются аналогично тому, как это было описано выше для действительных функций.

в) *Обобщенные функции на окружности.* Иногда полезно рассматривать обобщенные функции, заданные на некотором ограниченном множестве. В качестве простейшего примера рассмотрим функции на окружности. За пространство основных функций примем совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций на окружности, определив для них операции сложения и умножения на числа обычным образом. Последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ в этом пространстве мы назовем сходящейся, если для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность производных $\{\varphi_n^{(k)}(x)\}$ сходится на всей окружности равномерно. Поскольку здесь все множество аргументов (окружность) ограничено, условие финитности основных функций автоматически отпадает. Линейные функционалы на этом пространстве мы назовем *обобщенными функциями на окружности*.

Всякую обычную функцию на окружности можно рассматривать как периодическую функцию, заданную на

всей прямой. Перенося это соображение на обобщенные функции, можно связать обобщенные функции на окружности с периодическими обобщенными функциями. При этом *периодической обобщенной функцией* (с периодом a) естественно называть функционал f, удовлетворяющий условию

$$(f(x), \varphi(x-a)) = (f(x), \varphi(x))$$

для всякой основной функции φ. Примером периодической обобщенной функции может служить функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi),$$

которая уже упоминалась выше.

г) *Другие основные пространства.* Мы определили выше обобщенные функции на прямой как линейные функционалы на пространстве K бесконечно дифференцируемых финитных функций. Однако такой выбор основного пространства — не единственно возможный. Например, вместо пространства финитных функций K можно было бы взять более широкое пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ на прямой, убывающих вместе со своими производными быстрее, чем любая степень $1/|x|$. Точнее говоря, будем считать, что $\varphi(x)$ принадлежит основному пространству, которое мы обозначим S_∞, если для любых фиксированных p, $q = 0, 1, 2, \ldots$ существует такая постоянная C_{pq} (зависящая от p, q и φ), что

$$|x^p \varphi^{(q)}(x)| < C_{pq}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{19}$$

Сходимость в S_∞ определяется таким образом: последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется сходящейся к $\varphi(x)$, если для каждого $q = 0, 1, \ldots$ последовательность $\{\varphi_n^{(q)}(x)\}$ сходится равномерно на любом конечном интервале и если в неравенствах

$$|x^p \varphi_n^{(q)}(x)| < C_{pq}$$

постоянные C_{pq} можно выбрать не зависящими от n.

При этом получается запас обобщенных функций несколько более узкий, чем в случае пространства K. Например, функция

$$f(x) = e^{x^2}$$

есть непрерывный линейный функционал на K, но не на S_∞. Выбор S_∞ в качестве основного пространства удо-

бен, например, при рассмотрении преобразования Фурье обобщенных функций.

Вообще, как показало развитие теории обобщенных функций, нет необходимости связывать себя раз и навсегда каким-то определенным выбором основного пространства, а целесообразно варьировать его в зависимости от рассматриваемого круга задач. При этом, однако, существенное требование состоит в том, чтобы, с одной стороны, основных функций было «достаточно много» (чтобы с их помощью можно было различать «обычные» функции, а точнее, регулярные функционалы), а с другой, — чтобы эти основные функции обладали достаточной гладкостью.

Упражнение. Проверьте, что в пространстве S_∞ можно ввести структуру счетно-нормированного пространства, положив, например,

$$\|\varphi\|_n = \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\leqslant i\leqslant p \\ 0\leqslant j\leqslant q}} \left|(1+|x|^i)\,\varphi^{(j)}(x)\right|,$$

и что последовательность сходящаяся в S_∞ в определенном выше смысле, сходится и в топологии, определяемой этими нормами.

§ 5. Линейные операторы

1. Определение и примеры линейных операторов. Пусть E и E_1 — два линейных топологических пространства. *Линейным оператором*, действующим из E в E_1, называется отображение

$$y = Ax, \quad x \in E,\ y \in E_1,$$

удовлетворяющее условию

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2.$$

Совокупность D_A всех тех $x \in E$, для которых отображение A определено, называется *областью определения* оператора A; вообще говоря, не предполагается, что $D_A = E$, однако мы всегда будем считать, что D_A есть линейное многообразие, т. е. если $x,\ y \in D_A$, то $\alpha x + \beta y \in D_A$ при всех α, β.

Оператор A называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D_A$, если для любой окрестности V точки $y_0 = Ax_0$ существует такая окрестность U точки x_0, что $Ax \in V$, как только $x \in U \cap D_A$. Оператор A называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке $x \in D_A$.

Когда E и E_1 — нормированные пространства, это определение равносильно следующему: оператор A назы-

вается непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$\|x' - x''\| < \delta, \quad x', x'' \in D_A$$

следует

$$\|Ax' - Ax''\| < \varepsilon.$$

Множество тех $x \in E$, для которых $Ax = 0$, называется *ядром* линейного оператора A и обозначается Ker A. Множество тех $y \in E_1$, для которых $y = Ax$ при некотором $x \in D_A$, называется *образом* линейного оператора A и обозначается Im A. Как ядро, так и образ линейного оператора, являются линейными многообразиями. Если оператор непрерывен и $D_A = E$, то Ker A является подпространством, т. е. замкнуто. Что же касается образа непрерывного линейного оператора, то он не обязательно будет подпространством в E_1, даже если $D_A = E$.

Понятие линейного функционала, введенное в начале этой главы, есть частный случай линейного оператора. Именно, линейный функционал — это линейный оператор, переводящий данное пространство E в числовую прямую $\mathbf{R}$. Определения линейности и непрерывности оператора переходят при $E_1 = \mathbf{R}$ в соответствующие определения, введенные ранее для функционалов.

Точно так же и ряд дальнейших понятий и фактов, излагаемых ниже для линейных операторов, представляет собой довольно автоматическое обобщение результатов, уже изложенных в § 1 этой главы применительно к линейным функционалам.

Примеры линейных операторов. 1. Пусть E — линейное топологическое пространство. Положим

$$Ix = x \text{ для всех } x \in E.$$

Такой оператор, переводящий каждый элемент пространства в себя, называется *единичным оператором*.

2. Пусть E и E_1 — произвольные линейные топологические пространства и пусть

$$Ox = 0 \text{ для всех } x \in E$$

(здесь 0 — нулевой элемент пространства E_1). Тогда O называется *нулевым оператором*.

3. *Общий вид линейного оператора, переводящего конечномерное пространство в конечномерное.* Пусть A —

линейный оператор, отображающий n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в m-мерное пространство $\mathbf{R}^m$ с базисом $f_1, \ldots, f_m$. Если x — произвольный вектор из $\mathbf{R}^n$, то

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

и в силу линейности оператора A

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i Ae_i.$$

Таким образом, оператор A задан, если известно, во что он переводит базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим разложения векторов Ae_i по базису $f_1, \ldots, f_m$. Имеем

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} f_k.$$

Отсюда ясно, что оператор A определяется матрицей коэффициентов $\| a_{ki} \|$. Образ пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ представляет собой линейное подпространство, размерность которого равна, очевидно, рангу матрицы $\| a_{ki} \|$, т. е. во всяком случае не превосходит n. Отметим, что всякий линейный оператор, заданный в конечномерном пространстве, автоматически непрерывен.

4. Рассмотрим гильбертово пространство H и в нем некоторое подпространство H_1. Разложив H в прямую сумму подпространства H_1 и его ортогонального дополнения, т. е. представив каждый элемент $h \in H$ в виде

$$h = h_1 + h_2, \quad h_1 \in H_1, \; h_2 \perp H_1,$$

положим $Ph = h_1$. Этот оператор P естественно назвать *оператором ортогонального проектирования*, или *ортопроектором* H на H_1. Линейность и непрерывность проверяются без труда.

5. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ оператор, определяемый формулой

$$\psi(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

где $K(s, t)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных. Функция $\psi(s)$ непрерывна для любой непрерывной функции $\varphi(t)$, так что оператор (1) действительно переводит пространство непрерывных функ-

ций в себя. Его линейность очевидна. Для того чтобы говорить о его непрерывности, необходимо предварительно указать, какая топология рассматривается в нашем пространстве непрерывных функций. Читателю предлагается доказать непрерывность оператора в случаях, когда: а) рассматривается пространство $C[a, b]$, т. е. пространство непрерывных функций с нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$; б) когда рассматривается $C_2[a, b]$, т. е. $\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(t)\,dt\right)^{1/2}$.

6. В том же пространстве непрерывных функций рассмотрим оператор

$$\psi(t) = \varphi_0(t)\,\varphi(t),$$

где $\varphi_0(t)$ — фиксированная непрерывная функция. Линейность этого оператора очевидна. (Докажите его непрерывность при нормировках, указанных в предыдущем примере.)

7. Один из важнейших для анализа примеров линейных операторов — это оператор дифференцирования. Его можно рассматривать в различных пространствах.

а) Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ и оператор

$$Df(t) = f'(t),$$

действующий в нем. Этот оператор (который мы считаем действующим из $C[a, b]$ опять-таки в $C[a, b]$) определен, очевидно, не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на линейном многообразии функций, имеющих непрерывную производную. Оператор D линеен, но не непрерывен. Это видно, например, из того, что последовательность

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$$

сходится к 0 (в метрике $C[a, b]$), а последовательность

$$D\varphi_n(t) = \cos nt$$

не сходится.

б) Оператор дифференцирования можно рассматривать как оператор, действующий из пространства C^1 непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$ с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \max|\varphi(t)| + \max|\varphi'(t)|$$

в пространство $C[a, b]$. В этом случае оператор D линеен и непрерывен и отображает все C^1 на все $C[a, b]$.

в) Рассмотрение оператора дифференцирования как оператора, действующего из C^1 в $C[a, b]$, не вполне удобно, так как хотя при этом мы и получаем непрерывный оператор, определенный на всем пространстве, но не к любой функции из C^1 можно применить этот оператор дважды. Удобнее рассматривать оператор дифференцирования в еще более узком пространстве, чем C^1, а именно, в пространстве C^∞ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$, в котором топология задается счетной системой норм

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ a \leqslant t \leqslant b}} |\varphi^{(k)}(t)|.$$

Оператор дифференцирования переводит все это пространство в себя, и, как легко проверить, непрерывен на нем.

г) Бесконечно дифференцируемые функции составляют весьма узкий класс. Возможность рассматривать оператор дифференцирования в существенно б о л е е ш и р о к о м пространстве и вместе с тем как н е п р е р ы в н ы й оператор дают обобщенные функции. В предыдущем параграфе мы уже говорили о том, как определяется дифференцирование обобщенных функций. Из сказанного там ясно, что дифференцирование есть линейный оператор в пространстве обобщенных функций, притом непрерывный в том смысле, что из сходимости последовательности обобщенных функций $\{f_n(t)\}$ к $f(t)$ следует сходимость последовательности их производных к производной обобщенной функции $f(t)$.

2. Непрерывность и ограниченность. Линейный оператор, действующий из E в E_1, называется *ограниченным*, если он определен на всем E и каждое ограниченное множество переводит снова в ограниченное. Между ограниченностью и непрерывностью линейного оператора существует тесная связь, а именно, справедливы следующие утверждения.

1. *Всякий непрерывный линейный оператор ограничен.*

Действительно, пусть $M \subset E$ — ограниченное множество, а множество $AM \subset E_1$ не ограничено. Тогда в E_1 найдется такая окрестность нуля V, что ни одно из множеств $\frac{1}{n} AM$ не содержится в V. То тогда существует такая последовательность $x_n \in M$, что ни один из эле-

ментов $\frac{1}{n} Ax_n$ не принадлежит V, и мы получаем [1]), что $\frac{1}{n} x_n \to 0$ в E, но последовательность $\left\{\frac{1}{n} Ax_n\right\}$ не сходится к 0 в E_1; это противоречит непрерывности оператора A.

II. *Если A — ограниченный линейный оператор, действующий из E в E_1, и в пространстве E выполнена первая аксиома счетности, то оператор A непрерывен.*

Действительно, если A не непрерывен, то найдется такая окрестность нуля V в E_1 и такая определяющая система $\{U_n\}$ окрестностей нуля в E, что $U_{n+1} \subset U_n$ и для каждого n существует такое $x_n \in \frac{1}{n} U_n$, что $Ax_n \notin nV$. Последовательность x_n в E ограничена (и даже стремится к 0), а последовательность Ax_n не ограничена в E_1 (поскольку она не содержится ни в одном из множеств nV). Итак, если оператор A не непрерывен, а в E имеет место первая аксиома счетности, то A и не ограничен.

Наше утверждение доказано.

Итак, *для оператора, заданного на пространстве с первой аксиомой счетности* (к которым, в частности, относятся все нормированные и счетно-нормированные пространства), *ограниченность равносильна непрерывности.*

Все операторы, приведенные в примерах 1—6 в предыдущем пункте, непрерывны. В силу только что доказанного утверждения I все перечисленные там операторы ограничены.

Если E и E_1 — нормированные пространства, то условие ограниченности оператора A, действующего из E в E_1, можно сформулировать так: оператор A называется *ограниченным*, если он переводит всякий шар в ограниченное множество. В силу линейности A это условие можно сформулировать так: оператор A ограничен, если существует такая постоянная C, что для всякого $f \in E$

$$\|Af\| \leqslant C\|f\|.$$

Наименьшее из чисел C, удовлетворяющих этому неравенству, называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

---

[1]) См. упражнение 1 в п. 1, § 5, гл. III.

Теорема 1. *Для любого ограниченного оператора A, действующего из нормированного пространства в нормированное,*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначение $\alpha = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|$. В силу линейности A справедливо равенство

$$\alpha = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Поэтому для любого элемента x

$$\|Ax\| / \|x\| \leqslant \alpha,$$

т. е.

$$\|Ax\| \leqslant \alpha \|x\|,$$

откуда следует, что

$$\|A\| = \inf C \leqslant \alpha.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x_\varepsilon \neq 0$, что

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \|Ax_\varepsilon\| / \|x_\varepsilon\|$$

или

$$(\alpha - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| \leqslant \|Ax_\varepsilon\| \leqslant C\|x_\varepsilon\|.$$

Поэтому

$$\alpha - \varepsilon \leqslant \inf C = \|A\|,$$

и, в силу произвольности ε, $\alpha \leqslant \|A\|$. Следовательно, $\|A\| = \alpha$.

3. Сумма и произведение операторов.

Определение 1. Пусть A и B — два линейных оператора, действующих из линейного пространства E в пространство E_1. Назовем их *суммой* $A + B$ оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in E$ элемент

$$y = Ax + Bx \in E_1.$$

Он определен на всех элементах, принадлежащих пересечению $D_A \cap D_B$ областей определения операторов A и B.

Легко проверить, что $C = A + B$ — линейный оператор, непрерывный, если A и B непрерывны.

Если E и E_1 — нормированные пространства, а операторы A и B ограничены, то $A + B$ тоже ограничен, причем

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|. \tag{3}$$

Действительно, для всякого x

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leqslant \|Ax\|+\|Bx\| \leqslant (\|A\|+\|B\|)\|x\|$$

откуда и следует (3).

Определение 2. Пусть A и B — линейные операторы, причем A действует из пространства E в E_1, а B действует из E_1 в E_2. *Произведением* BA операторов A и B называется оператор C, ставящий в соответствие элементу $x \in E$ элемент $z = B(Ax)$ из E_2. Область определения D_C оператора $C = BA$ состоит из тех $x \in D_A$, для которых $Ax \in D_B$. Ясно, что оператор BA линеен. Он непрерывен, если A и B непрерывны.

Упражнение. Доказать, что D_C — линейное многообразие, если D_A и D_B линейные многообразия.

Если A и B — ограниченные операторы, действующие в нормированных пространствах, то и оператор BA ограничен, причем

$$\|BA\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|. \tag{4}$$

Действительно,

$$\|B(Ax)\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|, \tag{5}$$

откуда следует (4).

Сумма и произведение трех и более операторов определяются последовательно. Обе эти операции ассоциативны.

Произведение kA оператора A на число k определяется как оператор, который элементу x ставит в соответствие элемент kAx.

Совокупность $\mathscr{L}(E, E_1)$ всех непрерывных линейных операторов, определенных на всем E и отображающих E в E_1 (где E и E_1 — фиксированные линейные топологические пространства), образует, по отношению к введенным выше операциям сложения и умножения на числа, линейное пространство. Если E и E_1 — нормированные пространства, то $\mathscr{L}(E, E_1)$ — нормированное пространство (с тем определением нормы оператора, которое было дано выше).

Упражнение. Пусть E — нормированное, а E_1 — полное нормированное пространства. Тогда: а) нормированное пространство $\mathscr{L}(E, E_1)$ полно; б) если $A_k \in \mathscr{L}(E, E_1)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < \infty$, то ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ сходится к некоторому оператору $A \in \mathscr{L}(E, E_1)$ и

$$\|A\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|. \tag{6}$$

4. Обратный оператор, обратимость. Пусть A — оператор, действующий из E в E_1, и D_A — область определения, а $\operatorname{Im} A$ — образ этого оператора.

Определение 3. Оператор A называется *обратимым*, если для любого $y \in \operatorname{Im} A$ уравнение

$$Ax = y$$

имеет единственное решение.

Если A обратим, то каждому $y \in \operatorname{Im} A$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D_A$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется *обратным* к A и обозначается A^{-1}.

Теорема 2. *Оператор A^{-1}, обратный линейному оператору A, также линеен.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что образ $\operatorname{Im} A$ оператора A, т. е. $D_{A^{-1}}$, есть линейное многообразие. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Достаточно проверить выполнение равенства

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2. \tag{7}$$

Пусть $Ax_1 = y_1$ и $Ax_2 = y_2$. В силу линейности A имеем

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2. \tag{8}$$

По определению обратного оператора,

$$A^{-1} y_1 = x_1, \quad A^{-1} y_2 = x_2,$$

откуда, умножая эти равенства на α_1 и α_2 соответственно и складывая, получим

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

С другой стороны, из (8) и из определения обратного оператора следует, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2),$$

что вместе с предыдущим равенством дает

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

Теорема 3 (теорема Банаха об обратном операторе). *Пусть A — линейный огра-*

ниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство E на банахово пространство E_1. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.

Для доказательства нужна следующая лемма.

Лемма. *Пусть M — всюду плотное множество в банаховом пространстве E. Тогда любой ненулевой элемент $y \in E$ можно разложить в ряд*

$$y = y_1 + \ldots + y_n + \ldots,$$

где $y_k \in M$ и $\|y_k\| \leqslant 3\|y\|/2^k$.

Доказательство. Элементы y_k будем строить последовательно: y_1 выберем так, чтобы

$$\|y - y_1\| \leqslant \|y\|/2. \tag{9}$$

Это возможно, так как неравенство (9) определяет сферу радиуса $\|y\|/2$ с центром в точке y, внутри которой должен найтись элемент из M (M всюду плотно в E). Выберем $y_2 \in M$ так, чтобы $\|y - y_1 - y_2\| \leqslant \|y\|/4$, y_3 — так, чтобы $\|y - y_1 - y_2 - y_3\| \leqslant \|y\|/8$ и вообще y_n выберем так, чтобы $\|y - y_1 - \ldots - y_n\| \leqslant \|y\|/2^n$. Такой выбор всегда возможен, так как M всюду плотно в E. В силу выбора элементов y_k

$$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} y_k \right\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ сходится к y. Оценим нормы элементов y_k:

$$\|y_1\| = \|y_1 - y + y\| \leqslant \|y_1 - y\| + \|y\| \leqslant 3\|y\|/2,$$

$$\|y_2\| = \|y_2 + y_1 - y + y - y_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y - y_1 - y_2\| + \|y - y_1\| \leqslant 3\|y\|/4.$$

Наконец,

$$\|y_n\| =$$

$$= \|y_n + y_{n-1} + \cdots + y_1 - y + y - y_1 - \cdots - y_{n-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y - y_1 - \cdots - y_n\| + \|y - y_1 - \cdots - y_{n-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant 3\|y\|/2^n.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. В пространстве E_1 рассмотрим множество M_k — совокупность тех y, для которых выполняется неравенство $\|A^{-1}y\| \leqslant k\|y\|$. Всякий элемент пространства E_1 попадает в некоторое M_k,

т. е. $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. По теореме Бэра (теорема 2 из п. 3 § 3 гл. II), хотя бы одно из множеств M_k, скажем, M_n, плотно в некотором шаре B. Внутри шара B выберем шаровой слой P с центром в точке из M_n; слой P — это совокупность точек z, для которых справедливо неравенство $\beta < \|z - y_0\| < \alpha$, где $0 < \beta < \alpha$, $y_0 \in M_n$.

Перенеся слой P так, чтобы его центр попал в начало координат, получим шаровой слой $P_0 = \{z : 0 < \beta < \|z\| < \alpha\}$.

Покажем, что в P_0 плотно некоторое множество M_N. Пусть $z \in P \cap M_n$; тогда $z - y_0 \in P_0$ и

$$\|A^{-1}(z - y_0)\| \leqslant \|A^{-1}z\| + \|A^{-1}y_0\| \leqslant n(\|z\| + \|y_0\|) \leqslant$$

$$\leqslant n(\|z - y_0\| + 2\|y_0\|) = n\|z - y_0\|\left(1 + \frac{2\|y_0\|}{\|z - y_0\|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant n\|z - y_0\|(1 + 2\|y_0\|/\beta). \quad (10)$$

Величина $n(1 + 2\|y_0\|/\beta)$ не зависит от z. Положим [1])

$$N = 1 + n\,[1 + 2\|y_0\|/\beta\,].$$

Тогда в силу (10) $z - y_0 \in M_N$, а из того, что M_n плотно в P, следует, что M_N плотно в P_0.

Рассмотрим произвольный ненулевой элемент y из E_1. Всегда можно подобрать λ так, чтобы было $\beta < \|\lambda y\| < \alpha$, т. е. $\lambda y \in P_0$. Так как M_N плотно в P_0, можно построить последовательность $y_k \in M_N$, сходящуюся к λy. Тогда последовательность $\frac{1}{\lambda} y_k$ сходится к y. Очевидно, что если $y_k \in M_N$, то и $\frac{1}{\lambda} y_k \in M_N$ при любом действительном $\lambda \neq 0$; таким образом, M_N плотно в $E_1 / \{0\}$, а потому и в E_1.

Рассмотрим ненулевой элемент $y \in E_1$; по доказанной лемме его можно разложить в ряд по элементам из M_N:

$$y = y_1 + \ldots + y_k + \ldots,$$

причем $\|y_k\| < 3\|y\|/2^k$.

Рассмотрим в пространстве E ряд, составленный из прообразов элементов y_k, т. е. элементов $x_k = A^{-1}y_k$. Этот ряд сходится к некоторому элементу x, так как имеет место неравенство

$$\|x_k\| = \|A^{-1}y_k\| \leqslant N\|y_k\| < 3N\|y\|/2^k;$$

[1]) Скобки [ ] означают целую часть числа.

при этом

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leqslant 3N\|y\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3N\|y\|.$$

В силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и непрерывности оператора A можно применить почленно A к этому ряду. Получим

$$Ax = Ax_1 + Ax_2 + \ldots = y_1 + y_2 + \ldots = y,$$

откуда $x = A^{-1}y$. Кроме того,

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| \leqslant 3N\|y\|,$$

и так как оценка верна для любого $y \neq 0$, то оператор A^{-1} ограничен.

Приведем некоторые важные следствия этой теоремы. Прежде всего дадим ее естественное обобщение на случай, когда отображение A не взаимно однозначно.

Следствие 1 (теорема об открытом отображении). *Линейное непрерывное отображение A банахова пространства E на (все) банахово пространство E_1 открыто. Это вытекает из доказанной теоремы и следующей леммы.*

Лемма. *Пусть E — банахово пространство и L — некоторое его замкнутое подпространство. Отображение B пространства E на фактор-пространство E/L, ставящее в соответствие каждому $x \in E$ класс смежности, содержащий x, открыто.*

Действительно, пусть $Z = E/L$, а G — открытое множество в E и $\Gamma = BG$. Пусть $z_0 \in \Gamma$. Тогда найдется элемент x_0, принадлежащий $B^{-1}z_0 \cap G$. Пусть теперь $U(x_0)$ — ε-окрестность точки x_0, целиком лежащая в G, и пусть z — произвольный элемент ε-окрестности точки $z_0 \in \Gamma$, т. е. $\|z - z_0\| < \varepsilon$. В соответствии с определением нормы в фактор-пространстве это означает существование такого элемента $x \in B^{-1}z$, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, т. е. $x \in U(x_0) \subset G$. Но тогда $z \in BG = \Gamma$, т. е. ε-окрестность точки z_0 содержится в Γ. Следовательно, Γ открыто. Лемма доказана.

Представив отображение A пространства E на E_1 как суперпозицию отображения B пространства E на $E/\mathrm{Ker}\, A = Z$ (открытого в силу леммы) и взаимно однозначного отображения C пространства Z на E_1 (открытого в силу теоремы 3), получаем, что A открыто.

Следствие 2 (лемма о тройке). *Пусть E, E_1, E_2 — банаховы пространства и A, B — непрерывные ли-*

нейные операторы, из E в E_1 и из E в E_2 соответственно, причем B отображает E на все E_2 (т. е. $\operatorname{Im} B = E_2$). *Если при этом*

$$\operatorname{Ker} A \supset \operatorname{Ker} B, \tag{11}$$

то существует такой непрерывный линейный оператор C, отображающий E_2 в E_1, что $A = CB$.

Символически это удобно изобразить такой схемой:

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Ker} B & \to & E & \xrightarrow{B} & E_2 \\ \cap & & \| & & \downarrow C \\ \operatorname{Ker} A & \to & E & \xrightarrow{A} & E_1 \end{array}$$

Действительно, рассмотрим для каждого элемента $z \in E_2$ его полный прообраз $B^{-1}z \in E$. Из условия (11) следует, что все элементы x, принадлежащие $B^{-1}z$, переводятся оператором A в один и тот же элемент y. Этот элемент y мы и поставим в соответствие элементу z. Полученный оператор C отображает E_2 в E_1 и, очевидно, линеен. Он непрерывен (а следовательно, и ограничен). Действительно, если G — открытое множество в E_1, то его полный прообраз $C^{-1}G$ при отображении C может быть записан как $B(A^{-1}G)$. Но $A^{-1}G$ открыто в силу непрерывности оператора A, а тогда и $B(A^{-1}G)$ открыто в силу следствия 1.

Упражнения. 1. Пусть E, E_1 — нормированные пространства; линейный оператор A, действующий из E в E_1, с областью определения $D_A \subset E$, представляющей собой линейное многообразие, называется *замкнутым*, если из условий $x_n \in D_A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ следует, что $x \in D_A$ и $Ax = y$. Проверьте, что всякий ограниченный оператор замкнут.

2. Рассмотрим прямое произведение $E \times E_1$ пространств E и E_1, т. е. линейное нормированное пространство, состоящее из всевозможных пар $[x, y]$, $x \in E$, $y \in E_1$, с нормой $\|[x, y]\| = \|x\| + \|y\|_1$ ($\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ — нормы в E, E_1 соответственно). Оператору A можно сопоставить множество $G_A = \{[x, y],\ x \in D_A,\ y = Ax\} \subset E \times E_1$, называемое его *графиком*. Проверьте, что G_A — линейное многообразие в $E \times E_1$, замкнутое тогда и только тогда, когда оператор A замкнут. Докажите, что *если E, E_1 — банаховы пространства, а оператор A определен на всем E и замкнут, то он ограничен* (теорема Банаха о замкнутом графике).

Указание. Примените теорему 3 к оператору P: $[x, Ax] \to x$, действующему из G_A в E.

3. Пусть E и E_1 — полные счетно-нормированные пространства. Докажите, что если A — непрерывный линейный оператор, взаимно однозначно отображающий E на E_1, то обратный оператор A^{-1} непрерывен. Сформулируйте и докажите теорему о замкнутом графике для счетно-нормированных пространств.

Рассмотрим множество $\mathscr{L}(E, E_1)$ ограниченных линейных операторов A, отображающих банахово пространство E в банахово пространство E_1. Это — банахово пространство. Выделим в нем множество $\mathscr{GL}(E, E_1)$ операторов, отображающих E на все E_1 и имеющих ограниченный обратный. Это множество открыто в $\mathscr{L}(E, E_1)$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $A_0 \in \mathscr{GL}(E, E_1)$ *и пусть* ΔA *— произвольный оператор из* $\mathscr{L}(E, E_1)$ *такой, что* $\| \Delta A \| < 1/\| A_0^{-1} \|$. *Тогда оператор* $(A_0 + \Delta A)^{-1}$ *существует и ограничен, т. е.* $A = A_0 + \Delta A \in \mathscr{GL}(E, E_1)$.

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $y \in E_1$ и рассмотрим отображение B пространства E в себя, определяемое формулой

$$Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta A x.$$

Из условия $\| \Delta A \| < \| A_0^{-1} \|^{-1}$ следует, что отображение B сжимающее. Так как E полно, то существует единственная неподвижная точка x отображения B:

$$x = Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta A x,$$

откуда

$$Ax = A_0 x + \Delta A x = y.$$

Если $Ax' = y$, то x' — тоже неподвижная точка отображения B, так что $x' = x$. Таким образом, для всякого $y \in E_1$ уравнение $Ax = y$ имеет в E единственное решение, т. е. оператор A обладает обратным A^{-1}, определенным на всем E_1. По теореме 3 оператор A^{-1} ограничен, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Пусть* E *— банахово пространство,* I *— тождественный оператор в* E, *а* A *— такой ограниченный линейный оператор, отображающий* E *в себя, что* $\| A \| < 1$. *Тогда оператор* $(I - A)^{-1}$ *существует, ограничен и представляется в виде*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{12}$$

Доказательство. Существование и ограниченность оператора $(I - A)^{-1}$ вытекает из теоремы 4 (впрочем, это следует также и из приводимого ниже рассуждения).

Так как $\| A \| < 1$, то $\sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k < \infty$. Про-

странство E полно, поэтому из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \|$ вытекает, что сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ представляет собой ограниченный линейный оператор. Для любого n имеем

$$(I - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = I - A^{n+1};$$

переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $\| A^{n+1} \| \leqslant \leqslant \| A \|^{n+1} \to 0$, получаем

$$(I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = I,$$

откуда

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Пусть A — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E на банахово пространство E_1. Докажите, что существует такая постоянная $\alpha > 0$, что если $B \in \mathscr{L}(E, E_1)$ и $\| A - B \| < \alpha$, то B отображает E на все E_1 (Банах).

5. Сопряженные операторы. Рассмотрим непрерывный линейный оператор $y = Ax$, отображающий линейное топологическое пространство E в такое же пространство E_1. Пусть g — линейный функционал, определенный на E_1, т. е. $g \in E_1^*$. Применим функционал g к элементу $y = Ax$; как легко проверить, $g(Ax)$ есть непрерывный линейный функционал, определенный на E; обозначим его f. Функционал f есть, таким образом, элемент пространства E^*. Каждому функционалу $g \in E_1^*$ мы поставили в соответствие функционал $f \in E^*$, т. е. получили некоторый оператор, отображающий E_1^* в E^*. Этот оператор называется *сопряженным* к оператору A и обозначается A^*.

Обозначив значение функционала f на элементе x символом (f, x), получим, что $(g, Ax) = (f, x)$, или

$$(g, Ax) = (A^*g, x).$$

Это соотношение можно принять за определение сопряженного оператора.

Пример. *Сопряженный оператор в конечномерном пространстве.* Пусть действительное n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ отображается в пространство $\mathbf{R}^m$ (m-мерное) оператором A и пусть $\| a_{ij} \|$ — матрица этого оператора.

Отображение $y = Ax$ можно записать в виде системы равенств

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

а функционал $f(x)$ — в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j x_j.$$

Из равенства

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$$

получим, что $f_j = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}$. Так как $f = A^* g$, отсюда следует, что оператор A^* задается матрицей, транспонированной по отношению к матрице оператора A.

Следующие свойства сопряженных операторов вытекают сразу из определения.

1. Оператор A^* линеен.
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
3. Если k — число, то $(kA)^* = kA^*$.

Если A — непрерывный оператор из E в E_1, то A^* есть непрерывный оператор из (E_1^*, b) в (E^*, b) (проверьте это!). Если E и E_1 — банаховы пространства, то это утверждение может быть уточнено следующим образом:

Теорема 6. *Если A — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в банахово пространство E_1, то*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Доказательство. В силу свойств нормы оператора имеем

$$|(A^* g, x)| = |(g, Ax)| \leqslant \|g\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

откуда $\|A^* g\| \leqslant \|A\| \cdot \|g\|$; следовательно,

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{13}$$

Пусть $x \in E$ и $Ax \neq 0$; положим $y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in E_1$; очевидно, что $\|y_0\| = 1$. По следствию из теоремы Хана — Банаха существует такой функционал g, что $\|g\| = 1$ и $(g, y_0) = 1$, т. е. $(g, Ax) = \|Ax\|$. Из соотношений

$$\|Ax\| = (g, Ax) = |(A^* g, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \|A^* g\| \cdot \|x\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|$$

получаем $\| A \| \leqslant \| A^* \|$, что вместе с неравенством (13) дает

$$\| A^* \| = \| A \|.$$

Теорема доказана.

Упражнение. Пусть E и E_1 — рефлексивные банаховы пространства и $A \in \mathscr{L}(E, E_1)$. Докажите, что $A^{**} = A$.

Следующее утверждение представляет собой еще одно полезное следствие теоремы Банаха об обратном операторе.

Лемма (об аннуляторе ядра оператора). *Пусть A — непрерывный линейный оператор, отображающий E на все E_1, где E, E_1 — банаховы пространства. Тогда*

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} A^*. \tag{14}$$

Действительно, проверим сначала включение

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \supset \operatorname{Im} A^*. \tag{15}$$

Если $f \in \operatorname{Im} A^*$, то существует такой элемент $g \in E_1^*$, что $f = A^*g$, и для всех $x \in \operatorname{Ker} A$ имеем:

$$(f, x) = (A^*g, x) = (g, Ax) = 0, \quad \text{т. е. } f \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

Докажем теперь обратное включение:

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} \subset \operatorname{Im} A^*. \tag{16}$$

Пусть $f \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Тогда для отображений

$$f\colon E \to R \quad \text{и} \quad A\colon E \to E_1$$

выполнены условия леммы о тройке (следствие 2). Поэтому существует такой элемент $g \in E_1^*$, что $(f, x) = (g, Ax)$, т. е. $f = A^*g$. Тем самым включение (16), а значит, и равенство (14) доказаны.

6. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы. Рассмотрим случай, когда A — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H (действительном или комплексном). Согласно теореме об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве отображение τ, сопоставляющее каждому $y \in H$ линейный функционал

$$(\tau y)(x) = (x, y),$$

есть изоморфизм (или сопряженный изоморфизм, если H комплексно) пространства H на все сопряженное пространство H^*. Пусть A^* — оператор, сопряженный

оператору A. Ясно, что отображение $\tilde{A}^* = \tau^{-1}A^*\tau$ представляет собой ограниченный линейный оператор, действующий в H; легко видеть, что для любых x, $y \in H$

$$(Ax, y) = (x, \tilde{A}^*y).$$

Так как $\| A^* \| = \| A \|$, а отображения τ и τ^{-1} изометричны, то $\| \tilde{A}^* \| = \| A \|$.

Все сказанное справедливо, разумеется, и для конечномерного евклидова пространства, действительного или комплексного.

Примем следующее соглашение. Если R — евклидово пространство (конечной или бесконечной размерности), то оператором, *сопряженным* к действующему в R оператору A, мы назовем определенный выше оператор $\tilde{A}^*$, действующий в том же пространстве R.

Следует подчеркнуть, что это определение отличается от определения сопряженного оператора в произвольном банаховом пространстве E, согласно которому сопряженный оператор A^* действует в сопряженном пространстве E^*. Иногда оператор $\tilde{A}^*$, в отличие от A^*, называют *эрмитово-сопряженным*. Чтобы не усложнять терминологии и обозначений, мы будем писать A^* вместо $\tilde{A}^*$ и говорить о сопряженном операторе, помня, однако, что в евклидовом случае сопряженный оператор всегда понимается в смысле, указанном в этом пункте.

Ясно, что в евклидовом пространстве R оператор, сопряженный к A, можно определить как такой оператор, который при всех x, $y \in R$ удовлетворяет равенству

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Поскольку операторы A и A^* действуют теперь в одном и том же пространстве, возможно равенство $A = A^*$. Выделим важный класс операторов в евклидовом (в частности, гильбертовом) пространстве.

Определение 4. Ограниченный линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве R, называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. если

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

для всех x, $y \in R$.

Отметим следующее важное свойство оператора A^*, сопряженного к оператору A. Подпространство R_1 ев-

клидова пространства R называется *инвариантным* относительно оператора A, если из $x \in R_1$ вытекает $Ax \in R_1$. *Если подпространство R_1 инвариантно относительно A, то его ортогональное дополнение $R_1^\perp$ инвариантно относительно A^*.* Действительно, если $y \in R_1^\perp$, то для всех $x \in R_1$ имеем

$$(x,\ A^*y) = (Ax,\ y) = 0,$$

поскольку $Ax \in R_1$. В частности, если A — самосопряженный оператор, то ортогональное дополнение к любому его инвариантному подпространству само инвариантно относительно A.

Упражнение. Докажите, что если A и B — ограниченные линейные операторы в евклидовом пространстве, то справедливы равенства:

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*,$$
$$(AB)^* = B^*A^*,$$
$$(A^*)^* = A,$$
$$I^* = I \ (I \text{ — единичный оператор}).$$

7. Спектр оператора. Резольвента [1]). Вряд ли можно указать более важное понятие в теории операторов, чем понятие спектра. Напомним прежде это понятие для конечномерного случая.

Пусть A — линейный оператор в n-мерном пространстве $\mathbf{C}^n$. Число λ называется *собственным значением* оператора A, если уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имеет ненулевые решения. Совокупность всех собственных значений называется *спектром* оператора A, а все остальные значения λ — *регулярными*. Иначе говоря, λ есть регулярная точка, если оператор $A - \lambda I$ обратим. При этом $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на всем $\mathbf{C}^n$ и, как и всякий оператор в конечномерном пространстве, ограничен. Итак, в конечномерном пространстве существуют две возможности:

1) уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение, т. е. λ есть собственное значение для A; оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ при этом не существует;

---

[1]) Всюду, где речь идет о спектре оператора, мы считаем, что оператор действует в комплексном пространстве.

2) существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, определенный на всем пространстве, т. е. λ есть регулярная точка.

Но если A — оператор, заданный в бесконечномерном пространстве E, то имеется еще и третья возможность, а именно:

3) оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, т. е. уравнение $Ax = \lambda x$ имеет лишь нулевое решение, но этот оператор определен не на всем E (и, возможно, неограничен).

Введем следующую терминологию. Число λ мы назовем *регулярным* для оператора A, действующего в (комплексном) банаховом пространстве E, если оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, называемый *резольвентой* оператора A, *определен на всем E и, следовательно* (теорема 3), *ограничен*. Совокупность всех остальных значений λ называется *спектром* оператора A. Спектру принадлежат все собственные значения оператора A, так как если $(A - \lambda I)\, x = 0$ при некотором $x \neq 0$, то $(A - \lambda I)^{-1}$ не существует. Их совокупность называется *точечным спектром*. Остальная часть спектра, т. е. совокупность тех λ, для которых $(A - \lambda I)^{-1}$ существует, но определен не на всем E, называется *непрерывным спектром*. Итак, каждое значение является для оператора λ или регулярным или собственным значением, или точкой непрерывного спектра. Возможность наличия у оператора непрерывного спектра — существенное отличие теории операторов в бесконечномерном пространстве от конечномерного случая.

Пусть A — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Если точка λ регулярна, т. е. оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на всем E и ограничен, то при достаточно малом δ оператор $(A - (\lambda + \delta)\, I)^{-1}$ тоже определен на всем E и ограничен (теорема 4), т. е. точка $\lambda + \delta$ тоже регулярна. Таким образом, *регулярные точки образуют открытое множество*. Следовательно, спектр, т. е. дополнение этого множества, — *замкнутое множество*.

Теорема 7. *Если A — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве E и $|\lambda| > \|A\|$, то λ — регулярная точка.*

Доказательство. Так как, очевидно,

$$A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right),$$

то

$$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}.$$

При $\|A\| < |\lambda|$ этот ряд сходится и задает определенный на всем E ограниченный оператор (теорема 5). Иначе говоря, *спектр оператора A содержится в круге радиуса $\|A\|$* с центром в нуле.

Примеры. 1. В пространстве $C[a, b]$ рассмотрим оператор A, определяемый формулой

$$Ax(t) = tx(t). \tag{17}$$

Тогда

$$(A - \lambda I)\, x(t) = (t - \lambda)\, x(t).$$

Оператор (17) обратим при любом λ, так как из равенства

$$(t - \lambda)\, x(t) = 0$$

следует, что непрерывная функция $x(t)$ тождественно равна нулю. Однако при $\lambda \in [a, b]$ обратный оператор, задаваемый формулой

$$(A - \lambda I)^{-1} x(t) = \frac{1}{t - \lambda}\, x(t)$$

определен не на всем $C[a, b]$ и неограничен. (Докажите это!) Таким образом, спектр оператора (17) представляет собой отрезок $[a, b]$, причем собственные значения отсутствуют, т. е. имеется лишь непрерывный спектр.

2. Рассмотрим в пространстве l_2 оператор A, определяемый следующим образом:

$$A\colon (x_1, x_2, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots). \tag{18}$$

Этот оператор не имеет собственных значений. (Докажите это!) Оператор A^{-1} ограничен, но определен в l_2 лишь на подпространстве $x_1 = 0$, т. е. $\lambda = 0$ есть точка спектра оператора.

Упражнения. Содержит ли спектр оператора (18) какие-либо точки, кроме $\lambda = 0$?

Замечания. (1) Всякий ограниченный линейный оператор, определенный в комплексном банаховом пространстве, имеющем хотя бы один отличный от нуля элемент, имеет непустой спектр. Существуют операторы, у которых спектр состоит из единственной точки (например, оператор умножения на число).

(2) Теорема 7 может быть уточнена следующим образом. Пусть

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

(можно доказать, что этот предел существует для любого ограниченного оператора A), тогда *спектр оператора A целиком лежит в круге радиуса r с центром в нуле*. Величина r называется *спектральным радиусом* оператора A.

(3) Резольвентные операторы R_μ и R_λ, отвечающие точкам μ и λ, перестановочны между собой и удовлетворяют соотношению

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda,$$

которое легко проверить, умножив обе части этого равенства на

$$(A - \lambda I)(A - \mu I).$$

Отсюда вытекает, что если λ_0 — регулярная точка для A, то производная от R_λ по λ при $\lambda = \lambda_0$, т. е. предел

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{R_{\lambda_0+\Delta\lambda} - R_{\lambda_0}}{\Delta\lambda}$$

существует (в смысле сходимости по операторной норме) и равна $R^2_{\lambda_0}$.

Упражнение. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве H. Докажите, что его спектр есть замкнутое ограниченное подмножество действительной оси.

§ 6. Компактные операторы

1. Определение и примеры компактных операторов. В отличие от линейных операторов в конечномерных пространствах, для которых имеется исчерпывающее описание, изучение произвольных линейных операторов в бесконечномерных пространствах представляет собой весьма сложную и, по существу, необозримую задачу. Однако некоторые важные классы таких операторов могут быть описаны полностью. Среди них один из важнейших образуют так называемые компактные операторы. Эти операторы, с одной стороны, близки по своим свойствам к *конечномерным* (т. е. ограниченным операторам, переводящим данное пространство в конечномерное) и допускают достаточно детальное описание, а с другой, играют важную роль в различных приложениях, в первую очередь в теории интегральных уравнений, которым будет посвящена гл. IX.

Определение 1. Оператор A, отображающий банахово пространство E в себя (или другое банахово

пространство E_1), называется *компактным*, или *вполне непрерывным*, если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

В конечномерном нормированном пространстве всякий линейный оператор компактен, поскольку он переводит любое ограниченное множество в ограниченное, а в конечномерном пространстве всякое ограниченное множество предкомпактно.

В бесконечномерном пространстве компактность оператора есть требование существенно более сильное, чем просто его непрерывность (т. е. ограниченность). Например, единичный оператор в гильбертовом пространстве непрерывен, но отнюдь не компактен. (Докажите это независимо от рассматриваемого ниже примера 1.)

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть I — единичный оператор в банаховом пространстве E. Покажем, что если E бесконечномерно, то оператор I не компактен. Для этого достаточно, очевидно, показать, что единичный шар в E (который, разумеется, переводится оператором I в себя) не предкомпактен. Это в свою очередь вытекает из следующей леммы, которая нам понадобится и в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots$ *линейно независимые векторы в нормированном пространстве* E *и пусть* E_n — *подпространство, порожденное векторами* $x_1, \ldots, x_n$. *Тогда существует последовательность векторов* $y_1, y_2, \ldots$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$1)\ \|y_n\| = 1;\quad 2)\ y_n \in E_n;\quad 3)\ \rho(y_n,\ E_{n-1}) > 1/2,$$

где $\rho(y_n, E_{n-1})$ — расстояние вектора y_n от E_{n-1}, т. е.

$$\inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\|.$$

Доказательство. Действительно, так как векторы $x_1, x_2, \ldots$ линейно независимы, то $x_n \notin E_{n-1}$ и $\rho(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$. Пусть x^* — такой вектор из E_{n-1}, что $\|x_n - x^*\| < 2\alpha$. Тогда, поскольку $\alpha = \rho(x_n, E_{n-1}) = \rho(x_n - x^*, E_{n-1})$, вектор

$$y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$$

удовлетворяет всем условиям 1)—3). За y_1 при этом можно взять $x_1/\|x_1\|$.

Лемма доказана.

Пользуясь этой леммой, в единичном шаре всякого бесконечномерного нормированного пространства можно построить последовательность векторов $\{y_n\}$, для которой $\rho(y_m, y_n) > 1/2$, $m \neq n$. Ясно, что такая последовательность не может содержать никакой сходящейся подпоследовательности. А это и означает отсутствие предкомпактности.

2. Пусть A — непрерывный линейный оператор, переводящий банахово пространство E в некоторое его конечномерное подпространство. Такой оператор компактен, поскольку он переводит всякое ограниченное подмножество $M \subset E$ в ограниченное подмножество конечномерного пространства, т. е. в предкомпактное множество.

В частности, в гильбертовом пространстве оператор ортогонального проектирования на подпространство компактен в том и только том случае, если это подпространство имеет конечную размерность.

3. Рассмотрим в пространстве l_2 оператор A, определенный следующим образом: если $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, то

$$Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2^n}x_n, \ldots\right). \tag{1}$$

Этот оператор компактен. Действительно, поскольку всякое ограниченное множество из l_2 содержится в некотором шаре этого пространства, достаточно доказать, что образы шаров предкомпактны, а в силу линейности оператора достаточно проверить это для единичного шара. Но оператор (1) переводит единичный шар пространства l_2 в множество точек, содержащееся в основном параллелепипеде (см. гл. II, § 7, п. 1). Следовательно, это множество вполне ограничено, а значит, и предкомпактно.

Упражнение. Пусть $Ax = (a_1x_1, \ldots, a_nx_n, \ldots)$; при каких условиях на последовательность чисел $\{a_n\}$ этот оператор в l_2 компактен?

4. В пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ важный класс компактных операторов образуют операторы, представимые в виде

$$Ax = y(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt. \tag{2}$$

Покажем справедливость следующего утверждения: *если функция $K(s, t)$ ограничена на квадрате $a \leqslant s \leqslant b$,*

$a \leqslant t \leqslant b$ и все ее точки разрыва лежат на конечном числе кривых

$$t = \varphi_k(s),\ k = 1, \ldots, n,$$

где φ_k — непрерывные функции, то формула (2) *определяет в пространстве $C[a, b]$ компактный оператор.*

Действительно, заметим, прежде всего, что в указанных условиях интеграл (2) существует для любого s из отрезка $[a, b]$, т. е. функция $y(s)$ определена. Далее, пусть

$$M = \sup_{a \leqslant s,\ t \leqslant b} |K(s, t)|$$

и пусть G — множество тех точек (s, t), для которых хотя бы при одном $k = 1, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$|t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}.$$

Следом $G(s)$ этого множества на каждой прямой $s = \text{const}$ служит объединение интервалов

$$G(s) = \bigcup_{k=1}^{n} \left\{t: |t - \varphi_k(s)| < \frac{\varepsilon}{12Mn}\right\}.$$

Пусть F — дополнение множества G до квадрата $a \leqslant s, t \leqslant b$. Так как F компактно, а функция $K(s, t)$ непрерывна на F, то существует такое $\delta > 0$, что

$$|K(s', t') - K(s'', t'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

для любых точек (s', t'), (s'', t'') из F, удовлетворяющих условию

$$|s' - s''| + |t' - t''| < \delta. \tag{3}$$

Оценим теперь разность $y(s') - y(s'')$ в предположении, что $|s' - s''| < \delta$. Имеем

$$|y(s') - y(s'')| \leqslant \int_a^b |K(s', t) - K(s'', t)|\,|x(t)|\,dt;$$

для оценки стоящего справа интеграла разобьем промежуток интегрирования $[a, b]$ на объединение интервалов $G(s') \cup G(s'')$, которое обозначим P, и остальную часть отрезка $[a, b]$, которую обозначим Q. Заметив, что P

есть объединение интервалов, суммарная длина которых не превосходит $\varepsilon/(3M)$, получаем

$$\int_P |K(s', t) - K(s'', t)|\,|x(t)|\,dt < \frac{2\varepsilon}{3}\|x\|.$$

Интеграл по Q допускает, очевидно, оценку

$$\int_Q |K(s', t) - K(s'', t)|\,|x(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{3}\|x\|.$$

Таким образом,

$$|y(s') - y(s'')| < \varepsilon\|x\|. \tag{4}$$

Неравенство (4) показывает, что функция $y(s)$ непрерывна, т. е. формула (2) действительно определяет оператор, переводящий пространство $C[a, b]$ в себя. Далее, из того же неравенства видно, что если $\{x(t)\}$ — ограниченное множество в $C[a, b]$, то соответствующее множество $\{y(s)\}$ равностепенно непрерывно. Наконец, если $\|x\| \leqslant C$, то

$$\|y\| = \sup|y(s)| \leqslant \sup\int_a^b |K(s, t)|\,|x(t)| \leqslant M(b-a)\|x\|.$$

Таким образом, оператор (2) переводит всякое ограниченное множество из $C[a, b]$ в множество функций, равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное, т. е. предкомпактное.

4а. Расположение точек разрыва функции $K(s, t)$ на конечном числе кривых, пересекающих прямые $s = \text{const}$ лишь в одной точке, существенно. Пусть, например,

$$K(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{при } s < 1/2, \\ 0 & \text{при } s \geqslant 1/2; \end{cases}$$

оператор (2) с таким ядром, заданным на квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ и имеющим точками разрыва весь отрезок $s = 1/2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, переводит функцию $x(t) \equiv 1$ в разрывную функцию.

4б. Если положить $K(s, t) = 0$ при $t > s$, то оператор (2) примет вид

$$y(s) = \int_a^s K(s, t)\,x(t)\,dt. \tag{5}$$

Будем считать, что функция $K(s, t)$ непрерывна при $t < s$; тогда из сказанного в примере 4 следует, что оператор (5) вполне непрерывен в $C[a, b]$.

Этот оператор называется *оператором типа Вольтерра* [1]).

Замечание. При принятом нами определении компактного оператора может оказаться, что образ замкнутого единичного шара некомпактен (хотя он предкомпактен). Действительно, рассмотрим в пространстве $C[-1, 1]$ оператор интегрирования

$$Jx(s) = \int_{-1}^{s} x(t)\,dt;$$

по доказанному выше, J — вполне непрерывный оператор в $C[-1, 1]$. Положим

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant 1/n, \\ 1, & \text{если} \quad 1/n < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $x_n \in C[-1, 1]$, $\|x_n\| = 1$ для всех n и

$$y_n(t) = Jx_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt^2/2, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant 1/n, \\ t - 1/(2n), & \text{если} \quad 1/n < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что последовательность y_n сходится в $C[-1, 1]$ к функции

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ t, & \text{если} \quad 0 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

которая не является образом (при отображении J) никакой функции из $C[-1, 1]$, ибо функция $y'(t)$ разрывна.

Однако можно доказать, что если пространство рефлексивно (например, гильбертово), то образ замкнутого единичного шара при компактном линейном отображении компактен.

2. Основные свойства компактных операторов.

Теорема 1. *Если $\{A_n\}$ — последовательность компактных операторов в банаховом пространстве E, сходя-*

[1]) Вито Вольтерра — итальянский математик, автор ряда работ по функциональному анализу и интегральным уравнениям.

щаяся по норме к некоторому оператору A, то оператор A тоже компактен.

Доказательство. Для установления компактности оператора A достаточно показать, что, какова бы ни была ограниченная последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов из E, из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Так как оператор A_1 компактен, то из последовательности $\{A_1x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть

$$x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots \tag{6}$$

— такая подпоследовательность, что $\{A_1x_n^{(1)}\}$ сходится. Рассмотрим теперь последовательность $\{A_2x_n^{(1)}\}$. Из нее опять-таки можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть

$$x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}, \ldots$$

— такая подпоследовательность, выбранная из (6), что $\{A_2x_n^{(2)}\}$ сходится. При этом, очевидно, $\{A_1x_n^{(2)}\}$ тоже сходится. Рассуждая аналогично, выберем из последовательности $\{x_n^{(2)}\}$ такую подпоследовательность

$$x_1^{(3)}, \ldots, x_n^{(3)}, \ldots,$$

что $\{A_3x_n^{(3)}\}$ сходится и т. д. Возьмем затем диагональную последовательность

$$x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots$$

Каждый из операторов $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ переводит ее в сходящуюся. Покажем, что и оператор A тоже переводит ее в сходящуюся. Тем самым компактность A будет установлена. Так как пространство E полно, то достаточно показать, что $\{Ax_n^{(n)}\}$ — фундаментальная последовательность. Имеем

$$\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\| \leqslant \|Ax_n^{(n)} - A_kx_n^{(n)}\| + \|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| + \|A_kx_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|. \tag{7}$$

Пусть $\|x_n\| \leqslant C$; выберем сначала k так, что $\|A - A_k\| < \varepsilon/(3C)$, а потом выберем такое N, чтобы при всех $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ выполнялось неравенство

$$\|A_kx_n^{(n)} - A_kx_m^{(m)}\| < \varepsilon/3$$

(это возможно, так как последовательность $\{A_k x_n^{(n)}\}$ сходится). При этих условиях из (7) получаем, что

$$\| Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \| < \varepsilon$$

для всех достаточно больших n и m.

Теорема доказана.

Легко проверить, что линейная комбинация компактных операторов компактна. Следовательно, в пространстве $\mathscr{L}(E, E)$ всех ограниченных линейных операторов, определенных на E, компактные операторы образуют замкнутое линейное подпространство.

Посмотрим теперь, будет ли совокупность компактных операторов замкнута относительно операции перемножения операторов. На самом деле здесь справедливо даже существенно более сильное утверждение.

Теорема 2. *Если A — компактный оператор, а B — ограниченный, то операторы AB и BA компактны.*

Доказательство. Если множество $M \subset E$ ограничено, то BM тоже ограничено. Следовательно, ABM предкомпактно, а это и означает, что оператор AB компактен. Далее, если M ограничено, то AM предкомпактно, а тогда, в силу непрерывности B, множество BAM тоже предкомпактно, т. е. оператор BA компактен.

Теорема доказана.

Следствие. *В бесконечномерном пространстве E компактный оператор не может иметь ограниченного обратного.*

Действительно, иначе единичный оператор $I = A^{-1}A$ был бы компактен в E, что невозможно (см. пример 1).

Замечание. Теорема 2 показывает, что компактные операторы образуют в кольце всех ограниченных операторов $\mathscr{L}(E, E)$ двусторонний идеал [1]).

Теорема 3. *Оператор, сопряженный компактному, компактен.*

Доказательство. Пусть A — компактный оператор в банаховом пространстве E. Покажем, что сопряженный оператор A^*, действующий в E^*, переводит каждое ограниченное подмножество из E^* в предкомпактное. Поскольку всякое ограниченное подмножество нормированного пространства содержится в некотором шаре,

---

[1]) *Идеалом* (двусторонним) в некотором кольце R называется такое подкольцо $\mathfrak{U}$, что если $a \in \mathfrak{U}$, $r \in R$, то $ar \in \mathfrak{U}$ и $ra \in \mathfrak{U}$.

достаточно показать, что A^* переводит каждый шар в предкомпактное множество. В силу линейности оператора A^* достаточно показать, что образ A^*S^* замкнутого единичного шара $S^* \subset E^*$ предкомпактен.

Будем рассматривать элементы из E^* как функции не на всем пространстве E, а лишь на компакте $\overline{AS}$ — замыкании образа единичного шара при отображении A. При этом множество Φ функций, отвечающих функционалам из S^*, будет равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Действительно, если $\|\varphi\| \leqslant 1$, то

$$\sup_{x \in \overline{AS}} |\varphi(x)| = \sup_{x \in AS} |\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \sup_{x \in S} \|Ax\| \leqslant \|A\|,$$

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x' - x''\| \leqslant \|x' - x''\|.$$

Следовательно, это множество Φ предкомпактно в пространстве $C[\overline{AS}]$ (в силу теоремы Арцела). Но множество Φ с метрикой, индуцированной обычной метрикой пространства непрерывных функций $C[\overline{AS}]$, изометрично множеству A^*S^* (с метрикой, индуцированной нормой пространства E^*). Действительно, если $g_1, g_2 \in S^*$, то

$$\|A^*g_1 - A^*g_2\| = \sup_{x \in S} |(A^*g_1 - A^*g_2, x)| =$$

$$= \sup_{x \in S} |(g_1 - g_2, Ax)| = \sup_{z \in AS} |(g_1 - g_2, z)| =$$

$$= \sup_{z \in \overline{AS}} |(g_1 - g_2, z)| = \rho(g_1, g_2).$$

Поскольку Φ предкомпактно, то оно вполне ограничено; следовательно, вполне ограничено и изометричное ему множество A^*S^*. Поэтому A^*S^* предкомпактно в E^*.

Теорема доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, что множество Φ замкнуто в $C[\overline{AS}]$, так что оно компактно, поэтому компактно и множество A^*S^*, хотя (как это видно из замечания на с. 277) образ замкнутого единичного шара при произвольном вполне непрерывном отображении может не быть компактом. Ситуация в только что доказанной теореме отличается от общей тем, что замкнутый единичный шар S^* в E^* компактен в $*$-слабой топологии пространства E^* (см. теорему 5 § 3). Отсюда и следует компактность (в метрике пространства E^*) образа множества S^* для любого компактного оператора.

Упражнения. 1. Пусть A — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве. Докажите, что если оператор A^* компактен, то и A компактен.

2. Для того чтобы линейный оператор A в гильбертовом пространстве H был компактен, необходимо и достаточно, чтобы (эрмитово) сопряженный к нему оператор A^* был компактен.

3. Собственные значения компактного оператора.

Теорема 4. *Всякий компактный оператор A в банаховом пространстве E имеет при любом $\delta > 0$ лишь конечное число линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственным значениям, по модулю превосходящим δ.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ какая-либо последовательность собственных значений оператора A (различных или с повторениями) таких, что $|\lambda_n| \geqslant \delta$; $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — отвечающая им последовательность собственных векторов, и пусть эти векторы линейно независимы.

Воспользуемся леммой 1 (с. 273) и построим такую последовательность векторов $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, что

$$1)\ y_n \in E_n, \quad 2)\ \|y_n\| = 1;$$

$$3)\ \rho(y_n, E_{n-1}) = \inf_{x \in E_{n-1}} \|y_n - x\| > 1/2,$$

где E_n — подпространство, порожденное $x_1, \ldots, x_n$.

Последовательность $\{y_n/\lambda_n\}$ ограничена в силу неравенства $|\lambda_n| \geqslant \delta$. Мы утверждаем, что из последовательности образов $\{A(y_n/\lambda_n)\}$ нельзя выбрать сходящуюся. Действительно, пусть $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$; тогда

$$A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + z_n,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k \in E_{n-1}.$$

Поэтому при любых $p > q$

$$\left\| A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right) \right\| = \|y_p + z_p - (y_q + z_q)\| =$$

$$= \|y_p - (y_q + z_q - z_p)\| > 1/2,$$

поскольку $y_q + z_q - z_p \in E_{p-1}$.

Это противоречит компактности оператора A.

Из доказанной теоремы, в частности, вытекает, что число линейно независимых собственных векторов, отвечающих данному собственному значению $\lambda \neq 0$ компактного оператора A, конечно.

Из этой теоремы следует также, что число собственных значений λ_n компактного оператора A во внешности круга $|\lambda| \geqslant \delta > 0$ всегда конечно, и что все собственные значения оператора A можно перенумеровать в порядке невозрастания модулей: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$

4. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Выше мы говорили о компактных операторах в произвольном банаховом пространстве. Сейчас мы дополним эти сведения некоторыми фактами, относящимися к компактным операторам в гильбертовом пространстве.

Мы назвали оператор A компактным, если он переводит всякое ограниченное множество в предкомпактное. Поскольку $H = H^*$, т. е. H есть пространство, сопряженное к сепарабельному, в нем все ограниченные множества (и только они) слабо предкомпактны. Следовательно, в гильбертовом пространстве компактный оператор можно определить как оператор, переводящий всякое слабо предкомпактное множество в множество, предкомпактное в сильной топологии.

Наконец, в некоторых случаях удобно еще и такое определение компактности оператора в гильбертовом пространстве: оператор A называется компактным в H, если он всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся. Действительно, пусть это последнее условие выполнено и пусть M — ограниченное множество в H. Каждое бесконечное подмножество множества M содержит слабо сходящуюся последовательность. Если она переводится в сильно сходящуюся последовательность, то AM предкомпактно. Обратно, пусть A — компактный оператор, $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся последовательность и x — ее слабый предел. Тогда $\{Ax_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся сильно. В то же время $\{Ax_n\}$ сходится слабо, в силу непрерывности A, к Ax, откуда следует, что $\{Ax_n\}$ не может иметь более одной предельной точки. Следовательно, $\{Ax_n\}$ — сходящаяся последовательность.

5. Самосопряженные компактные операторы в H. Для самосопряженных линейных операторов в конечномерном евклидовом пространстве известна теорема о приведении

матрицы такого оператора к диагональной форме в некотором ортогональном нормированном базисе. В этом пункте мы распространим эту теорему на компактные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Результаты этого пункта справедливы как для действительного, так и для комплексного гильбертова пространства. Для определенности будем считать, что H комплексно.

Установим прежде всего некоторые свойства собственных векторов и собственных значений самосопряженных операторов в H, вполне аналогичные, впрочем, соответствующим свойствам конечномерных самосопряженных операторов.

I. *Все собственные значения самосопряженного оператора A в H действительны.*

В самом деле, пусть $Ax = \lambda x$, $\|x\| \neq 0$, тогда

$$\lambda (x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda} (x, x),$$

откуда $\lambda = \bar{\lambda}$.

II. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Действительно, если $Ax = \lambda x$ и $Ay = \mu y$, причем $\lambda \neq \mu$, то

$$\lambda (x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y),$$

откуда $(x, y) = 0$.

Докажем теперь следующую фундаментальную теорему.

Теорема 5 (Гильберт — Шмидт). *Для любого компактного самосопряженного линейного оператора A в гильбертовом пространстве H существует ортогональная нормированная система $\{\varphi_n\}$ собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_n \neq 0$), такая, что каждый элемент $\xi \in H$ записывается единственным образом в виде*

$$\xi = \sum_k c_k \varphi_k + \xi',$$

где вектор $\xi' \in \operatorname{Ker} A$, т. е. удовлетворяет условию $A\xi' = 0$; при этом

$$A\xi = \sum_k \lambda_k c_k \varphi_k$$

и если система $\{\varphi_n\}$ *бесконечна, то* $\lim \lambda_n = 0$ $(n \to \infty)$.

Для доказательства этой основной теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Если* $\{\xi_n\}$ *слабо сходится к* ξ *и линейный самосопряженный оператор* A *компактен, то*

$$Q(\xi_n) = (A\xi_n,\ \xi_n) \to (A\xi,\ \xi) = Q(\xi).$$

Доказательство. Для всякого n

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)| \leqslant$$
$$\leqslant |(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi_n)| + |(A\xi,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)|.$$

Но

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi_n)| \leqslant \|\xi_n\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|,$$
$$|(A\xi,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)| = |(A\xi_n,\ \xi) - (A\xi,\ \xi)| =$$
$$= |(\xi,\ A(\xi_n - \xi))| \leqslant \|\xi\| \cdot \|A(\xi_n - \xi)\|,$$

и так как числа $\|\xi_n\|$ ограничены, а $\|A(\xi_n - \xi)\| \to 0$, то

$$|(A\xi_n,\ \xi_n) - (A\xi,\ \xi)| \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Если функционал*

$$|Q(\xi)| = |(A\xi,\ \xi)|,$$

где A *— ограниченный самосопряженный линейный оператор, достигает на единичном шаре максимума в точке* ξ_0, *то из* $(\xi_0,\ \eta) = 0$ *вытекает, что*

$$(A\xi_0,\ \eta) = (\xi_0,\ A\eta) = 0.$$

Доказательство. Очевидно, $\|\xi_0\| = 1$. Положим

$$\xi = \frac{\xi_0 + a\eta}{\sqrt{1 + |a|^2 \|\eta\|^2}},$$

где a — произвольное комплексное число. Из $\|\xi_0\| = 1$ следует, что

$$\|\xi\| = 1.$$

Далее,

$$Q(\xi) = \frac{1}{1+|a|^2\|\eta\|^2}[Q(\xi_0) + \bar{a}(A\xi_0, \eta) + a\overline{(A\xi_0, \eta)} + |a|^2 Q(\eta)].$$

Число a можно взять сколь угодно малым по модулю и таким, что $\bar{a}(A\xi_0, u)$ — действительная величина. Тогда $a\overline{(A\xi_0, \eta)} = \bar{a}(A\xi_0, \eta)$ и

$$Q(\xi) = Q(\xi_0) + 2\bar{a}(A\xi_0, \eta) + O(a^2).$$

Из последнего равенства ясно, что если $(A\xi_0, \eta) \neq 0$, то a можно выбрать так, что $|Q(\xi)| > |Q(\xi_0)|$, а это противоречит условию леммы.

Из леммы 3 непосредственно вытекает, что если $|Q(\xi)|$ достигает максимума при $\xi = \xi_0$, то ξ_0 есть собственный вектор оператора.

Доказательство теоремы 5. Будем строить элементы φ_k по индукции, в порядке убывания абсолютных величин соответствующих им собственных значений:

$$|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots$$

Для построения элемента φ_1 рассмотрим выражение $|Q(\xi)| = |(A\xi, \xi)|$ и докажем, что оно на единичном шаре достигает максимума. Пусть

$$S = \sup_{\|\xi\| \leqslant 1} |(A\xi, \xi)|$$

и $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — такая последовательность, что $\|\xi_n\| = 1$ и

$$|(A\xi_n, \xi_n)| \to S \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как единичный шар в H слабо компактен, то из $\{\xi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу η. При этом $\|\eta\| \leqslant 1$ и в силу леммы 2

$$|(A\eta, \eta)| = S.$$

Элемент η мы и примем за φ_1. Ясно, что $\|\eta\|$ в точности равняется 1. (Действительно, пусть $\|\eta\| < 1$; положим

$\eta_1 = \eta/\|\eta\|$; тогда $\|\eta_1\| = 1$ и $|(A\eta_1, \eta_1)| \geqslant S$, что противоречит определению S). При этом

$$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1,$$

откуда

$$|\lambda_1| = \frac{|(A\varphi_1, \varphi_1)|}{(\varphi_1, \varphi_1)} = |(A\varphi_1, \varphi_1)| = S.$$

Пусть теперь собственные векторы

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n,$$

отвечающие собственным значениям

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_n,$$

уже построены. Пусть $M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Рассмотрим функционал

$$|(A\xi, \xi)|$$

на совокупности элементов, принадлежащих

$$M_n^{\perp} = H \ominus M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

(т. е. ортогональных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) и удовлетворяющих условию $\|\xi\| \leqslant 1$. Множество $M_n^{\perp}$ есть подпространство, инвариантное относительно A (так как подпространство $M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ инвариантно и A самосопряжен). Применяя к $M_n^{\perp}$ проведенные выше рассуждения, получим, что в $M_n^{\perp}$ найдется вектор (обозначим его φ_{n+1}), собственный для оператора A.

Возможны два случая: 1) после конечного числа шагов мы получим подпространство $M_{n_0}^{\perp}$, в котором $(A\xi, \xi) \equiv 0$; 2) $(A\xi, \xi) \not\equiv 0$ на $M_n^{\perp}$ при всех n.

В первом случае из леммы 3 вытекает, что $M_{n_0}^{\perp}$ переводится оператором A в нуль (положите $\eta = A\xi_0$), т. е. целиком состоит из собственных векторов, отвечающих $\lambda = 0$. Система построенных векторов $\{\varphi_n\}$ состоит из конечного числа элементов.

Во втором случае получаем последовательность $\{\varphi_n\}$ собственных векторов, для каждого из которых $\lambda_n \neq 0$. Покажем, что $\lambda_n \to 0$. Последовательность $\{\varphi_n\}$ (как и всякая ортогональная нормированная последовательность) слабо сходится к нулю, поэтому элементы $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ должны сходиться к нулю по норме, откуда $|\lambda_n| = \|A\varphi_n\| \to 0$.

Пусть

$$M^{\perp} = H \ominus M(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots) = \bigcap_n M_n^{\perp} \neq 0.$$

Если $\xi \in M^{\perp}$ и $\xi \neq 0$, то $(A\xi, \xi) \leqslant \lambda_n \|\xi\|^2$ для всех n, т. е. $(A\xi, \xi) = 0$. Отсюда в силу леммы 3 (при $\max |(A\xi, \xi)| = 0$), примененной к $M^{\perp}$, получаем $A\xi = 0$, т. е. подпространство $M^{\perp}$ переводится оператором A в нуль.

Из построения системы $\{\varphi_n\}$ ясно, что всякий вектор можно представить в виде

$$\xi = \sum c_k \varphi_k + \xi', \text{ где } A\xi' = 0,$$

откуда вытекает, что

$$A\xi = \sum \lambda_k c_k \varphi_k.$$

Теорема доказана. Эта теорема играет фундаментальную роль в теории интегральных уравнений, о которых будет идти речь в гл. IX.

Замечание. Доказанная теорема означает, что для всякого компактного самосопряженного оператора A в H существует ортогональный базис пространства H, состоящий из собственных векторов этого оператора. Действительно, для получения такого базиса достаточно дополнить построенную в доказательстве теоремы систему собственных векторов $\{\varphi_n\}$ произвольным ортогональным базисом подпространства $M^{\perp}$, переводимого оператором A в нуль. Иными словами, здесь получается результат, вполне аналогичный теореме о приведении матрицы конечномерного самосопряженного оператора к диагональному виду в ортогональном базисе.

Для несамосопряженных операторов в n-мерном пространстве такое приведение, вообще говоря, невозможно, однако верна следующая теорема: *всякое линейное преобразование в n-мерном пространстве имеет хотя бы один собственный вектор*. Нетрудно убедиться, что это утверждение не переносится на компактные операторы в H. Действительно, пусть оператор A задан в l_2 формулой

$$Ax = A(x_1, \ldots, x_n, \ldots) =$$

$$= \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n - 1}{n-1}, \ldots\right). \quad (8)$$

Этот оператор компактен (проверьте!), но не имеет ни одного собственного вектора (докажите это).

Упражнение. Найдите спектр оператора (8).

ГЛАВА V

МЕРА, ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛ

Понятие меры $\mu(A)$ множества A является естественным обобщением понятий:

1) длины $l(\Delta)$ отрезка Δ,

2) площади $S(F)$ плоской фигуры F,

3) объема $V(G)$ пространственной фигуры G,

4) приращения $\varphi(b) - \varphi(a)$ неубывающей функции $\varphi(t)$ на полуинтервале $[a, b)$,

5) интеграла от неотрицательной функции, взятого по некоторой линейной, плоской или пространственной области, и т. п.

Это понятие возникло в теории функций действительного переменного, а оттуда перешло в теорию вероятностей, теорию динамических систем, функциональный анализ и многие другие области математики.

В § 1 этой главы мы изложим теорию меры для множеств на плоскости, отправляясь от понятия площади прямоугольника. Общая теория меры будет изложена в §§ 2 и 3. Читатель легко заметит, что все рассуждения, проведенные в § 1, имеют общий характер и в абстрактной теории повторяются без существенных изменений.

§ 1. Мера плоских множеств

1. Мера элементарных множеств. Рассмотрим систему $\mathfrak{S}$ множеств на плоскости (x, y), каждое из которых определяется одним из неравенств вида

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant x < b,$$
$$a < x \leqslant b, \quad a < x < b$$

и одним из неравенств вида

$$c \leqslant y \leqslant d, \quad c \leqslant y < d,$$
$$c < y \leqslant d, \quad c < y < d,$$

где a, b, c и d — произвольные числа. Множества, принадлежащие этой системе, мы будем называть *прямоугольни-*

ками. Замкнутый прямоугольник, определяемый неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

представляет собой прямоугольник в обычном смысле (вместе с границей), (если $a < d$ и $c < d$, отрезок (если $a = b$ и $c < d$ или $a < b$ и $c = d$), точку (при $a = b$, $c = d$) и, наконец, пустое множество (если $a > b$ или $c > d$). Открытый прямоугольник

$$a < x < b, \quad c < y < d$$

будет в зависимости от соотношения между a, b, c и d прямоугольником без границы или пустым множеством. Каждый из прямоугольников остальных типов (назовем их полуоткрытыми) представляет собой настоящий прямоугольник без одной, двух или трех сторон, интервал, полуинтервал, либо, наконец, пустое множество.

Класс всех прямоугольников на плоскости обозначим $\mathfrak{S}$. (Для каждого из прямоугольников определим его меру,) в соответствии с известным из элементарной геометрии понятием площади. Именно:

(а) мера пустого множества равна 0;

б) мера непустого прямоугольника (замкнутого, открытого или полуоткрытого), определяемого числами a, b, c и d, равна

$$(b - a)(d - c).$$

Таким образом, (каждому прямоугольнику P из $\mathfrak{S}$ поставлено в соответствие число $m(P)$ — его мера; при этом выполнены следующие условия:

1) мера $m(P)$ принимает действительные неотрицательные значения;

2) мера $m(P)$ *аддитивна*, т. е. если $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ и $P_i \cap P_k = \varnothing$ при $i \neq k$, то

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k).$$

Наша задача — распространить, с сохранением свойств 1) и 2), меру $m(P)$, определенную пока для прямоугольников, на более широкий класс множеств.

Сначала мы распространим меру на так называемые элементарные множества. Назовем плоское множество

элементарным, если его можно представить хотя бы одним способом как объединение конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.

Для дальнейшего нам понадобится следующая теорема:

Теорема 1. *Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами.*

Таким образом, по терминологии, введенной в § 5 гл. I, элементарные множества образуют кольцо.

Доказательство. Ясно, что пересечение двух прямоугольников есть снова прямоугольник. Поэтому, если

$$A = \bigcup_k P_k, \quad B = \bigcup_j Q_j$$

— два элементарных множества, то и их пересечение

$$A \cap B = \bigcup_{k,\,j} (P_k \cap Q_j)$$

— элементарное множество.

Разность двух прямоугольников есть, как легко проверить, элементарное множество. Следовательно, вычитая из прямоугольника некоторое элементарное множество, мы снова получим элементарное множество (как пересечение элементарных). Пусть теперь множества A и B — элементарные. Найдется, очевидно, прямоугольник P, содержащий каждое из них. Тогда множество

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]$$

в силу сказанного выше будет элементарным. Отсюда и из равенств

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B),$$
$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

следует, что разность и симметрическая разность элементарных множеств являются элементарными множествами. Теорема доказана.

Определим теперь меру $m'(A)$ для элементарных множеств следующим образом: если

$$A = \bigcup_k P_k,$$

где P_k — попарно непересекающиеся прямоугольники, то

$$m'(A) = \sum_k m(P_k).$$

Покажем, что $m'(A)$ не зависит от способа разложения A в сумму конечного числа прямоугольников. Пусть

$$A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j,$$

где P_k и Q_j — прямоугольники, и $P_i \cap P_k = \varnothing$, $Q_i \cap Q_k = \varnothing$ при $i \neq k$. Так как пересечение $P_k \cap Q_j$ двух прямоугольников есть прямоугольник, то, в силу аддитивности меры для прямоугольников,

$$\sum_k m(P_k) = \sum_{k,\,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_j m(Q_j).$$

В частности, для прямоугольников мера m' совпадает с исходной мерой m.

Легко видеть, что определенная таким образом мера элементарных множеств неотрицательна и аддитивна.

Установим следующее важное свойство меры элементарных множеств.

Теорема 2. *Если A — элементарное множество и $\{A_n\}$ — конечная или счетная система элементарных множеств такая, что*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

то

$$m'(A) \leqslant \sum_n m'(A_n). \tag{1}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и данного A можно, очевидно, найти такое замкнутое элементарное множество $\bar{A}$, которое содержится в A и удовлетворяет условию

$$m'(\bar{A}) \geqslant m'(A) - \varepsilon/2.$$

(Достаточно каждый из k составляющих A прямоугольников P_i заменить лежащим внутри него замкнутым прямоугольником с площадью большей, чем $m(P_i) - \varepsilon/(2k)$.)

Далее, для каждого A_n можно найти открытое элементарное множество $\tilde{A}_n$, содержащее A_n и удовлетворяющее условию

$$m'(\tilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Ясно, что

$$\overline{A} \subset \bigcup_n \tilde{A}_n.$$

Из $\{\tilde{A}_n\}$ можно (по лемме Гейне—Бореля) выбрать конечную систему $\tilde{A}_{n_1}, \ldots, \tilde{A}_{n_s}$, покрывающую $\overline{A}$. При этом, очевидно,

$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i})$$

(так как иначе $\overline{A}$ оказалось бы покрытым конечным числом прямоугольников, суммарной площади меньшей, чем $m'(\overline{A})$, что невозможно). Поэтому

$$m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_n m'(A_n) + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_n m'(A_n) + \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает (1).

Свойство меры m', устанавливаемое теоремой 2 (мера множества не превосходит суммы мер покрывающих его множеств, взятых в конечном или счетном числе), называется *полуаддитивностью*. Из него вытекает свойство так называемой *счетной аддитивности*, или *σ-аддитивности*, состоящее в следующем.

Пусть элементарное множество A представлено как сумма счетного числа непересекающихся элементарных множеств A_n ($n = 1, 2, \ldots$):

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

тогда

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

(т. е. мера суммы счетного числа непересекающихся слагаемых равна сумме мер).

Действительно, в силу аддитивности при любом N имеем:

$$m'(A) \geqslant m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$m'(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

В силу теоремы 2 имеет место и противоположное неравенство. Таким образом, σ-аддитивность меры m' доказана.

Замечание. У читателя может сложиться впечатление, что σ-аддитивность меры на плоскости получается автоматически из ее аддитивности, путем предельного перехода. На самом деле это не так (в доказательстве теоремы 2 мы, используя лемму Гейне—Бореля, существенно опирались на связь между метрическими и топологическими свойствами плоских множеств). В § 2 при изучении мер на произвольных абстрактных множествах мы увидим, что из аддитивности меры, вообще говоря, ее σ-аддитивность не следует.

2. Лебегова мера плоских множеств. Элементарные множества не исчерпывают всех множеств, которые встречаются в геометрии и в классическом анализе. Поэтому естественно попытаться распространить понятие меры, с сохранением ее основных свойств, на класс множеств более широкий, чем конечные объединения прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Решение этой задачи, в известном смысле окончательное, было дано А. Лебегом в начале XX века.

При изложении теории меры Лебега нам придется рассматривать не только конечные, но и бесконечные объединения прямоугольников. Для того чтобы при этом сразу же не столкнуться с множествами «бесконечной меры», ограничимся сперва множествами, целиком принадлежащими квадрату $E = \{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

На совокупности всех таких множеств определим функцию $\mu^*(A)$ следующим образом.

Определение 1. *Внешней мерой* множества A называется число

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup P_k} \sum_k m(P_k), \qquad (1)$$

где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или счетными системами прямоугольников.

Замечания. Если бы мы в определении внешней меры рассматривали покрытия, состоящие не только из прямоугольников, но из любых элементарных множеств (взятых в конечном или счетном числе), то мы получили бы, очевидно, то же самое значение $\mu^*(A)$, поскольку всякое элементарное множество есть сумма конечного числа прямоугольников.

2. Если A — элементарное множество, то $\mu^*(A) = m'(A)$. Действительно, пусть $P_1, \ldots, P_n$ — составляющие A прямоугольники. Тогда, по определению,

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(P_i).$$

Так как прямоугольники P_i покрывают A, то $\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(P_i) = m'(A)$. Но если $\{Q_j\}$ — произвольная конечная или счетная система прямоугольников, покрывающая A, то в силу теоремы 2 $m'(A) \leqslant \sum_j m(Q_j)$, поэтому $\mu^*(A) = m'(A)$.

Теорема 3. *Если*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

где A_n — конечная или счетная система множеств, то

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n). \tag{2}$$

В частности, если $A \subset B$, то $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

Доказательство. По определению внешней меры, для каждого A_n найдется такая система прямоугольников $\{P_{nk}\}$, конечная или счетная, что $A_n \subset \bigcup_k P_{nk}$ и

$$\sum_k m(P_{nk}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

где $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. Тогда

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk},$$

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда вытекает утверждение теоремы.

Так как на элементарных множествах m' и μ^* совпадают, то теорема 2 представляет собой частный случай теоремы 3.

Определение 2. Множество A называется *измеримым* (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{3}$$

Функция μ^*, рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой*. Будем обозначать ее через μ.

Замечание. Введенное нами определение измеримости имеет достаточно наглядный смысл. Оно означает, что множество измеримо, если его можно «сколь угодно точно приблизить» элементарными множествами.

Итак, мы определили некоторый класс $\mathfrak{M}_E$ множеств, называемых измеримыми, и функцию μ, меру Лебега, на этом классе. Наша ближайшая цель — установить следующие факты:

1. *Совокупность $\mathfrak{M}_E$ измеримых множеств замкнута относительно операций взятия конечных или счетных сумм и пересечений* (т. е. представляет собой σ-алгебру, см. определение в п. 4 § 5 гл. I).

2. *Функция μ σ-аддитивна на $\mathfrak{M}_E$.*

Нижеследующие теоремы представляют собой этапы доказательства этих утверждений.

Теорема 4. *Дополнение измеримого множества измеримо.*

Это сразу следует из равенства

$$(E \setminus A) \triangle (E \setminus B) = A \triangle B,$$

которое проверяется непосредственно.

Теорема 5. *Сумма и пересечение конечного числа измеримых множеств суть измеримые множества.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство для двух множеств. Пусть A_1 и A_2 — измеримые множества. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon/2, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon/2.$$

Так как

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

то

$$\mu^*[(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)] \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon.$$

Но $B_1 \cup B_2$ — элементарное множество, поэтому множество $A_1 \cup A_2$ измеримо.

Измеримость пересечения двух измеримых множеств вытекает из теоремы 4 и соотношения

$$A_1 \cap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cup (E \setminus A_2)]. \tag{4}$$

Следствие. *Разность и симметрическая разность двух измеримых множеств измеримы.*

Это вытекает из теорем 4 и 5 и равенств

$$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (E \setminus A_2), \quad A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1).$$

Теорема 6. *Если $A_1, \ldots, A_n$ — попарно непересекающиеся измеримые множества, то*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \tag{5}$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любых двух множеств A и B*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B).$$

Доказательство леммы. Так как

$$A \subset B \cup (A \triangle B),$$

то в силу теоремы 3

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы в случае $\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B)$. Если же $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$, то утверждение леммы вытекает из неравенства

$$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B),$$

устанавливаемого аналогично.

Доказательство теоремы 6. Как и в теореме 5, достаточно рассмотреть случай двух множеств. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \tag{6}$$

$$\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{7}$$

Положим $A = A_1 \cup A_2$ и $B = B_1 \cup B_2$. Множество A измеримо в силу теоремы 5. Так как множества A_1 и A_2 не пересекаются, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$$

и, следовательно,

$$m'(B_1 \cap B_2) \leqslant 2\varepsilon. \tag{8}$$

В силу леммы из (6) и (7) вытекает, что

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| < \varepsilon, \tag{9}$$

$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Так как на совокупности элементарных множеств мера аддитивна, то из (8)—(10) получаем

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Заметив еще, что $A \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ имеем, наконец,

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \triangle B) \geqslant m'(B) - 2\varepsilon \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon \rhd 0$ может быть выбрано произвольно малым, то

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Поскольку противоположное неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

справедливо (в силу теоремы 3) всегда, окончательно получаем

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2);$$

так как A_1, A_2 и A измеримы, то здесь μ^* можно заменить на μ.

Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что для всякого измеримого A

$$\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A).$$

Теорема 7. *Сумма и пересечение счетного числа измеримых множеств суть измеримые множества.*

Доказательство. Пусть

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots$$

— счетная система измеримых множеств и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Положим $A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. Ясно, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$, причем множества A_n' попарно не пересекаются. В силу теоремы 5 и следствия из нее все множества A_n' измеримы. В силу теоремы 6 и определения внешней меры при любом конечном n

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k') = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k'\right) \leqslant \mu(A),$$

поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n')$$

сходится и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что

$$\sum_{n>N} \mu(A_n') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Так как множество $C = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ измеримо (как сумма конечного числа измеримых множеств), то для него найдется такое элементарное множество B, что

$$\mu^*(C \triangle B) < \varepsilon/2. \tag{12}$$

Поскольку

$$A \triangle B \subset (C \triangle B) \cup \left(\bigcup_{n>N} A_n'\right),$$

то из (11) и (12) вытекает

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon,$$

т. е. A измеримо.

Так как дополнения измеримых множеств измеримы, то утверждение теоремы относительно пересечений вытекает из равенства

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n).$$

Теорема 7 усиливает теорему 5. Следующая теорема представляет собой аналогичное усиление теоремы 6.

Теорема 8. *Если* $\{A_n\}$ — *последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств и* $A = \bigcup_n A_n$, *то*

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n).$$

Доказательство. В силу теоремы 6 при любом N

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) < \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$\mu(A) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{13}$$

С другой стороны, согласно теореме 3

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{14}$$

Из (13) и (14) вытекает утверждение теоремы.

Установленное в теореме 8 свойство меры было названо ее *счетной аддитивностью*, или *σ-аддитивностью*. Из σ-аддитивности вытекает следующее свойство меры, называемое *непрерывностью*.

Теорема 9. *Если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ — *последовательность вложенных друг в друга измеримых множеств и* $A = \bigcap_n A_n$, *то*

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $A = \varnothing$; общий случай сводится к этому заменой A_n на $A_n \setminus A$. Имеем

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots,$$

$$A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \cup \ldots,$$

причем слагаемые не пересекаются. Поэтому, в силу σ-аддитивности μ

$$\mu(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}), \tag{15}$$

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1}); \tag{16}$$

так как ряд (15) сходится, то его остаток (16) стремится к 0 при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\mu(A_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — *возрастающая последовательность измеримых множеств и*

$$A = \bigcup_n A_n,$$

то

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Для доказательства достаточно перейти от множеств A_n к их дополнениям и воспользоваться теоремой 9.

Отметим в заключение еще одно очевидное, но важное обстоятельство. *Всякое множество* A, *внешняя мера которого равна* 0, *измеримо*. Достаточно положить $B = \varnothing$; тогда

$$\mu^*(A \triangle B) = \mu^*(A \triangle \varnothing) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Итак, мы распространили меру с элементарных множеств на более широкий класс $\mathfrak{M}_E$, замкнутый относительно операций взятия счетных сумм и пересечений, т. е. представляющий собой σ-алгебру. Построенная мера σ-аддитивна на этом классе. Установленные выше теоремы позволяют составить следующее представление о совокупности измеримых по Лебегу множеств.

Всякое открытое множество, принадлежащее E, можно представить как объединение конечного или счетного числа открытых прямоугольников, т. е. измеримых множеств, и в силу теоремы 7 все открытые множества измеримы. Замкнутые множества суть дополнения открытых, следовательно, они тоже измеримы. Согласно теореме 7 измеримыми должны быть и все те множества, которые мо-

гут быть получены из открытых и замкнутых с помощью конечного или счетного числа операций взятия счетных сумм и пересечений. Можно показать, однако, что этими множествами все измеримые множества еще не исчерпываются.

3. Некоторые дополнения и обобщения. Выше мы рассматривали только те множества, которые содержатся в единичном квадрате $E = \{0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$. Нетрудно освободиться от этого ограничения, например, следующим образом. Представив всю плоскость как сумму полуоткрытых квадратов $E_{nm} = \{n < x \leqslant n+1,\ m < y \leqslant m+1\}$ (n, m — целые), мы будем говорить, что плоское множество A измеримо, если его пересечение $A_{nm} = A \cap E_{nm}$ с каждым из этих квадратов измеримо. При этом мы положим, по определению,

$$\mu(A) = \sum_{n,\,m} \mu(A_{nm}).$$

Ряд, стоящий справа, либо сходится к конечному значению, либо расходится к $+\infty$. Поэтому мера μ может принимать и бесконечные значения. Все свойства меры и измеримых множеств, установленные выше, очевидным образом переносятся на этот случай [1]). Надо отметить лишь, что сумма счетного числа измеримых множеств конечной меры может иметь бесконечную меру. Класс измеримых множеств на всей плоскости обозначим $\mathfrak{A}$.

Мы изложили в этом параграфе построение меры Лебега для плоских множеств. Аналогично может быть построена лебегова мера на прямой, в трехмерном пространстве или, вообще, в евклидовом пространстве любой размерности n. В каждом из этих случаев мера строится по одному и тому же образцу: исходя из меры, определенной заранее для некоторой системы простейших множеств (прямоугольников в случае плоскости, интервалов (a, b), отрезков $[a, b]$ и полуинтервалов $(a, b]$, $[a, b)$ в случае прямой, и т. п.), мы определяем меру вначале для конечных объединений таких множеств, а потом распространяем ее на гораздо более широкий класс множеств — на множества, измеримые по Лебегу. Само определение измеримости дословно переносится на множества в пространстве любой размерности.

---

[1]) Однако в теореме 9 нужно добавить условие $\mu(E_1) < +\infty$, чтобы сходился ряд (15). Приведите пример, показывающий, что без этого условия теорема может стать неверной.

Вводя понятие меры Лебега, мы исходили из обычного определения площади. Аналогичное построение для одномерного случая опирается на понятие длины интервала (отрезка, полуинтервала). Здесь, однако, можно ввести понятие меры и иным, более общим способом.

Пусть $F(t)$ — некоторая неубывающая, непрерывная слева функция на прямой. Положим

$$m(a, b) = F(b) - F(a + 0),$$
$$m[a, b] = F(b + 0) - F(a),$$
$$m(a, b] = F(b + 0) - F(a + 0),$$
$$m[a, b) = F(b) - F(a).$$

Легко видеть, что так определенная функция интервала m неотрицательна и аддитивна. Применяя к ней рассуждения, аналогичные проведенным в настоящем параграфе, мы можем построить некоторую меру $\mu_F(A)$. При этом совокупность $\mathfrak{A}_F$ множеств, измеримых относительно данной меры, замкнута относительно операций взятия счетных сумм и пересечений, а мера μ_F будет σ-аддитивна. Класс $\mathfrak{A}_F$ множеств, измеримых относительно μ_F, будет, вообще говоря, зависеть от выбора функции F. Однако при любом выборе F открытые и замкнутые множества, а следовательно, и все их счетные суммы и пересечения заведомо будут измеримы. Меры, получаемые с помощью той или иной функции F, называются *мерами Лебега—Стилтьеса*. В частности, функции $F(t) \equiv t$ отвечает обычная мера Лебега на прямой.

Если мера μ_F такова, что она равна 0 для любого множества, обычная лебегова мера μ которого равна 0, то мера μ_F называется *абсолютно непрерывной* (относительно μ). Если мера μ_F целиком сосредоточена на конечном или счетном множестве точек (это будет в том случае, когда множество значений функции F конечно или счетно), то она называется *дискретной*. Мера μ_F называется *сингулярной*, если она равна 0 для любого одноточечного множества, но имеется такое множество M лебеговой меры 0, что мера μ_F его дополнения равна 0.

Можно показать, что всякая мера μ_F представима как сумма абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной мер. К мерам Лебега—Стилтьеса мы еще вернемся в следующей главе.

Существование неизмеримых множеств. Мы видели, что класс измеримых по Лебегу множеств весьма широк.

Естественно спросить, существуют ли вообще неизмеримые множества? Покажем, что этот вопрос решается положительно. Проще всего неизмеримые множества строятся на окружности, на которой введена линейная мера Лебега.

Пусть C — окружность, длина которой равна 1, и α — некоторое иррациональное число. Отнесем к одному классу те точки окружности C, которые могут быть переведены одна в другую поворотом окружности C на угол $n\alpha$ (n — целое). Каждый из этих классов будет, очевидно, состоять из счетного множества точек. Выберем из каждого такого класса по одной точке. Покажем, что полученное таким образом множество (обозначим его Φ_0) неизмеримо. Обозначим через Φ_n множество, получаемое из Φ_0 поворотом на угол $n\alpha$. Легко видеть, что все множества Φ_n попарно не пересекаются и в сумме составляют всю окружность C. Если бы множество Φ_0 было измеримо, то были измеримы и конгруэнтные ему множества Φ_n. Так как

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n, \quad \Phi_n \cap \Phi_m = \varnothing \quad \text{при} \quad n \neq m,$$

то в силу σ-аддитивности меры отсюда следовало бы, что

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(\Phi_n). \tag{17}$$

Но конгруэнтные множества должны иметь одну и ту же меру, так что если Φ_0 измеримо, то

$$\mu(\Phi_n) = \mu(\Phi_0).$$

Отсюда видно, что равенство (17) невозможно, так как сумма ряда, стоящего в его правой части, равна 0, если $\mu(\Phi_0) = 0$, и бесконечности, если $\mu(\Phi_0) > 0$. Итак, множество Φ_0 (а следовательно, и каждое Φ_n) неизмеримо.

§ 2. Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и σ-аддитивность [1]

1. Определение меры. Мы строили меру плоских множеств, отправляясь от меры (площади) прямоугольника и распространяя ее на более широкий класс множеств.

[1] В этом параграфе и дальше мы будем систематически пользоваться понятиями и фактами, изложенными в § 5 гл. I.

Для наших построений существенно было вовсе не конкретное выражение площади прямоугольника, а лишь ее общие свойства. Именно, при продолжении плоской меры с прямоугольников на элементарные множества мы пользовались лишь тем, что площадь — это неотрицательная аддитивная функция множества, и тем, что совокупность прямоугольников есть полукольцо. При построении лебегова продолжения плоской меры была, кроме того, важна ее σ-аддитивность.

В силу только что сказанного, конструкции, изложенной в § 1 применительно к плоским множествам, можно придать вполне общую абстрактную форму. Тем самым ее применимость будет существенно расширена. Этому и посвящены ближайшие два параграфа.

Введем прежде всего следующее основное определение.

Определение 1. Функция множества $\mu(A)$ называется *мерой*, если:

1) область определения $\mathfrak{S}_\mu$ функции $\mu(A)$ есть полукольцо множеств,

2) значения функции $\mu(A)$ действительны и неотрицательны,

3) $\mu(A)$ аддитивна, т. е. для любого конечного разложения

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

множества $A \in \mathfrak{S}_\mu$ на (попарно непересекающиеся) множества $A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ выполнено равенство

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Замечание. Из разложения $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ вытекает, что $\mu(\varnothing) = 2\mu(\varnothing)$, т. е. $\mu(\varnothing) = 0$.

2. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо. При построении меры плоских множеств первым шагом было распространение меры с прямоугольников на элементарные множества, т. е. на конечные суммы попарно непересекающихся прямоугольников. Сейчас мы рассмотрим абстрактный аналог этой конструкции. Сформулируем прежде всего следующее определение.

Определение 2. Мера μ называется *продолжением* меры m, если $\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu$ и для каждого $A \in \mathfrak{S}_m$ имеет место равенство

$$\mu(A) = m(A).$$

Цель этого пункта состоит в доказательстве следующего предложения.

Теорема 1. *Для каждой меры $m(A)$, заданной на некотором полукольце $\mathfrak{S}_m$, существует одно и только одно продолжение $m'(A)$, имеющее своей областью определения кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ (т. е. минимальное кольцо над $\mathfrak{S}_m$).*

Доказательство. Для каждого множества $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ существует разложение

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \in \mathfrak{S}_m, \quad B_k \cap B_l = \varnothing \text{ при } k \neq l \qquad (1)$$

(теорема 3 § 5 гл. I). Положим, по определению,

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k). \qquad (2)$$

Легко видеть, что величина $m'(A)$, определенная равенством (2), не зависит от выбора разложения (1). Действительно, рассмотрим два разложения

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j, \quad B_i \in \mathfrak{S}_m, \quad C_j \in \mathfrak{S}_m.$$

Так как все пересечения $B_i \cap C_j$ принадлежат $\mathfrak{S}_m$, то в силу аддитивности меры m

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j),$$

что и требовалось доказать.

Неотрицательность и аддитивность функции $m'(A)$, определяемой равенством (2), очевидны. Итак, существование продолжения m' меры m на кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ доказано.

Для доказательства его единственности заметим, что, по определению продолжения, если $A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, где B_k — непересекающиеся множества из $\mathfrak{S}_m$, то для любого продолжения $\tilde{m}$ меры m на кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$

$$\tilde{m}(A) = \sum_k \tilde{m}(B_k) = \sum_k m(B_k) = m'(A),$$

т. е. мера $\tilde{m}$ совпадает с мерой m', определенной равенством (2). Теорема доказана.

По существу, мы повторили здесь, в абстрактных терминах, прием, которым мы в § 1 продолжили меру с прямоугольников на элементарные множества. Класс элементарных множеств как раз и представляет собой минимальное кольцо над полукольцом прямоугольников.

Из аддитивности и неотрицательности меры вытекают следующие почти очевидные, но важные свойства.

Теорема 2. *Пусть m — мера, заданная на некотором кольце $\mathfrak{R}_m$, и множества A, ..., A_n принадлежат $\mathfrak{R}_m$. Тогда*

I. *если* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ *и* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A);$$

II. *если* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geqslant m(A);$$

в частности, если $A \subset A'$ *и* $A, A' \in \mathfrak{R}$, *то* $m(A) \leqslant m(A')$.

Действительно, если A_1, ..., A_n попарно не пересекаются и содержатся в A, то в силу аддитивности меры

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right).$$

Поскольку $m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant 0$, отсюда получаем свойство I.

Далее, для любых A_1, $A_2 \in \mathfrak{R}_m$ имеем

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2).$$

По индукции отсюда получаем, что

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

Наконец, опять-таки в силу аддитивности меры из $A \subset \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ следует, что

$$m(A) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) - m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \setminus A\right) \leqslant m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right),$$

откуда в силу предыдущего неравенства и вытекает свойство II.

Мы доказали свойства I и II для меры, заданной на кольце множеств. Но если мера первоначально была задана на полукольце, то при продолжении ее на кольцо меры множеств, принадлежащих исходному полукольцу, не меняются. Поэтому свойства I и II справедливы и для мер на полукольцах.

3. σ-аддитивность. В различных вопросах анализа приходится рассматривать объединения не только конечного, но и счетного числа множеств. В связи с этим условие аддитивности, которое мы наложили на меры (определение 1), естественно заменить более сильным требованием σ-аддитивности.

Определение 3. Мера m называется *счетно-аддитивной*, или *σ-аддитивной*, если для любых множеств A, A_1, ..., A_n, ..., принадлежащих ее области определения $\mathfrak{S}_m$ и удовлетворяющих условиям

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j,$$

имеет место равенство

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Плоская мера Лебега, построенная нами в § 1, σ-аддитивна (теорема 8). Пример σ-аддитивной меры совсем иной природы можно построить следующим образом. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

— произвольное счетное множество и числа $p_n > 0$ таковы, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Соответствующий класс измеримых множеств состоит из всех подмножеств множества X. Для каждого $A \subset X$ положим

$$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

Легко проверить, что $m(A)$ будет σ-аддитивной мерой, причем $m(X) = 1$. Этот пример естественно появляется в связи со многими вопросами теории вероятностей.

Укажем пример меры аддитивной, но не σ-аддитивной. Пусть X — множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$, а $\mathfrak{S}_m$ состоит из пересечений множества X с произвольными интервалами (a, b), отрезками $[a, b]$ или полуинтервалами $(a, b]$, $[a, b)$ из $[0, 1]$. Легко видеть, что $\mathfrak{S}_m$ представляет собой полукольцо. Для каждого такого множества $A_{ab} \in \mathfrak{S}_m$ положим

$$m(A_{ab}) = b - a.$$

Эта мера аддитивна, однако она не σ-аддитивна, так как $m(X) = 1$, и в то же время X есть сумма счетного числа точек, каждая из которых имеет меру 0.

Меры, которые будут рассматриваться здесь и в следующем параграфе, мы будем предполагать σ-аддитивными.

Теорема 3. *Если мера m, определенная на некотором полукольце $\mathfrak{S}_m$, σ-аддитивна, то и мера μ, получающаяся ее продолжением на кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, σ-аддитивна.*

Доказательство. Пусть

$$A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m), \quad B_n \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

причем $B_s \cap B_r = \varnothing$ при $s \neq r$. Тогда существуют такие множества A_j и B_{ni} из $\mathfrak{S}_m$, что

$$A = \bigcup_j A_j, \quad B_n = \bigcup_i B_{ni}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

причем множества в правых частях каждого из этих равенств попарно не пересекаются, а суммы по i и j конечны (теорема 3 § 5 гл. I).

Пусть $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$. Легко видеть, что множества C_{nij} попарно не пересекаются, и притом

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_i C_{nij}, \quad B_{ni} = \bigcup_j C_{nij}.$$

Поэтому в силу σ-аддитивности меры m на $\mathfrak{S}_m$ имеем

$$m(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i m(C_{nij}), \tag{3}$$

$$m(B_{ni}) = \sum_j m(C_{nij}), \tag{4}$$

а в силу определения меры μ на $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$

$$\mu(A) = \sum_j m(A_j), \tag{5}$$

$$\mu(B_n) = \sum_i m(B_{ni}). \tag{6}$$

Из (3)—(6) вытекает, что $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. (Суммы по i и по j здесь конечны, ряды по n сходятся.)

Докажем теперь следующие основные свойства σ-аддитивных мер, представляющие собой обобщения на счетные суммы свойств, сформулированных в теореме 2. Поскольку, как мы установили, σ-аддитивность меры сохраняется при продолжении меры на кольцо, можно с самого начала считать, что мера задана на некотором кольце $\mathfrak{R}$.

Теорема 4. *Пусть мера m σ-аддитивна и множества A, A_1, ..., A_n, ... принадлежат кольцу $\mathfrak{R}$. Тогда*

Iσ. *Если* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ *и* $A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant m(A);$$

Пσ (*счетная полуаддитивность*). *Если* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \geqslant m(A).$$

Доказательство. Если все A_k не пересекаются и содержатся в A, то, в силу свойства I (теорема 2), при любом n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leqslant m(A).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Поскольку $\mathfrak{R}$ есть кольцо, множества

$$B_n = (A_n \cap A) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

принадлежат $\mathfrak{R}$. Так как

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \subset A_n$$

и множества B_n попарно не пересекаются, то

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Замечание. Утверждение I_σ доказанной только что теоремы не опирается, очевидно, на σ-аддитивность рассматриваемой меры; оно остается справедливым и для любых аддитивных мер. Наоборот, утверждение II_σ существенно использует σ-аддитивность меры. Действительно, в приведенном выше примере аддитивной, но не σ-аддитивной меры все пространство X, имеющее меру 1, покрывается счетной суммой одноточечных множеств, каждое из которых имеет меру 0. Более того, нетрудно убедиться, что свойство II_σ на самом деле равносильно σ-аддитивности. Действительно, пусть μ — некоторая мера, определенная на полукольце $\mathfrak{S}$. Пусть множества A, A_1, ..., A_n, ... принадлежат $\mathfrak{S}$, $A = \bigcup_k A_k$ и все A_k попарно не пересекаются. Тогда в силу свойства I_σ (которым, как мы видели, обладает любая мера)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu(A).$$

Если же μ обладает и свойством Π_σ, то (поскольку A_k в совокупности покрывают A)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geqslant \mu(A)$$

и, таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

Проверить счетную полуаддитивность меры (свойство Π_σ) бывает часто проще, чем прямо установить ее σ-аддитивность.

§ 3. Лебегово продолжение меры

1. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей. Если мера m, заданная на полукольце $\mathfrak{S}_m$, обладает лишь свойством аддитивности (но не σ-аддитивности), то ее продолжением на $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ исчерпываются в значительной степени все возможности распространения такой меры с исходного полукольца на более широкий класс множеств. Если же рассматриваемая мера σ-аддитивна, то она может быть распространена с $\mathfrak{S}_m$ на класс множеств значительно более обширный, чем кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, и в некотором смысле максимальный. Это можно сделать с помощью так называемого лебегова продолжения. Сначала мы рассмотрим лебегово продолжение меры, заданной на полукольце с единицей. Общий случай будет рассмотрен в следующем пункте.

Пусть на некотором полукольце множеств $\mathfrak{S}_m$ с единицей E задана σ-аддитивная мера m. Определим на системе $\mathfrak{A}$ всех подмножеств множества E функцию $\mu^*(A)$ — внешнюю меру следующим образом.

Определение 1. *Внешней мерой* множества $A \subset E$ называется число

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества A конечными или счетными системами множеств $B_n \in \mathfrak{S}_m$.

Следующее свойство внешней меры играет основную роль во всем дальнейшем построении.

Теорема 1 (счетная полуаддитивность). *Если*

$$A \subset \bigcup_n A_n,$$

где $\{A_n\}$ — *конечная или счетная система множеств, то*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n).$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством теоремы 3 § 1 и мы не будем его повторять.

Определение 2. Множество A называется *измеримым* (по Лебегу), если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $B \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, что

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

Функция μ^*, рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой* (или просто *мерой*) и обозначается μ. Ясно, что все множества из $\mathfrak{S}_m$ и из $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ измеримы. При этом, если $A \in \mathfrak{S}_m$, то

$$\mu(A) = m(A).$$

Это равенство доказывается точно так же, как и его аналог для множеств на плоскости.

Из равенства

$$A_1 \triangle A_2 = (E \setminus A_1) \triangle (E \setminus A_2)$$

следует, что если A измеримо, то его дополнение тоже измеримо.

Установим теперь основные свойства измеримых множеств и определенной на них лебеговой меры.

Теорема 2. *Система* $\mathfrak{M}$ *всех измеримых множеств есть кольцо.*

Доказательство. Так как всегда

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)],$$

то достаточно показать следующее. Если $A_1 \in \mathfrak{M}$, $A_2 \in \mathfrak{M}$, то и $A = A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{M}$.

Пусть A_1 и A_2 измеримы; тогда существуют $B_1 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ и $B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ такие, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon/2 \text{ и } \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon/2.$$

Полагая $B = B_1 \setminus B_2 \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ и пользуясь соотношением

$$(A_1 \setminus B_2) \triangle (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2),$$

получаем

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает измеримость множества A.

Замечание. Очевидно, что E есть единица кольца $\mathfrak{M}$, которое, таким образом, является алгеброй множеств.

Теорема 3. *На системе $\mathfrak{M}$ измеримых множеств функция $\mu(A)$ аддитивна.*

Доказательство этой теоремы представляет собой дословное повторение доказательства теоремы 6 § 1.

Теорема 4. *На системе $\mathfrak{M}$ измеримых множеств функция $\mu(A)$ σ-аддитивна.*

Доказательство. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots \in \mathfrak{M},\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

В силу теоремы 1

$$\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{2}$$

а в силу теоремы 3 при любом N

$$\mu(A) \geqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n),$$

откуда

$$\mu(A) \geqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует утверждение теоремы.

В § 1, рассматривая плоскую меру Лебега, мы показали, что не только конечные, но и счетные суммы и пересечения измеримых множеств также измеримы. Это верно и в общем случае, т. е. справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Система $\mathfrak{M}$ измеримых по Лебегу множеств является σ-алгеброй с единицей E.*

Доказательство. Так как

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

и так как дополнение измеримого множества измеримо, то достаточно показать следующее. Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ принадлежат $\mathfrak{M}$, то $A = \bigcup_n A_n$ также принадлежит $\mathfrak{M}$. Доказательство этого утверждения, проведенное в теореме 7 § 1 для плоских множеств, дословно сохраняется и в общем случае.

Так же как и в случае плоской меры Лебега, из σ-аддитивности меры следует ее *непрерывность*, т. е. если μ—σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре, $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ — убывающая цепочка измеримых множеств и

$$A = \bigcap_n A_n,$$

то

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

а если $A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ — возрастающая цепочка измеримых множеств и

$$A = \bigcup_n A_n,$$

то

$$\mu A = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство, проведенное в § 1 для плоской меры (теорема 9), дословно переносится на общий случай.

Итак, мы установили, что система $\mathfrak{M}$ представляет собой σ-алгебру, а определенная на ней функция $\mu(A)$ обладает всеми свойствами σ-аддитивной меры. Тем самым оправдано следующее определение.

Определение 3. *Лебеговым продолжением* $\mu = L(m)$ меры m называется функция $\mu(A)$, определенная на системе измеримых множеств $\mathfrak{M}$ и совпадающая на $\mathfrak{M}$ с внешней мерой $\mu^*(A)$.

2. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы. Если полукольцо $\mathfrak{S}_m$, на котором определена исходная мера m, не имеет единицы, то построение лебе-

гова продолжения, изложенное в предыдущем пункте, претерпевает некоторые, впрочем, незначительные, изменения. Определение 1 внешней меры сохраняется, но внешняя мера μ^* оказывается определенной только на системе S_{μ^*} таких множеств A, для каждого из которых существует покрытие $\bigcup\limits_n B_n$ множествами из $\mathfrak{S}_m$ с конечной суммой $\sum\limits_n m(B_n)$. Определение измеримости сохраняется без всяких изменений.

Теоремы 2—4 и заключительное определение 3 сохраняют силу. Предположение о существовании единицы использовалось лишь в доказательстве теоремы 2. Чтобы дать доказательство теоремы 2 в общем случае, надо установить независимо, что из $A_1 \in \mathfrak{M}$, $A_2 \in \mathfrak{M}$ вытекает $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$. Но это следует из включения

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2).$$

В случае, когда $\mathfrak{S}_m$ не имеет единицы, теорема 5 заменяется следующей теоремой:

Т е о р е м а 6. *При любой исходной мере m система множеств $\mathfrak{M}$, измеримых по Лебегу, является* δ*-кольцом; измеримость множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ при измеримых A_n имеет место в том и только том случае, если меры $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n\right)$ ограничены некоторой константой, не зависящей от N.*

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

З а м е ч а н и е. Поскольку сейчас речь идет о мерах, принимающих лишь к о н е ч н ы е значения, необходимость последнего условия очевидна.

Из теоремы 6 вытекает следующий факт.

С л е д с т в и е. *Система $\mathfrak{M}_A$ всех множеств $B \in \mathfrak{M}$, являющихся подмножествами фиксированного множества $A \in \mathfrak{M}$, образует* σ*-алгебру.*

Например, система всех измеримых по Лебегу (в смысле обычной лебеговой меры на прямой) подмножеств любого отрезка $[a, b]$ есть σ-алгебра множеств.

В заключение отметим еще одно свойство лебеговых мер.

О п р е д е л е н и е 4. Мера μ называется *полной*, если из $\mu(A) = 0$ и $A' \subset A$ вытекает, что A' измеримо.

Очевидно, что при этом $\mu(A') = 0$. Без труда доказывается, что *лебегово продолжение любой меры полно.* Это вытекает из того, что при $A' \subset A$ и $\mu(A) = 0$ неизбежно $\mu^*(A') = 0$, а любое множество C, для которого $\mu^*(C) = 0$, измеримо, так как $\varnothing \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ и

$$\mu^*(C \triangle \varnothing) = \mu^*(C) = 0.$$

Всякую σ-аддитивную меру на σ-алгебре можно продолжить до полной, положив ее равной нулю для любого подмножества каждого множества нулевой меры.

Дополнительные замечания. 1. Предположение о том, что исходная мера m задана на полукольце (а не на некоторой произвольной системе множеств), существенно для однозначности ее продолжения. Рассмотрим в единичном квадрате систему вертикальных и горизонтальных прямоугольников, т. е. таких прямоугольников, у которых или длина или ширина равна 1 (рис. 18), и припишем каждому такому прямоугольнику меру, равную его площади. На порожденную этими прямоугольниками алгебру (а тем более σ-алгебру) такая мера может быть продолжена неоднозначно (укажите хотя бы два различных продолжения).

2. Укажем на связь между процессом продолжения меры по Лебегу и процессом пополнения метрического пространства. Заметим для этого, что $m'(A \triangle B)$ можно принять за расстояние между элементами A и B кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. Тогда $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ становится метрическим (вообще говоря, неполным) пространством и его пополнение состоит как раз из всех измеримых множеств (при этом, однако, с метрической точки зрения множества A и B неразличимы, если $\mu(A \triangle B) = 0$).

Упражнения. 1. Пусть мера m задана на полукольце (с единицей) $\mathfrak{S}_m$ множеств из X и μ^* — отвечающая ей верхняя мера. Доказать, что множество A измеримо (по Лебегу) в том и только том случае, если оно обладает следующим свойством, называемым *измеримостью по Каратеодори*: для любого подмножества $Z \subset X$ имеет место равенство

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

2. Пусть σ-аддитивная мера m задана на кольце $\mathfrak{R}$ с единицей X и $m(X) = 1$. Введем для каждого $A \subset X$ наряду с внешней мерой μ^* внутреннюю меру μ_*, положив

$$\mu_*(A) = 1 - \mu^*(X \setminus A).$$

Легко видеть, что всегда $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$. Доказать, что

$$\mu_*(A) = \mu^*(A) \qquad (*)$$

в том и только том случае, если множество A измеримо (в смысле определения 2).

В случае, когда мера задана на кольце с единицей, равенство (*) часто принимается за определение измеримости множества.

3. Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры. Если исходная мера m задана в пространстве X на некотором полукольце без единицы, то введенное выше определение измеримости множества оказывается слишком узким. Например, если X — это плоскость, то такие множества, как вся плоскость, полоса, внешность круга и т. п., имеющие бесконечную площадь, при таком определении не попадают в число измеримых. Естественно расширить понятие измеримости, допуская для меры и бесконечные значения, с тем, чтобы совокупность измеримых множеств была, как и в случае, когда исходная мера задана на полукольце с единицей, σ-алгеброй (а не только δ-кольцом).

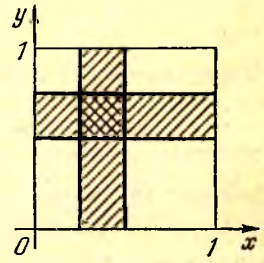


Рис. 18

Мы ограничимся при этом практически наиболее важным случаем так называемой σ-конечной меры, хотя соответствующее построение можно провести и в общем случае.

Пусть σ-аддитивная мера m задана на некотором полукольце $\mathfrak{S}_m$ подмножеств множества X. Мы скажем, что эта мера σ-*конечна*, если все X может быть представлено как сумма с ч е т н о г о числа множеств из $\mathfrak{S}_m$ (но не как сумма к о н е ч н о г о числа множеств из $\mathfrak{S}_m$). Примером σ-конечной меры может служить площадь, определенная на всех прямоугольниках на плоскости. Простой пример не σ-конечной меры можно получить следующим образом. Пусть на отрезке $[0, 1]$ задана некоторая функция $f(x)$. Для каждого конечного подмножества $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка положим $\mu(A) = \sum f(x_i)$. Если множество точек x, в которых $f(x) \neq 0$, несчетно, то такая мера на $[0, 1]$ не будет σ-конечной.

Итак, пусть m есть σ-аддитивная и σ-конечная мера в X, определенная на полукольце $\mathfrak{S}_m$. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathfrak{S}_m$. Перейдя от полукольца $\mathfrak{S}_m$ к порожденному им кольцу $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ и заменяя B_k на $B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$, можно считать, что X представлено как сумма счетного числа попарно н е п е р е с е к а ю щ и х с я измеримых множеств, которые мы по-прежнему обозначим B_1, B_2, ... Применив к m описанную в предыдущем пункте проце-

дуру лебегова продолжения, мы получим меру μ, определенную на δ-кольце $\mathfrak{M}$. Пусть $B \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_B$ — система всех множеств из $\mathfrak{M}$, содержащихся в B:

$$\mathfrak{M}_B = \{C: C \in \mathfrak{M},\ B \subset C\}.$$

Тогда $\mathfrak{M}_B$ есть σ-алгебра с единицей B (см. следствие из теоремы 6).

Рассмотрим теперь совокупность $\mathfrak{A}$ множеств A, имеющих измеримое пересечение с каждым B_i:

$$A \cap B_i \in \mathfrak{M}_{B_i}.$$

Иначе говоря, $A \in \mathfrak{A}$ означает, что A представимо в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{ где } A_i \in \mathfrak{M}_{B_i}. \tag{4}$$

Система $\mathfrak{A}$ представляет собой σ-алгебру (проверьте!), которую мы назовем *прямой суммой* σ-алгебр $\mathfrak{M}_{B_i}$. Множества (4), составляющие σ-алгебру $\mathfrak{A}$, мы назовем *измеримыми* и определим меру $\tilde{\mu}$ каждого такого A следующим образом: если

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathfrak{M}_{B_i},$$

то

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Поскольку мера всякого множества неотрицательна, стоящий здесь справа ряд сходится к некоторому неотрицательному значению или к $+\infty$.

Т е о р е м а 7. *В сделанных выше предположениях справедливы следующие утверждения:*

1) *σ-алгебра $\mathfrak{A}$ и мера $\tilde{\mu}$ не зависят от выбора системы непересекающихся множеств B_i из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = X$;

2) *мера $\tilde{\mu}$ σ-аддитивна на $\mathfrak{A}$;*

3) *совокупность множеств $A \in \mathfrak{A}$, для которых $\tilde{\mu}(A) < \infty$, совпадает с δ-кольцом $\mathfrak{M}$ и на этом δ-кольце $\tilde{\mu} = \mu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Заметим прежде всего, что $A \in \mathfrak{A}$ в том и только том случае, если $A \cap C \in \mathfrak{M}$

для любого $C \in \mathfrak{M}$. Достаточность этого условия ясна, поскольку оно означает, в частности, что $A \cap B_i \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; проверим его необходимость. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и $C \in \mathfrak{M}$. Положим $C_i = C \cap B_i$; тогда

$$A \cap C = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap C_i).$$

Так как при всяком N

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} (A \cap C_i)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N} C_i\right) \leqslant \mu(C),$$

то в силу теоремы 6 множество $A \cap C$ измеримо.

Пусть $\{B_i\}$ и $\{B_j^*\}$ — две системы непересекающихся множеств из $\mathfrak{M}$, такие, что $\bigcup B_i = \bigcup B_j^* = X$. Если $A \in \mathfrak{A}$, то, поскольку мера μ каждого множества из $\mathfrak{M}$ неотрицательна, выполнены равенства

$$\sum_i \mu(A \cap B_i) = \sum_{i,\,j} \mu(A \cap B_i \cap B_j^*) = \sum_j \mu(A \cap B_j^*),$$

т. е. определяя $\tilde{\mu}(A)$ по системе $\{B_i\}$ или $\{B_j^*\}$, мы получим один и тот же результат.

2) Пусть $A^{(1)}, \ldots \in \mathfrak{A}$, $A^{(k)} \cap A^{(l)} = \varnothing$, $k \neq l$ и $A = \bigcup_k A^{(k)}$. Тогда в силу σ-аддитивности меры μ на $\mathfrak{M}$:

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap B_i) = \sum_{i,\,k=1}^{\infty} \mu\left(A^{(k)} \cap B_i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^{(k)} \cap B_i)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A^{(k)}),$$

т. е. $\tilde{\mu}$ σ-аддитивна.

Наконец, 3) непосредственно следует из теоремы 6

Замечание. Описанное выше расширение понятия измеримости (с допущением для меры бесконечных значений) возможно и без предположения σ-конечности исходной меры, например, по следующей схеме.

Пусть X — некоторое пространство и $\mathfrak{M}$ — какое-то δ-кольцо его подмножеств. Множество $A \subset X$ называется *измеримым относительно* $\mathfrak{M}$, если $A \cap B \in \mathfrak{M}$ для любого $B \in \mathfrak{M}$. Нетрудно проверить, что система $\mathfrak{A}$ измеримых относительно $\mathfrak{M}$ множеств есть σ-алгебра с единицей X, причем, если само $\mathfrak{M}$ есть σ-алгебра с той же единицей X, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$.

Пусть теперь в X задана некоторая σ-аддитивная мера μ, которую мы в силу п. 2 можем считать уже продолженной на некоторое δ-кольцо $\mathfrak{M}$ и пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность измеримых относительно $\mathfrak{M}$ множеств из X. Множество $A \in \mathfrak{A}$ называется *нуль-множеством*, если $\mu(A \cap B) = 0$ для любого $B \in \mathfrak{M}$. Теперь на $\mathfrak{A}$ определяется мера $\bar{\mu}$ (принимающая, вообще говоря, и бесконечные значения) следующим образом: если для данного $A \in \mathfrak{A}$ существует такое $B \in \mathfrak{M}$, что $A \triangle B$ есть нуль-множество, то полагаем

$$\bar{\mu}(A) = \mu(B).$$

Для всех остальных $A \in \mathfrak{A}$ полагаем

$$\bar{\mu}(A) = \infty.$$

Нетрудно проверить, что мера $\bar{\mu}$ σ-аддитивна и на δ-кольце $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$ совпадает с μ.

4. Продолжение меры по Жордану. Рассматривая в § 2 этой главы меры, удовлетворяющие лишь условию аддитивности, мы показали, что каждая такая мера m может быть продолжена с полукольца $\mathfrak{S}_m$ на минимальное кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, порожденное этим полукольцом. Однако возможно и распространение меры на некоторое кольцо, более обширное, чем $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$. Соответствующее построение называется *продолжением меры по Жордану* [1]). Идея этого построения, применявшегося в ряде частных случаев еще математиками Древней Греции, состоит в приближении «измеряемого» множества A множествами A' и A'', которым мера уже приписана, изнутри и снаружи, т. е. так, что

$$A' \subset A \subset A''.$$

Пусть m — мера, заданная на некотором кольце $\mathfrak{R}$.

Определение 5. Будем называть множество A *измеримым по Жордану*, если при любом $\varepsilon > 0$ в кольце $\mathfrak{R}$ имеются множества A' и A'', удовлетворяющие условиям

$$A' \subset A \subset A'', \quad m(A'' \setminus A') < \varepsilon.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8. *Система $\mathfrak{R}^*$ измеримых по Жордану множеств является кольцом.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — система таких множеств A, для которых существует множество $B \supset A$ из $\mathfrak{R}$. Для любого A и $\mathfrak{R}$ положим, по определению,

$$\bar{\mu}(A) = \inf_{B \supset A} m(B),$$

$$\underline{\mu}(A) = \sup_{B \subset A} m(B).$$

Функция $\bar{\mu}(A)$ и $\underline{\mu}(A)$ называются соответственно «внешней» и «внутренней» жордановой мерой множества A.

Очевидно, что всегда

$$\underline{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(A).$$

---

[1]) Камилл Жордан, французский математик (1838—1922).

Теорема 9. *Кольцо* $\mathfrak{R}^*$ *совпадает с системой тех множеств* $A \in \mathfrak{A}$, *для которых* $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$.

Для множеств из $\overline{\mathfrak{R}}$ имеют место следующие теоремы:

Теорема 10. *Если* $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, *то*

$$\bar{\mu}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \bar{\mu}(A_k).$$

Теорема 11. *Если* $A_k \subset A$ $(k = 1, \ldots, n)$ *и* $A_i \cap A_j = \varnothing$, *то*

$$\underline{\mu}(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(A).$$

Определим теперь функцию μ на области

$$\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{R}^*$$

как общее значение внешней и внутренней меры:

$$\mu(A) = \underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A).$$

Из теорем 10 и 11 и из того очевидного обстоятельства, что для $A \in \mathfrak{R}$

$$\bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A) = m(A)$$

вытекает следующее утверждение:

Теорема 12. *Функция* $\mu(A)$ *является мерой и продолжением меры* m.

Изложенное построение применимо к любой мере m, определенной на кольце. В частности, его можно применить к множествам на плоскости. При этом за исходное кольцо принимается совокупность элементарных множеств (т. е. конечных сумм прямоугольников). Кольцо элементарных множеств зависит, очевидно, от выбора системы координат на плоскости (берутся прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат). При переходе к плоской мере Жордана эта зависимость от выбора системы координат исчезает: отправляясь от любой системы координат $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, связанной с первоначальной системой $\{x_1, x_2\}$ ортогональным преобразованием

$$\bar{x}_1 = \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot x_2 + a_1,$$
$$\bar{x}_2 = -\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 + a_2,$$

мы получим одну и ту же меру Жордана. Этот факт вытекает из следующей общей теоремы.

Теорема 13. *Для того чтобы жордановы продолжения* $\mu_1 = j(m_1)$ *и* $\mu_2 = j(m_2)$ *мер* m_1 *и* m_2, *определенных на кольцах* $\mathfrak{R}_1$ *и* $\mathfrak{R}_2$ *совпадали, необходимо и достаточно выполнения условий*:

$$\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{S}_{\mu_2}, \quad m_1(A) = \mu_2(A) \text{ на } \mathfrak{R}_1,$$
$$\mathfrak{R}_2 \subset \mathfrak{S}_{\mu_1}, \quad m_2(A) = \mu_1(A) \text{ на } \mathfrak{R}_2.$$

Если исходная мера m определена не на кольце, а на полукольце $\mathfrak{S}_m$, то ее жордановым продолжением естественно назвать меру

$$j(m) = j(r(m)),$$

получающуюся в результате продолжения m на кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ и дальнейшего продолжения по Жордану.

5. Однозначность продолжения меры. Если множество A измеримо по Жордану относительно меры μ, т. е. принадлежит $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^*(\mathfrak{S}_m)$, то для любой меры $\bar{\mu}$, продолжающей m и определенной на $\mathfrak{R}^*$, значение $\bar{\mu}(A)$ совпадает со значением $J(A)$ жорданова продолжения $J = j(m)$. Можно показать, что продолжение меры m за пределы системы $\mathfrak{R}^*$ множеств, измеримых по Жордану, не будет однозначно. Более точно это значит следующее. Назовем множество A *множеством однозначности* для меры m, если:

1) существует мера, являющаяся продолжением меры m, определенная для множества A;

2) для любых двух такого рода мер μ_1 и μ_2

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Имеет место теорема: *система множеств однозначности для меры m совпадает с системой множеств, измеримых по Жордану относительно меры m, т. е. с кольцом $\mathfrak{R}^*$.*

Однако если рассматривать только σ-аддитивные меры и их продолжения (σ-аддитивные), то система множеств однозначности будет, вообще говоря, обширнее.

Так как именно случай σ-аддитивных мер наиболее важен, то введем следующее определение.

Определение 6. Множество A называется *множеством σ-однозначности* для σ-аддитивной меры m, если:

1) существует σ-аддитивное продолжение λ меры m, определенное для A (т. е. такое, что $A \in \mathfrak{S}_\lambda$);

2) для всяких двух таких σ-аддитивных продолжений λ_1 и λ_2 справедливо равенство

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

Если A есть множество σ-однозначности для σ-аддитивной меры μ, то в силу нашего определения существует единственно возможное значение $\lambda(A)$ для любого σ-аддитивного продолжения меры μ, определенного на A.

Легко видеть, что каждое множество A, измеримое по Жордану, измеримо и по Лебегу (но не наоборот! приводите пример), причем его жорданова и лебегова меры одинаковы. Отсюда непосредственно вытекает, что жорданово продолжение σ-аддитивной меры σ-аддитивно.

Каждое множество A, измеримое по Лебегу, является множеством σ-однозначности для исходной меры m. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ для A существует такое $B \in \mathfrak{R}$, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Каково бы ни было определенное для A продолжение λ меры m,

$$\lambda(B) = m'(B),$$

так как продолжение m' меры m на $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ однозначно. Далее,

$$\lambda(A \triangle B) \leqslant \mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$|\lambda(A) - m'(B)| < \varepsilon.$$

Таким образом, для любых двух σ-аддитивных продолжений λ_1 и λ_2 меры m имеем

$$|\lambda_1(A) - \lambda_2(A)| < 2\varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\lambda_1(A) = \lambda_2(A).$$

Можно показать, что система множеств, измеримых по Лебегу, исчерпывает всю систему множеств σ-однозначности для исходной меры m.

Пусть m — некоторая σ-аддитивная мера с областью определения $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M} = L(\mathfrak{S})$ — область определения ее лебегова продолжения. Легко убедиться в том, что каково бы ни было полукольцо $\mathfrak{S}_1$, удовлетворяющее условию

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{M},$$

всегда

$$L(\mathfrak{S}_1) = L(\mathfrak{S}).$$

§ 4. Измеримые функции

1. Определение и основные свойства измеримых функций. Пусть X и Y — два произвольных множества и пусть в них выделены две системы подмножеств $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$ соответственно. Абстрактная функция $y = f(x)$ с областью определения X, принимающая значения на Y, называется $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$-*измеримой*, если из $A \in \mathfrak{S}_Y$ вытекает, что $f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$.

Например, если и за X и за Y взять числовую прямую (т. е. рассматривать действительные функции действительного переменного), а за $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$ взять систему всех открытых (или всех замкнутых) подмножеств из $\mathbf{R}$, то сформулированное определение измеримости сведется к определению непрерывности. Взяв за $\mathfrak{S}_X$ и $\mathfrak{S}_Y$ систему всех борелевских множеств, мы придем к так называемым *B-измеримым* (или *измеримым по Борелю*) функциям.

В дальнейшем мы будем интересоваться понятием измеримости главным образом с точки зрения теории интегрирования. В этом плане основное значение имеет понятие измеримости числовых функций, определенных на некотором множестве X, с заданной на нем σ-аддитивной мерой μ. При этом за $\mathfrak{S}_X$ принимается совокупность $\mathfrak{S}_\mu$ всех измеримых относительно μ множеств из X, а за $\mathfrak{S}_Y$ — совокупность всех B-множеств на прямой. Поскольку

всякая σ-аддитивная мера может быть продолжена на некоторую σ-алгебру, естественно с самого начала считать, что $\mathfrak{S}_\mu$ есть σ-алгебра. Таким образом, для числовых функций мы приходим к следующему определению измеримости:

Определение 1. Пусть X — множество, в котором задана σ-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{S}_\mu$. Действительная функция $f(x)$ на X называется *μ-измеримой*, если для всякого борелевского множества A числовой прямой

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu.$$

Аналогично, комплексная функция $\varphi(x)$, определенная на X, называется *μ-измеримой*, если $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$ для всякого борелевского подмножества комплексной плоскости. Легко проверить, что это равносильно μ-измеримости действительной и мнимой частей этой функции по отдельности.

Числовая функция, заданная на прямой, называется *борелевской* (или *B-измеримой*), если прообраз каждого борелевского множества есть борелевское множество.

Теорема 1. *Пусть X, Y и Z — произвольные множества с выделенными в них системами подмножеств $\mathfrak{S}_X$, $\mathfrak{S}_Y$ и $\mathfrak{S}_Z$ соответственно и пусть определенная на X функция $y = f(x)$ $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$-измерима, а определенная на Y функция $z = g(y)$ $(\mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z)$-измерима. Тогда функция*

$$z = \varphi(x) \equiv g(f(x))$$

$(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Z)$-измерима.

Коротко: *измеримая функция от измеримой функции есть измеримая функция.*

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{S}_Z$, то в силу $(\mathfrak{S}_Y, \mathfrak{S}_Z)$-измеримости функции g имеем: $g^{-1}(A) = B \in \mathfrak{S}_Y$. В свою очередь в силу $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Y)$-измеримости функции f множество $f^{-1}(B)$ принадлежит $\mathfrak{S}_X$, т. е. $f^{-1}(g^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_X$, т. е. функция φ $(\mathfrak{S}_X, \mathfrak{S}_Z)$-измерима.

Следствие. *Борелевская функция от μ-измеримой числовой функции μ-измерима. В частности, непрерывная функция от μ-измеримой μ-измерима.*

В дальнейшем, в случаях, когда это не может вызвать недоразумения, мы вместо «μ-измеримости» будем писать просто «измеримость».

Теорема 2. *Для того чтобы действительная функция $f(x)$ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы при любом действительном c множество $\{x : f(x) < c\}$ было измеримо.*

Доказательство. Необходимость условия ясна, так как полупрямая $(-\infty, c)$ есть борелевское множество. Для доказательства достаточности заметим прежде всего, что σ-алгебра, порожденная системой $\sum$ всех полупрямых $(-\infty, c)$ совпадает с σ-алгеброй всех борелевских множеств на прямой. Но, согласно п. 5 § 5 гл. I отсюда следует, что прообраз каждого борелевского множества принаделжит σ-алгебре, порожденной прообразами полупрямых, принадлежащих $\sum$, т. е. измерим.

Доказанное условие часто принимают за определение измеримости, т. е. называют функцию $f(x)$ измеримой, если все множества $\{x : f(x) < c\}$ измеримы.

2. Действия над измеримыми функциями. Покажем, что совокупность измеримых функций, заданных на некотором множестве, замкнута относительно арифметических операций.

Теорема 3. *Сумма, разность и произведение двух измеримых функций измеримы. Частное двух измеримых функций, при условии, что знаменатель не обращается в нуль, тоже измеримо.*

Доказательство этой теоремы проведем в несколько шагов.

1) Если f измерима, то, очевидно, измеримы и функции kf и $a + f$ при любых постоянных k и a.

2) Далее, если f и g — измеримые функции, то множество

$$\{x: f(x) > g(x)\}$$

измеримо. Действительно,

$$\{x: f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x: f(x) > r_k\} \cap \{x: g(x) < r_k\}),$$

где сумма берется по всем рациональным числам r_k, занумерованным в любом порядке. Отсюда получаем, что

$$\{x: f(x) > a - g(x)\} = \{x: f(x + g(x) > a\}$$

измеримо, т. е. сумма измеримых функций измерима.

3) Из 1) и 2) следует измеримость разности $f - g$.

4) Произведение измеримых функций измеримо. Действительно, воспользуемся тождеством

$$fg = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2].$$

Стоящее справа выражение есть измеримая функция. Это вытекает из 1)—3) и следствия из теоремы 1, в силу которого квадрат измеримой функции измерим.

5) Если $f(x)$ измерима и $f(x) \neq 0$, то и $1/f(x)$ измерима. Действительно, если $c > 0$, то

$$\{x: 1/f(x) < c\} = \{x: f(x) > 1/c\} \cup \{x: f(x) < 0\},$$

если $c < 0$, то

$$\{x: 1/f(x) < c\} = \{x: 0 > f(x) > 1/c\},$$

а если $c = 0$, то

$$\{x: 1/f(x) < c\} = \{x: f(x) < c\}.$$

Каждый раз справа мы получаем измеримое множество. Из 4) и 5) следует измеримость частного $f(x)/g(x)$ (при условии $g(x) \neq 0$).

Итак, мы показали, что арифметические действия над измеримыми функциями снова приводят к измеримым функциям.

Покажем теперь, что совокупность измеримых функций замкнута по отношению не только к арифметическим операциям, но и к операции предельного перехода.

Теорема 4. *Предел сходящейся при каждом* $x \in X$ *последовательности измеримых функций измерим.*

Доказательство. Пусть $f_n(x) \to f(x)$; тогда

$$\{x: f(x) < c\} = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m>n} \{x: f_m(x) < c - 1/k\}. \qquad (1)$$

Действительно, если $f(x) < c$, то существует такое k, что $f(x) < c - 2/k$; далее, при этом k можно найти столь большое n, что при $m \geqslant n$ выполнено неравенство

$$f_m(x) < c - 1/k,$$

а это и означает, что x войдет в правую часть (1).

Обратно, если x принадлежит правой части равенства (1), то существует такое k, что при всех достаточно больших m

$$f_m(x) < c - 1/k,$$

но тогда $f(x) < c$, т. е. x входит в левую часть равенства (1).

Если функции $f_n(x)$ измеримы, то множества

$$\{x: f_m(x) < c - 1/k\}$$

измеримы. Так как совокупность измеримых множеств есть σ-алгебра, то в силу (1) множества

$$\{x: f(x) < c\}$$

тоже измеримы, что и доказывает измеримость $f(x)$.

Замечание. Как видно из сказанного, понятие измеримости функции не связано с наличием в рассматриваемых пространствах какой-либо меры. Должны лишь быть выделены системы множеств, называемых измеримыми. Однако фактически понятие измеримости используется, как правило, для функций, определенных на некотором пространстве X с фиксированной мерой, заданной на какой-либо σ-алгебре его подмножеств. Именно эта ситуация и будет рассматриваться в дальнейшем.

Как уже было отмечено, σ-аддитивную меру, определенную на σ-алгебре $\mathfrak{S}$ подмножеств некоторого множества X, можно без ограничения общности считать полной, т. е. считать, что если A — измеримое множество меры нуль, то всякое его подмножество A' измеримо (и, конечно, $\mu(A') = 0$). Это условие полноты меры мы всюду в дальнейшем будем предполагать выполненным.

3. Эквивалентность. При изучении измеримых функций часто можно пренебречь их значениями на множестве меры нуль. В связи с этим возникает следующее определение.

Определение 2. Две функции, f и g, заданные на одном и том же измеримом множестве E, называются *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если

$$\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Введем еще следующую терминологию. Говорят, что некоторое свойство выполнено *почти всюду* на E, если оно выполнено на E всюду, кроме, быть может, точек, образующих множество меры нуль. Таким образом, две функции называются эквивалентными, если они совпадают почти всюду.

Теорема 5. *Функция $f(x)$, определенная на некотором измеримом множестве E и эквивалентная на нем некоторой измеримой функции $g(x)$, тоже измерима.*

Доказательство. Из определения эквивалентности следует, что множества

$$\{x : f(x) < a\} \text{ и } \{x : g(x) < a\}$$

могут отличаться друг от друга только на некоторое множество меры нуль, следовательно (поскольку мера предположена полной), если второе из них измеримо, то измеримо и первое.

Замечание. В классическом анализе понятие эквивалентности функций не играет существенной роли, так как там в основном рассматриваются непрерывные функции одного или нескольких переменных, а для них эквивалентность равносильна тождественности. Точнее, если две функции, f и g, непрерывные на некотором сегменте E, эквивалентны (относительно меры Лебега), то они совпадают. Действительно, если $f(x_0) \neq g(x_0)$ в какой-либо точке x_0, то в силу непрерывности f и g найдется окрестность точки x_0, во всех точках которой $f(x) \neq g(x)$. Мера такой окрестности положительна, поэтому непрерывные функции не могут быть эквивалентны, если они не совпадают.

Для произвольных измеримых функций эквивалентность вовсе не означает совпадения. Например, функция на прямой, равная единице в рациональных точках и нулю в иррациональных, эквивалентна функции, тождественно равной нулю.

4. Сходимость почти всюду. Поскольку во многих случаях поведение измеримой функции на том или ином множестве меры нуль для нас несущественно, будет естественно ввести следующее обобщение обычного понятия поточечной сходимости.

Определение 3. Последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, определенных на некотором пространстве X с заданной на нем мерой, называется *сходящейся почти всюду* к функции $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{2}$$

для почти всех $x \in X$ (т. е. множество тех точек x, в которых (2) не выполняется, имеет меру нуль).

Пример. Последовательность функций $f_n(x) = (-x)^n$, определенных на отрезке $[0, 1]$, при $n \to \infty$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ почти всюду (а именно, всюду, кроме точки $x = 1$).

Теорема 4 допускает следующее обобщение.

Т е о р е м а 4′. *Если последовательность измеримых функций* $f_n(x)$ *сходится к функции* $f(x)$ *почти всюду на* X, *то* $f(x)$ *также измерима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — то множество, на котором

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

По условию, $\mu(X \setminus A) = 0$. Функция $f(x)$ измерима на A, а так как на множестве меры нуль, очевидно, вообще всякая функция измерима, то $f(x)$ измерима на $X \setminus A$, следовательно, она измерима и на множестве X.

У п р а ж н е н и е. Пусть последовательность измеримых функций $f_n(x)$ сходится почти всюду к некоторой предельной функции $f(x)$. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду к $g(x)$ в том и только том случае, если $g(x)$ эквивалентна $f(x)$.

5. Теорема Егорова. В 1911 Д. Ф. Егоровым была доказана следующая важная теорема, устанавливающая связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости.

Т е о р е м а 6. *Пусть* E — *множество конечной меры и последовательность измеримых функций* $f_n(x)$ *сходится на* E *почти всюду к* $f(x)$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существует такое измеримое множество* $E_\delta \subset E$, *что*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) *на множестве* E_δ *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *равномерно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 4′ функция $f(x)$ измерима. Положим

$$E_n^m = \bigcap_{i \geqslant n} \{x: |f_i(x) - f(x)| < 1/m\}.$$

Таким образом, E_n^m при фиксированных m и n означает множество всех тех точек x, для которых

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/m$$

при всех $i \geqslant n$. Пусть

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

Из определения множеств E_n^m ясно, что при фиксированном m

$$E_1^m \subset \ldots \subset E_n^m \subset \ldots$$

В силу того, что σ-аддитивная мера непрерывна, для любого m и любого $\delta > 0$ найдется такое $n_0(m)$, что

$$\mu\left(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}\right) < \delta/2^m.$$

Положим

$$E_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)},$$

и покажем, что так построенное E_δ удовлетворяет требованиям теоремы.

Докажем сначала, что на E_δ последовательность $\{f_i(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$. Это сразу вытекает из того, что если $x \in E_\delta$, то для любого m

$$|f_i(x) - f(x)| < 1/m \text{ при } i > n_0(m).$$

Оценим теперь меру множества $E \setminus E_\delta$. Для этого заметим, что при всяком m имеем $\mu(E \setminus E^m) = 0$. Действительно, если $x_0 \in E \setminus E^m$, то существуют сколь угодно большие значения i, при которых

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geqslant 1/m,$$

т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_0 не сходится к $f(x)$. Так как, по условию, $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду, то

$$\mu(E \setminus E^m) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mu\left(E \setminus E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(E^m \setminus E^m_{n_0(m)}\right) < \delta/2^m.$$

Поэтому

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E^m_{n_0(m)}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(E \setminus E^m_{n_0(m)}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E \setminus E^m_{n_0(m)}\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta.$$

Теорема доказана.

6. Сходимость по мере.

Определение 4. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ *сходится по мере* к функции $f(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x: |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

Нижеследующие теоремы 7 и 8 устанавливают связь между понятиями сходимости почти всюду и сходимости по мере. Как и в предыдущем пункте рассматриваемая мера предполагается конечной.

Теорема 7. *Если последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду к некоторой функции $f(x)$, то она сходится к той же самой предельной функции $f(x)$ по мере.*

Доказательство. Из теоремы 4′ следует, что предельная функция $f(x)$ измерима. Пусть A — то множество (меры нуль), на котором $f_n(x)$ не стремятся к $f(x)$. Пусть, далее,

$$E_k(\sigma) = \{x: |f_k(x) - f(x)| \geqslant \sigma\},$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Ясно, что все эти множества измеримы. Так как

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots,$$

то в силу свойства непрерывности меры

$$\mu(R_n(\sigma)) \to \mu(M) \text{ при } n \to \infty.$$

Проверим теперь, что

$$M \subset A. \tag{3}$$

Действительно, если $x_0 \notin A$, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$

то для данного $\sigma > 0$ найдется такое n, что

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma, \text{ при } k \geqslant n,$$

т. е. $x_0 \notin R_n(\sigma)$ и, тем более, $x_0 \notin M$.

Но $\mu(A) = 0$, и поэтому из (3) вытекает, что $\mu(M) = 0$, и, следовательно,

$$\mu(R_n(\sigma)) \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

так как $E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$, то теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что из сходимости последовательности функций по мере, вообще говоря, не следует ее сходимость почти всюду. Действительно, определим

для каждого натурального k на полуинтервале $(0, 1]$ функции

$$f_1^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$$

следующим образом:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } \dfrac{i-1}{k} < x \leqslant \dfrac{i}{k}, \\ 0 \text{ при остальных значениях } x. \end{cases}$$

Занумеровав все эти функции подряд, мы получим последовательность, которая, как легко проверить, сходится по мере к нулю, но в то же время не сходится ни в одной точке (докажите это!).

Упражнение. Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к некоторой предельной функции $f(x)$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ будет сходиться по мере к функции $g(x)$ в том и только в том случае, если $g(x)$ эквивалентна $f(x)$.

Хотя приведенный выше пример показывает, что теорема 7 не может быть обращена в полной мере, тем не менее справедлива следующая теорема:

Теорема 8. *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $f(x)$. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — некоторая последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

и пусть положительные числа $\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots$ таковы, что ряд

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots$$

сходится. Построим последовательность индексов

$$n_1 < n_2 < \ldots$$

следующим образом: выберем n_1 так, чтобы

$$\mu\{x: |f_{n_1}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_1\} < \eta_1$$

(такое n_1 обязательно существует); далее выберем $n_2 > n_1$ так, чтобы

$$\mu\{x: |f_{n_2}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_2\} < \eta_2.$$

Вообще, выберем $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы

$$\mu\{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\} < \eta_k.$$

Покажем, что построенная последовательность сходится к $f(x)$ почти всюду. Действительно, пусть

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\}, \quad Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Так как

$$R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots,$$

то в силу непрерывности меры $\mu(R_i) \to \mu(Q)$.

С другой стороны, ясно, что $\mu(R_i) < \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$, откуда $\mu(R_i) \to 0$ при $i \to \infty$, т. е. $\mu(Q) = 0$. Остается проверить, что во всех точках множества $E \setminus Q$ имеет место сходимость

$$f_{n_k}(x) \to f(x).$$

Пусть $x_0 \in E \setminus Q$. Тогда найдется такое i_0, то $x_0 \notin R_{i_0}$. Это означает, что для всех $k \geqslant i_0$

$$x_0 \notin \{x: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_k\},$$

т. е.

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k.$$

Так как, по условию, $\varepsilon_k \to 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0).$$

Теорема доказана.

7. Теорема Лузина. *C*-свойство. Определение измеримой функции, данное в самом начале этого параграфа, относится к функциям на произвольных множествах и в общем случае никак не связано с понятием непрерывной функции. Однако, если речь идет о функциях на отрезке, то имеет место следующая важная теорема, установленная в 1913 г. Н. Н. Лузиным.

Теорема 9. *Для того чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, была измерима, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, что*

$$\mu\{x: f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon.$$

Иначе говоря, измеримая функция может быть сделана непрерывной на $[a, b]$ путем ее изменения на множестве сколь угодно малой меры. Про функцию на отрезке, которая может быть сделана непрерывной с помощью такой «малой деформации», говорят, что она обладает *С-свойством* (термин Н. Н. Лузина). Как показывает теорема Лузина, для функций числового аргумента С-свойство можно положить в основу самого определения измеримости. Доказательство теоремы Лузина можно получить, воспользовавшись теоремой Егорова (проведите это доказательство!).

У п р а ж н е н и е. Доказать, что если A — измеримое множество на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое открытое множество $G \supset A$ и такое замкнутое множество $F \subset A$, что $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$ и $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

§ 5. Интеграл Лебега

Понятие интеграла Римана, известное из элементарного курса анализа, применимо лишь к таким функциям, которые или непрерывны или имеют «не слишком много» точек разрыва. Для измеримых функций, которые могут быть разрывны всюду, где они определены (или же вообще могут быть заданы на абстрактном множестве, так, что для них понятие непрерывности просто не имеет смысла), римановская конструкция интеграла становится непригодной. Вместе с тем для таких функций имеется весьма совершенное и гибкое понятие интеграла, введенное Лебегом.

Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том, что здесь, в отличие от интеграла Римана, точки x группируются не по признаку их близости на оси x, а по признаку близости значений функции в этих точках. Это сразу же позволяет распространить понятие интеграла на весьма широкий класс функций.

Кроме того, интеграл Лебега определяется совершенно одинаково для функций, заданных на любых пространствах с мерой, в то время как интеграл Римана вводится сначала для функций одного переменного, а затем уже с соответствующими изменениями переносится на случай нескольких переменных. Для функций же на абстрактных пространствах с мерой интеграл Римана вообще не имеет смысла.

Всюду, где не оговорено противное, будет рассматриваться некоторая полная σ-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре множеств с единицей X. Все рассматриваемые множества $A \subset X$ будут предполагаться измеримыми, а функции $f(x)$ — определенными для $x \in X$ и измеримыми.

Нам удобно будет определить интеграл Лебега вначале для так называемых простых функций, а затем распространить его на существенно более широкий класс функций. Пункты 2—5 содержат построение интеграла Лебега для случая, когда мера всего пространства конечна. Случай бесконечной меры рассматривается в п. 6 этого параграфа.

1. Простые функции.

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой, называется *простой*, если она измерима и принимает не более, чем счетное число значений.

Структура простых функций характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. *Функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число различных значений*

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots,$$

измерима в том и только том случае, если все множества

$$A_n = \{x: f(x) = y_n\}$$

измеримы.

Доказательство. Необходимость условия ясна, так как каждое A_n есть прообраз одноточечного множества $\{y_n\}$, а всякое одноточечное множество является борелевским. Достаточность следует из того, что в условиях теоремы прообраз $f^{-1}(B)$ любого борелевского множества есть объединение $\bigcup_{y_n \in B} A_n$ не более чем счетного числа измеримых множеств A_n, т. е. измерим.

Использование простых функций в построении интеграла Лебега будет основано на следующей теореме.

Теорема 2. *Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций.*

Доказательство. Достаточность ясна из теоремы 4 предыдущего параграфа. Для доказательства необходимости рассмотрим произвольную измеримую функцию $f(x)$ и положим $f_n(x) = m/n$, если $m/n \leqslant f(x) < (m+1)/n$ (здесь m — целые, а n — целые положительные). Ясно, что функции $f_n(x)$ простые; при $n \to \infty$ они равномерно сходятся к $f(x)$, так как $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 1/n$.

2. Интеграл Лебега для простых функций. Мы введем понятие интеграла Лебега сначала для функций, названных выше простыми, т. е. для измеримых функций, принимающих конечное или счетное число значений.

Пусть f — некоторая простая функция, принимающая значения

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots; \ y_i \neq y_j \text{ при } i \neq j,$$

и пусть A — некоторое измеримое подмножество X.

Естественно определить интеграл от функции f по множеству A равенством

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \text{ где } A_n = \{x: x \in A, f(x) = y_n\}, \quad (1)$$

если ряд справа сходится. Мы приходим к следующему определению (в котором по понятным причинам заранее постулируется абсолютная сходимость ряда).

Определение 2. Простая функция f называется *интегрируемой* или *суммируемой* (по мере μ) на множестве A, если ряд (1) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма ряда (1) называется *интегралом* от f по множеству A.

В этом определении предполагается, что все y_n различны. Можно, однако, представить значение интеграла от простой функции в виде суммы произведений вида $c_k \mu(B_k)$ и не предполагая, что все c_k различны. Это позволяет сделать следующая лемма.

Лемма. Пусть $A = \bigcup_k B_k$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$ *и пусть на каждом множестве* B_k *функция* f *принимает только одно значение* c_k; *тогда*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k), \quad (2)$$

причем функция f *интегрируема на* A *в том и только том случае, когда ряд* (2) *абсолютно сходится.*

Доказательство. Легко видеть, что каждое множество

$$A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$$

является объединением тех B_k, для которых $c_k = y_n$. Поэтому

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Так как мера неотрицательна, то

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k),$$

т. е. ряды $\sum_n y_n \mu(A_n)$ и $\sum_k c_k \mu(B_k)$ абсолютно сходятся или расходятся одновременно. Лемма доказана.

Установим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций:

А) $$\int_A [f(x) + g(x)]\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x)\, d\mu,$$

причем из существования интегралов в правой части равенства следует существование интеграла в левой.

Для доказательства предположим, что f принимает значения f_i на множествах $F_i \subset A$, а g — значения g_j на множествах $G_j \subset A$, так что

$$J_1 = \int_A f(x)\, d\mu = \sum_i f_i \mu(F_i), \tag{3}$$

$$J_2 = \int_A g(x)\, d\mu = \sum_j g_j \mu(G_j). \tag{4}$$

Тогда в силу леммы

$$J = \int_A [f(x) + g(x)]\, d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\, \mu(F_i \cap G_j); \tag{5}$$

но

$$\mu(F_i) = \sum_j \mu(F_i \cap G_j), \quad \mu(G_j) = \sum_i \mu(F_i \cap G_j),$$

так что из абсолютной сходимости рядов (3) и (4) следует и абсолютная сходимость ряда (5); при этом

$$J = J_1 + J_2.$$

Б) *Для любого постоянного k*

$$\int_A kf(x)\, d\mu = k \int_A f(x)\, d\mu,$$

причем из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части. (Проверяется непосредственно.)

В) *Ограниченная на множестве A простая функция f интегрируема на A, причем, если $|f(x)| \leqslant M$ на A, то*

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant M\mu(A).$$

(Проверяется непосредственно.)

3. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры.

Определение 3. Назовем функцию f *интегрируемой (суммируемой) на множестве A*, если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к f. Предел

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,d\mu \tag{6}$$

обозначим

$$\int_A f(x)\,d\mu$$

и назовем *интегралом функции f по множеству A*.

Это определение корректно, если выполнены следующие условия.

1. Предел (6) для любой равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых на A функций существует.

2. Этот предел при заданной функции f не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.

3. Для простых функций определение интегрируемости и интеграла равносильно данному в п. 2.

Все эти условия действительно выполнены.

Для доказательства первого достаточно заметить, что в силу свойств А), Б) и В) интеграла от простых функций,

$$\left|\int_A f_n(x)\,d\mu - \int_A f_m(x)\,d\mu\right| \leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|. \tag{7}$$

Для доказательства второго условия надо рассмотреть две последовательности, $\{f_n\}$ и $\{f_n^*\}$, сходящиеся к f. Если бы предел (6) для этих двух последовательностей принимал различные значения, то для последовательности, полученной объединением этих двух, предел (6) не существовал бы, что противоречит первому условию. Наконец, для доказательства справедливости третьего

условия достаточно рассмотреть последовательность, в которой f_n равняется f для всех n.

З а м е ч а н и е. Мы видим, что в построении интеграла Лебега имеются два существенных этапа. Первый — непосредственное определение интеграла (как суммы ряда) для некоторого класса функций (простых суммируемых функций), достаточно простого и в то же время достаточно обширного, второй — распространение определения интеграла на существенно более широкий класс функций с помощью предельного перехода. По существу, сочетание этих приемов — непосредственного конструктивного, но узкого определения и последующего предельного перехода присутствует в любом построении интеграла.

Установим основные свойства интеграла Лебега. Непосредственно из определения следует, что:

I. $$\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A). \tag{8}$$

II. *Для любого постоянного* k

$$\int_A kf(x)\,d\mu = k\int_A f(x)\,d\mu. \tag{9}$$

причем из существования интеграла в правой части вытекает существование интеграла в левой.

Это свойство выводится при помощи предельного перехода из свойства Б) для интеграла от простых функций.

III. *Аддитивность*:

$$\int_A [f(x)+g(x)]\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu, \tag{10}$$

причем из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой.

Доказательство получается предельным переходом из свойства А) интеграла от простых функций.

IV. *Ограниченная на множестве* A *функция* f *интегрируема на* A.

Доказательство получается предельным переходом из свойства В) интеграла от простых функций, с использованием теоремы 2.

V. *Монотонность: если* $f(x) \geqslant 0$, *то*

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant 0 \tag{11}$$

(в предположении, что интеграл существует).

Для простых функций это утверждение следует прямо из определения, а в общем случае его можно вывести, заметив, что если f измерима и неотрицательна, то найдется равномерно сходящаяся к ней последовательность (см. теорему 2) неотрицательных простых функций.

Из последнего свойства сразу следует, что если $f(x) \geqslant g(x)$, то

$$\int_A f(x)\,d\mu \geqslant \int_A g(x)\,d\mu, \tag{12}$$

а поэтому, если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для всех (или почти всех) $x \in A$, то

$$m\mu(A) \leqslant \int_A f(x)\,d\mu \leqslant M\mu(A). \tag{13}$$

VI. *Если* $\mu(A) = 0$, *то* $\int_A f(x)\,d\mu = 0$.

VI′. *Если* $f(x) = g(x)$ *почти всюду, то*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \int_A g(x)\,d\mu,$$

причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

Эти два утверждения непосредственно вытекают из определения интеграла Лебега.

VII. *Если функция* φ *интегрируема на* A *и почти всюду* $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, *то* f *также интегрируема на* A.

Действительно, если f и φ — простые функции, то удалив из множества A некоторое множество меры нуль, оставшееся множество A' можно представить как объединение конечного или счетного числа множеств, на каждом из которых f и φ постоянны: $f(x) = a_n$, $\varphi(x) = b_n$, причем $|a_n| \leqslant b_n$. Из интегрируемости φ вытекает, что

$$\sum_n |a_n|\,\mu(A_n) \leqslant \sum_n b_n\mu(A_n) = \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu = \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

Поэтому f тоже интегрируема, и

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| = \left|\int_{A'} f(x)\,d\mu\right| = \left|\sum_n a_n\mu(A_n)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_n |a_n|\,\mu(A_n) = \int_{A'} |f(x)|\,d\mu \leqslant \int_A \varphi(x)\,d\mu.$$

В общем случае это утверждение доказывается предельным переходом с использованием теоремы 2.

VIII. *Интегралы*

$$I_1 = \int_A f(x)\,d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)|\,d\mu \tag{14}$$

существуют или не существуют одновременно.

В самом деле, из существования интеграла I_2 вытекает существование I_1 в силу свойства VII.

Обратное для случая простой функции вытекает из определения интеграла, а для общего случая доказывается предельным переходом с использованием теоремы 2; при этом нужно воспользоваться неравенством

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|.$$

4. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. В предыдущем пункте были сформулированы свойства интеграла Лебега по фиксированному множеству. Сейчас мы установим некоторые свойства интеграла Лебега, рассматривая выражение

$$F(A) = \int_A f(x)\,d\mu$$

как функцию множества, определенную на совокупности измеримых множеств. Установим, прежде всего, следующее свойство:

Теорема 3. *Если* $A = \bigcup_n A_n$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu, \tag{15}$$

причем из существования интеграла в левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

Доказательство. Сначала проверим утверждение теоремы для простой функции f, принимающей значения

$$y_1, \ldots, y_n, \ldots$$

Пусть

$$B_k = \{x:\ x \in A,\quad f(x) = y_k\},$$
$$B_{nk} = \{x:\ x \in A_n,\quad f(x) = y_k\}.$$

Тогда

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_k y_k \mu(B_k) = \sum_k y_k \sum_n \mu(B_{nk}) =$$
$$= \sum_n \sum_k y_k \mu(B_{nk}) = \sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu. \qquad (16)$$

Так как ряд $\sum y_k \mu(B_k)$, в предположении интегрируемости f на A, абсолютно сходится, а меры всех множеств неотрицательны, то сходятся абсолютно и все остальные ряды в цепочке равенств (16).

В случае произвольной функции f из ее интегрируемости на A вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует простая интегрируемая на A функция g, удовлетворяющая условию

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon. \qquad (17)$$

Для g имеем

$$\int_A g(x)\,d\mu = \sum_n \int_{A_n} g(x)\,d\mu, \qquad (18)$$

причем g интегрируема на каждом множестве A_n и ряд (18) абсолютно сходится. Из этого последнего обстоятельства и из оценки (17) вытекает, что f тоже интегрируема на каждом A_n и

$$\sum_n \left| \int_{A_n} f(x)\,d\mu - \int_{A_n} g(x)\,d\mu \right| \leqslant \sum_n \varepsilon\mu(A_n) = \varepsilon\mu(A),$$
$$\left| \int_A f(x)\,d\mu - \int_A g(x)\,d\mu \right| \leqslant \varepsilon\mu(A),$$

что вместе с (18) приводит к абсолютной сходимости ряда $\sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu$ и к оценке

$$\left| \sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu - \int_A f(x)\,d\mu \right| \leqslant 2\varepsilon\mu(A).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu.$$

Следствие. *Если f интегрируема на A, то f интегрируема и на любом измеримом множестве $A' \subset A$.*

Мы показали, что из интегрируемости функции f по множеству A следует, что если $A = \bigcup A_n$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, то f интегрируема по каждому A_n и интеграл по A равен сумме интегралов по множествам A_n. Это утверждение может быть обращено в следующем смысле.

Теорема 4. *Если $A = \bigcup\limits_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и ряд*

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\,d\mu \tag{19}$$

сходится, то функция f интегрируема на A и

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Новым по сравнению с предыдущей теоремой здесь является утверждение, что из сходимости ряда (19) вытекает интегрируемость f на A.

Сначала проведем доказательство для случая простой функции f, принимающей значения f_i. Положив

$$B_i = \{x:\ x \in A,\ f(x) = f_i\},\quad A_{ni} = A_n \cap B_i,$$

имеем

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i \quad \text{и} \quad \int_{A_n} |f(x)|\,d\mu = \sum_i |f_i|\,\mu(A_{ni}).$$

Из сходимости ряда (19) вытекает, что сходятся ряды

$$\sum_n \sum_i |f_i|\,\mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i|\,\mu(B_i).$$

Сходимость последнего ряда означает, что существует интеграл

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i).$$

В общем случае аппроксимируем f простой функцией $\bar{f}$ так, что

$$|f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Тогда

$$\int_{A_n} |\bar{f}(x)|\,d\mu \leqslant \int_{A_n} |f(x)|\,d\mu + \varepsilon\mu(A_n),$$

и так как ряд $\sum_n \mu(A_n) = \mu(A)$ сходится, из сходимости ряда (19) вытекает сходимость ряда

$$\sum_n \int_{A_n} |\bar{f}(x)|\,d\mu,$$

т. е. по только что доказанному, интегрируемость на A простой функции $\bar{f}$. Но тогда в силу (20) исходная функция f тоже интегрируема на A. Теорема доказана.

Неравенство Чебышева. *Если* $\varphi(x) \geqslant 0$ *на* A *и* $c > 0$, *то*

$$\mu\{x: x \in A,\ \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)\,d\mu. \tag{21}$$

Действительно, пусть

$$A' = \{x: x \in A,\ \varphi(x) \geqslant c\}.$$

Тогда

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu = \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu + \int_{A \setminus A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant \int_{A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant c\mu(A').$$

Следствие. *Если*

$$\int_A |f(x)|\,d\mu = 0,$$

то $f(x) = 0$ *почти всюду.*

В самом деле, в силу неравенства Чебышева, имеем

$$\mu\left\{x: x \in A,\ |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} \leqslant n\int_A |f(x)|\,d\mu = 0$$

для всех n. Поэтому

$$\mu\{x: x \in A,\ f(x) \neq 0\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left\{x: x \in A,\ |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

В предыдущем пункте было указано, что интеграл Лебега по множеству нулевой меры равен нулю для любой функции f.

Это утверждение можно рассматривать как предельный случай следующей важной теоремы.

Теорема 5 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Если $f(x)$ — суммируемая на множестве A функция, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\left|\int_e f(x)\, d\mu\right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого $e \subset A$ такого, что $\mu(e) < \delta$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что наше утверждение очевидно, если f ограничена. Пусть теперь f — произвольная суммируемая на A функция. Положим

$$A_n = \{x: x \in A,\quad n \leqslant |f(x)| < n+1\},$$

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n,\quad C_N = A \setminus B_N.$$

Тогда в силу теоремы 3

$$\int_A |f(x)|\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu.$$

Выберем N так, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |f(x)|\, d\mu = \int_{C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

и пусть

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

Если теперь $\mu(e) < \delta$, то

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,d\mu = \int_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int_{e\cap C_N} |f(x)|\,d\mu.$$

Первый из стоящих справа интегралов не превосходит $\varepsilon/2$ (свойство V), а второй — не больше, чем интеграл, взятый по всему множеству C_N, т. е. также не превосходит $\varepsilon/2$; таким образом, получаем

$$\int_e |f(x)|\,d\mu < \varepsilon.$$

Установленные свойства интеграла как функции множества приводят к следующему результату. *Пусть f — неотрицательная функция, суммируемая на пространстве X по мере μ. Тогда функция*

$$F(A) = \int_A f(x)\,d\mu$$

определена для всех измеримых множеств $A \subset X$, неотрицательна и σ-аддитивна, т. е. удовлетворяет условию: если $A = \bigcup_n A_n$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$, то $F(A) = \sum_n F(A_n)$.

Иными словами, *интеграл от неотрицательной функции обладает как функция множества всеми свойствами σ-аддитивной меры.* Эта мера определена на той же σ-алгебре, что и исходная мера μ, и связана с μ условием: если $\mu(A) = 0$, то и $F(A) = 0$.

5. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Вопрос о предельном переходе под знаком интеграла, или, что то же самое, о почленном интегрировании сходящегося ряда, часто возникает в различных задачах.

В классическом анализе устанавливается, что достаточным условием возможности такого предельного перехода является равномерная сходимость соответствующей последовательности (ряда).

Сейчас мы установим некоторые теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, представляющие собой далеко идущие обобщения соответствующих теорем классического анализа.

Теорема 6 (Лебег). *Если последовательность $\{f_n\}$ на A сходится к f и при всех n*

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x),$$

где φ интегрируема на A, то предельная функция f интегрируема на A и

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu.$$

Доказательство. Из условия теоремы легко следует, что $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$. Поэтому f (п. 3, свойство VII) интегрируема. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По теореме 5 (об абсолютной непрерывности интеграла) найдется такое $\delta > 0$, что, если $\mu(B) < \delta$, то

$$\int_B \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{22}$$

В силу теоремы Егорова множество B, удовлетворяющее условию $\mu(B) < \delta$, можно выбрать так, что последовательность $\{f_n\}$ сходится на $C = A \setminus B$ равномерно. Следовательно, найдется такое N, что при $n \geqslant N$ и $x \in C$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

Тогда

$$\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_n(x)\,d\mu =$$

$$= \int_C [f(x) - f_n(x)]\,d\mu + \int_B f(x)\,d\mu - \int_B f_n(x)\,d\mu,$$

и так как $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ и $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, то в силу (22) получаем

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Следствие. *Если $|f_n(x)| \leqslant M = \text{const}$ и $f_n \to f$, то*

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu.$$

Замечание. Поскольку значения, принимаемые функцией на множестве меры 0, не влияют на величину

интеграла, в теореме 6 достаточно предположить, что $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду и что каждое из неравенств $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ также выполняется лишь почти всюду.

Теорема 7 (Б. Леви). *Пусть на множестве A*

$$f_1(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots,$$

причем функции f_n интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Тогда почти всюду на A существует (конечный) предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{23}$$

функция f интегрируема на A и

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu.$$

При этом на множестве, на котором предел (23) не существует, функцию f можно задать произвольно, например, положив на этом множестве $f(x) = 0$.

Доказательство. Будем предполагать $f_1(x) \geqslant 0$, так как общий случай легко сводится к этому путем перехода к функциям

$$\bar{f}_n = f_n - f_1.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x: x \in A,\ f_n(x) \to \infty\}.$$

Легко видеть, что $\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, где

$$\Omega_n^{(r)} = \{x: x \in A,\ f_n(x) > r\}.$$

В силу неравенства Чебышева (21)

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \leqslant K/r.$$

Так как $\Omega_1^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$, то $\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant K/r$; но при любом r

$$\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)},$$

поэтому $\mu(\Omega) \leqslant K/r$. Ввиду произвольности r отсюда следует, что

$$\mu(\Omega) = 0.$$

Тем самым доказано, что монотонная последовательность $\{f_n(x)\}$ почти всюду на A имеет конечный предел $f(x)$.

Обозначим через A_r множество тех точек $x \in A$, для которых

$$r - 1 \leqslant f(x) < r, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

и положим $\varphi(x) = r$ на A_r.

Если будет доказана интегрируемость $\varphi(x)$ на A, то утверждение нашей теоремы сделается непосредственным следствием теоремы 6. Положим

$$B_s = \bigcup_{r=1}^{s} A_r.$$

Так как на B_s функции f_n и f ограничены и всегда $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, то

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, d\mu \leqslant \int_{B_s} f(x)\, d\mu + \mu(A) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)\, d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

Но

$$\int_{B_s} \varphi(x)\, d\mu = \sum_{r=1}^{s} r\mu(A_r).$$

Ограниченность же этих сумм означает сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Таким образом, интегрируемость φ на A доказана. Условие монотонного н е у б ы в а н и я функций $f_n(x)$ можно, очевидно, заменить в доказанной теореме условием их монотонного н е в о з р а с т а н и я.

С л е д с т в и е. *Если* $\psi_n(x) \geqslant 0$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu < \infty,$$

то почти всюду на A ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ сходится и

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu.$$

Теорема 8 (Фату). *Если последовательность измеримых неотрицательных функций $\{f_n\}$ сходится почти всюду на A к f и*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K,$$

то f интегрируема на A и

$$\int_A f(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x);$$

φ_n измерима, так как

$$\{x: \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x: f_k(x) < c\}.$$

Далее, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, поэтому φ_n интегрируемы, и

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K;$$

наконец,

$$\varphi_1(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots,$$
$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

почти всюду. Поэтому, применяя предыдущую теорему к $\{\varphi_n\}$, получаем требуемый результат.

6. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. До сих пор, говоря об интеграле и его свойствах, мы считали, что рассматриваются функции, заданные на том или ином измеримом множестве конечной меры. Однако часто приходится иметь дело с функциями, заданными

на множестве, мера которого бесконечна, например, на прямой с лебеговой мерой на ней. Поэтому важно распространить понятие интеграла и на этот случай. Мы ограничимся при этом тем практически наиболее существенным случаем, когда рассматриваемое множество X может быть представлено как сумма счетного числа множеств конечной меры:

$$X = \bigcup_n X_n, \quad \mu(X_n) < \infty. \tag{24}$$

Если пространство X, в котором задана мера μ, представимо как сумма счетного числа множеств конечной меры, то мера μ на X называется σ-конечной (см. п. 3 § 3). Примерами σ-конечных мер служат меры Лебега на прямой, плоскости, в n-мерном пространстве. Меру, не удовлетворяющую условию σ-конечности, можно получить, например, приписав каждой точке на прямой вес 1. Тогда все подмножества прямой можно считать измеримыми, причем конечные множества будут иметь конечную меру, а остальные — бесконечную.

Назовем *исчерпывающей последовательностью* всякую монотонно возрастающую последовательность $\{X_n\}$ измеримых подмножеств множества X, удовлетворяющую условию (24). Введем теперь следующее определение.

О п р е д е л е н и е 4. Измеримая функция f, определенная на множестве X с σ-конечной мерой μ, называется *суммируемой на* X, если она суммируема на каждом измеримом подмножестве $A \subset X$ конечной меры и если для каждой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)\, d\mu \tag{25}$$

существует и не зависит от выбора этой последовательности. Этот предел называется *интегралом от* f *по множеству* X и обозначается символом

$$\int_X f(x)\, d\mu.$$

Ясно также, что если функция f равна нулю вне некоторого множества конечной меры, то для нее только что

сформулированное определение интеграла равносильно тому, которое было дано в п. 3.

Замечание. Определение интеграла от простой функции, данное в п. 2, можно дословно перенести на случай бесконечной меры. Ясно при этом, что для суммируемости простой функции необходимо, чтобы каждое отличное от нуля значение она принимала только на множестве конечной меры. Определение суммируемости, данное в п. 3, существенно связано с предположением конечности меры множества X. Действительно, если $\mu(X) = \infty$, то из равномерной сходимости последовательности простых суммируемых функций $\{\varphi_n\}$ не следует, вообще говоря, сходимость последовательности их интегралов (приведите пример!).

Результаты, изложенные в пп. 3 и 4 для случая конечной меры, в основном переносятся на интегралы по множеству бесконечной меры.

Существенное отличие состоит в том, что в случае $\mu(X) = \infty$ ограниченная измеримая функция на X не обязана быть суммируемой. В частности, если $\mu(X) = \infty$, то никакая отличная от нуля константа не интегрируема на X.

Читатель без труда проверит, что теоремы Лебега, Б. Леви и Фату остаются справедливыми в случае бесконечной меры.

7. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Выясним связь между интегралами Лебега и Римана. При этом мы ограничимся простейшим случаем линейной меры Лебега на прямой.

Теорема 9. *Если существует интеграл Римана*

$$I = (R)\int_a^b f(x)\,dx,$$

то f интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу и

$$\int_{[a,\,b]} f(x)\,d\mu = I.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на 2^n частей точками

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a)$$

и соответствующие этому разбиению суммы Дарбу:

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} M_{nk}, \qquad \omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} m_{nk},$$

где M_{nk} — верхняя грань f на отрезке

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,$$

а m_{nk} — нижняя грань f на том же отрезке. По определению интеграла Римана,

$$I = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = \lim_{n\to\infty} \omega_n.$$

Положим

$$\bar{f}_n(x) = M_{nk} \text{ при } x_{k-1} \leqslant x < x_k,$$
$$\underline{f}_n(x) = m_{nk} \text{ при } x_{k-1} \leqslant x < x_k.$$

В точке $x = b$ функции $\bar{f}_n$ и $\underline{f}_n$ можно доопределить произвольно. Легко вычислить, что

$$\int_{[a,\,b]} \bar{f}_n(x)\,d\mu = \Omega_n, \qquad \int_{[a,\,b]} \underline{f}_n(x)\,d\mu = \omega_n.$$

Так как последовательность $\{\bar{f}_n\}$ не возрастает, а последовательность $\{\underline{f}_n\}$ не убывает, то почти всюду

$$\bar{f}_n(x) \to \bar{f}(x) \geqslant f(x), \quad \underline{f}_n(x) \to \underline{f}(x) \leqslant f(x).$$

По теореме Б. Леви

$$\int_{[a,\,b]} \bar{f}(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = I = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int_{[a,\,b]} \underline{f}(x)\,d\mu.$$

Поэтому

$$\int_{[a,\,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)|\,d\mu = \int_{[a,\,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x))\,d\mu = 0$$

и, следовательно, почти всюду

$$\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0,$$

т. е.

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x),$$

$$\int\limits_{[a,\,b]} f(x)\,d\mu = I.$$

Теорема доказана.

Легко указать примеры ограниченных функций на некотором отрезке, интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману (например, уже упоминавшаяся функция Дирихле на отрезке $[0, 1]$, равная 1 для рациональных и 0 для иррациональных x). Неограниченные функции вообще не могут быть интегрируемы по Риману, но многие из них интегрируемы по Лебегу. В частности, любая функция $f(x) \geqslant 0$, для которой интеграл Римана

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

существует при каждом $\varepsilon > 0$ и имеет конечный предел I при $\varepsilon \to 0$, интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, причем

$$\int\limits_{[a,\,b]} f(x)\,d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

в случае, когда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\,dx = \infty,$$

не существует в лебеговом смысле, поскольку, согласно свойству VIII п. 3, из суммируемости функции $f(x)$ следует, что и функция $|f(x)|$ тоже суммируема. Например, интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\,dx$$

существует как (условно сходящийся) несобственный интеграл Римана, но не существует как интеграл Лебега.

Если рассматривается функция на всей прямой (или полупрямой), то интеграл Римана для такой функции может существовать лишь в несобственном смысле. Опять-таки, если такой интеграл сходится абсолютно, то соответствующий лебегов интеграл существует и имеет то же самое значение. Если же этот интеграл сходится лишь условно, то в лебеговом смысле функция не интегрируема. Например, функция $\sin x/x$ не интегрируема по Лебегу на всей прямой, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Однако несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

как известно, существует, и равен π.

§ 6. Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини

В анализе важную роль играют теоремы о сведении двойного (или вообще многократного) интеграла к повторному. В теории кратных интегралов Лебега основным результатом является так называемая теорема Фубини, которая будет доказана в конце этого параграфа. Предварительно мы установим некоторые вспомогательные понятия и факты, имеющие, впрочем, и самостоятельный интерес.

1. Произведение систем множеств. Множество Z упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$, называется *прямым произведением* множеств X и Y и обозначается $X \times Y$. Аналогично, множество Z упорядоченных конечных последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_k \in X_k$, называется прямым произведением множеств $X_1, \ldots, X_n$ и обозначается

$$Z = X_1 \times \ldots \times X_n = \prod_{k} X_k.$$

В частном случае, когда

$$X_1 = \ldots = X_n = X,$$

множество Z есть n-я степень множества X:

$$Z = X^n.$$

Например, координатное n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ есть n-я степень числовой прямой $\mathbf{R}$. Единичный куб I^n, т. е. множество элементов из $\mathbf{R}^n$ с координатами, подчиненными условию

$$0 \leqslant x_k \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

является n-й степенью единичного сегмента $I^1 = [0, 1]$.

Если $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ — системы подмножеств множеств $X_1, \ldots, X_n$, то

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$$

обозначает систему подмножеств множества $X = \boxtimes X_k$, представимых в виде

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n,$$

где $A_k \in \mathfrak{S}_k$.

Если $\mathfrak{S}_1 = \ldots = \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{R}$ есть n-я степень системы $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^n.$$

Например, система параллелепипедов в $\mathbf{R}^n$ есть n-я степень системы отрезков в $\mathbf{R}^1$.

Т е о р е м а 1. *Если* $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ — *полукольца, то и* $\mathfrak{R} = \boxtimes \mathfrak{S}_k$ *есть полукольцо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению полукольца нам нужно проверить, что если $A, B \in \mathfrak{R}$, то $A \cap B \in \mathfrak{R}$, и если, кроме того, $B \subset A$, то $A = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$, где $C_1 = B$, $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $C_i \in \mathfrak{R}$ ($i = 1, \ldots, n$). Проведем доказательство для случая $n = 2$.

I. Пусть $A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, $B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$; это значит, что

$$A = A_1 \times A_2, \quad A_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \in \mathfrak{S}_2,$$
$$B = B_1 \times B_2, \quad B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad B_2 \in \mathfrak{S}_2.$$

Тогда

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

и так как

$$A_1 \cap B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \cap B_2 \in \mathfrak{S}_2,$$

то

$$A \cap B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2.$$

II. Предположим теперь, дополнительно, что

$$B_1 \subset A_1, \; B_2 \subset A_2;$$

в силу того, что $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — полукольца, имеют место разложения:

$$A_1 = B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \ldots \cup B_1^{(k)},$$
$$A_2 = B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \ldots \cup B_2^{(l)}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} A = A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1 \times B_2^{(l)}) \cup \\ \cup (B_1^{(1)} \times B_2) \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(l)}) \cup \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cup (B_1^{(k)} \times B_2) \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}). \end{aligned}$$

Первым членом этого разложения служит $B_1 \times B_2 = B$, и все члены принадлежат системе $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$.

Теорема доказана.

Однако из предположения, что системы $\mathfrak{S}_k$ суть кольца (или σ-алгебры), еще не вытекает, вообще говоря, что произведение $\prod_k \mathfrak{S}_k$ будет кольцом (соответственно σ-алгеброй).

2. Произведения мер. Пусть на полукольцах $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ заданы меры

$$\mu_1(A_1), \ldots, \mu_n(A_n), \quad A_k \in \mathfrak{S}_k.$$

Для простоты будем считать эти меры конечными, хотя излагаемые ниже рассуждения и факты переносятся, без существенных изменений, на случай σ-конечных мер (см., например, [21]).

Определим на полукольце

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n \tag{1}$$

меру

$$\mu = \mu_1 \times \ldots \times \mu_n \tag{2}$$

формулой

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n), \tag{3}$$

где

$$A = A_1 \times \dots \times A_n.$$

Следует еще доказать, что $\mu(A)$ — действительно мера, т. е. что эта функция множества аддитивна. Сделаем это для случая $n = 2$. Пусть дано разложение

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(k)}, \quad B^{(i)} \cap B^{(j)} = \varnothing \text{ при } i \neq j,$$

$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}.$$

В силу леммы 2 § 5 гл. I существуют такие разложения

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)}, \quad A_2 = \bigcup_n C_2^{(n)},$$

что множества $B_1^{(k)}$ являются объединениями некоторых $C_1^{(m)}$, и множества $B_2^{(k)}$ — объединениями некоторых $C_2^{(n)}$. Очевидно, что

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{4}$$

$$\mu(B^{(k)}) = \mu_1(B_1^{(k)})\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_m \sum_n \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(n)}), \tag{5}$$

причем в (5) справа сумма берется по всем $C_1^{(m)} \subset B_1^{(k)}$ и $C_2^{(n)} \subset B_2^{(k)}$, а в правой части равенства (4) стоят по одному разу все члены, появляющиеся в правых частях равенств (5). Поэтому

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B_k),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, в частности, аддитивность элементарных мер в n-мерном евклидовом пространстве следует из аддитивности линейной меры на прямой.

Меру (2), заданную на полукольце (1) формулой (3), мы будем называть *произведением мер* $\mu_1, \dots, \mu_n$.

Теорема 2. *Если меры* $\mu_1, \dots, \mu_n$ *σ-аддитивны, то* σ*-аддитивна и мера* $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$.

Доказательство проведем для случая $n = 2$. Обозначим через λ_1 лебегово продолжение меры μ_1. Пусть

$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \cap C_m = \varnothing$ при $n \neq m$, причем C и C_n входят в $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, т. е.

$$C = A \times B, \qquad A \in \mathfrak{S}_1, \qquad B \in \mathfrak{S}_2,$$
$$C_n = A_n \times B_n, \qquad A_n \in \mathfrak{S}_1, \qquad B_n \in \mathfrak{S}_2.$$

Пусть множества A и A_1, A_2, ... лежат в пространстве X. Положим для $x \in X$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_2(B_n), & \text{если } x \in A_n, \\ 0, & \text{если } x \notin A_n. \end{cases}$$

Легко видеть, что для $x \in A$

$$\sum_n f_n(x) = \mu_2(B),$$

поэтому в силу следствия из теоремы Б. Леви (см. с. 349)

$$\sum_n \int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \int_A \mu_2(B)\, d\lambda_1 = \lambda_1(A)\,\mu_2(B) = \mu_1(A)\,\mu_2(B),$$

но

$$\int_A f_n(x)\, d\lambda_1 = \mu_2(B_n)\,\mu_1(A_n) = \mu(C_n)$$

и, следовательно,

$$\sum_n \mu(C_n) = \mu(C).$$

Если μ_1, ..., μ_n σ-аддитивные меры, заданные соответственно на σ-алгебрах $\mathfrak{S}_1$, ..., $\mathfrak{S}_n$, то их *произведением* мы назовем лебегово продолжение меры $\mu_1 \times \ldots \times \mu_n$. Будем обозначать его символом

$$\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n \text{ или } \otimes \mu_k.$$

В частности, при

$$\mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu$$

получаем n-ю степень меры μ:

$$\mu^n = \otimes \mu_k, \quad \mu_k = \mu.$$

Например, n-мерная мера Лебега μ^n есть n-я степень линейной меры Лебега μ.

Заметим, что произведение мер автоматически оказывается полным (даже если меры $\mu_1, \ldots, \mu_n$ были неполны).

3. Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега. Пусть область G на плоскости (x, y) ограничена вертикалями $x = a$, $y = b$ и кривыми $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$.

Как известно, площадь области G выражается интегралом

$$V(G) = \int_a^b \{\varphi(x) - \psi(x)\}\, dx.$$

При этом разность $\varphi(x_0) - \psi(x_0)$ равна длине сечения области G вертикалью $x = x_0$. Нашей задачей является перенести такой способ измерения площадей на произвольные меры-произведения

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y.$$

В дальнейшем будет предполагаться, что меры μ_x и μ_y определены на σ-алгебрах, σ-аддитивны и обладают свойством полноты (если $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$, то B измеримо), которым, как указывалось ранее, обладают все лебеговы продолжения.

Введем обозначения:

$$A_x = \{y : (x, y) \in A\} \qquad (x \text{ фиксировано}),$$
$$A_y = \{x : (x, y) \in A\} \qquad (y \text{ фиксировано}).$$

Если X и Y — числовые прямые (а $X \times Y$ — плоскость), то A_{x_0} есть проекция на ось Y сечения множества A вертикальной прямой $x = x_0$.

Теорема 3. *В перечисленных выше предположениях для любого μ-измеримого множества* [1]) A

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x)\, d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y)\, d\mu_y.$$

---

[1]) Заметим, что интегрирование по X фактически сводится к интегрированию по множеству $\bigcup_y A_y \subset X$, вне которого подынтегральная функция равна нулю. Аналогично, $\int_Y = \int_{\bigcup_x A_x}$.

Доказательство. Достаточно доказать равенство

$$\mu(A) = \int_X \varphi_A(x)\, d\mu_x, \text{ где } \varphi_A(x) = \mu_y(A_x), \tag{6}$$

так как второе утверждение теоремы вполне аналогично первому. Заметим, что теорема автоматически включает в себя утверждение, что *при почти всех* x (в смысле меры μ_x) *множества* A_x *измеримы относительно меры* μ_y и что функция $\varphi_A(x)$ *измерима относительно меры* μ_x. Без этого формула (6) не имела бы смысла.

Мера μ — это лебегово продолжение меры $m = \mu_x \times \mu_y$, определенной на системе $\mathfrak{S}_m$ множеств вида $A = A_{y_0}' \times A_{x_0}$. Для таких множеств равенство (6) очевидно, так как для них

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}) & \text{при } x \in A_{y_0}, \\ 0 & \text{при } x \notin A_{y_0}. \end{cases}$$

Без труда переносится равенство (6) и на множества из $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, разложимые в конечную сумму попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{S}_m$.

Доказательство равенства (6) в общем случае опирается на следующую лемму, которая имеет и самостоятельный интерес для теории лебеговых продолжений.

Лемма. *Для любого* μ*-измеримого множества* A *существует множество* B *вида*

$$B = \bigcap_n B_n, \quad B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots,$$

$$B_n = \bigcup_k B_{nk}, \quad B_{n1} \subset \ldots \subset B_{nk} \subset \ldots,$$

где множества B_{nk} *принадлежат* $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, *причем* $A \subset B$ *и*

$$\mu(A) = \mu(B). \tag{7}$$

Доказательство. По определению измеримости при любом n множество A можно погрузить во множество $C_n = \bigcup_r \Delta_{nr}$ — объединение множеств Δ_{nr} из $\mathfrak{S}_m$ так, что

$$\mu(C_n) < \mu(A) + 1/n.$$

Положим $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} C_k$ и заметим, что множества B_n имеют вид $B_n = \bigcup_s \delta_{ns}$, где δ_{ns} принадлежат $\mathfrak{S}_m$. Положив, наконец, $B_{nk} = \bigcup_{s=1}^{k} \delta_{ns}$, мы получим систему множеств B_{nk} с нужными свойствами.

Лемма доказана.

Равенство (6) легко переносится с множеств $B_{nk} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ на множества B_n и B при помощи теоремы Б. Леви (теорема 7 § 5), так как

$$\varphi_{B_n}(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{B_{nk}}(x), \quad \varphi_{B_{n_1}} \leqslant \varphi_{B_{n_2}} \leqslant \ldots,$$

$$\varphi_B(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{B_n}(x), \quad \varphi_{B_1} \geqslant \varphi_{B_2} \geqslant \ldots$$

В силу непрерывности меры эти равенства имеют место в каждой точке x. Если $\mu(A) = 0$, то $\mu(B) = 0$ и почти всюду

$$\varphi_B(x) = \mu_y(B_x) = 0.$$

Так как $A_x \subset B_x$, то для почти всех x множество A_x измеримо и

$$\varphi_A(x) = \mu_y(A_x) = 0,$$

$$\int \varphi_A(x)\, d\mu_x = 0 = \mu(A).$$

Следовательно, для множеств A меры нуль формула (6) верна. В общем случае представим A в виде $B \setminus C$, где в силу (7), $\mu(C) = 0$. Так как формула (6) верна для множеств B и C, то легко видеть, что она верна и для самого множества A. Доказательство теоремы 3 закончено.

Пусть теперь Y — числовая прямая, μ_y — линейная мера Лебега, а множество A есть множество точек (x, y) вида

$$\{(x, y):\ x \in M,\quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{8}$$

где M — какое-то μ_x-измеримое множество, а $f(x)$ — интегрируемая неотрицательная функция. В этом случае

$$\mu_y(A_x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in M, \\ 0 & \text{при } x \notin M, \end{cases}$$

$$\mu(A) = \int_M f(x)\, d\mu_x.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Интеграл Лебега неотрицательной функции* $f(x)$ *равен мере* $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$ *множества* A, *определенного соотношением* (8).

Когда X — числовая прямая, множество M — отрезок, а функция $f(x)$ интегрируема по Риману, эта теорема сводится к известному выражению интеграла через площадь, расположенную под графиком функции.

4. Теорема Фубини. Рассмотрим тройное произведение $U = X \times Y \times Z$; если на X, Y, Z заданы меры μ_x, μ_y, μ_z, то меру

$$\mu_u = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_z$$

можно определить как

$$(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu_z,$$

или же как

$$\mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu_z).$$

В действительности, как легко проверить, эти определения равносильны.

Следующая теорема является основной в теории кратных интегралов.

Теорема 5 (Фубини). *Пусть меры* μ_x *и* μ_y *определены на* σ-*алгебрах*, σ-*аддитивны и полны*; *пусть, далее,*

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

и функция $f(x, y)$ *интегрируема по мере* μ *на множестве*

$$A \subset X \times Y. \tag{9}$$

Тогда [1])

$$\int_A f(x, y)\, d\mu =$$

$$= \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x \right) d\mu_y. \tag{10}$$

Утверждение теоремы включает существование внутренних интегралов в скобках при почти всех значениях переменного, по которому берутся внешние интегралы.

[1]) См. сноску на с. 360.

Доказательство. Проведем сначала доказательство для случая $f(x, y) \geqslant 0$. С этой целью рассмотрим тройное произведение

$$U = X \times Y \times Z,$$

где третий множитель есть числовая прямая, и произведение мер

$$\lambda = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu^1 = \mu \otimes \mu^1,$$

где μ' есть линейная лебегова мера.

В U определим подмножество W условием: $(x, y, z) \in W$, если $(x, y) \in A$, $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$. В силу теоремы 4

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y)\, d\mu. \tag{11}$$

С другой стороны, по теореме 3

$$\lambda(W) = \int_X \xi(W_x)\, d\mu_x, \tag{12}$$

где $\xi = \mu_y \times \mu^1$ и W_x обозначает множество пар (y, z), для которых $(x, y, z) \in W$. При этом, снова по теореме 4,

$$\xi(W_x) = \int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y. \tag{13}$$

Сопоставляя (11), (12) и (13), получаем

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x,$$

что и требовалось доказать.

Общий случай сводится к разобранному при помощи равенств

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y),$$

$$f^+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2}, \quad f^-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}.$$

Замечание. Как показывают приводимые ниже примеры, из существования повторных интегралов

$$\int_X \left(\int_{A_x} f\, d\mu_y \right) d\mu_x \quad \text{и} \quad \int_Y \left(\int_{A_y} f\, d\mu_x \right) d\mu_y \tag{14}$$

не следуют, вообще говоря, ни равенства (10), ни интегрируемость функции $f(x, y)$ на A. Однако, *если существует хотя бы один из интегралов*

$$\int_X \left(\int_{A_x} |f(x, y)| \, d\mu_y \right) d\mu_x \text{ или } \int_Y \left(\int_{A_y} |f(x, y)| \, d\mu_x \right) d\mu_y, \quad (15)$$

то $f(x, y)$ *интегрируема на* A *и справедливы равенства* (10).

Действительно, пусть, например, первый из интегралов (15) существует и равен M. Функция $f_n(x, y) = \min\{|f(x, y)|, n\}$ измерима, ограничена, а значит, и суммируема на A. По теореме Фубини

$$\int_A f_n(x, y) \, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f_n(x, y) \, d\mu_y \right) d\mu_x \leqslant M. \quad (16)$$

Функции f_n образуют монотонно неубывающую последовательность, почти всюду сходящуюся к $|f(x, y)|$. По теореме Б. Леви отсюда и из неравенства (16) следует, что функция $|f(x, y)|$ суммируема на A. Но тогда и $f(x, y)$ суммируема и для нее верна теорема Фубини. Отсюда вытекает наше утверждение.

Мы доказали теорему Фубини в предположении, что меры μ_x и μ_y (а значит, и μ) конечны. Однако она остается справедливой и в случае σ-конечных мер (см., например, [21], с. 208).

Приведем примеры функций, для которых существуют повторные интегралы (14), но равенство (10) не имеет места.

1. Пусть $A = [-1, 1]^2$,

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \text{ при } x^2 + y^2 > 0 \text{ и } f(0, 0) = 0;$$

тогда

$$\int_{-1}^{1} f(x, y) \, dx = 0$$

при всех y и

$$\int_{-1}^{1} f(x, y) \, dy = 0$$

при всех x. Поэтому

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x, y) \, dy \right) dx = 0,$$

но интеграл в смысле двойного интеграла Лебега по квадрату не существует, так как

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x, y)|\,dx\,dy \geqslant \int_{0}^{1} dr \int_{0}^{2\pi} \frac{|\sin\varphi\cos\varphi|}{r}\,d\varphi = 2\int_{0}^{1}\frac{dr}{r} = \infty.$$

2. Пусть $A = [0, 1]^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n} & \text{при } \frac{1}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}};\ \frac{1}{2^n} \leqslant y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{2n+1} & \text{при } \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant x < \frac{1}{2^n};\ \frac{1}{2^n} \leqslant y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Можно подсчитать, что

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x, y)\,dx\right)dy = 0,$$

$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x, y)\,dy\right)dx = 1.$$

ГЛАВА VI

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В этой главе мы будем рассматривать интеграл Лебега в основном для функций на прямой, считая, что мера, по которой этот интеграл берется, есть обычная линейная мера Лебега.

Если f — суммируемая функция, определенная на измеримом пространстве X с мерой μ, то интеграл

$$\int_A f(x)\, d\mu \qquad (*)$$

существует для каждого измеримого $A \subset X$ и при фиксированной f представляет собой функцию множества, определенную для всех измеримых подмножеств $A \subset X$. Такой интеграл называется *неопределенным интегралом Лебега*. Пространством X может, в частности, служить отрезок числовой прямой. Если при этом A — тоже некоторый отрезок, то интеграл $(*)$ будет функцией пары точек — концов отрезка A. Будем считать, что в этом случае мерой μ является обычная мера Лебега и писать dt вместо $d\mu$. Зафиксировав один из концов промежутка интегрирования, скажем, левый, мы можем изучать свойства интеграла $\int_a^x f(t)\, dt$, взятого по отрезку $[a, x]$, как функции одного переменного x. Эта задача приведет нас к рассмотрению некоторых важных классов функций на прямой. Общей задаче изучения интеграла Лебега от фиксированной функции f как функции множества посвящен § 5.

Из элементарного курса анализа известны следующие основные равенства, дающие связь между операциями дифференцирования и интегрирования: если f — непрерывная функция, а F — функция, имеющая непрерывную производную, то

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x), \qquad 2)\ \int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Спрашивается: верно ли равенство 1) для функций, суммируемых в смысле Лебега? Каков класс функций (возможно, более широкий), для которого выполняется равенство 2)?

Этим вопросам посвящены следующие параграфы данной главы.

§ 1. Монотонные функции. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу

1. Основные свойства монотонных функций. Изучение свойств интеграла Лебега

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

как функции верхнего предела мы начнем со следующего очевидного, но важного замечания: если функция f неотрицательна, то $\Phi(x)$ — монотонно неубывающая функция. Далее, всякая суммируемая функция есть разность двух неотрицательных суммируемых:

$$f(t) = f_+(t) - f_-(t). \tag{2}$$

Поэтому интеграл (1) разлагается в разность двух монотонно неубывающих функций. Следовательно, изучение интеграла Лебега как функции верхнего предела можно свести к изучению монотонных функций того же типа. Монотонные функции (независимо от их происхождения) обладают рядом простых и важных свойств, которые сейчас будут изложены.

Напомним некоторые понятия. Всюду, где не оговорено противное, будут рассматриваться функции, заданные на некотором отрезке.

Функция f называется *монотонно неубывающей*, если из $x_1 \leqslant x_2$ следует

$$f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

аналогично определяются монотонно невозрастающие функции.

Пусть f — произвольная функция на прямой. Предел [1])

$$\lim_{h \to +0} f(x_0 + h)$$

[1]) Символ $h \to +0$ означает, что h стремится к нулю, принимая только положительные значения.

(если он существует) называется *пределом справа* функции f в точке x_0 и обозначается $f(x_0 + 0)$. Аналогично определяется $f(x_0 - 0)$ — *предел слева* функции f в точке x_0. Равенство $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$ означает, очевидно, что в точке x_0 функция f или непрерывна, или имеет устранимый разрыв. Точка, в которой оба эти предела существуют, но не равны между собой, называется *точкой разрыва первого рода*, а разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции f в этой точке.

Если $f(x_0) = f(x_0 - 0)$, то f называется *непрерывной слева* в точке x_0, а если $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, то f *непрерывна справа* в этой точке.

Установим основные свойства монотонных функций. Для определенности мы будем говорить о монотонно неубывающих функциях, хотя ясно, что все сказанное ниже автоматически переносится на функции, монотонно невозрастающие.

1. *Всякая монотонно неубывающая на* $[a, b]$ *функция* f *измерима и ограничена, а следовательно, суммируема.*

Действительно, по определению монотонности,

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \text{ на } [a, b].$$

Далее, для любого постоянного c множество

$$A_c = \{x: f(x) < c\}$$

есть либо отрезок, либо полуинтервал (либо пусто). В самом деле, пусть точки, в которых $f(x) < c$, существуют, и пусть d есть точная верхняя грань таких x. Тогда A_c есть или отрезок $[a, d]$ или полуинтервал $[a, d)$.

2. *Монотонная функция может иметь разрывы только первого рода.*

Действительно, пусть x_0 — произвольная точка на $[a, b]$ и $x_n \to x_0$, причем $x_n < x_0$. Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена снизу и сверху [например, величинами $f(a)$ и $f(b)$]. Следовательно, она имеет хотя бы одну предельную точку. Но наличие у любой такой последовательности нескольких предельных точек противоречило бы, очевидно, монотонности функции f. Таким образом, $f(x_0 - 0)$ существует. Аналогично устанавливается существование $f(x_0 + 0)$.

Монотонная функция не обязана быть непрерывной. Однако верно следующее утверждение.

3. *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.*

Действительно, сумма любого конечного числа скачков монотонной функции f на отрезке $[a, b]$ не превосходит $f(b) - f(a)$. Следовательно, для каждого n число скачков, величина которых больше, чем $1/n$, конечно. Суммируя по всем $n = 1, 2, \ldots$, получаем, что общее число скачков конечно или счетно.

Среди монотонных функций простейшими являются так называемые *функции скачков*. Они строятся следующим образом. Пусть на отрезке $[a, b]$ задано конечное или счетное число точек

$$x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

и пусть каждой из них поставлено в соответствие положительное число h_n, причем $\sum\limits_n h_n < \infty$. Определим функцию f на $[a, b]$, положив

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n. \tag{3}$$

Ясно, что эта функция монотонно неубывающая. Кроме того, она непрерывна с л е в а [1]) в каждой точке, а совокупность ее точек разрыва совпадает с множеством $\{x_n\}$[2]), причем скачок в точке x_n равен h_n. Действительно,

$$f(x-0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{x_n < x-\varepsilon} h_n,$$

но так как каждое x_n, удовлетворяющее условию $x_n < x$, удовлетворяет и условию $x_n < x - \varepsilon$ при достаточно малом ε, то последний предел равен $\sum\limits_{x_n < x} h_n = f(x)$. Таким образом, $f(x-0) = f(x)$.

---

[1]) Если бы мы определили f формулой

$$f(x) = \sum_{x_n \leqslant x} h_n,$$

то получили бы функцию, непрерывную с п р а в а.

[2]) Если ни одна из точек x_n не совпадает с b, поскольку $x_n = b$ не участвует в сумме (3). Чтобы учесть скачок в точке b, надо вместо $[a, b]$ рассматривать полуинтервал $[a, b + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Если точка x совпадает с одной из точек x_n, скажем, $x = x_{n_0}$, то

$$f(x_{n_0}+0) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(x_n + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0} \sum_{x_n < x_{n_0}+\varepsilon} h_n = \sum_{x_n \leqslant x_{n_0}} h_n,$$

т. е. $f(x_{n_0}+0) - f(x_{n_0}-0) = h_{n_0}$.

Наконец, если x не совпадает ни с одной из точек x_n, то в ней функция скачков непрерывна (проведите доказательство!).

Простейший тип функций скачков — ступенчатые функции, у которых точки разрыва можно расположить в монотонную последовательность

$$x_1 < \ldots < x_n < \ldots$$

В общем случае функция скачков может иметь и более сложную структуру, например, если $\{x_n\}$ — множество всех рациональных точек на отрезке $[a, b]$, а $h_n = 1/2^n$, то формула (3) определяет функцию скачков, разрывную в рациональных точках и непрерывную в иррациональных.

Другой тип монотонных функций, в некотором смысле противоположный функциям скачков, — непрерывные монотонные функции. Имеет место следующее утверждение.

4. *Всякую монотонную функцию, непрерывную слева, можно представить как сумму непрерывной монотонной функции и функции скачков (непрерывной слева) и притом единственным образом.*

Действительно, пусть f — неубывающая непрерывная слева функция и $x_1, x_2, \ldots$ — все ее точки разрыва, а $h_1, h_2, \ldots$ — ее скачки в этих точках. Положим

$$H(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

Разность $\varphi = f - H$ есть неубывающая непрерывная функция. Для доказательства рассмотрим разность

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [f(x'') - f(x')] - [H(x'') - H(x')],$$

где $x' < x''$. Здесь справа стоит разность между полным приращением функции f на отрезке $[x', x'']$ и суммой ее скачков на этом отрезке. Ясно, что эта величина неотри-

цательна, т. е. φ — неубывающая функция. Далее, для произвольной точки x^* имеем

$$\varphi(x^*-0)=f(x^*-0) \qquad H(x^*-0)=f(x^*-0)-\sum_{x_n<x^*}h_n,$$

$$\varphi(x^*+0)=f(x^*+0) \qquad H(x^*+0)=f(x^*+0)-\sum_{x_n\leqslant x^*}h_n,$$

откуда

$$\varphi(x^*+0)-\varphi(x^*-0)=f(x^*+0)-f(x^*-0)-h^*=0$$

(где h^* — скачок функции H в точке x^*). Отсюда и из непрерывности f и H слева вытекает, что φ действительно непрерывна.

2. Дифференцируемость монотонной функции. Перейдем теперь к вопросу о существовании производной у монотонной функции.

Теорема 1 (Лебег). *Монотонная функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную.*

Прежде всего введем некоторые понятия, которые будут нужны для доказательства этой теоремы.

Как известно, производной функции f в точке x_0 называется предел отношения

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4}$$

при $x\to x_0$. Этот предел может, конечно, и не существовать, однако всегда имеют смысл следующие четыре величины (которые могут принимать и бесконечные значения):

$\Lambda_{\text{пр}}$ — верхний предел отношения (4) при x, стремящемся к x_0 справа (т. е. так, что $x-x_0>0$). Эта величина называется *верхним правым производным числом*.

$\lambda_{\text{пр}}$ (*нижнее правое производное число*) — нижний предел отношения (4) при $x\to x_0$ справа.

$\Lambda_{\text{лев}}$ (*верхнее левое производное число*) — верхний предел отношения (4) при $x\to x_0$ слева.

$\lambda_{\text{лев}}$ (*нижнее левое производное число*) — нижний предел отношения (4) при $x\to x_0$ слева.

На рис. 19 показаны прямые с угловыми коэффициентами $\Lambda_{\text{пр}}$, $\lambda_{\text{пр}}$, $\Lambda_{\text{лев}}$, $\lambda_{\text{лев}}$ соответственно. Ясно, что всегда

$$\lambda_{\text{пр}}\leqslant\Lambda_{\text{пр}} \quad\text{и}\quad \lambda_{\text{лев}}\leqslant\Lambda_{\text{лев}}.$$

Если $\Lambda_{\text{пр}}$ и $\lambda_{\text{пр}}$ конечны и равны между собой, то это общее их значение есть правая производная функции $f(x)$ в точке x_0. Аналогично, если $\Lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{лев}}$, то их общее значение есть левая производная. Существование у f в точке x_0 конечной производной равносильно тому, что в этой точке все производные числа функции f

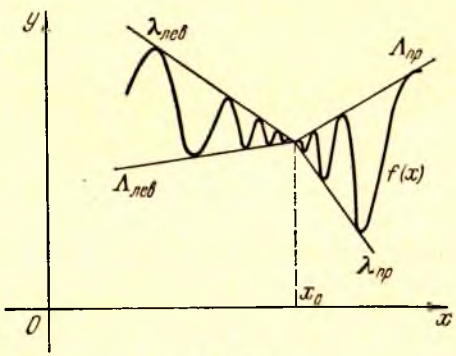


Рис. 19

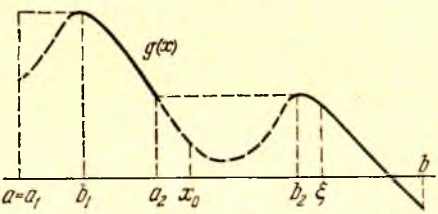


Рис. 20

конечны и равны между собой. Поэтому утверждение теоремы Лебега можно сформулировать следующим образом: *для монотонной на* $[a, b]$ *функции соотношения*

$$-\infty < \lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}} = \Lambda_{\text{лев}} = \Lambda_{\text{пр}} < \infty$$

выполнены почти всюду на $[a, b]$.

Упражнение. Пусть $f^*(x) = -f(x)$. Как связаны производные числа для f^* с производными числами f?

Ответьте на такой же вопрос при переходе от $f(x)$ к $f(-x)$.

Доказательство теоремы Лебега опирается на приводимую ниже лемму, которой мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Введем следующее определение. Пусть $g(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Точку x_0 этого отрезка мы назовем *точкой, невидимой справа для* функции g, если существует такая точка ξ ($x_0 < \xi \leqslant b$), что $g(x_0) < g(\xi)$ (рис. 20).

Лемма (Ф. Рисс). *Для любой непрерывной функции g множество точек, невидимых справа, открыто на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, представляется в виде суммы конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) (и, возможно, полуинтервала, содержащего точку a). В концевых точках этих интервалов выполнены неравенства*

$$g(a_k) \leqslant g(b_k). \tag{5}$$

Доказательство леммы. Если x_0 — точка, невидимая справа для g, то тем же свойством будет обладать, в силу непрерывности g, и любая точка, достаточно близкая к x_0. Следовательно, множество таких точек открыто на $[a, b]$. Пусть (a_k, b_k) — один из составляющих его интервалов. Предположим, что

$$g(a_k) > g(b_k); \tag{6}$$

тогда в интервале (a_k, b_k) найдется внутренняя точка x_0, в которой $g(x_0) > g(b_k)$. Пусть x^* — самая правая из всех точек x на (a_k, b_k), в которых $g(x) = g(x_0)$.

Поскольку $x^* \in (a_k, b_k)$, существует такая точка $\xi > x^*$, что $g(\xi) > g(x^*)$. Точка ξ не может лежать на интервале (a_k, b_k), так как x^* — *самая правая* точка на этом интервале, в которой $g(x) = g(x_0)$, тогда как $g(b_k) < g(x_0)$. С другой стороны, неравенство $\xi > b_k$ также невозможно, так как мы имели бы $g(b_k) < g(x_0) < g(\xi)$, а b_k *не является* точкой, невидимой справа. Полученное противоречие показывает, что неравенство (6) не имеет места, т. е. $g(a_k) \leqslant g(b_k)$, и лемма доказана. Читатель без труда проверит, что фактически $g(a_k) = g(b_k)$, если только $a_k \neq a$.

Замечание. Назовем точку x_0 *невидимой слева* для непрерывной функции $g(x)$, если существует такое $\xi < x_0$, что $g(\xi) > g(x_0)$. Такие же рассуждения показывают, что множество невидимых слева точек есть сумма конечного или счетного числа попарно неперекрывающихся интервалов (a_k, b_k) (и, возможно, полуинтервала, включающего точку b), причем

$$g(a_k) \geqslant g(b_k).$$

Перейдем теперь к доказательству самой теоремы Лебега. Докажем ее сначала в предположении, что f — непрерывная монотонно неубывающая функция. Для доказательства теоремы достаточно установить, что почти всюду

$$1)\ \Lambda_{\text{пр}} < \infty, \qquad 2)\ \lambda_{\text{лев}} \geqslant \Lambda_{\text{пр}}.$$

Действительно, если мы положим $f^*(x) = -f(-x)$, то f^* будет тоже монотонно неубывающей непрерывной функцией, определенной на отрезке $[-b, -a]$. Если $\Lambda^*_{\text{пр}}$ и $\lambda^*_{\text{лев}}$ — верхнее правое и нижнее левое производные числа для f^*, то, как легко проверить (см. упражнение на с. 373), производные числа функций f и f^* в соответствующих точках связаны равенствами $\Lambda^*_{\text{пр}} = \Lambda_{\text{лев}}$, $\lambda^*_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}}$. Поэтому, применив неравенство 2) к $f^*(x)$, получим

$$\lambda_{\text{пр}} \geqslant \Lambda_{\text{лев}}. \tag{7}$$

Соединив полученные неравенства в одну цепочку и используя определение производных чисел, будем иметь

$$\Lambda_{\text{пр}} \leqslant \lambda_{\text{лев}} \leqslant \Lambda_{\text{лев}} \leqslant \lambda_{\text{пр}} \leqslant \Lambda_{\text{пр}},$$

а это и означает, что

$$\lambda_{\text{лев}} = \lambda_{\text{пр}} = \Lambda_{\text{лев}} = \Lambda_{\text{пр}}.$$

Покажем вначале, что $\Lambda_{\text{пр}} < \infty$ почти всюду. Если $\Lambda_{\text{пр}} = \infty$ в некоторой точке x_0, то для любого постоянного $C > 0$ справа от точки x_0 найдется такая точка ξ, что

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} > C,$$

т. е.

$$f(\xi) - f(x_0) > C(\xi - x_0),$$

или

$$f(\xi) - C\xi > f(x_0) - Cx_0.$$

Иначе говоря, точка x_0 оказывается точкой, невидимой справа для функции

$$g(x) = f(x) - Cx.$$

В силу леммы Ф. Рисса множество таких точек открыто, и на концах составляющих его интервалов (a_k, b_k) выполнены неравенства

$$f(a_k) - Ca_k \leqslant f(b_k) - Cb_k,$$

т. е.

$$f(b_k) - f(a_k) \geqslant C(b_k - a_k).$$

Деля на C и суммируя полученные неравенства по всем интервалам (a_k, b_k), получим

$$\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \sum_k \frac{f(b_k) - f(a_k)}{C} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{C}.$$

Здесь C можно было взять как угодно большим. Таким образом, множество тех точек, в которых $\Lambda_{\text{пр}} = \infty$, можно покрыть интервалами, сумма длин которых сколь угодно мала. Следовательно, мера этого множества равна 0.

Тот же прием, связанный с леммой Ф. Рисса, позволяет доказать, что почти всюду $\lambda_{\text{лев}} \geqslant \Lambda_{\text{пр}}$, но теперь этот прием придется применить дважды. Рассмотрим пару рациональных чисел c и C, для которых $0 < c < C < \infty$ и положим $\rho = c/C$. Обозначим через E_{cC} совокупность тех x, для которых $\Lambda_{\text{пр}} > C$, а $\lambda_{\text{лев}} < c$. Если мы докажем, что $\mu E_{cC} = 0$, то отсюда будет следовать, что почти всюду $\lambda_{\text{лев}} \geqslant \Lambda_{\text{пр}}$, так как множество тех точек, где $\lambda_{\text{лев}} < \Lambda_{\text{пр}}$, очевидно, представимо в виде суммы не более чем счетного числа множеств вида E_{cC}.

Установим теперь основное неравенство.

Для любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ *имеем*

$$\mu(E_{cC} \cap (\alpha, \beta)) \leqslant \rho(\beta - \alpha).$$

Действительно, прежде рассмотрим множество тех $x \in (\alpha, \beta)$, для которых $\lambda_{\text{лев}} < c$. Для всякой такой точки x найдется такое $\xi < x$, что $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < c$, т. е. $f(\xi) - c\xi > f(x) - cx$. Поэтому x невидима слева для функции $f(x) - cx$ и по лемме Ф. Рисса (см. замечание на с. 374 множество таких x представимо в виде суммы не более чем счетного числа непересекающихся интервалов $(\alpha_k, \beta_k) \subset (\alpha, \beta)$, причем $f(\alpha_k) - c\alpha_k \geqslant f(\beta_k) - c\beta_k$, т. е.

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leqslant c(\beta_k - \alpha_k). \tag{8}$$

На каждом из интервалов (α_k, β_k) рассмотрим множество G_k тех x, для которых $\Lambda_{\text{пр}} > C$. Снова применяя лемму Ф. Рисса (теперь, как и при доказательстве неравенства $\Lambda_{\text{пр}} < \infty$, для точек, невидимых справа), мы получим, что G_k представимо в виде суммы не более чем счетного числа непересекающихся интервалов $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$ и

$$\beta_{kj} - \alpha_{kj} \leqslant \frac{1}{C}[f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})]. \tag{9}$$

Ясно, что множество $E_{cC} \cap (\alpha, \beta)$ покрывается системой интервалов $(\alpha_{kj}, \beta_{kj})$, причем в силу (8) и (9) имеем

$$\sum_{k,j}(\beta_{kj} - \alpha_{kj}) \leqslant \frac{1}{C}\sum_{k,j}[f(\beta_{kj}) - f(\alpha_{kj})] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C}\sum_{k}[f(\beta_k) - f(\alpha_k)] \leqslant \frac{c}{C}\sum_{k}(\beta_k - \alpha_k) \leqslant \rho(\beta - \alpha),$$

и основное неравенство доказано.

Теперь легко доказать, что $\mu E_{cC} = 0$.

При этом достаточно использовать только то свойство множества E_{cC}, которое описывается основным неравенством.

Лемма. *Пусть измеримое множество A на отрезке $[a, b]$ таково, что для любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ выполняется неравенство* $\mu(A \cap (\alpha, \beta)) \leqslant \rho(\beta - \alpha)$, *где* $0 < \rho < 1$. *Тогда* $\mu A = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu A = t$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество G, равное сумме счетного числа непересекающихся интервалов (a_m, b_m), что $A \subset G$ и $\sum_m (b_m - a_m) < t + \varepsilon$ (см. упражнение на с. 334). Положим $t_m = \mu[A \cap (a_m, b_m)]$. Ясно, что $t = \sum_m t_m$. По условию леммы, $t_m \leqslant \rho(b_m - a_m)$. Следовательно, $t \leqslant \rho\sum_m (b_m - a_m) < \rho(t + \varepsilon)$, и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $t \leqslant \rho t$. Но $0 < \rho < 1$ и поэтому $t = 0$.

Лемма доказана, и тем самым завершено доказательство теоремы 1 в предположении непрерывности функции f.

Те же рассуждения переносятся и на случай разрывной монотонной функции, если воспользоваться обобщением леммы Ф. Рисса на функции с разрывами первого рода.

Пусть g — функция на отрезке $[a, b]$, имеющая разрывы только первого рода. Назовем точку $x_0 \in [a, b]$ *невидимой справа для* $g(x)$, если существует такое $\xi > x_0$, что

$$\max [g(x_0 - 0), g(x_0), g(x_0 + 0)] < g(\xi).$$

Тогда, как и в случае непрерывной g, *множество точек, невидимых справа для* g, *открыто, и в концах составляющих его интервалов* (a_k, b_k) *выполняются неравенства*

$$g(a_k) \leqslant g(b_k).$$

Хотя доказательство теоремы 1 довольно длинно, сама она имеет простой наглядный смысл. Поясним, например, почему $\Lambda_{\text{пр}}$ (и $\Lambda_{\text{лев}}$) обязано быть конечным почти всюду. Отношение $\Delta f/\Delta x$ — это «коэффициент растяжения» отрезка $[a, b]$ в данной точке x при отображении f. Так как при этом отображении конечный отрезок $[a, b]$ превращается в конечный отрезок $[f(a), f(b)]$, то «растяжение» не может быть бесконечным на множестве положительной меры.

Иногда бывает полезна следующая теорема о почленном дифференцировании ряда из монотонных функций, называемая иногда «малой теоремой Фубини».

Т е о р е м а 2. *Всюду сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x), \tag{10}$$

где F_n *— монотонно неубывающие функции на* $[a, b]$, *почти всюду допускает почленное дифференцирование*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) = F'(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменив $F_n(x)$ на $F_n(x) - F_n(a)$, можно считать, что все $F_n(x)$ неотрицательны и обращаются в нуль при $x = a$.

В силу теоремы 1 существует множество полной меры $E \subset [a, b]$, на котором существуют все $F_n'(x)$ и $F'(x)$. Пусть $x \in E$, а $\xi \in [a, b]$ произвольно. Имеем

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} [F_n(\xi) - F_n(x)]}{\xi - x} = \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

Так как $\xi - x$ и $F_n(\xi) - F_n(x)$ имеют одинаковый знак (монотонность!), то при любом N

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \{F_n(\xi) - F_n(x)\}}{\xi - x} \leqslant \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}.$$

Переходя к пределу при $\xi \to x$, получаем

$$\sum_{n=1}^{N} F_n'(x) \leqslant F'(x).$$

Поскольку все $F_n'(x) \geqslant 0$, отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) \leqslant F'(x). \tag{11}$$

Итак, ряд из производных $F_n'(x)$ сходится всюду на E. Покажем, что при почти всех x в (11) имеет место знак равенства. Для каждого k найдется такая частичная сумма $S_{n_k}(x)$ ряда (10), что

$$0 \leqslant F(b) - S_{n_k}(b) < 1/2^k.$$

Так как функция $F(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{m>n_k} F_m(x)$ — неубывающая, то и при любом x

$$0 \leqslant F(x) - S_{n_k}(x) < 1/2^k,$$

откуда следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F(x) - S_{n_k}(x)], \tag{12}$$

состоящий из неубывающих функций, сходится (даже равномерно) на всем отрезке $[a, b]$. Тогда, по уже доказанному, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [F'(x) - S_{n_k}'(x)], \tag{13}$$

полученный из (12) почленным дифференцированием, сходится почти всюду. Следовательно, общий член ряда (13) почти всюду стремится к нулю, т. е. $S_{n_k}'(x) - F'(x) \to 0$

почти всюду. Но если бы в неравенстве (11) стоял знак $<$, то никакая последовательность частичных сумм не могла бы сходиться к $F'(x)$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F'(x)$$

почти всюду. Теорема доказана.

Следствие. *Функция скачков имеет почти всюду производную, равную нулю.*

Действительно, такая функция есть сумма сходящегося ряда неубывающих «ступеней»:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_n, \\ h_n & \text{при } x > x_n, \end{cases}$$

каждая из которых имеет почти всюду равную нулю производную.

3. Производная интеграла по верхнему пределу. Поскольку интеграл

$$\int_a^x \varphi(t)\,dt$$

от любой суммируемой функции можно представить в виде разности двух монотонных функций, из теоремы 1 сразу вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Для каждой суммируемой функции* φ *производная*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)\,dt \tag{14}$$

существует при почти всех x.

Необходимо подчеркнуть, что, хотя мы и установили существование производной (14) почти всюду, вопрос о равенстве

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \varphi(t)\,dt = \varphi(x)$$

пока не обсуждался. В действительности (см. § 3) это равенство оказывается верным почти всюду для любой суммируемой функции φ.

§ 2. Функции с ограниченным изменением

Вопрос о дифференцируемости интеграла Лебега по верхнему пределу привел нас к рассмотрению класса функций, представимых в виде разностей монотонных функций. В этом параграфе мы дадим для этих функций другое описание, не опирающееся на понятие монотонности, и рассмотрим основные их свойства. Начнем с необходимых определений.

Определение 1. Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *функцией с ограниченным изменением*, если существует такая постоянная C, что, каково бы ни было разбиение отрезка $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant C. \tag{1}$$

Всякая монотонная функция имеет ограниченное изменение, так как для нее сумма, стоящая в (1) слева, не зависит от выбора разбиения и всегда равна $|f(b) - f(a)|$.

Определение 2. Пусть f — функция с ограниченным изменением. Точная верхняя грань сумм (1) по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[a, b]$ называется *полным изменением* (или *полной вариацией*) функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $V_a^b[f]$. Таким образом,

$$V_a^b[f] = \sup \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Замечание. Функция f, заданная на всей прямой, называется *функцией с ограниченным изменением*, если величины $V_a^b[f]$ ограничены в совокупности. При этом

$$\lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} V_a^b[f]$$

называется *полным изменением* функции f на прямой $-\infty < x < \infty$ и обозначается $V_{-\infty}^{\infty}[f]$.

Установим основные свойства полного изменения функции.

1. *Если* α *— постоянное число, то*

$$V_a^b[\alpha f] = |\alpha| V_a^b[f].$$

Это сразу следует из определения $V_a^b[f]$.

2. *Если* f *и* g *— функции с ограниченным изменением, то* $f+g$ *тоже имеет ограниченное изменение и*

$$V_a^b[f+g] \leqslant V_a^b[f] + V_a^b[g]. \tag{2}$$

Действительно, для каждого разбиения отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_k |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_k |g(x_k) - g(x_{k-1})|,$$

откуда, поскольку всегда

$$\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B,$$

получаем требуемое неравенство.

Свойства 1 и 2 означают, что линейная комбинация функций с ограниченным изменением (определенных на данном отрезке $[a, b]$) есть снова функция с ограниченным изменением. Иными словами, *функции с ограниченным изменением образуют линейное пространство* (в отличие от множества монотонных функций, которые линейного пространства не образуют).

3. *Если* $a < b < c$, *то*

$$V_a^b[f] + V_b^c[f] = V_a^c[f]. \tag{3}$$

Действительно, рассмотрим сначала такое разбиение отрезка $[a, c]$, в котором b служит одной из точек деления, скажем, $x_r = b$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{r} |f(x_k) - f(x_{k-1})| +$$
$$+ \sum_{k=r+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{4}$$

Возьмем теперь произвольное разбиение отрезка $[a, c]$. Ясно, что если к его точкам деления добавить еще одну, именно точку b, то сумма

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

от такого добавления не уменьшится. Следовательно, неравенство (4) выполнено для любого разбиения отрезка $[a, c]$, поэтому

$$V_a^c[f] \leqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{4'}$$

С другой стороны, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие разбиения отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$, что

$$\sum_i |f(x_i') - f(x_{i-1}')| > V_a^b[f] - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_j |f(x_j'') - f(x_{j-1}'')| > V_b^c[f] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Соединив эти два разбиения, мы получим разбиение отрезка $[a, c]$, для которого

$$\sum_k |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_i |f(x_i') - f(x_{i-1}')| + \sum_j |f(x_j'') - f(x_{j-1}'')| > V_a^b[f] + V_b^c[f] - \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что

$$V_a^c[f] \geqslant V_a^b[f] + V_b^c[f]. \tag{5}$$

Из (4') и (5) следует (3).

Так как полное изменение любой функции на любом отрезке неотрицательно, то из свойства 3 сразу следует свойство 4.

4. *Функция*

$$v(x) = V_a^x[f]$$

монотонно неубывающая.

5. *Если f непрерывна в точке x^* слева, то и v непрерывна в этой точке слева.*

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0$ так, что $|f(x^*) - f(x)| < \varepsilon/2$, как только $x^* - \delta < x \leqslant x^*$. Далее, выберем разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x^*$$

так, что

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

При этом мы можем считать, что

$$x^* - x_{n-1} < \delta$$

(иначе мы добавили бы еще одну точку разбиения, отчего разность, стоящая в (6) слева, могла бы только уменьшиться), поэтому

$$|f(x^*) - f(x_{n-1})| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$$V_a^{x^*}[f] - \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < \varepsilon.$$

Но тогда, тем более,

$$V_a^{x^*}[f] - V_a^{x_{n-1}}[f] < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad v(x^*) - v(x_{n-1}) < \varepsilon.$$

Так как v — монотонно неубывающая функция, то отсюда следует, что $v(x^*) - v(x) < \varepsilon$ для всех x таких, что $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x^*$. А это и означает непрерывность функции v в точке x^* слева.

Если f непрерывна в точке x^* справа, то, как показывают аналогичные рассуждения, и v непрерывна в этой точке справа. Следовательно, *если f непрерывна в некоторой точке (или на всем отрезке $[a, b]$), то непрерывна и v.*

Пусть f — произвольная функция на $[a, b]$ с ограниченным изменением и v — ее полное изменение на $[a, x]$. Рассмотрим разность

$$\varphi = v - f.$$

Эта разность представляет собой монотонно неубывающую функцию. Действительно, пусть $x' \leqslant x''$. Тогда

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = [v(x'') - v(x')] - [f(x'') - f(x')]. \qquad (7)$$

Но всегда

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant v(x'') - v(x') = V_{x'}^{x''}[f],$$

поэтому правая, а значит, и левая части равенства (7) неотрицательны.

Итак, поскольку

$$f = v - \varphi,$$

мы получили следующий результат:

Теорема 1. *Всякая функция с ограниченным изменением может быть представлена как разность двух монотонно неубывающих функций.*

Обратное утверждение очевидно: всякая функция, представимая в виде разности двух монотонных, имеет ограниченное изменение. Поэтому совокупность функций, представимых в виде разности монотонных функций, рассмотренная нами еще в предыдущем параграфе, это и есть совокупность функций с ограниченным изменением.

Из теоремы 1 и установленной в предыдущем параграфе теоремы Лебега о существовании производной у монотонной функции сразу следует, что *всякая функция с ограниченным изменением имеет почти всюду конечную производную.*

Перейдя от монотонных функций к функциям с ограниченным изменением, полезно следующим образом обобщить введенное выше понятие функции скачков. Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — конечное или счетное множество точек на $[a, b]$. Поставим в соответствие каждой из этих точек x_n два числа g_n и h_n так, что

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|) < \infty.$$

Предположим, кроме того, что если $x_n = a$, то $g_n = 0$, а если $x_n = b$, то $h_n = 0$.

Положим

$$\psi(x) = \sum_{x_n \leqslant x} g_n + \sum_{x_n < x} h_n. \tag{8}$$

Мы будем называть теперь *функциями скачков* любые функции вида (8). Полное изменение функции $\psi(x)$ равно, очевидно,

$$\sum_n (|g_n| + |h_n|).$$

Точками разрыва функции (8) служат те x_n, для которых хотя бы одно из чисел g_n, h_n отлично от нуля; при этом

$$\psi(x_n) - \psi(x_n - 0) = g_n, \quad \psi(x_n + 0) - \psi(x_n) = h_n.$$

Теперь легко получается следующее утверждение, обобщающее утверждение 4 п. 1 предыдущего параграфа.

Всякая функция f с ограниченным изменением, определенная на $[a, b]$, может быть представлена, и притом единственным образом, в виде

$$f = \varphi + \psi,$$

где φ непрерывна, а ψ — функция скачков.

Упражнения. 1. Если f имеет на $[a, b]$ ограниченную производную (т. е. $f'(x)$ существует всюду и $|f'(x)| < C$), то f — функция с ограниченным изменением, причем

$$V_a^b[f] \leqslant C(b - a).$$

2. Пусть $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Показать, что изменение функции f на $[0, 1]$ бесконечно.

Постоянные, и только они, представляют собой функции, полное изменение которых равно 0. Положим

$$\|f\| = V_a^b[f].$$

Величина $V_a^b[f]$ обладает свойствами 2) и 3) нормы (см. с. 000), но не свойством 1). Если рассмотреть только функции, удовлетворяющие дополнительному условию $f(a) = 0$, то они также образуют линейное пространство, в котором величина $V_a^b[f]$ обладает уже всеми свойствами нормы. Пространство $V^0[a, b]$ функций с ограниченным изменением на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $f(a) = 0$, с обычными определениями сложения и умножения на числа и с нормой

$$\|f\| = V_a^b[f],$$

называется *пространством функций с ограниченным изменением*. (Докажите полноту этого пространства.)

Упражнение. Докажите, что $\|f\| = |f(a)| + V_a^b[f]$ является нормой в пространстве *всех* функций с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ и докажите полноту этого пространства.

§ 3. Производная неопределенного интеграла Лебега

В § 1 мы показали, что интеграл Лебега

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

как функция от x имеет почти всюду конечную производную. Однако мы пока еще не выяснили, как связана эта производная с подынтегральной функцией. Сейчас мы установим следующий результат, упомянутый в конце § 1.

Теорема 1. *Для всякой суммируемой функции f почти всюду имеет место равенство*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Доказательство. Положим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Покажем вначале, что почти всюду

$$f(x) \geqslant \Phi'(x).$$

Если $f(x) < \Phi'(x)$, то найдутся такие рациональные числа α и β, что

$$f(x) < \alpha < \beta < \Phi'(x). \tag{1}$$

Пусть $E_{\alpha\beta}$ — множество тех точек, в которых выполнено неравенство (1). Оно измеримо, поскольку f и Φ' измеримы. Покажем, что мера каждого из множеств $E_{\alpha\beta}$ равна нулю. Так как число этих множеств счетно, то отсюда будет следовать, что

$$\mu\{x:\ f(x) < \Phi'(x)\} = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и пусть $\delta > 0$ таково, что

$$\left|\int_e f(t)\,dt\right| < \varepsilon,$$

как только $\mu(e) < \delta$ (такое δ существует для любого ε в силу абсолютной непрерывности интеграла; см. гл. V, § 5, теорема 5). Выберем теперь открытое множество $G \subset [a, b]$ так, что

$$G \supset E_{\alpha\beta} \text{ и } \mu(G) < \mu(E_{\alpha\beta}) + \delta$$

(см. упражнение на стр. 334). Если $x \in E_{\alpha\beta}$, то

$$\frac{\Phi(\xi) - \Phi(x)}{\xi - x} > \beta \tag{2}$$

для всех $\xi > x$, достаточно близких к x. Записав неравенство (2) в виде

$$\Phi(\xi) - \beta\xi > \Phi(x) - \beta x,$$

получаем, что точка x — невидимая справа для функции $\Phi(x) - \beta x$ на любом из составляющих интервалов множества G. Используя лемму Ф. Рисса, мы можем поэтому указать такое открытое множество $S = \bigcup\limits_k (a_k, b_k)$, состоящее из непересекающихся интервалов, что $E_{\alpha\beta} \subset S \subset G$ и

$$\Phi(b_k) - \beta b_k \geqslant \Phi(a_k) - \beta a_k,$$

т. е.

$$\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geqslant \beta(b_k - a_k),$$

или

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt \geqslant \beta(b_k - a_k).$$

Суммируя такие неравенства по всем интервалам (a_k, b_k), составляющим S, получаем

$$\int_S f(t)\,dt \geqslant \beta\mu(S). \tag{3}$$

В то же время

$$\int_S f(t)\,dt = \int_{E_{\alpha\beta}} f(t)\,dt + \int_{S \setminus E_{\alpha\beta}} f(t)\,dt < \alpha\mu(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получаем

$$\alpha\mu(S) + \varepsilon + |\alpha|\delta \geqslant \beta\mu(S),$$

т. е.

$$\mu(S) \leqslant \frac{\varepsilon + |\alpha|\delta}{\beta - \alpha}.$$

Таким образом, множество $E_{\alpha\beta}$ можно заключить в открытое множество сколь угодно малой меры (мы можем считать, например, что $|\alpha|\delta \leqslant \varepsilon$), а это и означает, что $\mu(E_{\alpha\beta}) = 0$. Итак, мы показали, что

$$f(x) \geqslant \Phi'(x)$$

почти всюду. Заменив $f(x)$ на $-f(x)$, мы таким же путем получим, что почти всюду

$$-f(x) \geqslant -\Phi'(x), \text{ т. е. } f(x) \leqslant \Phi'(x)$$

и, следовательно, почти всюду

$$f(x) = \Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt.$$

§ 4. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции

Итак, мы решили первый из поставленных в начале этой главы вопросов, установив равенство

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \text{ (почти всюду)}$$

для любой суммируемой на $[a, b]$ функции f. Рассмотрим теперь второй из сформулированных там вопросов, т. е. выясним, как обобщается на случай интеграла Лебега формула Ньютона — Лейбница

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt, \tag{1}$$

хорошо известная в случае непрерывно дифференцируемых функций из элементарного анализа.

Естественно ограничиться рассмотрением функций F, заведомо дифференцируемых почти всюду (иначе равенство (1) просто не имеет смысла). Как мы уже знаем, такими, в частности, являются функции с ограниченным изменением.

С другой стороны, интеграл, стоящий в (1) справа, есть функция с ограниченным изменением. Поэтому равенство (1) не может быть верно для более широкого класса функций. Поскольку всякая функция с ограниченным изменением есть разность двух монотонно неубывающих, то именно монотонные функции и нужно рассмотреть в первую очередь.

Однако для произвольных монотонных функций равенство (1), вообще говоря, не имеет места. Вместе с тем справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Производная f' монотонно неубывающей функции f суммируема и*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Доказательство. По определению, производная функции f в точке x есть предел отношения [1])

$$\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

при $h \to 0$. Из монотонности f вытекает ее суммируемость, а значит, и суммируемость каждой из функций φ_h. Поэтому равенство (2) можно проинтегрировать. Получаем

$$\int_a^b \varphi_h(x)dx = \frac{1}{h}\int_a^b f(x+h)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_b^{b+h} f(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,dx.$$

Стоящее справа выражение при $h \to +0$ стремится к $f(b) - f(a+0)$. (Докажите!) Поэтому, применив теорему Фату (гл. V, § 5, теорема 8), мы получаем

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant \lim_{h\to+0}\int_a^b \varphi_h(x)\,dx = f(b) - f(a+0) \leqslant f(b) - f(a)$$

[1]) Чтобы выражение $f(x+h)$ имело смысл при любом $x \in [a, b]$, можно считать, что $f(x) = f(b)$ при $x > b$ и $f(x) = f(a)$ при $x < a$.

(само существование интеграла от f' также обеспечивается теоремой Фату).

Теорема доказана.

Нетрудно привести пример монотонной функции, для которой имеет место строгое неравенство

$$\int_a f'(x)\,dx < f(b) - f(a).$$

Достаточно положить

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1 \text{ при } & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Интересно, однако, что существуют непрерывные монотонные функции, для которых строгое неравенство

$$\int_a^x f'(t)\,dt < f(x) - f(a)$$

выполнено при всех $x > a$. Вот один из простейших примеров. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ канторово множество и определим f сначала на его смежных интервалах, положив

$$f(t) = \frac{2k-1}{2^n},$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}$$

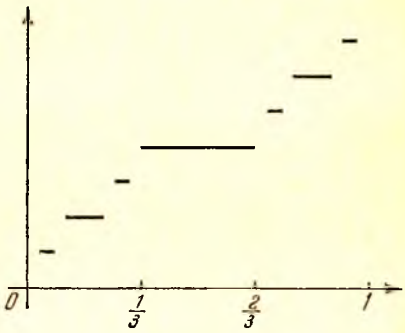


Рис. 21

на k-м смежном интервале n-го ранга (включая и его концы). (Интервалы нумеруются слева направо.) Следовательно,

$$f(t) = 1/2 \quad \text{при} \quad 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3,$$
$$f(t) = 1/4 \quad \text{при} \quad 1/9 \leqslant t \leqslant 2/9,$$
$$f(t) = 3/4 \quad \text{при} \quad 7/9 \leqslant t \leqslant 8/9$$

и т. д. (рис. 21). Таким образом, f определена на отрезке $[0, 1]$ всюду, кроме точек второго рода канторова множества (т. е. точек, не принадлежащих ни смежным

интервалам, ни совокупности их концов). Доопределим теперь f в этих оставшихся точках следующим образом. Пусть t^* — одна из таких точек и пусть $\{t_n\}$ — сходящаяся к ней возрастающая последовательность точек первого рода (т. е. концов смежных интервалов). Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n); \tag{3}$$

аналогично, существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} f(t'_n), \tag{4}$$

если $\{t'_n\}$ — убывающая последовательность точек первого рода, сходящаяся к t^*, причем пределы (3) и (4) равны между собой. Приняв это общее значение за $f(t^*)$, мы получим монотонную функцию, определенную и непрерывную на всем отрезке $[0, 1]$, называемую «канторовой лестницей». Ее производная равна, очевидно, нулю в каждой точке любого смежного интервала, т. е. почти всюду. Следовательно, для этой функции имеем

$$0 = \int_0^x f'(t)\,dt < f(x) - f(0) = f(x)$$

при любом x из полуинтервала $0 < x \leqslant 1$.

Отметим попутно, что в случае монотонной $f(x)$ равенство $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ влечет равенство $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ при любом x из полуинтервала $a < x \leqslant b$.

Чтобы описать класс функций, для которых имеет место равенство

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a),$$

введем следующее определение.

Определение 1. Функция f, заданная на некотором отрезке $[a, b]$, называется *абсолютно непрерывной* на нем, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов

$$(a_k, b_k), \quad k = 1, \ldots, n$$

с суммой длин, меньшей δ,

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Ясно, что всякая абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна. Обратное, вообще говоря, неверно, например: описанная выше «канторова лестница» непрерывна (а значит, и равномерно непрерывна) на отрезке $[0, 1]$, однако она не абсолютно непрерывна. Действительно, канторово множество можно покрыть конечной системой интервалов (a_k, b_k) $(k = 1, \ldots, n)$, сумма длин которых сколь угодно мала. Вместе с тем для каждой такой системы интервалов выполнено, очевидно, равенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| = 1.$$

Укажем основные свойства абсолютно непрерывных функций.

1. Заметим прежде всего, что в определении 1 можно вместо любой конечной системы интервалов с суммой длин $< \delta$ рассматривать любую конечную или счетную систему интервалов, сумма длин которых $< \delta$. Действительно, пусть для данного $\varepsilon > 0$ мы выбрали $\delta > 0$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

для любой конечной системы интервалов (a_k, b_k), удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

и пусть (α_k, β_k) — счетная система интервалов с суммой длин, не превосходящей δ. Тогда при любом n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon;$$

переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant \varepsilon.$$

2. *Всякая абсолютно непрерывная функция имеет ограниченное изменение.*

Действительно, абсолютная непрерывность функции f на отрезке $[a, b]$ означает, в частности, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно $\delta > 0$ выбрать так, что полное изменение функции f на отрезке длины $<\delta$ будет не больше, чем ε. Поскольку отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков длины $<\delta$, то и полное изменение функции f на $[a, b]$ конечно.

3. *Сумма абсолютно непрерывных функций и произведение такой функции на число суть абсолютно непрерывные функции.*

Это сразу вытекает из определения абсолютной непрерывности и свойств модуля суммы и произведения.

Свойства 2 и 3 означают, что *абсолютно непрерывные функции в пространстве всех* [1]) *функций с ограниченным изменением образуют линейное многообразие.*

4. *Всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных неубывающих функций.*

Действительно, абсолютно непрерывная функция, как всякая функция с ограниченным изменением, может быть представлена в виде

$$f = v - g,$$

где

$$v(x) = V_a^x[f] \quad \text{и} \quad g(x) = v(x) - f(x)$$

— неубывающие функции. Покажем, что каждая из этих двух функций абсолютно непрерывна. Достаточно проверить это для v. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем $\delta > 0$ для этого ε так, как это диктуется абсолютной непрерывностью функции f. Возьмем систему n интервалов (a_k, b_k) с суммарной длиной меньше, чем δ, и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} (v(b_k) - v(a_k)). \tag{5}$$

---

[1]) См. упражнение на с. 386.

Эта сумма представляет собой точную верхнюю грань чисел

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k}|f(x_{k,l})-f(x_{k,l-1})| \tag{6}$$

по всевозможным конечным разбиениям

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_{1,0}<x_{1,1}<x_{1,2}<\ldots<x_{1,m_1}=b_1,\\
a_2 &= x_{2,0}<x_{2,1}<x_{2,2}<\ldots<x_{2,m_2}=b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n &= x_{n,0}<x_{n,1}<x_{n,2}<\ldots<x_{n,m_n}=b_n
\end{aligned}$$

интервалов (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n). Так как сумма длин всех интервалов $(x_{k,l-1}, x_{k,l})$, по которым берется сумма (6), не превосходит $\delta>0$, то каждая из сумм (6) не больше, чем ε. Следовательно, и сумма (5), — их точная верхняя грань, — не больше, чем ε.

Следующие две теоремы устанавливают тесную связь между понятием абсолютной непрерывности и неопределенным интегралом Лебега.

Теорема 2. *Функция*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

представляющая собой неопределенный интеграл суммируемой функции, абсолютно непрерывна.

Доказательство. Если $\{(a_k, b_k)\}$ — какая-либо система непересекающихся интервалов, то

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k}f(t)\,dt\right|\leqslant\sum_{k=1}^{k}\int_{a_k}^{b_k}|f(t)|dt=$$

$$=\int\limits_{\bigcup\limits_k(a_k,\ b_k)}|f(t)|\,dt;$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега последнее выражение стремится к нулю, когда суммарная длина интервалов (a_k, b_k) стремится к нулю.

Теорема 3 (Лебег). *Производная $f = F'$ абсолютно непрерывной функции, заданной на отрезке $[a, b]$, суммируема на этом отрезке и для каждого x $(a \leqslant x \leqslant b)$*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Теоремы 2 и 3 показывают, что абсолютно непрерывные функции, и только они, восстанавливаются с точностью до постоянного слагаемого по своей производной с помощью операции интегрирования.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если производная абсолютно непрерывной монотонно неубывающей функции f равна 0 почти всюду, то эта функция — постоянная.*

Доказательство леммы. Пусть f задана на $[a, b]$. Так как f — непрерывная монотонная функция, то ее область значений есть отрезок $[f(a), f(b)]$. Покажем, что длина этого отрезка равна нулю, если $f'(x) = 0$ почти всюду. Тем самым лемма будет доказана. Разобьем множество точек отрезка $[a, b]$ на два класса: множество E тех точек, в которых $f'(x) = 0$, и Z — его дополнение. По условию леммы $\mu(Z) = 0$. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$, найдем то $\delta > 0$, которое отвечает этому ε в силу абсолютной непрерывности функции f, и заключим Z в открытое множество, мера которого меньше δ (это возможно, поскольку $\mu(Z) = 0$). Иначе говоря, Z покрывается конечной или счетной системой интервалов (a_k, b_k), сумма длин которых меньше δ. В соответствии с выбором δ получаем

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Следовательно, вся система интервалов (a_k, b_k) (а тем более, и заключенное в их сумме множество Z) переводится функцией f в множество, мера которого меньше ε. Таким образом, $\mu(f(Z)) = 0$.

Рассмотрим теперь множество $E = [a, b] \setminus Z$. Пусть $x_0 \in E$. Тогда, поскольку $f'(x_0) = 0$, для всех x, достаточно близких к x_0, выполнено неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \varepsilon,$$

т. е. (мы считаем для определенности, что $x > x_0$)

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon(x - x_0)$$

или

$$\varepsilon x_0 - f(x_0) < \varepsilon x - f(x);$$

таким образом, x_0 есть точка, невидимая справа для функции $g(x) = \varepsilon x - f(x)$. Следовательно, по лемме Ф. Рисса, множество E содержится в конечной или счетной системе непересекающихся интервалов (α_k, β_k), в концах которых выполняются условия

$$\varepsilon\beta_k - f(\beta_k) \geqslant \varepsilon\alpha_k - f(\alpha_k),$$

т. е.

$$f(\beta_k) - f(\alpha_k) \leqslant \varepsilon(\beta_k - \alpha_k),$$

откуда

$$\sum_k (f(\beta_k) - f(\alpha_k)) \leqslant \varepsilon \sum_k (\beta_k - \alpha_k) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Иначе говоря, множество E переводится функцией f в множество, покрывающееся системой интервалов, сумма длин которых меньше $\varepsilon(b - a)$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\mu(f(E)) = 0$.

Итак, и $f(E)$ и $f(Z)$ имеют меру нуль. Но в сумме эти два множества составляют отрезок $[f(a), f(b)]$. Тем самым доказано, что длина этого отрезка есть нуль, т. е. что $f(x) = \text{const}$.

Теперь уже легко доказывается и сама теорема 3. Достаточно ограничиться случаем, когда функция $F(x)$ не убывает. В этом случае

$$\Phi(x) = F(x) - \int_a^x f(t)\,dt \tag{7}$$

представляет собой функцию, тоже монотонно неубывающую. Действительно, если $x'' > x'$, то по теореме 1

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = F(x'') - F(x') - \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geqslant 0.$$

Кроме того, Φ абсолютно непрерывна (как разность двух абсолютно непрерывных функций) и $\Phi'(x) = 0$ почти всюду (согласно теореме 1 § 3). Поэтому в силу леммы Φ есть константа. Положив в (7) $x = a$, получаем, что эта константа равна $F(a)$.

Теорема доказана.

Мы видели выше, что всякую функцию f с ограниченным изменением можно представить как сумму функции скачков H и непрерывной функции φ с ограниченным изменением (с. 386),

$$f = H + \varphi.$$

Рассмотрим теперь непрерывную, но не абсолютно непрерывную функцию с ограниченным изменением φ и положим

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi'(t)\,dt.$$

Разность

$$\chi = \varphi - \psi$$

представляет собой непрерывную функцию с ограниченным изменением. При этом

$$\frac{d}{dx}\chi(x) = \varphi'(x) - \frac{d}{dx}\int_a^x \varphi'(t)\,dt = 0$$

почти всюду.

Назовем непрерывную функцию с ограниченным изменением *сингулярной*, если ее производная равна нулю почти всюду. Мы можем теперь сформулировать следующий результат:

всякая функция с ограниченным изменением может быть представлена в виде суммы трех компонент

$$f = H + \psi + \chi \tag{8}$$

— функции скачков, абсолютно непрерывной функции и сингулярной функции.

Нетрудно показать, что каждое из слагаемых в разложении (8) определяется самой функцией f однозначно с точностью до константы. Если функции, входящие

в равенство (8), нормировать, потребовав обращения двух из них в нуль в точке $x = a$, то разложение (8) будет уже в точности единственным. Продифференцировав равенство (8), мы получим, что почти всюду

$$f'(x) = \psi'(x)$$

(поскольку H' и χ' равны нулю почти всюду). Следовательно, при интегрировании производной от функции с ограниченным изменением восстанавливается не сама эта функция, а только ее абсолютно непрерывная компонента. Две другие компоненты (функция скачков и сингулярная) при этом «бесследно исчезают».

Поучительно сравнить результаты этого параграфа с тем, что дает теория обобщенных функций. Как и в гл. IV, будем понимать под обобщенной функцией линейный непрерывный функционал над пространством K финитных бесконечно дифференцируемых функций. При этом обычной локально суммируемой функции f сопоставляется функционал, действующий на элементы $\varphi \in K$ по формуле $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Обобщенной производной от этого функционала служит функционал, ставящий в соответствие элементу $\varphi \in K$ число $(f', \varphi) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$. Так как в классе обобщенных функций уравнение $y' = 0$ имеет только обычные решения (константы), то всякая обобщенная функция с точностью до константы восстанавливается по своей производной. В частности, всякая локально суммируемая функция f с точностью до константы почти всюду восстанавливается по своей о б о б щ е н н о й п р о и з в о д н о й f'. Предположим теперь, что функция f почти всюду имеет производную, например, f — монотонная функция. Обозначим через $f_1 = df/dx$ обычную производную функции f. (Мы уже видели, что df/dx может равняться 0 почти всюду, хотя $f(x) \not\equiv \text{const}$!) Функция df/dx является локально суммируемой (мы предполагаем, что f монотонна) и, следовательно, мы можем сопоставить этой функции функционал (обобщенную функцию) $(f_1, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\,\varphi(x)\,dx$. Существенный факт состоит в том,

что *обобщенная функция* f_1, *вообще говоря, не совпадает с обобщенной функцией* f'. Например, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

то $f_1 = 0$, а $f' = \delta$ (см. пример 1 с. 238).

Теорема 3, собственно говоря, и означает, что среди всех функций с ограниченным изменением для абсолютно непрерывных функций (и только для них!) производная, понимаемая в обычном смысле, совпадает с обобщенной производной той же функции.

Здесь мы снова сталкиваемся с тем положением, о котором уже говорилось в § 4 гл. IV: для выполнимости основных операций анализа (в данном случае речь идет о восстановлении функции по ее производной) нужно или, оставаясь в рамках классических определений, ограничиться достаточно узким запасом функций (абсолютно непрерывными), или же, наоборот, существенно расширить понятие функции (расширив при этом и определение производной).

Упражнения. 1. Показать, что определение абсолютной непрерывности, сформулированное выше, равносильно следующему: f абсолютно непрерывна на $[a, b]$, если она каждое подмножество меры нуль этого отрезка переводит снова в множество меры нуль.

2. Найти обобщенную производную «канторовой лестницы».

3. Пусть f — функция с ограниченным изменением, f' — ее обобщенная производная и f_1 — функционал (обобщенная функция), определяемый «обычной» производной df/dx функции f. Доказать, что

а) если f абсолютно непрерывна, то $f' = f_1$;

б) если $f' = f_1$, то $f(x)$ эквивалентна абсолютно непрерывной функции, т. е. совпадает с такой функцией почти всюду. В частности, если $f' = f_1$ и f непрерывна, то и f абсолютно непрерывна.

§ 5. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона — Никодима

1. Заряды. Разложение Хана и разложение Жордана. Понятия и факты, изложенные в предыдущих параграфах для функций на прямой, распространяются в значительной степени и на функции, заданные на произвольном пространстве с мерой.

Пусть X — некоторое пространство с (конечной) мерой μ и f — суммируемая по μ функция на X. При этом f

будет суммируема на каждом измеримом подмножестве A множества X и, следовательно, интеграл

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu \tag{1}$$

(с фиксированной f) представляет собой функцию множества, определенную и σ-аддитивную на σ-алгебре $\mathfrak{S}_\mu$ всех измеримых множеств пространства X. Таким образом, для любого разложения

$$A = \bigcup_k A_k$$

измеримого множества A в конечную или счетную сумму попарно непересекающихся измеримых множеств выполнено равенство

$$\Phi(A) = \sum_k \Phi(A_k).$$

Иначе говоря, функция Φ, определенная равенством (1), обладает всеми свойствами σ-аддитивной меры, за исключением, быть может, неотрицательности. (При неотрицательной f неотрицательна и Φ.)

О п р е д е л е н и е 1. Произвольная (конечная) σ-аддитивная функция множества Φ, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств данного пространства X, называется *знакопеременной мерой*, или, короче, *зарядом*.

Понятие заряда служит естественным обобщением понятия σ-аддитивной меры и, как мы увидим ниже, сводится в определенном смысле к этому понятию.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что для любого (конечного) заряда Φ, заданного на σ-алгебре множеств $\mathfrak{S}$, существует такая константа c, что $|\Phi(A)| \leqslant c$ при всех $A \in \mathfrak{S}$.

Если рассматривается реальный электрический заряд, расположенный, скажем, на некоторой поверхности, то эту поверхность можно разделить на две области: несущую положительный заряд (т. е. такую, что любая ее часть зарежена положительно) и несущую отрицательный заряд. Математическим эквивалентом этого факта служит приводимая ниже теорема 1.

Введем предварительно следующую терминологию. Пусть Φ — заряд, определенный на σ-алгебре $\mathfrak{S}$ подмножеств пространства X. Множество $E \in \mathfrak{S}$ называется

отрицательным относительно Φ, если $\Phi(E \cap F) \leqslant 0$ для любого $F \in \mathfrak{S}$; аналогично E называется *положительным*, если $\Phi(E \cap F) \geqslant 0$ для всех $F \in \mathfrak{S}$.

Теорема 1. *Если Φ — заряд, определенный на X, то существует такое измеримое множество $A^- \subset X$, что A^- отрицательно и $A^+ = X \setminus A^-$ положительно* (относительно Φ).

Доказательство. Положим

$$a = \inf \Phi(A),$$

где нижняя грань берется по всем отрицательным множествам A. Пусть $\{A_n\}$ — такая последовательность отрицательных множеств, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(A_n) = a.$$

Тогда $A^- = \bigcup_n A_n$ представляет собой, как легко видеть, такое отрицательное множество, что

$$\Phi(A^-) = a.$$

Покажем, что A^- и есть искомое множество, т. е. покажем, что

$$A^+ = X \setminus A^-$$

положительно. Пусть это не так, т. е. пусть A^+ содержит такое измеримое подмножество C_0, что $\Phi(C_0) < 0$. При этом множество C_0 не может быть отрицательным, так как иначе мы присоединили бы его к A^- и получили бы отрицательное множество $\tilde{A}$, для которого

$$\Phi(\tilde{A}) < a,$$

что невозможно. Поэтому существует такое наименьшее целое число k_1, для которого в C_0 найдется подмножество C_1, удовлетворяющее условию

$$\Phi(C_1) \geqslant 1/k_1.$$

Разумеется, $C_1 \neq C_0$. Для множества $C_0 \setminus C_1$ можно повторить рассуждение, проведенное для C_0; мы получим множество C_2, удовлетворяющее условию

$$\Phi(C_2) \geqslant 1/k_2, \quad k_2 \geqslant k_1,$$

и т. д. Наконец, положим

$$F_0 = C_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Множество F_0 не пусто, так как $\Phi(C_0) < 0$, а $\Phi(C_i) > 0$ при $i \geqslant 1$. Из построения следует, что F_0 отрицательно. Поэтому, присоединив его к A^-, мы снова приходим к противоречию с определением a. Следовательно, для всех измеримых $E \subset X \setminus A^-$ имеем

$$\Phi(E) \geqslant 0,$$

т. е. $X \setminus A^-$ положительно.

Теорема доказана.

Разбиение пространства X на отрицательную часть A^- и положительную A^+ называется *разложением Хана*.

Разложение Хана, вообще говоря, не единственно, однако если

$$X = A_1^- \cup A_1^+ \quad \text{и} \quad X = A_2^- \cup A_2^+$$

— два таких разложения, то для всякого $E \in \mathfrak{S}$

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-) \quad \text{и} \quad \Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+). \tag{2}$$

Действительно,

$$E \cap (A_1^- \setminus A_2^-) \subset E \cap A_1^-, \tag{3}$$

откуда следует, что $\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) \leqslant 0$. В то же время

$$E \cap (A_1^- \setminus A_2^-) \subset E \cap A_2^+, \tag{4}$$

откуда $\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) \geqslant 0$. Таким образом, $\Phi(E \cap (A_1^- \setminus A_2^-)) = 0$. Аналогично получаем $\Phi(E \cap (A_2^- \setminus A_1^-)) = 0$. Отсюда следует, что

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-).$$

Точно так же доказывается и второе из равенств (2).

Таким образом, на $\mathfrak{S}$ заряд Φ однозначно определяет две неотрицательные функции множества, а именно:

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+),$$
$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-),$$

называемые соответственно *верхней вариацией* и *нижней вариацией* заряда Φ. При этом, очевидно,

1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$,

2) Φ^+ и Φ^- представляют собой неотрицательные σ-аддитивные функции множества, т. е. меры.

Мерой будет, очевидно, и функция $|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$; она называется *полной вариацией* заряда Φ, а представление Φ в виде разности верхней и нижней вариаций называется *разложением Жордана* этого заряда Φ.

Замечание. Мы рассматривали сейчас конечные заряды, т. е. такие функции Φ, значения которых ограничены как сверху, так и снизу (см. упражнение на с. 401). При этом Φ^+ и Φ^- — конечные меры. Сказанное выше можно обобщить на заряды, ограниченные лишь с одной стороны, т. е. такие, для которых хотя бы одна из величин $\sup \Phi(A)$ и $\inf \Phi(A)$ конечна.

2. Основные типы зарядов. Пусть μ — некоторая σ-аддитивная мера, определенная в пространстве X на некоторой σ-алгебре $\mathfrak{S}$. Множества, входящие в $\mathfrak{S}$, мы будем называть *измеримыми*. Введем следующие понятия.

Мы скажем, что заряд Φ, определенный на множествах $E \in \mathfrak{S}$, *сосредоточен на измеримом множестве* A_0, если $\Phi(E) = 0$ для каждого $E \subset X \setminus A_0$. Множество A_0 называется при этом *носителем* заряда Φ.

Заряд Φ называется *непрерывным*, если $\Phi(E) = 0$ для любого одноточечного множества E. Заряд Φ называется *дискретным*, если он сосредоточен на некотором конечном или счетном множестве. Иными словами, дискретность заряда означает существование такого конечного или счетного множества точек $c_1, \ldots, c_n, \ldots$, что для каждого $E \subset X$

$$\Phi(E) = \sum_{c_k \in E} \Phi(c_k).$$

Заряд Φ называется *абсолютно непрерывным* (относительно данной меры μ), если $\Phi(A) = 0$ для всякого измеримого A, для которого $\mu(A) = 0$.

Заряд Φ называется *сингулярным* (относительно меры μ), если он сосредоточен на некотором множестве нулевой μ-меры. Ясно, что если заряд одновременно абсолютно непрерывен и сингулярен относительно μ, то он нулевой.

3. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона — Никодима. Примером заряда, абсолютно непрерывного относительно данной меры μ, может служить интеграл

Лебега

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

от фиксированной суммируемой функции f, рассматриваемый как функция множества. Оказывается, что этим и исчерпываются все абсолютно непрерывные заряды. Иначе говоря, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Радон — Никодим). *Пусть μ — некоторая конечная σ-аддитивная мера, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{S}$ подмножеств из X, а Φ — заряд, определенный на той же σ-алгебре и абсолютно непрерывный относительно μ. Тогда существует такая суммируемая по μ функция f на X, что*

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu$$

для каждого измеримого A. Эта функция, называемая производной заряда Φ по мере μ, определяется однозначно, с точностью до μ-эквивалентности.

(Две функции называются μ-эквивалентными, если они совпадают почти всюду относительно меры μ).

Доказательство. Каждый заряд можно представить как разность двух неотрицательных (см. п. 1), при этом абсолютно непрерывный заряд представляется как разность абсолютно непрерывных. Поэтому доказательство теоремы достаточно провести для неотрицательных зарядов, т. е. для мер. Итак, пусть Φ — мера, абсолютно непрерывная относительно данной меры μ. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть мера Φ абсолютно непрерывна относительно μ и не равна нулю тождественно. Тогда существуют такое n и такое измеримое множество B, что $\mu(B) > 0$ и B положительно по отношению к заряду $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.*

Доказательство леммы. Пусть $X = A_n^- \cup A_n^+$ — разложение Хана, отвечающее заряду $\Phi - \frac{1}{n}\mu$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и пусть

$$A_0^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

Тогда

$$\Phi(A_0^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A_0^-) \text{ при всех } n,$$

т. е. $\Phi(A_0^-) = 0$ и, следовательно, $\Phi(A_0^+) \geqslant 0$, а значит, и $\mu(A_0^+) \geqslant 0$ (в силу абсолютной непрерывности Φ по μ). Поэтому найдется такое n, что $\mu(A_n^+) \geqslant 0$. Это n и множество $B = A_n^+$ удовлетворяют условиям леммы.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. Пусть K — множество функций f на X, обладающих следующими свойствами; f неотрицательны, интегрируемы по μ и $\int\limits_A f(x)\,d\mu \leqslant \Phi(A)$ для всякого измеримого A. Пусть

$$M = \sup\left\{\int\limits_X f(x)\,d\mu \text{ по всем } f \in K\right\}.$$

Возьмем последовательность функций $\{f_n\}$ из K такую, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,d\mu = M.$$

Положим

$$g_n(x) = \max(f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Покажем, что $g_n \in K$, т. е., что для всякого измеримого E

$$\int\limits_E g_n(x)\,d\mu \leqslant \Phi(E).$$

Действительно, E можно представить в виде $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, где E_k не пересекаются и $g_n(x) = f_k(x)$ на E_k; поэтому

$$\int\limits_E g_n(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{E_k} f_k(x)\,d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n}\Phi(E_k) = \Phi(E).$$

Положим

$$f(x) = \sup\{f_n(x)\}.$$

Ясно, что при этом $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ и, следовательно, по теореме Б. Леви,

$$\int\limits_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X g_n(x)\,d\mu = M.$$

Покажем теперь, что

$$\Phi(E) - \int_E f(x)\,d\mu = 0.$$

По построению, функция множества

$$\lambda(E) = \Phi(E) - \int_E f(x)\,d\mu$$

неотрицательна и обладает всеми свойствами меры. Кроме того, она абсолютно непрерывна относительно μ. Если $\lambda \not\equiv 0$, то в силу леммы найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такое B, $\mu(B) > 0$, что

$$\varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant \lambda(E \cap B)$$

для любого измеримого E. Тогда, положив $h(x) = f(x) + \varepsilon\chi_B(x)$, где χ_B — индикатор множества B, мы получили бы для любого измеримого E

$$\int_E h(x)\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(E \cap B) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E \setminus B} f(x)\,d\mu + \Phi(E \cap B) \leqslant \Phi(E).$$

Это означало бы, что функция h принадлежит определенному выше множеству K. Но в то же время

$$\int_X h(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu + \varepsilon\mu(B) > M,$$

а это противоречит определению M. Итак, существование такой функции f, что

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\,d\mu,$$

доказано. Покажем ее единственность. Если для всех $A \in \mathfrak{S}$

$$\Phi(A) = \int_A f_1(x)\,d\mu = \int_A f_2(x)\,d\mu,$$

то при любом n для множеств

$$A_n = \{x:\ f_2(x) - f_1(x) > 1/n\}$$

имеем

$$\mu(A_n) \leqslant n \int_{A_n} (f_1(x) - f_2(x))\, d\mu = 0.$$

Аналогично, для $B_m = \{x\colon f_1(x) - f_2(x) \geqslant 1/m\}$ имеем

$$\mu(B_m) = 0.$$

Так как

$$\{x\colon f_1(x) \neq f_2(x)\} = \left(\bigcup_n A_n\right) \cup \left(\bigcup_m B_m\right),$$

то

$$\mu\{x\colon f_1(x) \neq f_2(x)\} = 0,$$

т. е. $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду. Доказательство закончено.

Замечание. Теорема Радона — Никодима представляет собой, очевидно, естественное обобщение теоремы Лебега о том, что абсолютно непрерывная функция есть интеграл от своей производной. Однако, в то время как при рассмотрении функций на прямой у нас есть эффективный способ нахождения производной — вычисление предела отношения Δf к Δx, теорема Радона — Никодима лишь устанавливает существование производной $d\Phi/d\mu$ абсолютно непрерывного заряда Φ по мере μ, но не дает способа для ее вычисления. Такой способ можно указать, но мы не будем на этом останавливаться. В общих чертах он состоит в вычислении предела отношения $\Phi(A)/\mu(A)$ по некоторой системе множеств, «стягивающихся» в определенном смысле к данной точке. Детально эти вопросы рассмотрены, например, в [53].

§ 6. Интеграл Стилтьеса

1. Меры Стилтьеса. В § 1 предыдущей главы, говоря о построении меры Лебега на прямой, мы уже упоминали о следующей конструкции. Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана монотонно неубывающая функция F, которую мы для определенности будем считать непрерывной слева. Определив меры всех отрезков, интервалов и по-

луинтервалов, принадлежащих основному отрезку $[a, b]$, равенствами

$$\begin{aligned} m(\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha), \\ m(\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha + 0), \\ m[\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha), \end{aligned} \tag{1}$$

мы можем затем распространить эту меру с помощью лебеговой процедуры продолжения меры на некоторую σ-алгебру $\mathfrak{a}_F$, содержащую все открытые и все замкнутые (а значит, и все борелевские) подмножества отрезка $[a, b]$. Меру μ_F, полученную с помощью такого построения, называют *мерой Лебега — Стилтьеса*, отвечающей функции F, а саму функцию F называют *производящей функцией* этой меры [1]).

Рассмотрим некоторые частные случаи мер Лебега — Стилтьеса.

1. Пусть F — функция скачков, $x_1, x_2, \ldots$ — ее точки разрыва, а $h_1, h_2, \ldots$ — величины ее скачков в этих точках. Тогда мера μ_F, отвечающая этой функции, устроена следующим образом: все подмножества отрезка $[a, b]$ измеримы и мера множества A равна

$$\mu_F(A) = \sum_{x_i \in A} h_i. \tag{2}$$

Действительно, из определения меры Лебега — Стилтьеса сразу же видно, что мера каждой точки x_i равна h_i, а мера дополнения множества $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ равна нулю. Равенство (2) для любого $A \subset [a, b]$ вытекает отсюда в силу σ-аддитивности меры μ_F. Мера μ_F, построенная по какой-либо функции скачков, называется *дискретной* мерой.

2. Пусть F — абсолютно непрерывная неубывающая функция на $[a, b]$ и $f = F'$ — ее производная. Тогда соответствующая мера μ_F заведомо определена на всех измеримых по Лебегу подмножествах отрезков $[a, b]$, причем для каждого такого множества A

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\, dx. \tag{3}$$

[1]) Если монотонно неубывающая функция F не непрерывна слева, то по ней тоже можно определить меру, внеся в формулы (1) очевидные изменения; например, надо положить $m[\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha - 0)$ и т. д.

Действительно, в силу теоремы Лебега для каждого полуинтервала $[\alpha, \beta)$

$$\mu_F[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Поскольку лебегово продолжение всякой σ-аддитивной меры однозначно определяется своими значениями на исходном полукольце, отсюда следует равенство (3) для всех измеримых по Лебегу $A \subset [a, b]$. Мера μ_F, отвечающая абсолютно непрерывной функции F, называется *абсолютно непрерывной* мерой.

3. Если F — сингулярная непрерывная функция, то отвечающая ей мера μ_F целиком сосредоточена на том множестве лебеговой меры нуль, на котором F' отлична от нуля или не существует. Сама мера μ_F называется при этом *сингулярной* мерой.

Ясно, что если $F = F_1 + F_2$, то $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$; поэтому из разложимости монотонной функции в сумму функции скачков, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент следует, что *всякую меру Лебега — Стилтьеса можно представить в виде суммы дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент.* Разложение монотонной функции на три составляющие определяется с точностью до постоянных слагаемых. Поэтому разложение каждой меры Лебега — Стилтьеса на дискретную, абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты о д н о з н а ч н о.

Сказанное выше относится к мерам Лебега — Стилтьеса на о т р е з к е. Если теперь F — ограниченная (сверху и снизу) монотонно неубывающая функция на всей прямой, то, определив меру любого отрезка, интервала и полуинтервала на прямой с помощью формул, аналогичных (1), мы получим конечную меру на всей прямой, которую мы тоже будем называть *мерой Лебега — Стилтьеса.* В частности, мера всей прямой при этом будет равна

$$F(\infty) - F(-\infty),$$

где

$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x), \qquad F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

(существование пределов следует из монотонности и ограниченности F).

Понятие меры Лебега — Стилтьеса на самом деле исчерпывает все меры (т. е. все конечные σ-аддитивные неотрицательные функции множеств) на прямой. Действительно, пусть μ — любая из таких мер. Положив

$$F(x) = \mu(-\infty, x),$$

мы получим монотонную функцию, такую, что отвечающая ей мера Лебега — Стилтьеса совпадает с исходной мерой μ. Таким образом, термин «меры Лебега — Стилтьеса» на самом деле не выделяет какого-либо специального класса мер на прямой, а указывает лишь на определенный способ построения таких мер — по заданной производящей функции.

2. Интеграл Лебега — Стилтьеса. Пусть μ_F — мера на отрезке $[a, b]$, порожденная монотонной функцией F. Для этой меры обычным образом определяется класс суммируемых функций и вводится понятие интеграла Лебега

$$\int_a^b f(x)\, d\mu_F.$$

Такой интеграл, взятый по мере μ_F, отвечающей функции F, называется *интегралом Лебега — Стилтьеса* и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\, dF(x).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если F — функция скачков (т. е. если μ_F — дискретная мера), то интеграл $\int_a^b f(x)\, dF(x)$ сводится, очевидно, к сумме $\sum_i f(x_i)\, h_i$, где x_i — точки разрыва функции F, а h_i — скачки F в точках x_i.

2. Если F — абсолютно непрерывная функция, то интеграл Лебега — Стилтьеса $\int_a^b f(x)\, dF(x)$ равняется $\int_a^b f(x)\, F'(x)\, dx$, т. е. интегралу от $f(x)\, F'(x)$, взятому по обычной лебеговой мере. Действительно, если $f(x) =$

$=\text{const}$ на некотором измеримом множестве $A \subset [a, b]$ и $f(x) = 0$ вне A, то равенство

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx \tag{4}$$

следует из (3). В силу σ-аддитивности интегралов равенство (4) распространяется и на простые функции, суммируемые по мере μ_F. Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность простых функций, равномерно сходящаяся к f. Можно при этом считать, что последовательность $\{f_n\}$ неубывающая. Тогда $\{f_n(x)\,F'(x)\}$ — неубывающая последовательность, почти всюду сходящаяся к $f(x)\,F'(x)$, и в силу теоремы Б. Леви, в равенстве

$$\int_a^b f_n(x)\,dF(x) = \int_a^b f_n(x)\,F'(x)\,dx$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$.

Из сказанного ясно, что если F есть сумма функции скачков и абсолютно непрерывной функции, то интеграл Лебега — Стилтьеса по мере μ_F сводится к ряду (или конечной сумме) и интегралу по обычной мере Лебега. Если же F содержит и с и н г у л я р н у ю компоненту, то такое сведение н е в о з м о ж н о.

Понятие интеграла Лебега — Стилтьеса можно естественным образом расширить, перейдя от монотонных функций к произвольным функциям с ограниченным изменением. Пусть Φ — такая функция. Представим ее в виде разности двух монотонных функций

$$\Phi = v - g,$$

где v — полное изменение функции Φ на отрезке $[a, x]$. Введем теперь интеграл Лебега — Стилтьеса по Φ, положив, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,dv(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Нетрудно проверить, что если Φ представлена каким-либо иным способом как разность двух монотонных функций, скажем,

$$\Phi = w - h,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dv(x) - \int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dw(x) - \int_a^b f(x)\,dh(x),$$

т. е. для вычисления интеграла Лебега — Стилтьеса по данной функции Φ можно пользоваться любым представлением этой функции в виде разности двух монотонных.

3. Некоторые применения интеграла Лебега — Стилтьеса в теории вероятностей. Интеграл Лебега — Стилтьеса находит применение как в анализе, так и во многих прикладных вопросах. В частности, это понятие широко используется в теории вероятностей. Напомним, что *функцией распределения* случайной величины ξ называется функция F, определяемая для каждого x равенством

$$F(x) = P(\xi < x),$$

т. е. $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее x. Очевидно, каждая функция распределения монотонно неубывает, непрерывна слева и удовлетворяет условиям

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Обратно, каждую такую функцию можно считать функцией распределения некоторой случайной величины.

Существенными характеристиками случайной величины являются ее математическое ожидание

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) \tag{5}$$

и дисперсия

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\,dF(x). \tag{6}$$

Среди случайных величин выделяют обычно так называемые дискретные и непрерывные случайные величины. Случайная величина называется *дискретной*, если она может принимать лишь некоторое конечное или счетное число значений

$$x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

(например, число вызовов на телефонной станции за некоторый промежуток времени есть дискретная случайная величина).

Если $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ — вероятности, с которыми величина ξ принимает значения $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, то функцией распределения ξ служит, очевидно, функция скачков. Для нее интегралы (5) и (6) сводятся соответственно к суммам

$$M\xi = \sum_i x_i p_i,$$

$$D\xi = \sum_i (x_i - a)^2 p_i, \quad a = M\xi.$$

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если ее функция распределения F абсолютно непрерывна. Производная F' этой функции распределения называется *плотностью распределения вероятностей* случайной величины ξ. В соответствии со сказанным в предыдущем пункте, для непрерывной случайной величины стилтьесовские интегралы, выражающие ее математическое ожидание и дисперсию, сводятся к интегралам по обычной лебеговой мере:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x)\,dx,$$

где $p = F'$ — плотность распределения вероятностей для ξ и $a = M\xi$.

В элементарных курсах теории вероятностей ограничиваются обычно рассмотрением дискретных и непрерывных случайных величин, которые в основном только и встречаются в прикладных вопросах. Однако, вообще говоря, функция распределения случайной величины может содержать и сингулярную компоненту, так что не всякую случайную величину можно представить как комбинацию дискретной и непрерывной.

Пусть ξ — случайная величина, F — ее функция распределения и $\eta = \varphi(\xi)$ — другая случайная величина, представляющая собой борелевскую функцию от ξ. Математическое ожидание $M\eta$ величины η можно, по определению, записать как

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,d\Phi(x),$$

где Φ — функция распределения для η. Существенно, однако, что если φ суммируема по мере, порождаемой на прямой функцией F,

то математическое ожидание величины η можно записать и через функцию распределения F величины ξ, а именно:

$$M\eta = M\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x).$$

Действительно, функция $y = \varphi(x)$ определяет отображение прямой ($-\infty < x < \infty$) с заданной на ней мерой μ_F (порожденной F) в прямую ($-\infty < y < \infty$) с мерой μ_Φ, в которую μ_F переводится отображением $y = \varphi(x)$. Но из результатов гл. V следует, что если (X, μ) и (Y, ν) — два пространства с мерой, φ — сохраняющее меру (т. е. такое, что $\nu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$) отображение, переводящее (X, μ) в (Y, ν), а f — суммируемая функция на (Y, ν), то

$$\int_Y f(y)\, d\nu = \int_X f(\varphi(x))\, d\mu$$

(замена переменных в интеграле Лебега). Положив здесь $f(y) = y$ и $\mu = \mu_F$, $\nu = \mu$, мы и получим требуемое равенство. Таким образом, для вычисления математического ожидания (а также, конечно, и дисперсии) ф у н к ц и и от величины ξ достаточно знать лишь функцию распределения самой величины ξ.

4. Интеграл Римана — Стилтьеса. Наряду с интегралом Лебега — Стилтьеса, рассмотренным выше и представляющим собой фактически разность лебеговых интегралов от данной функции f по двум мерам, заданным на прямой, можно определить еще и так называемый интеграл Римана — Стилтьеса. Он вводится как предел интегральных сумм, аналогичных обычным интегральным суммам Римана.

Пусть снова Φ — некоторая непрерывная слева функция с ограниченным изменением, заданная на полуинтервале $[a, b)$ и f — произвольная функция на этом же полуинтервале. Рассмотрим некоторое разбиение [1])

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

полуинтервала $[a, b)$ на элементы $[x_{i-1}, x_i)$ и, выбрав в каждом из них произвольную точку ξ_i, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})] \qquad (7)$$

---

[1]) Поскольку в интеграле Стилтьеса вклад отдельных точек может быть отличен от нуля, элементы разбиения не должны иметь общих точек. Поэтому мы везде берем здесь полуинтервалы.

(под $\Phi(x_n)$ при этом понимается $\Phi(b-0)$). Если при $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$ эти суммы стремятся к некоторому пределу (не зависящему ни от способа дробления промежутка $[a, b)$, ни от выбора точек ξ_i, в каждом из элементов разбиения), то этот предел называется *интегралом Римана — Стилтьеса* от функции f по функции Φ по $[a, b)$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x). \tag{8}$$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то ее интеграл Римана — Стилтьеса* (8) *существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега — Стилтьеса.*

Доказательство. Сумму (7) можно рассматривать как интеграл Лебега — Стилтьеса от ступенчатой функции

$$f_n(x) = f(\xi_i) \text{ при } x_{i-1} \leqslant x < x_i.$$

При измельчении разбиения промежутка $[a, b)$ последовательность таких функций равномерно сходится к f. Поэтому предел этих сумм существует и представляет собой интеграл Лебега — Стилтьеса от предельной функции f (теорема о предельном переходе под знаком интеграла). Вместе с тем именно этот предел мы и назвали интегралом Римана — Стилтьеса (8).

Установим некоторые элементарные свойства интеграла Римана — Стилтьеса.

1. *Справедлива оценка* (теорема о среднем)

$$\left| \int_a^b f(x)\, d\Phi(x) \right| \leqslant \max |f(x)|\, V_a^b[\Phi] \tag{9}$$

($V_a^b[\Phi]$ — *полное изменение функции* Φ *на* $[a, b]$).

Действительно, при любом разбиении промежутка $[a, b)$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \cdot |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \max |f(x)| \cdot \sum_{i=1}^n |\Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})| \leqslant \max |f(x)|\, V_a^b[\Phi].$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, мы и получим оценку (9). При $\Phi(x) = x$ она переходит в известную оценку

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant (b-a)\max|f(x)|$$

для интеграла Римана.

2. *Если* $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,d\Phi_1(x) + \int_a^b f(x)\,d\Phi_2(x).$$

Действительно, при всяком разбиении промежутка $[a, b)$ соответствующее равенство выполнено для интегральных сумм, следовательно, оно сохраняется и в пределе, т. е. для интегралов.

Замечание 1. Мы определили интеграл Римана — Стилтьеса (8), считая, что функция $\Phi(x)$ непрерывна слева. Однако определение этого интеграла как предела сумм (7) сохраняет, очевидно, смысл и для любой функции $\Phi(x)$ с ограниченным изменением.

Замечание 2. Все сказанное об интеграле Римана — Стилтьеса по конечному промежутку легко переносится на случай, когда интеграл берется по всей прямой или по полупрямой.

Кроме того, мы определили интеграл Стилтьеса по полуинтервалу $[a, b)$. Аналогично можно определить интеграл по $(a, b]$, а также интегралы по $[a, b]$ и (a, b). В случае интеграла Стилтьеса, в отличие от обычного римана интеграла, значения интеграла по интервалу (a, b), отрезку $[a, b]$ и полуинтервалам $(a, b]$ и $[a, b)$, вообще говоря, не совпадают между собой. Например, если a — точка разрыва функции Φ, то интеграл по $[a, b]$ равен интегралу, взятому по $(a, b]$ плюс член вида $f(a)\,h$, где $h = \Phi(a+0) - \Phi(a)$.

Приведенные свойства 1 и 2 выполнены для любой функции f, для которой входящие в их формулировки выражения имеют смысл. Если предположить, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то соответствующий интеграл обладает еще следующими существенными свойствами (при этом интеграл можно понимать как интеграл по отрезку $[a, b]$ или по любому из полуинтервалов $(a, b]$ и $[a, b)$).

3. *Если* Φ_1 *и* Φ_2 *— две функции с ограниченным изменением на* $[a, b]$, *совпадающие всюду, кроме конечного или счетного числа внутренних точек этого промежутка, то*

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x)$$

для любой непрерывной на $[a, b]$ *функции* f.

Для доказательства рассмотрим сперва случай, когда $\Phi_2 \equiv 0$, т. е. установим справедливость следующего утверждения.

3′. *Если* ψ *— функция с ограниченным изменением, отличная от нуля лишь в конечном или счетном числе точек, лежащих внутри* (a, b), *то*

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = 0$$

для любой непрерывной на $[a, b]$ *функции* f.

Действительно, это очевидно для функции, отличной от нуля в одной точке x_0 (если брать сколь угодно мелкие разбиения промежутка $[a, b]$, не включая x_0 в число точек деления, то будут получаться интегральные суммы, равные нулю), следовательно, по аддитивности это верно и для любой функции, отличной от нуля в конечном числе точек. Пусть теперь ψ отлична от нуля в точках $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ и $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — ее значения в этих точках. Поскольку ψ имеет ограниченное изменение, то $\sum_n |y_n| < \infty$. Выберем номер N так, что $\sum_{n>N} |y_n| < \varepsilon$, и представим ψ в виде суммы

$$\psi = \psi_N + \tilde{\psi},$$

где ψ_N принимает значения $y_1, \ldots, y_N$ в точках $r_1, \ldots, r_N$ и равна 0 во всех остальных, а $\tilde{\psi}$ отлична от 0 только в точках $r_{N+1}, r_{N+2}, \ldots$ В силу свойства 2

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi_N(x) + \int_a^b f(x)\, d\tilde{\psi}(x).$$

Первый из этих интегралов по уже доказанному равен нулю, а второй, по свойству 1, допускает оценку

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\tilde{\psi}(x)\right| < \max|f(x)|\,2\varepsilon$$

(поскольку, очевидно, $V_a^b[\tilde{\psi}] = 2\sum_{n>N}|y_n| < 2\varepsilon$). В силу произвольности ε отсюда вытекает наше утверждение.

Теперь для доказательства свойства 3 рассмотрим разность $\psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Она отлична от нуля лишь в конечном или счетном числе точек, принадлежащих (a, b). Остается применить 2 и 3′. В частности, поскольку функция с ограниченным изменением имеет не более чем счетное число точек разрыва, получаем следующее свойство.

4. *Если функция f непрерывна, то интеграл Римана — Стилтьеса $\int_a^b f(x)\,d\Phi(x)$ не зависит от значений, принимаемых функцией Φ в ее точках разрыва, лежащих внутри (a, b).*

Поскольку интеграл Римана — Стилтьеса от непрерывной функции совпадает с соответствующим интегралом Лебега — Стилтьеса, для интеграла Римана — Стилтьеса от непрерывной функции $f(x)$ справедливы равенства

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \sum_i f(x_i)\,h_i,$$

если Φ — функция скачков, и

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) = \int_a^b f(x)\,\Phi'(x)\,dx, \tag{10}$$

если Φ — абсолютно непрерывная функция. Если при этом Φ' интегрируема по Риману, то интеграл в (10) справа можно понимать в римановом смысле.

5. Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса. В гл. V мы доказали ряд теорем о предельном переходе под знаком интеграла Лебега. При этом вопрос ставился следующим образом: даны последовательность функций $\{f_n\}$ и интегралы от них по некоторой фиксированной мере; нас интересует возможность предельного перехода под знаком интеграла. Однако применительно к инте-

гралу Стилтьеса интересна и другая постановка вопроса: дана последовательность функций с ограниченным изменением $\{\Phi_n\}$. При каких условиях для фиксированной функции f под знаком интеграла

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x)$$

возможен предельный переход?

Здесь имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (первая теорема Хелли). *Пусть функции Φ_n с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ сходятся в каждой точке этого отрезка к некоторой функции Φ, причем полные изменения функций Φ_n ограничены в совокупности:*

$$V_a^b[\Phi_n] \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда предельная функция Φ тоже имеет ограниченное изменение и для любой непрерывной функции f справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x). \tag{11}$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что полное изменение предельной функции Φ не превосходит той же константы C, которой ограничены все $V_a^b[\Phi_n]$. Действительно, при любом разбиении отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m = b$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})| \leqslant C,$$

следовательно,

$$V_a^b[\Phi] \leqslant C.$$

Покажем теперь, что соотношение (11) выполнено в том случае, если f — ступенчатая функция. Пусть f принимает значения h_k на полуинтервалах $[x_{k-1}, x_k)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_n(x) = \sum_k h_k [\Phi_n(x_k) - \Phi_n(x_{k-1})],$$

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi(x) = \sum_k h_k [\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})].$$

Ясно, что первое из этих выражений при $n \to \infty$ переходит во второе.

Пусть теперь f — непрерывная функция и ε — произвольное положительное число. Выберем ступенчатую функцию f_ε так, что

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon/(3C).$$

Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) - \int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^b f(x)\,d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi(x) - \int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi_n(x)\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\,d\Phi_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)\right|.$$

В силу теоремы о среднем для интеграла Стилтьеса, первое и третье слагаемые здесь меньше, чем $\varepsilon/3$, а второе — меньше $\varepsilon/3$ при всех достаточно больших n. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда вытекает утверждение теоремы.

Замечание. Эта теорема переносится и на тот случай, когда в интегралах

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi_n(x)$$

один или оба предела бесконечны. При этом, однако, функция f должна на бесконечности стремиться к некоторому конечному пределу (это позволяет равномерно аппроксимировать ее на всем бесконечном промежутке ступенчатыми функциями, принимающими лишь конечное число значений).

Если первая теорема Хелли устанавливает условия, при которых в интеграле Римана — Стилтьеса можно переходить к пределу по некоторой последовательности $\{\Phi_n\}$ функций с ограниченным изменением, то вторая выясняет, когда можно гарантировать само существова-

ние последовательности, удовлетворяющей условиям первой.

Теорема 3 (вторая теорема Хелли). *Из всякого бесконечного множества M функций Φ, заданных на некотором отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям*

$$\max|\Phi(x)| \leqslant C, \quad V_a^b[\Phi] \leqslant K, \tag{12}$$

(C и K — постоянные, одни и те же для всех $\Phi \in M$), можно выбрать последовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Доказательство. Достаточно доказать эту теорему для монотонных функций. Действительно, пусть

$$\Phi = v - g,$$

где $v(x)$ — полное изменение функции Φ на отрезке $[a, x]$. Тогда функции v, отвечающие всем $\Phi \in M$, удовлетворяют неравенствам

$$\max|v(x)| \leqslant K, \qquad V_a^b[v] = V_a^b[\Phi] \leqslant K,$$

т. е. удовлетворяют условиям теоремы, и монотонны. Считая, что для монотонных функций теорема доказана, выберем последовательность $\{\Phi_n\}$ из M так, чтобы для нее v_n сходились к некоторому пределу v. Далее, функции

$$g_n = v_n - \Phi_n$$

тоже монотонны и удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому из $\{\Phi_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$ так, что g_{n_k} сходятся к некоторому пределу g. Но тогда

$$\Phi_{n_k}(x) \to \Phi(x) = v(x) - g(x).$$

Итак, приведем доказательство теоремы для семейства M монотонных функций. Пусть $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ — все рациональные точки отрезка $[a, b]$. В силу (12) числа $\Phi(r_1)$ (где Φ пробегает все M) образуют ограниченное множество, поэтому найдется последовательность $\{\Phi_n^{(1)}\}$, сходящаяся в точке r_1. Далее, из нее можно выбрать подпоследовательность $\{\Phi_n^{(2)}\}$, сходящуюся в точке r_2 (и, конечно, в r_1). Из $\{\Phi_n^{(2)}\}$ выберем подпоследовательность, сходящуюся в точке r_3, и т. д. Диагональная последова-

тельность $\{\Phi_n^{(n)}\}$ будет, очевидно, сходиться во всех рациональных точках отрезка $[a, b]$. Ее предел есть неубывающая функция Φ, определенная пока лишь в точках $r_1, \ldots, r_n, \ldots$ Доопределим ее в остальных точках отрезка $[a, b]$, положив для иррациональных x $\Phi(x) = \lim_{r \to x-0} \Phi(r)$ (r рациональны). Покажем, что полученная таким образом неубывающая функция Φ во всех точках непрерывности служит пределом последовательности $\{\Phi_n^{(n)}\}$. Пусть x^* — одна из таких точек. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что

$$|\Phi(x^*) - \Phi(x)| < \varepsilon/6, \text{ как только } |x^* - x| < \delta. \quad (13)$$

Выберем рациональные точки r' и r'' так, что $r' < x^* < r''$ и $r' > x^* - \delta$, $r'' < x^* + \delta$. Пусть теперь n_0 настолько велико, что при $n > n_0$ выполнены неравенства

$$|\Phi_n(r') - \Phi(r')| < \varepsilon/6, \quad |\Phi_n(r'') - \Phi(r'')| < \varepsilon/6. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$|\Phi_n(r') - \Phi_n(r'')| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Так как функция Φ_n неубывающая, то $\Phi_n(r') \leqslant \Phi_n(x^*) \leqslant \Phi_n(r'')$. Поэтому

$$|\Phi(x^*) - \Phi_n(x^*)| \leqslant |\Phi(x^*) - \Phi(r')| + |\Phi(r') - \Phi_n(r')| + |\Phi_n(r') - \Phi_n(x^*)| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{4\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

и это и значит, что $\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x^*) = \Phi(x^*)$.

Итак, мы построили последовательность функций из M, сходящуюся к предельной функции Φ всюду, кроме, быть может, точек разрыва функции Φ. Так как множество таких точек не более чем счетно, то, применив снова диагональный процесс, можно из последовательности $\{\Phi_n\}$ выделить подпоследовательность, сходящуюся и в этих точках, т. е. всюду на $[a, b]$.

6. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространстве непрерывных функций. Выше мы уже указывали некоторые применения интеграла Стилтьеса. Сейчас мы рассмотрим еще одну задачу, связанную с этим

понятием, а именно, выясним общий вид линейного функционала в пространстве $C[a, b]$.

Теорема 4 (Ф. Рисс). *Всякий линейный непрерывный функционал F в пространстве $C[a, b]$ представим в виде*

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x), \tag{15}$$

где Φ — некоторая функция с ограниченным изменением [1]). *При этом*

$$\|F\| = V_a^b[\Phi].$$

Доказательство. Пространство $C[a, b]$ можно рассматривать как подпространство пространства $M[a, b]$ всех ограниченных функций на этом отрезке, с той же нормой

$$\|f\| = \sup |f(x)|,$$

что и в $C[a, b]$. Пусть F — непрерывный линейный функционал на $C[a, b]$. По теореме Хана — Банаха его можно продолжить, с сохранением нормы, с $C[a, b]$ на все $M[a, b]$. В частности, такой продолженный функционал будет определен на всех функциях вида

$$h_a(x) \equiv 0, \quad h_\tau(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \leqslant \tau, \\ 0 \text{ при } x > \tau, \text{ если } \tau > a. \end{cases} \tag{16}$$

Положим

$$\Phi(\tau) = F(h_\tau) \tag{17}$$

и покажем, что функция Φ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$. Действительно, возьмем произвольное разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \tag{18}$$

этого отрезка и положим

$$\alpha_k = \operatorname{sgn}(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})), \quad k = 1, \ldots, n.$$

---

[1]) Здесь имеется в виду интеграл по отрезку $[a, b]$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F(h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) = F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}})\right) \leqslant$$

$$\leqslant \|F\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}}) \right\|.$$

Но функция $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (h_{x_k} - h_{x_{k-1}})$ принимает лишь значения ± 1 и 0. Следовательно, ее норма равна 1. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leqslant \|F\|.$$

Поскольку это верно для любого разбиения отрезка $[a, b]$, то

$$V_a^b[\Phi] \leqslant \|F\|.$$

Итак, мы построили по функционалу F функцию Φ, имеющую ограниченное изменение. Покажем, что именно с помощью этой функции функционал F записывается в виде интеграла Стилтьеса (15).

Пусть f — произвольная непрерывная функция на $[a, b]$. Зададим положительное ε и выберем $\delta > 0$ так, что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ при $|x'' - x'| < \delta$. Выберем теперь разбиение (18) так, чтобы длина каждой из частей была меньше δ, и рассмотрим ступенчатую функцию f_ε:

$$f_\varepsilon(x) = f(x_k) \text{ при } x_{k-1} < x \leqslant x_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$
$$f_\varepsilon(a) = f(a).$$

Ее, очевидно, можно записать в виде

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) [h_{x_k}(x) - h_{x_{k-1}}(x)],$$

где h_τ — функция, определенная равенством (16). Ясно, что $|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ при всех x $(a \leqslant x \leqslant b)$, т. е.

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon.$$

Найдем значение функционала F на элементе f_ε. В силу линейности этого функционала и определения функции h_τ оно равно

$$F(f_\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[F(h_{x_k}) - F(h_{x_{k-1}})] = \\ = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})],$$

т. е. представляет собой интегральную сумму для интеграла

$$\int_a^b f(x)\,d\Phi(x).$$

Поэтому при достаточно мелком разбиении отрезка $[a, b]$

$$\left| F(f_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\,d\Phi(x) \right| < \varepsilon.$$

Но в то же время

$$|F(f) - F(f_\varepsilon)| \leqslant \|F\| \cdot \|f - f_\varepsilon\| \leqslant \|F\| \cdot \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left| F(f) - \int_a^b f(x)\,d\Phi(x) \right| < \varepsilon\,(1 + \|F\|),$$

откуда в силу произвольности ε получаем равенство

$$F(f) = \int_a^b f(x)\,d\Phi(x).$$

Мы показали, что полное изменение функции Φ, определяемой формулой (17), удовлетворяет неравенству

$$V_a^b[\Phi] \leqslant \|F\|. \tag{19}$$

С другой стороны, из теоремы о среднем для интеграла Римана — Стилтьеса сразу следует, что

$$\|F\| \leqslant V_a^b[\Phi]. \tag{20}$$

Сравнивая (19) и (20), получаем равенство

$$\|F\| = V_a^b[\Phi].$$

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Ясно, что взяв произвольную функцию с ограниченным изменением Φ на отрезке $[a, b]$ и положив

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x),$$

мы получим линейный функционал на пространстве $C[a, b]$. При этом две функции, Φ_1 и Φ_2, совпадающие на $[a, b]$ всюду, за исключением не более чем счетного множества внутренних точек этого отрезка, определяют один и тот же линейный функционал; обратно, пусть Φ_1 и Φ_2 определяют один и тот же функционал на $C[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, d\Phi_1(x) = \int_a^b f(x)\, d\Phi_2(x)$$

для каждой непрерывной функции f. Отсюда легко следует, что $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{const}$ во всех точках непрерывности функции $\Phi_1 - \Phi_2$, т. е. всюду, кроме, быть может, конечного или счетного множества точек.

Таким образом, каждому непрерывному линейному функционалу на $C[a, b]$ отвечает класс функций с ограниченным изменением на $[a, b]$, причем Φ_1 и Φ_2 принадлежат одному классу в том и только том случае, если их разность отличается от постоянной не более чем в счетном числе внутренних точек отрезка $[a, b]$. В каждом таком классе можно выбрать одну и только одну функцию, равную нулю в точке a и непрерывную справа всюду на полуинтервале $(a, b]$. Функции, удовлетворяющие этим условиям, образуют в пространстве всех функций с ограниченным изменением на $[a, b]$ замкнутое линейное подпространство, которое мы обозначим $V^0[a, b]$. Заметим, наконец, что для любого функционала F на $C[a, b]$ соответствующая функция $\Phi(\tau)$, определяемая равенством (17), есть функция именно из $V^0[a, b]$. Так как для таких $\Phi(\tau)$ было установлено равенство $\|F\| = V_a^b[\Phi]$, то теореме 4 можно придать следующий вид.

Теорема 4′. *Существует изоморфное (т. е. взаимно однозначное, линейное и изометричное) соответствие между пространствами* $(C[a, b])^*$ *и* $V^0[a, b]$, *устанавливаемое равенством*

$$F(f) = \int_a^b f(x)\, d\Phi(x).$$

Такое представление линейного функционала с помощью функции из $V^0[a, b]$ мы будем называть *каноническим*.

Из этой теоремы легко получить следующую теорему о каноническом представлении линейного функционала на пространстве $C^1[a, b]$ непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, играющую существенную роль в вариационных задачах.

Теорема 5. *Всякий линейный функционал в пространстве* $C^1[a, b]$ *можно представить одним и только одним способом в виде*

$$F(f) = \alpha f(a) + \int_a^b f'(x)\, d\Phi(x), \tag{21}$$

где α *— число и* $\Phi \in V^0[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим в $C^1[a, b]$ подпространство $\mathring{C}^1[a, b]$ функций, удовлетворяющих условию $f(a) = 0$, и оператор $A = d/dx$, переводящий это подпространство во все пространство $C[a, b]$. Пусть F — линейный функционал на $C^1[a, b]$. Рассмотрим его сначала только на подпространстве $\mathring{C}^1[a, b]$. Теперь к оператору $A\colon \mathring{C}^1[a, b] \to C[a, b]$ и функционалу F: $\mathring{C}_1^0[a, b] \to R$ можно применить лемму о тройке (гл. IV, § 5, п. 4). В силу этой леммы найдется такое линейное отображение:

$$\psi\colon C[a, b] \to R,$$

что для каждой функции $g \in \mathring{C}^1[a, b]$

$$F(g) = \psi(Ag). \tag{22}$$

Каждая функция $f \in C^1[a, b]$ может быть представлена в виде

$$f(x) = f(a) + g(x), \quad g \in \mathring{C}^1[a, b].$$

Поэтому

$$F(f) = F(f(a)) + F(g). \tag{23}$$

В силу теоремы Рисса, равенства (22) и определения оператора A имеем;

$$F(g) = \psi(Ag) = \int_a^b g'(x)\, d\Phi(x),$$

или

$$F(g) = \int_a^b f'(x)\, d\Phi(x), \tag{24}$$

поскольку $f'(x) = g'(x)$. Пусть α — значение функционала F на функции, тождественно равной единице. Тогда из (23) и (24) окончательно получаем представление (21).

ГЛАВА VII

ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Один из важнейших классов нормированных пространств составляют пространства суммируемых функций, в первую очередь пространство всех суммируемых функций L_1 и пространство L_2 функций с суммируемым квадратом. Сейчас мы рассмотрим основные свойства этих пространств. Содержание этой главы опирается, с одной стороны, на общие свойства метрических и линейных нормированных пространств, изложенные в гл. II—IV, а с другой, — на введенное в гл. V понятие интеграла Лебега.

§ 1. Пространство L_1

1. Определение и основные свойства пространства L_1. Пусть X — некоторое пространство с мерой μ; при этом мера самого X может быть конечной или бесконечной. Будем считать меру μ полной (т. е. любое подмножество любого множества меры нуль измеримо). Рассмотрим совокупность всех функций f, суммируемых на X. Поскольку линейная комбинация суммируемых функций суммируема, эта совокупность, с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа, образует линейное пространство. Это пространство мы обозначим $L_1(X, \mu)$ или, короче, просто L_1. Введем в L_1 норму, положив [1])

$$\|f\| = \int |f(x)|\, d\mu. \tag{1}$$

Ясно, что при этом

$$\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|,$$
$$\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

[1]) Здесь и далее символ $\int$ будет означать интегрирование по всему пространству X.

Однако для того чтобы выполнялось и последнее свойство нормы, а именно,

$$\|f\| > 0, \text{ если } f \neq 0,$$

нужно считать, что функции, эквивалентные друг другу на X, не различаются, а считаются за один и тот же элемент пространства L_1. В частности, нулевой элемент в L_1 — это совокупность всех функций, равных нулю почти всюду. При этом выражение (1) будет обладать всеми свойствами нормы. Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 1. *Пространством* L_1 называется нормированное пространство, элементами которого служат классы эквивалентных между собой суммируемых функций; сложение элементов в L_1 и умножение их на числа определяются как обычное сложение и умножение функций [1]), а норма задается формулой

$$\|f\| = \int |f(x)|\, d\mu.$$

В L_1, как и во всяком нормированном пространстве, с помощью формулы

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

вводится расстояние. Сходимость последовательности суммируемых функций в смысле этого расстояния называют *сходимостью в среднем*. Пространство L_1 можно считать состоящим из комплексных функций (комплексное L_1) или из одних только действительных (действительное L_1). Содержание данного параграфа относится к обоим этим случаям.

Весьма важен для многих вопросов анализа следующий факт.

Теорема 1. *Пространство* L_1 *полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в L_1, т. е.

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

---

[1]) Точнее: каждый элемент в L_1 — это класс эквивалентных между собой суммируемых функций; чтобы сложить два таких класса, надо взять в них по представителю и объявить суммой класс, содержащий сумму выбранных представителей. Ясно, что результат не зависит от произвола в выборе представителей. Аналогично — и для умножения элемента из L_1 на число.

Тогда можно найти такую возрастающую последовательность индексов $\{n_k\}$, что

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| = \int |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|\, d\mu < 1/2^k.$$

Из этого неравенства и теоремы Б. Леви вытекает, что ряд

$$|f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + \dots$$

сходится почти всюду на X. Но тогда и ряд

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + \dots$$

сходится почти всюду на X к некоторой функции

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Таким образом, фундаментальная последовательность в L_1 содержит подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

Покажем теперь, что подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к той же функции f и в среднем. В силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших k и l имеем

$$\int |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)|\, d\mu < \varepsilon.$$

Согласно теореме Фату в этом неравенстве можно перейти к пределу под знаком интеграла при $l \to \infty$. Получаем

$$\int |f_{n_k}(x) - f(x)|\, d\mu \leqslant \varepsilon,$$

откуда следует, что $f \in L_1$ и что $f_{n_k} \to f$. Но из того, что фундаментальная последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пределу, следует, что и сама она сходится к тому же пределу.

Теорема доказана.

2. Всюду плотные множества в L_1. Для всякой функции f, суммируемой на X, и любого $\varepsilon > 0$ существует такая простая суммируемая функция $\varphi(x)$, что

$$\int |f(x) - \varphi(x)|\, d\mu < \varepsilon.$$

Далее, поскольку для простой суммируемой функции, принимающей значения y_1, y_2, ... на множествах E_1, E_2, ..., интеграл определяется как сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(E_n)$$

(при условии его абсолютной сходимости), ясно, что всякую простую суммируемую функцию можно представить как предел (в среднем) последовательности простых функций, принимающих лишь конечное число значений. Итак, *в пространстве L_1 всюду плотны функции, каждая из которых принимает лишь конечное число значений* (т. е. представляет собой конечную линейную комбинацию индикаторов).

Пусть R — метрическое пространство с введенной в нем мерой, удовлетворяющей такому условию (выполненному для меры Лебега в евклидовом пространстве и во многих других практически интересных случаях): *все открытые и все замкнутые множества в R измеримы, и для любого измеримого множества $M \subset R$* и любого $\varepsilon > 0$ найдется [1]) такое открытое $G \supset M$, что

$$\mu(G \setminus M) < \varepsilon. \tag{2}$$

Тогда верна следующая теорема:

Теорема 2. *Множество всех непрерывных функций всюду плотно в $L_1(R, \mu)$.*

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно доказать, что всякая простая функция, принимающая конечное число значений, является пределом, в смысле сходимости в среднем, последовательности непрерывных функций. Далее, так как всякая суммируемая простая функция, принимающая конечное число значений, есть линейная комбинация индикаторов $\chi_M(x)$ измеримых множеств конечной меры, то достаточно провести доказательство для этих последних. Пусть M — измеримое множество в метрическом пространстве R и $\mu(M) < \infty$. Тогда из условия (2) сразу следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F_M и открытое множество G_M такие, что

$$F_M \subset M \subset G_M \quad \text{и} \quad \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

[1]) Ср. упражнение на с. 434.

Определим теперь функцию $\varphi_\varepsilon(x)$, положив [1])

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, R \setminus G_M)}{\rho(x, R \setminus G_M) + \rho(x, F_M)}.$$

Эта функция равна 0 при $x \in R \setminus G_M$ и равна 1 при $x \in F_M$. Она непрерывна, так как каждая из функций $\rho(x, F_M)$ и $\rho(x, R \setminus G_M)$ непрерывна и их сумма нигде не обращается в 0. Функция $|\chi_M - \varphi_\varepsilon|$ не превосходит 1 на $G_M \setminus F_M$ и равна 0 вне этого множества. Следовательно,

$$\int |\chi_M(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, d\mu < \varepsilon,$$

откуда и вытекает утверждение теоремы.

Ясно, что пространство $L_1(X, \mu)$ зависит и от выбора пространства X, и от выбора меры μ в нем. Например, если мера μ сосредоточена в конечном числе точек, то $L_1(X, \mu)$ будет просто конечномерным пространством. В анализе основную роль играют пространства L_1 бесконечной размерности, но содержащие счетное всюду плотное подмножество. Для того чтобы охарактеризовать такие пространства L_1, введем еще одно понятие, относящееся, собственно, к общей теории меры.

Определение 2. Мера μ называется *мерой со счетным базисом*, если существует такая счетная система $\mathscr{A} = \{A_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ измеримых подмножеств пространства X (*счетный базис* меры μ), что для всякого измеримого $M \subset X$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_k \in \mathscr{A}$, что

$$\mu(M \triangle A_k) < \varepsilon.$$

В частности, мера μ имеет счетный базис, если ее можно представить как лебегово продолжение меры m, определенной на некотором счетном полукольце $\mathfrak{S}$. В самом деле, в этом случае кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ (очевидно, счетное) и представляет собой искомый базис. Отсюда видно, например, что счетный базис имеет мера Лебега на отрезке, поскольку для нее за исходное полукольцо можно принять совокупность полуинтервалов с рациональными концами.

Произведение $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ двух мер со счетными базисами также обладает счетным базисом, ибо конечные

[1]) $\rho(x, A)$ означает расстояние от точки x до множества A.

суммы произведений элементов из базиса меры μ_1 на элементы из базиса меры μ_2 образуют, как легко проверить, базис меры $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$. Поэтому мера Лебега на плоскости (а также и в n-мерном пространстве) имеет счетный базис.

Пусть

$$A_1^*, \ldots, A_n^*, \ldots \tag{3}$$

есть счетный базис меры μ. Легко видеть, что, расширяя систему множеств (3), можно образовать новый счетный базис этой меры

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots, \tag{4}$$

замкнутый по отношению к операциям вычитания и взятия конечных сумм и пересечений, т. е. являющийся кольцом.

Теорема 3. *Если мера* μ *имеет счетный базис, то в* $L_1(X, \mu)$ *существует счетное всюду плотное множество функций.*

Доказательство. Покажем, что счетное всюду плотное множество в $L_1(X, \mu)$ образуют конечные суммы

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x), \tag{5}$$

где c_k — рациональные числа, а f_k — индикаторы элементов счетного базиса меры μ.

Счетность такого множества очевидна; покажем, что оно всюду плотно в $L_1(X, \mu)$. Как мы уже показали, множество ступенчатых функций, принимающих лишь конечное число значений, всюду плотно в L_1. Так как любую такую функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать функцией того же вида, но принимающей лишь рациональные значения, достаточно показать, что любую ступенчатую функцию f, принимающую значения

$$y_1, \ldots, y_n \text{ (все } y_i \text{ рациональны)}$$

на множествах

$$E_1, \ldots, E_n \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X, \; E_i \cap E_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \right),$$

можно сколь угодно точно аппроксимировать в смысле метрики L_1 функциями вида (5). Согласно сделанному

замечанию можно без ограничения общности предполагать, что базис меры μ является кольцом.

По определению счетного базиса меры μ, при любом $\varepsilon > 0$ в нем существуют такие множества $A_1, \ldots, A_n$, что

$$\mu(E_k \triangle A_k) < \varepsilon.$$

Положим

$$A_k' = A_k \setminus \bigcup_{i<k} A_i, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и определим f^*, положив

$$f^*(x) = \begin{cases} y_k & \text{при} \quad x \in A_k', \\ 0 & \text{при} \quad x \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i'. \end{cases}$$

Легко видеть, что при достаточно малом ε мера

$$\mu\{x: f(x) \neq f^*(x)\}$$

сколь угодно мала и, следовательно, интеграл

$$\int |f(x) - f^*(x)|\, d\mu \leqslant (2 \max |y_k|)\, \mu\{x: f(x) \neq f^*(x)\}$$

сколь угодно мал при достаточно малом ε.

В силу сделанных нами предположений относительно базиса меры μ, функция f^* есть функция вида (5).

Теорема доказана.

Для того частного случая, когда X есть отрезок числовой прямой, а μ — мера Лебега, счетное всюду плотное множество в L_1 можно получить и проще, например, взяв множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Оно всюду плотно (даже в смысле равномерной сходимости) в множестве непрерывных функций, а эти последние образуют всюду плотное множество в $L_1(X, \mu)$.

§ 2. Пространство L_2

1. Определение и основные свойства. Пространство L_1 представляет собой, как мы видели, полное нормированное (т. е. банахово) линейное пространство. Однако оно не является евклидовым: определенную в нем норму нельзя задать с помощью какого-либо скалярного произ-

ведения. Это вытекает из «теоремы о параллелограмме», установленной в п. 8 § 4 гл. III. Например, для интегрируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций $f \equiv 1$, $g = \sin x$ соотношение

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2+\|g\|^2)$$

в L_1 не выполняется.

Функциональное пространство, не только нормированное, но и евклидово, можно построить, взяв совокупность функций с интегрируемым квадратом. Введем соответствующие определения. Будем сперва рассматривать действительные функции f, определенные на некотором пространстве X, с заданной на нем мерой μ. Все функции предполагаются измеримыми и определенными на X почти всюду. Эквивалентные между собой функции не различаются.

Определение 1. Функция f называется *функцией с интегрируемым квадратом на* X, если интеграл

$$\int f^2(x)\, d\mu$$

существует (конечен). Совокупность всех таких функций мы обозначим $L_2(X, \mu)$ или, короче, L_2.

Установим основные свойства функций с интегрируемым квадратом.

1. *Произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция.*

Это непосредственно вытекает из неравенства

$$|f(x)\,g(x)| \leqslant \frac{1}{2}[f^2(x)+g^2(x)]$$

и свойств интеграла Лебега.

Следствие. *Всякая функция f с интегрируемым квадратом на пространстве с конечной мерой интегрируема.*

В самом деле, достаточно, положив $g(x) \equiv 1$, воспользоваться свойством 1.

2. *Сумма двух функций из L_2 также принадлежит L_2.*

Действительно,

$$(f(x)+g(x))^2 \leqslant f^2(x) + 2|f(x)\,g(x)| + g^2(x);$$

в силу свойства 1 каждая из трех функций, стоящих справа, интегрируема.

3. *Если* $f \in L_2$ *и* α *— произвольное число, то* $\alpha f \in L_2$. Действительно, если $f \in L_2$, то

$$\int [\alpha f(x)]^2 d\mu = \alpha^2 \int f^2(x)\, d\mu < \infty.$$

Свойства 2 и 3 означают, что линейные комбинации функций из L_2 снова принадлежат L_2; при этом, очевидно, сложение функций из L_2 и умножение их на числа удовлетворяют всем условиям, перечисленным в определении линейного пространства (гл. III, § 1). Таким образом, *совокупность* L_2 *функций с интегрируемым квадратом есть линейное пространство.*

Определим теперь в L_2 скалярное произведение, положив

$$(f,\ g) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu.$$

Ясно, что все требования, входящие в определение скалярного произведения (см. § 4, гл. III), а именно:

1) $(f,\ g) = (g,\ f)$,
2) $(f_1 + f_2,\ g) = (f_1,\ g) + (f_2,\ g)$,
3) $(\alpha f,\ g) = \alpha\,(f,\ g)$,
4) $(f,\ f) > 0$, если $f \neq 0$,

при этом выполнены. В частности, выполнение условия 4) обеспечивается тем, что мы условились не различать эквивалентные между собой функции (за нулевой элемент, таким образом, принимается совокупность всех функций на X, эквивалентных $f \equiv 0$).

Итак, введя для функций с интегрируемым квадратом операции сложения и умножения на число, а также скалярное произведение, мы приходим к следующему окончательному определению.

Определение 2. *Евклидовым пространством* L_2 называется линейное пространство, состоящее из классов эквивалентных между собой функций с интегрируемым квадратом, в котором скалярное произведение определено формулой

$$(f,\ g) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu.$$

В L_2, как и во всяком евклидовом пространстве, выполнены неравенство Коши — Буняковского и неравенство треугольника, которые в данном случае имеют вид

$$\left(\int f(x)\,g(x)\,d\mu\right)^2 \leqslant \int f^2(x)\,d\mu \int g^2(x)\,d\mu,$$

$$\sqrt{\int (f(x)+g(x))^2\,d\mu} \leqslant \sqrt{\int f^2(x)\,d\mu} + \sqrt{\int g^2(x)\,d\mu}.$$

В частности, при $\mu(X) < \infty$ и $g(x) \equiv 1$ неравенство Коши — Буняковского превращается в следующую полезную оценку:

$$\left(\int f(x)\,d\mu\right)^2 \leqslant \mu(X) \int f^2(x)\,d\mu. \tag{1}$$

Норма в L_2 определяется формулой

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int f^2(x)\,d\mu},$$

а расстояние между элементами f и g — формулой

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int (f(x) - g(x))^2\,d\mu}.$$

Величину

$$\int (f(x) - g(x))^2\,d\mu = \|f - g\|^2$$

называют также *средним квадратичным уклонением* функций f и g друг от друга.

Сходимость функциональной последовательности в смысле метрики пространства L_2 называется *сходимостью в среднем квадратичном*. Если нет опасности спутать эту сходимость со сходимостью в L_1, определенной в предыдущем параграфе, мы и здесь будем пользоваться более коротким термином «сходимость в среднем».

Теорема 1. *Пространство $L_2(X, \mu)$ при $\mu(X) < \infty$ полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в L_2, т. е.

$$\|f_n - f_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Тогда в силу оценки (1) получаем

$$\int |f_n(x) - f_m(x)|\,d\mu \leqslant [\mu(X)]^{1/2} \left\{\int (f_n(x) - f_m(x))^2\,d\mu\right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\,[\mu(X)]^{1/2}, \tag{2}$$

т. е. последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и в метрике пространства L_1. Повторяя рассуждения, которые были проведены при доказательстве полноты пространства L_1, выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду к некоторой функции f. В неравенстве

$$\int (f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x))^2 \, d\mu < \varepsilon,$$

справедливом для членов этой подпоследовательности при всех достаточно больших k и l, можно, используя теорему Фату, перейти к пределу при $l \to \infty$. Получим

$$\int (f_{n_k}(x) - f(x))^2 \, d\mu \leqslant \varepsilon,$$

откуда следует, что $f \in L_2$ и что $f_{n_k} \to f$. Для завершения доказательства остается, как и в теореме 1 § 1, воспользоваться тем, что, если фундаментальная последовательность содержит сходящуюся, то и сама она сходится к тому же пределу.

2. Случай бесконечной меры. Мы рассматривали только что функции с интегрируемым квадратом, определенные на некотором пространстве X конечной меры. При этом условие $\mu(X) < \infty$ использовалось довольно существенно. Именно, сначала мы прибегли к нему, доказывая, что всякая функция с суммируемым квадратом суммируема и в первой степени, а затем — при выводе неравенства (2), на которое опиралось доказательство полноты пространства L_2. Если рассматривать функции на множестве бесконечной меры (например, на всей прямой с лебеговой мерой на ней), то не всякая функция из L_2 будет содержаться в L_1. Например, функция $1/\sqrt{1+x^2}$ не интегрируема на всей прямой, а ее квадрат интегрируем. Далее, в случае $\mu(X) < \infty$ имеет место неравенство (1), означающее, что из сходимости последовательности функций в L_2 следует их сходимость в L_1. При $\mu(X) = \infty$ это тоже неверно: например, последовательность функций на прямой

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{при } |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{при } |x| > n \end{cases}$$

сходится к 0 в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ функций с суммируемым квадратом на прямой, но не сходится ни

к какому пределу в $L_1(-\infty, \infty)$. Однако *теорема о полноте пространства* L_2 *остается справедливой и при* $\mu(X) = \infty$ [1]).

Докажем это утверждение. Как и в п. 6 § 5 гл. V, где мы ввели понятие интеграла по множеству бесконечной меры, будем предполагать, что все пространство X можно представить как счетную сумму множеств конечной меры. Пусть

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad \mu(X_n) < \infty, \quad X_n \cap X_m = \varnothing \quad \text{при} \quad n \neq m$$

— такое представление и пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L_2(X, \mu)$. Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\int |f_k(x) - f_l(x)|^2 \, d\mu < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad k, l \geqslant N.$$

Введем обозначение

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad x \in X_n, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Тогда в силу свойства σ-аддитивности интеграла Лебега, имеем

$$\int |f_k(x) - f_l(x)|^2 \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f_l^{(n)}(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon.$$

Для каждого конечного M и подавно

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f_l^{(n)}(x)]^2 \, d\mu < \varepsilon. \tag{3}$$

Совокупность функций с интегрируемым квадратом на каждом X_n представляет собой полное пространство. Положив

$$f^{(n)}(x) = \lim_{l \to \infty} f_l^{(n)}(x)$$

---

[1]) Доказательство полноты пространства L_1, проведенное в § 1, не зависит, очевидно, от предположения конечности меры пространства X.

(где сходимость понимается как сходимость в пространстве $L_2(X_n, \mu)$), мы можем перейти к пределу при $l \to \infty$ в неравенстве (3). Получаем

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Так как это неравенство выполнено для всех M, то в нем можно перейти к пределу при $M \to \infty$. Таким образом, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_n} [f_k^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Положив

$$f(x) = f^{(n)}(x) \quad \text{при} \quad x \in X_n,$$

мы можем последнее неравенство переписать в виде

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2 d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает как принадлежность f к $L_2(X, \mu)$, так и сходимость последовательности $\{f_n\}$ к f.

Упражнение. Определим $L_p(X, \mu)$ как совокупность классов эквивалентных между собой функций, для которых $\int |f(x)|^p d\mu < \infty$, где $1 \leqslant p < \infty$. Доказать, что $L_p(X, \mu)$ является банаховым пространством относительно нормы $\|f\| = \left(\int |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p}$.

3. Всюду плотные множества в L_2. Теорема об изоморфизме. Итак, пространство $L_2(X, \mu)$ функций с интегрируемым квадратом есть полное евклидово пространство. За исключением вырожденных случаев, размерность этого пространства бесконечна. С точки зрения различных применений в анализе важно выяснить, когда пространство $L_2(X, \mu)$ сепарабельно, т. е. содержит счетное всюду плотное множество. В § 1 мы установили, что для пространства $L_1(X, \mu)$ сепарабельность вытекает из существования у меры μ счетного базиса. Нетрудно убедиться, что это условие гарантирует и сепарабельность $L_2(X, \mu)$. Действительно, каждую функцию из $L_2(X, \mu)$ можно приблизить, с любой точностью, функциями, каждая из которых равна 0 вне некоторого

множества конечной меры [1]). Далее, те же рассуждения, которые были проведены при доказательстве теоремы 3 § 1, показывают, что в совокупности таких функций можно выбрать счетное всюду плотное множество.

Итак, если мера μ имеет счетный базис, то пространство $L_2(X, \mu)$ есть полное сепарабельное евклидово пространство. Иначе говоря, оставляя в стороне тот случай, когда $L_2(X, \mu)$ имеет конечную размерность, мы получаем следующий результат: *если мера* μ *имеет счетный базис, то* $L_2(X, \mu)$ *есть сепарабельное гильбертово пространство.*

В силу теоремы об изоморфизме гильбертовых пространств, это означает, что все такие $L_2(X, \mu)$ изоморфны между собой. В частности, каждое такое $L_2(X, \mu)$ изоморфно пространству l_2 числовых последовательностей со сходящейся суммой квадратов. Последнее можно рассматривать как $L_2(X, \mu)$, когда X счетно, а μ определена на всех его подмножествах и равна 1 для каждой точки. *Ниже мы будем рассматривать только* $L_2(X, \mu)$, *отвечающие мерам со счетным базисом.* В случаях, когда это не может вызвать недоразумений, каждое такое пространство мы будем обозначать просто L_2.

Поскольку пространство L_2 представляет собой, как мы выяснили, реализацию гильбертова пространства, на L_2 можно перенести все те понятия и факты, которые были установлены в § 4 гл. III для абстрактного гильбертова пространства.

В частности, согласно теореме Рисса всякий линейный функционал в гильбертовом пространстве H записывается в виде скалярного произведения

$$F(h) = (h, a),$$

где a — фиксированный вектор из H. Поэтому *всякий линейный функционал в* L_2 *имеет вид*

$$F(f) = \int f(x)\, g(x)\, d\mu,$$

где g *— фиксированная функция с интегрируемым квадратом на* X.

4. Комплексное пространство L_2. Мы рассматривали сейчас действительное пространство L_2. Изложенные ре-

[1]) Если $\mu(X) < \infty$, то этот шаг отпадает.

зультаты легко переносятся на комплексный случай. Комплексная функция f, определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой μ, называется *функцией с интегрируемым квадратом*, если интеграл

$$\int_X |f(x)|^2 d\mu$$

конечен. Определив сложение таких функций и умножение их на числа обычным образом и введя скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu,$$

мы получим евклидово пространство, называемое *комплексным пространством* L_2. (При этом, как и в действительном случае, мы считаем эквивалентные между собой функции одним и тем же элементом пространства.) Это пространство полно, а если мера μ имеет счетный базис, то и сепарабельно. Таким образом (отбрасывая конечномерный случай), мы получаем, что *комплексное пространство* L_2, *отвечающее мере со счетным базисом, есть комплексное сепарабельное гильбертово пространство.* Все такие пространства изоморфны между собой, и для них справедливы результаты, изложенные в § 4 гл. III.

5. Сходимость в среднем квадратичном и ее связь с другими типами сходимости функциональных последовательностей. Введя в пространстве L_2 норму, мы определили тем самым для функций с интегрируемым квадратом следующее понятие сходимости:

$$f_n \to f,$$

если

$$\lim_{n\to\infty} \int [f_n(x) - f(x)]^2 d\mu = 0.$$

Мы назвали такую сходимость сходимостью в среднем квадратичном. Посмотрим, как такая сходимость связана с другими типами сходимости функциональных последовательностей. Предположим сначала, что мера пространства-«носителя» X конечна.

1. *Если последовательность* $\{f_n\}$ *функций из* $L_2(X, \mu)$ *сходится в метрике* $L_2(X, \mu)$, *то она сходится и в метрике* $L_1(X, \mu)$.

Действительно, в силу неравенства (2) имеем

$$\int |f_n(x) - f(x)|\, d\mu \leqslant \left[\mu(X) \int (f_n(x) - f(x))^2\, d\mu\right]^{1/2},$$

откуда и следует наше утверждение.

2. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то она сходится и в среднем квадратичном.*

Действительно, при каждом $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n имеем

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\int [f_n(x) - f(x)]^2\, d\mu < \varepsilon^2 \mu(X),$$

откуда вытекает наше утверждение.

3. *Если последовательность суммируемых функций $\{f_n\}$ сходится в среднем, то она сходится на X и по мере.*

Это утверждение сразу же следует из неравенства Чебышева (с. 344).

Отсюда и из теоремы 8 § 4 гл. V вытекает:

4. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся почти всюду.*

Заметим, что при доказательстве теоремы о полноте пространства L_1 мы уже установили этот факт, не опираясь на теорему 8 § 4 гл. V.

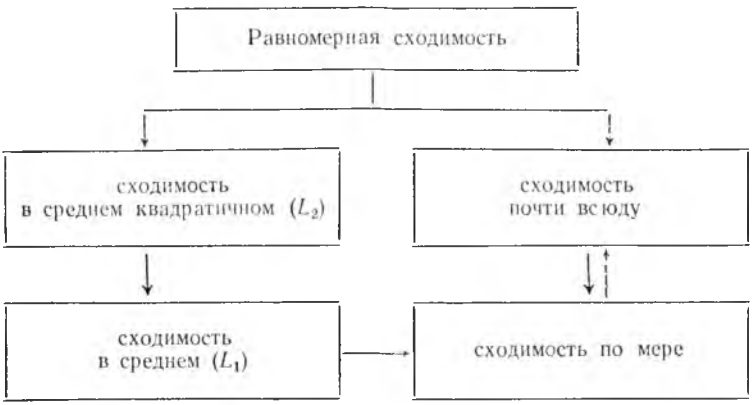
Нетрудно убедиться в том, что из сходимости некоторой последовательности в среднем (и даже в среднем квадратичном) не вытекает, вообще говоря, ее сходимость почти всюду. Действительно, последовательность $\{f_n\}$, построенная в п. 6 § 4 гл. V, сходится к $f \equiv 0$ в среднем (и даже в среднем квадратичном), но при этом, как мы видели, она не сходится к 0 ни в одной точке. Обратно, последовательность $\{f_n\}$ может сходиться почти всюду (и даже всюду) и не сходиться при этом в среднем. Рассмотрим, например, на отрезке $[0, 1]$ последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ при } x \in (0, 1/n], \\ 0 \text{ при остальных } x. \end{cases}$$

Очевидно, $f_n(x) \to 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Но в то же время

$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 1 \quad \text{при всех } n.$$

Связь между различными типами сходимости в случае $\mu(X) < \infty$ можно изобразить следующей схемой:



где пунктирная стрелка означает возможность выбора из последовательности, сходящейся по мере, подпоследовательности, сходящейся почти всюду.

В случае $\mu(X) = \infty$ (например, для функций на всей числовой прямой с мерой Лебега на ней) установленные выше связи уже не имеют места. Например, последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{n} & \text{при } |x| \leqslant n, \\ 0 & \text{при } |x| > n \end{cases}$$

сходится равномерно на всей прямой к функции $f \equiv 0$, однако она не сходится ни в среднем, ни в среднем квадратичном. Далее, при $\mu(X) = \infty$, как мы уже указывали, сходимость в среднем квадратичном (т. е. в L_2) не влечет за собой сходимости той же последовательности в среднем (т. е. в L_1).

Заметим в заключение, что из сходимости в среднем ни при $\mu(X) < \infty$, ни тем более при $\mu(X) = \infty$ не следует, вообще говоря, сходимость в среднем квадратичном.

§ 3. Ортогональные системы функций в L_2. Ряды по ортогональным системам

Общие теоремы, установленные в § 4 гл. III для евклидовых пространств, говорят нам, что в L_2 имеются полные ортогональные (в частности, ортогональные и нормированные) системы функций. Такие системы можно получить, например, применяя процесс ортогонализации, описанный там же, к той или иной полной системе. Если в L_2 выбрана некоторая полная ортогональная система $\{\varphi_n\}$, то, опять-таки в соответствии с общими результатами § 4 гл. III, каждый элемент $f \in L_2$ можно представить как сумму ряда

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$$

— ряда Фурье функции f по ортогональной системе $\{\varphi_n\}$. При этом коэффициенты c_n — коэффициенты Фурье функции f по системе φ_n — определяются формулами

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int f(x)\, \varphi_n(x)\, d\mu, \quad \|\varphi_n\|^2 = \int \varphi_n^2(x)\, d\mu.$$

В этом параграфе мы рассмотрим важнейшие примеры ортогональных систем в пространствах L_2 и отвечающие им разложения.

1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье. Рассмотрим пространство $L_2[-\pi, \pi]$ функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$ с обычной мерой Лебега на этом отрезке. В этом пространстве функции

$$1, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

образуют полную ортогональную систему, называемую *тригонометрической*. Ортогональность легко проверяется прямым вычислением, например, при $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \frac{n+m}{2} x + \cos \frac{n-m}{2} x \right] dx = 0$$

и т. д. Полнота системы (1) следует из теоремы Вейерштрасса об аппроксимации любой непрерывной периоди-

ческой функции тригонометрическими многочленами [1]). Система (1) не нормирована. Соответствующая нормированная система состоит из функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пусть f — функция из $L_2[-\pi, \pi]$; ее коэффициенты Фурье, отвечающие функциям 1, $\cos nx$, $\sin nx$, принято обозначать $a_0/2$, a_n и b_n. Таким образом, в соответствии с общими формулами для коэффициентов Фурье, имеем

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad \text{т. е.} \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Соответствующий ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

и для любой функции $f \in L_2$ сходится в среднем квадратичном именно к ней. Если

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— частичная сумма ряда Фурье, то среднее квадратичное уклонение S_n от f можно найти по формуле

$$\|f(x) - S_n(x)\|^2 = \|f\|^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right).$$

Среди всех тригонометрических многочленов

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

---

[1]) В § 2 гл. VIII мы докажем теорему Фейера, представляющую собой усиление теоремы Вейерштрасса. Тем самым будет дано и доказательство полноты тригонометрической системы (не опирающееся, конечно, на излагаемые здесь факты).

с данным n частичная сумма ряда Фурье S_n дает наилучшую (в метрике L_2) аппроксимацию функции f. Неравенство Бесселя для тригонометрической системы имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

но поскольку тригонометрическая система полна, на самом деле для любой функции из L_2 имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx.$$

Для любой функции $f \in L_2$ квадраты ее коэффициентов Фурье образуют сходящийся ряд. Обратно, если числа a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ таковы, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ сходится, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

тоже сходится (в L_2), а его сумма представляет собой функцию, имеющую a_0, a_n, b_n своими коэффициентами Фурье.

Все эти утверждения (непосредственно вытекающие из общих результатов § 4 гл. III) легко переносятся на функции, заданные на отрезке произвольной длины, скажем $[-l, l]$. Если f — функция с суммируемым квадратом на $[-l, l]$, то замена $x = \pi t/l$, т. е. $t = lx/\pi$, переводит $f(t)$ в функцию $f^*(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

В соответствии с этим

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ряд Фурье для функции f, заданной на отрезке длины $2l$, имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}.$$

Замечания. 1. Тригонометрические ряды были использованы французским математиком Ж. Фурье в его работах по математической физике, в первую очередь по теории распространения тепла. Впрочем, формулы для коэффициентов a_n и b_n встречаются уже у Эйлера. В дальнейшем теория тригонометрических рядов развивалась в работах Римана, Дирихле и др. Первоначально термины «ряд Фурье», «коэффициенты Фурье» и т. д. связывались именно с тригонометрической системой и лишь значительно позднее стали употребляться в общем смысле, описанном в § 4 гл. III (т. е. применительно к произвольной ортогональной системе в любом евклидовом пространстве).

2. Из полноты тригонометрической системы и общих теорем § 4 гл. III следует, что для любой $f\in L_2$ ее ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

сходится к данной функции f в среднем. Однако с точки зрения конкретных задач анализа важно установить условия, при которых этот ряд сходится к f в другом смысле, скажем, в каждой точке, или равномерно. Этот круг вопросов мы рассмотрим в следующей главе.

2. Тригонометрические системы на отрезке $[0, \pi]$. Функции

$$1,\quad \cos x,\quad \cos 2x,\ \ldots, \tag{2}$$

$$\sin x,\quad \sin 2x,\ \ldots \tag{3}$$

образуют в совокупности полную ортогональную систему на отрезке $[-\pi, \pi]$. Покажем, что каждая из двух систем (2) и (3) ортогональна и полна на отрезке $[0, \pi]$. Ортогональность проверяется прямым подсчетом. Докажем полноту системы (2). Пусть f — функция с интегрируемым квадратом на $[0, \pi]$. Доопределим ее на полуинтервале $[-\pi, 0)$ формулой

$$f(-x)=f(x)$$

и разложим ее в ряд Фурье по системе

$$1, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поскольку функция f, определенная теперь на $[-\pi, \pi]$, — четная, все коэффициенты при синусах равны у нее нулю. Это сразу видно из формулы для коэффициентов: для четной функции f при $n \geqslant 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx =$$

$$= -\int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = 0.$$

Иначе говоря, эту функцию на $[-\pi, \pi]$ (а тем более и на $[0, \pi]$) можно аппроксимировать в среднем квадратичном с любой точностью линейными комбинациями элементов системы (2). Отсюда следует полнота системы (2). Полнота системы (3) на $[0, \pi]$ доказывается аналогично, путем нечетного продолжения функции f, заданной на $[0, \pi]$, на полуинтервал $[-\pi, 0)$ по формуле

$$f(-x) = -f(x).$$

Полученная при таком продолжении функция на $[-\pi, \pi]$ нечетна и разлагается на этом отрезке по одним синусам.

3. **Ряд Фурье в комплексной форме.** Тригонометрический ряд можно записать компактно, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \quad \text{и} \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Внося эти выражения в ряд Фурье, получим

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где $c_0 = a_0/2$ и при $n \geqslant 1$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}. \tag{4}$$

Выражение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме*. Коэффициенты c_n этого ряда выражаются через a_n и b_n с помощью равенств (4); однако легко написать для них и прямые формулы. Действительно, как показывает непосредственное вычисление,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 2\pi & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Поэтому, умножая равенство

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{5}$$

на e^{-imx} ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) и интегрируя, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx = 2\pi c_m,$$

т. е.

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-imx}\, dx, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

Разложение (5) остается в силе и для комплексных функций с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$. Иначе говоря, функции e^{inx} образуют базис в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ комплексных функций с интегрируемым квадратом модуля на отрезке $[-\pi, \pi]$. При этом выражения (6) представляют собой скалярные произведения f на e^{inx} в этом комплексном пространстве.

Заменив функции e^{inx} на $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$, можно перенести все сказанное на пространство $L_2[-l, l]$ комплексных функций на отрезке произвольной длины $2l$.

4. Многочлены Лежандра. Линейные комбинации функций

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots \tag{7}$$

— это совокупность всех многочленов. Следовательно, система (7) полна в пространстве L_2 функций на произвольном отрезке [1]). Ортогонализируя систему (7) на отрезке $[-1, 1]$ по отношению к скалярному произведению

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,$$

мы получим полную ортогональную систему

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,$$

где Q_n — многочлен n-й степени. Покажем, что каждый из многочленов $Q_n(x)$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с многочленом

$$R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

В самом деле, во-первых, система $\{R_n\}$ ортогональна. Пусть $n \geqslant m$. Так как

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^n\big|_{x=-1} = \frac{d^k}{dx^k}(x^2 - 1)^n\big|_{x=1} = 0$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, то, интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{1} R_m(x)\, R_n(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(x^2 - 1)^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - 1)^n = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2 - 1)^m\right](x^2 - 1)^n\, dx. \tag{8}$$

---

[1]) Полнота системы многочленов в пространстве $L_2[a, b]$ функций с интегрируемым квадратом на произвольном отрезке $[a, b]$ вытекает из теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации любой непрерывной функции на отрезке многочленами. См. п. 2 § 2 гл. VIII.

Если $m < n$, то под знаком последнего интеграла стоит тождественный нуль, откуда следует ортогональность системы $\{R_n\}$.

Во-вторых, ясно, что многочлен R_n имеет степень n, т. е. каждый R_n лежит в подпространстве, порожденном $n+1$ первыми элементами системы (7). Таким образом, как система $\{R_n\}$, так и система $\{Q_n\}$ обладают следующими свойствами:

1) ортогональность,

2) n-й элемент системы принадлежит подпространству, порожденному элементами $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

Но этими двумя свойствами каждый элемент системы определяется однозначно с точностью до числового множителя (теорема 1 § 4 гл. III).

Найдем теперь нормирующие множители для $R_n(x)$. В случае $n = m$ равенство (8) дает

$$\int_{-1}^{1} R_n^2(x)\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\right](x^2-1)^n\,dx =$$

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}\ ^{1)}.$$

Иначе говоря, норма многочлена R_n равна $n!\,2^n\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$. Таким образом, система многочленов

$$\frac{1}{n!\,2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,R_n(x)$$

не только ортогональна, но и нормирована.

Обычно рассматриваются не эти нормированные многочлены, а многочлены, определяемые формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Их называют *многочленами Лежандра*, а саму эту формулу — *формулой Родрига*. Из проведенных выкладок следует, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

---

[1]) Последний интеграл можно вычислить элементарно, применяя рекуррентные формулы, или же путем сведения его к B-функции.

Приведем явные выражения пяти первых многочленов Лежандра:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$
$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$
$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}.$$

Разложение функции f на отрезке $[-1, 1]$ по многочленам Лежандра имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

где

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

5. Ортогональные системы в произведениях. Кратные ряды Фурье. Пусть на множествах X' и X'' определены меры μ' и μ''. Соответствующие пространства функций с интегрируемым квадратом будем обозначать L_2' и L_2''. В произведении

$$X = X' \times X''$$

рассмотрим меру

$$\mu = \mu' \otimes \mu''$$

и обозначим через L_2 отвечающее ей пространство функций с интегрируемым квадратом. Функции из L_2 будем записывать как функции двух переменных.

Теорема 1. *Если* $\{\varphi_m\}$ и $\{\psi_n\}$ — *полные ортонормальные системы соответственно в* L_2' *и в* L_2'', *то система всех произведений*

$$f_{mn}(x, y) = \varphi_m(x)\,\psi_n(y)$$

есть полная ортонормальная система в L_2.

Доказательство. В силу теоремы Фубини (замечание)

$$\int_X f_{mn}^2(x, y)\,d\mu = \int_{X'} \varphi_m^2(x) \left(\int_{X''} \psi_n^2(y)\,d\mu'' \right) d\mu' = 1.$$

Если $m \neq m_1$, то в силу той же теоремы

$$\int_X f_{mn}(x, y) f_{m_1 n_1}(x, y)\,d\mu =$$

$$= \int_{X''} \psi_n(y) \psi_{n_1}(y) \left(\int_{X'} \varphi_m(x) \varphi_{m_1}(x)\,d\mu' \right) d\mu'' = 0,$$

поскольку функция $f_{mn}(x, y) f_{m_1 n_1}(x, y)$ двух переменных суммируема на $X = X' \times X''$.

Если $m = m_1$, но $n \neq n_1$, то

$$\int_X f_{mn}(x, y) f_{m_1 n_1}(x, y)\,d\mu =$$

$$= \int_{X'} \varphi_m^2(x) \left(\int_{X''} \psi_n(y) \psi_{n_1}(y)\,d\mu'' \right) d\mu' = 0.$$

Докажем полноту системы $\{f_{mn}\}$. Допустим, что в L_2 существует функция f, ортогональная ко всем функциям f_{mn}. Положим

$$F_m(y) = \int_{X'} f(x, y) \varphi_m(x)\,d\mu'.$$

Легко видеть, что функция $F_m(y)$ имеет интегрируемый квадрат. Поэтому $F_m(y) \psi_n(y)$ при любом n интегрируема. Снова используя теорему Фубини, получаем

$$\int_{X''} F_m(y) \psi_n(y)\,d\mu'' = \int_X f(x, y) f_{mn}(x, y)\,d\mu = 0.$$

В силу полноты системы $\{\psi_n\}$ отсюда вытекает, что для почти всех y

$$F_m(y) = 0.$$

Но тогда при почти каждом y имеют место равенства

$$\int_{X'} f(x, y) \varphi_m(x)\,d\mu' = 0$$

для всех m. В силу полноты системы $\{\varphi_m\}$ отсюда получается, что при почти каждом y множество тех x, где

$$f(x, y) \neq 0,$$

имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что на X функция $f(x, y)$ равна 0 почти всюду.

Применим эту теорему к некоторым конкретным ортогональным системам. В пространстве функций двух переменных

$$f(x, y), \quad -\pi \leqslant x, \ y \leqslant \pi,$$

с интегрируемым квадратом полную ортогональную систему образуют попарные произведения элементов систем:

$$1, \cos mx, \sin mx, \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$1, \cos ny, \sin ny, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. функции

$$1, \cos mx, \sin mx, \cos ny, \sin ny, \cos mx \sin ny,$$
$$\cos mx \cos ny, \sin mx \sin ny, \sin mx \cos ny.$$

Соответствующий ряд Фурье выглядит несколько громоздко, поэтому здесь удобнее пользоваться показательными функциями

$$e^{imx}e^{iny} = e^{i(mx+ny)}, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Этому базису отвечает ряд Фурье

$$f(x, y) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

где

$$c_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} \, dx \, dy.$$

Многочлены Лежандра дают в пространстве функций, определенных на квадрате

$$-1 \leqslant x, \quad y \leqslant 1,$$

полную ортонормальную систему, состоящую из многочленов

$$Q_{mn}(x, y) = \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{m!\, n!\, 2^{m+n+1}} \frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m \frac{d^n}{dy^n}(y^2-1)^n.$$

Все сказанное очевидным образом переносится на функции нескольких переменных. В частности, тригонометрический ряд Фурье для функции k переменных имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} c_{n_1 \ldots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k)},$$

где

$$c_{n_1 \ldots n_k} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \ldots, x_k) e^{-i(n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k)} dx_1 \ldots dx_k.$$

6. **Многочлены, ортогональные относительно данного веса.** Мы пришли к многочленам Лежандра, ортогонализируя функции

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{9}$$

относительно скалярного произведения

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,$$

отвечающего обычной мере Лебега на отрезке $[-1, 1]$. Если на этом отрезке задать какую-либо иную меру μ, такую, что функции (9) в соответствующем пространстве L_2 со скалярным произведением $\int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, d\mu$ линейно независимы, то, применив к (9) процесс ортогонализации, мы придем к некоторой системе многочленов $\{Q_n\}$, зависящей, вообще говоря, от выбора меры μ. Предположим, что мера μ определена для измеримых по Лебегу подмножеств сегмента $[-1, 1]$ формулой

$$\mu(E) = \int_E g(x)\, dx, \tag{10}$$

где g — фиксированная неотрицательная суммируемая функция. Условие ортонормальности

$$(Q_m, Q_n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n \end{cases}$$

в этом случае записывается в виде

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)\, Q_n(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases} \tag{11}$$

Функция g, определяющая меру (10), носит название *веса* или *весовой функции*. Таким образом, про многочлены, удовлетворяющие условию (11), говорят, что они *ортогональны с весом* g. Выбор того или иного веса приводит к различным системам многочленов. В частности, положив

$$g(x) = 1/\sqrt{1 - x^2},$$

мы получим многочлены, совпадающие с точностью до постоянного множителя с так называемыми *многочленами Чебышева*, которые определяются формулой

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и играют важную роль в различных интерполяционных задачах.

Ортогональность этих многочленов относительно веса $1/\sqrt{1 - x^2}$ легко проверяется. Действительно, полагая

$$x = \cos 0, \quad dx = -\sin 0\, d0, \quad \sqrt{1 - x^2} = \sin 0,$$

получаем

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int_{0}^{\pi} \cos m0 \cos n0\, d0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad m = n, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases}$$

7. Ортогональный базис в пространствах $L_2(-\infty, \infty)$ и $L_2(0, \infty)$. Выше мы рассматривали ортогональные системы на отрезке, т. е. на множестве конечной меры. Рассмотрим теперь случай б е с к о н е ч н о й меры, а именно, пространство $L_2(-\infty, \infty)$ функций с интегрируемым квадратом на всей числовой прямой. Ортогональную систему функций в нем нельзя построить ни из многочленов, ни из тригонометрических функций, ибо ни те, ни другие не принадлежат этому пространству. «Мате-

риал» для построения базиса в $L_2(-\infty, \infty)$ естественно искать среди функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности. В частности, такой базис можно получить ортогонализацией последовательности

$$x^n e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Действительно, всякая функция вида $P(x)\, e^{-x^2/2}$, где P — многочлен, принадлежит, очевидно, $L_2(-\infty, \infty)$, а полнота системы (12) будет доказана в п. 3, § 4 гл. VIII.

Применив к функциям $x^n e^{-x^2/2}$ процесс ортогонализации, мы получим систему функций вида

$$\varphi_n(x) = H_n(x)\, e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где H_n — многочлен степени n. Эти многочлены называются *многочленами Эрмита*, а сами функции φ_n — *функциями Эрмита*. Нетрудно показать, что многочлены Эрмита совпадают, с точностью до постоянного множителя, с многочленами

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

Действительно, многочлен H_n^* имеет, очевидно, степень n, а соотношение ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^*(x)\, H_n^*(x)\, e^{-x^2}\, dx = 0, \quad m \neq n,$$

легко получить интегрированием по частям. В силу теоремы об ортогонализации существует лишь одна, с точностью до постоянных множителей, система ортогональных функций вида $P_n(x)\, e^{-x^2/2}$, где P_n — многочлен n-й степени.

Полученный результат допускает и такое истолкование. Рассмотрим на прямой меру μ, имеющую плотность e^{-x^2}, т. е. такую, что

$$d\mu = e^{-x^2}\, dx.$$

Это — к о н е ч н а я мера. В пространстве функций, интегрируемых с квадратом по этой мере, скалярное произведение имеет вид

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x^2}\, dx,$$

а многочлены Эрмита образуют в нем ортогональную систему.

Рассмотрим, наконец, пространство $L_2(0, \infty)$ функций с интегрируемым квадратом на полупрямой. Взяв в нем систему функций

$$x^n e^{-x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и применив к ним процесс ортогонализации, мы получим систему функций

$$L_n(x)\, e^{-x},$$

называемых *функциями Лагерра*.

Соответствующие многочлены L_n называются *многочленами Лагерра*. Многочлены Лагерра можно рассматривать как ортогональный базис в пространстве функций, квадрат которых интегрируем на полупрямой $(0, \infty)$ по мере

$$d\mu = e^{-x}\, dx.$$

В п. 3 § 4 гл. VIII мы докажем, что система функций Лагерра полна в $L_2(0, \infty)$.

8. Ортогональные многочлены с дискретным весом. Пусть $n+1$ различным точкам $x_0, x_1, \ldots, x_n$ действительной прямой приписаны в качестве «весов» положительные числа $p_0, p_1, \ldots, p_n$, а мера μ определена формулой

$$\mu(E) = \sum_{x_k \in E} p_k,$$

т. е. $\mu(E)$ равна сумме весов, содержащихся в E точек x_k. Измеримыми по этой «вырожденной» мере являются здесь любые множества и функции на прямой, причем любое множество E, не содержащее точек x_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$, имеет меру 0. Тем самым интеграл по всей действительной прямой от функции f равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\mu = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k),$$

а скалярное произведение дается формулой

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k)\, g(x_k).$$

Очевидно, что функции f и g будут эквивалентны по мере μ, если

$$f(x_k) = g(x_k)$$

во всех точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и только в этом случае.

Для этого вырожденного случая задача наилучшей аппроксимации в смысле расстояния в L_2 сводится к определению сумм

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m,$$

обращающих в минимум выражение

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \left\{ f(x_k) - \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x_k) \right\}^2,$$

т. е. к задаче «интерполирования по методу наименьших квадратов».

В связи с задачей интерполирования по методу наименьших квадратов многочленами заданной степени П. Л. Чебышев развил теорию ортогональных многочленов. Чтобы изложить относящиеся сюда результаты Чебышева, заметим, что система

$$1, x, x^2, \ldots, x^n \tag{13}$$

при нашей мере μ линейно независима, так как скалярное произведение (x^r, x^s) выражается формулой

$$(x^r, x^s) = \sum_{k=0}^{n} p_k x_k^{r+s}$$

и детерминант Грамма системы (13) есть (суммы по k от 0 до n)

$$\begin{vmatrix} \sum p_k & \sum p_k x_k & \sum p_k x_k^2 & \ldots & \sum p_k x_k^n \\ \sum p_k x_k & \sum p_k x_k^2 & \sum p_k x_k^3 & \ldots & \sum p_k x_k^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum p_k x_k^n & \sum p_k x_k^{n+1} & \sum p_k x_k^{n+2} & \ldots & \sum p_k x_k^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{p_0} & \sqrt{p_1} & \ldots & \sqrt{p_n} \\ \sqrt{p_0}x_0 & \sqrt{p_1}x_1 & \ldots & \sqrt{p_n}x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sqrt{p_0}x_0^n & \sqrt{p_1}x_1^n & \ldots & \sqrt{p_n}x_n^n \end{vmatrix}^2 =$$

$$= p_0 p_1 \ldots p_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

Наоборот, функции x^r при $r > n$ линейно зависят от функций системы (13), так как в нашем случае пространство L_2 имеет размерность $n + 1$. Поэтому процесс ортогонализации приводит к конечной системе многочленов

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n,$$

ортонормальных в том смысле, что

$$\sum_{k=0}^{n} p_k P_r(x_k) P_s(x_k) = \delta_{rs}$$

и каждая функция f разлагается в конечный ряд

$$f \sim \sum_{r=0}^{n} c_r P_r,$$

где

$$c_r = \sum_{k=0}^{n} p_k P_r(x_k) f(x_k).$$

В точках x_k выполняются равенства

$$f(x_k) = \sum_{r=0}^{n} c_r P_r(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

т. е. полная сумма ряда есть просто интерполяционный многочлен Лагранжа. Неполные суммы

$$Q_m = \sum_{r=0}^{m} c_r P_r, \quad m < n,$$

являются многочленами m-й степени, приближающими f в точках x_k наилучшим способом в том смысле, что выражение

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \{f(x_k) - Q_m(x_k)\}^2$$

для Q_m меньше, чем для любого другого многочлена той же степени m.

9. Системы Хаара и Радемахера — Уолша. Хааром был построен следующий пример полной системы функций на отрезке $[0, 1]$. Система эта состоит из функции

$$\varphi_0 = 1$$

и серий

$$\varphi_{01},$$
$$\varphi_{11}, \varphi_{12},$$
$$\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}, \varphi_{24},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \dots, \varphi_{n2^n}$$

(n-я серия содержит 2^n функций), где

$$\varphi_{01} = \begin{cases} +1, & 0 < x < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

$$\varphi_{11} = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 < x < 1/4, \\ -\sqrt{2}, & 1/4 < x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < 1, \end{cases} \qquad \varphi_{12} = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/2, \\ \sqrt{2}, & 1/2 < x < 3/4, \\ -\sqrt{2}, & 3/4 < x < 1. \end{cases}$$

Вообще, положим (в точках разрыва значения функций можно брать произвольными)

$$\varphi_{ni} = \begin{cases} 2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} < x < \dfrac{i-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \dfrac{i-1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} < x < \dfrac{i}{2^n}, \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{i-1}{2^n};\ \dfrac{i}{2^n}\right], \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Легко видеть, что построенная система ортонормальна. Докажем ее полноту.

Разобъем отрезок $[0, 1]$ на 2^{n+1} равных интервалов Δ_i и рассмотрим множество M_{n+1} всех функций, сохраняющих постоянное значение на каждом из интервалов Δ_i. Очевидно, M_{n+1} есть линейное подпространство размерности 2^{n+1}. Кроме того, все функции нашей системы до функций n-й серии включительно войдут в M_{n+1}. Так как эти функции в силу ортонормальности нашей системы линейно независимы и так как их число равно

$$1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1},$$

то функция φ_0 и функции φ_{ki} серий $k = 0, 1, \dots, n$ образуют в M_{n+1} полную систему линейно независимых векторов. Отсюда, принимая во внимание, что любая непрерывная функция может быть сколь угодно точно аппроксимирована функцией из M_{n+1} (при достаточно большом n), мы убеждаемся в полноте нашей системы.

Рассмотрим еще один пример ортонормальной системы функций на отрезке $[0, 1]$, принадлежащий Радемахеру. Положим

$$\varphi_m = (-1)^{[2^m x]}.$$

Иными словами, функция φ_m получается следующим образом: сегмент $[0, 1]$ делится на 2^m равных частей Δ_i, причем на интервалах Δ_i ($i = 1, \ldots, 2^m$) функция φ_m принимает попеременно значения $+1$ и -1.

Ортонормальность системы

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots \tag{14}$$

очевидна. Эта система не полна. Это следует хотя бы из того, что, например, функция

$$\varphi_{12} = \varphi_1\varphi_2 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 < x < 1/4 \quad \text{или} \quad 3/4 < x < 1, \\ -1, & \text{если} \quad 1/4 < x < 3/4, \end{cases}$$

ортогональна ко всем функциям системы (14). Однако последнюю можно расширить до полной ортонормальной системы, добавив к ней функции вида

$$\varphi_{m_1 \ldots m_k} = \varphi_{m_1} \cdots \varphi_{m_k}, \quad 0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_k. \tag{15}$$

Очевидно, что расширенная таким образом система, называемая системой Радемахера—Уолша, останется ортонормальной. Кроме того, она уже будет полной. Доказательство этого проводится аналогично доказательству полноты системы Хаара.

ГЛАВА VIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Условия сходимости ряда Фурье

1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке. Рассмотрим снова пространство $L_2[-\pi, \pi]$ функций суммируемым квадратом на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это, как было показано в гл. VII, — полное бесконечномерное евклидово пространство, т. е. гильбертово пространство. Функции

$$1, \cos nx, \sin nx, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

образуют в нем полную ортогональную систему, поэтому для каждой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{2}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \tag{3}$$

сходится к f в среднем квадратичном, т. е. в метрике пространства $L_2[-\pi, \pi]$. Однако в связи с применением рядов Фурье к задачам математической физики и другим вопросам будет существенно установить условия, гарантирующие сходимость ряда Фурье к f не только в среднем, но и в данной точке, всюду, или даже равномерно. Мы установим сейчас условия, достаточные для сходимости тригонометрического ряда в данной точке. Сделаем некоторые предварительные замечания.

Вместо функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$, мы можем говорить о периодических функциях с периодом 2π на всей прямой, поскольку каждую функцию, заданную на отрезке, можно периодически продолжить [1]).

---

[1]) Заменив, если нужно, $f(x)$ эквивалентной функцией, мы можем считать, что $f(-\pi) = f(\pi)$.

Далее, функции, образующие тригонометрическую систему, ограничены, поэтому формулы (3), определяющие коэффициенты Фурье по этой системе, имеют смысл для любой суммируемой функции [1]) (а не только для функций с суммируемым квадратом). Таким образом, каждой функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ отвечают совокупность ее коэффициентов Фурье и ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Перейдем теперь к вопросу о сходимости этого ряда в данной точке x к значению функции f в этой точке. Положим

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{4}$$

Преобразуем сначала $S_n(x)$, подставив в (4) вместо коэффициентов a_k и b_k их интегральные выражения (3). Обозначив переменную интегрирования через t, мы получим

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right\} dt.$$

Воспользовавшись хорошо известной формулой [2])

$$\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \ldots + \cos nu = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}}, \tag{5}$$

---

[1]) При этом, конечно, для произвольной суммируемой функции никаких утверждений о сходимости ряда (2) мы не делаем.

[2]) Для получения этой формулы достаточно просуммировать равенства

$$\sin \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{u}{2},$$

$$\sin \frac{3u}{2} - \sin \frac{u}{2} = \cos u \cdot 2 \sin \frac{u}{2},$$

. . . . . .

$$\sin \frac{2n+1}{2} u - \sin \frac{2n-1}{2} u = \cos nu \cdot 2 \sin \frac{u}{2}.$$

будем иметь

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} dt. \tag{6}$$

Это представление $S_n(x)$ и различные его модификации называются *интегралом Дирихле*.

Сделаем замену, положив $t - x = z$. Поскольку под интегралом в (6) стоит периодическая функция с периодом 2π, интеграл от нее по любому отрезку длины 2π имеет одну и ту же величину. Поэтому и при интегрировании по z мы можем сохранить прежние пределы $-\pi$ и π. Получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$$

Функция

$$D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}}$$

называется *ядром Дирихле*. Из равенства (5) сразу видно, что при любом n

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\, dz = 1.$$

Используя это равенство, запишем разность $S_n(x) - f(x)$ в виде

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+z) - f(x)] \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} dz. \tag{7}$$

Таким образом, мы свели вопрос о сходимости $S_n(x)$ к $f(x)$ к вопросу о стремлении к нулю интеграла (7). Исследование этого интеграла опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Если функция* φ *суммируема на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx = 0.$$

Доказательство. Если φ — непрерывно дифференцируемая функция, то с помощью интегрирования по частям получаем, что при $p \to \infty$

$$\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx = -\varphi(x) \frac{\cos px}{p}\Big|_a + \int_a^b \varphi'(x) \frac{\cos px}{p}\, dx \to 0. \tag{8}$$

Пусть теперь φ — произвольная суммируемая на $[a, b]$ функция. Поскольку непрерывно дифференцируемые функции всюду плотны в $L_1[a, b]$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывно дифференцируемая функция φ_ε, что

$$\int_a^b |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Далее, имеем

$$\left|\int_a^b \varphi(x) \sin px\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^b [\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)] \sin px\, dx\right| + \left|\int_a^b \varphi_\varepsilon(x) \sin px\, dx\right|.$$

Первое слагаемое справа меньше, чем $\varepsilon/2$, в силу (9), а второе — стремится к нулю при $p \to \infty$ согласно (8). Лемма доказана.

Теперь мы легко можем доказать следующий достаточный признак сходимости ряда Фурье.

Теорема 1. *Если* f *— суммируемая функция и при фиксированном* x *и некотором* $\delta > 0$ *интеграл*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt \tag{10}$$

существует, то частичные суммы S_n ряда Фурье функции f сходятся в этой точке x к $f(x)$.

Доказательство. Перепишем интеграл (7) в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\,\frac{z}{2\sin\frac{z}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz. \qquad (11)$$

Если функция

$$\frac{f(x+z)-f(x)}{z}$$

интегрируема (по z) в пределах от $-\delta$ до δ, то она интегрируема и на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (поскольку $f \in L_1[-\pi, \pi]$). Но тогда интегрируема и функция

$$\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{z}{2\sin(z/2)};$$

поэтому к интегралу (11) можно применить лемму 1, и мы получаем, что этот интеграл стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

Замечания. 1. Сходимость интеграла (10) называется *условием Дини*. Оно, в частности, выполнено, если в данной точке x функция f непрерывна и имеет конечную производную, или хотя бы правую и левую производные.

Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, останутся в силе, если вместо условия Дини потребовать сходимости следующих двух интегралов:

$$\int_{-\delta}^{0}\frac{f(x+z)-f(x-0)}{z}\,dz \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\delta}\frac{f(x+z)-f(x+0)}{z}\,dz, \qquad (12)$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ суть левый и правый пределы функции f в точке x (предполагается, что x есть точка разрыва первого рода для f). Действительно, разность

$$S_n(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}|f(x+z)-f(x-0)|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin(z/2)}\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}|f(x+z)-f(x+0)|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\sin(z/2)}\,dz;$$

при условии существования интегралов (12) эти выражения стремятся к нулю, когда $n\to\infty$.

Отсюда вытекают достаточные условия «глобальной» сходимости ряда Фурье, обычно приводимые в курсах анализа.

Пусть f — ограниченная функция с периодом 2π, имеющая разрывы лишь первого рода, и пусть f имеет в каждой точке левую и правую производные [1]). *Тогда ее ряд Фурье сходится всюду, а его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ в точках разрыва.*

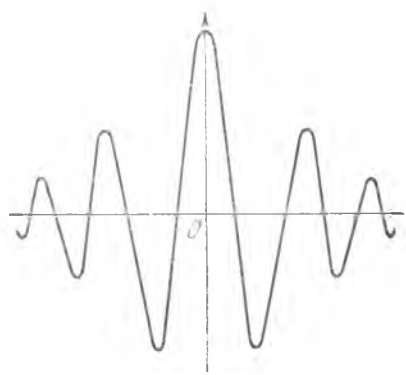


Рис. 22

2. Ядро Дирихле $D_n(z)$, игравшее основную роль в наших рассуждениях, представляет собой функцию, принимающую в точке $z=0$ значение $\frac{2n+1}{2\pi}$ и при больших значениях n быстро колеблющуюся (рис. 22). В силу этого обстоятельства основной вклад в интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\,D_n(z)\,dz$$

[1]) В точке разрыва первого рода левая и правая производные понимаются как

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h},\qquad \lim_{h\to0+}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}$$

соответственно.

при больших n дает лишь сколь угодно малая окрестность точки x. Для функций, удовлетворяющих условию Дини, этот вклад стремится к $f(x)$ при $n \to \infty$. Можно сказать, что ядра Дирихле D_n образуют последовательность функционалов, сходящуюся, в некотором смысле, к δ-функции на множестве функций f, разложимых в сходящийся ряд Фурье.

Ясно, что в смысле обычной сходимости последовательность $\{D_n\}$ не стремится ни к какому пределу, поэтому, исследуя интеграл (7), мы не могли применить какие-либо стандартные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

3. Условие Дини, обеспечивающее сходимость ряда Фурье, можно заменить другими условиями, но просто отбросить его в теореме 1 нельзя. Действительно, даже среди *непрерывных* существуют функции с рядом Фурье, расходящимся в некоторых точках. Среди *суммируемых* функций существуют такие, ряд Фурье которых расходится *всюду* (А. Н. Колмогоров). Еще в 1915 г. Н. Н. Лузин поставил следующую проблему: существуют ли в L_2 функции, для которых ряд Фурье расходится на множестве положительной меры? Как показал Л. Карлесон (1966 г.), таких функций не существует.

Тот факт, что существуют непрерывные функции, для которых ряд Фурье сходится не во всех точках, легко вытекает из общих теорем о слабой сходимости функционалов (п. 3 § 3 гл. IV). Заметим прежде всего, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\,dz \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Действительно, числитель дроби

$$|D_n(z)| = \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}z\right|}{2\pi\left|\sin\frac{z}{2}\right|}$$

обращается в 1 в точках, где

$$\frac{2n+1}{2}z = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Окружим каждую из точек, определяемых условием (14), интервалом

$$\left|\frac{2n+1}{2}z - \frac{2k+1}{2}\pi\right| < \frac{\pi}{3}. \tag{15}$$

Длина любого из них равна, очевидно, $\frac{4\pi}{3(2n+1)}$. В каждом из этих интервалов $\left|\sin\frac{2n+1}{2}z\right|$ не меньше, чем 1/2. Оценим величину $\sin\frac{z}{2}$ на k-м интервале ($k = 0, 1, \ldots, n$). Имеем

$$\sin\frac{z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{2k+1}{2}\pi + \frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{2n+1}{2}\right)^{-1} < \frac{k+1}{2n+1}\pi.$$

Поэтому интеграл от $|D_n(z)|$, взятый только по промежуткам, определяемым условием (15), больше, чем сумма

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{k+1}{2n+1}\pi}\,\frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Эта сумма стремится к ∞ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает соотношение (13). Оно означает, что нормы функционалов D_n в пространстве непрерывных функций не ограничены в совокупности. Но тогда в силу теоремы о слабой сходимости функционалов эта последовательность не может быть слабо сходящейся на пространстве непрерывных функций, т. е. имеются непрерывные функции f, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)f(x)\,dx$$

не существует.

2. Условия равномерной сходимости ряда Фурье. Мы установили условия, достаточные для сходимости ряда Фурье некоторой функции f в каждой точке. Класс функций, удовлетворяющих этим условиям, весьма широк, и даже непрерывность вовсе не необходима для представимости функции суммой всюду сходящегося тригонометрического ряда. Положение несколько изменится, если мы будем интересоваться условиями р а в н о м е р н о й

сходимости ряда Фурье. Ясно, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы один разрыв, то ее ряд Фурье не может сходиться к ней равномерно, поскольку сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций всегда непрерывна. Таким образом, непрерывность функции есть необходимое (но, конечно, не достаточное) условие равномерной сходимости ее ряда Фурье.

Простое достаточное условие дает следующая теорема.

Теорема 2. *Если функция f с периодом 2π абсолютно непрерывна, а ее производная f' принадлежит $L_2[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на всей прямой.*

Доказательство. Обозначим через a_n' и b_n' коэффициенты Фурье функции f'. Так как f абсолютно непрерывна, то к интегралу

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

можно применить формулу интегрирования по частям. Получаем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx = -\frac{b_n'}{n};$$

аналогично,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{a_n'}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n'|}{n} + \frac{|a_n'|}{n}. \qquad (16)$$

Этот ряд сходится, поскольку

$$\frac{|b_n'|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n'^2 + \frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{|a_n'|}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n'^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + a_n^2 < \infty$ в силу неравенства Бесселя. Числовой ряд (16) служит, очевидно, мажорантой для ряда Фурье функции f. Но тогда, по признаку Вейерштрасса, ряд Фурье функции f равномерно (и абсолютно) сходится. Остается показать, что сумма этого ряда есть f. Пусть φ — сумма ряда Фурье функции f. Тогда φ имеет те же самые коэффициенты Фурье, что и f. Отсюда в силу непрерывности обеих функций получаем, что $f = \varphi$.

Можно дать другое условие равномерной сходимости ряда Фурье, аналогичное условию Дини, именно:

Теорема 3. *Если на некотором множестве* $E \subset [-\pi, \pi]$ *суммируемая функция* f *ограничена, а условие Дини выполняется на* E *равномерно, т. е. для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z) - f(x)|}{|z|}\, dz < \varepsilon$$

одновременно для всех $x \in E$, *то ряд Фурье функции* f *сходится к этой функции равномерно на* E.

Доказательство этой теоремы основано на лемме, служащей усилением леммы 1 (см. с. 469).

Лемма 2. *Если* B — *предкомпактное в метрике* $L_1[-\pi, \pi]$ *множество суммируемых функций, то для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N = N(\varepsilon)$, *что*

$$\left| \int_a^b f(t) \sin \lambda t\, dt \right| < \varepsilon$$

при $\lambda \geqslant N(\varepsilon)$ *для всех* $f \in B$ *одновременно.*

Для доказательства леммы возьмем в B конечную $\varepsilon/2$-сеть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ и выберем N так, чтобы

$$\left| \int_a^b \varphi_i(t) \sin \lambda t\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, \ldots, k \text{ при } \lambda \geqslant N.$$

Если теперь f — произвольная функция из B, то при некотором i

$$\|f - \varphi_i\| < \varepsilon/2$$

и, следовательно,

$$\left|\int_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_a^b \varphi_i(t)\sin\lambda t\,dt\right| + \left|\int_a^b (f-\varphi_i)\sin\lambda t\,dt\right| < \varepsilon.$$

Тем самым лемма доказана.

Применение этой леммы основано на том легко проверяемом факте, что в условиях теоремы 3 множество функций

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

предкомпактно. Дальнейшие подробности доказательства предоставляем читателю.

До сих пор мы говорили о функциях, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$. Ясно, что все сказанное может быть автоматически перенесено на функции, определенные на отрезке произвольной длины $2l$.

Для случая нескольких независимых переменных тоже можно сформулировать как условия, достаточные для сходимости ряда Фурье в каждой точке, так и условия равномерной сходимости ряда Фурье. Мы не будем на этом останавливаться.

§ 2. Теорема Фейера

1. Теорема Фейера. Пусть f — непрерывная функция с периодом 2π на прямой. Эта функция определяется своим рядом Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \qquad (1)$$

однозначно. Действительно, если f_1 и f_2 — две непрерывные функции, имеющие одни и те же коэффициенты Фурье, то $f_1 - f_2$ — непрерывная функция, равная нулю почти всюду и, следовательно, тождественный нуль. Однако поскольку ряд Фурье непрерывной функции, вообще говоря, не обязан сходиться, мы не можем такую функцию f получить непосредственным суммированием ее

ряда Фурье. Способ восстановления непрерывной функции по ее ряду Фурье дает излагаемая ниже теорема, доказанная в 1905 г. Фейером.

Пусть

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{k} a_j \cos jx + b_j \sin jx \tag{2}$$

— частичная сумма ряда Фурье функции f. Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)}{n}. \tag{3}$$

Выражения σ_n — средние арифметические сумм S_k — называются *суммами Фейера* функции f.

Теорема 1 (Фейер). *Если f — непрерывная функция с периодом 2π, то последовательность $\{\sigma_n\}$ ее сумм Фейера сходится к f равномерно на всей числовой оси.*

Доказательство. Воспользуемся полученным в предыдущем параграфе интегральным представлением частичных сумм ряда Фурье:

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz.$$

Подставив эти интегралы в равенство (3), получим для $\sigma_n(x)$ следующее выражение:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2k+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}} \right\} f(x+z)\, dz,$$

которое с помощью формулы [1])

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1) z = \frac{\sin^2 nz}{\sin z}$$

---

[1]) Эту формулу легко получить, суммируя по k равенства

$$2 \sin(2k+1) z \cdot \sin z = \cos 2kz - \cos 2(k+1) z.$$

может быть представлено в виде так называемого *интеграла Фейера:*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 f(x+z)\, dz. \tag{4}$$

Выражение

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 \tag{5}$$

называется *ядром Фейера*. Формулу (4) можно переписать в виде

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\, \Phi_n(z)\, dz. \tag{6}$$

Нам нужно доказать, что при $n \to \infty$ это выражение равномерно стремится к $f(x)$. Отметим предварительно следующие свойства ядра Фейера:

1) $$\Phi_n(z) \geqslant 0,$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(z)\, dz = 1,$$

3) при любом фиксированном $\delta > 0$ и $n \to \infty$ имеем

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(z)\, dz = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(z)\, dz = \eta_n(\delta) \to 0.$$

Первое из этих свойств очевидно, второе получается из равенства (6), если положить $f(x) \equiv 1$ и учесть, что для такой функции $\sigma_n(x) \equiv 1$ при всех n; наконец, третье свойство сразу вытекает из того, что если $\delta < z \leqslant \pi$, то $\sin \frac{z}{2} \geqslant \frac{2\delta}{\pi}$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\sin n \frac{z}{2}}{\sin \frac{z}{2}} \right)^2 \leqslant \left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^2.$$

Учитывая эти свойства ядра Фейера, нетрудно доказать теорему. Так как функция f — непрерывная и периодическая, то она ограничена и равномерно непрерывна на всей прямой. Иначе говоря, существует такая постоянная M, что для всех x

$$|f(x)| \leqslant M \tag{7}$$

и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon/2, \tag{8}$$

как только

$$|x'' - x'| < \delta.$$

Для доказательства теоремы нам нужно оценить разность

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+z)| \Phi_n(z)\, dz,$$

которую можно представить в виде суммы следующих трех интегралов:

$$J_- = \int_{-\pi}^{-\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z)\, dz,$$

$$J_0 = \int_{-\delta}^{\delta} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z)\, dz,$$

$$J_+ = \int_{\delta}^{\pi} \{f(x) - f(x+z)\} \Phi_n(z)\, dz.$$

Из (7) и (8) непосредственно вытекают следующие оценки:

$$|J_-| \leqslant 2M\eta_n(\delta),$$

$$|J_+| \leqslant 2M\eta_n(\delta),$$

$$|J_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(z)\, dz < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь n_0 настолько большим, чтобы при $n \geqslant n_0$ и данном δ выполнялось неравенство

$$2M\eta_n(\delta) < \varepsilon/4.$$

Тогда

$$|f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε и следует утверждение теоремы.

Отметим, что при доказательстве мы использовали только свойства 1)—3) ядра Фейера. Это позволяет получать различные обобщения теоремы 1 (см., в частности, п. 3 этого параграфа).

2. Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса. Из теоремы Фейера следует полнота тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$. Действительно, в силу этой теоремы любая непрерывная функция есть предел равномерно (а значит, и в среднем) сходящейся последовательности тригонометрических многочленов σ_n. Остается заметить, что непрерывные функции всюду плотны в L_2. Теорему Фейера можно рассматривать как усиление теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими многочленами: эта последняя устанавливает, что всякая непрерывная функция есть равномерный предел *какой-то* последовательности тригонометрических многочленов, а теорема Фейера указывает *вполне определенную* последовательность, обладающую этим свойством,— последовательность сумм Фейера (3). Из теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими многочленами легко следует и вторая теорема Вейерштрасса — об аппроксимации алгебраическими многочленами любой функции, непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$. Действительно, если $f(x)$ — такая функция, то, положив $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, т. е. $x = \frac{t(b-a)}{\pi} + a$, мы получим функцию $\varphi(t)$ от t, заданную на $[0, \pi]$. Продолжим ее вначале на полусегмент $[-\pi, 0)$, положив $\varphi(-t) = \varphi(t)$, а потом, по периодичности, на всю прямую. Построим теперь тригонометрический многочлен T_n, удовлетворяющий условию

$$|T_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{при всех } t.$$

Далее, всякий тригонометрический многочлен разлагается в ряд Тейлора, сходящийся равномерно на любом конеч-

ном интервале. Пусть P_m — частичная сумма ряда Тейлора для T_n, такая, что

$$|T_n(t) - P_m(t)| < \varepsilon/2 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Тогда

$$|\varphi(t) - P_m(t)| < \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Сделав в $P_m(t)$ обратную замену $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$, мы получим многочлен $Q_m(x)$, удовлетворяющий условию

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$

3. Теорема Фейера для пространства L_1. В теореме Фейера достигнута определенная симметрия между условием и утверждением теоремы. Из того, что функция f принадлежит пространству $C[-\pi, \pi]$ непрерывных функций, следует, что отвечающие ей суммы Фейера сходятся к f в метрике того же самого пространства $C[-\pi, \pi]$. Аналогичные теоремы можно получить и для других функциональных пространств, в частности, для пространства $L_1[-\pi, \pi]$. Точнее говоря, имеет место следующая теорема, которую естественно назвать теоремой Фейера для суммируемых функций:

Если f — суммируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция, то ее суммы Фейера сходятся к ней по норме пространства $L_1[-\pi, \pi]$.

Доказательство этого утверждения может быть получено с помощью рассуждений, близких к изложенным в п. 1. Мы не будем здесь их проводить, однако отметим следующий важный факт, вытекающий из теоремы Фейера для суммируемых функций.

Всякая суммируемая функция однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своими коэффициентами Фурье.

Действительно, пусть f и g — две суммируемые функции, имеющие одинаковые коэффициенты Фурье. Тогда все коэффициенты Фурье функции $f - g$ равны 0. Следовательно, тождественно равны 0 и все суммы Фейера для $f - g$. Но тогда и их предел в L_1, т. е. функция $f - g$, есть 0 почти всюду.

§ 3. Интеграл Фурье

1. Основная теорема. В § 1 были установлены условия, при которых периодическая функция может быть разложена в сходящийся ряд Фурье, т. е. представлена как суперпозиция гармонических колебаний. Попытаемся сейчас перенести этот результат на функции *непериодические*. Мы увидим, что при довольно общих дополнительных условиях такое представление возможно, но только уже с помощью не ряда, а интеграла, так называемого *интеграла Фурье*.

Начнем с наводящих соображений. Пусть функция f на каждом конечном интервале удовлетворяет условиям, обеспечивающим разложимость ее в ряд Фурье. Иначе говоря, предположим, что f суммируема на любом конечном интервале и в каждой точке удовлетворяет условию Дини. Рассматривая f, скажем, на отрезке $[-l, l]$, мы можем написать разложение этой функции в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x. \qquad (1)$$

Подставим сюда вместо a_k и b_k их выражения:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t\, dt.$$

Получим

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi}{l} t\, dt +$$

$$+ \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} t\, dt = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \left[\cos \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi}{l} t + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} t \right] dt,$$

т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} (t - x)\, dt.$$

(2)

Дополним предположения о функции f еще одним: пусть эта функция абсолютно интегрируема на всей прямой, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty. \tag{3}$$

Перейдем теперь (пока чисто формально) в равенстве (2) к пределу при $l \to \infty$. В силу (3) первое слагаемое в правой части равенства (2) при $l \to \infty$ стремится к нулю. Второе слагаемое можно рассматривать как интегральную сумму (но только распространенную на бесконечный промежуток) для интеграла

$$\int_0^{\infty} F(\lambda)\,d\lambda$$

от функции

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

если положить $\lambda_k = k\pi/l$ и $\Delta\lambda = \pi/l$. Поэтому формальный предельный переход в (2) при $l \to \infty$ приводит к равенству

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt. \tag{4}$$

Это и есть искомое представление. Введя обозначения:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt, \quad b_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

равенство (4) можно переписать в следующем виде, аналогичном ряду Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda. \tag{5}$$

Мы получили равенство (4), называемое *формулой Фурье*, с помощью формального предельного перехода. Можно было бы обосновать справедливость этого перехода

(при сделанных выше предположениях о функции f), однако проще доказать равенство (4) непосредственно. Итак, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей прямой и в точке x удовлетворяет условию Дини, то имеет место равенство*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x)\, dt.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x)\, dt. \tag{6}$$

Нам нужно доказать, что $\lim\limits_{A \to \infty} J(A)$ существует и равен $f(x)$. Так как f абсолютно интегрируема, то внутренний интеграл в (6) сходится, а двойной интеграл сходится абсолютно. Используя теорему Фубини, изменим в повторном интеграле (6) порядок интегрирования:

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda (t - x)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(t - x)}{t - x}\, dt.$$

Заменой переменных $t - x = z$ приведем этот интеграл к виду

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + z) \frac{\sin Az}{z}\, dz. \tag{7}$$

Хорошо известное равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Az}{z}\, dz = 1, \quad A > 0,$$

позволяет записать разность $J(A) - f(x)$ в виде

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az\, dz. \qquad (8)$$

Представим стоящий справа интеграл в виде суммы трех слагаемых:

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-N}^{N} \frac{f(x+z) - f(x)}{z} \sin Az\, dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{|z| \geqslant N} \frac{f(x+z)}{z} \sin Az\, dz - \frac{f(x)}{\pi} \int_{|z| \geqslant N} \frac{\sin Az}{z} dz.$$

Второй и третий члены справа представляют собой сходящиеся интегралы, и каждый из них может быть сделан меньше, чем $\varepsilon/3$, если число N взято достаточно большим. Первое слагаемое справа (при фиксированном N) стремится к нулю, когда $A \to \infty$ (в силу леммы 1 § 1 и условия Дини). Таким образом, получаем

$$\lim_{A \to \infty} (J(A) - f(x)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Интеграл Фурье в комплексной форме. В интегральной формуле Фурье (4) внутренний интеграл представляет собой четную функцию от λ, что позволяет переписать эту формулу в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x)\, dt. \qquad (9)$$

Далее, из абсолютной интегрируемости функции f следует, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda (t - x)\, dt$ существует и представляет собой нечетную функцию от λ. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda (t - x)\, dt = 0 \qquad (10)$$

(если интеграл по λ понимать в смысле главного значения, т. е. как $\lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N}$). Прибавив к (9) равенство (10), умноженное на $-i$, получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\lambda(t-x)}\,dt.$$

Это равенство мы будем называть *комплексной формулой Фурье*.

§ 4. Преобразование Фурье, свойства и применения

1. Преобразование Фурье и формула обращения. Интегральную формулу Фурье можно расчленить на два равенства. Положим

$$g(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{1}$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{2}$$

Заметим, что формула (1) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции f. Таким образом, каждой $f\in L_1(-\infty,\ \infty)$ мы с помощью формулы (1) сопоставляем определенную функцию g, заданную на всей числовой прямой. Функция g называется *преобразованием Фурье* исходной функции f. Формула (2), выражающая f через ее преобразование Фурье, называется *формулой обращения* для преобразования Фурье. Следует обратить внимание на сходство между формулами (1) и (2). Вторая из них отличается от первой лишь знаком в показателе и множителем $1/(2\pi)$ перед интегралом. Можно было бы достигнуть здесь еще большей симметрии, определив g формулой

$$g(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx. \tag{1'}$$

Тогда формула обращения приняла бы вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda, \qquad (2')$$

т. е. различие осталось бы только в знаке показателя экспоненты.

Однако при всем их внешнем сходстве формулы (1) и (2), по существу, различны: в первой из них интеграл существует в обычном смысле (поскольку $f \in L_1(-\infty, \infty)$), а во второй, вообще говоря, лишь в смысле главного значения. Кроме того, равенство (1) — это определение функции g, а в равенстве (2), представляющем собой иную запись интегральной формулы Фурье, содержится утверждение, что стоящий там справа интеграл равен исходной функции f. Как мы видели выше, для обеспечения этого равенства на f надо наложить, помимо интегрируемости, еще дополнительные условия, скажем, условие Ди́ни.

Замечание. Мы определили преобразование Фурье g для всякой функции f из $L_1(-\infty, \infty)$ и показали, что функция f, удовлетворяющая условию Ди́ни в каждой точке, выражается с помощью формулы обращения через свое преобразование Фурье g. Это положение вещей в точности аналогично тому, которое имеется для рядов Фурье. Действительно, коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

определены для всякой $f \in L_1[-\pi, \pi]$, однако сходимость ряда Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(играющего здесь роль формулы обращения) можно гарантировать лишь при определенных дополнительных условиях (условие Ди́ни). Вместе с тем для преобразования Фурье (как и для ряда; см. конец § 2), имеет место следующее: *если для функции* $f \in L_1(-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \equiv 0,$$

то $f(x) = 0$ *почти всюду.*

Действительно, из написанного выше равенства вытекает, во-первых, что для всех действительных t и λ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\, e^{-i\lambda x}\, dx = 0.$$

Положим теперь

$$\varphi(x) = \int_0^{\xi} f(x+t)\, dt,$$

где ξ — произвольное фиксированное действительное число. Применяя теорему Фубини и используя условие, наложенное на функцию f, легко усмотреть, что функция φ (которая как и f, принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$) удовлетворяет тому же условию, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = 0$$

при всех действительных λ. Но, как легко видеть, функция φ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке и, следовательно, почти всюду обладает конечной производной. В частности, эта функция почти всюду удовлетворяет условию Ди́ни. Поэтому в силу теоремы 1 § 3 она почти всюду обращается в 0, так как ее преобразование Фурье есть тождественный 0. Но φ непрерывна, так что $\varphi(x) \equiv 0$. Из этого вытекает, в частности, что при всех действительных ξ

$$\int_0^{\xi} f(t)\, dt = 0$$

и, следовательно, $f(x) = 0$ почти всюду.

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

1. Пусть $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ $(\gamma > 0)$. Найдем преобразование Фурье этой функции. Имеем

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|} (\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\, dx =$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \cos\lambda x\, dx.$$

С помощью двукратного интегрирования по частям находим

$$g(\lambda) = \frac{2\gamma}{\lambda^2 + \gamma^2}.$$

2. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } |x| \leqslant a, \\ 0 \text{ при } |x| > a. \end{cases}$$

Тогда

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a}}{i\lambda} = \frac{2\sin \lambda a}{\lambda}.$$

(Следует обратить внимание на то, что функция g здесь не принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$.)

3. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$. Тогда

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{dx}{x^2 + a^2}. \tag{3}$$

Этот интеграл проще всего вычислить с помощью теории вычетов. Пусть сначала $\lambda > 0$. Дополнив действительную ось, по которой берется интеграл (3), полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости (т. е. в той, где экспонента $e^{-i\lambda x}$ стремится к нулю), получим, что интеграл (3) равен сумме вычетов подынтегральной функции в нижней полуплоскости, умноженной на $(-2\pi i)$. В нижней полуплоскости функция $\frac{e^{-i\lambda x}}{x^2 + a^2}$ имеет один полюс первого порядка в точке $x = -ai$. Вычет в этой точке находится по известной формуле: *если* $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ *и* $\varphi(a) \neq 0$, *а* $\psi(z)$ *имеет в точке* $z = a$ *нуль первого порядка, то вычет функции* f *в точке* a *равен* $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$. Поэтому в нашем случае получаем

$$g(\lambda) = -2\pi i \frac{e^{-a\lambda}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-a\lambda} \text{ при } \lambda > 0.$$

При $\lambda < 0$ аналогично (рассматривая только верхнюю полуплоскость вместо нижней) получаем

$$g(\lambda) = \frac{\pi}{a} e^{a\lambda}.$$

Таким образом, окончательно

$$g(\lambda) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}, \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

Впрочем, этот результат можно получить сразу по формуле обращения, используя пример 1 и теорему 1 § 3.

4. Положим $f(x) = e^{-ax^2}$. Имеем

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\lambda x}\, dx. \tag{4}$$

Здесь под интегралом стоит аналитическая функция, не имеющая особенностей в конечной части плоскости и стремящаяся к нулю вдоль каждой прямой, параллельной действительной оси. Поэтому в силу теоремы Коши интеграл (4) не изменит своего значения, если его взять не по действительной оси, а вдоль любой прямой $z = x + iy$ ($y = \text{const}$), параллельной этой оси. Таким образом,

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+iy)^2} \cdot e^{-i\lambda(x+iy)}\, dx =$$

$$= e^{ay^2+\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-2aixy-i\lambda x}\, dx =$$

$$= e^{ay^2+\lambda y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix(2ay+\lambda)}\, dx.$$

Выберем теперь постоянное значение y так, чтобы в показателе подынтегральной экспоненты исчезла мнимая часть, т. е. положим $y = -\lambda/(2a)$. Тогда

$$g(\lambda) = e^{a\frac{\lambda^2}{4a^2} - \frac{\lambda^2}{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, dx = e^{-\frac{\lambda^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В частности, если положить $a = 1/2$, то мы получим

$$f(x) = e^{-x^2/2}, \quad g(\lambda) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\lambda^2/2},$$

т. е. функция $e^{-x^2/2}$ переводится преобразованием Фурье сама в себя (с точностью до постоянного множителя).

2. Основные свойства преобразования Фурье. Из формулы (1), определяющей преобразование Фурье, вытекает ряд свойств этого преобразования. Рассмотрим эти свойства. Для сокращения записи будем преобразование Фурье функции f обозначать символом $F[f]$. Иначе говоря, мы обозначим через F линейный оператор, определенный на пространстве $L_1(-\infty, \infty)$ и ставящий в соответствие каждой функции из этого пространства ее преобразование Фурье [1]).

1. *Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $L_1(-\infty, \infty)$ сходится в метрике пространства $L_1(-\infty, \infty)$, то последовательность их преобразований Фурье $g_n = F[f_n]$ сходится равномерно на всей прямой.*

Это утверждение сразу вытекает из очевидной оценки:

$$|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx.$$

2. *Преобразование Фурье g абсолютно интегрируемой функции f представляет собой ограниченную непрерывную функцию, которая стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.*

Действительно, ограниченность функции $g = F[f]$ сразу видна из оценки

$$|g(\lambda)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx.$$

Далее, если f — характеристическая функция интервала (a, b), то для нее

$$g(\lambda) = \int_a^b e^{-i\lambda x}\,dx = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}.$$

---

[1]) Вообще говоря, не принадлежащее L_1.

Эта функция, очевидно, непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Так как операция F перехода от f к g линейна, то отсюда следует, что преобразование Фурье любой ступенчатой функции (т. е. линейной комбинации индикаторов интервалов) есть тоже непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $\lambda \to \pm\infty$. Наконец, ступенчатые функции всюду плотны в $L_1(-\infty, \infty)$, поэтому если $f \in L_1$, то существует последовательность $\{f_n\}$ ступенчатых функций, сходящаяся к f в $L_1(-\infty, \infty)$. Тогда в силу свойства 1 последовательность функций $g_n = F[f_n]$ сходится равномерно на всей прямой к функции $g = F[f]$. Но тогда предельная функция g тоже непрерывна и стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$.

Упражнения. 1. Доказать, что преобразование Фурье g абсолютно интегрируемой функции f равномерно непрерывно на всей прямой.

2. Пусть B — пространство равномерно непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Показать, что преобразование Фурье F есть оператор из $L_1(-\infty, \infty)$ в B с нормой 1, удовлетворяющий условию $\operatorname{Ker} F = 0$.

3. *Если f абсолютно непрерывна на каждом конечном интервале и $f' \in L_1(-\infty, \infty)$, то имеет место равенство*

$$F[f'] = i\lambda F[f].$$

Таким образом, дифференцированию функции (при указанных выше условиях) отвечает умножение ее преобразования Фурье на $i\lambda$.

Действительно, абсолютно непрерывная на каждом конечном интервале функция может быть записана в виде

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Из абсолютной интегрируемости f' следует, что стоящее здесь справа выражение при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$ имеет предел. Этот предел может быть только нулем, так как иначе функция f не была бы интегрируема на всей прямой. Учитывая это, получаем с помощью интегрирования частям

$$F[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx =$$

$$= f(x)\,e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\lambda x}\,dx = i\lambda F[f](\lambda),$$

что и требовалось доказать.

Если функция f такова, что $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна на каждом интервале и $f, \ldots, f^{(k)} \in L_1(-\infty, \infty)$, то с помощью таких же рассуждений получим

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f]. \tag{5}$$

4. *Связь между степенью гладкости функции и скоростью убывания на бесконечности ее преобразования Фурье.* Разделив равенство (5) на $(i\lambda)^k$ и вспомнив, что преобразование Фурье всегда стремится к нулю на бесконечности (свойство 2), получим, что *если* $f^{(k)}$ *абсолютно интегрируема, то*

$$|F[f]| = \frac{|F[f^{(k)}]|}{|\lambda|^k} \to 0,$$

т. е. в этих условиях $F[f]$ убывает на бесконечности быстрее, чем $1/|\lambda|^k$. Итак, чем больше производных в L_1 имеет f, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье.

5. *Если* f'' *существует и принадлежит* $L_1(-\infty, \infty)$, *то* $F[f]$ *абсолютно интегрируема.*

Действительно, при указанных условиях $F[f]$ ограничена и убывает на бесконечности быстрее, чем $1/\lambda^2$. Отсюда следует интегрируемость.

Выше (свойство 4) мы показали, что чем больше производных имеет функция f, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье. Справедливо и двойственное утверждение, а именно, чем быстрее убывает f, тем глаже ее преобразование Фурье. Точнее говоря, верно следующее утверждение:

6. *Пусть как функция* $f(x)$, *так и* $xf(x)$ *абсолютно интегрируемы. Тогда функция* $g = F[f]$ *дифференцируема и*

$$g'(\lambda) = F[-ixf(x)]. \tag{6}$$

Действительно, продифференцировав интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

определяющий g, по параметру λ, мы получим интеграл

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

который (в силу интегрируемости функции $xf(x)$) сходится равномерно по λ. Следовательно, производная функция g существует и имеет место (6).

Если f такова, что абсолютно интегрируемы функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^p f(x)$, то, как показывают аналогичные рассуждения, функция g имеет производные до p-го порядка включительно, причем

$$g^{(k)}(\lambda) = F[(-ix)^k f(x)], \quad k = 0, 1, \ldots, p.$$

7. *Если потребовать, чтобы функция f убывала на бесконечности еще быстрее, то g будет еще более гладкой функцией.* Из предположения, что $x^p f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ при всех p, вытекает бесконечная дифференцируемость функции g. Допустим теперь, что $e^{\delta|x|} f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ при некотором $\delta > 0$. Тогда $g(\lambda)$ распространяется с действительной оси λ как аналитическая функция в полосу на плоскости $\zeta = \lambda + i\mu$ комплексного переменного, причем ширина этой полосы тем больше, чем больше δ. Во всяком случае можно утверждать, что g будет аналитической функцией при $|\mu| < \delta$. Действительно, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\zeta} dx,$$

очевидно, будет сходиться при $|\mu| < \delta$ и определять непрерывную функцию, совпадающую с преобразованием Фурье функции f на действительной оси. Тот факт, что эта функция дифференцируема при $|\mu| < \delta$ в смысле теории аналитических функций, доказывается совершенно так же, как свойство 6.

3. Полнота функций Эрмита и Лагерра. Используя соображения, изложенные в предыдущем абзаце, можно показать, что *если измеримая функция f почти всюду на интервале (a, b), где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, отлична от 0 и удовлетворяет условию $|f(x)| \leqslant Ce^{-\delta|x|}$, где $\delta > 0$, то система функций $\{x^n f(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ полна в $L_2(a, b)$.*

Отсюда, в частности, будет следовать, что функции Эрмита образуют полную систему в $L_2(-\infty, \infty)$, а функции Лагерра — в $L_2(0, \infty)$ (см. п. 7 § 3 гл. VII).

Докажем сформулированное утверждение о полноте. Предположим, что система $\{x^n f(x)\}$ не полна. Тогда

в силу теоремы Хана—Банаха найдется такая ненулевая функция $h \in L_2(-\infty, \infty)$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) h(x)\, dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(Мы использовали теорему об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве; если рассматривается комплексное $L_2(a, b)$, то вместо $h(x)$ надо писать $\overline{h(x)}$.) Ясно, что $fh \in L_1(a, b)$ и, более того, $e^{\delta_1 |x|} fh \in L_1(a, b)$ при любом $\delta_1 < \delta$. В дальнейшем удобно считать, что $f(x)$ и $h(x)$ определены на всей прямой, продолжая их, если необходимо, за (a, b) нулем. Пусть g — преобразование Фурье функции fh, т. е.

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x) e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Из сказанного выше следует, что функция g продолжается как аналитическая в полосу $|\operatorname{Im} \zeta| < \delta$. С другой стороны, в силу свойства 6 все производные этой функции при $\lambda = 0$ обращаются в 0, так что $g(\lambda) \equiv 0$. По свойству единственности, доказанному в п. 1, отсюда следует, что $f(x) h(x) = 0$ почти всюду и, следовательно, $h(x) = 0$ почти всюду, так как $f(x)$ почти всюду отлична от 0. Но это противоречит нашему предположению о том, что h — ненулевая функция. Полученное противоречие и доказывает полноту системы $\{x^n f(x)\}$.

4. Преобразование Фурье быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Пользуясь тем, что при переходе от функции f к ее преобразованию Фурье g свойства гладкости функции и убывания ее на бесконечности меняются ролями, легко указать естественные классы функций, которые переводятся преобразованием Фурье сами в себя.

Пусть S_∞ — совокупность бесконечно дифференцируемых функций на прямой, для каждой из которых существует набор постоянных C_{pq} (зависящих от самой функции f и чисел p, q) таких, что

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{pq}. \tag{7}$$

Покажем, что если $f \in S_\infty$, то и $g = F[f] \in S_\infty$. Прежде всего из (7) следует абсолютная интегрируемость каждой

из функций $x^p f^{(q)}(x)$. Действительно, поскольку (7) выполняется при всех p и q, то

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leqslant C_{p+2,\,q}/x^2,$$

т. е. функция $x^p f^{(q)}(x)$ убывает не медленнее, чем $1/x^2$. Отсюда в свою очередь следует, что функция $F[f]$ имеет производные всех порядков. Наконец, согласно п. 2, из суммируемости $f^{(q)}(x)$ ($q = 1, 2, \ldots$) следует, что $g = F[f]$ убывает на бесконечности быстрее, чем $1/|\lambda|^q$. Рассмотрим теперь функции

$$(i\lambda)^q g^{(p)}(\lambda) = (-i)^q F[(x^p f(x))^{(q)}];$$

каждая из них, как преобразование Фурье интегрируемой функции, ограничена некоторой постоянной D_{pq}. Таким образом, если $f \in S_\infty$, то и $g = F[f] \in S_\infty$. Обратно, пусть $g \in S_\infty$, тогда, по доказанному, функция

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

входит в S_∞. Положим $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-x)$. Ясно, что $f \in S_\infty$. В то же время по формуле обращения

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx,$$

т. е. g есть преобразование Фурье функции $f \in S_\infty$. Итак, преобразование Фурье переводит класс S_∞ снова в весь класс S_∞. Ясно, что это отображение взаимно однозначно.

Упражнение. Пусть $f \in S_\infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x)\, dx = 0$ при всех $p \geqslant 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$?

5. Преобразование Фурье и свертка функций. Пусть f_1 и f_2 — интегрируемые на всей прямой функции. Функция

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, f_2(x - \xi)\, d\xi$$

называется их *сверткой*. Функция $f(x)$ определена при почти всех x и интегрируема. Действительно, двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi\, dx$$

существует, поскольку существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\xi) f_2(\eta)|\, d\xi\, d\eta$$

(см. замечание к теореме Фубини, с. 364). Следовательно, существует и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi.$$

Функция f обозначается символом $f_1 * f_2$. Вычислим преобразование Фурье свертки двух функций из L_1. Применяя теорему Фубини и полагая $x-\xi=\eta$, получаем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi\right\} e^{-i\lambda x}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)\, e^{-i\lambda\eta}\, e^{-i\lambda\xi}\, d\eta\right\} d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\eta)\, e^{-i\lambda\eta}\, d\eta \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi,\end{aligned}$$

т. е.

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1]\, F[f_2].$$

Итак, *преобразование Фурье переводит операцию свертки в более простую операцию — умножение функций*. Этот факт играет важную роль во многих применениях преобразования Фурье.

6. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности. Применение преобразования Фурье к дифференциальным уравнениям основано на том

(см. п. 3), что оно переводит операцию дифференцирования в операцию умножения на независимое переменное. Следовательно, если у нас имеется линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = \varphi(x), \qquad (8)$$

то преобразование Фурье переводит его в алгебраическое уравнение вида

$$(i\lambda)^n z + a_1 (i\lambda)^{n-1} z + \cdots + a_{n-1} i\lambda z + a_n z = \psi(\lambda), \qquad (9)$$

где $z = F[y]$ и $\psi = F[\varphi]$. Однако для обыкновенных дифференциальных уравнений этот прием не открывает каких-либо существенно новых перспектив, так как решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами и без того не представляет больших трудностей. Кроме того, переход от (8) к (9) возможен, если неизвестная функция $y = y(x)$ интегрируема на всей прямой, а для решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами это, вообще говоря, не имеет места.

Более существенно применение преобразования Фурье к уравнениям с частными производными, где оно позволяет, при определенных условиях, свести решение такого уравнения к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Покажем это на примере решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \qquad (10)$$

при $-\infty < x < \infty$ и $t \geqslant 0$, обращающееся при $t = 0$ в заданную функцию $u_0(x)$. Физический смысл этой задачи состоит в нахождении температуры бесконечного теплопроводящего стержня в любой момент времени $t > 0$, если в начальный момент $t = 0$ его температура в каждой точке есть $u_0(x)$.

Предположив, что $u_0(x)$, $u_0'(x)$ и $u_0''(x)$ принадлежат $L_1(-\infty, \infty)$, будем искать решение поставленной задачи в классе функций $u(x, t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ абсолютно интегрируемы по всей оси x при любом фиксированном $t \geqslant 0$;

2) функция $u_t(x, t)$ имеет в каждом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ интегрируемую мажоранту $f(x)$ (не зависящую от t):

$$|u_t(x, t)| \leqslant f(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Выполним в уравнении (10) преобразование Фурье по x. При этом справа мы получим

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\lambda^2 v(\lambda, t), \quad \text{где } v(\lambda, t) = F[u(x, t)],$$

а слева в силу условия 2) имеем

$$F[u_t] = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t)\, e^{-i\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{-i\lambda x}\,dx = v_t(\lambda, t).$$

Таким образом, преобразование Фурье переводит уравнение (10) в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v_t(\lambda, t) = -\lambda^2 v(\lambda, t),$$

для которого нам теперь нужно найти решение, обращающееся при $t = 0$ в функцию

$$v_0(\lambda) = F[u_0(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, e^{-i\lambda x}\,dx.$$

Таким решением будет, очевидно,

$$v(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 t} v_0(\lambda).$$

Теперь для того чтобы получить решение нашей первоначальной задачи, остается найти ту функцию $u(x, t)$, преобразованием Фурье которой служит функция $v(\lambda, t)$.

Используя пример 4 п. 1, получаем

$$e^{-\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-x^2/(4t)}\right].$$

Поэтому

$$v(\lambda, t) = \\ = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)}\right] \cdot F[u_0(x)] = F\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)} * u_0(x)\right],$$

т. е.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/(4t)} u_0(x-\xi)\, d\xi.$$

Мы получили так называемый *интеграл Пуассона* для решения уравнения теплопроводности.

7. Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье, рассмотренное нами для функций одной переменной, легко переносится на функции нескольких переменных.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, интегрируемая по всему n-мерному пространству $\mathbf{R}^n$. Ее *преобразованием Фурье* называется функция

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-i(x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n)}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Этот n-кратный интеграл, заведомо существующий, поскольку $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема, можно записать, по теореме Фубини, в виде следующего повторного интеграла:

$$g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-ix_1\lambda_1}\, dx_1 \right\} \times \right. \\ \left. \times e^{-ix_2\lambda_2}\, dx_2 \ldots \right\} e^{-ix_n\lambda_n}\, dx_n. \quad (11)$$

Иначе говоря, можно перейти от функции n переменных к ее преобразованию Фурье, последовательно выполняя преобразования по каждой из переменных в отдельности (в любом порядке). Обращая последовательно каждую

из n операций в правой части равенства (11), получим формулу

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times e^{ix_n\lambda_n} d\lambda_n \right\} e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}} d\lambda_{n-1} \ldots \right\} e^{ix_1\lambda_1} d\lambda_1.$$

Ее можно переписать в виде n-кратного интеграла

$$f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{i(x_1\lambda_1 + \ldots + x_n\lambda_n)} d\lambda_1 \ldots$$

$$\ldots d\lambda_n, \quad (12)$$

однако, поскольку функция $g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, вообще говоря, не обязана быть суммируемой по всему $\mathbf{R}^n$, нужно указать, в каком смысле следует понимать этот интеграл и те условия на $f(x_1, \ldots, x_n)$, при которых она представляется интегралом (12).

Один из возможных ответов на эти вопросы дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема по всему пространству $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяет условиям:*

$$|f(x_1 + t_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant C|t_1|^a,$$
$$|f(x_1, x_2 + t_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant C(x_1)|t_2|^a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|f(x_1, \ldots, x_n + t_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant C(x_1, \ldots, x_{n-1})|t_n|^a, \quad (13)$$

где

$$0 \leqslant a \leqslant 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} C(x_1)\, dx_1 < \infty, \ \ldots, \ \int_{-\infty}^{\infty} \ldots$$

$$\ldots \int_{-\infty}^{\infty} C(x_1, \ldots, x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1} < \infty.$$

Тогда формула обращения (12) *справедлива, если интеграл в ней понимать как*

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\lim_{N_1\to\infty}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\dots\lim_{N_{n-1}\to\infty}\int_{-N_{n-1}}^{N_{n-1}}\left\{\lim_{N_n\to\infty}\int_{-N_n}^{N_n} g(\lambda_1,\ \dots\right.\right.$$

$$\left.\left.\dots,\ \lambda_n)\,e^{ix_n\lambda_n}\,d\lambda_n\right\}e^{ix_{n-1}\lambda_{n-1}}\,d\lambda_{n-1}\ \dots\right\}e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1.$$

Действительно, поскольку $f(x_1, \dots, x_n)$ суммируема в $\mathbf{R}^n$, то в силу теоремы Фубини она суммируема по x_1 при почти всех $x_2, \dots, x_n$. Следовательно, существует функция

$$f_1(\lambda_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ \dots,\ x_n)\,e^{-ix_1\lambda_1}\,dx_1.$$

Из (13) следует, что $f(x_1, \dots, x_n)$ как функция от x_1 удовлетворяет условию теоремы 1 § 3; поэтому $f(x_1, \dots, x_n)$ можно выразить через f_1 по формуле обращения

$$f(x_1,\ \dots,\ x_n)=\lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1} f_1(\lambda_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\,e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1.$$

Далее, если мы положим

$$f_2(\lambda_1,\ \lambda_2,\ x_3, \dots, x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\,e^{-ix_2\lambda_2}\,dx_2,$$

то из условия (13) следует, что для f_1 справедлива формула обращения

$$f_1(\lambda_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=$$

$$=\lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ x_n)\,e^{ix_2\lambda_2}\,d\lambda_2,$$

т. е.

$$f(x_1,\ \dots,\ x_n)=$$

$$=\lim_{N_1\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_1}^{N_1}\left\{\lim_{N_2\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N_2}^{N_2} f_2(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\right.$$

$$\left.\dots,\ x_n)\,e^{ix_2\lambda_2}\,d\lambda_2\right\}e^{ix_1\lambda_1}\,d\lambda_1.$$

Определив аналогичным образом $f_3(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, x_n)$ и т. д., мы и придем к формуле (12).

Преобразование Фурье функций нескольких переменных широко используется в теории уравнений с частными производными. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{14}$$

описывающее процесс распространения тепла в плоскости. Пусть в момент $t = 0$ температура задана:

$$u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

Наложив на искомое решение уравнения (14) условия, аналогичные тем, которые указаны в п. 6, мы можем сделать в уравнении (14) преобразование Фурье по переменным x и y. В результате получим обыкновенное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -(\lambda^2 + \sigma^2) v, \tag{15}$$

где

$$v(t, \lambda, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x, y) e^{-i(\lambda x + \sigma y)} dx\, dy.$$

Решив уравнение (15), можно затем найти решение исходного уравнения (14) с помощью формулы обращения.

§ 5. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$

1. Теорема Планшереля. Вернемся сначала к тем результатам, которые мы получили для рядов Фурье. Для большей аналогии с преобразованием Фурье будем рассматривать ряд Фурье в комплексной форме, т. е. возьмем на отрезке $[-\pi, \pi]$ полную ортогональную систему функций e^{inx}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и каждой суммируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f мы поставим в соответствие последовательность ее коэффициентов Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если функция f не только суммируема, но и имеет суммируемый квадрат, то ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Иначе говоря, переход от суммируемой с квадратом функции к совокупности ее коэффициентов Фурье есть отображение евклидова пространства L_2 на евклидово пространство l_2, причем это отображение линейно и удовлетворяет равенству Парсеваля

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \qquad (1)$$

(т. е. этот переход отличается лишь числовым множителем от преобразования, сохраняющего норму).

Обратимся теперь к преобразованию Фурье для функций, заданных на всей прямой, и посмотрим, нельзя ли это преобразование трактовать как некоторый линейный оператор в комплексном пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Основная трудность состоит здесь в том, что функция с интегрируемым квадратом на прямой не обязана принадлежать $L_1(-\infty, \infty)$, т. е. преобразование Фурье в смысле, определенном в § 4, может для нее и не существовать. Однако для всякой $f \in L_2(-\infty, \infty)$ можно определить преобразование Фурье в несколько ином смысле. При этом получается следующая теорема, которую можно рассматривать как аналог равенства Парсеваля (1).

Теорема (Планшерель, 1910 г.). *Для всякой функции* $f \in L_2(-\infty, \infty)$ *интеграл*

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

при любом N *представляет собой функцию от* λ, *принадлежащую к* $L_2(-\infty, \infty)$. *При* $N \to \infty$ *функции* g_N *сходятся в метрике пространства* L_2 *к некоторому пределу* g, *причем*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \qquad (2)$$

Эту функцию g называют преобразованием Фурье функции $f \in L_2$. Если f принадлежит также и к $L_1(-\infty, \infty)$, то соответствующая функция g совпадает с преобразованием Фурье функции f в обычном смысле.

Доказательство. Основная идея доказательства состоит в том, что равенство (2) устанавливается сперва для всех функций, принадлежащих классу S_∞ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций, которые всюду плотны в $L_2(-\infty, \infty)$, а потом распространяется по непрерывности на все $L_2(-\infty, \infty)$. Реализуем теперь эту идею в деталях.

1) Пусть $f_1, f_2 \in S_\infty$. Обозначим через g_1 и g_2 соответственно их преобразование Фурье. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda]\,\overline{f_2(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_1(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx} \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\,\overline{g_2(\lambda)}\,d\lambda,$$

причем изменение порядка интегрирования здесь законно, поскольку функция

$$g_1(\lambda)\,\overline{f_2(x)}\, e^{i\lambda x}$$

абсолютно интегрируема в плоскости (x, λ). Положив в полученном равенстве $f_1 = f_2 = f$ и $g_1 = g_2 = g$, получим, что формула (2) верна для любой функции $f \in S_\infty$.

2) Пусть теперь f — произвольная функция из $L_2(-\infty, \infty)$, обращающаяся в нуль вне некоторого интервала $(-a, a)$. Тогда f интегрируема на интервале $(-a, a)$ (т. е. принадлежит $L_1(-a, a)$), а следовательно, и на всей прямой. Поэтому для нее определено преобразование Фурье

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность функций из S_∞, обращающихся в нуль вне $(-a, a)$, и сходящаяся по норме пространства $L_2(-\infty, \infty)$ к f. Поскольку f и все f_n отличны от нуля лишь на конечном интервале,

последовательность $\{f_n\}$ сходится к f и по норме пространства $L_1(-\infty, \infty)$. Поэтому (см. п. 2 § 4) последовательность $\{g_n\}$ сходится к g равномерно на всей прямой. Кроме того, последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна в $L_2(-\infty, \infty)$. Действительно $g_n - g_m \in S_\infty$, поэтому в силу уже доказанного

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx,$$

откуда и следует фундаментальность последовательности $\{g_n\}$. Значит, эта последовательность сходится в L_2, причем к той же самой функции g, к которой она сходится равномерно. Поэтому в равенстве

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_n\|^2$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Таким образом, получаем, что равенство (2) справедливо для каждой $f \in L_2$, обращающейся в нуль вне некоторого интервала.

3) Пусть, наконец, f — произвольная функция из L_2. Положим

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |x| \leqslant N, \\ 0 & \text{при } |x| > N. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\|f - f_N\| \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Функция f_N принадлежит $L_1(-\infty, \infty)$, следовательно, для нее существует обычное преобразование Фурье. Оно равно

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-N}^{N} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx.$$

Поскольку в силу пункта 2) наших рассуждений

$$\|f_N - f_M\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N - g_M\|^2,$$

функции g_N сходятся в L_2 к некоторому пределу, который мы обозначим g. Поэтому в равенстве

$$\|f_N\|^2 = \frac{1}{2\pi}\|g_N\|^2$$

можно перейти к пределу при $N \to \infty$, откуда получаем соотношение (2) для произвольной $f \in L_2(-\infty, \infty)$. Первая часть теоремы Планшереля доказана.

Если теперь функция f принадлежит как $L_2(-\infty, \infty)$, так и $L_1(-\infty, \infty)$, то для нее существует преобразование Фурье

$$\tilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

понимаемое в обычном смысле. При этом функции f_N сходятся к f в $L_1(-\infty, \infty)$ и, значит, их преобразования Фурье g_N сходятся к $\tilde{g}$ равномерно. Но, кроме того, как мы установили, функции g_N сходятся в метрике $L_2(-\infty, \infty)$ к некоторому пределу, который мы обозначили g. Отсюда следует, что $\tilde{g}$ совпадает с g. Доказательство закончено.

Следствие. *Из соотношения* (2) *сразу вытекает, что для любых* $f_1, f_2 \in L_2(-\infty, \infty)$ *выполнено равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \overline{f_2(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) \overline{g_2(\lambda)}\, d\lambda.$$

Для доказательства достаточно написать равенство (2) для функции $f_1 + f_2$ и затем сравнить выражения справа и слева. Если равенство (2) означает сохранение нормы в L_2 при преобразовании Фурье, то последнее равенство означает сохранение скалярного произведения.

2. Функции Эрмита. Теорема Планшереля, изложенная в предыдущем пункте, означает, что преобразование Фурье можно рассматривать как ограниченный линейный оператор F, отображающий пространство $L_2(-\infty, \infty)$ на себя. Если в этом пространстве выбрать какую-либо полную ортогональную нормированную систему, то оператор F (как и любой другой линейный оператор) можно записать с помощью бесконечной матрицы. Вид этой матрицы зависит, конечно, от выбора базиса. Проще всего матрица, отвечающая тому или иному оператору, выглядит в том случае, когда соответствующий базис состоит из собственных функций данного оператора: в этом случае матрица имеет диагональную форму. Посмотрим, существует ли такой базис для преобразования Фурье F? Иначе говоря, посмотрим, какие функции из

$L_2(-\infty, \infty)$ являются собственными для преобразования Фурье F? Для этой цели заметим, что уравнение

$$\frac{d^2f}{dx^2} - x^2 f = \mu f \tag{3}$$

переводится преобразованием Фурье в такое же уравнение [1]) (поскольку операция d^2/dx^2 переходит в умножение на $-\lambda^2$, а умножение на $-x^2$ — в операцию $d^2/d\lambda^2$). Поэтому естественно искать собственные функции оператора F как решения уравнения (3). Будем искать решения этого уравнения, имеющие вид

$$f = we^{-x^2/2},$$

где w — многочлен. Подставив это выражение в (3), получим для w уравнение

$$w'' - 2xw' = (\mu + 1)\, w.$$

Полагая

$$w = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \tag{4}$$

получаем равенство

$$(2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3 x + \cdots + n(n-1)\, a_n x^{n-2}) - \\ - 2x\,(a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}) = \\ = (\mu + 1)\,(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n).$$

Сравнивая в нем коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, находим, что

$$-2na_n = (\mu + 1)\, a_n, \quad -2(n-1)\, a_{n-1} = (\mu + 1)\, a_{n-1},$$

и т. д., вообще,

$$k(k-1)\, a_k - 2(k-2)\, a_{k-2} = (\mu + 1)\, a_{k-2}. \tag{5}$$

Поскольку мы считаем старший коэффициент a_n отличным от нуля, должно быть

$$\mu = -(2n + 1) \text{ и } a_{n-1} = 0,$$

---

[1]) Предполагается, конечно, что неизвестная функция f удовлетворяет соответствующим условиям гладкости и убывания на бесконечности.

т. е. μ должно быть нечетным целым отрицательным числом. Все коэффициенты многочлена w определяются соотношением (5) с точностью до постоянного множителя. При этом те коэффициенты, четность индекса которых отлична от четности числа n, т. е. степени многочлена w, равны нулю. Наоборот, все коэффициенты с индексами, имеющими ту же четность, что и n, отличны от нуля. Они находятся по рекуррентной формуле

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k$$

(если значение a_n задано). Таким образом, мы получаем формулу для w:

$$w_n(x) = a_n \left(x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \dots \right).$$

Итак, мы построили систему функций вида

$$\varphi_n(x) = w_n(x) e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ясно, что каждая из этих функций принадлежит $L_2(-\infty, \infty)$ (благодаря наличию множителя $e^{-x^2/2}$). Вдобавок, эти функции попарно ортогональны. Действительно, согласно (3) имеем

$$\varphi_n''(x) - x^2 \varphi_n(x) = -(2n+1)\varphi_n(x),$$
$$\varphi_m''(x) - x^2 \varphi_m(x) = -(2m+1)\varphi_m(x).$$

Умножив первое из этих равенств на φ_m, а второе — на φ_n и вычитая из одного равенства другое, получаем

$$\varphi_n'' \varphi_m - \varphi_m'' \varphi_n = 2(m-n)\varphi_n \varphi_m$$

или

$$[\varphi_n' \varphi_m - \varphi_m' \varphi_n]' = 2(m-n)\varphi_n \varphi_m.$$

Если $n \neq m$, то, интегрируя это равенство, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_m(x)\, dx = \frac{1}{2(m-n)} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n' \varphi_m - \varphi_m' \varphi_n]'\, dx =$$
$$= \frac{1}{2(m-n)} [\varphi_n' \varphi_m - \varphi_m' \varphi_n]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Таким образом, ортогональность доказана.

Каждый из элементов φ_n полученной ортогональной системы представляет собой многочлен степени n, умноженный на $e^{-x^2/2}$. Следовательно, ее элементы должны, с точностью до числовых множителей, совпадать с функциями Эрмита, которые мы построили в § 3 гл. VII ортогонализацией последовательности

$$e^{-x^2/2}, \quad xe^{-x^2/2}, \quad \ldots, \quad x^n e^{-x^2/2}, \quad \ldots$$

в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Покажем теперь, что функции $\{\varphi_n\}$ являются собственными функциями преобразования Фурье:

$$F\varphi_n = c_n \varphi_n. \tag{6}$$

Это вытекает из следующих фактов.

1. Уравнение (3) инвариантно относительно преобразования F.

2. Уравнение (3) при каждом n имеет, с точностью до постоянного множителя, лишь одно решение вида $P_n(x)\, e^{-x^2/2}$, где P_n — многочлен степени n.

3. Преобразование Фурье переводит $x^n e^{-x^2/2}$ в $\left(i\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} = Q_n(x)\, e^{-x^2/2}$, где Q — многочлен степени n (последнее утверждение легко проверяется по индукции).

Из равенства (6) следует, что при каждом целом k

$$F^k \varphi_n = c_n^k \varphi_n.$$

Но преобразование Фурье, примененное четырежды, переводит каждую функцию в себя, умноженную на $4\pi^2$. Поэтому $c_n^4 = 4\pi^2$, т. е. c_n может принимать лишь значения $\pm\sqrt{2\pi}$ и $\pm i\sqrt{2\pi}$.

Итак, *преобразование Фурье F в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ есть линейный оператор, который в базисе, состоящем из функций Эрмита, записывается как диагональная матрица с элементами вида $\pm\sqrt{2\pi}$ и $\pm i\sqrt{2\pi}$* [1]).

---

[1]) Если преобразование Фурье определить формулой

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx$$

(т. е. формулой (1′) § 4, а не формулой (1)), то его четвертая степень будет единичным оператором, и в базисе, состоящем из функций Эрмита, мы получаем для F диагональную матрицу с элементами ± 1 и $\pm i$.

§ 6. Преобразование Лапласа

1. Определение и основные свойства преобразования Лапласа. Применимость преобразования Фурье к дифференциальным уравнениям существенно ограничивается тем, что это преобразование определено лишь для функций, суммируемых на всей прямой. В частности, преобразование Фурье не существует для функций, растущих при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$, а такие функции нередко возникают при решении дифференциальных уравнений. Эту трудность можно преодолеть, распространив преобразование Фурье на обобщенные функции; об этом пути мы скажем кратко в § 8 этой главы. Другой возможный подход, не выводящий за рамки классического понятия функции и классических методов анализа, состоит в замене преобразования Фурье так называемым *преобразованием Лапласа*.

Пусть функция f (вообще говоря, не интегрируемая на всей прямой) становится интегрируемой, если ее умножить на $e^{-\gamma x}$, где γ — некоторое действительное число. Тогда интеграл

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\lambda} e^{x\mu}\, dx$$

оказывается сходящимся для некоторых комплексных $s = \lambda + i\mu$, в частности, он сходится на прямой $\mu = -\gamma$. На этой прямой он служит преобразованием Фурье функции $f(x)\, e^{-\gamma x}$.

Наиболее важный для приложений случай, в котором наши предположения об интегрируемости функции $f(x)\, e^{-\gamma x}$ выполнены, — это тот, когда f удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} |f(x)| < Ce^{\gamma_0 x} \quad \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ f(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0 \end{gathered} \tag{1}$$

(γ_0 и C — постоянные). Интеграл

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx = \int_{0}^{\infty} f(x) e^{-isx}\, dx \tag{2}$$

существует при всех $s = \lambda + i\mu$, таких, что $\mu < -\gamma_0$, т. е. в полуплоскости, ограниченной прямой $\operatorname{Im} s = -\gamma_0$, и

представляет собой преобразование Фурье функции $f(x)e^{\mu x}$. Эта последняя может быть получена из g с помощью формулы обращения (мы считаем, что f удовлетворяет условиям, при которых эта формула применима)

$$f(x)\,e^{\mu x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda,$$

откуда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\mu-\infty}^{i\mu+\infty} g(s)\,e^{isx}\,ds, \quad s = \lambda + i\mu. \tag{3}$$

Поскольку функция $f(x)e^{\mu x}$ при $\mu < -\gamma_0$ убывает как экспонента (в силу (1)), ее преобразование Фурье g, а значит, и $g(s)e^{isx}$, есть функция, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Im} s < -\gamma_0$.

Сделаем теперь в формулах (2) и (3) замену переменных, положив $p = is$ и обозначив $g(s)$ через $\Phi(p)$. Получим

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}\,dx, \tag{2'}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \Phi(p)\,e^{px}\,\frac{dp}{i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\mu-i\infty}^{-\mu+i\infty} \Phi(p)\,e^{px}\,dp. \tag{3'}$$

Функция Φ определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma_0$; она называется *преобразованием Лапласа* функции f (удовлетворяющей условиям (1)).

Преобразование Лапласа по своим свойствам мало отличается от преобразования Фурье. Однако класс функций, для которых определено преобразование Лапласа, существенно отличен от класса $L_1(-\infty, \infty)$ функций, для которых существует преобразование Фурье.

2. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений (операторный метод). Преобразование Лапласа можно применить для отыскания решений дифференциальных уравнений. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x), \tag{4}$$

и пусть ищется его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{5}$$

Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа [1]), т. е. умножим его на e^{-px} и проинтегрируем от 0 до ∞. Пусть

$$Y(p) = \int_0^\infty y(x)\, e^{-px}\, dx$$

— преобразование Лапласа функции y. Интегрируя по частям, мы найдем преобразование Лапласа производной y':

$$\int_0^\infty y'(x)\, e^{-px}\, dx =$$

$$= y(x)\, e^{-px}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty y(x)\, e^{-px}\, dx = pY(p) - y_0.$$

Применяя эту формулу последовательно, найдем

$$\int_0^\infty y^{(n)}(x)\, e^{-px}\, dx =$$

$$= p(p^{n-1}Y(p) - y_{n-2} - py_{n-3} - \cdots - p^{n-2}y_0) - y_{n-1} =$$

$$= p^nY(p) - y_{n-1} - py_{n-2} - \cdots - p^{n-1}y_0 =$$

$$= p^nY(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k}y_k.$$

Пусть, наконец,

$$B(p) = \int_0^\infty b(x)\, e^{-px}\, dx.$$

В итоге преобразование Лапласа переводит дифференциальное уравнение (4) [с учетом начальных условий (5)] в алгебраическое уравнение

$$Q(p) + R(p)\, Y(p) = B(p),$$

---

[1]) Нетрудно показать законность его применения к уравнению (4), если $|b(x)|$ растет не слишком быстро.

где B — преобразование Лапласа функций b, Q — многочлен от p степени $n-1$, зависящий от коэффициентов уравнения и от начальных данных. Наконец,

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} p^k, \quad a_0 = 1$$

— характеристический многочлен уравнения (4).

Из полученного уравнения находим

$$Y(p) = \frac{B(p) - Q(p)}{R(p)}.$$

Решение y получается отсюда по формуле обращения

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\mu - i\infty}^{-\mu + i\infty} \frac{B(p) - Q(p)}{R(p)} e^{px}\, dp.$$

Этот интеграл обычно вычисляется с помощью вычетов.

Для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами известен так называемый операторный метод. Он состоит в том, что в таком уравнении

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x)$$

левая часть рассматривается как результат применения к неизвестной функции y оператора

$$A\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n, \tag{6}$$

а решение уравнения — как применение к его правой части уравнения оператора, обратного к оператору (6). Результат применения такого оператора к некоторым простейшим функциям — тригонометрическим, показательным, степенным и их комбинациям — нетрудно найти с помощью непосредственных вычислений. Это дает возможность автоматически выписывать решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами, если его правая часть представляет собой комбинации таких функций.

Ясно, что операторный метод можно истолковать как применение в неявной форме преобразования Лапласа (устанавливающего определенное соответствие между ал-

геброй дифференциальных операторов вида (6) и алгеброй многочленов), что как раз и можно рассматривать как обоснование этого метода, часто фигурирующего в технической литературе в виде некоторого «рецепта».

§ 7. Преобразование Фурье — Стилтьеса

1. Определение преобразования Фурье — Стилтьеса. Вернемся снова к преобразованию Фурье в пространстве $L_1(-\infty, \infty)$:

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx.$$

Эту формулу можно переписать в виде интеграла Римана—Стилтьеса

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x), \tag{1}$$

где

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \tag{2}$$

— абсолютно непрерывная функция с ограниченным изменением на всей числовой оси $\left(\text{равным } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\right)$. Однако равенство (1) имеет смысл не только для функций вида (2), но и для любых функций с ограниченным изменением на всей прямой. Интеграл

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} dF(x),$$

где F — произвольная функция с ограниченным изменением на прямой, мы будем называть *преобразованием Фурье—Стилтьеса* функции F. Для преобразования Фурье—Стилтьеса сохраняется ряд свойств, установленных нами ранее для обычного преобразования Фурье, например, следующее: функция g, определенная интегралом (1), непрерывна и ограничена на всей прямой.

Действительно,

$$|g(\lambda_1) - g(\lambda_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-N}^{N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}|\, dF(x) + \int_{|x|>N} |e^{-i\lambda_1 x} - e^{-i\lambda_2 x}|\, dF(x).$$

Второе слагаемое справа можно сделать сколь угодно малым (сразу при любых λ_1 и λ_2), взяв N достаточно большим, а первое при фиксированном N стремится к нулю при $\lambda_1 - \lambda_2 \to 0$.

Однако не все свойства преобразования Фурье переносятся на преобразование Фурье—Стилтьеса. Так, оно не стремится, вообще говоря, к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Пусть, например,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, dF(x) = 1.$$

Аналогично, преобразование Фурье—Стилтьеса функции, равной 0 при $x \leqslant x_0$ и 1 при $x > x_0$, есть $e^{-ix_0\lambda}$, т. е. периодическая функция от λ.

Если F — функция скачков, для которой точки

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

служат точками разрыва, а числа

$$\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \quad \sum_n |a_n| < \infty,$$

— величинами скачков в этих точках, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, dF(x) = \sum_n a_n e^{-in\lambda}$$

есть периодическая функция с периодом 2π. Если же F имеет скачки a_n в точках x_n, образующих произвольную последовательность чисел (вообще говоря, несоизмеримых), то ее преобразование Фурье—Стилтьеса имеет вид

$$\sum_n a_n e^{-ix_n\lambda}.$$

Функции такого типа относятся к так называемым *почти периодическим* функциям.

2. Применения преобразования Фурье — Стилтьеса в теории вероятностей. Для суммируемых на $(-\infty, \infty)$ функций мы ввели в § 4 понятие свертки:

$$f(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\xi) f_2(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

Положим

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, dt, \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t)\, dt.$$

Проинтегрировав равенство (3), перепишем его следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\xi) f_2(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{x} f_1(t-\xi)\, dt \right\} f_2(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\, dF_2(\xi)$$

(изменение порядка интегрирования здесь возможно в силу теоремы Фубини и абсолютной интегрируемости функции f). Полученное нами соотношение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\, dF_2(\xi)$$

сопоставляет функциям F_1 и F_2 функцию F. Но интеграл, стоящий здесь справа, существует как интеграл Лебега—Стилтьеса не только для абсолютно непрерывных функций, но и для любых двух функций с ограниченным изменением на всей прямой. Назовем выражение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-\xi)\, dF_2(\xi), \tag{4}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции с ограниченным изменением на прямой, *сверткой этих двух функций* и обозначим его $F_1 * F_2$. Покажем, что выражение (4) пред-

ставляет собой функцию, определенную при всех значениях x и имеющую ограниченное изменение на всей прямой [1]).

Действительно, F_1 — функция с ограниченным изменением, следовательно, она измерима по Борелю, а потому интеграл (4) существует при всех x. Далее,

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(x_1 - \xi) - F_1(x_2 - \xi))\, dF_2(\xi) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F_1(x - \xi) - F_1(x_2 - \xi)|\, d(\operatorname{var} F_2(\xi)),$$

откуда

$$V[F] \leqslant V[F_1]\, V[F_2],$$

т. е. F — функция с ограниченным изменением.

Теорема 1. *Если F есть свертка функций с ограниченным изменением F_1 и F_2, а g, g_1 и g_2 — их преобразования Фурье—Стилтьеса, то*

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)\, g_2(\lambda).$$

Доказательство. Пусть $F = F_1 * F_2$ и

$$a = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b$$

— некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда при каждом λ

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\, dF(x) = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda x_k} (F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{-i\lambda (x_k - \xi)} (F_1(x_k - \xi) -$$

$$- F_1(x_{k-1} - \xi)) e^{-i\lambda\xi}\, dF_2(\xi),$$

т. е.

$$\int_a^b e^{-i\lambda x}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{a-\xi}^{b-\xi} e^{-i\lambda x}\, dF_1(x) \right\} e^{-i\lambda\xi}\, dF_2(\xi).$$

---

[1]) В книге В. И. Гливенко «Интеграл Стилтьеса», Гостехиздат, 1936, дана элементарная конструкция, позволяющая придать смысл формуле (4) без использования меры.

Переходя здесь к пределу при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\, dF_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda \xi}\, dF_2(\xi),$$

т. е.

$$g(\lambda) = g_1(\lambda)\, g_2(\lambda).$$

Теорема о том, что преобразование Фурье—Стилтьеса переводит свертку функций в умножение, широко используется в теории вероятностей (м е т о д х а р а к т е р и с т и ч е с к и х ф у н к ц и й). Если ξ и η — две независимые случайные величины, а F_1 и F_2 — их функции распределения, то величине $\xi + \eta$ отвечает функция распределения

$$F = F_1 * F_2.$$

Необходимость рассматривать суммы независимых случайных слагаемых возникает в теории вероятностей очень часто. Переход от функций распределения к их преобразованиям Фурье—Стилтьеса, — так называемым характеристическим функциям, — позволяет заменить операцию свертки более простой и удобной операцией умножения.

У п р а ж н е н и я 1. Доказать, что преобразование Фурье — Стилтьеса обладает свойством единственности: если функция F непрерывна слева, а ее преобразование Фурье — Стилтьеса есть тождественный нуль, то $F(x) = \text{const}$.

2. Доказать, что операция свертки функций с ограниченным изменением коммутативна и ассоциативна.

§ 8. Преобразование Фурье обобщенных функций

Мы уже говорили, что применение преобразования Фурье, понимаемого в обычном смысле, в дифференциальных уравнениях и других вопросах сильно ограничивается тем, что это преобразование определено лишь для функций, абсолютно интегрируемых на всей прямой. Применимость преобразования Фурье можно существенно расширить, введя понятие преобразования Фурье для обобщенных функций. Изложим основные идеи такого построения.

Рассмотрим снова пространство S_∞ функций, бесконечно дифференцируемых на всей прямой и убывающих

на бесконечности вместе со своими производными быстрее, чем любая степень $1/|x|$ (см. § 4, гл. IV).

Приняв S_∞ за пространство основных функций, рассмотрим соответствующее пространство обобщенных функций S_∞^*.

Определим теперь в пространстве S_∞^* преобразование Фурье. Для этого вспомним прежде всего, что пространство S_∞ переводится преобразованием Фурье (понимаемым в обычном смысле) в себя: если $\varphi \in S_\infty$, то $F[\varphi] \in S_\infty$, причем F есть взаимно однозначное отображение S_∞ снова на все S_∞. Исходя из этого, введем следующее определение. *Преобразованием Фурье обобщенной функции $f \in S_\infty^*$ называется линейный функционал $g \in S_\infty^*$, определяемый формулой*

$$(g, \psi) = 2\pi (f, \varphi), \text{ где } \psi = F[\varphi]. \tag{1}$$

Эту формулу можно переписать и так:

$$(Ff, \psi) = 2\pi (f, \varphi) = 2\pi (f, F^{-1}\psi),$$

т. е. преобразование Фурье функционала $f \in S_\infty^*$ есть функционал, который на каждом элементе $\psi \in S_\infty$ принимает значение, равное (умноженному на 2π) значению исходного функционала f на элементе $\varphi = F^{-1}\psi$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье.

Поскольку $\psi = F[\varphi]$ пробегает все S_∞, когда φ пробегает S_∞, равенство (1) действительно определяет функционал на всем S_∞. Линейность и непрерывность этого функционала проверяются непосредственно.

Среди элементов S_∞^* содержатся все абсолютно интегрируемые функции. Для них только что сформулированное определение преобразования Фурье совпадает с обычным. Действительно, если $f \in S_\infty$, $\varphi \in S_\infty$, $g = F[f]$ и $\psi = F[\varphi]$, то по теореме Планшереля получаем

$$2\pi (f, \varphi) = (g, \psi), \tag{2}$$

причем, при заданной f существует лишь одна, с точностью до эквивалентности, функция g, удовлетворяющая этому равенству при всех $\varphi \in S_\infty$. С помощью соответствующего предельного перехода нетрудно показать, что равенство (2) имеет место и для любой $f \in L_1(-\infty, \infty)$. Таким образом, преобразование Фурье обобщенных функций представляет собой распределение классического преобразования на более широкий класс объектов.

Примеры. 1. Пусть $f(x) = c = \text{const}$. Тогда

$$2\pi (f, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(x)\, dx = 2\pi c\psi(0), \quad \psi = F[\varphi],$$

т. е. преобразование Фурье константы равно этой константе, умноженной на 2π и на δ-функцию.

2. Пусть $f(x) = e^{iax}$. Тогда

$$2\pi (f, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax} \varphi(x)\, dx = 2\pi\psi(-a),$$

т. е. преобразование Фурье функции e^{iax} есть сдвинутая δ-функция $\delta(x + a)$, умноженная на 2π.

3. Пусть $f(x) = x^2$. Тогда из равенства

$$\psi''(\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx,$$

положив в нем $\lambda = 0$ и умножив его на 2π, получаем

$$2\pi (x^2, \varphi(x)) = -2\pi\psi''(0),$$

т. е. преобразование Фурье функции x^2 есть вторая производная от δ-функции, умноженная на -2π.

Сделаем несколько заключительных замечаний.

Мы определили преобразование Фурье для обобщенных функций над S_∞. Но можно было бы взять и любое другое основное пространство, например, пространство K бесконечно дифференцируемых финитных функций. Для каждой функции $\varphi \in K$ преобразование Фурье (в обычном смысле) существует и, как можно проверить, представляет собой целую аналитическую функцию экспоненциального роста. Точнее говоря, преобразование Фурье если линейный оператор, переводящий пространство K в пространство Z, элементами которого служат целые аналитические функции ψ, для каждой из которых выполнены неравенства

$$|s|^q |\psi(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|}, \quad q = 1, 2, \ldots,$$

где $\tau = \operatorname{Im} s$, а C_q и a — постоянные, зависящие от функции ψ. Поскольку в пространстве K было введено понятие сходимости, отображением F, переводящим K в Z, индуцируется некоторое понятие сходимости в Z: последовательность $\{\psi_n\}$ сходится в Z к ψ, если соотношение $\varphi_n \to \varphi$ выполнено для соответствующих прообра-

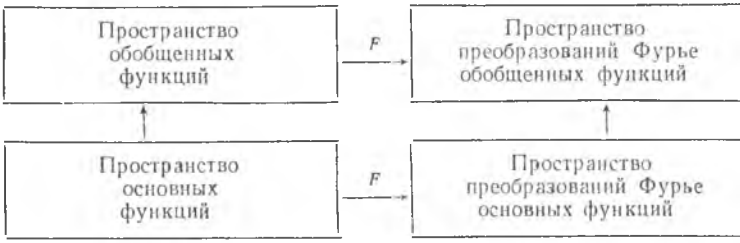
зов. Впрочем, это понятие сходимости нетрудно сформулировать и не пользуясь пространством K [1]).

Пусть теперь f — произвольный элемент из K^*. Поставим ему в соответствие линейный функционал g на Z, положив

$$(g, \psi) = 2\pi (f, \varphi), \text{ где } \psi = F[\varphi].$$

Этот функционал g мы назовем *преобразованием Фурье функционала* f. Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции f над основным пространством K есть обобщенная функция над Z, т. е. над тем пространством, в которое K переводится преобразованием Фурье, понимаемым в обычном смысле.

То же самое построение проходит и для обобщенных функций над каким-либо иными пространствами основных функций. При этом каждый раз будет возникать схема, включающая в себя четыре пространства: некоторое исходное пространство основных функций, совокупность преобразований Фурье этих функций (т. е. второе пространство основных функций) и два сопряженных пространства.



Эта схема сводится к двум пространствам, когда за основное пространство принимается S_∞, поскольку оно переводится преобразованием Фурье само в себя.

Понятие преобразования Фурье для обобщенных функций нашло широкое применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Читатель может ознакомиться с этими вопросами, например, по книге Г. Е. Шилова [52].

---

[1]) Именно, $\psi_n \to 0$ в Z, если при фиксированных C_q ($q = 1, 2, \ldots$) и a выполняются неравенства

$$|s^q \psi_n(s)| \leqslant C_q e^{a|\tau|},$$

и $\psi_n \to 0$ равномерно на каждом конечном интервале действительной оси.

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные определения. Некоторые задачи, приводящие к интегральным уравнениям

1. Типы интегральных уравнений. *Интегральным уравнением* называется уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла. Таково, например, уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{1}$$

где f и K — известные функции, а φ — искомая. Переменные s и t пробегают здесь некоторый фиксированный отрезок $[a, b]$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно. Ряд задач приводит и к нелинейным интегральным уравнениям, например, к уравнениям вида

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,g(\varphi(t), t)\,dt,$$

где K и g — заданные функции. Мы, однако, во всем дальнейшем ограничимся линейными уравнениями.

Отдельные интегральные уравнения рассматривались еще в начале прошлого столетия. Так, еще в 1823 г. Абель рассмотрел уравнение

$$f(s) = \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}\,dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad f(0) = 0,$$

носящее теперь его имя. Здесь f — заданная функция, а φ — искомая. Абель показал, что решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds.$$

Однако общая теория линейных интегральных уравнений была построена лишь на рубеже XIX и XX столетий, в основном в работах Вольтерра, Фредгольма и Гильберта.

Уравнение (1) называется *уравнением Фредгольма второго рода* (ср. п. 4 § 4 гл. II), а уравнение

$$\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{2}$$

(в котором неизвестная функция φ содержится только под знаком интеграла) — *уравнением Фредгольма первого рода*.

Упомянутое выше уравнение Абеля относится к так называемым *уравнениям Вольтерра*; общий вид этих уравнений таков:

$$\int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \tag{3}$$

(уравнение Вольтерра *первого рода*) или

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s) \tag{4}$$

(уравнение Вольтерра *второго рода*). Ясно, что уравнение Вольтерра можно рассматривать как уравнение Фредгольма, в котором функция K удовлетворяет условию

$$K(s, t) = 0 \text{ при } t > s.$$

Однако уравнения вольтеррова типа целесообразно выделить в особый класс, поскольку они обладают рядом существенных свойств, отсутствующих у произвольных фредгольмовых уравнений.

Если в уравнениях (1), (2) или (3) функция f равна нулю, то такое уравнение называется *однородным*. В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

2. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям. В дальнейших параграфах этой главы мы рассмотрим основные свойства линейных интегральных уравнений, но сначала мы опишем несколько задач, приводящих к таким уравнениям.

1. *Равновесие нагруженной струны.* Рассмотрим струну, т. е. упругую материальную нить длины l, которая может свободно изгибаться, но оказывает сопротивление растя-

жению, пропорциональное величине этого растяжения. Пусть концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Тогда в положении равновесия струна совпадает с отрезком оси x, $0 \leqslant x \leqslant l$. Предположим теперь, что в точке $x = \xi$ к струне приложена вертикальная сила $P = P_\xi$. Под действием этой силы струна отклонится от положения равновесия и примет, очевидно, форму ломаной, изображенной на рис. 23.

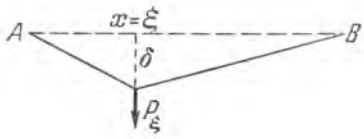


Рис. 23

Найдем величину δ отклонения струны в точке ξ под действием силы P_ξ, приложенной к этой точке. Если сила P_ξ мала по сравнению с натяжением ненагруженной струны T_0, то горизонтальную проекцию натяжения нагруженной струны можно по-прежнему считать равной T_0. Тогда из условия равновесия струны получаем равенство:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l - \xi} = P_\xi,$$

откуда

$$\delta = \frac{(l - \xi)\,\xi}{T_0 l} P_\xi.$$

Пусть теперь $u(x)$ — прогиб струны в некоторой точке x под действием силы P_ξ. Тогда

$$u(x) = P_\xi G(x, \xi),$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l - \xi)}{T_0 l} & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{(l - x)\,\xi}{T_0 l} & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Из этих формул сразу видно, в частности, что $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Предположим теперь, что на струну действует сила, распределенная по ней непрерывно, с плотностью $p(\xi)$. Если эта сила мала, то деформация зависит от силы линейно, а форма нагруженной струны описывается функцией

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi)\, p(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Итак, если задана нагрузка, действующая на струну, то формула (5) позволяет найти форму, которую примет струна под действием этой нагрузки.

Рассмотрим теперь обратную задачу: *найти то распределение нагрузки p, при котором струна примет заданную форму u.* Мы получили для нахождения функции p по заданной u уравнение, которое с точностью до обозначений есть уравнение (2), т. е. интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

2. *Свободные и вынужденные колебания струны.* Предположим теперь, что струна совершает какие-то колебания. Пусть $u(x, t)$ — положение в момент t той точки струны, которая имеет абсциссу x, и пусть ρ — линейная плотность струны [1]). На элемент струны длины dx действует сила инерции, равная

$$-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\rho dx, \quad \text{откуда} \quad p(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}\rho.$$

Подставив это выражение вместо $p(\xi)$ в формулу (5), мы получим

$$u(x, t) = -\int_0^l G(x, \xi)\,\rho\,\frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2}\,d\xi. \tag{6}$$

Предположим, что струна совершает гармонические колебания с некоторой фиксированной частотой ω и амплитудой $u(x)$, зависящей от x. Иначе говоря, пусть

$$u(x, t) = u(x)\sin \omega t.$$

Подставив это выражение в (6) и сократив обе части равенства на $\sin \omega t$, получаем для u следующее интегральное уравнение:

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^l G(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{7}$$

Если струна совершает не свободные колебания, а вынужденные, под действием внешней силы, то, как показы-

[1]) Мы полагаем, что $\rho = \text{const}$, хотя это и несущественно для дальнейшего.

вает несложная выкладка, соответствующее уравнение гармонических колебаний струны будет иметь вид

$$u(x) = \rho\omega^2 \int_0^l G(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi + f(x),$$

т. е. будет неоднородным уравнением Фредгольма второго рода.

3. *Сведение дифференциальных уравнений к интегральным.* Иногда решение дифференциального уравнения целесообразно сводить к решению интегрального. Например, доказывая существование и единственность решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$, мы видели (в гл. II), что его удобно свести к интегральному уравнению (нелинейному)

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\, d\xi.$$

Такое сведение возможно и для дифференциальных уравнений порядка выше первого. Рассмотрим, например, уравнение второго порядка

$$y'' + f(x)\, y = 0.$$

Положив $f(x) = \rho^2 - \sigma(x)$, где $\rho = \text{const}$, запишем его так:

$$y'' + \rho^2 y = \sigma(x)\, y. \tag{8}$$

Как известно, решение уравнения

$$y'' + \rho^2 y = g(x)$$

с начальными условиями $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_0'$ можно представить в виде

$$y(x) = y_0 \cos\rho(x - a) + \frac{y_0' \sin\rho(x - a)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_a^x \sin\rho(x - \xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Поэтому нахождение решения уравнения (8) с теми же начальными условиями сводится к решению интегрального уравнения

$$y(x) - \frac{1}{\rho}\int_a^x \sigma(\xi)\sin\rho(x-\xi)\,y(\xi)\,d\xi = y_0\cos\rho(x-a) + \frac{y_0'\sin\rho(x-a)}{\rho}.$$

§ 2. Интегральные уравнения Фредгольма

1. Интегральный оператор Фредгольма. В этом параграфе мы будем рассматривать уравнения Фредгольма второго рода, т. е. уравнения вида

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s). \tag{1}$$

Все встречающиеся здесь и ниже функции мы будем предполагать, вообще говоря, принимающими комплексные значения. Относительно функции K, называемой *ядром* этого уравнения, мы предположим, что она измерима и принадлежит классу L_2 на квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$:

$$\int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty. \tag{2}$$

Свободный член f уравнения (1) — это некоторая заданная функция из $L_2[a, b]$, а φ — неизвестная функция из $L_2[a, b]$. Ядра класса L_2 называются *ядрами Гильберта—Шмидта.*

Сопоставим уравнению (1) оператор A, определяемый равенством: $A\varphi = \psi$; это означает, что

$$\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = \psi(s). \tag{3}$$

Всякий оператор вида (3) называется *оператором Фредгольма.* Если же ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию (2), то он называется *оператором Гильберта—Шмидта.* Исследование уравнения (1), разумеется, сводится к изучению свойств этого оператора.

Теорема 1. *Равенство* (3), *где* $K(s, t)$ — *функция с интегрируемым квадратом, определяет в пространстве* $L_2[a, b]$ *компактный линейный оператор* A, *норма которого удовлетворяет неравенству*

$$\|A\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt}. \tag{4}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что интеграл

$$\int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt$$

существует в силу теоремы Фубини и условия (2) для почти всех s. Иначе говоря, $K(s, t)$ как функция от t при почти всех s принадлежит $L_2[a, b]$. Так как произведение функций с суммируемым квадратом суммируемо, то интеграл, стоящий в (3) справа, существует для почти всех s, т. е. функция ψ определена почти всюду. Покажем, что $\psi \in L_2[a, b]$. В силу неравенства Коши—Буняковского для почти всех s имеем

$$|\psi(s)|^2 = \left| \int_a^b K(s, t) \varphi(t) \, dt \right|^2 \leqslant \int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt \int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(s, t)|^2 \, dt.$$

Интегрируя по s и заменяя повторный интеграл от $|K(s, t)|^2$ двойным, получим неравенство

$$\|A\varphi\|^2 = \int_a^b |\psi(s)|^2 \, ds \leqslant \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt,$$

которое дает и интегрируемость $|\psi(s)|^2$, и оценку (4) для нормы оператора A. Остается показать, что оператор A компактен. Пусть $\{\psi_n\}$ — полная ортогональная система в $L_2[a, b]$. Тогда всевозможные попарные произведения $\psi_m(s)\psi_n(t)$ образуют полную систему в пространстве $L_2([a, b]\times[a, b])$ (см. теорему 1 п. 5 § 3 гл. VII) и, следовательно,

$$K(s, t) = \sum_{m, n=1}^{\infty} a_{mn} \psi_m(s) \psi_n(t).$$

Положим теперь

$$K_N(s, t) = \sum_{m, n=1}^{N} a_{mn}\psi_m(s)\psi_n(t),$$

и пусть A_N — оператор, определяемый ядром $K_N(s, t)$. Этот оператор компактен, поскольку он переводит все $L_2[a, b]$ в конечномерное подпространство (в гл. IV мы назвали такие операторы конечномерными). Действительно, если $\varphi \in L_2[a, b]$, то

$$A_N\varphi = \int_a^b K_N(s, t)\varphi(t)dt = \sum_{m, n=1}^{N} a_{mn}\psi_m(s)\int_a^b \varphi(t)\psi_n(t)\,dt =$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\psi_m(s)\sum_{n=1}^{N} a_{mn}b_n,$$

где

$$b_n = \int_a^b \varphi(t)\psi_n(t)\,dt,$$

т. е. каждый элемент $\varphi \in L_2[a, b]$ переводится оператором A_N в элемент конечномерного подпространства, порожденного векторами $\psi_1, \ldots, \psi_N$. Далее $K_N(s, t)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции $K(s, t)$, поэтому

$$\int_a^b\int_a^b (K(s, t) - K_N(s, t))^2\,ds\,dt \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Отсюда, применив оценку (4) к оператору $A - A_N$, имеем

$$\|A - A_N\| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Воспользовавшись теоремой о том, что предел сходящейся последовательности компактных операторов компактен (п. 2 § 6 гл. IV), получаем компактность оператора A.

Замечания. 1. В процессе доказательства теоремы 1 мы установили, что всякий оператор Гильберта—Шмидта может быть представлен как предел (в смысле сходимости по норме) последовательности конечномерных интегральных операторов.

2. Пусть A_1 и A_2 — два оператора вида (3) и $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ — отвечающие им ядра. Если операторы A_1 и A_2 равны, т. е. $A_1\varphi = A_2\varphi$ для всех $\varphi \in L_2[a, b]$, то $K_1(s, t) = K_2(s, t)$ почти всюду. Действительно, если

$$A_1\varphi - A_2\varphi = \int_a^b (K_1(s, t) - K_2(s, t))\,\varphi(t)\,dt = 0$$

для всех $\varphi \in L_2[a, b]$, то при почти всех $s \in [a, b]$

$$\int_a^b |K_1(s, t) - K_2(s, t)|^2\,dt = 0$$

и, значит,

$$\int_a^b \int_a^b |K_1(s, t) - K_2(s, t)|^2\,ds\,dt = 0,$$

откуда и следует наше утверждение. Таким образом, если мы, как обычно, не будем различать эквивалентные между собой суммируемые функции, то можно сказать, что *соответствие между интегральными операторами и ядрами взаимно однозначно.*

Теорема 2. *Пусть A — оператор Гильберта—Шмидта, определяемый ядром $K(s, t)$. Тогда сопряженный ему оператор A^* определяется «сопряженным» ядром $\overline{K(t, s)}$.*

Доказательство. Используя теорему Фубини, получаем

$$(Af, g) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, t) f(t)\,dt \right\} \overline{g(s)}\,ds =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(s, t) f(t) \overline{g(s)}\,dt\,ds = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, t) \overline{g(s)}\,ds \right\} f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(t) \overline{\left\{ \int_a^b \overline{K(s, t)}\, g(s)\,ds \right\}}\,dt = (f, A^* g),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

В частности, оператор A вида (3) самосопряжен в $L_2[a, b]$, т. е. $A^* = A$, тогда и только тогда, когда

$\overline{K(s, t)} = K(t, s)$. В случае, когда рассматривается действительное гильбертово пространство (и, стало быть, действительные ядра), условием самосопряженности служит равенство $K(s, t) = K(t, s)$.

Замечание. Мы рассмотрели интегральные операторы, действующие в пространстве $L_2[a, b]$. Однако, как все сказанное выше, так и излагаемые ниже результаты переносятся без изменений на тот случай, когда вместо отрезка $[a, b]$ берется любое другое пространство с мерой.

2. Уравнения с симметрическим ядром. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{5}$$

ядро которого удовлетворяет условиям

1) $$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty,$$

2) $$K(s, t) = \overline{K(t, s)}.$$

Мы будем называть такие уравнения *уравнениями с симметрическим ядром*. В силу теорем 1 и 2 предыдущего пункта соответствующий оператор Фредгольма

$$A\varphi = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt \tag{6}$$

компактен и самосопряжен. Следовательно, для него справедлива теорема Гильберта—Шмидта (п. 5 § 6, гл. IV). Применим эту теорему для отыскания решений уравнения (5). Поскольку для нас имеют значение лишь компактность и самосопряженность оператора (6), а не его интегральное представление, естественно писать уравнение (5) в символической форме

$$\varphi = A\varphi + f. \tag{7}$$

По теореме Гильберта—Шмидта для A существует такая ортонормальная система собственных функций $\{\psi_n\}$, отвечающих ненулевым собственным значениям $\{\lambda_n\}$, что каждый элемент ξ из L_2 представим в виде

$$\xi = \sum_n a_n\psi_n + \xi', \quad \text{где} \quad A\xi' = 0.$$

Положим

$$f = \sum_n b_n \psi_n + f', \quad Af' = 0, \tag{8}$$

и будем искать решение φ уравнения (7) в виде

$$\varphi = \sum_n x_n \psi_n + \varphi', \quad A\varphi' = 0. \tag{9}$$

Подставив разложения (8) и (9) в уравнение (7), получим

$$\sum_n x_n \psi_n + \varphi' = \sum_n x_n \lambda_n \psi_n + \sum_n b_n \psi_n + f'.$$

Это равенство удовлетворяется в том и только в том случае, когда

$$f' = \varphi',$$
$$x_n (1 - \lambda_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

т. е. когда

$$f' = \varphi',$$
$$x_n = \frac{b_n}{1 - \lambda_n} \quad \text{при} \quad \lambda_n \neq 1,$$
$$b_n = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n = 1.$$

Последнее равенство дает необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (7). Координаты x_n, отвечающие тем n, для которых $\lambda_n = 1$, при этом произвольны. Мы получаем, таким образом, следующий результат.

Теорема 3. *Если* 1 *не является собственным значением оператора* A, *то уравнение* (7) *при любом* f *имеет одно и только одно решение. Если же* 1 *есть собственное значение оператора* A, *то уравнение* (7) *разрешимо в том и только том случае, когда свободный член* f *ортогонален всем собственным функциям оператора* A, *отвечающим собственному значению* 1. *Если это последнее условие выполнено, то уравнение* (7) *имеет бесконечное множество решений.*

3. Теоремы Фредгольма. Случай вырожденных ядер. Мы перейдем теперь к рассмотрению уравнений Фредгольма второго рода с ядрами, подчиненными условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt < \infty$$

обеспечивающему компактность оператора), но без условия симметрии.

Предположим сначала, что рассматривается уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{10}$$

ядро которого — вырожденное, т. е. имеет вид

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s)\,Q_i(t), \tag{11}$$

где P_i, Q_i — функции из L_2. Оператор с ядром вида (11) переводит всякую функцию $\varphi \in L_2$ в сумму

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

т. е. в элемент конечномерного подпространства, порожденного функциями P_i $(i = 1, \ldots, n)$. Заметим, что в выражении (11) функции $P_1, \ldots, P_n$ можно считать линейно независимыми между собой. Действительно, если это не так, то, представив каждую из функций P_i как линейную комбинацию независимых, мы получим, что то же самое ядро $K(s, t)$ можно записать в виде суммы меньшего числа слагаемых вида $\tilde{P}_j(s)\,\tilde{Q}_j(t)$, так что функции $\tilde{P}_j$ линейно независимы. Аналогичную редукцию можно проделать для функций Q_j. Как легко видеть, после этих редукций получится ядро, в котором и P_j и Q_i будут между собой линейно независимы.

Итак, будем решать уравнение (10) с вырожденным ядром (11), в котором функции $P_1, \ldots, P_n$ (так же как и $Q_1, \ldots, Q_n$) линейно независимы. Подставив в уравнение (10) вместо $K(s, t)$ соответствующую сумму, получим

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt + f(s). \tag{12}$$

Введя обозначения

$$\int_a^b Q_i(t)\,\varphi(t)\,dt = q_i,$$

перепишем уравнение (12) в виде

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

Подставив это выражение для φ в уравнение (10), получим

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \int_a^b Q_i(t) \left[\sum_{j=1}^{n} q_j P_j(t) + f(t) \right] dt + f(s). \quad (13)$$

Положив

$$\int_a^b Q_i(t) P_j(t)\, dt = a_{ij}, \qquad \int_a^b Q_i(t) f(t)\, dt = b_i,$$

запишем равенство (13) так:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) = \sum_{i=1}^{n} P_i(s) \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i \right].$$

Функции P_i, по предположению, линейно независимы, поэтому отсюда следует равенство соответствующих коэффициентов:

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (14)$$

Мы получили для коэффициентов q_i систему линейных уравнений. Решив ее, мы найдем функцию

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i(s) + f(s).$$

Эта функция удовлетворяет интегральному уравнению (10), поскольку все выкладки, с помощью которых мы пришли от уравнения (10) к системе (14), можно проделать в обратном порядке.

Итак, *решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к решению соответствующей ему системы* (14) *линейных алгебраических уравнений.*

Для систем линейных уравнений хорошо известны условия существования и единственности решений.

I. Система линейных алгебраических уравнений

$$Tx = y, \quad T = \|a_{ik}\|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$

разрешима в том и только том случае, когда вектор y ортогонален каждому решению сопряженной однородной системы

$$T^*z = 0, \quad T^* = \|\overline{a_{ki}}\|.$$

II. Если детерминант матрицы T отличен от нуля, то уравнение $Tx = y$ имеет при любом y одно и только одно решение. Если же детерминант матрицы T равен нулю, то однородное уравнение $Tx = 0$ имеет ненулевые решения.

III. Поскольку матрица T и сопряженная матрица T^* имеют один и тот же ранг, однородные системы $Tx = 0$ и $T^*z = 0$ имеют одно и то же число линейно независимых решений.

В силу той связи, которая, как мы выяснили, существует между интегральными уравнениями с вырожденными ядрами и системами линейных алгебраических уравнений, эти утверждения можно рассматривать как теоремы, относящиеся к решениям вырожденных интегральных уравнений. Мы покажем в следующем пункте, что, по существу, эти же теоремы имеют место и для уравнений с произвольными (не обязательно вырожденными) ядрами. Однако, поскольку для невырожденных интегральных операторов такие понятия, как ранг матрицы и детерминант не имеют смысла, соответствующие теоремы нужно будет сформулировать так, чтобы эти понятия в них не участвовали.

4. Теоремы Фредгольма для уравнений с произвольными ядрами. Будем снова рассматривать уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{15}$$

но теперь на его ядро будем накладывать лишь условие Гильберта—Шмидта

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2\,ds\,dt < \infty$$

(обеспечивающее компактность оператора), но не будем это ядро предполагать ни вырожденным, ни симметрическим. Нас будут интересовать условия разрешимости уравнения (15) и свойства его решений. При этом существенным для нас будет лишь свойство компактности оператора, отвечающего уравнению (15), а не его интегральное представление. Поэтому мы будем все дальнейшие рассмотрения вести для операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi + f, \tag{16}$$

считая, что A — произвольный компактный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H.

Положив $T = I - A$ (где I — единичный оператор), перепишем уравнение (16) в виде

$$T\varphi = f. \tag{17}$$

Будем наряду с этим уравнением рассматривать однородное уравнение

$$T\varphi_0 = 0 \tag{18}$$

и сопряженные уравнения

$$T^*\psi = g, \tag{19}$$

$$T^*\psi_0 = 0 \tag{20}$$

($T^* = I - A^*$). Связь между свойствами решений этих четырех уравнений устанавливается следующими теоремами Фредгольма.

I. *Неоднородное уравнение $T\varphi = f$ разрешимо при тех и только тех f, которые ортогональны каждому решению сопряженного однородного уравнения $T^*\psi_0 = 0$.*

II (*альтернатива Фредгольма*). *Либо уравнение $T\varphi = f$ имеет при любом $f \in H$ одно и только одно решение, либо однородное уравнение $T\varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.*

III. *Однородные уравнения* (18) *и* (20) *имеют одно и то же, и притом конечное, число линейно независимых решений.*

Прежде чем приступать к доказательству этих теорем, заметим, что они справедливы (в силу сказанного в п. 2) для уравнений с симметрическим ядром. При этом в силу совпадения A и A^* теорема III становится тривиальной.

С другой стороны, если A — вырожденный интегральный оператор, то соответствующие уравнения сводятся,

как мы видели выше, к системам линейных алгебраических уравнений; при этом теоремы Фредгольма автоматически переходят в теоремы о линейных системах, приведенные в предыдущем пункте.

Поскольку всякий компактный оператор есть предел сходящейся последовательности вырожденных, т. е. конечномерных, операторов, мы могли бы доказать теоремы Фредгольма с помощью соответствующего предельного перехода (от вырожденных ядер к невырожденным). Мы, однако, пойдем по другому пути и дадим доказательство этих теорем, не связанное с рассмотрением вырожденных уравнений.

Доказательство теорем Фредгольма. Напомним, что Ker B есть совокупность нулей линейного непрерывного оператора B (т. е. множество всех тех $x \in H$, для которых $Bx = 0$), а Im B — область значений оператора B, т. е. совокупность векторов вида $y = Bx$. Ясно, что Ker B всегда есть замкнутое линейное подпространство. Множество Im B также представляет собой линейное многообразие, однако, вообще говоря, не замкнутое. Мы сейчас покажем, что для оператора $T = I - A$, где A — комплексный оператор, замкнутость соответствующего многообразия имеет место.

Лемма 1. *Многообразие* Im T *замкнуто.*

Доказательство. Пусть $y_n \in \operatorname{Im} T$ и $y_n \to y$. По предположению существуют такие векторы $x_n \in H$, что

$$y_n = Tx_n = x_n - Ax_n. \tag{21}$$

Мы можем считать, что векторы x_n ортогональны к Ker T, вычитая, если необходимо, из x_n его проекцию на Ker T. Далее, можно считать, что $\|x_n\|$ ограничены в совокупности. Действительно, в противном случае, переходя к подпоследовательности, мы бы имели $\|x_n\| \to \infty$ и, разделив на $\|x_n\|$, получили бы из (21), что $\frac{x_n}{\|x_n\|} - A\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0$. Но так как оператор A компактен, то, снова переходя к подпоследовательности, можно считать последовательность $\left\{A\frac{x}{\|x_n\|}\right\}$ сходящейся. Поэтому и $\frac{x_n}{\|x_n\|}$ будет сходиться, скажем, к вектору $z \in H$. Ясно, что $\|z\| = 1$ и $Tz = 0$, т. е. $z \in$ Ker T. Однако мы считаем векторы x_n ортогональными к Ker T и, следовательно, вектор z обязан быть ортогональным к Ker T. Полученное противоре-

чие и позволяет считать, что $\|x_n\|$ ограничены в совокупности. Вместе с тем в этом случае последовательность $\{Ax_n\}$ можно считать сходящейся, а тогда, как это следует из (21), будет сходящейся и последовательность $\{x_n\}$. Если через x обозначить предел этой последовательности, то из (21) следует, что $y = Tx$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пространство H является прямой ортогональной суммой замкнутых подпространств* $\operatorname{Ker} T$ *и* $\operatorname{Im} T^*$, *т. е.*

$$\operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T^* = H, \tag{22}$$

и аналогично,

$$\operatorname{Ker} T^* \oplus \operatorname{Im} T = H. \tag{23}$$

Доказательство. Мы уже знаем, что оба подпространства, фигурирующие в левой части равенства (22), замкнуты. Кроме того, они ортогональны, поскольку если $h \in \operatorname{Ker} T$, то $(h, T^*x) = (Th, x) = 0$ для всех $x \in H$. Остается доказать, что никакой ненулевой вектор не может быть одновременно ортогональным к $\operatorname{Ker} T$ и $\operatorname{Im} T^*$. Но если вектор z ортогонален к $\operatorname{Im} T^*$, то для любого $x \in H$ имеем $(Tz, x) = (z, T^*x) = 0$, т. е. $z \in \operatorname{Ker} T$. Равенство (23) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Из леммы 2 сразу вытекает первая теорема Фредгольма. Действительно, $f \perp \operatorname{Ker} T^*$ в том и только том случае, если $f \in \operatorname{Im} T$, т. е. если существует такое φ, что $T\varphi = f$.

Далее, для каждого целого k положим $H^k = \operatorname{Im}(T^k)$, так что, в частности, $H^1 = \operatorname{Im} T$. Ясно, что подпространства H^k образуют цепочку вложенных подпространств,

$$H \supset H^1 \supset H^2 \supset \ldots, \tag{24}$$

а в силу леммы 1 все эти подпространства замкнуты. При этом $T(H^k) = H^{k+1}$.

Лемма 3. *Существует такое j, что $H^{k+1} = H^k$ при всех $k \geqslant j$.*

Доказательство. Если такого j не существует, то, очевидно, все H^k различны. В этом случае можно построить такую ортонормированную последовательность $\{x_k\}$, что $x_k \in H^k$ и ортогонально H^{k+1}. Пусть $l > k$. Тогда

$$Ax_l - Ax_k = -x_k + (x_l + Tx_k - Tx_l)$$

и, следовательно, $\|Ax_l - Ax_k\| \geqslant 1$, так как $x_l + Tx_k - Tx_l \in H^{k+1}$. Поэтому из последовательности $\{Ax_k\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, что, однако, противоречит компактности оператора A. Тем самым лемма доказана.

Лемма. 4. *Если* Ker $T = \{0\}$, *то* Im $T = H$.

Доказательство. Если Ker $T = \{0\}$, то оператор T взаимно однозначен и, следовательно, если при этом Im $T \neq H$, то цепочка (24) состоит из различных подпространств, а это противоречит лемме 3. Поэтому Im $T = H$. Аналогично, Im $T^* = H$, если Ker $T^* = \{0\}$.

Лемма 5. *Если* Im $T = H$, *то* Ker $T = \{0\}$.

Доказательство. Так как Im $T = H$, то, по лемме 2, Ker $T^* = \{0\}$, но тогда, по лемме 4, Im $T^* = H$ и, следовательно, по лемме 2, Ker $T = \{0\}$.

Совокупность лемм 4 и 5 и составляет содержание второй теоремы (альтернативы) Фредгольма. Тем самым эта теорема доказана.

Докажем, наконец, третью теорему Фредгольма.

Предположим, что подпространство Ker T бесконечномерно. Тогда в этом подпространстве найдется бесконечная ортонормированная система $\{x_k\}$. При этом $Ax_k = x_k$ и, следовательно, при $k \neq l$ имеем $\|Ax_k - Ax_l\| = \sqrt{2}$. Но тогда из последовательности $\{Ax_k\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A.

Пусть теперь μ — размерность Ker T и ν — размерность Ker T^*. Предположим, что $\mu < \nu$. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu\}$ — ортонормированный базис в Ker T и $\{\psi_1, \ldots, \psi_\nu\}$ — ортонормированный базис в Ker T^*. Положим

$$Sx = Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j.$$

Так как оператор S получается из оператора T прибавлением конечномерного оператора, то все результаты, доказанные выше для оператора T, остаются верными и для оператора S.

Покажем, что уравнение $Sx = 0$ имеет только тривиальное решение. Действительно, допустим, что

$$Tx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j)\psi_j = 0. \tag{25}$$

Так как векторы ψ_j в силу леммы 2 ортогональны ко всем векторам вида Tx, то из (25) следует, что

$$Tx = 0,$$

$$(x, \varphi_j) = 0 \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant \mu.$$

Поэтому, с одной стороны, вектор x должен быть линейной комбинацией векторов φ_j, а с другой, — ортогонален им. Следовательно, $x = 0$. Итак, уравнение $Sx = 0$ имеет только тривиальное решение. Но тогда по второй теореме существует такой вектор y, что

$$Ty + \sum_{j=1}^{\mu} (y, \varphi_j)\psi_j = \psi_{\mu+1}.$$

Умножив это равенство скалярно на $\psi_{\mu+1}$, мы получим справа 1, а слева 0, поскольку $Ty \in \operatorname{Im} T$, а $\operatorname{Im} T \perp \perp \operatorname{Ker} T^*$. Это противоречие возникло из предположения $\mu < \nu$. Поэтому $\mu \geqslant \nu$. Заменяя теперь оператор T на T^*, мы получим $\mu \leqslant \nu$ и, следовательно, $\mu = \nu$.

Теорема III доказана полностью.

Замечания. 1. В теоремах Фредгольма по существу речь идет об обратимости оператора $A - I$ и эти теоремы означают, что $\lambda = 1$ — или регулярная точка для A, или собственное значение конечной кратности. Разумеется, все, что утверждается в этих теоремах, остается справедливым и для операторов $A - \lambda I$, если $\lambda \neq 0$. Поэтому *всякая отличная от 0 точка спектра компактного оператора является его собственным значением конечной кратности*. Кроме того, мы знаем, что множество таких собственных значений не более чем счетно. Ввиду следствия на с. 279 нуль в с е г д а принадлежит спектру компактного оператора в бесконечномерном пространстве, но не обязан, вообще говоря, быть собственным значением. Компактные операторы, для которых 0 служит единственной точкой спектра, называются (абстрактными) *операторами Вольтерра*.

2. Мы доказали теоремы Фредгольма для уравнения вида $\varphi = A\varphi + f$, где A — компактный оператор в гильбертовом пространстве. Эти теоремы могут быть перенесены без существенных изменений и на случай произвольного банахова пространства E. При этом, разумеется, сопряженное уравнение $\psi = A^*\psi + g$ будет уравнением в пространстве E^*, условие ортогональности $(f, \psi_0) = 0$ нужно понимать как обращение в нуль на элементе $f \in E$

каждого функционала из подпространства $\operatorname{Ker} T^* \subset E^*$ решений уравнения $T^* \psi_0 = 0$ и т. д. Изложение теорем Фредгольма для уравнений в банаховом пространстве содержится, например, в книге Л. А. Люстерника и В. И. Соболева «Элементы функционального анализа».

5. Уравнения Вольтерра. *Уравнением Вольтерра* (второго рода) называется интегральное уравнение

$$\varphi(s) = \int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt + f(s), \tag{26}$$

где $K(s, t)$ — ограниченная измеримая функция: $|K(s, t)| \leqslant M$. Поскольку это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма (с ядром, равным нулю при $t > s$), теоремы Фредгольма справедливы и для уравнения (26). Однако для уравнений Вольтерра эти теоремы можно уточнить следующим образом. *Уравнение Вольтерра* (26) *при любой функции* $f \in L_2$ *имеет одно и только одно решение.*

Действительно, дословно повторяя рассуждения п. 4 § 4 гл. II, мы видим, что некоторая степень оператора

$$A\varphi = \int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

является сжимающим оператором и, следовательно, однородное уравнение имеет единственное (тривиальное) решение. В силу теорем Фредгольма отсюда и следует наше утверждение.

Упражнение. Пусть на отрезке задано интегральное уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. Доказать для такого уравнения теоремы Фредгольма *в пространстве непрерывных функций.* При этом роль «сопряженного уравнения» играет интегральное уравнение с транспонированным ядром, а ортогональность понимается в смысле L_2.

6. Интегральные уравнения первого рода. *Абстрактным уравнением Фредгольма первого рода* называется уравнение вида

$$A\varphi = f, \tag{27}$$

т. е. уравнение, содержащее неизвестную функцию φ лишь под знаком компактного оператора.

Решение такого уравнения представляет собой задачу, вообще говоря, более сложную, чем решение уравнения второго рода, и уравнение (27) не может иметь решения при л ю б о й правой части.

Рассмотрим вначале в качестве простейшего примера уравнение

$$f(s) = \int_a^s \varphi(t)\, dt,$$

т. е. уравнение с ядром

$$K(s, t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \leqslant s, \\ 0 \text{ при } t > s. \end{cases}$$

Оно имеет очевидное решение $\varphi(s) = f'(s)$, если f абсолютно непрерывна и ее производная принадлежит L_2, и оно неразрешимо в противном случае.

Покажем, что и в общем случае уравнение (27) не может быть разрешимо при произвольном $f \in H$. Действительно, существование решения уравнения $A\varphi = f$ при любом $f \in H$ означало бы, что этот оператор отображает H снова на все H. Покажем, что это невозможно. Все H можно представить как сумму счетного числа шаров S_n (например, шаров радиуса 1, ..., n, ... с центром в нуле). Каждый из них переводится компактным оператором A в предкомпактное множество. Таким образом, замыкание $\operatorname{Im} A$ есть сумма счетного числа компактов. Но в H любой компакт нигде не плотен; в то же время H, как и любое полное метрическое пространство, не может быть представлено как сумма счетного числа нигде не плотных множеств. Таким образом, $\operatorname{Im} A \neq H$; иными словами, *каков бы ни был компактный оператор A в H, уравнение $A\varphi = f$ не может быть разрешимо при всех $f \in H$.*

Другой существенный момент состоит в том, что оператор обратный компактному, не ограничен. Поэтому, если f_1 и f_2 — два близких между собой элемента из H и оба уравнения

$$A\varphi_1 = f_1, \quad A\varphi_2 = f_2$$

разрешимы, то соответствующие решения $\varphi_1 = A^{-1}f_1$ и $\varphi_2 = A^{-1}f_2$ могут сильно отличаться друг от друга. Иначе говоря, сколь угодно малая погрешность в свободном члене уравнения может привести к сколь угодно большой ошибке в решении. Задачи, в которых малое изменение

исходных данных приводит к малому изменению решения (эта «малость» может в разных задачах пониматься по-разному), называются *корректными*. Решение интегрального уравнения первого рода (в отличие от уравнения второго рода) — *некорректная* задача. За последнее время разного рода некорректные задачи и методы их регуляризации (т. е. сведения их к задачам, в том или ином смысле корректным) получили широкое развитие. Однако изложение этих вопросов выходит за рамки данной книги.

§ 3. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Метод Фредгольма

1. Спектр компактного оператора в H. Будем рассматривать уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi + f,$$

или, иначе,

$$(I - \lambda A)\,\varphi = f, \tag{1}$$

где A — компактный оператор в гильбертовом пространстве H, а λ — числовой параметр.

В силу альтернативы Фредгольма возможны два и только два взаимоисключающих случая:

1. Уравнение (1) имеет при данном λ одно и только одно решение для каждого $f \in H$.

2. Однородное уравнение $\varphi = \lambda A\varphi$ имеет ненулевое решение.

В первом случае оператор $I - \lambda A$ отображает, и притом взаимно однозначно, H на все H. Отсюда следует существование ограниченного обратного оператора $(I-\lambda A)^{-1}$. Это равносильно тому, что оператор $\left(A - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1}$ определен на всем H и ограничен; иначе говоря, в этом случае $1/\lambda$ не принадлежит спектру оператора A.

Пусть теперь имеет место вторая возможность, т. е. существует такой отличный от нуля элемент $\varphi_\lambda \in H$, что

$$\varphi_\lambda = \lambda A\varphi_\lambda, \text{ или } A\varphi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\varphi_\lambda;$$

тогда $1/\lambda$ есть собственное значение оператора A.

Мы получаем следующий результат: *каждое отличное от нуля число $\mu = 1/\lambda$ является собственным значением компактного оператора A либо регулярно.* Иными словами,

у компактного оператора непрерывный спектр либо совсем отсутствует, либо состоит из одной точки $\mu = 0$.

Объединив только что сказанное с теоремой 4 § 6 гл. IV, мы получаем следующее описание спектра компактного оператора в H. Спектр любого компактного оператора A в H состоит из конечного или счетного числа отличных от нуля собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$, каждое из которых имеет конечную кратность, и точки нуль [1]). Точка нуль — единственная возможная предельная точка для последовательности $\{\mu_n\}$. Сама точка $\mu = 0$ может быть собственным значением конечной или бесконечной кратности, а может и не быть точкой множества собственных значений. Как было показано в п. 5 § 2 для уравнения

$$\varphi = \lambda B\varphi + f,$$

где B — интегральный оператор вольтеррова типа, всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма (разрешимость при любом $f \in L_2$). Иначе говоря, спектр интегрального оператора типа Вольтерра состоит из одной точки $\mu = 0$. Вместе с тем в конце п. 4 § 2 мы назвали абстрактным оператором Вольтерра компактный оператор, спектр которого сводится к точке 0. Поэтому можно сказать, что интегральный оператор Вольтерра является и абстрактным оператором Вольтерра, и вся эта терминология оказывается оправданной.

2. Отыскание решения в виде ряда по степеням λ. Детерминанты Фредгольма. Формально решение уравнения

$$(I - \lambda A)\,\varphi = f$$

можно записать в виде

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f. \tag{2}$$

Эта формула действительно определяет решение, если $\|\lambda A\| < 1$, т. е. $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$, поскольку в этом случае оператор $(I-\lambda A)^{-1}$ существует, определен на всем H и ограничен (см. п. 7 § 5 гл. IV). При этом оператор $(I-\lambda A)^{-1}$ можно представить как сумму степенного ряда

$$(I-\lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots,$$

[1]) $\mu = 0$ обязательно принадлежит спектру A, поскольку A^{-1} не может быть ограничен в бесконечномерном H (см. следствие на с. 279).

сходимость которого (по норме) обеспечивается условием $|\lambda| < 1/\|A\|$. Следовательно, решение (2) нашего уравнения (1) можно записать так:

$$\varphi = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f + \ldots \qquad (3)$$

Этот же результат получится, если искать решение уравнения (1) в виде степенно́го ряда

$$\varphi_\lambda = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \ldots + \lambda^n \varphi_n + \ldots$$

(где φ_n от λ уже не зависят). Подставив этот ряд вместо φ в правую и левую части уравнения $\varphi = \lambda A\varphi + f$ и приравняв затем коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях равенства, мы получим

$$\varphi_0 = f,\ \varphi_1 = Af,\ \ldots,\ \varphi_n = A\varphi_{n-1} = A^n f,\ \ldots,$$

т. е. ряд (3).

Покажем, что если A — интегральный оператор Гильберта—Шмидта, т. е. оператор, определяемый квадратично интегрируемым ядром $K(s,\ t)$, то оператор $(I - \lambda A)^{-1}$ при достаточно малых значениях λ может быть записан как сумма $I + \lambda\Gamma(\lambda)$ единичного оператора I и некоторого интегрального оператора $\lambda\Gamma(\lambda)$ Гильберта—Шмидта с квадратично интегрируемым ядром, зависящим от параметра λ. Выясним сначала, каким образом записываются ядра операторов A^2, A^3 и т. д. Рассмотрим для этого более общий вопрос: пусть даны два интегральных оператора

$$A\varphi = \int_a^b K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt, \quad B\varphi = \int_a^b Q(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$\int_a^b\int_a^b |K(s,\ t)|^2\,ds\,dt = k^2 < \infty, \quad \int_a^b\int_a^b |Q(s,\ t)|^2\,ds\,dt = q^2 < \infty.$$

Найдем ядро оператора AB. Имеем

$$AB\varphi = \int_a^b \left\{ K(s,\ u) \int_a^b Q(u,\ t)\,\varphi(t)\,dt \right\} du =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s,\ u)\,Q(u,\ t)\,du \right\} \varphi(t)\,dt.$$

Возможность изменения здесь порядка интегрирования вытекает из теоремы Фубини, поскольку подынтегральная функция

$$K(s,\ u)\,Q(u,\ t)\,\varphi(t)$$

суммируема по совокупности переменных u и t как произведение двух функций

$$K(s,\ u)\,\varphi(t) \text{ и } Q(u,\ t),$$

квадрат каждой из которых суммируем.

Положим

$$R(s,\ t) = \int_a^b K(s,\ u)\,Q(u,\ t)\,du; \tag{4}$$

в силу неравенства Коши—Буняковского имеем

$$|R(s,\ t)|^2 \leqslant \int_a^b |K(s,\ u)|^2\,du \int_a^b |Q(u,\ t)|^2\,du,$$

откуда

$$\int_a^b \int_a^b |R(s,\ t)|^2\,ds\,dt \leqslant k^2q^2.$$

Итак, произведение двух интегральных операторов типа Гильберта—Шмидта есть оператор того же типа, с ядром, определяемым формулой (4). В частности, положив $A = B$, получаем, что A^2 есть интегральный оператор с ядром

$$K_2(s,\ t) = \int_a^b K(s,\ u)\,K(u,\ t)\,du,$$

которое удовлетворяет условию

$$\int_a^b \int_a^b |K_2(s,\ t)|^2\,ds\,dt \leqslant \left[\int_a^b \int_a^b |K(s,\ t)|^2\,ds\,dt\right]^2 = k^4,$$

откуда $\|A^2\| \leqslant k^2$, где

$$k^2 = \int_a^b \int_a^b |K(s,\ t)|^2\,ds\,dt.$$

Аналогично получаем, что каждый из операторов A^n определяется ядром

$$K_n(s,\ t) = \int_a^b K_{n-1}(s,\ u)\,K(u,\ t)\,du,\ n = 2,\ 3,\ \ldots,$$

удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \int_a^b |K_n(s,\ t)|^2\,ds\,dt \leqslant k^{2n}. \tag{5}$$

Ядра $K_n(s,\ t)$ называются *итерированными ядрами*.

При $|\lambda| < 1/k$ ряд

$$K(s,\ t) + \lambda K_2(s,\ t) + \ldots + \lambda^{n-1}K_n(s,\ t) + \ \ldots$$

сходится в силу оценки (5) в пространстве $L_2([a,\ b] \times [a,\ b])$ к некоторой функции $\Gamma(s,\ t;\ \lambda)$, квадрат которой суммируем по s и t при каждом $|\lambda| < 1/k$. Интегральный оператор $\Gamma(\lambda)$, для которого функция $\Gamma(s,\ t;\ \lambda)$ служит ядром, есть сумма сходящегося ряда

$$A + \lambda A^2 + \ldots + \lambda^{n-1}A^n + \ldots \tag{6}$$

компактных операторов и, следовательно, он компактен.

Домножив эту сумму на λ и прибавив к ней единичный оператор I, мы и получим оператор $(I - \lambda A)^{-1}$. Итак, действительно, при $|\lambda| < 1/k$ оператор $(I - \lambda A)^{-1}$ есть сумма единичного оператора I и компактного оператора $\lambda\Gamma(\lambda)$ с ядром

$$\lambda\Gamma(s,\ t;\ \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(s,\ t).$$

Условие $|\lambda| < 1/k$ достаточно для сходимости ряда (6), но вовсе не необходимо. В некоторых случаях этот ряд может оказаться сходящимся даже при всех значениях λ. Например, если A — оператор вольтеррова типа с ядром, удовлетворяющим условию

$$|K(s,\ t)| \leqslant M,$$

то, как показывает прямой подсчет, для итерированных ядер $K_n(s,\ t)$ справедлива оценка:

$$|K_n(s,\ t)| \leqslant \frac{M^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

откуда следует сходимость ряда (6) при любом λ.

Однако, вообще говоря, степенной ряд (6) имеет некоторый конечный радиус сходимости. В то же время уравнение $\varphi = \lambda A\varphi + f$ имеет решение при всех λ, кроме конечного или счетного числа значений, именно таких, что $1/\lambda$ есть собственное значение оператора A. Фредгольм показал, что для интегрального оператора A, определяемого ограниченным и непрерывным ядром $K(s, t)$, решение уравнения $\varphi = \lambda A\varphi + f$ может быть найдено следующим способом. Введем обозначение

$$K\begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & \dots & K(s_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(s_n, t_1) & \dots & K(s_n, t_n) \end{vmatrix}$$

и определим функции $D(\lambda)$ и $D(s, t; \lambda)$, называемые, соответственно, *детерминантом Фредгольма* и *минором Фредгольма*, формулами:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n + \dots, \quad (7)$$

$$D(s, t; \lambda) =$$

$$= K\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} s & \xi_1 \\ t & \xi_1 \end{pmatrix} d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} s & \xi_1 & \xi_2 \\ t & \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times\, d\xi_1\, d\xi_2 + \dots + (-1)^n \times$$

$$\times \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} s & \xi_1 & \dots & \xi_n \\ t & \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n + \dots \quad (8)$$

Тогда для интегрального уравнения

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt + f(s)$$

резольвентное ядро дается формулой

$$\Gamma(s, t; \lambda) = \lambda \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

и решение записывается в виде

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \frac{D(s, t; \lambda)}{D(\lambda)} f(t)\, dt \qquad (9)$$

для всех значений λ, таких, что $1/\lambda$ не есть собственное значение интегрального оператора A, отвечающего ядру $K(s, t)$. При этом $D(\lambda)$ и $D(s, t; \lambda)$ представляют собой целые аналитические функции параметра λ и $D(\lambda) = 0$ в том и только том случае, если $1/\lambda$ есть собственное значение интегрального оператора A. Как показал в 1921 г. Т. Карлеман, формулы (7), (8) и (9), полученные Фредгольмом в предположении непрерывности ядра $K(s, t)$, остаются в силе и для любого ядра с интегрируемым квадратом. Мы не будем приводить здесь выводы формулы (9) и формул (7), (8) [1].

---

[1]) См. Carleman T. Zur Theorie der Integralgleichungen// Math. Zeitschr. — 1921. — 9. — 196—217, а также Smithles F. The Fredholm theory of integral equations// Duke Math. Journal. — 1941. — 8. — 107—130.

Вывод формул (7), (8) и (9) см. в книгах [35] и [46].

ГЛАВА X

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В тех вопросах функционального анализа, которыми мы занимались в предыдущих главах, основную роль играли понятия линейного функционала и линейного оператора. Однако некоторые задачи, возникающие в функциональном анализе, носят существенно нелинейный характер; они приводят к необходимости развивать наряду с «линейным» и «нелинейный» функциональный анализ, т. е. изучать нелинейные функционалы и нелинейные операторы в бесконечномерных пространствах. К нелинейному функциональному анализу относится, по существу, такая классическая область математики, как вариационное исчисление, основы которого были заложены еще в XVII—XVIII вв. в работах Бернулли, Эйлера, Лагранжа. Однако в целом нелинейный функциональный анализ представляет собой сравнительно новую область математики, пока еще далекую от своего завершения. В этой главе мы изложим некоторые первоначальные понятия, относящиеся к нелинейному функциональному анализу, в основном к теории дифференцирования, и некоторые применения этих понятий.

§ 1. Дифференцирование в линейных пространствах

1. Сильный дифференциал (дифференциал Фреше). Пусть X и Y — два нормированных пространства и F — отображение, действующее из X в Y и определенное на некотором открытом подмножестве O пространства X. Мы назовем это отображение *дифференцируемым* в данной точке $x \in O$, если существует такой ограниченный линейный оператор $L_x \in \mathscr{L}(X, Y)$, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$, при котором из неравенства $\|h\| < \delta$ следует неравенство

$$\|F(x+h) - F(x) - L_x h\| \leqslant \varepsilon \|h\|. \tag{1}$$

То же самое сокращенно записывают так:

$$F(x+h) - F(x) - L_x h = o(h). \tag{2}$$

Из (1) следует, что дифференцируемое в точке x отображение непрерывно в этой точке. Выражение $L_x h$ (представляющее собой, очевидно, при каждом $h \in X$ элемент пространства Y) называется *сильным дифференциалом* (или *дифференциалом Фреше*) отображения F в точке x. Сам линейный оператор L_x называется *производной*, точнее, *сильной производной* отображения F в точке x. Мы будем обозначать эту производную символом $F'(x)$.

Если отображение F дифференцируемо в точке x, то соответствующая производная определяется единственным образом. В самом деле, равенство $\|L_1 h - L_2 h\| = o(h)$ для операторов $L_i \in \mathscr{L}(X, Y)$ $(i = 1, 2)$ возможно, лишь если $L_1 = L_2$.

Установим теперь некоторые элементарные факты, непосредственно вытекающие из определения производной.

1. *Если* $F(x) = y_0 = \text{const}$, *то* $F'(x) \equiv 0$ (*т. е.* $F'(x)$ *в этом случае есть нулевой оператор*).

2. *Производная непрерывного линейного отображения* L *есть само это отображение*:

$$L'(x) = L. \tag{3}$$

Действительно, по определению имеем

$$L(x + h) - L(x) = L(h).$$

Несколько менее очевиден следующий важный результат.

3. (*Производная сложной функции*). *Пусть* X, Y, Z — *три нормированных пространства*, $U(x_0)$ — *окрестность точки* $x_0 \in X$, F — *отображение этой окрестности в* Y, $y_0 = F(x_0)$, $V(y_0)$ — *окрестность точки* $y_0 \in Y$ *и* G — *отображение этой окрестности в* Z. *Тогда, если отображение* F *дифференцируемо в точке* x_0, *а* G *дифференцируемо в точке* y_0, *то отображение* $H = GF$ (которое определено в некоторой окрестности точки x_0) *дифференцируемо в точке* x_0 *и*

$$H'(x_0) = G'(y_0) F'(x_0). \tag{4}$$

Действительно, в силу сделанных предположений

$$F(x_0 + \xi) = F(x_0) + F'(x_0)\,\xi + o_1(\xi),$$
$$G(y_0 + \eta) = G(y_0) + G'(y_0)\,\eta + o_2(\eta).$$

Но $F'(x_0)$ и $G'(y_0)$ — ограниченные линейные операторы. Поэтому

$$H(x_0+\xi) = G(y_0 + F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) =$$
$$= G(y_0) + G'(y_0)(F'(x_0)\xi +$$
$$+ o_1(\xi)) + o_2(F'(x_0)\xi + o_1(\xi)) =$$
$$= G(y_0) + G'(y_0)F'(x_0)\xi + o_3(\xi).$$

(Проведите аккуратную выкладку с ε и δ).

Если F, G и H — числовые функции, то формула (4) превращается в известное правило дифференцирования сложной функции.

4. *Пусть F и G — два непрерывных отображения, действующих из X в Y. Если F и G дифференцируемы в точке x_0, то и отображения $F+G$ и aF (a — число) тоже дифференцируемы в этой точке, причем*

$$(F+G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0), \tag{5}$$
$$(aF)'(x_0) = aF'(x_0). \tag{6}$$

Действительно, из определения суммы операторов и произведения оператора на число сразу получаем, что

$$(F+G)(x_0+h) = F(x_0+h) + G(x_0+h) =$$
$$= F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + o_1(h),$$
$$aF(x_0+h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + o_2(h),$$

откуда следуют равенства (5) и (6).

2. Слабый дифференциал (дифференциал Гато). Пусть снова F есть отображение, действующее из X в Y. *Слабым дифференциалом* или *дифференциалом Гато* отображения F в точке x (при приращении h) называется предел

$$DF(x, h) = \frac{d}{dt}F(x+th)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t},$$

где сходимость понимается как сходимость по норме в пространстве Y.

Иногда, следуя Лагранжу, выражение $DF(x, h)$ называют первой вариацией отображения F в точке x.

Слабый дифференциал $DF(x, h)$ может и не быть линеен по h. Если же такая линейность имеет место, т. е. если

$$DF(x, h) = F'_0(x)h,$$

где $F'_c(x)$ — ограниченный линейный оператор, то этот оператор называется *слабой производной* (или *производной Гато*).

Заметим, что для слабых производных теорема о дифференцировании сложной функции, вообще говоря, неверна. (Приведите пример!)

3. Формула конечных приращений. Пусть O — открытое множество в X и пусть отрезок $[x_0, x]$ целиком содержится в O. Пусть, наконец, F есть отображение X в Y, определенное на O и имеющее слабую производную F'_c в каждой точке отрезка $[x_0, x]$. Положив $\Delta x = x - x_0$ и взяв произвольный функционал $\varphi \in Y^*$, рассмотрим числовую функцию

$$f(t) = \varphi(F(x_0 + t\Delta x)),$$

определенную при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Эта функция дифференцируема по t. Действительно, в выражении

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \varphi\left(\frac{F(x_0 + t\Delta x + \Delta t\,\Delta x) - F(x_0 + t\Delta x)}{\Delta t}\right)$$

можно перейти к пределу под знаком непрерывного линейного функционала φ. В результате получаем

$$f'(t) = \varphi(F'_c(x_0 + t\Delta x)\,\Delta x).$$

Применив к функции f на отрезке $[0, 1]$ формулу конечных приращений, получим

$$f(1) = f(0) + f'(\theta), \text{ где } 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

т. е.

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \varphi(F'_c(x_0 + \theta\Delta x)\,\Delta x). \qquad (7)$$

Это равенство имеет место для любого функционала $\varphi \in Y^*$ (величина θ зависит, разумеется, от φ). Из (7) получаем

$$|\varphi(F(x) - F(x_0))| \leqslant \|\varphi\| \cdot \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'(x_0 + \theta\Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|. \qquad (8)$$

Выберем теперь ненулевой функционал φ так, что

$$\varphi(F(x) - F(x_0)) = \|\varphi\| \cdot \|F(x) - F(x_0)\|$$

(такой функционал φ существует в силу следствия 4 теоремы Хана—Банаха (см. п. 3 § 1 гл. IV)). При этом из (8) получаем

$$\|F(x) - F(x_0)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_c(x_0 + \theta \Delta x)\| \cdot \|\Delta x\|,$$
$$\Delta x = x - x_0. \tag{9}$$

Это неравенство можно рассматривать как аналог формулы конечных приращений для числовых функций.

Применив формулу (9) к отображению

$$x \to F(x) - F'_c(x_0)\,\Delta x,$$

получим следующее неравенство:

$$\|F(x) - F(x_0) - F'_c(x_0)\,\Delta x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \|F'_c(x_0 + \theta \Delta x) - F'_c(x_0)\| \cdot \|\Delta x\|. \tag{10}$$

4. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью. Сильная и слабая дифференцируемость представляют собой различные понятия даже в случае конечномерных пространств. Действительно, из анализа хорошо известно, что для числовой функции

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

при $n \geqslant 2$ из существования производной

$$\frac{d}{dt} f(x + th)$$

при любом фиксированном $h = (h_1, \ldots, h_n)$ еще не следует дифференцируемость этой функции, т. е. возможность представить ее приращение $f(x + h) - f(x)$ в виде суммы линейной (по h) части и члена выше первого порядка малости относительно h.

Простейшим примером здесь может служить функция двух переменных

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{если } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \tag{11}$$

Эта функция непрерывна всюду на плоскости, включая точку (0, 0). В точке (0, 0) ее слабый дифференциал существует и равен 0, поскольку

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+th)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3h_1^2h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}=0.$$

Вместе с тем этот дифференциал не является главной линейной частью приращения функции (11) в точке (0, 0). Действительно, если положить $h_2=h_1^2$, то

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{f(h_1,\ h_2)-f(0,\ 0)}{\|h\|}=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^2}{2h_1^2\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Однако если отображение F имеет сильную производную, то оно имеет и слабую, причем сильная и слабая производные совпадают. Действительно, для сильно дифференцируемого отображения имеем

$$F(x+th)-F(x)=F'(x)(th)+o(th)=$$
$$=tF'(x)h+o(th),$$
$$\frac{F(x+th)-F(x)}{t}=F'(x)h+\frac{o(th)}{t}\to F'(x)h.$$

Выясним условия, при которых из слабой дифференцируемости отображения F следует его сильная дифференцируемость.

Теорема 1. *Если слабая производная $F'_c(x)$ отображения F существует в некоторой окрестности U точки x_0 и представляет собой в этой окрестности (операторную) функцию от x, непрерывную в x_0, то в точке x_0 сильная производная $F'(x_0)$ существует и совпадает со слабой.*

Доказательство. По $\varepsilon>0$ найдем $\delta>0$ так, чтобы при $\|h\|<\delta$ выполнялось неравенство:

$$\|F'_c(x_0+h)-F'_c(x_0)\|\leqslant\varepsilon.$$

Применив к отображению F формулу (10), получим:

$$\|F(x_0+h)-F(x_0)-F'_c(x_0)h\|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|F'_c(x_0+\theta h)-F'_c(x_0)\|\cdot\|h\|\leqslant\varepsilon\|h\|.$$

Тем самым имеет место (1), т. е. доказано как существование сильной производной $F'(x_0)$, так и ее совпадение со слабой производной.

В дальнейшем мы будем, если не оговорено противное, рассматривать такие отображения, которые дифференцируемы в сильном, а значит, и в слабом смысле.

5. Дифференцируемые функционалы. Мы ввели дифференциал отображения F, действующего из одного нормированного пространства X в другое нормированное пространство Y. Производная $F'(x)$ такого отображения при каждом x — это линейный оператор из X в Y, т. е. элемент пространства $\mathscr{L}(X, Y)$. В частности, если Y — числовая прямая, то F — принимающая числовые значения функция на X, т. е. функционал. При этом производная функционала F в точке x_0 есть л и н е й н ы й функционал (зависящий от x_0), т. е. элемент пространства X^*.

П р и м е р. Рассмотрим в действительном гильбертовом пространстве H функционал $F(x) = \|x\|^2$. Тогда

$$\|x+h\|^2 - \|x\|^2 = 2(x, h) + \|h\|^2;$$

величина $2(x, h)$ представляет собой главную линейную (по h) часть этого выражения, следовательно,

$$F'(x) = F'_c(x) = 2x.$$

У п р а ж н е н и е. Найти производную функционала $\|x\|$ в гильбертовом пространстве. (*Ответ*: $x/\|x\|$ при $x \neq 0$; при $x = 0$ не существует.)

6. Абстрактные функции. Предположим теперь, что к числовой прямой сводится пространство аргументов X. Отображение $F(x)$, сопоставляющее числу x элемент некоторого банахова пространства Y, называется *абстрактной функцией*. Производная $F'(x)$ абстрактной функции (если она существует) представляет собой (при каждом x) элемент пространства Y — касательный вектор к кривой $F(x)$. Для абстрактной функции (представляющей собой функцию одного числового аргумента) слабая дифференцируемость совпадает с сильной.

7. Интеграл. Пусть F — абстрактная функция действительного аргумента t со значениями в банаховом пространстве Y. Если F задана на отрезке $[a, b]$, то можно определить интеграл функции F по отрезку $[a, b]$. Этот интеграл понимается как предел интегральных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)(t_{k+1} - t_k), \tag{12}$$

отвечающих разбиениям

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

При условии, что $\max (t_{k+1} - t_k) \to 0$. Интеграл (представляющий собой, очевидно, элемент из Y) обозначается символом

$$\int_a^b F(t)\, dt. \tag{13}$$

Рассуждения, в значительной мере аналогичные проводимым для функций, принимающих скалярные значения, показывают, что интеграл от функции, непрерывной на отрезке, существует; при этом он обладает свойствами обычного риманова интеграла. Среди этих свойств отметим следующие.

1. Если U — фиксированное линейное непрерывное отображение пространства Y в некоторое пространство Z, то

$$\int_a^b UF(t)\, dt = U \int_a^b F(t)\, dt.$$

2. Если $F(t)$ имеет вид $f(t)\, y_0$, где $f(t)$ — числовая функция, а y_0 — фиксированный элемент из Y, то

$$\int_a^b F(t)\, dt = y_0 \int_a^b f(t)\, dt.$$

3. $$\left\| \int_a^b F(t)\, dt \right\| \leqslant \int_a^b \| F(t) \|\, dt.$$

Пусть снова X и Y — нормированные пространства, а $\mathbf{BC}(X, Y)$ — линейное пространство всех непрерывных ограниченных [1]) отображений X в Y. В пространстве $\mathbf{BC}(X, Y)$ можно ввести топологию, принимая за окрестности нуля множества

$$U_{n\varepsilon} = \{F: \sup_{\|x\| \leqslant n} \| F(x) \| < \varepsilon\}.$$

---

[1]) Отображение $F: X \to Y$ называется *ограниченным*, если для всякого ограниченного множества $Q \subset X$ множество $F(Q)$ ограничено в Y. Нелинейное непрерывное отображение не обязательно ограничено.

На подпространстве $\mathscr{L}(X, Y) \subset \mathbf{BC}(X, Y)$ всех линейных непрерывных отображений X в Y эта топология совпадает с обычной топологией в $\mathscr{L}(X, Y)$, задаваемой операторной нормой. Пусть $J = [x_0, x_0 + \Delta x]$ — какой-нибудь прямолинейный отрезок в X. Допустим, что задано непрерывное отображение этого отрезка в пространство $\mathbf{BC}(X, Y)$, т. е. что каждой точке $x \in J$ сопоставлено некоторое отображение $F(x) \in \mathbf{BC}(X, Y)$, непрерывно зависящее от векторного параметра $x \in J$. Тогда можно определить интеграл от $F(x)$ по отрезку J, полагая

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F(x)\,dx = \int_0^1 F(x_0 + t\,\Delta x)\,(\Delta x)\,dt \tag{14}$$

(здесь $F(x_0 + t\Delta x)\,(\Delta x)$ при каждом $t \in [0, 1]$ есть элемент пространства Y, являющийся образом элемента $\Delta x \in X$ при отображении $F(x_0 + t\Delta x)$). Ясно, что интеграл, стоящий в правой части формулы (14), существует и является элементом пространства Y.

Применим эту конструкцию к восстановлению отображения по его производной.

Рассмотрим отображение F, которое действует из X в Y и имеет на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ непрерывно зависящую от x сильную производную $F'(x)$. Тогда существует интеграл $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx$. Докажем, что имеет место равенство

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0), \tag{15}$$

обобщающее формулу Ньютона—Лейбница. Действительно, по определению,

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} F'(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_0 + t_k\,\Delta x)\,(\Delta x)\,(t_{k+1} - t_k) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F'(x_k)\,(\Delta x_k),$$

где

$$x_k = x_0 + t_k\,\Delta x, \quad \Delta x_k = (t_{k+1} - t_k)\,\Delta x, \quad \delta = \max_k (t_{k+1} - t_k).$$

Но в то же время при любом разбиении отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_0 + t_{k+1}\Delta x) - F(x_0 + t_k \Delta x)] = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)].$$

По формуле (10) получаем

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k) - F'(x_k)\Delta x_k] \right\| \leqslant \|\Delta x\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \sup_{\theta} \|F'(x_k + \theta_k \Delta x_k) - F'(x_k)\|. \quad (16)$$

Так как производная $F'(x)$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$, правая часть неравенства (16) стремится к нулю при неограниченном измельчении разбиения отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$, откуда и вытекает равенство (15).

8. Производные высших порядков. Пусть F — дифференцируемое отображение, действующее из X в Y. Его производная $F'(x)$ при каждом $x \in X$ есть элемент из $\mathscr{L}(X, Y)$, т. е. F' есть отображение пространства X в пространство линейных операторов $\mathscr{L}(X, Y)$. Если это отображение дифференцируемо, то его производная называется *второй производной* отображения F и обозначается символом F''. Таким образом, $F''(x)$ есть элемент пространства $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ линейных операторов, действующих из X в $\mathscr{L}(X, Y)$. Покажем, что элементы этого пространства допускают более удобную и наглядную интерпретацию в виде так называемых билинейных отображений.

Мы говорим, что задано *билинейное отображение* пространства X в пространство Y, если каждой упорядоченной паре элементов x, x' из X поставлен в соответствие элемент $y = B(x, x') \in Y$ так, что выполнены следующие условия:

1) для любых x_1, x_2, x_1', x_2' из X и любых чисел α, β имеют место равенства:

$$B(\alpha x_1 + \beta x_2, x_1') = \alpha B(x_1, x_1') + \beta B(x_2, x_1'),$$
$$B(x_1, \alpha x_1' + \beta x_2') = \alpha B(x_1, x_1') + \beta B(x_1, x_2');$$

2) существует такое положительное число M, что

$$\|B(x, x')\| \leqslant M\|x\| \cdot \|x'\| \tag{17}$$

при всех $x, x' \in X$.

Первое из этих условий означает, что отображение B линейно по каждому из двух своих аргументов; нетрудно показать, что второе условие равносильно непрерывности B по совокупности аргументов.

Наименьшее из чисел M, удовлетворяющих условию (17), называется *нормой* билинейного отображения B и обозначается $\|B\|$.

Линейные операции над билинейными отображениями определяются обычным способом и обладают обычными свойствами. Таким образом, билинейные отображения пространства X в пространство Y сами образуют линейное нормированное пространство, которое мы обозначим $B(X^2, Y)$. При полноте Y полно и $B(X^2, Y)$.

Каждому элементу A из пространства $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ можно поставить в соответствии элемент из $B(X^2, Y)$, положив

$$B(x, x') = (Ax)\, x'. \tag{18}$$

Очевидно, что это соответствие линейно. Покажем, что оно также и изометрично и отображает пространство $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ на все пространство $B(X^2, Y)$. Действительно, если $y = B(x, x') = (Ax)\, x'$, то

$$\|y\| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x'\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|x'\|,$$

откуда

$$\|B\| \leqslant \|A\|. \tag{19}$$

С другой стороны, если задано билинейное отображение B, то при фиксированном $x \in X$ отображение $x' \to (Ax)\, x' = B(x, x')$ есть линейное отображение пространства X в Y.

Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие элемент Ax пространства $\mathscr{L}(X, Y)$; очевидно, что Ax линейно зависит от x, т. е. билинейное отображение B определяет некоторый элемент A пространства $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$. При этом ясно, что отображение B восстанавливается по A при помощи формулы (18) и

$$\|Ax\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|(Ax)\, x'\| = \sup_{\|x'\| \leqslant 1} \|B(x, x')\| \leqslant \|B\| \cdot \|x\|,$$

откуда

$$\|A\| \leqslant \|B\|. \tag{20}$$

Сопоставляя (19) и (20), получаем $\|A\| = \|B\|$. Итак, соответствие между $B(X^2, Y)$ и $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$, определяемое равенством (18), линейно и изометрично, а следовательно, взаимно однозначно. При этом образ пространства $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$ есть все $B(X^2, Y)$.

Мы выяснили, что вторая производная $F''(x)$ есть элемент пространства $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, Y))$. В соответствии с только что сказанным мы можем считать $F''(x)$ элементом пространства $B(X^2, Y)$.

Рассмотрим элементарный пример. Пусть X и Y — конечномерные евклидовы пространства размерностей m и n соответственно. Тогда каждое линейное отображение X в Y можно задать некоторой $(n \times m)$-матрицей. Таким образом, производная $F'(x)$ отображения F, действующего из X в Y, есть (зависящая от $x \in X$) матрица. Если в X и Y выбраны базисы, скажем,

$$e_1, \ldots, e_m \text{ в } X \text{ и } f_1, \ldots, f_n \text{ в } Y,$$

то

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_me_m, \quad y = y_1f_1 + \cdots + y_nf_n.$$

Тогда отображение $y = F(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, \ldots, x_m), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= F_n(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Вторая производная $F''(x)$ определяется в этом случае совокупностью $n \times m \times m$ величин $a_{k,ij} = \dfrac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}$. Такую совокупность величин $a_{k,ij}$ можно рассматривать как определяемое формулой

$$b_{k,j} = \sum_{i=1}^{m} a_{k,ij}x_i$$

линейное отображение пространства X в пространство $\mathscr{L}(X, Y)$ или как определяемой формулой

$$y_k = \sum_{i,\, j=1}^{m} a_{k,\, ij} x_i x_j$$

билинейное отображение пространства X в Y.

Очевидным образом можно ввести понятие третьей, четвертой и вообще n-й производной отображения F, действующего из X в Y, определив n-ю производную как производную от производной $(n-1)$-го порядка. При этом, очевидно, n-я производная представляет собой элемент пространства $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(X, \ldots, \mathscr{L}(X, Y)))$. Повторяя рассуждения, проведенные для второй производной, можно каждому элементу этого пространства естественным образом поставить в соответствие элемент пространства $N(X^n, Y)$ n-линейных отображений X в Y. При этом под *n-линейным отображением* понимается такое соответствие $y = N(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ между упорядоченными системами $(x', x'', \ldots, x^{(n)})$ элементов из X и элементами пространства Y, которое линейно по каждому из x^i при фиксированных остальных элементах и удовлетворяет при некотором $M > 0$ условию

$$\|N(x', x'', \ldots, x^{(n)})\| \leqslant M \|x'\| \cdot \|x''\| \ldots \|x^{(n)}\|.$$

Таким образом, n-ю производную отображения F можно считать элементом пространства $N(X^n, Y)$.

9. Дифференциалы высших порядков. Мы определили (сильный) дифференциал отображения F как результат применения к элементу $h \in X$ линейного оператора $F'(x)$, т. е. $dF = F'(x)\, h$. Дифференциал второго порядка определяется как $d^2F = F''(x)\,(h, h)$, т. е. как квадратичное выражение, отвечающее отображению $F''(x) \in B(X^2, Y)$. Аналогично дифференциалом n-го порядка называется $d^nF = F^{(n)}(x)\,(h, h, \ldots, h)$, т. е. тот элемент пространства Y, в который элемент $(h, h, \ldots, h) \in X \times X \times \ldots \times X = X^n$ переводится отображением $F^{(n)}(x)$.

10. Формула Тейлора. Сильная дифференцируемость отображения F означает, что разность $F(x+h) - F(x)$ может быть представлена в виде суммы линейного члена и слагаемого, имеющего порядок выше первого относительно $\|h\|$. Обобщением этого факта является формула, аналогичная формуле Тейлора для числовых функций.

Теорема 2. *Пусть F — отображение, действующее из X в Y, определенное в некоторой области $O \subset X$ и такое, что $F^{(n)}(x)$ существует и представляет собой равномерно непрерывную функцию от x в O. Тогда имеет место равенство*

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + \frac{1}{2!}F''(x)(h,\ h) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\ \dots,\ h) + \omega(x,\ h), \qquad (21)$$

где $\|\omega(x,\ h)\| = o(\|h\|^n)$.

Доказательство будем вести по индукции. При $n = 1$ равенство (21) тривиально. Возьмем теперь произвольное фиксированное n и предположим, что равенство, получающееся из (21) заменой n на $n-1$, уже доказано для всех отображений, удовлетворяющих условиям теоремы, в которых n заменено на $n-1$. Тогда для отображения F' имеем

$$F'(x+h) = F'(x) + F''(x)h + \frac{1}{2!}F'''(x)(h,\ h) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n)}(x)(h,\ \dots,\ h) + \omega_1(x,\ h), \qquad (22)$$

где $\|\omega_1(x,\ h)\| = o(\|h\|^{n-1})$. Интегрируя обе части равенства (22) по отрезку $[x,\ x+h]$ и пользуясь формулой Ньютона—Лейбница (15), мы получим

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'(x+th)\,h\,dt = \int_0^1 \left\{F'(x) + tF''(x)h + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}t^2F'''(x)(h,\ h) + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}F^{(n)}(h,\ \dots,\ h)\right\}h\,dt + R_n, \qquad (23)$$

где $R_n = \int_0^1 \omega_1(x,\ th)\,h\,dt$.

Из (23) получаем

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h +$$

$$+ \frac{1}{2!}F''(x)(h,\ h) + \dots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(x)(h,\ \dots,\ h) + R_n,$$

причем

$$\| R_n \| \leqslant \int_0^1 \| \omega_1 (x, th) \| \cdot \| h \| \, dt = o(\| h \|^n).$$

Тем самым наше утверждение доказано.

Формулу (21) называют *формулой Тейлора для отображений.*

§ 2. Теорема о неявной функции и некоторые ее применения

1. Теорема о неявной функции. Одна из важнейших теорем классического анализа, имеющая разнообразные применения, — это теорема о неявной функции. Мы сейчас покажем, что эта теорема переносится без больших изменений с числовых функций на отображения произвольных банаховых пространств.

Теорема 1. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, U — окрестность точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$ и F — отображение U в Z, обладающее следующими свойствами:*

1. *F непрерывно в точке (x_0, y_0).*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$.*
3. *Частная производная $F'_y(x, y)$ существует в U и непрерывна в точке (x_0, y_0), а оператор $F'_y(x_0, y_0)$ имеет ограниченный обратный.*

Тогда уравнение $F(x, y) = 0$ разрешимо в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Точнее это означает следующее: существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и такое отображение

$$y = f(x), \tag{1}$$

определенное при $\| x - x_0 \| < \delta$ и непрерывное в точке x_0, что каждая пара (x, y), для которой $\| x - x_0 \| < \delta$ и $y = f(x)$, удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

и обратно, каждая пара (x, y), удовлетворяющая уравнению (2) и условиям $\| x - x_0 \| < \delta$, $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$, удовлетворяет и (1).

Доказательство. Обозначим через $U_{(x)} \subset Y$ совокупность тех y, для которых $(x, y) \in U$ при данном x.

Будем считать, что $\| x - x_0 \|$ настолько мало, что $y_0 \in U_{(x)}$, и рассмотрим определенное на $U_{(x)}$ отображение $A_{(x)}$:

$$A_{(x)}y = y - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y). \tag{3}$$

Ясно, что уравнение

$$A_{(x)}\, y = y$$

равносильно уравнению $F(x, y) = 0$.

Для доказательства существования решения уравнения (3) применим принцип сжимающих отображений. С этой целью покажем, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\| x - x_0 \| < \delta$ отображение $A_{(x)}$ является сжимающим и переводит шар $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$ в себя. Начнем с того, что вычислим и оценим по норме производную отображения $A_{(x)}$. Имеем в силу формул (3)—(5) § 1:

$$A'_{(x)}(y) = I - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_y(x, y) =$$
$$= [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} [F'_y(x_0, y_0) - F'_y(x, y)].$$

В силу непрерывности производной F'_y в точке (x_0, y_0) можно выбрать ε и δ так, что

$$\| A'_{(x)}(y) \| \leqslant q < 1.$$

Это неравенство вследствие формулы конечных приращений означает, что отображение $A(x)$ пространства Y при любом x, удовлетворяющем неравенству $\| x - x_0 \| < \delta$ на шаре $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$ является сжимающим. Оценим теперь $\| A_{(x)}\, y_0 - y_0 \|$. Имеем:

$$A_{(x)}y_0 - y_0 \| \leqslant \| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \| \cdot \| F(x, y_0) \| =$$
$$= \| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \| \cdot \| F(x, y_0) - F(x_0, y_0) \|.$$

В силу непрерывности отображения F в точке (x_0, y_0) последнее выражение можно сделать за счет выбора δ сколь угодно малым. Пусть $\delta > 0$ настолько мало, что

$$\| A_{(x)}\, y_0 - y_0 \| < \varepsilon (1 - q) \text{ при } \| x_0 - x \| < \delta.$$

Проверим, что при таком выборе δ отображение $A_{(x)}$ переводит замкнутый шар $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$ в себя. Действи-

тельно, если $\| x - x_0 \| < \delta$ и $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$, то из формулы конечных приращений получим

$$\| A_{(x)} y - y_0 \| \leqslant \| A_{(x)} y_0 - y_0 \| + \| A_{(x)} y - A_{(x)} y_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon (1 - q) + \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} \| A'_{(x)} (y_0 + \theta (y - y_0)) \| \cdot \| y - y_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon (1 - q) + \varepsilon q = \varepsilon.$$

Итак, при $\| x - x_0 \| < \delta$ отображение $A_{(x)}$ переводит замкнутый шар $\| y - y_0 \| \leqslant \varepsilon$ в себя и является на этом шаре сжимающим. Значит, в этом шаре существует единственная неподвижная точка $y^* = f(x)$, т. е. точка, для которой

$$y^* = y^* - [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y^*),$$

т. е. в силу условия 3 теоремы

$$F(x, y^*) = 0.$$

Отображение f и есть искомое. Действительно, справедливость уравнения (2) уже проверена. Равенство $f(x_0) = y_0$ вытекает из единственности неподвижной точки для отображения $A_{(x^0)}$, а непрерывность построенной функции f следует из того, что в приведенных выше рассуждениях величина ε может быть взята сколь угодно малой.

Замечание. Нетрудно показать, что если в теореме 1 предположить отображение F непрерывным в окрестности U (а не только в точке (x_0, y_0)), то соответствующее отображение f будет непрерывно в некоторой окрестности точки x_0.

Нижеследующая теорема устанавливает условия, при которых функция, определяемая уравнением вида $F(x, y) = 0$, дифференцируема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и пусть, кроме того, в* U *существует частная производная* F'_x, *непрерывная в точке* (x_0, y_0). *Тогда отображение* f *дифференцируемо в точке* x_0 *и*

$$f'(x_0) = -[F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_x(x_0, y_0). \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим выражение, стоящее в (4) справа, через Λ. Оно представляет собой линейный оператор, действующий из X в Y. Доказать, что этот оператор служит производной отображения f

в точке x_0, это значит доказать существование для каждого $\varepsilon > 0$ такого $\delta > 0$, что при любом x таком, что $\| x - x_0 \| < \delta$, выполнено неравенство

$$\| f(x) - f(x_0) - \Lambda (x - x_0) \| < \varepsilon \| x - x_0 \|. \tag{5}$$

Полагая $f(x) = y$, и заменив $f(x_0)$ на y_0, а оператор Λ — его выражением (4), имеем

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - \Lambda (x - x_0) = \\ = y - y_0 + [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = \\ = [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \{F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\}. \end{aligned}$$

Но $F(x, y) = F(x_0, y_0) = 0$, поэтому с помощью формулы конечных приращений получаем такую оценку:

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(x_0) - \Lambda (x - x_0) \| \leqslant \| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \| \cdot \| \{F(x, y) - \\ - F(x_0, y_0) - F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\} \| \leqslant \\ \leqslant \| [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \| \Big[\sup_{0<\theta,\, \theta_1<1} \| F'_x(x_0 + \theta (x - x_0), y_0 + \\ + \theta_1 (y - y_0)) - F'_y(x_0, y_0) \| \cdot \| x - x_0 \| + \\ + \sup_{0<\theta,\, \theta_1<1} \| F'_y(x_0 + \theta (x - x_0), \\ y_0 + \theta_1 (y - y_0)) - F'_y(x_0, y_0) \| \cdot \| y - y_0 \| \Big] \leqslant \\ \leqslant \eta [\| x - x_0 \| + \| y - y_0 \|], \end{aligned}$$

где величина η может быть сделана сколь угодно малой в силу непрерывности производных F'_x и F'_y, если величина δ достаточно мала. Таким образом, мы получили, что

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(x_0) - \Lambda (x - x_0) \| \leqslant \\ \leqslant \eta [\| x - x_0 \| + \| f(x) - f(x_0) \|] \leqslant \\ \leqslant \eta [\| x - x_0 \| + \| \Lambda (x - x_0) \| + \| f(x) - f(x_0) - \Lambda (x - x_0) \|]. \end{aligned}$$

Отсюда при достаточно малом η получаем

$$\| f(x) - f(x_0) - \Lambda (x - x_0) \| \leqslant \eta (1 - \eta)^{-1} (1 + \| \Lambda \|) \| x - x_0 \|,$$

и для доказательства неравенства (5) остается лишь выбрать η так, что $\eta (1 - \eta)^{-1} (1 + \| \Lambda \|) \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые применения теоремы о неявной функции.

2. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения

$$dx/dt = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

где $f(t, x)$ и x — элементы некоторого банахова пространства E. Задача (6) равносильна интегральному уравнению

$$x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau = 0. \tag{7}$$

Запишем это уравнение как $F(x_0, x(t)) = 0$. Таким образом, F — это оператор, отображающий прямую сумму пространства E и пространства $C_E^1[t_0, t_1]$ непрерывно дифференцируемых функций со значениями в E в пространство $C_E^1[t_0, t_1]$. Если функция $f(t, x)$ непрерывна и имеет непрерывную по (t, x) производную, то выражение

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

определяет дифференцируемое отображение пространства $C_E^1[t_0, t_1]$ в себя. Следовательно, и $F(x_0, x(t))$ есть дифференцируемый по $x(t)$ оператор, а так как x_0 входит в $F(x_0, x(t))$ аддитивно, то F есть дифференцируемая функция на $E \times C_E^1[t_0, t_1]$. Дифференциал этой функции по x имеет вид

$$F_x' h = h(t) - \int_{t_0}^{t} f_x'(\tau, x(\tau))\, h(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Правая часть этого равенства определяет оператор, отображающий $C_E^1[t_0, t_1]$ в себя. Этот оператор обратим. Действительно, для любой функции $y(t) \in C_E^1[t_0, t_1]$ уравнение

$$F_x' h(t) = y(t),$$

или

$$h(t) - \int_{t_0}^{t} f'_x(\tau,\ x(\tau))\, h(\tau)\, d\tau = y(t),$$

равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{dh(t)}{dt} - f'_x(t,\ x(t))\, h(t) = y'(t) \tag{9}$$

с начальным условием $h(t_0) = y(t_0)$.

Уравнение (9) — это линейное уравнение с непрерывными коэффициентами, поэтому в силу известных теорем (см. [24]) существует единственное решение этого уравнения, определенное на всем отрезке $[t_0,\ t_1]$ и удовлетворяющее указанному выше начальному условию, а это и означает обратимость оператора F'_x.

Полученный результат означает, что к уравнению

$$F(x_0,\ x(t)) = 0$$

применима теорема о неявной функции. В силу этой теоремы решение $x = x(t)$ данного уравнения, которое может рассматриваться как функция переменного начального значения x_0: $x = x(t,\ x_0)$, дифференцируемым образом зависит от x_0. В частности, принимая за E конечномерное пространство, мы получаем обычную теорему о непрерывной дифференцируемой зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных условий.

Аналогичным образом с помощью теоремы о неявной функции может быть получено утверждение о дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x,\ \alpha)$$

от параметра α, если его правая часть дифференцируемым образом зависит от α.

3. Касательные многообразия. Теорема Люстерника. В качестве еще одного применения теоремы о неявной функции рассмотрим следующий вопрос. Пусть $F(x)$, где $x = (x_1,\ x_2)$, — дифференцируемая функция на плоскости. Уравнение $F(x) = 0$ определяет на плоскости некоторую кривую C. Пусть x_0 — точка, принадлежащая этой кривой. Касательная к кривой C в данной точке

может быть определена либо как совокупность векторов вида $x_0 + th$, где h — вектор, перпендикулярный вектору $F'(x_0)$ (т. е. градиенту функции F в точке x_0), либо как совокупность точек $x_0 + th$, расстояние которых до кривой C есть бесконечно малая выше первого порядка относительно t. Содержание теоремы Люстерника состоит в том, что эквивалентность двух определений касательной имеет место и для многообразий в произвольных банаховых пространствах. Введем некоторые понятия и обозначения, необходимые для точной формулировки соответствующей теоремы.

Пусть X и Y — банаховы пространства и F — отображение пространства X в Y. Пусть далее M_0 — совокупность точек из X, удовлетворяющих уравнению $F(x) = 0$, и $x_0 \in M_0$. Предположим, что отображение F непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности U точки x_0. Мы назовем отображение F *регулярным в точке* x_0, если линейный оператор $F'(x_0)$ отображает пространство X на все Y.

Обозначим через T_0 совокупность элементов $h \in X$, удовлетворяющих условию $F'(x_0)h = 0$, т. е. $T_0 = \operatorname{Ker} F'(x_0)$. Ясно что T_0 есть подпространство в X. Сдвиг этого подпространства на вектор x_0, т. е. многообразие $x_0 + T_0$, обозначим через T_{x_0} и назовем линейным многообразием, *касательным* к множеству M_0 в точке x_0. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3 (Л. А. Люстерник). *При указанных выше условиях относительно F элемент $x_0 + h$ принадлежит касательному многообразию T_{x_0} в том и только том случае, если расстояние элемента $x_0 + th$ от множества M_0 есть величина выше первого порядка малости относительно t.*

Эта теорема играет очень важную роль в задачах оптимального управления. Она служит инструментом, с помощью которого известное правило множителей Лагранжа нахождения условного экстремума может быть распространено на широкий круг экстремальных задач в банаховых пространствах.

Сколько-нибудь полное изложение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги (о них см., например, в книге: А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974). Мы ограничимся тем, что проведем доказательство теоремы Люстерника для так называемого «разложимого» случая, в котором

теорема Люстерника почти непосредственно вытекает из теоремы о неявной функции. Именно, предположим, что пространство, на котором определено отображение F, может быть разложено в прямую сумму

$$X = T_0 \oplus T_\xi$$

подпространства $T_0 = \operatorname{Ker} F'(x_0)$ и некоторого пространства T_ξ. (Заметим, что в банаховом пространстве, отличном от гильбертова, не всякое подпространство имеет прямое дополнение. Более того, можно показать, что если в пространстве X всякое линейное подпространство имеет прямое дополнение, то X — гильбертово пространство.)

При этом предположении теорема 3 может быть сформулирована следующим более точным образом.

Теорема 4. *Если*

$$X = T_0 \oplus T_\xi$$

и отображение $F\colon X \to Y$ удовлетворяет указанным выше условиям, то существует такое гомеоморфное отображение окрестности точки x_0 в M_0 на окрестность этой же точки в T_{x_0}, что расстояние между соответствующими друг другу точками есть величина высшего порядка малости по сравнению с их расстояниями до точки x_0.

Доказательство. Обозначим через A оператор $F'(x_0)$, рассматриваемый только на подпространстве T_ξ, т. е.

$$A\xi = F'(x_0)\,\xi \text{ при } \xi \in T_\xi.$$

Покажем, что A отображает T_ξ на все Y. Действительно, по условию каждый элемент из X имеет вид

$$x = h + \xi, \quad h \in T_0, \quad \xi \in T_\xi.$$

Поэтому

$$F'(x_0)\,x = F'(x_0)\,(h + \xi) = F'(x_0)\,\xi = A\xi, \tag{10}$$

так как $F'(x_0)h = 0$. Но по условию $F'(x_0)$ отображает X на все Y, а это и означает, что $A\xi$ пробегает все Y, когда ξ пробегает T_ξ. Далее отображение

$$A\colon T_\xi \to Y$$

взаимно однозначно, так как, если $A\xi_1 = A\xi_2$, т. е. $F'(x_0)(\xi_1 - \xi_2) = 0$, то $\xi_1 - \xi_2 \in T_0$, откуда $\xi_1 - \xi_2 =$

$= 0$. Итак, оператор A обратим и по теореме Банаха обратный оператор A^{-1} линеен и ограничен.

Представив каждый элемент $x \in X$ в виде

$$x = x_0 + h + \xi,\ h \in T_0,\ \xi \in T_\xi,$$

перепишем уравнение $F(x) = 0$, определяющее многообразие M, так:

$$\Phi(h,\ \xi) = F(x_0 + h + \xi) = 0.$$

Частный дифференциал этой функции в точке $(0, 0)$, отвечающий приращению $\Delta\xi$ второго аргумента, имеет вид

$$\Phi'_\xi(0,\ 0)\,\Delta\xi = F'(x_0)\,\Delta\xi = A\Delta\xi.$$

Оператор $A = \Phi'_\xi(0, 0)$ имеет обратный, поэтому в силу теоремы о неявной функции уравнение $\Phi(h,\ \xi) = 0$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ равносильно уравнению вида

$$\xi = \psi(h),$$

где $\psi(h)$ — дифференцируемое отображение, удовлетворяющее условию $\psi(0) = 0$.

Мы получили, что каждая точка $x \in M_0$, достаточно близкая к точке x_0, имеет вид

$$x = x_0 + h + \psi(h),\quad h \in T_0,\quad \psi(h) \in T_\xi.$$

Тем самым построено отображение

$$x_0 + h \leftrightarrow x_0 + h + \psi(h)$$

некоторой окрестности точки x_0 в Tx_0 на окрестность той же точки в M_0. Это отображение взаимно однозначно и непрерывно. Остается показать, что расстояние между соответствующими друг другу точками, т. е. величина $\|\psi(h)\|$, имеет высший порядок малости по сравнению с $\|h\|$.

Дифференцируя равенство $\Phi(h,\ \psi(h)) = 0$, имеем:

$$\Phi'_h(0,\ 0)\,h + \Phi'_\xi(0,\ 0)\,\psi'(0)\,h = \Phi'_h(0,\ 0)\,h + A\psi'(0)\,h = 0,$$

откуда

$$\psi'(0)\,h = -A^{-1}\Phi'_h(0,\ 0)\,h = -A^{-1}F'(x_0)\,h = 0.$$

Поэтому в равенстве

$$\psi(h) = \psi(0) + \psi'(0)\,h + o(\|h\|)$$

первые два слагаемых справа равны нулю, т. е.

$$\psi(h) = o(\|h\|),$$

что и требовалось. Теорема доказана.

§ 3. Экстремальные задачи

Один из самых старых и наиболее разработанных разделов нелинейного функционального анализа — нахождение экстремумов функционалов. Изучение таких задач составляет содержание так называемого вариационного исчисления. Большинство методов, существующих в вариационном исчислении, связано со специальным видом тех функционалов, экстремальные значения которых ищутся. Однако некоторые общие приемы и результаты могут быть сформулированы и для более или менее произвольных функционалов. Не ставя себе здесь задачи сколько-нибудь полного изложения вариационных методов, мы ограничимся кратким рассмотрением элементов общей теории, лежащих в основе вариационного исчисления.

1. Необходимое условие экстремума. Пусть F — некоторый действительный функционал, определенный на банаховом пространстве X. Говорят, что функционал F *достигает в точке* x_0 *минимума*, если для всех x, достаточно близких к x_0, выполнено неравенство $F(x) - F(x_0) \geqslant 0$. Аналогично определяется максимум функционала. Если в данной точке x_0 функционал F достигает минимума или максимума, то мы будем говорить, что в этой точке функционал F *имеет экстремум*.

К отысканию экстремумов тех или иных функционалов могут быть сведены многие физические и механические задачи.

Для функций n переменных хорошо известно следующее необходимое условие экстремума: если функция f дифференцируема в точке $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и имеет в этой точке экстремум, то в этой точке $df = 0$ или, что равносильно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Это условие легко переносится на функционалы на произвольном нормированном пространстве.

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемый функционал F достигал в точке x_0 экстремума, необходимо, чтобы его дифференциал в этой точке равнялся нулю при всех h:*

$$F'(x_0)\,h \equiv 0.$$

Иначе говоря, необходимо, чтобы $F'(x_0) = 0$.

Доказательство. По определению дифференцируемости имеем

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)\,h + o(h). \tag{1}$$

Если $F'(x_0)\,h \neq 0$ для некоторого h, то при достаточно малых действительных λ знак всего выражения $F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$ совпадает со знаком его главного члена $F'(x_0)(\lambda h)$. Но $F'(x_0)$ — линейный функционал, поэтому $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)\,h$. Следовательно, если $F'(x_0)\,h \neq 0$, то выражение (1) может принимать при сколь угодно малых h как положительные, так и отрицательные значения, т. е. экстремума в точке x_0 быть не может.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть

$$F(x) = \int_a^b f(t,\ x(t))\,dt, \tag{2}$$

где f — непрерывно дифференцируемая функция. Этот функционал, рассматриваемый в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, дифференцируем. Действительно,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b [f(t,\ x(t) + h(t)) -$$

$$-f(t,\ x(t))]\,dt = \int_a^b f'_x(t,\ x(t))\,h(t)\,dt + o(h),$$

откуда

$$dF = \int_a^b f'_x(t,\ x(t))\,h(t)\,dt.$$

Равенство нулю этого линейного функционала для всех $h \in C\,[a, b]$ означает, что $f'_x(t, x(t)) = 0$. Действительно, при всяком $x(t) \in C\,[a, b]$ производная $f'_x(t, x(t))$ есть непрерывная функция от t. Если в какой-то точке t_0 она отлична от нуля, скажем, $f'_x(t_0, x(t_0)) \gtrless 0$, то это неравенство имеет место и в некоторой окрестности (α, β) точки t_0. Тогда, положив

$$h(t) = \begin{cases} (t-\alpha)(\beta - t) & \text{при } \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ 0 & \text{при остальных } t, \end{cases}$$

получаем

$$\int_a^b f'_x(t,\ x)\, h(t)\, dt > 0.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Уравнение $f'_x(t, x) = 0$ определяет, вообще говоря, некоторую кривую, на которой функционал (2) может достигать экстремума.

2. Рассмотрим на том же пространстве $C\,[a, b]$ функционал

$$F(x) = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, x(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{3}$$

где $K(\xi_1, \xi_2)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию $K(\xi_1, \xi_2) = K(\xi_2, \xi_1)$. Нетрудно подсчитать, что дифференциал этого функционала равен

$$dF = 2\int_a^b \int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

Если при всяком $h \in C\,[a, b]$ это выражение равно нулю, то в силу рассуждений, проведенных в примере 1, имеем

$$\int_a^b K(\xi_1,\ \xi_2)\, x(\xi_1)\, d\xi_1 = 0 \quad \text{для всех} \quad \xi_2,\ a \leqslant \xi_2 \leqslant b.$$

Одно из решений этого уравнения — функция $x \equiv 0$. Ответ на вопрос о том, имеется ли в этой точке экстремум и существуют ли другие точки, в которых экстремум возможен, зависит от вида функции $K(\xi_1, \xi_2)$ и требует дополнительного исследования.

3. Рассмотрим функционал

$$F(x) = \int_a^b f(t,\ x(t),\ x'(t))\,dt, \tag{4}$$

определенный на пространстве $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Здесь $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, а $f(t, x, x')$ — дважды дифференцируемая функция своих аргументов. Функционал (4) играет основную роль во многих вопросах вариационного исчисления. Найдем его дифференциал. Пользуясь формулой Тейлора, получаем

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b [f(t,\ x+h,\ x'+h') - f(t,\ x,\ x')]\,dt =$$

$$= \int_a^b (f'_x h + f'_{x'} h')\,dt + o(\|h\|),$$

где $\|h\|$ — норма функции h как элемента пространства $C^1[a, b]$. Итак, необходимое условие экстремума для функционала (4) имеет вид

$$dF = \int_a^b (f'_x h + f'_{x'} h')\,dt = 0. \tag{5}$$

В такой интегральной форме это условие мало пригодно для нахождения той функции x, на которой достигается экстремум. Преобразуем его к более удобному виду, проинтегрировав в (5) член $f'_{x'} h'$ по частям [1]). Получим

$$\int_a^b f'_{x'} h'\,dt = f'_{x'} h\Big|_a^b - \int_a^b h\,\frac{d}{dt} f'_{x'}\,dt.$$

[1]) Эта операция требует дополнительного обоснования, поскольку существование производной x'', входящей в выражение $\frac{d}{dt} f'_{x'}$, не предполагается. См. по этому поводу любой курс вариационного исчисления.

Таким образом,

$$dF = \int_a^b \left(f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'}\right) h\,dt + f'_{x'} h \Big|_a^b = 0. \tag{6}$$

Это равенство должно выполняться при всех h, в том числе и таких, для которых $h(a) = h(b) = 0$. Следовательно,

$$\int_a^b \left(f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'}\right) h\,dt = 0$$

при всех h, для которых $h(a) = h(b) = 0$, откуда, в силу рассуждений, аналогичных проведенным в примере 1, получаем

$$f'_x - \frac{d}{dt} f'_{x'} = 0. \tag{7}$$

Поэтому равенство (6) сводится к

$$f'_{x'} h \Big|_a^b = 0. \tag{8}$$

Если функционал (4) рассматривается на всех непрерывно дифференцируемых функциях x, определенных на $[a, b]$, то мы можем взять h так, что $h(a) = 0$, $h(b) \neq 0$, и тогда из равенства (8) получим

$$f'_{x'}\big|_{t=b} = 0, \tag{9}$$

а положив $h(b) = 0$, $h(a) \neq 0$, получим

$$f'_{x'}\big|_{t=a} = 0. \tag{10}$$

Таким образом, из условия (6) (т. е. из равенства нулю дифференциала функционала (4)) вытекает, что функция x, на которой функционал (4) достигает экстремума, должна удовлетворять дифференциальному уравнению (7) и граничным условиям (9), (10) на концах отрезка $[a, b]$. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные и в нашем распоряжении оказывается как раз то число граничных условий, которое нужно для отыскания этих постоянных.

2. Второй дифференциал. Достаточные условия экстремума функционала. Вернемся снова к нахождению экстремума функции n переменных. Пусть для функции

$f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ выполнено условие $df = 0$. Тогда, как известно, для решения вопроса о том, действительно ли в данной точке имеется экстремум или нет, следует рассмотреть второй дифференциал. Именно, справедливы следующие утверждения.

1. *Если функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *минимум, то в этой точке* $d^2f \geqslant 0$. (Аналогично, если в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеется максимум, то в этой точке $d^2f \leqslant 0$.)

2. *Если в точке* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *выполнены условия*

$$df = 0 \quad и \quad d^2f = \sum_{i,\ k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}\, dx_i\, dx_k > 0$$

(когда не все $dx_i = 0$), *то в этой точке* $f(x)$ *имеет минимум* (аналогично максимум, если $d^2f < 0$).

Короче говоря, неотрицательность второго дифференциала н е о б х о д и м а, а его положительная определенность д о с т а т о ч н а для минимума.

Посмотрим, в какой мере эти факты переносятся на функционалы, заданные на банаховом пространстве.

Т е о р е м а 2. *Пусть* F *— действительный функционал, заданный в банаховом пространстве* X *и имеющий в некоторой окрестности точки* x_0 *непрерывную вторую производную. Если этот функционал достигает в точке* x_0 *минимума, то* $d^2F(x_0) \geqslant 0$ [1]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле Тейлора получаем

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)\, h + \frac{1}{2} F''(x_0)(h,\ h) + o(\|h\|^2).$$

Если в точке x_0 функционал F имеет минимум, то $F'(x_0) = 0$ и остается равенство

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2} F''(x_0)(h,\ h) + o(\|h\|^2). \qquad (11)$$

Если при каком-либо h выполнено неравенство

$$F''(x_0)(h, h) < 0, \qquad (12)$$

[1]) Это неравенство означает, что $F''(x_0)(h, h) \geqslant 0$ для всех h.

то, поскольку $F''(x_0)(\varepsilon h, \varepsilon h) = \varepsilon^2 F''(x_0)(h, h)$, существуют и сколь угодно малые по норме элементы h, для которых выполнено (12). Но при достаточно малых $\|h\|$ знак всего выражения (11) определяется знаком главного члена $\frac{1}{2}F''(x_0)(h, h)$, и мы получаем

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) < 0,$$

т. е. минимума в точке x_0 нет.

Аналогичную теорему можно сформулировать для максимума.

Доказанная теорема есть прямое обобщение соответствующей теоремы для функций конечного числа переменных. Иначе обстоит дело с достаточным условием. Упомянутое выше условие $F''(x_0)(h, h) > 0$, достаточное для минимума в случае функции n переменных, не является достаточным для функционалов, определенных на банаховом пространстве бесконечного числа измерений. Рассмотрим простой пример. Пусть в гильбертовом пространстве l_2 задан функционал

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^4.$$

В точке 0 первый дифференциал этого функционала равен 0, а второй — ряду $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n^2}{n^3}$, т. е. представляет собой положительно определенный функционал. Тем не менее, в точке 0 нет минимума, так как $F(0) = 0$ и $F(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1/n, 0, \ldots) = 1/n^5 - 1/n^4 < 0$. Следовательно, в любой близости от точки 0 существуют точки, в которых $F(x) < F(0)$.

Введем следующее понятие. Квадратичный функционал B называется *сильно положительным*, если существует такое постоянное число $c > 0$, что $B(x, x) \geqslant c\|x\|^2$ для всех x.

Теорема 3. *Если функционал F, определенный в банаховом пространстве X, удовлетворяет условиям*

1) $dF(x_0) = 0$,

2) $d^2F(x_0)$ — *сильно положительный квадратичный функционал, то F имеет в точке x_0 минимум.*

Доказательство. Пусть $F''(x_0)(h, h) \geqslant c\|h\|^2$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина $o(\|h\|^2)$ в равенстве (11) удовлетворяла условию $|o(\|h\|^2)| < \frac{c}{4}\|h\|^2$. Тогда

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{1}{2}F''(x_0)(h, h) + o(\|h\|^2) > \frac{c}{4}\|h\|^2 > 0$$

при $\|h\| < \varepsilon$.

В конечномерном пространстве сильная положительность квадратичной формы эквивалентна ее положительной определенности, поэтому (при равенстве нулю первого дифференциала) положительная определенность второго дифференциала достаточна для экстремума функции. В бесконечномерном случае (как показывает приведенный выше пример) сильная положительность есть более сильное условие, чем положительная определенность.

Условие сильной положительности второго дифференциала, гарантирующее минимум, удобно тем, что оно применимо к любому дважды дифференцируемому функционалу (независимо от его конкретного вида) в любом банаховом пространстве. Вместе с тем это условие обычно оказывается слишком грубым и трудно проверяемым в практически важных случаях. В вариационном исчислении устанавливаются более тонкие достаточные условия экстремума (использующие конкретный вид тех функционалов, которые рассматриваются в вариационных задачах), однако изложение этих вопросов не входит в задачу данной книги.

3. Экстремальные задачи с ограничениями. Выше речь шла о нахождении экстремума для функционалов, заданных на всем пространстве, т. е., как обычно говорят, об экстремальных задачах без ограничений. При наличии тех или иных ограничений, определяющих ту область, на которой задан рассматриваемый функционал, утверждения, приведенные в пп. 1 и 2, вообще говоря, несправедливы. Это видно уже на простейшем примере функции, заданной на отрезке: если такая функция достигает экстремума в граничной точке, то ее первый дифференциал в этой точке может быть отличен от нуля, а знак второго дифференциала может быть любым. Рассмотрение экстремальных задач при наличии ограничений составляет обширную и важную область математики, включающую такие разделы, как классическое вариационное

исчисление, оптимальное управление, линейное и выпуклое программирование и т. д. Мы здесь ограничимся тем, что приведем лишь один результат. Его доказательство основано на применении теоремы Люстерника, играющей важную роль во многих вопросах теории экстремальных задач.

Пусть X и Y — банаховы пространства, F — функция на X и Φ: $X \to Y$ — отображение пространства X в Y. Допустим, что ищется минимум функции $F(x)$ на множестве, определяемом условием $\Phi(x) = 0$.

Теорема. *Пусть функция F и отображение Φ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$, и пусть образ пространства X при отображении $\Phi'(x_0)$: $X \to Y$ замкнут. Если в точке x_0 достигается локальный минимум функции $F(x)$ на множестве $\{x: \Phi(x) = 0\}$, то существуют число λ_0 и линейный функционал y^*, определенный на Y, не равные нулю одновременно и такие, что*

$$\lambda_0 F(x_0) + [\Phi'(x_0)]^* y^* = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Введем обозначение $L = \Phi'(x_0) X$. По условию L — замкнутое подпространство. Если $L \neq Y$, то, согласно следствию 3 теоремы Хана—Банаха (п. 3 § 1 гл. IV) найдется ненулевой функционал $y_0^* \in Y^*$, равный нулю на L. Для него при всех $x \in X$ имеем

$$([\Phi'(x_0)]^* y_0^*, x) = (y_0^*, \Phi'(x_0) x) = 0, \text{ так как } \Phi'(x_0) x \in L.$$

Поэтому, приняв y_0^* за y^* и положив $\lambda_0 = 0$, получаем (13).

Рассмотрим теперь случай, когда $\Phi(x_0) X = Y$. Применив к отображению Φ теорему Люстерника, получаем, что для каждого $h \in X$, удовлетворяющего условию

$$\Phi'(x_0) h = 0,$$

при всех достаточно малых t существует такой элемент

$$x(t, h) = x_0 + th + r(t),$$

что $\Phi(x(t, h)) = 0$, $t^{-1} \| r(t) \| \to 0$ при $t \to 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = F(x(t, h)).$$

Ее производная в нуле

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = F'(x_0)\,h$$

должна быть равна нулю. Действительно, если

$$F'(x_0)\,h = c \neq 0,$$

то знак разности

$$F(x(t, h)) - F(x_0) = ct + F'(x_0)\,r(t) + o(t)$$

определяется членом ct и, следовательно, меняется при замене t на $-t$, а при этом в точке x_0 не может быть экстремума. Итак, мы получаем, что $F'(x_0)\,h = 0$ для всех h таких, что $h \in \operatorname{Ker} \Phi'(x_0)$. Иначе говоря, $F'(x_0)$ есть элемент из X^*, ортогональный подпространству $\operatorname{Ker} \Phi'(x_0) \subset X$. Но, согласно лемме об аннуляторе ядра оператора (см. с. 267)

$$[\operatorname{Ker} \Phi'(x_0)]^{\perp} = \operatorname{Im} [\Phi'(x_0)]^*.$$

Это означает, что если $F'(x_0) \in [\operatorname{Ker} \Phi'(x_0)]^{\perp}$, то найдется такой функционал $y^* \in Y^*$, что

$$F'(x_0) = -[\Phi'(x_0)]^*\, y^*. \tag{14}$$

Положив $\lambda_0 = 1$ и взяв тот функционал y^*, для которого выполнено равенство (14), мы и получим (13).

Доказанная теорема представляет собой бесконечномерное обобщение известного из классического анализа правила множителей Лагранжа для задач на условный экстремум. Действительно, если X и Y — конечномерные пространства, т. е. если ищется минимум функции $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ при условиях $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то функционал y^* — это система m чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Условие замкнутости образа пространства X в Y при линейном отображении в конечномерном случае выполнено автоматически. Равенство (13) при этом превращается в

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(x_0) = 0,$$

т. е. в известное правило Лагранжа для нахождения условного экстремума.

§ 4. Метод Ньютона

Одним из хорошо известных методов решения уравнений вида

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

(f — числовая функция числового аргумента, определенная на некотором отрезке $[a, b]$) является так называемый *метод Ньютона*, или *метод касательных*. Он состоит в том, что по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

ищутся последовательные приближения к решению. (За нулевое приближение x_0 при этом берется произвольная точка того отрезка, на котором f определена.) Геометрический смысл этого метода иллюстрируется рис. 24. Можно показать, что если x^* — единственный корень уравнения (1) на отрезке $[a, b]$ и функция f имеет на этом отрезке не обращающуюся в нуль первую производную и ограниченную вторую производную, то существует «область притяжения корня x^*», т. е. такая окрестность точки x^*, что при любом выборе точки x_0 в этой окрестности последовательность (2) сходится к x^*.

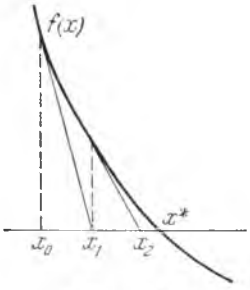


Рис. 24

Метод Ньютона может быть перенесен на операторные уравнения. Мы изложим его для уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0, \tag{3}$$

где F — отображение банахова пространства X в банахово пространство Y. Предположим, что отображение F сильно дифференцируемо в некотором шаре $B(x_0, r)$ радиуса r (центр которого x_0 мы примем за нулевое приближение искомого решения). Заменяя, как и в одномерном случае, выражение $F(x_0) - F(x)$ его главной линейной частью, т. е. элементом $F'(x_0)(x_0 - x)$, мы получаем из (3) линейное уравнение

$$F'(x_0)(x_0 - x) = F(x_0),$$

решение которого

$$x_1 = x_0 - [F'(x_0)]^{-1} F(x_0)$$

естественно рассматривать как следующее приближение к точному решению x уравнения (3) (существование оператора $[F'(x_0)]^{-1}$ здесь, конечно, предполагается). Повторяя те же рассуждения, мы получаем последовательность

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n)]^{-1}(F(x_n)) \tag{4}$$

приближенных решений уравнения (3). В бесконечномерном случае нахождение обратного оператора $[F'(x_n)]^{-1}$ может быть достаточно сложной задачей. Поэтому здесь бывает целесообразно пользоваться так называемым *модифицированным методом Ньютона* (см. [27, 28]). Модификация состоит в том, что вместо последовательности (4) рассматривается последовательность, определяемая формулой

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_0)]^{-1}(F(x_n)), \tag{5}$$

т. е. обратный оператор $[F'(x_0)]^{-1}$ берется на каждом шаге при одном и том же значении аргумента $x = x_0$. Хотя такая модификация уменьшает скорость сходимости, она часто оказывается целесообразной с вычислительной точки зрения. Перейдем теперь к формулировке и доказательству точного утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть отображение F сильно дифференцируемо в некотором шаре $B(x_0, r)$ с центром x_0 и радиусом r, а производная $F(x)$ удовлетворяет в этом шаре условию Липшица:*

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|.$$

Пусть $[F'(x_0)]^{-1}$ существует и

$$M = \|[F'(x_0)]^{-1}\|, \quad k = \|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\|, \quad h = MkL.$$

Тогда, если $h < 1/4$, то в шаре $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$, где t_0 — меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$, уравнение $F(x) = 0$ имеет единственное решение x^* и последовательность $\{x_n\}$, определяемая рекуррентной формулой (5), *сходится к этому решению.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в пространстве X отображение $Ax = x - [F'(x_0)]^{-1}F(x)$. Его сильная

производная равна 0 в точке x_0. Это отображение переводит шар $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ в себя. Действительно,

$$Ax - x_0 = x - x_0 - [F'(x_0)]^{-1} F(x) =$$
$$= [F'(x_0)]^{-1} \{F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0)\} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_0).$$

Поэтому

$$\|Ax - x_0\| \leqslant \|[F'(x_0)]^{-1}\| \cdot \|F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0)\| + \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|,$$

т. е.

$$\|Ax - x_0\| \leqslant M\|F'(x_0)(x - x_0) - F(x) + F(x_0)\| + k. \quad (6)$$

Рассмотрим вспомогательное отображение

$$\Phi(x) = F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0).$$

Оно дифференцируемо и его производная равна $\Phi'(x) = F'(x) - F'(x_0)$. Если $\|x - x_0\| < kt_0$, то имеет место оценка

$$\|\Phi'(x)\| = \|F'(x) - F'(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\| \leqslant Lt_0 k.$$

Отсюда по теореме о среднем (формула (9) § 1) получаем

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi(x) - \Phi(x_0)\| \leqslant Lt_0 k\|x - x_0\| \leqslant Lt_0^2 k^2. \quad (7)$$

Итак, если $\|x - x_0\| \leqslant t_0 k$, то из (6) и (7) получаем

$$Ax - x_0\| \leqslant MLt_0^2 k^2 + k = k(MLt_0^2 k + 1) =$$
$$= k(ht_0^2 + 1) = kt_0,$$

а это и означает, что отображение A переводит шар $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ в себя. Покажем теперь, что A — сжимающее отображение этого шара. При $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ имеем

$$A'(x) = I - [F'(x_0)]^{-1} F'(x) =$$
$$= [F'(x_0)]^{-1} (F'(x_0) - F'(x)),$$

откуда

$$\|A'(x)\| \leqslant M\|F'(x_0) - F'(x)\| \leqslant ML\|x - x_0\| \leqslant MLkt_0.$$

Но t_0 — меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$, т. е. $t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h}$. Поэтому

$$\|A'(x)\| \leqslant MLkt_0 =$$

$$= ht_0 = h\frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2} = q < \frac{1}{2}, \quad (8)$$

откуда $\|Ax_1 - Ax_2\| < \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$, т. е. A — сжимающее отображение.

Следовательно, отображение A имеет в шаре $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ одну и только одну неподвижную точку x^*. Для этой точки

$$x^* = x^* - [F'(x_0)]^{-1} F(x^*), \quad \text{т. е. } F(x^*) = 0.$$

Вместе с тем

$$Ax_n = x_n - [F'(x_0)]^{-1} F(x_n) = x_{n+1}$$

и, в силу теоремы о сжимающих отображениях, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*.

Из неравенства (8) сразу вытекает следующая оценка скорости сходимости модифицированного метода Ньютона:

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1 - q}\|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\|, \quad (9)$$

т. е. погрешность модифицированного метода Ньютона убывает как геометрическая прогрессия. Отметим для сравнения, что обычный метод Ньютона [в котором приближения определяются формулой (4), а не (5)] сходится быстрее, чем геометрическая прогрессия: для этого метода

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n - 1}k.$$

Пример. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) = \int_a^b K(s, t, x(t))\,dt, \quad (10)$$

где $K(s, t, u)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Введя отображение $y = F(x)$, определяемое равенством

$$y(s) = x(s) - \int_a^b K(s, t, x(t))\,dt,$$

запишем уравнение (10) в виде

$$F(x) = 0.$$

Пусть x_0 — нулевое приближение для решения этого уравнения. Тогда первая поправка $\Delta x(s) = x_1 - x_0$ определяется из уравнения

$$F'(x_0)\,\Delta x = -F(x_0). \tag{11}$$

Если функция $K(s, t, u)$ и функциональное пространство, в котором рассматривается уравнение (10), таковы, что производная $F'(x)$ отображения F может быть вычислена «дифференцированием под знаком интеграла», т. е. если

$$z = F'(x_0)\,x$$

означает, что

$$z(s) = x(s) - \int_a^b K'_u(s,\ t,\ x_0(t))\,x(t)\,dt,$$

то уравнение (11) принимает вид

$$\Delta x(s) = \int_a^b K'_u(s,\ t,\ x_0(t))\,\Delta x(t)\,dt + \varphi_0(s), \tag{12}$$

где

$$\varphi_0(s) = \int_a^b K(s,\ t,\ x_0(t))\,dt - x_0(s).$$

Аналогично находятся и следующие поправки.

Таким образом, нахождение каждого следующего приближения сводится к решению линейного интегрального уравнения. Если применяется модифицированный метод Ньютона, то при этом на каждом шаге приходится решать линейное уравнение с одним и тем же ядром. Более подробное изложение метода Ньютона и связанных с ним вопросов имеется в книге [28], а также в статье Л. В. Канторовича [27], которому и принадлежат основные результаты, относящиеся к обоснованию метода Ньютона для операторных уравнений.

ДОПОЛНЕНИЕ

БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ

В. М. Тихомиров

В третьей главе этой книги изучались линейные пространства. Там был выделен важный класс линейных пространств — банаховы пространства. Здесь, в этом дополнении, будут изучаться б а н а х о в ы а л г е б р ы, т. е. банаховы пространства, в которых определено умножение элементов. Наличие умножения в сочетании с линейной и метрической структурой наделяет банаховы алгебры рядом замечательных свойств.

§ 1. Определения и примеры банаховых алгебр

1. Банаховы алгебры, изоморфизмы банаховых алгебр. Напомним, что линейным пространством называется непустое множество элементов, в котором введены две операции — сложение и умножение на числа, удовлетворяющие восьми аксиомам, сформулированным в § 1 гл. III.

О п р е д е л е н и е 1. Линейное пространство X называется *алгеброй*, если в нем введена еще одна алгебраическая операция — умножение, которое подчинено следующим аксиомам:

1. $(xy)\,z = x\,(yz)$.
2. $x\,(y + z) = xy + xz$; $(y + z)\,x = yx + zx$.
3. $\alpha\,(xy) = (\alpha x)\,y = x\,(\alpha y)$.
4. Если существует элемент $e \in X$ такой, что $ex = xe = x$ для всех $x \in X$, то e называется *единицей* алгебры X, а сама алгебра называется *алгеброй с единицей* [1]).
5. Если операция умножения коммутативна, т. е. если выполняется аксиома:

$$xy = yx,$$

то алгебру X называют *коммутативной алгеброй*.

Коммутативные алгебры с единицей и будут в основном объектом нашего дальнейшего рассмотрения.

Всюду в этом дополнении числовое поле, над которым рассматриваются наши алгебры, это поле **C** комплексных чисел.

---

[1]) Единица в алгебре всегда единственна, ибо если бы элемент e' также обладал свойством 4, то мы бы получили $ee' = e = e'$.

В § 3 гл. III было введено понятие нормированного пространства, т. е. линейного пространства, снабженного нормой $\|x\|$, удовлетворяющей трем аксиомам, сформулированным на с. 162.

Определение 2. Нормированное пространство X называется *нормированной алгеброй*, если оно является алгеброй с единицей и при этом выполнены еще две аксиомы:

6. $\|e\| = 1$.

7. $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Если нормированная алгебра X вдобавок полна (т. е. является банаховым пространством), то она называется *банаховой алгеброй*.

Отображение $F: X \to Y$ называют *гомоморфизмом* алгебры X в Y если удовлетворяются условия:

$$F(x + y) = Fx + Fy, \tag{1}$$

$$F(\alpha x) = \alpha Fx, \tag{2}$$

$$F(xy) = Fx \cdot Fy. \tag{3}$$

Две алгебры, X и Y, называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение F, удовлетворяющее условиям (1) — (3).

Нормированные пространства X и Y называют *изометричными*, если существует взаимно однозначное отображение $F: X \leftrightarrow Y$, для которого выполнены условия (1) и (2) и, кроме того,

$$\|Fx\|_Y = \|x\|_X.$$

Определение 3. Две банаховы алгебры X и Y мы назовем *изометрически изоморфными*, если существует алгебраический изоморфизм $F: X \leftrightarrow Y$, являющийся изометрией X и Y как нормированных пространств.

2. Примеры банаховых алгебр.

1. Поле **C**. Комплексные числа $\{z\}$ доставляют простейший пример банаховой алгебры, если ввести норму формулой:

$$\|z\| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy.$$

Комплексные числа образуют поле **C**. В **C** для всех элементов, кроме нуля, определено деление — операция, обратная умножению. Мы покажем в дальнейшем, что **C** есть *единственная нормированная алгебра, являющаяся полем*.

2. Алгебра C_T. Пусть T — некоторое компактное хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим через C_T линейное пространство всех непрерывных комплексных функций $x(t)$, заданных на T с обычными для функций операциями сложения и умножения на число, в котором норма определяется равенством

$$\|x\| = \max_{t \in T} |x(t)|.$$

Ранее в гл. II и III рассматривался частный случай пространства C_T, когда $T = [a, b]$ есть отрезок вещественной прямой. Другим важным частным случаем пространства C_T является пространство $\mathbf{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n)\}$ n-мерных комплексных векторов, т. е. функций на

пространстве из n точек. Сложение, умножение на числа и умножение элементов $\mathbf{C}^n$ производится покоординатно, а норма определяется формулой

$$\|z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|.$$

Алгебра C_T является коммутативной банаховой алгеброй. Единицей в C_T служит функция $e(t) \equiv 1$. Проверка всех аксиом не составляет труда.

3. Алгебра $\mathscr{A}$ аналитических функций в круге. Обозначим через $\mathscr{A}$ линейное пространство всех функций $x(z)$ комплексного переменного z, определенных и непрерывных в круге $K \equiv \{z: |z| \leqslant 1\}$ и аналитических внутри этого круга. Определим умножение в $\mathscr{A}$, как обычное умножение функций и зададим норму формулой

$$\|x\| = \max_{|z| \leqslant 1} |x(z)|.$$

Этим путем мы превратим $\mathscr{A}$ в коммутативную банахову алгебру с единицей. Справедливость всех аксиом и здесь вполне очевидна.

4. Алгебра l_1. Обозначим через l_1 совокупность всех двусторонних абсолютно суммируемых комплексных последовательностей $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с нормой

$$\|x\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|. \tag{4}$$

Произведением $x \cdot y$ двух таких последовательностей:

$$x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots),$$
$$y = (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$$

назовем их свертку $z = x * y$, т. е. последовательность, члены которой определяются так:

$$z_n = (x * y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k. \tag{5}$$

Если каждой последовательности x из l_1 сопоставить ряд Фурье $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, то последовательность, определенная формулой (5), соответствует произведению функций $x(t) \cdot y(t)$, построенных по последовательностям x и y. Таким образом, алгебра l_1 и алгебра W функций $x(t)$ с абсолютно сходящимися рядами Фурье и нормой, определяемой (4), изометрически изоморфны. Поэтому большинство аксиом алгебры и нормированного пространства для l_1 проверяются без труда, так как для W они верны тривиально. Проверим аксиому 7. Имеем для $z = x * y$:

$$\|z\| = \sum_n |z_n| = \sum_n \left| \sum_k x_{n-k} y_k \right| \leqslant \sum_{n,\,k} |x_{n-k}|\,|y_k| =$$
$$= \sum_k \left(\sum_n |x_{n-k}| \right) |y_k| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Алгебра W, очевидно, коммутативна, следовательно, коммутативна и алгебра l_1. Единицей в l_1 служит последовательность e, соответствующая функции $e(t) \equiv 1$: у этой последовательности все компоненты суть нули, за исключением компоненты с нулевым номером, которая равна единице. В дальнейшем мы будем пользоваться изоморфизмом $l_1 \leftrightarrow W$ и соответствием $\{x_n\} \leftrightarrow x(t)$, не оговаривая этого особо.

5. Банахова алгебра ограниченных операторов. Пусть X — банахово пространство. Рассмотрим пространство $\mathscr{L}(X, X)$ всех линейных непрерывных операторов, преобразующих X в себя, с обычными для операторов действиями сложения, умножения оператора на число и умножения (гл. IV, § 5, п. 3). Единицей в $\mathscr{L}(X, X)$ служит тождественный оператор. Превратим $\mathscr{L}(X, X)$ в банахову алгебру, определив норму как обычно:

$$\| A \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \|.$$

Действительно, аксиома 7 была уже проверена ранее (см. формулу (4) на с. 257). Доказать полноту $\mathscr{L}(X, X)$ представлялось читателю в упражнении, приведенном там же. Алгебра $\mathscr{L}(X, X)$ — один из важнейших примеров некоммутативной банаховой алгебры с единицей.

3. Максимальные идеалы.

Определение 4. *Идеалом* I коммутативной алгебры X называется подпространство X, обладающее тем свойством, что для всякого $y \in I$ и любого x из X произведение yx принадлежит I. Идеал, состоящий из одного нуля, а также идеал, состоящий из всего X, мы называем тривиальными и в дальнейшем исключаем из рассмотрения. *Максимальным* называется идеал, не содержащийся ни в каком другом нетривиальном идеале.

Введенные понятия рассмотрим на примере алгебры C_T.

Пусть $\mathscr{F}$ — непустое подмножество компакта T. Множество $M_{\mathscr{F}} = \{x(t) \in C_T : x(t) = 0, \ t \in \mathscr{F}\}$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на $\mathscr{F}$ образует, как легко видеть, идеал в C_T. Максимальные идеалы в C_T допускают простое описание, являющееся к тому же ключом к пониманию всего замысла теории коммутативных банаховых алгебр.

Лемма 1. *Максимальный идеал алгебры C_T есть совокупность всех функций из C_T, обращающихся в нуль в какой-либо одной фиксированной точке τ_0 множества T.*

Доказательство. а) Пусть $M_{\tau_0} = \{x(t) \in C_T : x(\tau_0) = 0\}$. Тогда M_{τ_0} есть идеал. Покажем, что он максимален. Действительно, пусть $x_0(t) \notin M_{\tau_0}$, т. е. $x_0(\tau_0) \neq 0$. Для любого $y(t) \in C_T$ положим: $z(t) = y(t) - \dfrac{y(\tau_0)\, x_0(t)}{x_0(\tau_0)}$. Тогда $z(\tau_0) = 0$ и, следовательно, $z(t)$ принадлежит M_{τ_0}. Итак, добавление любого элемента не из M_{τ_0} приводит к тому, что идеал, порожденный M_{τ_0} и этим элементом, становится тривиальным. Следовательно, M_{τ_0} — максимален.

б) Пусть наоборот, M — какой-либо максимальный идеал из C_T. Покажем, что все функции, входящие в этот идеал, обращаются в нуль в некоторой точке. Действительно, если это не так, то для каждой точки $\tau \in T$ найдется функция $x_\tau(t) \in M$ такая, что $x_\tau(\tau) \neq 0$. В силу непрерывности $x_\tau(t)$ по t найдется такая окрестность U_τ точки τ,

что $x_\tau(t) \neq 0$ в U_τ. Из открытого покрытия $T \subset \bigcup_\tau U_\tau$ выберем конечное покрытие $U_{\tau_1}, \ldots, U_{\tau_n}$.

Тогда в силу определения идеала

$$x_0(t) = \overline{x_{\tau_1}(t)} \cdot x_{\tau_1}(t) + \cdots + \overline{x_{\tau_n}(t)}\, x_{\tau_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} |x_{\tau_k}(t)|^2$$

принадлежит M.

В силу того, что $x_0(t) > 0$ всюду на T, функция $1/x_0(t)$ будет непрерывной. Поэтому $1 = (1/x_0(t)) \cdot x_0(t) \in M$. Но идеал, содержащий единицу алгебры, содержит и любой элемент алгебры, ибо $y(t) = y(t) \cdot 1$. Поэтому M — тривиальный идеал, что противоречит предположению о том, что M — максимальный, а следовательно, нетривиальный идеал.

Таким образом, мы получили, что между максимальными идеалами и точками из пространства-носителя T можно установить взаимно однозначное соответствие. Это позволяет трактовать функции на T как «функции на пространстве максимальных идеалов».

Мы покажем, — и в этом цель излагаемой ниже теории коммутативных банаховых алгебр, — что всякая такая алгебра X допускает реализацию в виде подалгебры алгебры непрерывных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве, образованном ее максимальными идеалами.

§ 2. Спектр и резольвента

В этом параграфе алгебра X не обязательно коммутативна, но имеет единицу. Многие рассмотрения здесь подобны тем, которые проводились в § 5 гл. IV.

1. Определения и примеры.

Определение. Элемент $x \in X$ называется *обратимым*, если он имеет обратный, т. е. если найдется такой элемент x^{-1}, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$$

В противном случае элемент x называется *необратимым*.

Спектром $\sigma(x)$ элемента $x \in X$ называется множество комплексных чисел λ, для которых элемент $\lambda e - x$ необратим. Если $\lambda \notin \sigma(x)$, точку λ называют *регулярной*.

Функция

$$R_\lambda : \mathbf{C} \setminus \sigma(x) \to X, \quad R_\lambda x = x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1},$$

определенная на множестве регулярных точек элемента x, называется *резольвентой* этого элемента.

Спектральным радиусом $r(x)$ элемента $x \in X$ называется число

$$r(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|. \tag{1}$$

Введенные важные понятия проиллюстрируем на примерах.

а) Если $X = \mathbf{C}$, то обратимы все элементы кроме нуля;

б) Если $X = C_T$, то для обратимости $x(t)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $x(t)$ была всюду отлична от нуля. Спектр $\sigma(x)$

совпадает с множеством значений $x(t)$; резольвента R_λ имеет вид

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda - x(t)},$$

а

$$r(x) = \|x\| = \max_t |x(t)|.$$

в) Если $X = \mathscr{L}(Y, Y)$ — алгебра ограниченных операторов, то обратимые элементы суть обратимые операторы, спектр и резольвента в этом случае совпадают со спектром и (с точностью до знака) резольвентой оператора, которые были введены в п. 7 § 5 гл. IV. Собственно говоря, в этом параграфе мы в общем виде исследуем те понятия, которые вводились ранее для банаховой алгебры ограниченных линейных операторов.

2. Свойства спектра.

Теорема 1. 1°. *Для любого линейного функционала $f(x)$ из сопряженного пространства X^* функция $f(x(\lambda)) = F(\lambda)$ аналитична на $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$ и $F(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$.*

2°. *Спектр $\sigma(x)$ элемента x банаховой алгебры X есть непустое компактное множество в $\mathbf{C}$. Имеет место неравенство:*

$$r(x) \leqslant \|x\|. \tag{2}$$

Доказательству теоремы 1 предпошлем несколько лемм.

Лемма 1 (ср. с теоремой 5 § 5 гл. IV). *Пусть элемент x из банаховой алгебры X имеет норму, меньшую единицы. Тогда элемент $e-x$ обратим и*

$$(e - x)^{-1} = e + x + \cdots + x^n + \cdots$$

Действительно, положив $s_n = e + x + \ldots + x^n$, имеем:

$$\|s_n - s_{n+k}\| = \|x^{n+1} + \cdots + x^{n+k}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \|x\|^{n+i} = \frac{\|x\|^{n+1} - \|x\|^{n+k+1}}{1 - \|x\|} \to 0.$$

Итак, последовательность s_n фундаментальна. Так как X полно, то она сходится к некоторому элементу $s \in X$. При этом

$$s(e - x) = \lim_{n\to\infty} s_n (e - x) = \lim_{n\to\infty} (e - x^{n+1}) = e.$$

Аналогично доказывается, что $(e - x)\, s = e$.

Следствие. *Для всякого $x \in X$*

$$(e - tx)^{-1} \to e \text{ при } t \to 0.$$

Действительно, $(e - tx)^{-1} \equiv \lim_{n\to\infty} (e + tx + \cdots + (tx)^n) = e + O(t)$.

Лемма 2 (ср. с теоремой 4 § 5 гл. IV). *Пусть x_0 — обратимый элемент и $\|\Delta x\| < \|x_0^{-1}\|^{-1}$.*

Тогда $x_1 = x_0 + \Delta x$ *— обратимый элемент, при этом*

$$x_1^{-1} = (e + x_0^{-1}\Delta x)^{-1} x_0^{-1}.$$

Действительно, $x_1 = x_0 + \Delta x = x_0(e + x_0^{-1}\Delta x) = x_0(e - x)$, $\|x\| = \|-x_0^{-1}\Delta x\| < 1$.

Применив лемму 1, мы находим, что $x_1^{-1} = (e-x)^{-1}x_0^{-1}$, что и требовалось.

Следствие 1. *Множество обратимых элементов банаховой алгебры открыто (в нормированной топологии банаховой алгебры). Множество необратимых элементов замкнуто.*

Следствие 2. *Резольвента* $x(\lambda)$ *есть непрерывная функция от* λ *на* $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$.

Действительно, в силу следствия из леммы 1

$$x(\lambda_0 + \Delta\lambda) = (\lambda_0 e - x + \Delta\lambda e)^{-1} = (e + \Delta\lambda x(\lambda_0))^{-1} x(\lambda_0) \underset{\Delta\lambda \to 0}{\longrightarrow} x(\lambda_0).$$

Лемма 3 (ср. с п. 7 § 5 гл. IV). *Пусть* $\lambda, \mu \in \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$. *Тогда*

а) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = R_\mu x \cdot R_\lambda x$,

б) $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$ *(тождество Гильберта).*

Доказательство.

а) $R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\lambda e - x)^{-1}(\mu e - x)^{-1} = [(\mu e - x)(\lambda e - x)]^{-1} =$
$= [(\lambda e - x)(\mu e - x)]^{-1} = R_\mu x \cdot R_\lambda x.$

б) В силу а) и определения R_λ и R_μ имеем

$$R_\lambda x = (\mu e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x, \quad R_\mu x = (\lambda e - x) R_\lambda x \cdot R_\mu x,$$

откуда $R_\lambda x - R_\mu x = (\mu e - \lambda e) R_\lambda x \cdot R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda x \cdot R_\mu x$, что и требовалось.

Следствие. *Если* $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$, *то* $x'(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0)$.

Имеем в силу б) и следствия 2 леммы 2:

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} x(\lambda) \cdot x(\lambda_0) = -x^2(\lambda_0).$$

Теперь докажем теорему 1.

1°. Пусть $f(x)$ — линейный непрерывный функционал на x, т. е. $f(x) \in X^*$. Положим $F(\lambda) = f(x(\lambda)) = f(R_\lambda x)$. Имеем в силу следствия из леммы 3 для $\lambda_0 \notin \sigma(x)$:

$$F'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{F(\lambda) - F(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) =$$
$$= f\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0}\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)\right) = -f(x^2(\lambda_0)).$$

Таким образом, доказана аналогичность $F(\lambda)$.

Далее, при $|\lambda| > \|x\|$ в силу леммы 1 мы получим:

$$|F(\lambda)| \leqslant \|f\|_{X^*} \|x(\lambda)\|_X = \|f\|_{X^*} \|(\lambda e - x)^{-1}\| =$$
$$= \frac{\|f\|_{X^*}}{|\lambda|} \left\|\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

2°. а) Непустота спектра $\sigma(x)$. Пусть $\sigma(x) = \varnothing$. Тогда в силу 1° для всякого элемента $f \in X^*$ $F(\lambda)$ — целая функция, стремящаяся к нулю при $|\lambda| \to \infty$. Значит, $F(\lambda) \equiv 0$, т. е. $f((\lambda e - x)^{-1}) = 0$ для любого $f \in X^*$, а значит, в силу следствия 4 из теоремы Хана — Банаха (п. 3 § 1 гл. IV), $(\lambda e - x)^{-1} = 0$, чего не может быть.

б) Компактность спектра $\sigma(x)$. Если $|\lambda| > \|x\|$, то в силу леммы 1 элемент $\lambda e - x = \lambda\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)$ обратим, откуда следует ограниченность $\sigma(x)$, а заодно и неравенство (2). Замкнутость $\sigma(x)$ следует сразу из леммы 2: если λ_0 регулярно, то окрестность $|\Delta\lambda| < \|x(\lambda_0)\|^{-1}$ состоит из регулярных точек, так как $(\lambda_0 + \Delta\lambda)e - x = \lambda_0 e - x + \Delta\lambda e$.

Отметим два следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Банахова алгебра над полем* $\mathbf{C}$, *являющаяся полем, изометрически изоморфна* $\mathbf{C}$.

Действительно, пусть X есть «банахово поле» и x — произвольный элемент из X. Найдем то λ, для которого элемент $\lambda e - x$ необратим и, значит, есть нуль. Мы получим, что $x = \lambda e$. Легко понять, что соответствие $x \leftrightarrow \lambda$ есть изоморфизм X и $\mathbf{C}$. Так как $\|e\| = 1$, то $\|x\| = |\lambda|$. Мы получили изометрию X и $\mathbf{C}$.

Следствие 2. *Спектр любого нулевого оператора* A *из* $\mathscr{L}(X, X)$ *не пуст.*

Это утверждение без доказательства уже формулировалось ранее (см. с. 271).

3. Теорема о спектральном радиусе.

Теорема 2. *Имеет место следующая формула для спектрального радиуса*:

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}. \tag{3}$$

Действительно, пусть f — любой элемент из X^*. В силу теоремы 1 функция $F(\lambda) = f(x(\lambda))$ аналитична на $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$. В частности, $F(\lambda)$ аналитична в области $|\lambda| > \|x\|$.

В этой области в силу леммы 1

$$x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}},$$

откуда

$$F(\lambda) = f(x(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}},$$

причем это разложение, верное вследствие леммы 1 при $|\lambda| > \|x\|$, должно иметь место при $|\lambda| > r(x)$ в силу теоремы единственности для аналитических функций и, значит,

$$\sup_n \left|\frac{f(x^n)}{\lambda^{n+1}}\right| < \infty.$$

Мы получили, что множество векторов x^n/λ^{n+1} является слабо ограниченным, а значит, оно ограничено сильно. (Этот результат, называемый иногда принципом равномерной ограниченности, или теоремой Банаха — Штейнгауза, был доказан в § 3 гл. IV: подробнее об этом см. в монографии [21], гл. II.) Таким образом, существует число $c(\lambda)$, зависящее от λ, такое, что

$$\left\| \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \leqslant c(\lambda),$$

откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| x^n \|^{1/n} \leqslant |\lambda|$ для всех $\{\lambda : |\lambda| > r(x)\}$, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| x^n \|^{1/n} \leqslant r(x).$$

С другой стороны, если $\lambda \in \sigma(x)$, то $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, так как элемент $\lambda^n e - x^n$, очевидно, делится на $\lambda e - x$.

В силу теоремы 1, если $\mu \in \sigma(x)$, то $|\mu| \leqslant \|x\|$.

Полагая $\mu = \lambda^n$, полагаем, что из $\lambda \in \sigma(x)$ следует, что $|\lambda| \leqslant \sqrt[n]{\|x^n\|}$, откуда $r(x) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Теорема доказана.

§ 3. Некоторые вспомогательные результаты

В этом коротком параграфе сосредоточен ряд вспомогательных утверждений, при доказательстве которых используются стандартные технические приемы.

1. Теорема о фактор-алгебре. Пусть X — коммутативная банахова алгебра с единицей, I — идеал в X.

Отметим, во-первых, что I состоит лишь из необратимых элементов, ибо если $z \in I$ обратим, то для любого $x \in X$ мы получим, что $(xz^{-1})\, z = x \in I$, т. е. I тривиален, а этот случай мы исключаем. Во-вторых, в силу леммы 1 § 2, расстояние от единицы e до любого необратимого элемента, а значит, и до любого идеала, не меньше единицы.

Рассмотрим теперь фактор-пространство X/I (см. § 1 гл. III) и определим там операцию умножения, назвав произведением двух классов ξ и η из X/I тот класс ζ, который содержит элемент $x \cdot y$, где x и y — представители классов ξ и η. (Проверьте, что результат не изменится, если x и y заменить любыми другими представителями тех же классов ξ и η, и что введенная операция «умножение» удовлетворяет аксиомам 1—5 § 1.)

Таким образом, X/I становится коммутативной алгеброй. Назовем ее фактор-алгеброй X по идеалу I.

Введем в X/I норму как и в п. 3 § 3 гл. III:

$$\|\xi\| = \inf_{y \in I} \|x + y\|,$$

где x — представитель ξ.

Имеет место

Теорема 1. *Если X — есть банахова алгебра, а I — замкнутый идеал в ней, то фактор-алгебра X/I также является банаховой алгеброй с единицей.*

В п. 3 § 3 гл. III было показано, что фактор-пространство банахова пространства по любому его замкнутому подпространству является банаховым пространством. Таким образом, нам остается лишь проверить, что выполняются аксиомы 6 и 7 из п. 1 § 1 на с. 590

а) $\|\xi\eta\| = \inf\limits_{z \in I} \|xy + z\| \leqslant \inf\limits_{u,\, v \in I} \|(x+u)(y+v)\| \leqslant$

$$\leqslant \inf_{u \in I} \|x+u\| \cdot \inf_{v \in I} \|y+v\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

б) $E = e \dotplus I$, т. е. $E^2 = e^2 \dotplus I = e \dotplus I$, значит, $E^2 = E$, откуда $\|E\| = \|E^2\| \leqslant \|E\|^2$. Но элемент E не эквивалентен нулю, так как окрестность точки e, как мы отметили выше, не содержит необратимых элементов, из которых состоит I. Значит, $1 \leqslant \|E\|$. Но, с другой стороны, $\|E\| = \inf\limits_{u \in I} \|e + y\|$, т. е. $\|E\| \leqslant 1$. Итак $\|E\| = 1$. Теорема доказана.

2. Три леммы. Нам далее понадобятся три леммы: теоретико-множественная, алгебраическая и топологическая.

Лемма 1. *Всякий нетривиальный идеал I содержится в максимальном идеале.*

Доказательство этой леммы основано на лемме Цорна, сформулированной на стр. 40.

Действительно, пусть $\mathcal{J}$ — множество всех нетривиальных идеалов, содержащих I. Оно частично упорядочено по вложению: $I_1 \leqslant I_2$, если $I_1 \subseteq I_2$. Для всякого линейно упорядоченного множества $\{I_\alpha\}$ из $\mathcal{J}$ объединение $\bigcup\limits_\alpha I_\alpha$ есть нетривиальный идеал, служащий верхней гранью для $\{I_\alpha\}$. Значит, в силу леммы Цорна, I подчинен максимальному элементу в $\mathcal{J}$, т. е. максимальному идеалу.

Следствие. *Если X не есть поле, то в нем имеется максимальный идеал. Более того, каждый необратимый элемент, отличный от нуля, содержится в некотором максимальном идеале.*

Действительно, возьмем любой необратимый элемент $x_0 \neq 0$ и рассмотрим совокупность $x_0 \cdot X$. Это есть, конечно, идеал. Он содержит x_0 и не содержит e — единицы X, т. е. не является тривиальным идеалом, следовательно, в силу леммы 1 содержится в максимальном идеале.

Лемма 2. *Для того чтобы идеал I содержался в некотором нетривиальном идеале $I' \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы алгебра X/I имела нетравиальный идеал.*

Докажем необходимость. Пусть

$$I \subset I' \subset X, \quad I \neq I', \quad X \neq I'.$$

Выделим среди классов $\xi \in X/I$ те $\xi' = x' \dotplus I$, для которых $x' \in I'$. Легко проверить, что получится нетривиальный идеал в X/I. Достаточность получается аналогично.

Лемма 3. *Замыкание нетривиального идеала* 1 *есть нетривиальный идеал.*

Нетривиальность следует из того, что I состоит лишь из необратимых элементов, остальное следует из непрерывности алгебраических операций.

Следствие. *Максимальный идеал замкнут.*

§ 4. Основные теоремы

В этом параграфе X — коммутативная банахова алгебра с единицей.

1. Линейные непрерывные мультипликативные функционалы и максимальные идеалы.

Определение. 1. Линейный непрерывный функционал f на банаховой алгебре X называется *мультипликативным*, если для любых x и y

$$f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y). \tag{1}$$

Совокупность всех нетривиальных линейных непрерывных мультипликативных функционалов мы обозначим через $\mathcal{M}$.

Заметим, что линейный непрерывный мультипликативный функционал мы могли бы определить, как непрерывный гомоморфизм X в $\mathbf{C}$.

Если $f \in \mathcal{M}$, то

$$|f(x)| \leqslant \|x\|, \tag{2}$$

ибо если для некоторого x_0 по норме равного единице,

$$|f(x_0)| = \lambda > 1, \quad \text{то } \left|f\left(x_0^n\right)\right| = \lambda^n \to \infty,$$

т. е. мы получили бы, что f не непрерывен.

Далее,

$$f(e) = f(e^2) = (f(e))^2,$$

откуда либо $f(e) = 0$, т. е. f тривиален, либо

$$f(e) = 1. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что нетривиальные линейные непрерывные мультипликативные функционалы имеют норму единица и, следовательно, $\mathcal{M}$ есть подмножество единичной сферы в сопряженном пространстве X^*.

Нулевое подпространство функционала f (т. е. совокупность тех $x \in X$, для которых $f(x) = 0$) обозначим $\operatorname{Ker} f$ и назовем ядром f.

Лемма 1. *Ядро* $\operatorname{Ker} f$ *при* $f \in \mathcal{M}$ *есть максимальный идеал.*

Действительно, из

$$y \in I = \operatorname{Ker} f \text{ и } x \in X$$

следует, что

$$f(x\cdot y) = f(y)\cdot f(x) = 0,$$

т. е.

$$y\cdot x \in \operatorname{Ker} f.$$

Таким образом, $\operatorname{Ker} f$ — идеал. Покажем, что $\operatorname{Ker} f$ — максимальный идеал. Допустим, что это не так, т. е. $\operatorname{Ker} f$ можно расширить до идеала $I \neq X$, содержащего $x_0 \notin \operatorname{Ker} f$. Но $\operatorname{Ker} f$ имеет коразмерность 1 (см. гл. III, § 1, п. 6). Значит, элемент e можно представить так:

$$e = \lambda x_0 + y,$$

где $y \in \operatorname{Ker} f$. Отсюда следует, что $e \in I$. Значит, $I = X$. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 2. *По всякому максимальному идеалу M можно однозначно построить линейный непрерывный мультипликативный функционал $f \in \mathcal{M}$ такой, что $M = \operatorname{Ker} f$.*

Действительно, в силу следствия из леммы 3 § 3 M — замкнутый идеал. Применив теорему 1 § 3, мы получим, что X/M есть банахова алгебра. Но в силу леммы 2 § 3 X/M не имеет нетривиальных идеалов, т. е. алгебра X/M не содержит необратимых элементов, отличных от нуля (см. следствие из леммы 1 § 3). Значит, X/M есть поле, являющееся банаховой алгеброй.

В силу следствия 1 из теоремы 1 § 2 поле X/M изоморфно $\mathbf{C}$. Это, по определению, означает, что для любого $x \in X$ найдется однозначно число $f(x) \in \mathbf{C}$ такое, что

$$x = f(x) \cdot e + u, \quad u \in M. \tag{4}$$

Покажем, что f есть гомоморфизм. Докажем, например, что $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Имеем

$$x = f(x) \cdot e + u, \quad u \in M,$$
$$y = f(y) \cdot e + v, \quad v \in M,$$

откуда

$$xy = f(x) \cdot f(y) \cdot e + w, \quad w \in M.$$

Но это и означает, что $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Соотношения $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ доказывается аналогично. Кроме того, если $x \in M$, то из (4) следует, что $f(x) = 0$, а если $x = e$, то $f(x) = 1$.

Лемма доказана.

Итак, мы получили, что между максимальными идеалами $\{M\}$ и функционалами f из $\mathcal{M}$ существует однозначное соответствие. В силу этого обстоятельства условимся функционалы из $\mathcal{M}$ обозначать f_M, а буквой M соответствующие им максимальные идеалы. Для множества всех максимальных идеалов $\{e\}$ мы будем употреблять ту же букву $\mathcal{M}$, что и для соответствующего ему множества $\{f_M\}$.

Пусть x — некоторый элемент из X.

Рассмотрим функцию $x(M)$ на множества $\mathcal{M}$, задав ее формулой

$$x(M) = f_M(x). \tag{5}$$

(Значение функции $x(M)$, построенной по элементу x, на максимальном идеале M равно числу $f_M(x)$, т. е. значению на элементе x гомоморфизма, соответствующего идеалу M.) Мы получили реализацию элементов алгебры X в виде функций на множестве $\mathcal{M}$, о которой говорили в конце § 1.

2. Топология в множестве $\mathcal{M}$. Основные теоремы. Нам осталось доказать, что $\mathcal{M}$ компактно в некоторой топологии и что функции $x(M)$ непрерывны в той же топологии.

Чуть ранее мы упомянули, что $\mathcal{M}$ есть подмножество единичного шара. С другой стороны, в п. 4 § 3 гл. IV было приведено доказательство для сепарабельного случая следующего утверждения.

Единичный шар пространства X^*, сопряженного к банахову пространству, компактен в $*$-слабой топологии.

Доказательство этой теоремы в общем случае можно найти, например, в [21, с. 459].

Напомним, что $*$-слабая топология определяется системой окрестностей

$$U_{x_1, \ldots, x_m, \delta}(f_0) = \{f \in X^* : |f(x_k) - f_0(x_k)| < \delta, \quad k = 1, \ldots, m\}. \tag{6}$$

Множество $\mathcal{M}$ мы рассмотрим именно в $*$-слабой топологии. Компактность $\mathcal{M}$ вытекает из сформулированного выше результата и следующей леммы.

Лемма 3. *Множество $\mathcal{M}$ есть замкнутое подмножество единичного шара в X^* и функции $x(M)$ непрерывны на $\mathcal{M}$.*

Действительно, пусть функционал f_0 принадлежит замыканию $\mathcal{M}$. Это значит, что внутри любой базисной окрестности отображения f_0 найдется гомоморфизм f_M, порожденный максимальным идеалом M. Возьмем окрестности $U_{x, y, x+y, \delta}(f_0)$. В силу (6) и определения $x(M)$ мы получим

$$\begin{aligned} |f_M(x) - f_0(x)| &< \delta, \\ |f_M(y) - f_0(y)| &< \delta, \\ |f_M(x+y) - f_0(x+y)| &< \delta. \end{aligned} \tag{7}$$

Но f_M есть гомоморфизм, т. е.

$$f_M(x+y) = f_M(x) + f_M(y).$$

Тогда из (7) следует, что

$$f_0(x+y) = f_0(x) + f_0(y).$$

Аналогично показывается, что $f_0(\alpha x) = \alpha f_0(x)$ и $f_0(xy) = f_0(x) \times f_0(y)$. (Надо взять окрестности $U_{x, \alpha x, \delta}(f_0)$ и $U_{x, y, xy, \delta}(f_0)$.)

Значит, f есть непрерывный линейный мультипликативный функционал. Далее, взяв окрестности $U_{e\delta}(f_0)$, мы получим, что $f_0(e) = 1$, т. е. f_0 нетривиален. Значит, $f_0 \in \mathcal{M}$, т. е. $\mathcal{M}$ замкнуто.

Покажем, что функция $x_0(M) = f_M(x_0)$ непрерывна на $\mathcal{M}$.

Пусть $M_0 \in \mathcal{M}$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем окрестность $U_{x_0 \varepsilon}(M_0)$. Если $M \in U_{x_0 \varepsilon}$, то в силу (6) получится, что

$$|f_M(x_0) - f_{M_0}(x_0)| = |x_0(M) - x_0(M_0)| < \delta.$$

Но это и означает непрерывность функции $x_0(M)$ в точке M_0.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Отображение $x \to x(M)$ задает гомоморфизм алгебры X в алгебру $C_{\mathcal{M}}$ непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве $\mathcal{M}$ максимальных идеалов алгебры X; при этом*

$$\|x(M)\| = \max |x(M)| \leqslant \|x\|. \tag{8}$$

В силу сказанного выше в этом параграфе, нам остается доказать лишь соотношение (8).

Заметим, что для всякого M элемент $x - f_M(x)\,e$ по определению $f_M(x)$ принадлежит идеалу M, т. е. является необратимым. Поэтому

$f_M(x) \in \sigma(x)$. С другой стороны, взяв любое число $\lambda_0 \in \sigma(x)$, мы обнаруживаем, что $x - \lambda_0 e$ необратим и, значит, принадлежит максимальному идеалу M, откуда

$$0 = f_M(x - \lambda_0 e), \text{ т. е. } \lambda_0 = f_M(x).$$

Итак, образ $\mathscr{M}$ при отображении $x(M)$ совпадает с $\sigma(x)$. Следовательно, в силу утверждения 2° теоремы 1 § 2, мы получаем, что неравенство (8) справедливо.

Нам осталось лишь уточнить теорему 1 при разных допущениях об алгебре X. Введем определения трех понятий.

Определение 2. Пересечение $R = \bigcap_{M \subset \mathscr{M}} M$ всех максимальных идеалов называется *радикалом* X. Если $R = \{0\}$, то говорят, что X не имеет радикала. Банахова алгебра X называется *регулярной*, если $\|x^2\| = \|x\|^2$. Банахова алгебра X называется *симметричной*, если для всякой функции $x(M)$ найдется элемент $y \in X$ такой, что

$$y(M) = \overline{x(M)}.$$

(Черта означает комплексное сопряжение.)

Теорема 2. а) *Если радикал алгебры X состоит из одного нуля, то отображение $x \to x(M)$ является взаимно однозначным.*

б) *Если алгебра X регулярна, то X изометрически изоморфна со своим образом $C_{\mathscr{M}}$, в частности, X не имеет радикала.*

в) *Если алгебра X симметрична, то образ X при отображении $x \to x(M)$ всюду плотен в $C_{\mathscr{M}}$.*

г) *Если алгебра X обладает свойствами* б) *и* в), *то X изометрически изоморфна $C_{\mathscr{M}}$.*

Доказательство. Сначала выведем последнее утверждение из остальных. В силу б) взаимно однозначное отображение $x \leftrightarrow x(M)$ является изометрией:

$$\|x\|_X = \max_{M \in \mathscr{M}} |x(M)|.$$

В силу в) $\{x(M)\}$ всюду плотно в $C_{\mathscr{M}}$. Но X — полное пространство. Значит, и $\{x(M)\}$ (вследствие равенства норм в X и в $C_{\mathscr{M}}$) полно, откуда $\{x(M)\} = C_{\mathscr{M}}$.

Докажем а). Пусть $x_0 \neq 0$, а $x_0(M) \equiv 0$ на $\mathscr{M}$. Это означает, что $f_M(x_0) = 0$ для всех M, т. е. $x_0 \in \operatorname{Ker} f_M$ для всех M, значит, $x_0 \in R$. Но $R = \{0\}$, откуда $x_0 = 0$. Противоречие доказывает а).

Для доказательства б) заметим, что из равенства $\|x^2\| = \|x\|^2$ сразу следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \|x\|.$$

Применив теорему о спектральном радиусе (теорема 2 § 2), мы получаем, что

$$r(x) = \|x\|. \tag{9}$$

Тогда из (9), во-первых, следует, что радикал состоит только из нуля. Действительно, если допустить, что $0 \neq x_0 \in R$, то для всех M выражение $f_M(x_0) = 0$, т. е. $\sigma(x_0)$ совпадает лишь с нулем, что противоречит тому, что $r(x_0) = \|x_0\| \neq 0$.

Далее, из (9) следует, что отображение $x \leftrightarrow x(M)$, являющееся изоморфизмом X и соответствующей подалгебры $\{x(M)\}$ в $C_{\mathscr{M}}$ будет изометрией, ибо в силу (8)

$$\|x(M)\|_{C_{\mathscr{M}}} = \max_{M \in \mathscr{M}} |x(M)| = r(x) = \|x\|.$$

Доказательство в) требует привлечения одной из весьма замечательных теорем алгебры и анализа — теоремы Стоуна — Вейерштрасса, которая звучит так:

Пусть A есть подалгебра банаховой алгебры C_T непрерывных функций на компакт T такая, что

1) *Единица (т. е. функция $e(t) \equiv 1$) принадлежит A.*

2) *Алгебра A разделяет точки T (т. е. для любых $t_1 \neq t_2$ существует функция $x(t) \in A$ такая, что $x(t_1) \neq x(t_2)$).*

3) *Алгебра A инвариантна по отношению к комплексному сопряжению (т. е. из $x(t) \in A$ следует, что $\overline{x(t)} \in A$).*

Тогда A всюду плотна в C_T.

Доказательство теоремы Стоуна — Вейерштрасса см. в [13, с. 53—56; 21, с. 296—297; 26, с. 20].

Докажем теперь в). Пусть $A = \{x(M)\}$ означает образ X при отображении $x \to x(M)$.

Из (4) сразу следует, что $e \to e(M) \equiv 1$, т. е. $e(M) \equiv 1 \in A$. Пусть M_1 и M_2 — два различных максимальных идеала. Это означает, что существует элемент x_0, принадлежащий M_1 и не принадлежащий M_2 (или наоборот), откуда

$$x_0(M_1) = f_{M_1}(x_0) = 0, \quad x_0(M_2) = f_{M_2}(x_0) \neq 0,$$

т. е. A разделяет точки $\mathscr{M}$. Далее, по самому определению, симметричная алгебра A инвариантна относительно комплексного сопряжения. Применение теоремы Стоуна — Вейерштрасса приводит к в).

Теорема доказана.

3. Теорема Винера; упражнения. Приложения теории банаховых алгебр весьма разнообразны.

Напомним ряд результатов из алгебры и анализа, которые уже были получены нами по ходу дела.

Банахова алгебра над полем **C**, *являющаяся полем, изометрически изоморфна* **C**.

Спектр любого ненулевого ограниченного оператора в банаховом пространстве не пуст.

Для любого ограниченного оператора A в банаховом пространстве X существует предел $\lim \sqrt[n]{\|A^n\|} = r(A)$, *и спектр A целиком лежит в круге* $|\lambda| \leqslant r(A)$.

Докажем теперь, используя теорию коммутативных банаховых алгебр, следующую теорему Винера:

Если функция $x(\theta)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье $x(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\theta}$ *и нигде не обращается в нуль, то и функция $y(\theta) = 1/x(\theta)$ также разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Рассмотрим изометрически изоморфные алгебры l_1 и W (см. пример 4 п. 2 § 1). Найдем пространство $\mathscr{M}$ для них. Легко понять, что гомоморфизм W в $\mathbf{C}$ достаточно задать на функции $x_0(t) = e^{it}$ и далее он распространится на W однозначно. Положим

$$f_M(x_0) = f_M(e^{it}) = \zeta.$$

Тогда

$$f_M\left(x_0^{-1}\right) = f_M\left(e^{-it}\right) = \zeta^{-1}.$$

В силу (2)

$$|\zeta| = \left|f_M(x_0)\right| \leqslant \|x_0\| = 1, \quad |1/\zeta| = \left|f_M\left(x_0^{-1}\right)\right| \leqslant \left\|x_0^{-1}\right\| = 1,$$

откуда $|\zeta| = 1$, т. е. $\zeta = e^{i\theta}$. Мы получили, что $\mathscr{M}$ находится во взаимно однозначном соответствии с окружностью $|\zeta| = 1$. Для любой последовательности $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0, \ldots, x_n, \ldots) \in l_1$ и соответствующей ей функции $x(t) = \sum\limits_k x_k e^{ikt} \in W$ имеем:

$$_M(x) = f_M(x(t)) =$$

$$= f_M\left(\sum_k x_k e^{ikt}\right) = \sum_k x_k \left[f_M\left(e^{it}\right)\right]^k = \sum_k x_k e^{ik\theta} = x(\theta).$$

Поэтому тот факт, что функция $x(\theta)$ не обращается в нуль ни для каких $-\pi \leqslant \theta < \pi$, означает, что x не принадлежит ни одному максимальному идеалу. Значит, в силу следствия из леммы 1 § 3, эта последовательность обратима в алгебре l_1. Положим $y = x^{-1} = (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$. Тогда

$$y(M) = f_M(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ik\theta} = f(x^{-1}) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\theta}},$$

что и требовалось.

Два других важных приложения теории банаховых алгебр — спектральную теорему для ограниченных операторов и теорему Стоуна — Чеха — мы сформулируем ниже в виде упражнений (см. упражнения 8 и 9).

У п р а ж н е н и я. 1. а) Показать, что пространство максимальных идеалов алгебры $\mathscr{A}$ (см. пример 3 п. 2 § 1) можно взаимно однозначно и непрерывно сопоставить с точками единичного круга $|z| \leqslant 1$.

б) Показать, что $\mathscr{A}$ регулярна, несимметрична и не имеет радикала.

2. Какое обстоятельство мешает тому, чтобы можно было утверждать, что l_1 (см. пример 4 п. 2 § 1) изометрически изоморфна пространству $C_{\mathscr{M}}$, т. е. пространству всех непрерывных функций на окружности $|\zeta| = 1$?

3. Доказать, что имеет место теорема:

Пусть

$$x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty,$$

причем $x(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$. Тогда функция $y(z) = 1/x(z)$ разлагается в ряд Тейлора, абсолютно сходящийся при $|z| \leqslant 1$.

4. Обозначим через $C^n[a, b]$ совокупность n раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$.

а) Показать, что $C^n[a, b]$ становится банаховой алгеброй относительно обычных операций и нормы, задаваемой формулой:

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|.$$

б) Найти максимальные идеалы $C^n[a, b]$ (см. [13, с. 19, 20]).

в) Проверить, что $C^n[a, b]$ есть симметричная алгебра без радикала. Что дает в этом случае применение теоремы 2?

5. Пусть $CBV[0, 1]$ означает алгебру непрерывных комплексных функций ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| + V_0^1[x].$$

а) Показать, что $CBV[0, 1]$ есть банахова алгебра.

б) Найти максимальные идеалы этой алгебры.

6. Привести пример банаховой алгебры, совпадающей со своим радикалом.

7. Описать все замкнутые идеалы в алгебре $C[a, b]$.

8. Пусть T — вполне регулярное топологическое пространство (см. п. 6 § 5 гл. II). Обозначим через B_T множество всех определенных на T ограниченных комплексных функций с обычными операциями и нормой

$$\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

а) Проверить, что B_T есть регулярная симметричная алгебра без радикала.

б) Показать, что точки T гомеоморфно вкладываются в пространство $\mathscr{M}$ максимальных идеалов алгебры B_T, причем образ T при этом вложении является в $\mathscr{M}$ всюду плотным подмножеством.

в) Показать, что любая ограниченная комплексная функция на образе T при этом вложении допускает единственное непрерывное продолжение на $\mathscr{M}$.

Утверждение б), дополненное тем, что $\mathscr{M}$ есть компакт (это последнее обстоятельство сразу следует из а), если применить теоремы 1 и 2 § 4), составляет содержание известной теоремы Тихонова о бикомпактном расширении. Утверждение в) принадлежит Стоуну и Чеху. Бикомпактное расширение, обладающее свойством в), называется максимальным. Утверждение в) означает, что $\mathscr{M}$ есть максимальное бикомпактное расширение (см. [22, с. 23]).

9. Пусть H — гильбертово пространство. В алгебре $\mathscr{L}(H, H)$ рассмотрим коммутативную подалгебру $B(A_0)$, порожденную самосопряженным оператором A_0 (т. е. являющуюся замыканием линейной оболочки степеней A_0).

а) Показать, что $B(A_0)$ регулярна и не имеет радикала.

б) Показать, что $B(A_0)$ симметрична, причем

$$\overline{x(M)} = x^*(M),$$

где x^* — оператор, сопряженный к оператору $x \in B(A_0)$, $x(M)$ — отображение, построенное в § 4. По поводу б) см. также упражнение 10 в).

Применение теоремы 2 § 4 к алгебре $B(A_0)$ приводит к так называемой спектральной теореме для самосопряженных операторов (см. [22], гл. X; [26], гл. II).

10. Говорят, что банахова алгебра (необязательно коммутативная) есть алгебра с инволюцией, если имеется отображение $X \to X$, обладающее свойствами:

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^*x^*, \quad (\alpha x)^* = \bar{\alpha}x^*,$$
$$(x^*)^* = x.$$

Алгебра с инволюцией называется B^*-алгеброй, если, кроме того, $\|xx^*\| = \|x\|^2$.

а) Показать, что алгебра $\mathfrak{L}(H, H)$ есть B^*-алгебра (см. [22, с. 26]).

б) Показать, что коммутативная B^*-алгебра регулярна (см. [22, с. 26]).

в) Показать, что B^*-алгебра симметрична, более того, $\overline{x(M)} = x^*(M)$ (см. [22, с. 27], лемма Аренса).

Утверждения б) и в) в сочетании с теоремой 2 приводят к такому результату, принадлежащему Гельфанду и Наймарку и называемому иногда основной теоремой теории коммутативных банаховых алгебр:

Коммутативная B^*-алгебра изометрически изоморфна алгебре $C_{\mathfrak{M}}$ и при этом изоморфизме $\overline{x(M)} = x^*(M)$.

Итак, абстрактный алгебраический объект, описываемый двадцатью четырьмя аксиомами (13 аксиом коммутативной алгебры, 5 аксиом, связанных с нормой, аксиома полноты и 5 аксиом B^*-алгебры), оказалось возможным реализовать в виде алгебры всех непрерывных функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве.

Этот результат позволяет рассмотреть с единой точки зрения такие, казалось бы, весьма далекие друг от друга факты, как теорема Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах, теорема о спектральном разложении самосопряженного оператора, топологические теоремы Тихонова, Стоуна и Чеха и ряд других.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах//УМН. — 1967. — Т. XXII, вып. 6. — С. 200—260.
2. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. — М.: Гостехиздат, 1948.
3. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов. — М.: Наука, 1966.
4. Банах С. Курс функціонального аналізу. — Київ: Радянська школа, 1948.
5. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
6. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. — М.: Физматгиз, 1962.
7. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. — 2-е изд. — М.: Наука, 1968.
8. Бурбаки Н. Теория множеств. — М.: Мир, 1965.
9. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: ИЛ, 1959.
10. Виленкин Н. Я. и др. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1964.
11. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
12. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. — М.: Наука, 1964.
13. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е. Коммутативные нормированные кольца. — М.: Физматгиз, 1960.
14. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1959.
15. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958.
16. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
17. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматгиз, 1961.
18. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
19. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. — М.: Наука, 1967.
20. Вулих Б. З. Теория полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961.
21. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
22. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.

23. Дэй М. Линейные нормированные пространства. — М.: ИЛ, 1961.
24. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
25. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1, 2. — М.: Мир, 1965.
26. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
27. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика//УМН. — 1948. — Т. III, вып. 6. — С. 89—185.
28. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1977.
29. Келл Дж. Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968.
30. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
31. Куратовский К. Топология, т. 1. — М.: Мир, 1966.
32. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. — М.: ГТТИ, 1934.
33. Лоэв М. Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962.
34. Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. — М.: ИЛ, 1956.
35. Михлин С. Г. Лекции по интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.
36. Морен К. Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965.
37. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — 2-е изд. — М.: Наука, 1968.
38. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969.
39. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1957.
40. Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов. — М.: Наука, 1965.
41. Рисс Ф., Надь Б. С. Лекции по функциональному анализу. — 2-е изд. — М.: Мир, 1979.
42. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1967.
43. Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1966.
44. Сакс С. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
45. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: Гостехиздат, 1948.
46. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. — М.: ИЛ, 1960.
47. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.
48. Халмош П. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
49. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963.
50. Халмош П. Лекции по эргодической теории. — М.: ИЛ, 1959.
51. Хилл Е., Филинс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
52. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — 2-е изд. — М.: МГУ, 1984.
53. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. Общая теория. — М.: Наука, 1967.
54. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. — М.: Наука, 1967.

55. Эдвардс Р. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
56. Schwartz L. Théorie des distributions, I, II. — Paris, 1951.
57. Fraenkel A. Abstract set theory. — Amsterdam, 1953.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ГЛАВАМ

Глава I. 2; 8; 47; 56.
Глава II. 2; 4; 7; 24; 29; 31.
Глава III. 4; 9; 10; 13; 15; 17; 20; 21; 23; 24; 26; 27; 28; 34; 36; 37; 41; 42; 49; 51; 55.
Глава IV. 3—5; 13—19; 21—23; 26; 34; 36—38; 40; 52; 57.
Глава V. 12; 21; 32; 33; 39; 41; 44; 48; 50; 53; 54.
Глава VI. 21; 28.
Глава VII. 32; 39; 41; 44; 53.
Глава VIII. 6; 11; 12; 14—17; 25; 52.
Глава IX. 35; 46.
Глава X. 1; 24; 28; 30; 43; 51.
Дополнение. 13; 21; 22; 26.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега 345
Абсолютно непрерывная мера 302
— — функция 392 и далее
— непрерывный заряд 404, 405
Абстрактная функция 557
Абстрактное уравнение Фредгольма первого рода 543
Абстрактный оператор Вольтерра 542, 545
Аддитивный функционал 145
Аксиома выбора 47
— нормальности 112
— отделимости T_1 110
— — T_2 (хаусдорфова) 111
— — T_3 111
— — T_4 112
— счетности первая 104
— — вторая 103
— треугольника 57
— Цермело 47
Аксиоматическая теория множеств 47
Алгебра (банахова, коммутативная, нормированная, с единицей) 589
— множеств 50
— — измеримых 313
— с инволюцией 606
— функций, аналитических в круге 591
— —, непрерывных на компакте 591
— — с абсолютно сходящимися рядами Фурье 592
— l_1 592
Алгебраическая размерность 144, 166, 203
Алгебраически сопряженное пространство 211
Алгебраические действия над измеримыми функциями 325
Алгебраическое число 30
Альтернатива Фредгольма 537
Аннулятор 210
Антисимметричность 38
Арифметическое (евклидово) пространство 59, 140

База топологии 102, 103
Базис в конечномерном линейном пространстве 142
— Гамеля 144, 203
— двойственный 215
— меры 435
Банахова алгебра 589
— — ограниченных операторов 592
— —, основная теорема о коммутативных 607
— — регулярная 602
— — симметричная 602
Банахово пространство 162
Бесконечное множество 26, 32
Бесконечномерное линейное пространство 142
Биекция 21
Бикомпакт 123
Бикомпактное расширение 606
— топологическое пространство 123
Билинейное отображение 560
Бинарное отношение 26
Борелевская функция 323
Борелевское множество 55, 73

Вариационное исчисление 573, 582
Вариация заряда, верхняя, нижняя и полная 404
— отображения первая 553
Векторное пространство 139
Верхний предел функции в точке 120
Верхняя грань 48
Вес (весовая функция) 458
Взаимно однозначное соответствие 21
— — — между интегральными операторами и их ядрами 531
— — — — линейными функционалами и гиперплоскостями 149
Внешняя мера 293, 312, 320
— —, полуаддитивность 293
— —, — счетная 312
Внутренняя мера 316, 320
— точка множества 72
Восстановление функции по ее производной 246, 389, 396, 399, 559
Вполне непрерывный оператор 272
— ограниченное множество 124
— регулярное топологическое пространство 112
— упорядоченное множество 41
Всюду плотное подмножество 70
— — — в пространстве L_1 433, 434, 435
— — — — — L_2 443
Вторая аксиома счетности 103
— производная отображения 560 и далее
Второе сопряженное пространство 221
Выпуклая оболочка 152
Выпуклое множество 149
— тело 149
— — в нормированном пространстве 209
Выпуклый функционал 152
Вычитание множеств 19

Геометрическая интерпретация линейного функционала 32
— — теоремы Хана—Банаха 208

Геометрический смысл нормы линейного функционала 207
Геометрическое определение интеграла Лебега 362
Гильбертов кирпич 125, 150
Гильбертово пространство 180, 443
— — комплексное 193, 444
Гиперплоскость 148
Глобальная сходимость ряда Фурье 471
Гомеоморфизм пространств метрических 66
— — топологических 108
Гомоморфизм алгебр 591
Грань симплекса 152
График оператора 263

Двойственности принцип 20
Двойственный базис 215
Действительное линейное пространство 139
Детерминант Грама 462
— Фредгольма 550
Диагональная процедура Кантора 33
Диаметр множества 33
Дискретная мера 303, 410
— топология 99
Дискретный заряд 404
Дисперсия 413
Дифференциал Гато 553
— Фреше 552
Дифференциалы высших порядков отображения 563
Дифференциальное уравнение в классе обобщенных функций 244 и далее
— — второго порядка 527
— —, зависимость решений от начальных данных 569
— —, — — — параметра 570
— — с постоянными коэффициентами 498, 513
— —, теорема существования и единственности 91—94
Дифференцируемый функционал 557
Длина кривой в метрическом пространстве 137
Дополнение множества 19
Достаточность запаса основных функций 243
Достаточные условия минимума функционала 580
— — сходимости интеграла Фурье 484
— — — — — многомерного 502
— — — ряда Фурье 469
— — — — — равномерной 474, 475

Евклидово пространство 166, 188
— — комплексное 192
— — n-мерное арифметическое 59
Единица алгебры 589
— системы множеств 51
Единичный оператор 252
Естественное отображение E в E^{**} 221

Задача Коши 91—94
— — для уравнения теплопроводности 498
Задача Коши для уравнения теплопроводности на плоскости 503
Задачи, приводящие к интегральным уравнениям 524—528
Замена переменных в интеграле Лебега 415
Замкнутая ортонормальная система 176
Замкнутое множество в метрическом пространстве 71
Замкнутое множество в топологическом пространстве 98
— — на прямой 74
— подпространство нормированного пространства 164
— покрытие 105
Замкнутость максимальных идеалов 598
— множества необратимых элементов банаховой алгебры 595
Замкнутый оператор 263
— отрезок 149
— шар 68
Замыкание линейное 164
— множества в пространстве метрическом 68
— — — — топологическом 99, 15
Заряд 400, 401
— непрерывный, дискретный, абсолютно непрерывный и сингулярный 404
Знакопеременная мера 400, 401

Идеал в кольце 243
— коммутативной алгебры 592
Измеримая функция 323, 335
— —, действия над ними 325—327
Измеримое множество 295, 312, 316—319, 404
— —, свойства 295—300
Измеримость по Каратеодори 316
Изолированная точка множества в метрическом пространстве 69
Изометрически изоморфные алгебры 591
Изометричность отображения нормированного пространства во второе сопряженное 222
Изометрия 66
Изоморфизм алгебр 591
— между гильбертовым пространством и ему сопряженным 217
— пространств гильбертовых сепарабельных 181
— — — — комплексных 193
— — евклидовых 180
— — линейных 141, 144
— — $L_2(X, \mu)$ 443
— — — комплексных 444
— частично упорядоченных множеств 39
Индикатор 38
Интеграл абстрактной функции 557
— Дирихле 468
— как σ-аддитивная функция множества 346
— Лебега 334 и далее
— —, замена переменных 415
— — неопределенный 367
— —, основные свойства 338 и далее

Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры 351 и далее
— —, сравнение с интегралом Римана 352
— —,— — — — несобственным 354
— Лебега—Стилтьеса 411 и далее
— — — по функции монотонной 411
— — — — — ограниченной вариации 412
— от простой функции 336
— — — —, свойства 337
— по множеству 338
— Пуассона 499
— Римана 352
— Римана—Стилтьеса 415 и далее
— Фейера 478
— Фурье 481 и далее (см. Преобразование Фурье)
— — в комплексной форме 485
Интегральное неравенство Гёльдера 62
— — Коши—Буняковского 61
Интегральное неравенство Минковского 64
— уравнение 523
— — Абеля 523
— — Вольтерра 95, 524, 542
— —, задачи, к нему приводящие 524—527
— — нелинейное 95, 523, 587
— — Фредгольма 95, 524, 528, 531, 543
Интегрируемая функция 337
— — простая 336
Интегрируемость ограниченной измеримой функции 339
Интервал в множестве порядковых чисел 121
Интерполирование по методу наименьших квадратов 462
Инъекция 21
Исключающее «или» 20
Исчерпывающая последовательность множеств 351
Итерированные ядра 548

Канторова лестница 391
Канторово множество 74
— —, точка первого и второго рода 76
Касательное многообразие к множеству 571
Классы смежности по подпространству 144
Колебание функции в точке 120
Колебания струны 524
Кольцо множеств 471
— — измеримых 311
— —,— по Жордану 320, 322
— —, порождаемое полукольцом 54
— — элементарных 289
Коммутативная алгебра 589
Компакт 115, 123
Компактное топологическое пространство 115
Компактность замкнутых подмножеств компактного пространства 116
— интегрального оператора 275
— спектра элемента алгебры 594, 596
— счетно-компактного метрического пространства 126
Компактный оператор 272
— — в гильбертовом пространстве 282, 283
Комплексное пространство гильбертово 193
— — евклидово 191
— — линейное 116
Композиция борелевской функции с измеримой 325
— измеримых функций 325
Компонента открытого множества 77
Конечное множество 26
— разложение множества 52
Конечномерный оператор 272, 530
Континуум-гипотеза 46
Контрпример к теореме Фубини 366
Координаты вектора в евклидовом пространстве 173
Коразмерность 145
— ядра линейного функционала 147
Корректная задача 543
Коэффициенты Фурье 177, 193, 447—449, 452, 466, 487, 504
— —, однозначность определения функции по ним 481
— — по ортонормальной системе 173
Критерий базы топологии 103
— измеримости функции 325, 335
— — — простой 335
Критерий компактности пространства метрического 126
— — — топологического 116
— непрерывности линейного функционала в пространстве нормированном 205
— — — — — — топологическом 203
— — отображения топологического пространства 108
— полноты метрического пространства 81
— — ортогональной нормированной системы 179
— — счетно-нормированного пространства 199
— предельности точки в T_1-пространствах 110
— предкомпактности множества в полном метрическом пространстве 128
— слабой сходимости в нормированном пространстве 226
— — — последовательности функционалов 230
— суммируемости простой функции 336
— счетной компактности топологического пространства 121

Лебегова мера 295, 301, 312
Лебегово продолжение меры 314
— — —, полнота 315
Лемма Аренса 606
— Гейне—Бореля 115
— о замкнутости образа 538
— — замыкании идеала алгебры 598
— — максимальных идеалах алгебры непрерывных функций 593
— — равномерном стремлении к нулю коэффициентов Фурье компактного множества функций 475

Лемма о разложении гильбертова пространства в прямую сумму Ker T и Im T^* 538, 539
— — сепарабельности подмножества 184
— — стремлении к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции 468
— — существовании максимального идеала 598
— — тройке 262
— — ядре мультипликативного функционала 600
— об аннуляторе 209
— — — ядра оператора 267
— — идеалах фактор-алгебры 598
— — обратимости элементов, близких к единичному 594
— — — —,— — обратимому 595
— Рисса о множестве невидимых точек 373, 374
— — обобщенная 378
— Цорна 48
Линейная зависимость и независимость 141
— оболочка 144
Линейно упорядоченное множество 40
Линейное замыкание 164
— многообразие 164, 184
— — абсолютно непрерывных функций 394
— — в гильбертовом пространстве 184
— — касательное к множеству 571
— пространство 139 и далее
— — топологическое 194
Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве 210
Линейный оператор 251 и далее (см. также оператор)
— —, график 263
— — замкнутый 263
— — непрерывный 251
— — ограниченный 256, 257
Линейный оператор самосопряженный 268
— —, сопряженный к данному 266
— — эрмитово сопряженный 268
— функционал 145, 202 и далее (см. также Функционал линейный)
— — не непрерывный 203
Локальная выпуклость нормированного пространства 198
— — сильной топологии в E^* 214
— ограниченность нормированного пространства 208
Локально выпуклое топологическое линейное пространство 196
— ограниченное топологическое линейное пространство 196
Ломаные Эйлера 131

Максимальная цепь 47
Максимальное бикомпактное расширение 606
Максимальный идеал 592
— — алгебры C_1 593
— элемент 39
Максимум функционала 575
Математическое ожидание 413
Мера 288 и далее, 304
— абсолютно непрерывная 303
Мера дискретная 303
— Жорданова 320
— Лебега 312
— — на плоскости 295
— —, непрерывность 299
— —, полнота 300
— — n-мерная 359
— Лебега—Стилтьеса 301, 303, 408, 411
— — — абсолютно непрерывная 303, 410
— — — дискретная 303, 410
— — —, примеры 410
— — —, производящая функция 408
— — — сингулярная 303, 410
— на классе прямоугольников 289
— — полукольце 304
—, непрерывность 314
— полная 315
— сингулярная 303
— со счетным базисом 434, 435
— σ-аддитивная 307
— σ-конечная 316
Метод касательных 584
— математической индукции 48
— Ньютона 584
— — модифицированный 585
— —, пример 587
— последовательных приближений 89
— характеристических функций 519
Метризуемое пространство 115
Метрический компакт 123
Метрическое пространство 57
Минимальная топология, порожденная системой множеств 100
— σ-алгебра 55
Минимальное кольцо, порожденное системой множеств 51
Минимальный элемент 39
Минимум функционала 575
Минор Фредгольма 550
Многочлены Лагерра 461
— Лежандра 453 и далее
— Чебышева 458
— Эрмита 460
Множеств алгебра 51
— кольцо 49
— объединение 18
— пересечение 18
Множеств полукольцо 52
— равенство 18
— разность 19
— — симметрическая 19
— система 49
Множества диаметр 82
— дополнение 20
— замыкание 68, 99
— мощность 34
Множество 17
— бесконечное 26, 32
— всюду плотное 70
— выпуклое 149
— замкнутое 71, 98
— измеримое 295, 312, 318
— — относительно σ-кольца 320
— — по Жордану 320, 322
— конечное 26
— линейно упорядоченное 40
— неизмеримое 303
— несчетное 28
— нигде не плотное 70
— ограниченное 68

Множество однозначности меры 321
— открытое 72, 77, 98
— относительно компактное 123
— отрицательное относительно заряда 401
— плотное в другом множестве 70
— положительное относительно заряда 401
— предкомпактное 123
— пустое 17
— симметричное 198
— совершенно упорядоченное 40
— счетное 27
— счетно-предкомпактное 123
— упорядоченное 40
— — частично 38
— σ-однозначности меры 322
Множители Лагранжа 583
Монотонные функции 368
Мощность континуума 34
— множества 34
— — всех подмножеств натурального ряда 37
— $\aleph_1$ 46
Мультипликативный функционал 598

«Наивная» теория множеств 47
Наличие счетной базы у вполне ограниченных метрических пространств 124
Направленное множество 39
Наследственное свойство 112
Наследственность полной регулярности 112
Начальный отрезок упорядоченного множества 43
Невидимая справа или слева точка 373, 374, 378
Неизмеримое множество 303
Неисключающее «или» 20
Некоммутативная банахова алгебра 592
Некомпактность единичного оператора в банаховом пространстве 272
Некорректная задача 544
Нелинейное интегральное уравнение 96, 587
Необратимый элемент алгебры 593
Необходимое условие минимума функционала 579
— — — — для задачи с ограничениями 582
— — — —, контрпример 580
— — экстремума функционала 575
Неопределенный интеграл Лебега 367, 395
Неподвижная точка отображения 88, 118
Непрерывная кривая в метрическом пространстве 136
Непрерывное отображение пространства метрического 65
— — — топологического 106
Непрерывность линейного оператора 256
— меры 299, 314
— слева и справа 369
— сложной функции 108
Непрерывный заряд 404
— спектр 270
— функционал на линейном топологическом пространстве 202
Неприводимость σ-алгебры 55
Непустота спектра элемента алгебры 594, 596
Неравенство Бесселя 176, 177, 193
— — для тригонометрической системы 448
— Гёльдера 62
— — интегральное 64
— Коши—Буняковского 59, 166
— — — интегральное 61, 438
— Минковского 62
— — интегральное 64
— Чебышева 344
Несепарабельность пространства m 71
Несравнимые элементы 40
Несчетное множество 28
Несчетность множества действительных чисел 32
Нигде не плотное множество в метрическом пространстве 70
Нижний предел функции в точке 120
Норма 162
— билинейного отображения 560
— линейного оператора 257
— — — сопряженного 266
— функционала 205
Нормальное пространство 112
Нормированная алгебра 589
Нормированное пространство 162
Нормируемость 198
— локально выпуклых, локально ограниченных линейных топологических пространств 198
— пространства, сопряженного к нормируемому 213
Носитель заряда 404
Нулевой оператор 252
Нуль-множество 320

Область значений функции 20
— определения оператора 251
— — функции 20
Обобщение принципа сжимающих отображений 96
Обобщенная производная 240
— —, сравнение с обычной 399
— теорема Арцела 133
— функция 235 и далее
— — комплексная 248
— — на окружности 249
— — — пространстве K^n 248
— — первообразная 246
— — периодическая 249, 250
— —, производная 240
— — регулярная 237
— — сингулярная 237
Образ множества 21
— оператора 251
— элемента 21
Обратимый оператор 259
— элемент алгебры 593
Общий вид линейного оператора из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ 252
Общий вид линейного функционала в пространстве гильбертовом 217, 218, 443
— — — — — — конечномерном 215
— — — — — — счетно-нормированном 210
— — — — — — $C[a, b]$ 423

Общий вид линейного функционала в пространстве $C^1[a, b]$ 428
— — — — — — — c_0 216
— — — — — — — l_1, l_p 217
Объединение множеств 17
Ограниченное множество в пространстве линейном топологическом 196
— — — — — метрическом 68
— отображение 558
Ограниченность слабо ограниченного подмножества нормированного пространства 225, 226
— — сходящейся последовательности функционалов на банаховом пространстве 230
— — — — элементов нормированного пространства 225
Однозначность определения суммируемой функции по ее коэффициентам Фурье 139
— — — — — — — преобразованию Фурье 487
— продолжения меры 316, 321 и далее
Однородно-выпуклый функционал 153
— — на комплексном пространстве 159
Однородный функционал 145
Окрестность множества 111
— точки 99
Оператор 250 и далее
— Вольтерра 277, 542, 545
— вполне непрерывный 272
— — — в гильбертовом пространстве 282
— Гильберта—Шмидта 529
— — —, компактность 529
— — —, сопряженный оператор 531
— дифференцирования 254, 255
— единичный 252
— замкнутый 263
— компактный 272
— — в гильбертовом пространстве 282, 283
— конечномерный 272
— линейный 251
— — из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ 252
— непрерывный 251
— нулевой 252
— обратимый 259
— обратный к данному 259
— ортогонального проектирования 253
— самосопряженный 268, 283
— сопряженный 266
— — в евклидовом пространстве 268
— Фредгольма 529
— эрмитово-сопряженный 268
Операторный метод решения дифференциальных уравнений 511—514
Операции над множествами 18, 19
Операция замыкания в пространстве метрическом 68
— — — топологическом 113
Определяющая система окрестностей 104
Оптимальное управление 582
Ортогонализация 171
Ортогональная нормированная система 169
Ортогональное дополнение 185
Ортогональность векторов 167, 193
— с весом 458
Ортогональные многочлены Лагерра 461
— — Лежандра 453 и далее
— — с дискретным весом 461
— — Чебышева 458
— — Эрмита 460
Ортогональные системы на произведении пространств 455
— — функций в L_2 446
— — Радемахера—Уолша 465
— — — Хаара 463, 465
Ортогональный базис 169
— — в пространствах L_2 $(-\infty, \infty)$ и $L_2(0, \infty)$ 460
— — из собственных векторов 286
— — нормированный 169
Ортонормальная система 169
Ортопроектор 254
Основной параллелепипед гильбертова пространства 125
Остаток упорядоченного множества 43
Отделимость выпуклых множеств в пространстве линейном 160
— — — — — нормированном 209
— сильной топологии в E^* 214
Отделимые топологические пространства 195, 196
Открытое множество в пространстве метрическом 72
— — — — топологическом 98
— — на прямой 73
— покрытие 105
Открытость множества обратимых ограниченных операторов 263
— — — элементов банаховой алгебры 595
Открытый отрезок 149
— шар 66
Относительная топология 100
Отношение бинарное 26
— эквивалентности 24
Отображение 20 (см. также Оператор, Функционал, Функция)
— билинейное 560
— «в» 21
— гомеоморфное пространств метрических 66
— — — топологических 109
— дифференцируемых 551
— замкнутое 109
— линейного топологического пространства во второе сопряженное 222
— «на» 21
— непрерывное 106—108
— ограниченное 558
— открытое 109
— регулярное 571
—, сохраняющее порядок 39
— n-линейное 563
Оценка скорости сходимости метода Ньютона 587

Первая аксиома счетности 104
— вариация отображения 553
Первообразная обобщенной функции 246
Пересечение множеств 18
— системы подпространств линейного пространства 144

Плотное подмножество в метрическом пространстве 70
Плотность распределения вероятностей 414
Поглощение 156, 196
Подмножество 17
— собственное 14
Подпокрытие 105
Подпространство нулей линейного функционала 147
— пространства гильбертова 184
— — линейного 142
— — — нормированного 164
— — —, порожденное множеством элементов 144
Подпространство пространства метрического 65
— — топологического 101
Покрытие (открытое, замкнутое, конечное, счетное) 105
Полная вариация заряда 404
— — функции 381 и далее
— мера 315
— ограниченность 124
— регулярность топологического пространства 112
— система элементов в нормированном пространстве 164
— упорядоченность 41
Полное метрическое пространство 78
Полнота пространства рефлексивного нормированного 223
— —, сопряженного к нормированному, в сильной топологии 213
— — счетно-нормированного 199
— — $C[a, b]$ 79
— — L_1 431
— — L_2 439, 440
— — l_2 79
— — m 81
— — $\mathbf{R}^n$ 78
— — $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_\infty^n$ 79
— системы функций Лагерра 495
— — — тригонометрических 447, 451, 480
— — — Уолша 465
— — — Хаара 465
— — — Эрмита 495
Полный прообраз 21
— — системы множеств 56
Полуаддитивность меры 293, 309, 321
Полукольцо 52
Полунепрерывная функция на метрическом пространстве 120
Полунепрерывность снизу (сверху) 120
— — длины кривой в метрическом пространстве 137
Пополнение пространства 84, 182
Порядковое число 42
Порядковый тип 40
— — ω 40
— — ω_1 46
Порядковых чисел произведение 43
— — сравнение 43
— — сумма 41
Порядок функционала на счетно-нормированном пространстве 212
Последовательность сходящаяся 57, 105
— — в счетно-нормированном пространстве 199
Последовательность сходящаяся обобщенных функций 239
— — слабо 224
— фундаментальная 78
«Почти всюду» 327
Почти периодические функции 516
Правило множителей Лагранжа 583
Предел последовательности в метрическом пространстве 69
— справа или слева 368
Предельная точка в метрическом пространстве 69
— — — топологическом пространстве 99
— — — T_1-пространстве 109—111
Предельный переход под знаком интеграла Лебега 346
— — — — — Стилтьеса 420
Преобразование Лапласа 512
— —, применение к решению дифференциальных уравнений 512—514
— Фурье 486
Преобразование Фурье быстроубывающих функций 495
— — в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ 503—511
— — обобщенных функций 520
— — — —, примеры 521
— —, однозначность определения функции 487
— —, основные свойства 490—494
— —, примеры 488—490
— — свертки 496, 497
— —, формула обращения 486
— — функции n переменных 499 и далее
— — функционала 522
— Фурье—Стилтьеса 515, 519
— — — свертки функций с ограниченным изменением 518
Применения принципа сжимающих отображений 88—97
— теоремы о неявной функции 568—573
Пример аддитивной, но не σ-аддитивной меры 308
— не вполне ограниченного множества 125
— неизмеримого множества 303
— несепарабельного пространства 71, 171
— не σ-конечной меры 318
— счетно-компактного, но не компактного пространства 121
— функции, дифференцируемой только слабо 556
Примеры банаховых алгебр 591, 592
— линейных операторов 252—255
— — функционалов 146
— — — на нормированных пространствах 205—207
— ортогональных базисов 169, 170
— преобразований Фурье 488—490
— — — обобщенных функций 521
— производных от обобщенных функций 240—243
— пространств векторных 140, 141
— — нормированных 162, 163
— — сопряженных 215—220
— — счетно-нормированных 199—201
— — топологических линейных 194, 195

Примеры слабо сходящихся последовательностей 226—229
— экстремальных задач 575—578
Принцип двойственности 20
— равномерной ограниченности 596
— сжимающих отображений 88
— — —, обобщение 96
— — —, применения 88—97
Проблема Н. Н. Лузина 472
Программирование линейное и выпуклое 582
Продолжение меры 284
— — по Жордану 320
— — — Лебегу 309—316
Произведение бесконечно дифференцируемой функции на обобщенную 239
— мер 358, 359
— оператора на число 258
— операторов 258
— порядковых чисел 43
— функционала на число 212
— элемента линейного пространства на число 139
— элементов алгебры 589
Производная Гато 553
— заряда по мере 405, 408
— интеграла по верхнему пределу 380, 387
— линейного отображения 552
— обобщенной функции 240
— сложной функции 552
— Фреше 552
Производные высших порядков 560
Производные числа 372, 373
Производящая функция меры Лебега—Стилтьеса 408
Прообраз 21
— топологии 108
Простая функция 335
— — суммируемая (интегрируемая) 336
Пространства гомеоморфные 66, 108
— изометричные 66, 591
— изоморфные евклидовы 180
— — линейные 141
Пространство арифметическое 59, 140
— банахово 162
— бикомпактное 123
— быстро убывающих последовательностей 201
— векторное 139
— вполне регулярное 112
— второе сопряженное 221
— гильбертово 180, 181
— дискретное 57—59, 70, 78
— евклидово 166, 191
— изолированных точек 57—59, 70, 78
— компактное 115
— линейное 139, 194
— метризуемое 115
— метрическое 57
— — сепарабельное 70, 104
— нормальное 112
— нормированное 162
— основных функций 236
— полное 78
— полурефлексивное 222
— регулярное 111
— рефлексивное 222
— с аксиомой счетности второй 103
— — — — первой 104
Пространство связное 105
— сепарабельное 70, 104
— слившихся точек 99
— со счетной базой 103
— — — — метрическое 104
— сопряженное 212
—, — к пространству быстро убывающих последовательностей 220
—, — — — гильбертову 217—219
—, — — — счетно-нормированному 210
—, — — — $C\,[a,\ b]$ 428
—, — — — c_0 216
—, — — — l_1, l_p 217
—, — — — $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ 215
— счетно-гильбертово 200
— счетно-компактное 121
— счетно-нормированное 199
— топологическое 98, 194
— функций с ограниченным изменением 382, 387
— хаусдорфово 111
— $\mathbf{C}^n$ 140, 142, 163, 192
— $C\,[a,\ b]$ 60, 71, 79, 140, 163, 191, 223, 229, 423
— $C^1\,[a,\ b]$ 428, 577
— $C^n\,[a,\ b]$ 201, 604
— $C_2\,[a,\ b]$ 61, 71, 80, 170
— — комплексное 192
— C_T 591
— $CBV\,[0,\ 1]$ 606
— c 140
— c_0 141, 223
— c_0^* 216, 223
— K 236, 521
— K^* 522
— $K\,[a,\ b]$ 195, 199, 201
— K_m 237
Пространство K^n 248
— L_1 431, 435, 444—446
— —, плотность множества функция непрерывных 434
— —, — — — простых 432
— L_2 437—440, 444—446
— — комплексное 444
— L_p 442
— l_1 216, 223
— l_2 60, 71, 79, 125, 140, 169, 227
— — комплексное 192
— l_p 64, 223
— l_p^*, l_p^* 217, 223
— m 61, 71, 141, 163, 217, 223
— $\mathbf{R}$ 59, 78, 140, 162
— $\mathbf{R}^n$ 59, 78, 124, 140, 142, 162, 205, 215, 226
— $\mathbf{R}_n$ 60, 71, 79, 163, 216
— $\mathbf{R}_p^n$ 62, 189, 215
— $\mathbf{R}_\infty^n$ 60, 71, 79, 163, 216
— $\mathbf{R}^\infty$ 141, 195
— S_∞ 200, 250, 251, 496, 520
— S_∞^* 520
— $V_0\,[a,\ b]$ 387, 427
— Z 520
Процесс ортогонализации 173
Прямая сумма 186

Прямая сумма счетного числа подпространств 187
— — σ-алгебр 318
Прямое произведение множеств 355
— — систем множеств 355
Прямоугольник 288
Пустое множество 17

Равенство множеств 18
— Парсеваля 176
— — для тригонометрической системы 448
— порядковых чисел 43
Равновесие нагруженной струны 524
Равномерная непрерывность отображения метрического пространства 132
— ограниченность семейства функций 129
Равностепенная непрерывность семейства функций 129
Радикал банаховой алгебры 602
Разбиение множества на классы 23
Разделение выпуклых подмножеств с помощью линейных функционалов 161, 209
Разложение Жордана 404
— меры Лебега—Стилтьеса в сумму абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной 410
— функции в ряд Фурье (см. ряд Фурье)
— — монотонной на непрерывную и функцию скачков 372
— — по многочленам Лежандра 455
— — с ограниченным изменением в разность монотонных 385
— — — — — на абсолютно непрерывную, сингулярную и функцию скачков 398
— Хана 403
Размерность линейного пространства 142
Разность множеств 19
Расстояние в метрическом пространстве 57
— между двумя множествами 77
— — кривыми 137
— от точки до множества 77
Регулярная банахова алгебра 602
— точка оператора 270
— — элемента алгебры 593
Регулярное отображение 571
— топологическое пространство 111
Регулярность отделимых линейных топологических пространств 196
Резольвента оператора 270
— элемента алгебры 594
Резольвентное ядро 550
Рефлексивное линейное топологическое пространство 222
Рефлексивность 24, 38
Решетка 48
Ряд Фурье 173, 177, 193, 467
— — в комплексной форме 452, 487
— — по ортогональной системе функций 447
— — — ортонормальной системе 173
— — — тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$ 448
— — — — — произвольном отрезке 449
Ряд Фурье расходящийся 472
— —, суммирование по Фейеру 476 и далее
— —, сходимость в точке 469
— —, — глобальная 471
— —, — равномерная 474, 475
— — функции двух переменных 457

Самосопряженный оператор 268, 283—287
Сведение дифференциального уравнения второго порядка к интегральному уравнению 527, 528
Свертка 497
— в l_1 592
— функций с ограниченным изменением 518
Свойства абсолютно непрерывных функций 394
— измеримых множеств 296 и далее, 312 и далее
— — функций 323 и далее
— интеграла абстрактной функции 558
— — Лебега 338 и далее
— — Римана—Стилтьеса 416 и далее
— полной вариации 381—385
— преобразования Фурье 490—494
— производной Фреше 552, 553
— спектра и резольвенты элемента алгебры 594—596
— счетных множеств 28, 30
— функций с интегрируемым квадратом 437
Свойство параллелограмма 188
Связное двоеточие 99, 110
Связность открытого множества в $\mathbf{R}^n$ 77
— топологического пространства 105
Связь между гладкостью функции и убыванием ее преобразования Фурье на бесконечности 493
Сдвиг открытого множества 194
Сепарабельное пространство метрическое 70
— — топологическое 104
Сепарабельность подмножеств сепарабельного метрического пространства 184
— пространств $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}_1^n$, $\mathbf{R}_\infty^n$, l_2, $C[a, b]$, $C_2[a, b]$ 71
— пространства L_1 427
— — L_2 443
Сжатие (сжимающее отображение) метрического пространства 87
Сильная производная отображения 552
— сходимость в линейном нормированном пространстве 224
— топология в пространстве, сопряженном к линейному топологическому 98
— — — —, — — нормированному 213
Сильно положительный квадратичный функционал 580
Сильный дифференциал 552
Симметрическая разность 19
Симметричная банахова алгебра 602
Симметричное множество в линейном пространстве 198

Симплекс 152
Сингулярная функция 398
Сингулярный заряд 404
Система множеств 49
— окрестностей нуля 194
— ортогональных векторов 168
— — функций Радемахера 465
— — — Уолша 465
— — — Хаара 463, 465
Скалярное произведение 166, 192
— в комплексном пространстве 192
— — — L_2 438
Скачок функции в точке разрыва 369
Слабая производная отображения 553
— сходимость в пространстве линейном топологическом 224
— — — — нормированном 225
— — — — функционалов 230
— — — — $C[a, b]$ 229
— — — — l_2 227
— топология в пространстве линейном топологическом 224
— — — — сопряженном 229, 231
— — — —, — к банахову 230 и далее
Слабо ограниченное подмножество в нормированном пространстве 225, 226
Слабый дифференциал 553
След системы множеств 101
Случайная величина 413
— — дискретная и непрерывная 414
Собственное значение 269
— подмножество 17
— подпространство 142
Совершенно упорядоченное множество 40
Согласованные нормы 198
Соответствие взаимно однозначное 21
Сопряженное пространство 212
— ядро 531
Сопряженно-линейный изоморфизм 218
— функционал 145
Сопряженно-однородный функционал 145
Сопряженный оператор 266
— — в евклидовом пространстве 268
— —, свойства 266—269
Спектр оператора (точечный и непрерывный) 270
— — в гильбертовом пространстве, компактного 545
— элемента алгебры 593
Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов 606
Спектральный радиус 271, 596
— — элемента алгебры 594
Сравнение порядковых чисел 43
— топологий 99, 101
Сравнимые нормы 199
Среднее квадратичное уклонение 439
Степень меры 359
— множества 355
— системы множеств 357
Строение класса множеств, измеримых по Лебегу 312 и далее
Структура 48
Струна 524—527
Сумма множеств 17
— — упорядоченная 41
— операторов 257
— порядковых чисел 42
— функционалов 212
— элементов векторного пространства 128
Суммируемая функция 336, 337, 351
Суммы Дарбу 352
— Фейера 476
Сходимость в пространстве K 230
— — — L_1 431, 443—446
— — — L_2 439, 443—446
— — — S_∞ 250
— — — Z 521, 522
— — среднем 431
— — — квадратичном 439
— по мере 330, 445
— последовательности в пространстве метрическом 69
— — — — топологическом 105
— — функций, сравнение разных видов 444—446
— почти всюду 328, 445
Счетная аддитивность меры 293, 307, 313
— — — Лебега 299
— база 103
— — у вполне ограниченных метрических пространств 124
— компактность 121
Счетно-гильбертово пространство 200
Счетное множество 27, 31
Счетно-компактное топологическое пространство 121
Счетно-нормированное пространство 199
Счетно-предкомпактное множество 123
Счетность множества рациональных чисел 28
— ортогональной системы в сепарабельном евклидовом пространстве 160
Счетный базис меры 435
Сюръекция 21

Теорема Арцела 128—130
— — обобщенная 133
— Банаха о замкнутом графике 263
— — об обратном операторе 259
— Банаха—Штейнгауза 596
— Бэра 82
— Вейерштрасса 164, 170, 447, 453, 468
— Винера 603
— Гельфанда—Наймарка 607
— Гильберта—Шмидта 283, 284
— Егорова 329
— Кантора—Бернштейна 34
— Карлесона 472
— Лебега о восстановлении абсолютно непрерывной функции по ее производной 396
— — — дифференцируемости монотонной функции 372
— — — предельном переходе 346
— Леви 347
— Лузина 334
— Люстерника о касательном многообразии 571

Теорема Люстерника о касательном многообразии в разложимом случае 572
— о банаховой алгебре, изоморфной полю C 596
— — вложенных шарах 81
— — выборе счетного подпокрытия в пространствах со счетной базой 105
— — выделении подпоследовательности, сходящейся почти всюду, из последовательности, сходящейся по мере 331
— — гомеоморфности непрерывной биекции компакта в хаусдорфово пространство 118
— — гомоморфизме банаховой алгебры в алгебру непрерывных функций 601, 602
— — дифференцировании интеграла по верхнему пределу 380, 387
— — дифференцируемости функций с ограниченным изменением 385
— — достижении нижней грани полунепрерывной функции 121
— — зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных 569
— — замкнутости компакта в объемлющем хаусдорфовом пространстве 117
— — — множества компактных операторов 277
— — компактности замкнутого шара в пространстве, сопряженном сепарабельному нормированному в смысле $*$-слабой топологии 234
— — — оператора Гильберта—Шмидта 529
— — — —, сопряженного компактному 279
— — — произведения операторов, один из которых компактен 279
— — — спектра элемента алгебры 594
— — композиции измеримых функций 323, 325
— — метризуемости единичного шара в пространстве, сопряженном сепарабельному нормированному 232
— — множителях Лагранжа 582
— — мощности множества всех подмножеств 35
— — наличии счетной базы у сепарабельных метрических пространств 104
— — неподвижной точке 88
— — непрерывном образе компактного пространства 117
— — непрерывности композиции непрерывных отображений 109
— — непустоте спектра 271, 594
— — неявной функции, дифференцируемость 567
— — — —, существование 565
— — нормальности компакта 117
— — пересечении выпуклых множеств 150
— — — колец 51
— — — топологий 101
— — полной и замкнутой ортогональных системах 176, 179
Теорема о полной ограниченности счетно-компактного метрического пространства 125
— — полноте произведения полных ортогональных систем 455
— — — пространства L_1 431
— — — — L_2 439, 440
— — — —, сопряженного к нормируемому 213
— — полуаддитивности меры, заданной на кольце 306
— — пополнении метрического пространства 84
— — почленном дифференцировании ряда из монотонных функций 378
— — предкомпактности ограниченных множеств в E^* в смысле слабой топологии 234
— — продолжении меры с полукольца на порожденное им кольцо 304, 308
— — прообразе пересечения множеств 22
— — — суммы множеств 22
— — пространстве, сопряженном к гильбертову 217, 218
— — —, — — счетно-нормированному 220
— — прямом произведении полуколец 357
— — равенстве норм оператора и его сопряженного 266
— — равномерной непрерывности непрерывного отображения метрического компакта 132
— — разделении выпуклых множеств 209
— — разложении абсолютно непрерывной функции в разность монотонных абсолютно непрерывных функций 394
— — — гильбертова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения 185
— — — заряда 401
— — — монотонной функции на функцию скачков и непрерывную 372
— — — отображения по формуле Тейлора 564
— — — функции с ограниченным изменением в разность монотонных 385
— — связи выпуклых функционалов и выпуклых множеств 154
— — сепарабельности пространства L_1 435
— — слабой сходимости последовательности элементов нормированного пространства 226
— — — — функционалов на банаховом пространстве 230
— — собственных векторах и собственных числах компактного оператора 281, 283
— — совпадении компактности и счетной компактности для пространств со счетной базой 122
— — спектральном радиусе 271, 596
— — спектре ограниченного оператора 270, 271, 596
— — сравнении интеграла Римана с интегралом Лебега 352

Теорема о сравнении интеграла Римана—Стилтьеса с интегралом Лебега—Стилтьеса 412
— — сравнимости порядковых чисел 43
— — среднем 416
— — строении минимального кольца над полукольцом 54
— — суммируемости производной монотонной функции 390
— — существовании базиса подпространства гильбертова пространства 185
— — — кривой наименьшей длины между двумя точками метрического компакта 126
— — — минимального кольца 51
— — — минимальной σ-алгебры 55
— — — предельной точки у бесконечного подмножества компактного пространства 116
— — — сильной производной 556
— — сходимости метода Ньютона 585
— — — по мере последовательности, сходящейся почти всюду 330
— — — ряда Фурье в точке 469
— — — — — равномерной 474, 475
— — счетности множества точек разрыва монотонной функции 369
— — фактор-алгебре 597
— — σ-аддитивности прямого произведения мер 359
— об абсолютной непрерывности неопределенного интеграла Лебега 395
— — аналитичности резольвенты элемента алгебры 594
— — измеримости предела последовательности функций 326
— — изоморфизме банаховой алгебры с алгеброй C_M 602
— — — пространств сепарабельных гильбертовых 181, 193
— — — — $C[a, b]^*$ и $V^0[a, b]$ 428
— об обращении оператора, близкого к единичному 265
— — — преобразования Фурье 484
— — — — — функции n переменных 502
— — общем виде линейного функционала на пространстве гильбертовом 217, 218, 443
— — — — — — — — $C^1[a, b]$ 428
— — ограниченности непрерывной функции на компактном пространстве 118
— — — снизу функции, полунепрерывной снизу на компактном T_1-пространстве 121
— — — спектра линейного оператора 270
— — отделении непересекающихся выпуклых подмножеств в вещественном линейном пространстве 161
— — открытом отображении 261
— — открытости множества обратимых операторов 265
— — ортогонализации 171, 172
— — условиях счетной компактности 121
— — условном экстремуме 582
— отделимости (первая и вторая) 209
Теорема Пеано 130
— Планшереля 501, 505
— Радона—Никодима 405
— Рисса об общем виде линейного функционала на $C[a, b]$ 423, 427
— Рисса—Фишера 178
— Стоуна—Вейерштрасса 603
— Стоуна—Чеха 606
— Тихонова 606
— Урысона о метризуемости 115
— — — продолжении 113
— Фату 350
— Фейера 457, 476
— — для пространства L_1 481
— Фубини 364
— — «малая» 378
— Хана—Банаха 156
— — — в пространстве комплексном 159
— — — — — нормированном 196
— Хаусдорфа 48
— Хелли вторая 422
— — первая 420
— Цермело 47
Теоремы Фредгольма для уравнений в пространстве банаховом 542
— — — — — непрерывных функций 543
— — — — с ядром вырожденным 534—536
— — — — — — произвольным 537—540
— — — — — симметрическим 534
Теория множеств 17, 47
— обобщенных функций 235 и далее
Тождество Гильберта 595
Топологическое пространство 98
— — линейное 194
— — со счетной базой 103
Топология 98
— в множестве максимальных идеалов 601
— — счетно-нормированном пространстве 199
— дискретная 99
—, порожденная системой множеств 101
—, способы задания 113
— тривиальная 99
— ядерно-выпуклая 198
Тотальная система векторов 180
Точечный спектр 270
Точка внутренняя 72
— изолированная 69
— неподвижная 88
— предельная в пространстве метрическом 69
— — — — топологическом 99
Точка прикосновения в пространстве метрическом 68
— — — — топологическом 99
Точки невидимые слева 374
— — справа 373, 378
— общего положения в линейном пространстве 152
— разрыва монотонной функции 369
— — первого рода 369
Точная верхняя или нижняя грань 48
Транзитивность 38
Трансфинит 42
— ω 40
— ω_1 46
Трансфинитная индукция 48

Трансфинитное порядковое число 42
Трансцендентное число 33
Тривиальный идеал алгебры 592
Тригонометрическая система на отрезке $[-\pi, \pi]$ 447
— — — — $[0, \pi]$ 451
— — — плоскости 457
Тригонометрический ряд Фурье 448
— — — в комплексной форме 452
— — — для функций n переменных 457

Угол между векторами 168
Умножение в алгебре 589
Упорядоченная сумма 41
Упорядоченное множество 40
— произведение 42
Уравнение Абеля 523
— Вольтерра 96
— — второго рода 524, 542
— — первого рода 524
— колебаний струны 527
— равновесия нагруженной струны 526
— теплопроводности 498, 503
— Фредгольма второго рода 95, 524
— — — — с симметрическим ядром 531, 532
— — первого рода 524
— — — — абстрактное 543
Условие Дини 469, 475
— Липшица 77
Условия сжимаемости 89—91
Условный экстремум 583

Фактор-алгебра 597
Фактор-пространство пространства банахова 165
— — линейного 144
— — нормированного 164
Формула для спектрального радиуса элемента алгебры 596
— конечных приращений для отображения 553—555
— Ньютона—Лейбница 389
— — — обобщенная 559
— обращения для преобразования Фурье 486, 501
— Родрига 455
— Тейлора для отображений 564
— Фурье 484
— — комплексная 486
Фундаментальная последовательность точек в метрическом пространстве 78
Функции Лагерра 461
— —, полнота 495
— Эрмита 460
— — как собственные функции преобразования Фурье 507—511
— —, полнота 495
Функционал 120, 145
— аддитивный 145
— выпуклый 152
— дифференцируемый 557
— линейный 145
— —, геометрический смысл 147 и далее
— — в не непрерывный 203
— — непрерывный 202
— — — на пространстве гильбертом 217
Функционал линейный непрерывный на пространстве нормированном 205
— — — — — счетно-нормированном 210
— — — — — $C[a, b]$ 423
— — — — — $C[a, b]$ 428
— — — — — c_0 216
— — — — — l_1, l_p 217
— — — — — $\mathbf{R}^n$ 215
— — —, примеры 205—207
— — ограниченный 203—205
— —, примеры 146, 147
— Минковского 154
— мультипликативный 598
— непрерывный 202
— однородно-выпуклый 153
— — на комплексном пространстве 159
— однородный 145
— положительно-однородный 152
—, разделяющий множества 160, 209
— сопряженно-линейный 145
— сопряженно-однородный 145
Функция 20
— абсолютно непрерывная 392
— абстрактная 557
— весовая 458
— Дирихле 328, 353
— измеримая 323
—, — по Борелю 323
— монотонно неубывающая (невозрастающая) 368
— непрерывная в пространстве метрическом 65
— — — — топологическом 106
— обобщенная 237
— основная 236
— простая 335
— распределения 413
— с интегрируемым квадратом 437
— — — — комплексная 444
— ограниченным изменением 381
— сингулярная 398
— суммируемая 337, 338, 351
— финитная 235
— Хевисайда 242
— B-измеримая 323
— μ-измеримая 323
— $(\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y)$-измеримая 323

Характеристическое свойство евклидовых пространств 188
Хаусдорфова аксиома отделимости 111
Хаусдорфовы пространства 111

Центрированная система множеств 116
Цепь в частично упорядоченном множестве 47

Частичная упорядоченность 38
— — топологий 101
Число алгебраическое 30
— производное (верхнее, нижнее, левое, правое) 372, 373
— трансфинитное 42
— трансцендентное 33

Шар замкнутый 68
— открытый 67
Шара центр и радиус 68

Эквивалентность множеств 31
— норм 166, 199
Эквивалентные функции 327, 405
Экстремальные задачи 573 и далее
— — с ограничениями 582
Экстремум функционала 575
— —, необходимые условия 575, 582
Элементарное множество на плоскости 289
Эрмитово-сопряженный оператор 268

Ядерно-выпуклая топология 198, 203
Ядро Гильберта—Шмидта 528, 534
— Дирихле 468
— интегрального уравнения Фредгольма 95, 528
— итерированное 548
— линейного оператора 251
— — функционала 147
— множества в пространстве линейном 149
— — — — нормированном 209
— произведения двух интегральных операторов 546—550
— Фейера 478

B^*-алгебра 606
B-измеримая функция 323
B-множества 55

B-пространство 162
C-свойство 334
k-мерная грань симплекса 152
n-линейное отображение 563
n-мерное пространство арифметическое 140
— — евклидово 59
n-мерный симплекс 152
n-я производная отображения 560
— степень меры 359
— — множества 355
— — системы множеств 357
T_1-пространство 109, 195
T_2-пространство 111
δ-алгебра 54
δ-кольцо 54
— измеримых множеств 315
δ-функция 146, 207, 229, 230, 237, 472
—, производная 238
— смещенная 238
ε-окрестность 68
ε-сеть 124
μ-измеримая функция 323
μ-эквивалентные функции 405
σ-аддитивность интеграла Лебега 342, 346
— меры 293, 295, 299, 307, 313
— — Лебега 343, 346
σ-алгебра 54
— измеримых множеств 295—297, 313, 315
— неприводимая 55
σ-кольцо 54
σ-конечная мера 316
$*$-слабая топология 231

Учебное издание

КОЛМОГОРОВ Андрей Николаевич
ФОМИН Сергей Васильевич

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*
Редактор *С. А. Смагин*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *И. Я. Криштал*

ИБ № 32770

Сдано в набор 24.10.88. Подписано к печати 20.04.89.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 32,76. Усл. кр.-отт. 32,76.
Уч.-изд. л. 33,17. Тираж 35000 экз. Заказ № 596. Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 193144 г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

Учебное издание

КОЛМОГОРОВ Андрей Николаевич
ФОМИН Сергей Васильевич

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*
Редактор *С. А. Смагин*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Л. В. Лихачева*
Корректор *И. Я. Криштал*

ИБ № 32770

Сдано в набор 24.10.88. Подписано к печати 20.04.89.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная.
Печать высокая. Усл. печ. л. 32,76. Усл. кр.-отт. 32,76.
Уч.-изд. л. 33,17. Тираж 35000 экз. Заказ № 596. Цена 1 р. 50 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 193144 г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.