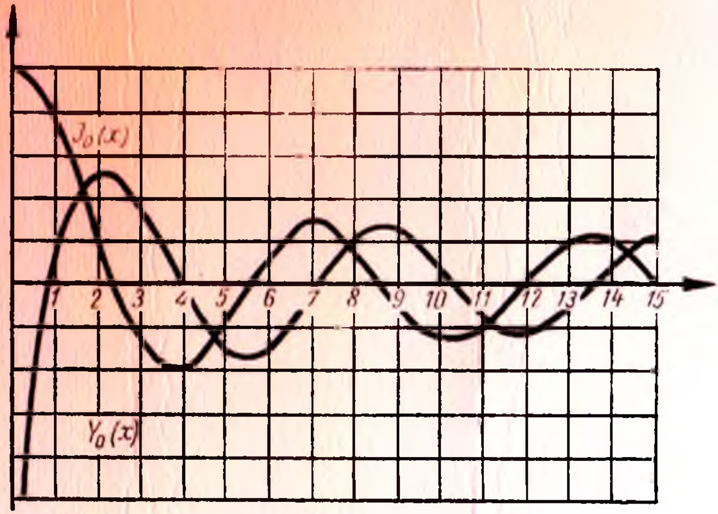
А. Қ. ЎРИНОВ

# МАХСУС ФУНКЦИЯЛАР ВА МАХСУС ОПЕРАТОРЛАР



ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

**А.Қ. ЎРИНОВ**

# МАХСУС ФУНКЦИЯЛАР ВА МАХСУС ОПЕРАТОРЛАР

ФАРҒОНА - 2012

УДК: 517.9.(075)
КБК: 22.16
Ў81

**Ўринов А.Қ.**
Махсус функциялар ва махсус операторлар: ўкув услубий қўлланма/ А.Қ.Ўринов. – Фарғона: "Фарғона"нашриёти, 2012. - 112 бет.

*Мазкур ўкув услубий қўлланма магистратуранинг "Математика" мутахассислиги ва бакалавриатнинг "Математика" ҳамда "Амалий математика ва информатика" йўналишлари бўйича таҳсил олаётган талабалар учун махсус курслар ташкил қилишга мўлжалланган. Унда Эйлернинг бета ва гамма функциялари, Бессел функцияси, бир ва икки аргументли гипергеометрик функциялар, каср тартибли интегро - дифференциал операторлар ҳамда уларнинг Бессел ва Гаусс функциялари ёрдамидаги умумлашмаларининг таърифлари келтирилган ва хоссалари ўрганилган. Бу ўкув услубий қўлланмадан бузиладиган ва аралаш типдаги дифференциал тенгламалар билан шуғулланувчи илмий тадқиқотчилар ҳам фойдаланиши мумкин.*

**Масъул муҳаррир:**
**Зикиров О.С.** – *физика - математика фанлари доктори.*

Фарғона давлат университети Илмий Кенгаши томонидан нашрга тавсия қилинган (2012 йил, 29 июнь, №10 баённома).

**Тақризчилар:**
**Эргашев Т.Г.** – *физика - математика фанлари номзоди, доцент;*
**Каримов Ш.Т.** – *физика - математика фанлари номзоди, доцент.*

Фундаментал тадқиқотлар давлат илмий-техника дастурларининг Ф-4-59 лойихаси маблағи ҳисобига чоп этилди.

**ISBN 978-9943-349-55-1**

## Сўз боши

Мамлакатимиз мустакилликка эришганидан сўнг ўтган давр давомида ватанимизда маънавий-маърифий, иктисодий ва сиёсий соҳалар бўйича улкан ислоҳотлар амалга оширилди ва натижада Ўзбекистон Республикаси жаҳон ҳамжамиятида мустаҳкам ўринга эга бўлди. Ўтказилган ислоҳотлар ичида, айниқса, маънавий-маърифий соҳада, жумладан, таълим соҳасида бажарилган ишлар муҳим аҳамият касб этади. Чунки, бунда асосий эътибор, келажакда мамлакатимиз мустақиллигини таъминлаш ва уни буюк давлатга айлантиришдек улкан вазифаларни бажариши зарур бўлган баркамол авлод тарбияси ва таълимига қаратилган. Шу нуқтаи назардан келиб чиқиб, ўтган давр мобайнида таълим соҳаси жаҳон андозаларига мос ҳолда тубдан ислоҳ қилинди. Таълимнинг батамом янги касб-ҳунар коллежи ва академик лицей, бакалавриат ва магистратура каби янги басқичлари жорий қилинди. Уларга мос таълим стандартлари ва таълим дастурлари ишлаб чиқилди. Янги талаблар асосида дарсликлар, ўқув қўлланмалар, масалалар тўпламлари, электрон дарсликлар ва бошқа таълимий ишланмалар яратиш йўлга қўйилди ва яратилди.

Мазкур ўқув услубий қўлланма магистратуранинг "Математика" мутахассислиги ва бакалавриатнинг "Математика" ҳамда "Амалий математика ва информатика" йўналишлари бўйича тахсил олаётган талабалар учун махсус курслар ташкил қилишга мўлжалланган бўлиб, муаллифнинг Фарғона давлат университетида 2000 йилдан бошлаб ҳозиргача ўқилган маърузалари асосида ёзилган. У икки бўлимдан иборат бўлиб, биринчи бўлимда махсус функциялар ва уларнинг хоссалари баён қилинган. Иккинчи бўлим эса махсус операторлар киритиш ва ўрганишга бағишланган.

Биринчи бўлим беш параграфдан иборат бўлиб, унда Эйлернинг гамма- ва бета-функциялари, Бессел функциялари ва Гауссининг гипергеометрик функциялари каби классик махсус функциялар билан бир қаторда, ҳозирги замон илмий тадкиқот ишларида кенг ишлатилаётган $F_1$, $F_2$, $F_3$, $H_2$ каби Горн функциялари ва $\mathrm{H}_3$, $\Sigma_2$ бузилган гипергеометрик функциялар ҳам баён қилинган. Бунда баъзи зарурий формулалар исботсиз келтирилган.

Иккинчи бўлим ҳам беш параграфдан иборат бўлиб, унда дастлаб Гельдер шарти, Абел интеграл тенгламалари каби ёрдамчи маълумотлар келтирилиб, улар ёрдамида функциянинг Риман-Лиувилл маъносидаги каср тартибли интеграли ва каср тартибли ҳосиласи тушунчалари киритилган. Сўнгра замонавий математик тадқиқотларда муҳим роль ўйнаётган Риман-Лиувилл интегро-дифференциал операторлари киритилган ва ўрганилган.

Гиперболик типдаги спектрал параметрли тенгламаларни ўрганишда муҳим роль ўйнайдиган (ядросида Бессел функцияси иштирок этувчи) $A^{s,\lambda}_{ax}$, $B^{s,\lambda}_{ax}$ $\left(s=\overline{0,1}\right)$ операторлар ва Риман-Лиувилл дифференциал операторларини Бессел функцияси ёрдамида умумлаштирувчи $C^{s,\lambda}_{ax}$ $\left(s=\overline{0,1}\right)$ операторлар иккинчи бўлимнинг тўртинчи параграфидан жой олган. Бўлимнинг охирги параграфида эса Риман-Лиувилл операторларини Гausснинг гипергеометрик функцияси ёрдамида умумлаштирувчи $\mathbb{F}_{ax}$ - умумлашган каср тартибли интегро-дифференциал операторлар киритилган.

Шуни таъкидлаб ўтиш зарурки, махсус функциялар ва операторлар назарияси жуда кенг ва чуқур ўрганилган бўлиб, бу қўлланмада Фарғона дифференциал тенгламалар мактабида ўтказилаётган илмий тадқиқотларда фойдаланиб келинаётган махсус функциялар ва махсус операторлар келтирилган.

Мазкур ўқув услубий қўлланма магистрантлар ва бакалавриатнинг юқори курс талабаларига мўлжалланган бўлсада, ундан бузиладиган ва аралаш типдаги дифференциал тенгламалар билан шуғулланувчи илмий тадқиқотчилар ҳам фойдаланиши мумкин. У мустақил Ватанимиз илм-фанини ривожлантиришга муносиб ҳисса қўшади деган умиддаман.

*Муаллиф*

# БИРИНЧИ БЎЛИМ

# МАХСУС ФУНКЦИЯЛАР

## 1-§. Хосмас интеграллар

### 1. Чегараланмаган функциянинг интеграли.

Чекли $[a,b]$ оралиқда берилган ва бу оралиқда интегралланмайдиган $f(x)$ функцияни қарайлик. Аниқроқ айтганда, бу функция исталган $[a,b-\varepsilon]$ оралиқда (бу ерда $0<\varepsilon<b-a$) интегралланувчи бўлиб, $[b-\varepsilon,b]$ оралиқда интегралланмайдиган бўлсин. У ҳолда $b$ нуқтанинг яқинида $f(x)$ функция чегараланмаган бўлади, яъни $x\to b$ да $f(x)$ функция чексизликка интилади. *Бундай ҳолда, $b$ нуқта махсус нуқта деб аталади.*

*Агар $\varepsilon\to 0$ да $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ интеграл учун аниқ чекли ёки чексиз лимит мавжуд бўлса, бу лимитни $f(x)$ функциядан $a$ дан $b$ гача олинган (хосмас) интеграл дейилади ва*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{1}$$

*билан белгиланади.*

*Бундай чекли лиит мавжуд бўлганда (1) интеграл яқинлашувчи дейилиб, $f(x)$ функция $[a,b]$ оралиқда интегралланувчи дейилади. Агар (1) лимит чексизга тенг ёки мавжуд бўлмаса, интеграл тўғрисида, у узоқлашувчи дейилади.*

Энди $f(x)$ функция исталган $[a+\varepsilon,b]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ оралиқда чегараланган ва интегралланувчи бўлиб, $a$ (махсус) нуқтадан ўнгдаги ҳар бир $[a,a+\varepsilon]$ оралиқда интегралланмайдиган бўлсин.

У ҳолда $f(x)$ функциянинг $a$ дан $b$ гача олинган (хосмас) интеграли ушбу

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \tag{2}$$

тенглик билан аниқланади.

Агар $a$ ва $b$ нуқталарнинг иккаласи ҳам $f(x)$ функция учун махсус нуқта бўлса, у ҳолда $a$ дан $b$ гача бўлган интегралнинг таърифи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{a+\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)\,dx \tag{3}$$

тенглик орқали берилади. (3) таърифни

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

тенглик билан алмаштириш мумкин, бу ерда $a < c < b$ ва ўнгдаги иккала хосмас интеграл мавжуд деб фараз қилинади (шу билан бирга бунда $c$ нуқтанинг қандай танланиши аҳамиятга эга эмас).

Агар $c \in [a, b]$ бўлиб, $c$ нуқта атрофида $f(x)$ функция чегараланмаган бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича интеграли $[a, b]$ ни $[a, c]$ ва $[c, b]$ оралиқларга ажратиб, сўнгра бу оралиқлар учун (1) ва (2) таърифларни қўллаш билан аниқланади, яъни

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx.$$

Махсус нуқталар бир қанча (чекли) бўлганда, хосмас интеграл қандай таърифланишини тушуниш қийин эмас.

**2. Чегаралари чексиз бўлган хосмас интеграл.**

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a, +\infty)$ оралиқда, яъни $x \geq a$ лар учун аниқланган бўлиб, оралиқнинг исталган чекли $[a, A]$ қисмида интегралланувчи бўлсин. Демак, $\int_a^A f(x)\,dx$ интеграл исталган $(A > a)$ да маънога эга.

*Агар $A \to +\infty$ да бу интеграл учун аниқ чекли ёки чексиз лимит мавжуд бўлса, уни $f(x)$ функциянинг $a$ дан $+\infty$ гача бўлган оралиқдаги (хосмас) интеграли деб аталади ва қуйидагича белгиланади:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx. \tag{4}$$

*Чекли лимит мавжуд бўлган ҳолда (4) интегрални мавжуд ёки яқинлашувчи, $f(x)$ функцияни эса чексиз $[a, +\infty)$ оралиқда интегралланувчи дейилади. Агар (4) лимит чексиз ёки мутлоқо мавжуд бўлмаса, интеграл тўғрисида, у узоқлашувчи дейилади.*

$f(x)$ функциянинг $-\infty$ дан $a$ гача бўлган оралиқдаги интеграли ҳам (4) га ўхшаш таърифланади:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A' \to -\infty} \int_{A'}^{a} f(x)\,dx \qquad (A' < a). \tag{5}$$

$f(x)$ функциянинг $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлган оралиқдаги интеграли ҳам худди шу сингари таърифланади:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A' \to -\infty \\ A \to +\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)\,dx. \tag{6}$$

(4) интеграл каби *(5) ва (6) лар ҳам хосмас интеграл дейилади.* (6) нинг ўнг томонидаги интегрални исталган $a$ олиб қуйидагича ёза оламиз:

$$\int_{A'}^{A} f(x)\,dx = \int_{A'}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{A} f(x)\,dx.$$

Бу ерда $A' \to -\infty$, $A \to +\infty$ да чапдаги интеграл учун лимитнинг мавжудлиги, равшанки, ўнгдаги интеграллар учун (4) ва (5) лимитларнинг айрим-айрим мавжудлигига тенг кучлидир. Шундай қилиб, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ва $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ интеграллар айрим-айрим мавжуд бўлганда $-\infty$ дан $+\infty$ гача бўлган интегрални ушбу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

тенглик билан таърифлаш мумкин. Бу таъриф аслида $a$ нуқтанинг танланишига боғлиқ эмас.

## 2-§ Эйлер интеграллари

**1. Биринчи тур Эйлер интеграли (бета-функция).** *Бета - функция* ушбу

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \tag{7}$$

тенглик билан аниқланади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл *Эйлернинг биринчи тур интеграли* дейилади.

Кўрсатиш қийин эмаски, $a > 0$ ва $b > 0$ бўлганда (7) интеграл яқинлашувчи, агар $a$ ва $b$ параметрларнинг бирортаси нолга тенг ёки нолдан кичик бўлса, узоқлашувчи бўлади.

(7) интегралда $x = 1 - t$ алмаштириш бажариб,

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}\,dt = B(b,a)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, бета-функция ўзининг $a$ ва $b$ аргументларига нисбатан симметрик функция экан.

Энди (7) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз. Бўлаклаб интеграллаш амалларини

$$u = (1-x)^{b-1}, \quad du = -(b-1)(1-x)^{b-2}\,dx,$$

$$dv = x^{a-1}\,dx, \quad v = \frac{1}{a}x^a$$

каби бажариб ва ушбу

$$x^a = x^{a-1} - x^{a-1}(1-x)$$

айниятни эътиборга олсак, b > 1 да қуйидагига эга бўламиз:

$$B(a,b) = \left[\frac{(1-x)^{b-1}x^a}{a}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^a}{a}(b-1)(1-x)^{b-2}\,dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\,dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx =$$

$$= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b).$$

Бундан ушбу рекуррент формула келиб чиқади:

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a. b-1). \tag{8}$$

Бета-функция $a$ ва $b$ га нисбатан симметрик бўлгани учун

$$B(a, b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b). \tag{9}$$

(8) ва (9) формулаларга асосан

$$(a-1) B(a-1, b) = (b-1) B(a, b-1).$$

Агар $a-1 = p, b-1 = q$ десак, у ҳолда

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p} B(p+1, q).$$

Агар $b$ параметр бутун сонга тенг бўлса, яъни $b = n$ бўлса, $B(a, n)$ функцияга (8) формулани кетма-кет қўллаш натижасида

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \frac{n-2}{a+n-2} \frac{n-3}{a+n-3} \cdots \frac{1}{a+1} B(a, 1)$$

тенгликка эга бўламиз. Аммо

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$$

бўлгани учун

$$B(a, n) = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)}.$$

Агарда $a$ параметр ҳам бутун сонга тенг бўлса, яъни $a = m \in N$ бўлса, (9) формулани кетма-кет қўллаш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$B(m, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{(m+1)(m+2) \ldots (m+n-1)} \cdot B(m, 1) =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-1)}{(m+1)\,(m+2)\dots(m+n-1)}\cdot\frac{m-1}{m}\,\frac{m-2}{m-1}\dots\frac{1}{2}B\,(1,1)\,,$$

бундан, $B\,(1,1)=1$ бўлгани учун

$$B\,(m,n)=B\,(n,m)=\frac{(n-1)\,!\;(m-1)\,!}{(m+n-1)\,!}\;.$$

Энди (7) формулада $a=b$ десак,

$$B\,(a,a)=\int\limits_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{a-1}\,dx=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

ёки

$$B\,(a,a)=2\int\limits_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx.$$

Охирги интегралда $1-2x=\sqrt{t}$ алмаштириш бажарамиз. У ҳолда

$$B\,(a,a)=2^{1-2a}\int\limits_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{a-1}\,dt$$

ёки

$$B\,(a,a)=2^{1-2a}B\left(\frac{1}{2},a\right). \tag{10}$$

(7) интегралда

$$x=\frac{y}{1+y}\quad \text{ёки}\quad y=\frac{x}{1-x}$$

алмаштиришни бажарсак, бета-функция қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$B\,(a,b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy. \tag{11}$$

Бу формулада $0<a<1$ ҳисоблаб, $b=1-a$ десак,

$$B\,(a.\,1,-a)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{1+y}dy.$$

Ҳосил қилинган интеграл математик анализда Эйлер исми билан боғланган интеграл бўлиб, унинг қиймати $\pi/\sin(\pi a)$ га тенгдир. Шундай қилиб, $0 < a < 1$ да

$$B\left(a, 1-a\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}. \tag{12}$$

Агар хусусий ҳолда, $a = 1 - a = 1/2$ десак,

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \tag{13}$$

ҳосил бўлади.

**2. Иккинчи тур Эйлер интеграли (гамма-функция).**

*Гамма- функция* ушбу

$$\Gamma\left(a\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \tag{14}$$

интеграл билан аниқланади ва бу интеграл *иккинчи тур Эйлер интеграли* деб аталади.

Бу интеграл $a > 0$ да яқинлашувчи,$a \leq 0$ да эса узоқлашувчидир.

Бўлаклаб интеграллаш натижасида ушбуни

$$a\int\limits_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \lim_{A\to+\infty} A^a e^{-A} + \int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = \int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx.$$

яъни

$$\Gamma\left(a+1\right) = a\Gamma\left(a\right) \tag{15}$$

рекуррент формулани ҳосил қиламиз.

Бу формулани кетма-кет қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma\left(a+n\right) = \left(a+n-1\right)\left(a+n-2\right)\ldots\left(a+1\right)a\Gamma\left(a\right)$$

Агар бунда $a = 1$ десак ва

$$\Gamma\left(1\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \tag{16}$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\Gamma\left(n+1\right) = n! \tag{17}$$

келиб чиқади. $n = 0$ бўлганда (17) формула $0! = \Gamma(1) = 1$ кўринишга эга бўлади.

Шу пайтгача гамма - функцияда $a > 0$ деб ҳисобладик ва унинг қиймати сифатида (14) интегралнинг қийматини олдик. Гамма - функциянинг (15) хоссаси уни $a$ нинг манфий қийматларида ҳам аниқлашга ёрдам беради.

Энг аввало $a > 0$ да $\Gamma(a) > 0$ ва $\Gamma(1) = 1$ бўлганлиги учун (15) дан

$$\lim_{a\to+\infty}\Gamma(a+1) = +\infty, \qquad \lim_{a\to+0}\Gamma(a) = \lim_{a\to+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty$$

эканлиги келиб чиқади.

Агар $(-1) < a < 0$ бўлса, (15) нинг ўнг томони $\Gamma(a+1)$ мавжуд бўлиб, ундан келиб чиқувчи

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \tag{18}$$

нисбат ҳам маънога эга бўлади. Шунинг учун таъриф сифатида (18) тенгликнинг ўнг томонидаги нисбатнинг қийматини гамма-функциянинг $a \in (-1, 0)$ бўлгандаги қиймати сифатида қабул қиламиз.

У ҳолда (18) дан келиб чиқадики,

$$\lim_{a\to-0}\Gamma(a) = -\infty, \qquad \lim_{a\to(-1)+0}\Gamma(a) = -\infty. \tag{19}$$

Агар $(-2) < a < (-1)$ бўлса, (18) нинг ўнг томони маънога эга бўлади ва шунинг учун унинг қийматини $\Gamma(a)$ функциянинг $a \in (-2, -1)$ бўлгандаги қиймати сифатида қабул қиламиз.

(19) тенгликларни эътиборга олсак, (18) дан келиб чиқадики,

$$\lim_{a\to(-1)-0}\Gamma(a) = +\infty, \qquad \lim_{a\to(-2)+0}\Gamma(a) = +\infty.$$

Худди шу каби, жараённи давом эттириб, (18) тенглик ёрдамида гамма-функцияни $\forall a \in (-n, -n+1)$ оралиқда аниқлаймиз, бу ерда $n \in N$. Бунда

$$\lim_{a\to(-n)+0}\Gamma(a) = \pm\infty, \qquad \lim_{a\to(-n)-0}\Gamma(a) = \mp\infty$$

бўлиб, $n$ жуфт сон бўлганда юқори ишорали, тоқ сон бўлганда эса қуйи ишорали тенгликлар ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, $a \in (-n, -n+1)$ бўлсин, у ҳолда $a+n > 0$ . Шунинг учун $\Gamma(a+n)$ (14) таъриф маъносида мавжуд. Унга (15) формулани $n$ марта кетма-кет қўллаб,

$$\Gamma(a+n) = (n-1+a)(n-2+a)\dots.(1+a)a\Gamma(a)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ердан эса

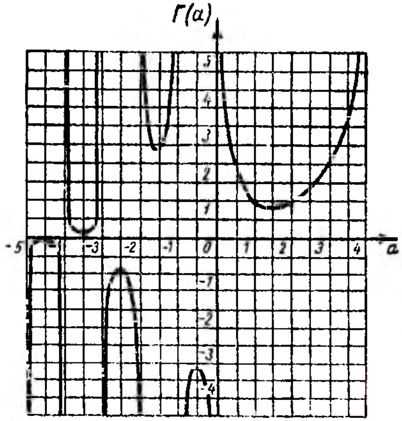
$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\dots(a+n-2)(a+n-1)} \tag{20}$$

тенглик келиб чиқади.

Демак, ихтиёрий бутун бўлмаган манфий $a$ сон учун $\Gamma(a)$ нинг қийматини (20) тенглик бўйича ҳисоблаш мумкин экан.

Булардан ташқари, (14) ва (20) тенгликлардан келиб чиқадики $\Gamma(a) \in C(+0, +\infty)$ ва $\forall n \in N$ учун $\Gamma(a) \in C(-n, -n+1)$ .

Юқорида келтирилганларга асосан $\Gamma(a)$ функциянинг графиги тахминан 1-чизмада тасвирлангандек бўлади, деб хулоса чиқариш мумкин.



1-чизма

**3. Бета- ва гамма-функциялар орасидаги боғланиш.** Бета- ва гамма-функцияларнинг ўзаро боғланишларини ўрнатиш мақсадида (14) да $x = ty (t = const > 0)$ алмаштириш бажарамиз, у ҳолда

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy. \tag{21}$$

Бу ерда $a$ ни $a+b$ билан ва $t$ ни $t+1$ билан алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy.$$

Охирги тенгликнинг ҳар икки томонини $t^{a-1}$ га кўпайтирамиз ва 0 дан $+\infty$ гача интеграллаймиз:

$$\Gamma(a+b)\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}dy\int\limits_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-ty}dt.$$

Бундан (11), (21) ва (14) га асосан

$$\Gamma(a+b)\,B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy =$$

$$= \Gamma(a)\int\limits_0^{+\infty} y^{b-1}e^{-y}dy = \Gamma(a)\,\Gamma(b).$$

Демак,

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (22)$$

Агар (22) формулада $b = 1 - a$ десак, у ҳолда (12) ва (16) га асосан, $0 < a < 1$ да

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} \qquad (23)$$

формулага эга бўламиз. Бундан $a = 1/2$ бўлганда $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ келиб чиқади. Бу тенглик (22) га асосан (13) дан ҳам дарҳол келиб чиқади.

*Одатда (23) тўлдириш формуласи деб аталади.*

(10) тенгликда иштирок этаётган бета-функцияларга (22) формулани қўллаб, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ эканлигини эътиборга олсак, иккиланган аргументнинг гамма - функцияси учун ўринли бўлган ушбу

$$\Gamma(2a) = 2^{2a-1}\pi^{-1/2}\Gamma(a)\,\Gamma(a+1/2)$$

Лежандр формуласи келиб чиқади.

Эслатиб ўтиш лозимки, гарчи (23) тенглик $0 < a < 1$ фаразда келтириб чиқарилган бўлсада, у $\forall a \notin \mathbb{Z}$ учун ҳам тўғридир.

Гамма - функция учун ушбу интеграл формула

$$\Gamma(a) = k^{\alpha}\left[\cos(\alpha\pi/2)\right]^{-1} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\cos(kt)\,dt, \quad k > 0,\ 0 < \alpha < 1$$

ва тўлдириш формуласининг қуйидаги аналоглари ҳам ўринлидир:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(-a) = -\frac{\pi}{a\sin(\pi a)},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi a)}.$$

### 4. Пси функция.

Кўп тадқиқотларда гамма - функциядан ташқари унинг логарифмик ҳосиласи, яъни

$$\frac{d\ln\Gamma(a)}{da} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

ҳам ишлатилади.

Чексиз кўпайтмалар ёрдамидан кўрсатиш мумкинки [6],

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = -C - \frac{1}{a} + a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)}, \tag{24}$$

бу ерда $C = 0,5772156649...$ - Эйлер ўзгармаси.

$a = 1$ да (24) тенглик

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$

эканлигини эътиборга олсак, $\Gamma'(1) = -C$ келиб чиқади.

(15) тенгликни логарифмлаб, сўнгра $a$ бўйича дифференциаллаcак, гамма - функциянинг логарифмик ҳосиласи учун реккурент формулага эга бўламиз:

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{a}. \tag{25}$$

Бу формулада $a = 1, 2, ..., k$ десак,

$$\frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \frac{1}{1} = -C + 1,$$

$$\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} + \frac{1}{2} = -C + 1 + \frac{1}{2};$$

..................................................

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \frac{1}{k} = -C + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}$$

тенгликлар келиб чиқади. Демак,

$$\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} = -C + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}, \qquad k = 1, 2, ... . \tag{26}$$

Одатда, гамма-функциянинг логарифмик ҳосиласи $\psi(a)$ билан белгиланади ва *пси функция деб аталади*, яъни

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}. \tag{27}$$

$\Gamma(a)$ функциянинг хоссаларидан келиб чиқадики, $\psi(a)$ функция $a = 0, -1, -2, ...$ нуқталарда оддий қутбларга эга. (27) таърифга асосан, пси функция учун ўринли бўлган қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$\psi(1+k) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} - C, \quad k = 1, 2, ...;$$

$$\psi(a+k) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + ... + \frac{1}{a+k-1} + \psi(a), \qquad k = 1, 2, ...;$$

$$\psi(a) = \psi(1+a) - \frac{1}{a},$$

$$\psi(a) - \psi(1-a) = -\pi ctg(\pi a),$$

$$\psi(a) - \psi(-a) = -\pi ctg(\pi a) - \frac{1}{a},$$

$$\psi(1+a) - \psi(1-a) = \frac{1}{a} - \pi ctg(\pi a),$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} + a\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - a\right) = \pi tg(\pi a).$$

## 3-§ Бессел функциялари

### 1. Биринчи турдаги Бессел функциялари.

Ушбу

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0 \tag{28}$$

ёки

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

тенглама *Бессел тенгламаси* дейилади, бунда $\nu$ ўзгармас сон (28) тенгламанинг *индекси* деб аталади.

$\nu \geq 0$ бўлсин. Кейинги хисоблашларни соддалаштириш мақсадида (28) тенгламада

$$y = x^\nu z$$

алмаштириш бажарамиз. У ҳолда $z$ функцияни аниклаш учун

$$z'' + \frac{2\nu + 1}{x}z' + z = 0 \tag{29}$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламанинг ечимини

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$z' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... + (n+2)\ c_{n+2}x^{n+1} + ....$$

$$\frac{z'}{x} = \frac{c_1}{x} + 2c_2 + 3c_3x + ... + (n+2)\ c_{n+2}x^n + ...,$$

$$z'' = 2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + ... + (n+1)\ (n+2)\ c_{n+2}x^n + ... .$$

Ҳосил бўлган қаторларни (29) тенгламага қўйиб, қуйидаги тенгликларга бўламиз:

$$\frac{2\nu+1}{x}c_1 + [2c_2 + (2\nu+1)\,2c_2 + c_0] + [2\cdot 3c_3 + (2\nu+1)\,3c_3 + c_1]\ x+$$

$$+ [3\cdot 4c_4 + (2\nu+1)\ 4c_4 + c_2]\ x^2 +....$$

$$+ [(n+1)\ \ (n+2)\,c_{n+2} + (2\nu+1)\ \ (n+2)\,c_{n+2} + c_n]\ \ x^n + ... = 0.$$

Аниқмас коэффициентлар усулига асосан, $x$ нинг барча даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаймиз:

$$c_1 = 0 \tag{30}$$

$$(n+1)\ (n+2)\ c_{n+2} + (2\nu+1)\ (n+2)\ c_{n+2} + c_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Бундан

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2\nu+2)}, \quad n = 0, \quad 1,\ 2, \ldots \tag{31}$$

келиб чиқади. (30) ва (31) га асосан

$$c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = c_{2n-1} = \ldots = 0,$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2\nu+2)},$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{4(2\nu+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)},$$

……………………………………………………

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{2 \cdot 4 \ldots 2n\,(2\nu+2)(2\nu+4)\ldots(2\nu+2n)} =$$

$$= (-1)^n \frac{c_0}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \ldots n\,(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)}.$$

Шундай қилиб, (29) тенгламанинг ечими ушбу

$$z = c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\,(\nu+1)(\nu+2) \cdot \ldots \cdot (\nu+n)}\right] \tag{32}$$

қатор билан ифодаланади. Бунда $c_0$ - ўзгармасни ихтиёрий танлаб олиш мумкин. Даламбер белгисига асосан, (32) қатор $x$ нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлишини текшириб кўриш қийин эмас.

Даражали қаторни ҳадлаб дифференциаллаш (яқинлашиш оралиғи ичида) ҳамма вақт қонуний бўлгани учун (32) қатор билан ифодаланган $z$ ҳақиқатдан ҳам (29) тенгламанинг ечими бўлади. Одатда $c_0$ ўзгармас

$$c_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$$

деб танлаб олинади. Ушбу

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! = \Gamma(n+1),$$

$$(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\nu + n)\,\Gamma(\nu + 1) = (\nu + 2)(\nu + 3) \ldots (\nu + n)\,\Gamma(\nu + 2) =$$

$$\ldots = (\nu + n)\,\Gamma(\nu + n) = \Gamma(\nu + n + 1)$$

тенгликларни эътиборга олсак, $z$ қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu + 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n (\nu + 1)(\nu + 2) \cdot \ldots \cdot (\nu + n)\,\Gamma(\nu + 1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n+\nu}\Gamma(n + 1)\,\Gamma(\nu + n + 1)}.$$

(28) тенгламанинг ечими $y = x^{\nu} z$ функциядан иборатдир. Бу функцияни $J_{\nu}(x)$ орқали белгилаб оламиз. Демак,

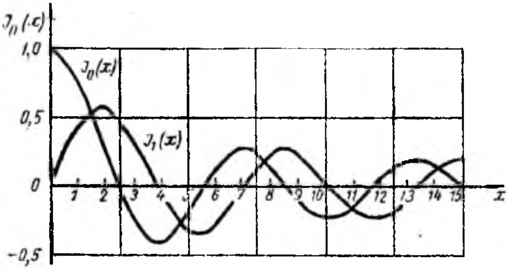
$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(n + 1)\,\Gamma(\nu + n + 1)}. \tag{33}$$

$J_{\nu}(x)$ *функция биринчи турдаги* $\nu$ *индексли ёки* $\nu$ *тартибли Бессел функциялари дейилади.* Айрим адабиётларда бу функциялар *цилиндрик функциялар* деб ҳам аталади.

$J_{\nu}(x)$ функция (28) Бессел тенгламасининг ечимларидан биридир. Хусусан. $\nu = 0$ бўлган ҳолда

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{\Gamma^2(n + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{(n!)^2}, \tag{34}$$

1 да эса



**2-чизма**

$$J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x/2)^{2n+1}}{n!\,(n+1)!}\;.$$

Умуман бутун мусбат $\nu$ ларда

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x/2)^{2n+\nu}}{n!\,(n+\nu)!}. \qquad (35)$$

(34) ва (35) формулалардан кўринадики, $\nu=0$ ёки ихтиёрий бутун ва жуфт $\nu$ лар учун $J_\nu(x)$ функция жуфт функциядан иборатдир.

**Изоҳ.** $\nu$ каср бўлганда $x<0$ лар учун $J_\nu(x)$ функция, умуман айтганда, мавҳум қийматларни қабул қилади ((33) га қаралсин). Мавҳум қийматлар билан иш кўрмаслик учун $J_\nu(x)$ ни ($\nu$ каср бўлганда) $x>0$ лар учун текширамиз.

(28) тенгламада $\nu^2$ иштирок этаётганлиги туфайли юқоридаги мулоҳазалар $\nu$ ни $(-\nu)$ билан алмаштирганда ҳам (28) тенгламанинг ечимига олиб келади. (33) да $\nu$ ни $(-\nu)$ га алмаштирсак,

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x/2)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(-\nu+n+1)} \qquad (36)$$

функция ҳосил бўлади.

*$J_{-\nu}(x)$ функция ҳам биринчи турдаги $(-\nu)$ индексли ёки $(-\nu)$ тартибли Бессел функцияси дейилади.*

$J_\nu(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ функциялар $\nu$ индекс бутун бўлмаганда чизиқли боғлиқ бўлмайди, чунки бу функцияларни ифодаловчи (33) ва (36) қаторларнинг бошланғич ҳадлари нолдан фарқли коэффициентларга эга бўлиб, $x$ нинг турли даражаларини ўз ичига олади.

Шундай қилиб, бутун бўлмаган индекс учун (28) тенгламанинг умумий ечими қуйидагидан иборат:

$$y=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x), \qquad (37)$$

бу ерда $c_1$, $c_2$ - ихтиёрий ўзгармаслар.

**2. Иккинчи турдаги Бессел функциялари.** Агар $\nu$ бутун сон бўлса, $n=0,1,\dots,\nu-1$ лар учун $-\nu+n+1$ ифода ноль ёки манфий бутун қийматларга тенг бўлади. Демак, $n$ нинг бу қийматларида

$\Gamma(-\nu+n+1)=\infty$ бўлади. Шунинг учун ҳам (36) каторнинг мос ҳадларини нолга тенг деб ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, бутун $\nu$ лар учун

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{2n-\nu}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\nu+n+1)}$$

ёки, $n=\nu+k$ десак,

$$J_{-\nu}(x)=(-1)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}=(-1)^{\nu}J_{\nu}(x). \tag{38}$$

Демак, $\nu\geq 0$ бутун сон бўлган ҳолда (38) га асосан $J_{\nu}(x)$ ва $J_{-\nu}(x)$ функциялар чизикли боғлик бўлади, яъни бу ҳолда, аслини олганда (28) тенглама битта хусусий ечимга эга бўлади. Шунинг учун (37) - Бессел тенгламасининг умумий ечими бўла олмайди.

(28) тенгламанинг иккинчи хусусий ечимини аниқлаш учун, каср $\nu$ лар учун (37) дан $c_1$, $c_2$ ўзгармасларни махсус танлаб, ушбу

$$Y_{\nu}(x)=ctg(\nu\pi)\,J_{\nu}(x)-\mathrm{cosec}(\nu\pi)\,J_{-\nu}(x)=$$
$$=\frac{J_{\nu}(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \tag{39}$$

функцияни тузамиз. $\nu$ бутун сон бўлганда (39) формуланинг сурати $J_{\nu}(x)(-1)^{\nu}-J_{-\nu}(x)$ га тенг бўлиб, бу ифода (38) га асосан нолга тенг; махражи ҳам нолга тенг бўлади, яъни (39) - аниқмасликдан иборат бўлади. $\nu$ ни бутун сонга интилтириб, бу аниқмасликни очамиз. Лопитал қоидасига асосан

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_{\nu}(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_{\nu}(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)\right]}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin(\nu\pi)}=$$

$$=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos(\nu\pi)\frac{\partial}{\partial\nu}J_{\nu}(x)-\pi J_{\nu}(x)\sin(\nu\pi)-\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)}{\pi\cos(\nu\pi)}=$$

$$=\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_{\nu}(x)(-1)^n-\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}}{\pi(-1)^n}.$$

Охирги ифодада $J_{\nu}(x)$, $J_{-\nu}(x)$ ўрнига уларни ифодаловчи (33) ва (36) каторларни қўйиб, $\nu$ бўйича дифференциаллаб, сўнгра $\nu$ ўрнига бутун $n$ сонни қўйсак, бир қатор ҳисоблашлардан кейин қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!\,(n+k)!}\left(\sum_{m=1}^{n+k}\frac{1}{m} + \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m}\right), \qquad (40)$$

бу ерда $C = 0.5772156649...$ - Эйлер ўзгармаси.

Хусусий $n = 0$ бўлган ҳолда

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}\right).$$

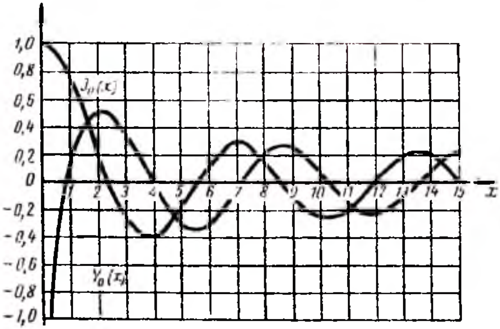
$Y_n(x)$ функцияни $\nu = n$ бўлганда (28) тенгламага қўйиб, ҳақиқатан ҳам бу тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Шу билан бирга $J_n(x)$ ва $Y_n(x)$ функцияларнинг чизиқли боғлиқ бўлиши мумкин эмас, чунки булардан биринчиси $x = 0$ да чекли қийматга эга, иккинчиси эса чексизликка айланади. Демак, $Y_n(x)$ функция (28) тенгламанинг иккинчи хусусий ечими бўлади.

(40) формула билан аниқланган $Y_n(x)$ функция *иккинчи турдаги $n$ - тартибли Бессел функция ёки Вебер функцияси* дейилади.

Демак, Бессел тенгламасининг умумий ечими $\nu = n \in N$ бўлганда

$$y = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x)$$

формула билан аниқланади. Бунда, $c_1$, $c_2$ - ихтиёрий ўзгармаслар.



3-чизма

**3.Бессел функциялари учун дифференциаллаш ва қўшиш формулалари.** Ихтиёрий $\nu$ учун ушбу

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x), \tag{41}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{42}$$

формулалар ўринлидир.

(41) формула $J_{\nu}(x)$ ўрнига унинг (33) ифодасини қўйиш натижасида дарҳол келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n} x^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}\Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n} 2(n+\nu) x^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}\Gamma(n+1)(n+\nu)\Gamma(n+\nu)} =$$

$$= x^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(x/2)^{2n+\nu-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma[(\nu-1)+n+1]} = x^{\nu} J_{\nu-1}(x).$$

Худди шунга ўхшаш (42) формула исботланади. Агар (42) формулада $\nu$ ни (-$\nu$) билан алмаштирсак, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{-\nu}(x)\right] = -x^{\nu} J_{-\nu+1}(x). \tag{43}$$

Худди шунга ўхшаш формулалар иккинчи турдаги мос функциялар учун ҳам тўғри бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, $\nu$ ни каср сон ҳисоблаб, (41) ни $\cos ec(\nu\pi)$ га, (43) ни эса $\cos ec(\nu\pi)$ га кўпайтириб, ҳосил бўлган ифодаларнинг бирини иккинчисидан айирамиз. У ҳолда, $\cos[(\nu-1)\pi] = -\cos(\nu\pi)$, ва $\sin[(\nu-1)\nu\pi] = -\sin(\nu\pi)$ формулаларни эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dx}\left|x^{\nu}\frac{J_{\nu}(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}\right| = x^{\nu}\frac{J_{\nu-1}(x)\cos[(\nu-1)\pi] - J_{-\nu+1}(x)}{\sin[(\nu-1)\pi]}$$

ёки

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} Y_{\nu}(x)\right] = x^{\nu} Y_{\nu-1}(x) \tag{44}$$

тенглик ҳосил бўлади.

(44) да $\nu$ ни $(-\nu)$ га алмаштирсак,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}Y_{-\nu}(x)\right]=x^{-\nu}Y_{-\nu-1}(x) \tag{45}$$

формулага эга бўламиз.

Агар (42) ни $\operatorname{ctg}(\nu\pi)$ кўпайтириб, сўнгра ундан (41) да $\nu$ ни $(-\nu)$ га алмаштириш ва $\operatorname{cosec}(\nu\pi)$ га кўпайтиришдан ҳосил бўлган тенгликни ҳадлаб айириб, $\cos[(\nu+1)\pi]=-\cos(\nu\pi)$, $\sin[(\nu+1)\pi]=-\sin(\nu\pi)$ тенгликларни эътиборга олсак, каср $\nu$ лар учун

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}Y_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}Y_{\nu+1}(x) \tag{46}$$

формула келиб чиқади.

Бутун $\nu$ лар учун (44) ва (46) формулалар $\nu$ ни бутун сонга интилтириб, лимитга ўтиш натижасида ҳосил бўлади.

(41) ва (42) формулаларнинг натижаси сифатида қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\begin{gathered}
xJ'_{\nu}(x)+\nu J_{\nu}(x)=xJ_{\nu-1}(x),\\
xJ'_{\nu}(x)-\nu J_{\nu}(x)=-xJ_{\nu+1}(x),\\
J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_{\nu}(x),\\
J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=(2\nu/x)J_{\nu}(x).
\end{gathered} \tag{47}$$

Бу формулаларнинг биринчи иккитаси (41) ва (42) ни бевосита дифференциаллаш натижасида, кейинги иккитаси эса аввалгиларини қўшиш ва айириш натижасида хосил бўлади.

(44) ва (46) формулалардан фойдаланиб, $Y_{\nu}(x)$ функция учун ҳам (47)га ўхшаш тенгликларни келтириб чиқариш мумкин.

Биринчи тур Бессел функциялари учун қуйидаги

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right]=(-1)^m\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}},\qquad m\in N;$$

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x),\qquad m\in N$$

реккурент формулалар ва ушбу

$$J_{\nu}(x_1-x_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_{\nu+k}(x_1)J_k(x_2),$$

$$J_\nu(x_1+x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k J_{\nu+k}(x_1)\, J_k(x_2).$$

кўшиш формулалари ўринлидир [2,6]. Кўшиш формулаларидан хусусий ҳолда $\nu = 0$ бўлганда қуйидаги

$$J_0(x_1 - x_2) = J_0(x_1)\, J_0(x_2) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x_1)\, J_k(x_2),$$

$$J_0(x_1 + x_2) = J_0(x_1)\, J_0(x_2) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k J_k(x_1)\, J_k(x_2)$$

муҳим тенгликлар келиб чиқади.

### 4.Бессел функцияларининг айрим хусусий ҳоллари.

Математик физикада ушбу $J_0(x)$ , $J_1(x)$ , $Y_0(x)$ ва $J_{n+1/2}(x)$ Бессел функциялари энг кўп учрайди. (17) формулаларнинг охиргисидан кўринаптики, $J_2(x)$ , $J_3(x)$ ва х.к. функцияларни ҳисоблаш $J_0(x)$, $J_1(x)$ функцияларнинг мос қийматларини ҳисоблашга келади.

Энди $J_{n+1/2}(x)$ , бунда n - бутун сон, функцияни қараймиз. Аввало, $J_{1/2}(x)$ . $J_{-1/2}(x)$ функцияларнинг қийматларини ҳисоблаймиз. (33) га асосан

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+1/2}}{n!\Gamma(3/2+n)} = \left(\frac{2}{x}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!\Gamma(3/2+n)}.$$

Маълумки,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2^{n+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Шундай қилиб,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n n! 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n+1)} = $$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Бу ерда охирги йиғинди $\sin x$ нинг даражали қаторга ёйилмасидан иборатдир. Демак,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x.$$

Худди шунга ўхшаш, (36) дан

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

тенгликни хосил қиламиз.

(47) формулаларнинг охиргисига асосан

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$J_{5/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left\{-\sin x + \frac{3}{x}\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)\sin(x - \pi) + \frac{3}{x}\cos(x - \pi)\right].$$

Умуман, $J_{n+1/2}(x)$ Бессел функцияси бутун $n$ да элементар функциялар орқали ифодаланади, яъни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$J_{n+1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

бу ерда $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ – $\frac{1}{x}$ га нисбатан $n$ - даражали кўпҳад, $Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ эса, $n-1$ даражали кўпҳад, шу билан бирга $P_n(0) = 1$, $Q_{n-1}(0) = 0$.

Бундан, Бессел функциясининг $\nu = n + 1/2$ ва $x$ етарли катта бўлгандаги ассимптотик ифодаси келиб чиқади:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-1}\right)\right], \tag{48}$$

бу ерда $O\left(x^{-1}\right)$ орқали тартиби $x^{-1}$ бўлган миқдор белгиланган.

Эслатиб ўтамизки, (48) асимптотик формула фақат $\nu = n + 1/2$ да эмас, балки $\nu$ нинг барча қийматларида ҳам ўринли бўлади.

**5. Бессел функцияларининг ортогоналлиги ва илдизлари.** Ушбу

$$x^2y'' + xy' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right) y = 0 \tag{49}$$

тенгламани текширамиз, бунда $k$ - нолдан фарқли ихтиёрий ўзгармас. $x$ ўзгарувчи ўрнига янги $t = kx$ ўзгарувчи киритамиз. У ҳолда (43) тенглама

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \nu^2\right) y = 0$$

Бессел тенгламасига алмашади. Демак, $y = J_\nu(kx)$ функция

$$x^2\frac{d^2J_\nu(kx)}{dx^2} + x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx} + \left(k^2x^2 - \nu^2\right) J_\nu(kx) = 0$$

тенгламанинг ечимидан иборат бўлади. Бу тенгламани $x$ га бўлиб,

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}\right] + \left(k^2x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(kx) = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. $k$ нинг иккита турли қийматларини олиб, уларга мос тенгламаларни ёзиб оламиз:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}\right] + \left(k_1^2x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(k_1x) = 0.$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right] + \left(k_2^2x - \frac{\nu^2}{x}\right) J_\nu(k_2x) = 0.$$

Бу тengликлардан биринчисини $J_\nu(k_2x)$ га, иккинчисини $J_\nu(k_1x)$ га кўпайтириб ва биридан иккинчисини айириб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right) xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(k_2x)\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx} - xJ_\nu(k_1x)\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right]. \tag{50}$$

Агар (33) формуладан ва (47) формулаларнинг иккинчисидан фойдалансак, (50) тенгликдаги квадрат қавс ичидаги ифодани $x$ нинг даражалари бўйича қаторга ёйиш мумкинлигига ва бу ёйилмадаги $x$ нинг энг кичик даражаси $x^{2(\nu+1)}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Шунга асосан, агар $\nu > -1$ бўлса, $x = 0$ да бу ифода нолга тенг бўлади. Буни эътиборга олиб, (50) тенгликни бирор $(0, l)$ чекли оралиқ бўйича интеграллаймиз. Сўнгра $\frac{dJ_\nu(k_1 x)}{dx} = k_1 J'_\nu(k_1 x)$ ва $\frac{dJ_\nu(k_2 x)}{dx} = k_2 J'_\nu(k_2 x)$ тенгликларга биноан қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right) \int\limits_0^l x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x)\, dx =$$

$$= l \left[k_1 J'_\nu(k_1 l) J_\nu(k_2 l) - k_2 J'_\nu(k_2 l) J_\nu(k_1 l)\right]. \qquad (51)$$

$l = 1$ бўлган ҳолда, бу формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right) \int\limits_0^1 x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x) dx =$$

$$= k_1 J'_\nu(k_1) J_\nu(k_2) - k_2 J'_\nu(k_2) J_\nu(k_1). \qquad (52)$$

Энди $\nu > -1$ да $J_\nu(x)$ Бессел функцияси комплекс илдизларга эга бўлмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, у $a + ib$ комплекс илдизга эга ва шу билан бирга $a \neq 0$, $b \neq 0$ бўлсин. Бессел функциясини ифодаловчи (33) ёйилманинг ҳамма коэффициентлари ҳақиқий бўлгани учун $J_\nu(x)$ функция $a + ib$ комплекс илдиздан ташқари қўшма $a - ib$ илдизга ҳам эга бўлиши керак. (52) формулада $k_1 = a + ib$ ва $k_2 = a - ib$ деб ҳисоблаймиз. У ҳолда $k_1^2 - k_2^2 = 4abi \neq 0$ бўлгани учун

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(k_1 x) J_\nu(k_2 x) dx = 0$$

бўлади. Кўрилаётган ҳолда $J_\nu(k_1 x)$ ва $J_\nu(k_2 x)$ миқдорлар қўшма комплекс, яъни

$$J_\nu(k_1 x) = A + iB, \quad J_\nu(k_2 x) = A - iB$$

бўлади; демак

$$J_\nu(k_1 x) \cdot J_\nu(k_2 x) = A^2 + B^2 > 0.$$

Бунга асосан, $x$ ўзгарувчи 0 дан 1 гача ўзгараётганлиги учун

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(k_1 x) \; J_\nu(k_2 x)\, dx \neq 0.$$

Бу қарама-қаршилик $J_\nu(x)$ функция комплекс илдизга эга, деган фаразимизнинг нотўғри эканлигини кўрсатади.

$J_\nu(x)$ функция $\nu > -1$ да соф мавҳум (яъни $a = 0$, $b \neq 0$) илдизга ҳам эга бўлиши мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\pm ib$ ни (33) формулага қўйиб, фақат мусбат ҳадларни ўз ичига олган ёйилмага эга бўламиз:

$$J_\nu(bi) = (bi)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \cdot \frac{b^{2n}}{2^{\nu+2n}} \neq 0,$$

чунки $x > 0$ да $\Gamma(x)$ мусбат қийматларни қабул қилади.

Энди $J_\nu(x)$ функциянинг ҳақиқий илдизларга эга бўлишини кўрсатамиз. Шу мақсадда Бессел функциясининг (48) асимптотик ёйилмасини қараймиз.

Бу формулага асосан, $x$ ўзгарувчи $Ox$ ўқининг мусбат қисми бўйлаб чексизликка интилганда квадрат қавс ичидаги иккинчи қўшилувчи нолга интилади, биринчиси эса $-1$ дан $+1$ гача чексиз кўп марта ўзгаради ва, демак, чексиз кўп марта нолга айланади. Бундан дарҳол $J_\nu(x)$ функциянинг чексиз кўп ҳақиқий илдизларга эга экани келиб чиқади. Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келдик: *агар $\nu > -1$ бўлса, $J_\nu(x)$ функциянинг барча илдизлари ҳақиқийдир.*

Шу билан бирга, яна шуни уқдириб ўтамизки, (33) ёйилмада $x^\nu$ ни йиғинди белгисидан ташқарига чиқариб ёзсак, йиғинди $x$ нинг фақат жуфт даражаларини ўз ичига олади, бундан дарҳол $J_\nu(x)$ нинг илдизлари абсолют қиймати бўйича жуфт-жуфт бир хил, ишораси бўйича қарама-қаршилиги келиб чиқади. Шунинг учун ҳам мусбат илдизларни қараш етарлидир.

Фараз қилайлик, $\rho_m$ ва $\rho_j$ лар ушбу

$$J_\nu(x) = 0 \tag{53}$$

тенгламанинг ҳар хил мусбат илдизлари бўлсин. $k_1 = \rho_m/l$, $k_2 = \rho_j/l$ белгилашларни киритамиз. У ҳолда (51) формуладан бевосита Бессел функцияларининг қуйидаги ортогоналлик хоссаси келиб чиқади:

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\rho_m \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\rho_j \frac{x}{l}\right) dx = 0, \ m \neq j. \tag{54}$$

(51) тенгликдан кўриниб турибдики, Бессел функцияларининг (54) ортогоналлик хоссаси $\rho_m$ ва $\rho_j$ лар $J'_\nu(x) = 0$ тенгламанинг илдизи бўлганда ҳам ўринли бўлади.

Энди $k = \rho/l$ бўлсин, бунда $\rho$ - (53) тенгламанинг мусбат илдизи. (51) формулада $k_1 = k$ деб, $k_2$ ни эса $k$ га интилувчи ўзгарувчи деб ҳисобласак,

$$\int_0^l xJ_\nu(kx)\,J_\nu(k_2x)\,dx = \frac{lkJ'_\nu(kl)\,J_\nu(k_2l)}{k_2^2 - k^2}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томони $k_2 \to k$ да аниқмасликка айланади, чунки бунда унинг сурати ҳам махражи ҳам нолга интилади. Бу аниқмасликни Лопитал қоидаси бўйича очиб,

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\rho\frac{x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}l^2J_\nu'^2(\rho) \tag{55}$$

тенгликка эга бўламиз.

(47) формулаларнинг иккинчисида $x = \rho$ десак, $\rho$ сон (53) тенгламанинг илдизи бўлгани учун

$$J'_\nu(\rho) = -J_{\nu+1}(\rho)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва (55) формула

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\rho\frac{x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}l^2J_{\nu+1}^2(\rho)$$

кўринишда ёзилади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги формулага эга бўлдик:

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\rho_m\frac{x}{l}\right)J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx = \begin{cases} 0, & m \neq j, \\ \frac{1}{2}l^2J_\nu'^2(\rho_j) = \frac{1}{2}l^2J_{\nu+1}^2(\rho_j) & m = j. \end{cases} \tag{56}$$

бу ерда $\rho_m$ ва $\rho_j$ лар $J_\nu(x) = 0$ тенгламанинг мусбат илдизлари.

Энди, фараз қилайлик, $\rho_m$ ва $\rho_j$ лар

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0 \tag{57}$$

тенгламанинг турли мусбат илдизлари бўлсин, бу ерда $\alpha$ ва $\beta$ қандайдир сонлар бўлиб, $\beta \neq 0$. У ҳолда

$$\alpha J_\nu(\rho_m) + \beta\rho_m J'_\nu(\rho_m) = 0, \qquad \alpha J_\nu(\rho_j) + \beta\rho_j J'_\nu(\rho_j) = 0$$

тенгликлар ўринли бўлиб, уларнинг биринчисини $J_\nu(\rho_j)$ га, иккинчисини эса $J_\nu(\rho_m)$ га кўпайтириб, сўнгра ҳадма-ҳад айирсак,

$$\rho_m J'_\nu(\rho_m)\, J_\nu(\rho_j) - \rho_j\, J'_\nu(\rho_j)\, J_\nu(\rho_m) = 0$$

тенгликка эга бўламиз. Агар бу ерда $k_1 = \rho_m/l$, $k_2 = \rho_j/l$ белгилаш киритсак, (51) тенгликнинг ўнг томони, демак, чап томони ҳам нолга тенглиги келиб чиқади.

Демак, $\rho_m$ ва $\rho_j$ лар (57) тенгламанинг турли мусбат илдизлари бўлганда ҳам Бессел функцияларининг (54) ортогоналлик хоссаси ўринли бўлар экан.

Энди $\rho$ - (57) тенгламанинг бирор мусбат илдизи бўлсин. $k = \rho/l$ белгилаш киритиб, (51) тенгликда $k_1 = k$ деб, $k_2$ ни эса $k$ га интилувчи ўзгарувчи деб ҳисоблайлик.

У ҳолда, (57) тенгликни ҳисобга олиб, (51) тенгликдан

$$(k_2 + k) \int_0^l x\, J_\nu(k\,x)\, J_\nu(k_2 x)\, dx =$$

$$= -\frac{l}{k_2 - k} J_\nu(kl) \left[\frac{\alpha}{\beta l} J_\nu(k_2 l) + k_2 l J'_\nu(k_2 l)\right]$$

тенгликка, бундан эса $k_2 \to k$ да

$$2k \int_0^l x\, J_\nu^2(k\,x)\, dx = -l\, J_\nu(kl) \left[\lim_{k_2 \to k} \frac{k_2 l\, J'_\nu(k_2 l) - kl\, J'_\nu(kl)}{k_2 l - kl} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\beta} \lim_{k_2 \to k} \frac{J_\nu(k_2 l) - J_\nu(kl)}{k_2 l - kl}\right] = -l\, J_\nu(kl) \left\{\frac{d}{d(kl)} [k\, l\, J'_\nu(kl)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{d}{d(kl)} J_\nu(kl)\right\} = -l\, J_\nu(kl) \left[kl\, J''_\nu(kl) + J'_\nu(kl) + \frac{\alpha}{\beta} J'_\nu(kl)\right] \qquad (58)$$

тенгликларга эга бўламиз.

(28) ва (57) тенгликлардан мос равишда келиб чиқувчи қуйидаги

$$J''_\nu(kl) = \left[\frac{\nu^2}{(kl)^2} - 1\right] J_\nu(kl) - \frac{1}{kl} J'_\nu(kl), \qquad \alpha\, J_\nu(kl) + \beta\, k\, l\, J'_\nu(kl) = 0$$

тengликларга асосан, (58) тенгликдан

$$2k\int_0^l xJ_\nu^2(kx)\,dx = kl^2\left\{J_\nu'^2(kl) + \left[1-\frac{\nu^2}{(kl)^2}\right]J_\nu^2(kl)\right\}$$

тенглик ва бу ерда $kl=\rho$ эканини ҳисобга олсак,

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\frac{\rho}{l}x\right)dx = \frac{1}{2}l^2\left[J_\nu'^2(\rho) + \left(1-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)J_\nu^2(\rho)\right] \tag{60}$$

тенгликка эга бўламиз.

### 6. Функцияни Фурье - Бессел ва Дини қаторига ёйиш.

$\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ...$ лар $J_\nu(x) = 0$ тенгламанинг ўсиш тартиби бўйича жойлаштирилган мусбат илдизлари бўлсин.

Юқорида биз кўрдикки,

$$J_\nu\left(\rho_1\frac{x}{l}\right), J_\nu\left(\rho_2\frac{x}{l}\right), ..., J_\nu\left(\rho_n\frac{x}{l}\right)...$$

функциялар $[0,l]$ сегментда вазнли ортогонал системани ташкил қилади. Фараз қилайлик, ихтиёрий $f(x)$ функция ушбу

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu\left(\rho_n\frac{x}{l}\right), \quad \nu > -1 \tag{61}$$

қатор билан ифодаланган бўлсин.

Бу қаторни текис яқинлашувчи ҳисоблаб, (61) тенгликни $xJ_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)$ га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган ифодани 0 дан $l$ гача интеграллаймиз:

$$\int_0^l xf(x)J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx = \sum_{n=1}^{n} a_n\int_0^l xJ_\nu\left(\rho_n\frac{x}{l}\right)J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx.$$

Бундан, (56) формулага асосан, ушбу тенглик келиб чиқади:

$$a_j = \frac{2}{l^2J_{\nu+1}^2(\rho_j)}\int_0^l xf(x)J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx. \tag{62}$$

*Коэффициентлари (62) формула билан аниқланган (61) ёйилма $f(x)$ функциянинг Фурье-Бессел қаторига ёйилмаси дейилади.* $f(x)$ функциянинг (61) қаторга ёйилиши учун у қандай шартларни қаноатлантириши керак деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради, биз уни исботсиз келтирамиз.

*Агар $f(x)$ функция $(0,l)$ оралиқда берилган бўлак-бўлак узлуксиз функция бўлиб,*

$$\int_0^l t^{1/2}\,|f(t)|\,dt$$

*интеграл мавжуд бўлса, $\nu > -1/2$ бўлганда (61) Фурье-Бессел қатори яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $(0,l)$ оралиқнинг $f(x)$ чегараланган вариацияга эга бўлган ҳар бир $x$ нуқтасида $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$ га тенг бўлади* [2].

*Агар $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_j, ...$ - (57) тенгламанинг илдизлари бўлса, (61) қатор Дини қатори дейилади* ва бунда, (60) тенгликка асосан,

$$\int_0^l xf(x)\,J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx = a_j\frac{l^2}{2}\left[J_\nu'^2(\rho_j)+\left(1-\frac{\nu^2}{\rho_j^2}\right)J_\nu^2(\rho_j)\right]$$

бўлиб, бундан $a_j$ коэффициентларни топиш формуласи келиб чиқади:

$$a_j = \frac{2}{l^2\left[J_\nu'^2(\rho_j)+\left(1-\nu^2/\rho_j^2\right)J_\nu^2(\rho_j)\right]}\int_0^l xf(x)\,J_\nu\left(\rho_j\frac{x}{l}\right)dx.$$

$f(x)$ функцияни Дини қаторига ёйиш учун, у юқорида таъкидланган Фурье-Бессел қаторига ёйилиш шартини қаноатлантириши ва $(\alpha/\beta)+\nu>0$ шартни бажариши талаб этилади [2].

### 7. Мавҳум аргументли Бессел функциялари.

Ушбу дифференциал тенгламада

$$x^2\omega'' + x\omega' + \left(k^2x^2-\nu^2\right)\omega = 0 \qquad (k = const) \tag{63}$$

$x = kx$ алмаштириш бажарсак, (28) тенгламага эга бўламиз. Унинг умумий ечим формуласига асосан, (63) тенгламанинг умумий ечими

$$\omega = c_1J_\nu(kx) + c_2Y_\nu(kx) \tag{64}$$

дан иборат эканлиги келиб чиқади.

(63) ва (64) да $k = i$ ($i$ - мавҳум бирлик) десак,

$$x^2\omega'' + x\omega' - (x^2 + \nu^2)\,\omega = 0 \tag{65}$$

тенгламанинг умумий ечими

$$\omega = c_1 J_\nu(ix) + c_2 Y_\nu(ix)$$

эканини топамиз, бу ерда (33) га асосан,

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

Бу тенгликни иккала томонини $i^{-\nu}$га кўпайтириб, хосил бўлган тенгликнинг ўнг томонини $I_\nu(x)$ билан белгиласак, (65) тенгламанинг қаноатлантирувчи

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} \tag{66}$$

функцияга эга бўламиз ва бунда

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \tag{67}$$

тенглик ўринли бўлади.

*Одатда (66) $\nu$ - тартибли мавҳум аргументли биринчи турдаги Бессел функцияси ёки модификацияланган Бессел функцияси дейилади.*

$\nu = n \in N$ бўлганда $I_{-n}(x) = I_n(x)$ тенглик ўринли бўлиб, (65) тенгламанинг $I_n(x)$ билан чизиқли боғлиқ бўлмаган ечими сифатида

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \tag{68}$$

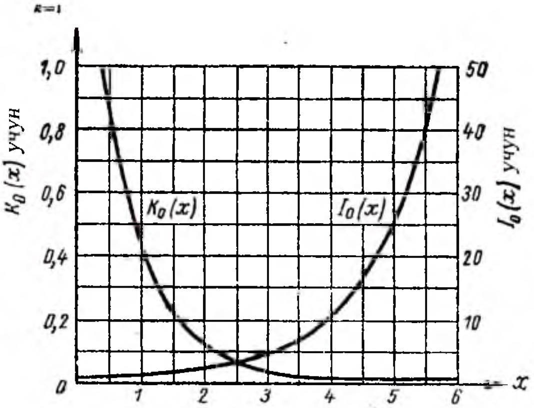
функция олинади. Шунинг учун (65) тенгламанинг умумий ечими

$$\omega = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x)$$

кўринишда бўлади, бу ерда $c_1$ ва $c_2$ - ихтиёрий ўзгармаслар.

*Одатда (68) функция $\nu$ - тартибли мавҳум аргументли иккинчи тур Бессел функцияси ёки Макдональд функцияси деб аталади.*

Таърифга асосан $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$ тенглик ўринли.



**4-чизма**

Хусусий ҳолда

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

$$K_0(x) = -I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

муносабатлар ўринли бўлиб, бу функцияларнинг графиги 4 - чизмадаги каби бўлади.

(39), (67), (68) тенгликлар ва $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ функциялар учун чиқарилган формулалардан $I_\nu(x)$ ва $K_\nu(x)$ функциялар учун ўринли бўлган қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, shx, \qquad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, chx,$$

$$K_{1/2}(x) = K_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}.$$

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \frac{I_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}},$$

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[x^\nu I_\nu(x)\right] = x^{\nu-m} I_{\nu-m}(x),$$

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[\frac{K_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{K_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}},$$

$$\frac{d^m}{(xdx)^m}\left[x^\nu K_\nu(x)\right] = (-1)^m x^{\nu-m} K_{\nu-m}(x).$$

Охирги тўртта тенгликнинг $m = 1$ бўлган ҳолидан қуйидаги рекуррент формулалар келиб чиқади:

$$x\,I'_\nu(x) - \nu I_\nu(x) = x\,I_{\nu+1}(x),$$

$$x\,I'_\nu(x) + \nu I_\nu(x) = x\,I_{\nu-1}(x),$$

$$2\,I'_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x),$$

$$2\nu I_\nu(x) = x\left[I_{\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x)\right],$$

$$x\,K'_\nu(x) - \nu K_\nu(x) = -xK_{\nu+1}(x),$$

$$x\,K'_\nu(x) + \nu K_\nu(x) = -xK_{\nu-1}(x),$$

$$-2\,K'_\nu(x) = K_{\nu+1}(x) + K_{\nu-1}(x),$$

$$2\nu\,K_\nu(x) = x\left[K_{\nu+1}(x) - K_{\nu-1}(x)\right].$$

Биринчи ва бешинчи тенгликларда $\nu = 0$ деб,

$$I'_0(x) = I_1(x), \qquad K'_0(x) = -K_1(x)$$

тенгликларга эга бўламиз. Ушбу

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O\left(x^{-1}\right)\right],$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left[1 + O\left(x^{-1}\right)\right]$$

асимптотик тенгликлар ҳам ўринлидир [2,6].

**8. Бессел функциялари учун интеграл формулалар.** Дастлаб

$$J_\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}$$

функция учун интеграл формула топайлик. 2 - § да чиқарилган формулаларга асосан $\nu > -1/2$ бўлганда

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)} = \frac{1}{\Gamma[(\nu+1/2)+(n+1/2)]} = \frac{B(n+1/2, \nu+1/2)}{\Gamma(n+1/2)\Gamma(\nu+1/2)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^1 z^{n-1/2}\,(1-z)^{\nu-1/2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^1 t^{2n}\,\left(1-t^2\right)^{\nu-1/2}\,dt$$

тенглик ўринли. Буни эътиборга олсак,

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(x/2)^{\nu+2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^1 t^{2n}\,\left(1-t^2\right)^{\nu-1/2}\,dt =$$

$$= \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(xt)^{2n}}{2^{2n}\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+1/2)}\,dt.$$

Интеграл остида турган йиғинди $\cos(xt)/\sqrt{\pi}$ функциянинг чексиз қаторга ёйилмаси эканини эътиборга олсак. $J_\nu(x)$ функциянинг интеграл кўринишига эга бўламиз:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-1/2} \cos(xt)\,dt. \qquad \nu > -1/2.$$

Худди шу каби кўрсатиш мумкинки [2,6],

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_{-1}^1 \left(1-t^2\right)^{\nu-1/2} ch\,(xt)\,dt, \qquad \nu > -1/2;$$

$$K_\nu(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\,ch\,t} \cdot ch\,(\nu t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int\limits_0^{+\infty} e^{-t-x^2/4t}\,t^{-\nu-1}\,dt$$

($x > 0, \nu$ - ихтиёрий ).

### 9. Бессел - Клиффорд функциялари.

Амалиётда Бессел функциялари билан бир қаторда Бессел - Клиффорд функциялари деб аталувчи ушбу функциялар ҳам ишлатилади:

$$\bar{J}_\nu(x) = \Gamma(\nu+1)(x/2)^{-\nu} J_\nu(x),$$

$$\bar{I}_\nu(x) = \Gamma(\nu+1)(x/2)^{-\nu} I_\nu(x),$$

$$\bar{K}_\nu(x) = 2^{1-\nu}x^\nu K_\nu(x)/\Gamma(\nu) \qquad (\nu > 0).$$

Бу тенгликлар ва Бессел функцияларининг таърифларидан келиб чиқадики, $\bar{J}_\nu(x)$ , $\bar{I}_\nu(x)$ ва $\bar{K}_\nu(x)$ функциялар $-\infty < x < +\infty$ да аниқланган бўлиб, ихтиёрий $\nu$ ($\nu \neq -n,\ n \in N$) учун $\bar{J}_\nu(0) = 1$, $\bar{I}_\nu(0) = 1$, $\bar{K}_\nu(0) = 1$ тенгликлар ўринли. $J_\nu(x)$ ва $I_\nu(x)$ функцияларнинг интеграл формулаларидан келиб чиқадики, $\nu > -1/2$ да $|\bar{J}_\nu(x)| \leq 1$ , $|\bar{I}_\nu(x)| < chx < e^x$, $x > 0$. Бундан ташқари $|\bar{K}_\nu(x)| \leq 1$ тенгсизлик ҳам тўғридир.

## 4-§ Гипергеометрик функция

### 1. Асосий таърифлар.

Ушбу

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{69}$$

*гипергеометрик тенглама ёки Гаусс тенгламаси* деб аталувчи тенгламани текширамиз. Бу ерда $a, b, c$ - учта ихтиёрий параметрлар бўлиб, ҳақиқий ёки комплекс қийматларни қабул қилиши мумкин. Булардан иккитаси: $a$ ва $b$ тенгламада симметрик иштирок этади.

$x = 0$ ва $x = 1$ бўлганда тенгламанинг тартиби бузилиб, биринчи тартибли тенглама ҳосил бўлади, $x = \infty$ да эса (69) тенглама умуман маъносини йўқотади. Шунинг учун бу нуқталар махсус нуқталар ҳисобланади.

(69) тенгламанинг $x = 0$ махсус нуқта атрофидаги ечимини

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{70}$$

даражали қатор кўринишида излаймиз. Бундан

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1}$$

ёки

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) A_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) A_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) A_{n+2} x^n.$$

Бу ҳосилаларнинг қийматини ва $y$ ни (69) тенгламага қўямиз. У ҳолда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)\,(n+1)\,(n+2)\,A_{n+2} x^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} [c-(a+b+1)\,x]\,(n+1) A_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} abA_n x^n = 0.$$

Номаълум $A_1, ..., A_n, ...$ ўзгармасларни топиш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланамиз, бунга асосан $x$ нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни нолга тенглаш керак. $x^k$ олдидаги умумий коэффициентларни нолга тенглаб, ушбу

$$-(k-1)\,kA_k + k\,(k+1)\,A_{k+1} - k\,(a+b+1)\,A_k +$$

$$+c\,(k+1)\,A_{k+1} - abA_k = 0$$

тенгликни хосил киламиз. Бундан

$$A_{k+1} = \frac{(k+a)\,(k+b)}{(k+1)\,(c+k)} A_k$$

рекуррент формулага эга бўламиз.

Бу ерда $A_0 = 1$ ва $c \neq 0, -1, -2, ..., -n, ...$ деб хисоблаймиз. (69) гипергеометрик тенгламанинг биринчи хусусий ечими $y_1$ ни $F\,(a, b, c; x)$ орқали белгилаб, $A_n$ коэффициентларнинг топилган қийматларини (70) қаторга қўямиз. У ҳолда

$$y_1 = F\,(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,(1)_n} x^n. \tag{71}$$

Бу ерда

$$(a)_n = a\,(a+1)\;...\;(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a),$$

хусусий ҳолда, $(a)_0 = 1$ ва $\forall n \in N$ учун $(1)_n = n!$.

*(71) қатор гипергеометрик қатор, бу қаторнинг йиғиндиси бўлган $F(a, b, c; x)$ функция эса гипергеометрик функция дейилади.*

Даламбер принципига асосан,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}x\right| = |x|.$$

Демак, (71) қатор $|x| < 1$ да абсолют яқинлашувчи, $|x| > 1$ да узоқлашувчи бўлади. Раабе белгисидан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $x = 1$ бўлганда, агар $c - a - b > 0$ бўлса, (71) қатор абсолют яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq 0$ бўлса, узоқлашувчи; $x = -1$ бўлганда эса, агар $c - a - b > 0$ бўлса, абсолют яқинлашувчи, агар $-1 < c - a - b \leq 0$ бўлса, шартли яқинлашувчи, агар $c - a - b \leq -1$ бўлса узоқлашувчи бўлади.

Агар (71) формулада $b = c$ бўлса,

$$(a)_n = (-1)^n(-a)(-a-1)\ldots(-a-n+1) = (-1)^n\begin{pmatrix}-a\\n\end{pmatrix}n!$$

тенгликка асосан

$$F(a, b, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\begin{pmatrix}-a\\n\end{pmatrix}x^n = (1-x)^{-a}$$

биномиал қатор ҳосил бўлади.

Агарда $a = 1$, $b = c$ бўлса, (71) формула ушбу

$$F(1, b, b; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$$

кўринишга эга бўлади, яъни $a = 1$, $b = c$ бўлган ҳолда гипергеометрик қатор геометрик прогрессияга айланади, шунинг учун ҳам у гипергеометрик қатор деб аталган.

(69) тенгламанинг иккинчи хусусий, умуман айтганда, (71) га чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимини топиш учун (69) тенгламада

$$y = x^\rho\eta$$

алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда (69) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x(1-x)\eta'' + [(c+2\rho) - (a+b+1+2\rho)x]\eta' -$$

$$-\left[ab+\rho(a+b+\rho)-\frac{\rho(\rho+c-1)}{x}\right]\eta=0.$$

Бу тенглама (69) тенглама типига тегишли бўлиши учун $\rho = 1-c$ (ёки $\rho = 0$, бу хол бизни қизиқтирмайди) бўлиши керак. У ҳолда

$$x(1-x)\eta''+\{(2-c)-[(a-c+1)+(b-c+1)+1]x\}\eta'-$$

$$-(a-c+1)(b-c+1)\eta=0$$

тенгламага эга бўламиз. Шундай қилиб, $\rho = 1-c$ бўлганда $y = x^{\rho}\eta$ алмаштириш (69) тенгламани худди шу кўринишдаги тенгламага ўтказади, бунда фақат $a, b, c$ ларни мос равишда $a-c+1$, $b-c+1$, $2-c$ ларга алмаштириш зарур. Демак, берилган (69) тенглама $y_1$ га чизиқли боғлиқ бўлмаган

$$y_2 = x^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c;x)$$

ечимга эга бўлади. Шу билан бирга, $y_2$ функция

$$2-c\neq 0,\quad -1,-2,...,-n,...$$

бўлгандагина маънога эга бўлади. Шундай қилиб, (69) тенгламанинг умумий ечимини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$y = c_1F(a,b.c;x)+c_2x^{1-c}F(a-c+1,\ b-c+1,\ 2-c;x),$$

бу ерда $c_1$ ва $c_2$ - ихтиёрий ўзгармаслар.

Агар гипергеометрик функцияга симметрик бўлиб кирган $a$ ва $b$ параметрлардан биттаси манфий бутун сон $(-n)$ га тенг бўлса, (71) гипергеометрик қатор узилиб қолади ва у $n$ - даражали кўпҳадга айланади.

Агарда $a = -n_1$, $b = -n_2$ бўлиб, бунда $n_1, n_2 \in N$ бўлса, у холда гипергеометрик қатор кўпҳадга айланиб, унинг даражаси $n_1$ ва $n_2$ сонларнинг кичигига тенг бўлади.

(69) тенгламанинг $x = 1$ махсус нуқта атрофидаги ечимларини топиш учун $t = 1-x$ алмаштириш қиламиз. Натижада (69) тенгламадан яна ўзига ўхшаш тенглама ҳосил бўлиб, янги тенглама $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = a+b-c+1$ параметрларга эга бўлади. Буни эътиборга олиб, (69) тенгламанинг $x = 1$ махсус нуқта атрофидаги чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимларини ёзиш мумкин:

$$y_3 = F(a,b,a+b-c+1;1-x),$$

$$y_4 = (1 - x)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c + 1 - a - b; 1 - x),$$

бу ерда $c - a - b \notin Z$ ва $|1 - x| < 1$ .

Агар (69) тенгламада $t = x^{-1}$, $\omega = t^{-a} y$ алмаштириш бажарсак, $\omega(t)$ функцияга нисбатан, параметрлари $a_1 = a$, $b_1 = 1 + a - c$, $c_1 = 1 + a - b$, бўлган тенгламага эга бўламиз. Бунда (69) тенгламанинг $x = \infty$ махсус нуқтаси янги тенгламанинг $t = 0$ махсус нуқтасига алмашади. Буларни эътиборга олиб, (69) тенгламанинг $x = \infty$ махсус нуқтаси атрофидаги чизиқли боғлиқ бўлмаган икки ечимларини топамиз:

$$y_5 = x^{-a} F(a, 1 + a - c, 1 + a - b; 1/x),$$

$$y_6 = x^{-b} F(b, 1 + b - c, 1 + b - a; 1/x),$$

бу ерда $a - b \notin Z$ ва $|x| > 1$.

Шундай қилиб, (69) тенгламнинг параметрлари $c$, $c - a - b$, $a - b \notin Z$ шартларни қаноатлантирганда унинг олтита асосий ечимлари гипергеометрик функция орқали ёзилишини топдик.

**2. Асосий таърифлардан келиб чиқувчи формулалар.**

(71) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида дарҳол ушбу

$$\frac{d}{dx} F(a, b, c; x) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1, c + 1; x)$$

формулани ҳосил қиламиз.

(71) қаторни аввал $x^a$, $x^b$ ёки $x^{c-1}$ га кўпайтириб, сўнгра ҳадлаб дифференциалласак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\frac{d}{dx}\left[x^a F(a, b, c; x)\right] = a x^{a-1} F(a + 1, b, c; x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^b F(a, b, c; x)\right] = b x^{b-1} F(a, b + 1, c; x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c-1} F(a, b, c; x)\right] = (c - 1) x^{c-2} F(a, b, c - 1; x).$$

Худди шу каби қуйидаги тенгликлар ҳам ўринли:

1. $\dfrac{d^n}{dx^n} F(a, b, c; x) = \dfrac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a + n, b + n, c + n; x)$,

2. $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[x^{a+n-1} F(a, b, c; x)\right] = (a)_n x^{a-1} F(a + n, b, c; x)$.

3. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{c-1}F(a,b,c;x)\right]=(c-n)_n x^{c-n-1}F(a,b,c-n;x),$$

4. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{a+n-1}F(a,b,c;x)\right]=$$
$$=(-1)^n\frac{(a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-x)^{a-1}F(a+n.b,c+n;x).$$

5. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{a+b-c}F(a,b,c;x)\right]=$$
$$=\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n}(1-x)^{a+b-c-n}F(a,b,c+n;x),$$

6. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{c-1}(1-x)^{b-c+n}F(a,b,c;x)\right]=$$
$$=(c-n)_n x^{c-n-1}(1-x)^{b-c}F(a-n,b;c-n;x),$$

7. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{c-1}(1-x)^{a+b-c}F(a,b,c;x)\right]=$$
$$=(c-n)_n x^{c-n-1}(1-x)^{a+b-c-n}F(a-n.b-n,c-n;x),$$

8. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{c-a+n-1}(1-x)^{a+b-c}F(a,b,c;x)\right]=$$
$$=(c-a)_n\,x^{c-a-1}(1-x)^{a+b-c-n}F(a-n.b,c;x).$$

Бу тенгликлар тўғрилигига, масалан, математик индукция усули билан ишонч хосил қилиш мумкин.

Одатда ушбу олтита $F(a\pm1,b,c;x)$, $F(a,b\pm1,c;x)$, $F(a,b,c\pm1;x)$ функциялар $F(a.b,c;x)$ *функцияга қўшни функциялар дейилади.* $F(a,b,c;x)$ ва ихтиёрий унга қўшни икки функциялар орасида коэффициентлари $x$ га боглиқ чизиқли функция бўлган чизиқли комбинация мавжуд. Бундай комбинациялар 15 та бўлиб, уларни Гаусс топган. Қуйида биз уларнинг тўла рўйхатини келтирамиз. Бунда $F$. $F(a\pm1)$. $F(b\pm1)$, $F(c\pm1)$ орқали мос равишда $F(a,b.c;x)$. $F(a\pm1,b.c;x)$. $F(a.b\pm1,c;x)$, $F(a.b,c\pm1;x)$ функциялар тушинилади:

$$[c-2a-(b-a)x]\,F+a(1-x)\,F(a+1)-(c-a)\,F(a-1)=0,$$

$$(b-a)\,F+aF(a+1)-bF(b+1)=0.$$

$$(c-a-b)\,F+a\,(1-x)\,F\,(a+1)-(c-b)\,F\,(b-1)=0,$$

$$c\,[a-(c-b)\,x]\,F-ac\,(1-x)\,F\,(a+1)+(c-a)\,(c-b)\,xF\,(c+1)=0,$$

$$(c-a-1)\,F+aF\,(a+1)-(c-1)\,F\,(c-1)=0, \tag{72}$$

$$(c-a-b)\,F-(c-a)\,F\,(a-1)+b\,(1-x)\,F\,(b+1)=0,$$

$$(b-a)\,(1-x)\,F-(c-a)\,F\,(a-1)+(c-b)\,F\,(b-1)=0,$$

$$c\,(1-x)\,F-cF\,(a-1)+(c-b)\,xF\,(c+1)=0,$$

$$[a-1-(c-b-1)\,x]\,F+(c-a)\,F\,(a-1)-(c-1)\,(1-x)\,F\,(c-1)=0,$$

$$[c-2b+(b-a)\,x]\,F+b\,(1-x)\,F\,(b+1)-(c-b)\,F\,(b-1)=0,$$

$$c\,[b-(c-a)\,x]\,F-bc\,(1-x)\,F\,(b+1)+(c-a)\,(c-b)\,xF\,(c+1)=0,$$

$$(c-b-1)\,F+bF\,(b+1)-(c-1)\,F\,(c-1)=0,$$

$$c\,(1-x)\,F-cF\,(b-1)+(c-a)\,xF\,(c+1)=0,$$

$$[b-1-(c-a-1)\,x]\,F+(c-b)\,F\,(b-1)-(c-1)\,(1-x)\,F\,(c-1)=0.$$

$$c\cdot[c-1-(2c-a-b-1)x]F+(c-a)(c-b)xF(c+1)-c(c-1)(1-x)F(c-1)=0.$$

Иккита параметри ўзгармас бўлган қўшни гипергеометрик функциялар орасида эса қуйидаги боғланишлар мавжуд:

$$(c-a)\,F\,(a-1)+(2a-c-ax+bx)\,F+a\,(1-x)\,F\,(a+1)=0,$$

$$(c-b)\,F\,(b-1)+(2b-c-bx+ax)\,F+b\,(x-1)\,F\,(b+1)=0,$$

$$c\,(c-1)\,(x-1)\,F\,(c-1)+c\,[c-1-(2c-a-b-1)\,x]\,F+$$
$$+\,(c-a)\,(c-b)\,xF\,(c+1)=0.$$

Бу тенгликларнинг тўғрилигига иштирок этаётган гипергеометрик функцияларнинг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб, ўзгарувчи $x$ нинг мос даражалари коэффициентларини таққослаш усули билан ишонч ҳосил қилиш мумкин. Масалан, (72) тенгликни қарайлик:

$$(c-a-1)\,\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}+a\cdot\frac{(a+1)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}=$$

$$=(c-a-1)\,\frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}+a\cdot(a+n)\cdot\frac{(a)_n\,(b)_n}{a\cdot(c)_n\,n!}=$$

$$= \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,[c - a - 1 + (a + n)] = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n\,n!}\,[(c - 1) + n] = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c - 1)_n\,n!}.$$

**3. Гипергеометрик функциянинг интеграл кўриниши.** (71) қаторни

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)}$$

тенгликни эътиборга олиб, ушбу

$$F(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + n)\Gamma(b + n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c + n)\,n\,!}\,x^n =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left[\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n)\Gamma(b + n)}{\Gamma(c + n)n!}\,x^n\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n)\Gamma(b + n)}{\Gamma(c + n)n!}\,x^n$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бундан (22) формулага асосан

$$B(b + n, c - b) = \frac{\Gamma(b + n)\Gamma(c - b)}{\Gamma(c + n)}$$

бўлганлиги сабабли, аввалги тенглик

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n)}{n!}\,x^n B(b + n,\ c - b)$$

кўринишда ёзилади ёки (7) га асосан

$$F(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + n)}{n!}\,x^n \int_0^1 t^{n+b-1}\,(1 - t)^{c-b-1}\,dt.$$

Бу ердаги интеграл $n$ нинг барча қийматларида яқинлашувчи бўлгани учун

$$b > 0,\quad c - b > 0 \ \text{ ёки } \ c > b > 0 \tag{73}$$

шартларнинг бажарилиши зарурдир.

Аввалги тенгликни ушбу

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{n!\,\Gamma(a)}\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}x^n dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(xt)^n\right]dt$$

кўринишда ёзиб оламиз. Интеграл остидаги йигинди $(1-xt)^{-a}$ функциянинг чексиз қаторга ёйлмасидан иборат бўлгани учун

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt \tag{74}$$

формулага эга бўламиз. *Бу эса гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидир.*

(73) шартларни битта $c-a-b>0$ шарт билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар $a<0$ бўлса,$(-a)>0$ бўлади ва бу тенгсизликнинг (73) тенгсизликни иккинчиси билан қўшиб, $c-a-b>0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз; агарда $a>0$ бўлса, бу тенгсизликдан, (73) тенгсизликларнинг иккинчисидан кучлироқ бўлган $c-b>a$ тенгсизликка эга бўламиз.

## 4. Гипергеометрик функцияни аналитик давом эттиришга оид ва бошқа баъзи формулалар.

Энди гипергеометрик функциянинг $x=1$ даги қийматини ҳисоблаймиз. Шу мақсадда, (74) формуладаги интеграл $b>0$, $c>0$ ва $|x|<1$ бўлганда текис яқинлашувчи бўлгани сабабли $x\to 1$ да лимитга ўтамиз:

$$\lim_{x\to 1}F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\lim_{x\to 1}\int_0^1\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\right]dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\lim_{x\to 1}\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\right]dt=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}B(b,c-a-b)=$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 1} F(a,b,c;x) = F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Агар (74) формуладаги интегралда

$$t = \frac{1-s}{1-xs} \qquad \text{ёки} \qquad s = \frac{1-t}{1-xt}$$

алмаштириш бажарсак, интеграл қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt =$$

$$= (1-x)^{c-a-b}\int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}(1-xs)^{-(c-a)}ds =$$

$$= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,\ c;x).$$

Демак,

$$F(a,b,c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,\ c-b,c;x). \tag{75}$$

*Бу тенглик автотрансформация формуласи дейилади.*

$F(a,b,c;x) = F(b,a,c;x)$ тенгликни эътиборга олиб, (74) тенгликни

$$F(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt$$

каби ёзиб оламиз ва интегралда $t = 1-s$ алмаштириш бажарамиз:

$$F(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(1-x)^{-a}\int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}\left(1-\frac{x}{x-1}s\right)^{-a}ds.$$

Бу ердаги интегрални (74) билан таққослаб,

$$F(a,b,c;x) = (1-x)^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{x}{x-1}\right) \tag{76}$$

формулага эга бўламиз. Бундан $c = b$ да

$$F(a,b,b;x) = (1-x)^{-a}$$

тенглик келиб чиқади. Агар $x < 1/2$ бўлса, $|x/(x-1)| < 1$ бўлади. Бунда (76) тенгликнинг ўнг томонидаги гипергеометрик функция, тегишли гипергеометрик қаторнинг йиғиндиси сифатида қаралиши мумкин [1]. Демак, (76) формула $F(a,b,c;x)$ функцияни $-\infty < x < -1$ оралиққа аналитик давом эттиради.

(76) тенгликда $x$ ни $(1-x)$га алмаштириб, унинг бошқа кўринишига эга бўламиз:

$$F(a,b,c;1-x) = x^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{x-1}{x}\right). \tag{77}$$

Гипергеометрик функцияни $-1 \leq x \leq 1$ кесмадан ташқарида аниқлашга хизмат қилувчи бошқа формулаларни ҳам келтириб чиқарайлик.

Аввал $x$ ва $1-x$ аргументли гипергеометрик функциялар орасидаги муносабатни топамиз. $|x| < 1$ ва $|1-x|$ интерваллар кесишмасида (69) тенгламанинг $y_1(x) = F(a,b,c;-x)$ ечими унинг $y_3$ ва $y_4$ ечимлари чизиқли комбинацияси сифатида ифодаланади, яъни

$$F(a,b,c;x) = AF(a,b,a+b-c+1;1-x) +$$

$$+B(1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-x), \qquad c-a-b \notin \mathbb{Z}. \tag{78}$$

Бу ерда $a$, $b$, $c$ параметрларнинг (78) тенгликдаги барча гипергеометрик функциялар маънога эга бўладиган қийматлари қаралади.

$x = 1$ бўлганда (78) тенгламанинг ўнг томони $a$, $b$, $c$ параметрларнинг ихтиёрий қийматларида маънога эга, чап томони чекли бўлиши эса $c-a-b$ нинг ишорасига боғлиқ. Агар $c-a-b > 0$ бўлса, (78) дан $x = 1$ да

$$A = F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{79}$$

келиб чиқади. Агар $c-a-b < 0$ бўлса, (78) нинг чап томонига (75) формулани қўллаб, сўнгра хосил бўлган тенгликни $(1-x)^{a+b-c}$ га кўпайтириб ва $x = 1$ деб

$$B = F(c-a, c-b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \tag{80}$$

эканлигини топамиз.

(79) ва (80) тengликларга асосан (78) тенгликни

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,a+b-c+1,1-x)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-x).$$

$$c-a-b\notin\mathbb{Z} \tag{81}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

(76) нинг ўнг томонига (81) формулани қўллаб, қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(1-x)^{-a}F\left(a,c-b,a-b+1;\frac{1}{1-x}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}(1-x)^{-b}F\left(c-a,b,b-a+1;\frac{1}{1-x}\right),\quad a-b\notin\mathbb{Z}. \tag{82}$$

Агар (82) ва (81) тенгликларнинг ўнг томонига мос равишда (76) ва (77) формулаларни қўлласак,

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)}(-x)^{-a}F\left(a,a-c+1,a-b+1;\frac{1}{x}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(a)}(-x)^{-b}F\left(b,b-c+1,b-a+1;\frac{1}{x}\right),\quad a-b\notin\mathbb{Z}; \tag{83}$$

$$F(a,b,c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}x^{-a}F\left(a,a-c+1,a+b-c+1;\frac{x-1}{x}\right)+$$

$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-c}(1-x)^{c-a-b}F\left(c-a,1-a,c-a-b+1;\frac{x-1}{x}\right),$$

$$c-a-b\notin\mathbb{Z} \tag{84}$$

тенгликлар келиб чиқади.

(81), (82), (83), (84) тенгликлар гипергеометрик функцияни мос равишда $|1-x|<1$, $|1-x|>1$, $|x|>1$, $|(1-x)/x|<1$ тенгсизликлар билан *аниқланувчи оралиқларга аналитик давомини беради.* (81) - одатда *Больц формуласи* деб аталади.

Қуйидаги тенглик $c = a + b$ бўлганда гипергеометрик функциянинг $x = 1$ нуқта атрофидаги хулқини ифодалайди [1]:

$$F(a, b, a+b; 1-x) = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(a, b, 1; x) \ln x +$$

$$+\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2} \times$$

$$\times \left[2 \cdot \frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} - \frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)} - \frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right] x^k.$$

Гипергеометрик функциялар учун қуйидаги тенгликлар ҳам ўринли [1]:

$$F(a, 1-a, c; x) = (1-x)^{c-1} F\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a-1}{2}, c; 4x(1-x)\right),$$

$$F(a, 1-a, c; -x) = (1+x)^{c-1} \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}\right)^{2-2a-2c} \times$$

$$\times F\left[c+a-1, c-1/2, 2c-1; 4\sqrt{x(1+x)} \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}\right)^{-2}\right],$$

$$F\left(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}; x\right) = F\left[a, b, a+b+\frac{1}{2}; 4x(1-x)\right],$$

$$F\left(a, b, a+b+\frac{1}{2}; x\right) = F\left(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)^{-2a} F\left(2a, a-b+\frac{1}{2}, a+b+\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right),$$

$$F\left(a-\frac{1}{2}, a, 2a; x\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)^{1-2a},$$

$$F\left(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(a+b+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}, \quad a+b+\frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \ldots .$$

*Изоҳ.* 2-,3- ва 4-бандда келтирилган формулаларни $\{z\} = \{x + iy\}$ комплекс ўзгарувчи текислигида ҳам қараш мумкин. Бунда баъзи формулаларга қўшимча чекланишлар келиб чиқади [1,6].

**5.Умумлашган гипергеометрик функциялар ва қаторлар.** Гausснинг гипергеометрик функцияси ва қаторини параметрлар сони бўйича умумлаштирувчи ушбу функция (катор) лар

$$_mF_n\left(a_1,a_2,...,a_m;c_1,c_2,...,c_n,x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdot...\cdot(a_m)_k}{(c_1)_k\cdot...\cdot(c_n)_k}\cdot\frac{x^k}{k!}$$

*умумлашган гипергеометрик функция (қатор) лар* деб аталади, бу ерда $a_j,\ b_s\neq 0,-1,-2,....,\ j=\overline{1,m},\ s=\overline{1,n}$. Бу белгилашларга асосан $F\left(a,b,c;x\right)={}_2F_1\left(a,b,c;x\right)$ бўлади.

Амалиётда биз $F\left(a,b,c;x\right)$ функция билан бир қаторда $_1F_1\left(a,c;x\right)$ ва $_2F_2\left(a,b;c,d;x\right)$ функциялардан ҳам фойдаланамиз. Жумладан, бу функциялар учун қуйидаги тенгликлар ўринли [1,10]:

$$\int_0^x z^{\alpha+\gamma-1}\left(x-z\right)^{\delta-1}e^{-cz}\overline{I}_\gamma\left(cz\right)dz=x^{\alpha+\gamma+\delta+1}\frac{\Gamma\left(\alpha+\gamma\right)\Gamma\left(\delta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\gamma+\delta\right)}\times$$

$$\times{}_2F_2\left(\gamma+\frac{1}{2},\alpha+\gamma;2\gamma+1,\alpha+\delta+\gamma;-2cx\right).\quad x,\ \mathrm{Re}\,\delta,\ \mathrm{Re}\left(\alpha+\gamma\right)>0,\tag{85}$$

$$\int_x^{+\infty} z^{2\beta-2}e^{-cz}\overline{I}_{\beta-1}\left(cz\right)dz=\frac{x^{2\beta-1}}{1-2\beta}\,{}_1F_1\left(\beta-1/2;2\beta;-2cx\right),\quad c\geq 0.\ x>0,$$

$$_1F_1\left(a;c;x\right)=e^x\,{}_1F_1\left(c-a;c;-x\right),\tag{86}$$

$$_1F_1\left(\frac{1}{2}+\nu;1+2\nu;2x\right)=e^x\overline{I}_\nu\left(x\right),\tag{87}$$

$$_1F_1\left(a;a;x\right)=e^x.$$

## 5-§. Икки аргументли гипергеометрик функциялар

Бундай функциялар ва қаторлар назарияси жуда кенг ва чуқур ўрганилган бўлиб [ 1,21 ], биз бу ерда улардан олтитаси ҳақида баъзи маълумотларни келтирамиз.

**1. Таърифлари.**

$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!}x^my^n,$$

$$F_2(\alpha;\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n\,m!n!}x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n,$$

$$H_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m(\gamma)_n(\delta)_n}{(\varepsilon)_m\;m!n!}x^m y^n,$$

$$\Xi_2(\alpha,\beta,\gamma;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\,m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<1,$$

$$\mathrm{H}_3(\alpha,\beta,\delta,e;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m\;m!n!}x^m y^n,\qquad |x|<1.$$

Булардан дастлабки тўрттаси Горн функциялари, охирги иккитаси эса *бузилган гипергеометрик функция (қатор) лар* дейилади. $\Xi_2$ - *Гумберт функцияси* деб ҳам аталади.

Бу қаторларнинг яқинлашиш соҳаси қуйидагича:

$$F_1,F_3-\{(x,y):\ 0\le x<1,\ 0\le y<1\};$$

$$F_2-\{(x,y):\ 0\le x<1,\ 0\le y<1-x\};$$

$$H_2-\{(x,y):\ 0\le x<1,\ 0\le y\le 1/2\}\cup\{(x,y):\ 0\le x<1,\ 0\le y<1-x/2\};$$

$$\Xi_2,\mathrm{H}_3-\{(x,y):-1<x<1\,,\ -\infty<y<+\infty\}\,.$$

## 2. Дифференциал тенгламалари.

$$\left.\begin{array}{l} x\,(1-x)\,r + y\,(1-x)\,s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\,p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y\,(1-y)\,t + x\,(1-y)\,s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)\,y]\,q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{array}\right\} F_1$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,(1-x)\,r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\,p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ y\,(1-y)\,t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)\,y]\,q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{array}\right\} F_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,(1-x)\,r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\,p - \alpha\beta z = 0, \\ y\,(1-y)\,t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)\,y]\,q - \alpha'\beta' z = 0; \end{array}\right\} F_3$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,(x-1)\,r - xys + [(\alpha+\beta+1)\,x - \varepsilon]\,p - \beta y q + \alpha\beta z = 0, \\ y\,(y+1)\,t - xs + [1-\alpha+(\gamma+\delta+1)\,y]\,q + \gamma\delta z = 0; \end{array}\right\} H_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,(1-x)\,r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\,p - \alpha\beta z = 0, \\ yt + xs + \gamma q - z = 0; \end{array}\right\} \Xi_2$$

$$\left.\begin{array}{l} x\,(1-x)\,r + xys + [\delta - (\alpha+\beta+1)x]\,p + \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ yt - xs + (1-\alpha)\,q + z = 0. \end{array}\right\} \mathrm{H}_3$$

Бу ерда $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx,}$, $s = z_{xy}$, $t = z_{yy}$.

## 3. $F\,(a, b, c, ; x)$ ва $J_\nu\,(x)$ функциялар бўйича ёйилмалари.

$$F_1\,(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m\,(\beta)_m}{(\gamma)_m\,m!}\; x^m F\,(\alpha+m, \beta', \gamma+m; y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n\,(\beta')_n}{(\gamma)_n\,n!}\; y^n F\,(\alpha+n, \beta, \gamma+n; x),$$

$$F_2\,(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m\,(\beta)_m}{(\gamma)_m\,m!}\; x^m F\,(\alpha+m, \beta', \gamma'; y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n\,(\beta')_n}{(\gamma')_n\,n!}\; y^n F\,(\alpha+n, \beta, \gamma; x),$$

$$F_3\,(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m\,(\beta)_m}{(\gamma)_m\,m!}\; x^m F\,(\alpha', \beta', \gamma+m; y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha')_n (\beta')_n}{(\gamma)_n \, n!} \; y^n F(\alpha, \beta, \gamma + n, x),$$

$$H_2(\alpha. \beta, \gamma, \delta. \varepsilon; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\varepsilon)_m \, m!} \; x^m F(\gamma, \delta, 1 - \alpha - m: -y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\gamma)_n (\delta)_n}{(1 - \alpha)_n \, n!} \; y^n F(\alpha - n, \beta. \varepsilon; x),$$

$$\Xi_2(\alpha. \beta. \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m \, m!} x^m \overline{J}_{\gamma + m - 1}(2i\sqrt{y}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(\gamma)_n \, n!} F(\alpha, \beta, \gamma + n; x),$$

$$\mathrm{H}_3(\alpha, \beta. \delta; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\delta)_m \, m!} x^m \overline{J}_{-\alpha - m}(2\sqrt{y}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 - \alpha)_n} \cdot \frac{y^n}{n!} F(\alpha - n, \beta. \delta; x).$$

### 4. Интеграл кўринишлари.

$$F_1(\alpha. \beta. \beta', \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 \frac{u^{\alpha - 1}(1 - u)^{\gamma - \alpha - 1}}{(1 - ux)^{\beta}(1 - uy)^{\beta'}} du.$$

$$\mathrm{Re}\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0:$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma. \gamma'; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma - \beta)\Gamma(\gamma' - \beta')} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta - 1} v^{\beta' - 1} (1 - u)^{\gamma - \beta - 1} (1 - v)^{\gamma' - \beta' - 1} (1 - ux - vy)^{-\alpha} du dv.$$

$$Re\beta > 0, \quad Re\beta' > 0, \quad \mathrm{Re}(\gamma - \beta) > 0, \quad \mathrm{Re}(\gamma' - \beta') > 0;$$

$$F_3(\alpha. \alpha'. \beta. \beta'. \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma - \beta - \beta')} \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^{1-v} u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux)^{-\alpha} (1-vy)^{-\alpha'} \, du dv,$$

$$Re\beta > 0, \quad Re\beta' > 0, \quad \mathrm{Re}(\gamma - \beta - \beta') > 0;$$

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon; x, y) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\varepsilon-\beta)} \times$$

$$\times \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\varepsilon-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} F[\gamma, \delta, 1-\alpha; y(xu-1)] \, du.$$

$$\mathrm{Re}\varepsilon > \mathrm{Re}\beta > 0;$$

$$\Xi_2(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\gamma-\alpha-1} (1-vx)^{-\beta} \overline{I}_{\gamma-\alpha-1} \left[2\sqrt{y(1-v)}\right] dv,$$

$$\mathrm{Re}\gamma > \mathrm{Re}\alpha > 0;$$

$$\mathrm{H}_3(\alpha, \beta, \delta; x, y) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta-\beta)} \times$$

$$\times \int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\delta-\beta-1} (1-ux)^{-\alpha} \overline{J}_{-\alpha} \left[2\sqrt{y(1-ux)}\right] du,$$

$$Re\delta > Re\beta > 0.$$

### 5. Параметрларнинг хусусий қийматларидаги кўриниши.

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \beta+\beta'; x, y) = (1-y)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta, \beta+\beta'; \frac{x-y}{1-y}\right),$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \beta, \gamma'; x, y) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \beta', \gamma'; \frac{y}{1-x}\right),$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \alpha, \alpha; x, y) = (1-x)^{-\beta} (1-y)^{-\beta'} F\left(\beta, \beta', \alpha; \frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right),$$

$$F_3(\alpha, \gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta, \gamma; x, y) = (1-y)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma; x+y-xy),$$

$$H_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \beta; x, y) = (1-x)^{-\alpha} F[\gamma, \delta, 1-\alpha; y(x-1)],$$

$$\mathrm{H}_3(\alpha, \beta, \beta; x, y) = (1-x)^{-\alpha} \bar{J}_{-\alpha}\left[2\sqrt{y(1-x)}\right].$$

### 6. Ўзгарувчиларнинг хусусий қийматларидаги кўриниши.

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, 1) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')} F(\alpha, \beta, \gamma-\beta'; x), \quad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta') > 0;$$

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; 1, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta', \gamma-\beta; y), \quad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0;$$

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, x) = F(\alpha, \beta+\beta', \gamma; x),$$

$$\mathrm{H}_3(\alpha, \beta, \delta; 1, y) = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)} \, {}_1F_2(\delta-\alpha-\beta, 1-\alpha, \delta-\alpha; -y),$$

$$\mathrm{Re}(\delta-\alpha-\beta) > 0.$$

### 7. Дифференциаллаш формулалари.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial \gamma^n} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) =$$

$$= \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}} F_1(\alpha+m+n, \beta+m, \beta'+n; \gamma+m+n; x, y),$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'; x, y) =$$

$$= \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n} F_2(\alpha+m+n; \beta+m, \beta'+n; \gamma+m, \gamma'+n; x, y),$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y) =$$

$$= \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}} F_3(\alpha+m, \alpha'+n, \beta+m, \beta'+n, \gamma+m+n; x, y).$$

$$\frac{x}{\beta}\frac{\partial}{\partial x} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = F_1(\alpha, \beta+1, \beta', \gamma; x, y) - F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y);$$

$$\frac{y}{\beta'}\frac{\partial}{\partial y}F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = F_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\gamma;x,y) - F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y),$$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\mathrm{H}_3(\alpha,\beta,\delta;x,y) =$$

$$= (-1)^n\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(1-\alpha)_n(\delta)_m}\mathrm{H}_3(\alpha+m-n,\beta+m,\delta+m;x,y),$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x^{\delta-1}\mathrm{H}_3(\alpha,\beta,\delta;x,y)\right] = (-1)^n(1-\delta)_n x^{\delta-n-1}\mathrm{H}_3(\alpha,\beta,\delta-n;x,y),$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[x^{\beta+n-1}\mathrm{H}_3(\alpha,\beta,\beta+n;x,y)\right] = (\beta)_n x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}J_{-\alpha}\left[2\sqrt{y(1-x)}\right].$$

## 8. Қўшни функциялар орасидаги муносабатлар.

$$(\gamma-\beta-\beta'-1)\,F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) + \beta F_1(\alpha,\beta+1,\beta',\gamma;x,y) +$$

$$+\beta' F_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\gamma;x,y) = (\gamma-1)\,F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma-1;x,y),$$

$$(\gamma-\alpha-1)\,F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) + \alpha F_1(\alpha+1,\beta,\beta',\gamma;x,y) =$$

$$= (\gamma-1)\,F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma-1;x,y).$$

$$\alpha F_2(\alpha+1,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y) - \beta F_2(\alpha,\beta+1,\beta',\gamma,\gamma';x,y) -$$

$$-\beta' F_2(\alpha,\beta,\beta'+1,\gamma,\gamma';x,y) = (\alpha-\beta-\beta')\,F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y),$$

$$(\beta/\gamma)\,xF_2(\alpha+1,\beta+1,\beta',\gamma+1,\gamma';x,y) +$$

$$+(\beta'/\gamma')\,yF_2(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\gamma,\gamma'+1;x,y) =$$

$$= F_2(\alpha+1,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y) - F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y),$$

$$\alpha F_3(\alpha+1,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y) - \beta F_3(\alpha,\alpha',\beta+1,\beta',\gamma;x,y) =$$

$$= (\alpha-\beta)\,F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y).$$

$$\alpha' F_3(\alpha,\alpha'+1,\beta,\beta',\gamma;x,y) - \beta' F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta'+1,\gamma;x,y) =$$

$$= (\alpha'-\beta')\,F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y),$$

$$F_3(\alpha+1,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y) - F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y) =$$

$$= (\beta/\gamma)\,xF_3(\alpha+1,\alpha',\beta+1,\beta',\gamma+1;x,y).$$

$$F_3(\alpha,\alpha'+1,\beta,\beta',\gamma;x,y) - F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma;x,y) =$$

$$= (\beta'/\gamma)\,yF_3(\alpha,\alpha'+1,\beta,\beta'+1,\gamma+1;x,y).$$

$$\mathrm{H}_3\left(\alpha,\beta,\delta;x,y\right)-\mathrm{H}_3\left(\alpha,\beta,\delta-1;x,y\right)=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{\delta\left(1-\delta\right)}x\mathrm{H}_3\left(\alpha+1,\beta+1,\delta+1;x,y\right),$$

$$\mathrm{H}_3\left(\alpha,\beta+1,\delta;x,y\right)-\mathrm{H}_3\left(\alpha,\beta,\delta;x,y\right)=\frac{\alpha}{\delta}x\mathrm{H}_3\left(\alpha+1,\beta+1,\delta+1;x,y\right).$$

### 9. Аналитик давом эттириш формулалари.

$$F_1\left(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y\right)=\left(1-x\right)^{-\beta}\left(1-y\right)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\beta,\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{y}{y-1}\right)=$$

$$=\left(1-x\right)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{y-x}{1-x}\right)=$$

$$=\left(1-y\right)^{-\alpha}F_1\left(\alpha,\beta,\gamma-\beta-\beta',\gamma;\frac{y-x}{y-1},\frac{y}{y-1}\right)=$$

$$=\left(1-x\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\left(1-y\right)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma;x,\frac{x-y}{1-y}\right)=$$

$$=\left(1-x\right)^{-\beta}\left(1-y\right)^{\gamma-\alpha-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma-\beta-\beta'.\gamma;\frac{x-y}{x-1},y\right).$$

$$F_2\left(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma';x,y\right)=\left(1-x\right)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\gamma-\beta,\beta',\gamma,\gamma';\frac{x}{x-1},\frac{y}{1-x}\right)=$$

$$=\left(1-y\right)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\beta,\gamma'-\beta',\gamma,\gamma'.\frac{x}{1-y},\frac{y}{y-1}\right)=$$

$$=\left(1-x-y\right)^{-\alpha}F_2\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma'-\beta',\gamma,\gamma';\frac{x}{x+y-1},\frac{y}{x+y-1}\right),$$

$$H_2\left(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon;x.y\right)=\left(1-x\right)^{-\alpha}H_2\left[\alpha,\varepsilon-\beta,\gamma,\delta,\varepsilon;\frac{x}{x-1},y(1-x)\right],$$

$$\mathrm{H}_3\left(\alpha,\beta,\delta;x,y\right)=\left(1-x\right)^{-\alpha}\mathrm{H}_3\left[\alpha,\delta-\beta,\delta;\frac{x}{x-1},y(1-x)\right].$$

*Изоҳ.* Бу ерда қаралган функцияларнинг таърифлари ва келтирилган формулалар ёрдамида яна кўплаб формулалар келтириб чиқариш мумкин.

# ИККИНЧИ БЎЛИМ

# МАХСУС ОПЕРАТОРЛАР

## 1-§. Сингуляр интеграллар

**1. Гёльдер шарти. $H^{\alpha}(\Delta)$ синф.** *$f(x)$ функция $a \leq x \leq b$ кесмада аниқланган бўлсин. Агар $a \leq x \leq b$ кесманинг ихтиёрий иккита $x_1$ ва $x_2$ нуқталари учун*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^{\alpha} \tag{1}$$

*тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $a \leq x \leq b$ кесмада Гёльдер шартини (қисқача, $H^{\alpha}$ шартни) қаноатлантиради дейилади, бундаги $\alpha$, $K$ - мусбат ўзгармас сонлар, шу билан бирга $0 < \alpha \leq 1$. Одатда $K$ - Гёльдер ўзгармаси, $\alpha$ - Гёльдер кўрсаткичи деб аталади.*

Агар $f(x)$ функциянинг $(a, b)$ оралиқда узлуксиз ва чегараланган ҳосиласи мавжуд бўлса, бу функция $[a, b]$ кесмада $H^1$ шартни қаноатлантиради. Ҳақиқатан ҳам, $(a, b)$ оралиқда $f'(x)$ ҳосила узлуксиз бўлганлиги учун, чекли орттирмалар ҳақида теоремага асосан, $[a, b]$ кесмадаги ихтиёрий $x_1$ ва $x_2$ ($x_1 < x_2$ ) нуқталар учун шундай $x_0 \in (x_1, x_2)$ нуқта топиладики,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)\ (x_1 - x_2)$$

тенглик ўринли бўлади. $|f'(x_0)| \leq K$ эканлигини эътиборга олсак, бу тенгликдан дарҳол ушбу

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|$$

тенгсизлик, яъни $H^1$ шартнинг бажарилиши келиб чиқади. Баъзида $H^1$ шартни *Липшиц шарти* деб ҳам юритилади.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада $\alpha > 1$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ўзгармасдир. Ҳақиқатан ҳам, бунда таърифга асосан $[a, b]$ кесмадаги ихтиёрий $x$ , $x_0$ ($x \neq x_0$, $a < x_0 < b$ ) нуқталар учун

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq K |x - x_0|^{\alpha - 1}$$

тенгсизлик ўринли. Бу тенгсизликда $x \to x_0$ да лимитга ўтсак, $f'(x_0) = 0$ тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликда $x_0$ - $(a, b)$ ораликнинг ихтиёрий нуқтаси эканлигини эътиборга олсак, ундан $f(x) \equiv const$ тенглик келиб чиқади.

Очиқ ёки ёпиқ чекли $\Delta$ оралиқда Гёльдер шартини қаноатлантирувчи функциялар учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

$1^0$. Агар $f(x)$ функция $\Delta$ оралиқда $H^\alpha$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу функция $\Delta$ оралиқда ихтиёрий мусбат $\beta$ $(0 < \beta < \alpha)$ сон учун $H^\beta$ шартни қаноатлантиради.

$2^0$. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $\Delta$ оралиқда мос равишда $H^\alpha$ ва $H^\beta$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad f(x)/g(x) \quad (g(x) \neq 0)$$

функциялар $\Delta$ оралиқда $H^\gamma$ шартни қаноатлантиради, бу ерда $\gamma = \min(\alpha, \beta)$.

$3^0$. Агар $f(x)$ функция $\Delta$ оралиқда $H^\alpha$ шартни қаноатлантирса ва $0 < \beta < \alpha$ бўлса, ихтиёрий $x_0 \in \Delta$ нуқта учун $[f(x) - f(x_0)] / |x - x_0|^\beta$ функция $\Delta$ да $H^{\alpha-\beta}$ шартни қаноатлантиради.

Одатда $\Delta$ оралиқда $\alpha$ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи барча функциялар синфини $H^\alpha(\Delta)$ билан белгиланади. Аникки, $H^\alpha(\Delta)$ синфга тегишли ҳар бир функция $\Delta$ да узлуксиз бўлади. Буни ва $1^0$ -тасдиқни эътиборга олган ҳолда $H^0(\Delta) = C(\Delta)$ деб олинади.

Бундан ташқари $\Delta$ оралиқда $k$ - тартибгача узлуксиз ҳосилаларга эга ва $f^{(k)}(x)$ ҳосиласи $\Delta$ оралиқда $H^\alpha$ шартни қаноатлантирувчи функциялар синфи $C^{(k,\alpha)}(\Delta)$ каби белгиланади. Бу белгига асосан $C^{(0,\alpha)}(\Delta)$ - $\Delta$ оралиқда $H^\alpha$ шартни қаноатлантирувчи узлуксиз функциялар синфини билдиради.

**2. Сингуляр интеграллар.** $f(x)$ функция $a \leq x \leq b$ кесмада қаралаётган бўлиб, бу кесманинг $c$ нуқтаси атрофида чегараланмаган, $a \leq x \leq c - \varepsilon_1$, $c + \varepsilon_2 \leq x \leq b$ кесмаларнинг ҳар бирида интегралланувчи бўлсин, бу ерда $\varepsilon_1$ ва $\varepsilon_2$ - етарли кичик мусбат сонлар. Ушбу

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \tag{2}$$

йиғиндини тузамиз. Агар бу йиғинди $\varepsilon_1$ ва $\varepsilon_2$ лар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда нолга интилганда лимитга эга бўлса, биринчи бўлимнинг 1-§ида уктириб ўтилганларга асосан, бу лимит $f(x)$ функциянинг *хосмас интеграли* дейилади, яъни

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \right].$$

(2) йиғинди $\varepsilon_1$ ва $\varepsilon_2$ лар бир-бирига боғлиқ бўлмай нолга интилганда лимитга эга бўлмаслиги, лекин улар бирор муносабат билан боғлиқ бўлиб нолга интилганда лимитга эга бўлиши мумкин.

Мисол учун $f(x) = (x - c)^{-1}$, $a < x$, $c < b$ функцияни текширамиз. (2) йиғиндини тузиб,

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x - c} + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} \frac{dx}{x - c} = \ln \frac{b - c}{c - a} + \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{3}$$

тенгликка эга бўламиз. (3) миқдор $\varepsilon_1$ ва $\varepsilon_2$ ўзаро боғлиқ бўлмай нолга интилганда лимитга эга бўлмайди, чунки бу ҳолда $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ нисбат ихтиёрий ўзгариши мумкин. Агар $\varepsilon_1$ ва $\varepsilon_2$ бир-бирига боғлиқ бўлса, масалан $\varepsilon_1 = k\varepsilon_2$, бунда $k$ - мусбат ўзгармас, у ҳолда (3) йиғинди лимитга эга бўлиб, бу лимит

$$\ln \frac{b - c}{c - a} + \ln k$$

га тенг бўлади. Хусусий ҳолда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ десак,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x - c} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x - c} \right] = \ln \frac{b - c}{c - a}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу мисол асосида қуйидаги таърифни киритамиз:

*$f(x)$ функция $a \le x \le b$ кесмада қаралаётган бўлиб, мусбат $\varepsilon$ сон қандай кичик бўлмасин бу функция $a \le x \le c - \varepsilon$ ва $c + \varepsilon \le x \le b$ кесмаларда интегралланувчи бўлсин. Ушбу лимит (агар у мавжуд бўлса)*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right]$$

*$f(x)$ функциядан $a \le x \le b$ оралиқда олинган интегралнинг Коши маъносидаги бош қиймати дейилади.*

"Интегралнинг бош қиймати"ўрнига кўпинча *сингуляр (махсус) интеграл* деб айтилади.

Одатда сингуляр интегрални ҳам оддий

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

символ билан белгиланади. Сингуляр интеграл баъзи ҳолларда

$$V.P.\int_a^b f(x)\,dx; \qquad \int_a^{\cdot b} f(x)\,dx; \qquad \int_a^{*b} f(x)\,dx$$

символлар билан ҳам белгиланади, бунда $V$ ва $P$ - французча valeur principale сўзларининг биринчи харфлари бўлиб, ўзбекчада "бош қиймат"ни билдиради. Агар оддий (хос ёки хосмас) интеграл мавжуд бўлса, сингуляр интеграл бу оддий интеграл билан устма-уст тушади. (3) формуладан ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} \tag{4}$$

сингуляр интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади.

Энди, юқорида кўрган интегралдан умумийроқ

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx \tag{5}$$

интегрални текширамиз, бунда $\varphi(x)$ - $[a,b]$ кесмада $\alpha$ кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи бирор функция. Бу интегрални

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл хосмас интеграл сифатида мавжуд, чунки Гёльдер шартига асосан

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\right| < \frac{K}{|x-c|^{1-\alpha}},$$

иккинчи интеграл эса (4) билан устма-уст тушади, яъни у сингуляр интегралдир.

Шундай қилиб, $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ кесмада Гёльдер шартини қаноатлантирса, (5) интегралнинг Коши маъносидаги бош қиймати мавжуд бўлиб, у қуйидагига тенг бўлади:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Сингуляр интеграллар учун қуйидаги тасдиқлар ўринли:

$1^0$. Агар $f(t)$ функция $[a,b]$ кесмада Гёльдер шартини қаноатлантирувчи функция бўлса, ихтиёрий $x \in (a,b)$ нуқта учун

$$\frac{d}{dx}\int_a^b \ln|t-x|\, f(t)\,dt = -\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{t-x}$$

тенглик ўринли [18].

$2^0$. Агар $f(t)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз ва $(a,b)$ оралиқда узлуксиз $f'(t)$ ҳосилага эга ($f'(t)$ функция $t \to a$ ва $t \to b$ да бирдан кичик тартибда чексизга интилиши мумкин) бўлса, $[a,b]$ кесманинг ихтиёрий ички $c$ нуқтаси учун ушбу

$$\int_a^b \frac{f(t)\;dt}{t-c} = f(b)\,\ln(b-c) - f(a)\ln(c-a) - \int_a^b f'(t)\ln|t-c|\;dt$$

*бўлаклаб интеграллаш формуласи* ўринли [18].

$3^0$. Агар $f(t,\xi)$ функция $L$ кесмада Гёльдер шартини қаноатлантирса,

$$\int_L \frac{dt}{t-\tau}\int_L \frac{f(t,\xi)}{\xi-t}d\xi = -\pi^2 f(\tau,\tau) + \int_L d\xi \int_L \frac{f(t,\xi)\;dt}{(t-\tau)(\xi-t)}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенглик сингуляр интеграллар учун интеграллаш тартибини алмаштириш қоидасини аниқлаб, уни *Пуанкаре-Бертран формуласи* дейилади. Бу формуладан, хусусий ҳолда, $f(t,\xi)$ функция $t$ га боғлиқ бўлмаганда ***сингуляр интеграллар композицияси*** учун ўринли бўлган

$$\int_L \frac{dt}{t-\tau}\int_L \frac{f(\xi)\;d\xi}{\xi-t} = -\pi^2 f(\tau)$$

формула келиб чиқади [8].

## 2-§. Каср тартибли интеграллар ва ҳосилалар

**1. Абел интеграл тенгламаси.** Ушбу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad 0<\alpha<1 \tag{6}$$

кўринишдаги интеграл тенглама *Абел интеграл тенгламаси* дейилади.

(6) тенглама қуйидаги усулда ечилади. Бу тенгламада $x$ ни $t$ билан, $t$ ни $s$ билан алмаштириб. сўнгра тенгламанинг ҳар икки томонини $(x-t)^{-\alpha}$ ифодага кўпайтирамиз ва $t$ бўйича $a$ дан $x$ гача интеграллаймиз:

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha}\int_a^t \frac{\varphi(s)\,ds}{(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}.$$

Дирихле формуласига кўра интеграллаш тартибини алмаштириб,

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha(t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} \tag{7}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Тенгликнинг чап томонидаги ички интегралда $t = s+\tau(x-s)$ алмаштириш бажарсак,

$$\int_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt =$$

$$= \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = B(\alpha,1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

тенглик келиб чиқади. У ҳолда, (7) га асосан

$$\int_a^x \varphi(s)\,ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{8}$$

Бу тенгликнинг ҳар икки томонини дифференциаллаб, Абел интеграл тенгламасининг ечимини ҳосил қиламиз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\alpha}. \tag{9}$$

Шундай қилиб, агар (6) тенгламанинг ечими мавжуд бўлса, у (9) кўринишда ифодаланар экан. Бу формулани ҳосил қилиш жараёнидан келиб чиқадики, агар ечим мавжуд бўлса, у ягона.

Шу усулда кўрсатиш мумкинки, ушбу

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{10}$$

интеграл тенгламанинг ечими

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\alpha} \tag{11}$$

формула билан аниқланади.

**2. Каср тартибли интеграллар.** Математик анализ курсидан маълумки, $n$ - каррали интеграл учун қуйидаги формула ўринли:

$$\int\limits_a^{x_0} dx_1 \int\limits_a^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_a^{x_{n-1}} \varphi(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^{x_0} (x_0 - t)^{n-1} \varphi(t)dt, \quad n \in N. \tag{12}$$

$(n-1)! = \Gamma(n)$ эканлигини эътиборга олиб, (12) тенгликнинг ўнг томонини $n$ нинг каср қийматлари учун ҳам аниқлаш мумкин.

(12) тенгликка мос равишда каср тартибли интегралларни қуйидаги тартибда аниқлаймиз.

**Таъриф.** $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ $(a < b < +\infty)$ *бўлсин. Ушбу*

$$D_{ax}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\,dt, \qquad \alpha > 0, \tag{13}$$

$$D_{xb}^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t)dt, \qquad \alpha > 0 \tag{14}$$

*кўринишдаги ифодалар $\varphi(x)$ функциянинг $\alpha$ (каср) тартибли (Риман-Лиувилл маъносида) интеграллари дейилади.*

$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)$ ва $D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x)$ функциялар $(a,b)$ оралиқнинг деярли барча нуқталарида аниқланган бўлиб, $L_1(a,b)$ синфга тегишли бўлади.

Бу таърифга асосан (6) ва (10) Абел интеграл тенгламаларини

$$D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x)=f(x), \qquad D_{bx}^{-\alpha}\varphi(x)=f(x) \tag{15}$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Агар $0<\alpha_1,\ \alpha_2<+\infty$ бўлса, деярли ҳамма $x\in(a,b)$ учун

$$D_{ax}^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\alpha_1}f(x)=D_{ax}^{-\alpha_1}D_{ax}^{-\alpha_2}f(x)=D_{ax}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}f(x) \tag{16}$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$D_{ax}^{-\alpha_2}D_{ax}^{-\alpha_1}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}D_{ax}^{-\alpha_2}\int\limits_a^x (x-s)^{\alpha_1-1}f(s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}\int\limits_a^x\left[\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha_1-1}f(s)\,ds\right](x-t)^{\alpha_2-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}\int\limits_a^x f(s)\,ds\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}dt.$$

Охирги ички интегралда $t=s+(x-s)\,\tau$ алмаштириш бажариш натижасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_s^x (x-t)^{\alpha_2-1}(t-s)^{\alpha_1-1}ds=(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}\int\limits_0^1 \tau^{\alpha_1-1}(1-\tau)^{\alpha_2-1}d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}(x-s)^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

Бу эса (16) тенгликнинг тўғрилигини кўрсатади.

Таърифга асосан,

$$D_{ax}^{0}f(x)=f(x) \tag{17}$$

деб ҳисоблаймиз.

## 3. Каср тартибли ҳосилалар.

**Таъриф.** *$\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган бўлсин.*

$$D_{ax}^{\alpha}\ \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1, \tag{18}$$

$$D_{xb}^{\alpha}\ \varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{b}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1 \tag{19}$$

*кўринишдаги ифодалар $\varphi(x)$ функциянинг $\alpha$ (каср) тартибли (Лиувилл маъносидаги) ҳосилалари дейилади.*

Бу таърифга асосан (6) ва (10) Абел интеграл тенгламалари ечимларини берувчи (9) ва (11) тенгликларни мос равишда

$$\varphi(x) = D_{ax}^{\alpha} f(x), \qquad \varphi(x) = D_{xb}^{\alpha} f(x) \tag{20}$$

кўринишида ёзиш мумкин.

Эслатиб ўтамизки, каср тартибли интеграллар ихтиёрий $\alpha > 0$ тартибгача аниқланган. Лекин (18), (19) каср тартибли ҳосилалар фақатгина $0 < \alpha < 1$ бўлганда аниқланган. Каср тартибли ҳосилаларни $\alpha \geq 1$ бўлганда аниқлашга ўтишдан олдин каср тартибли ҳосилалар мавжудлигининг етарли шартини келтирамиз.

**Лемма.** *Агар $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ кесмада абсолют узлуксиз бўлса, $[a, b]$ кесманинг деярли барча нуқталарида $\varphi(x)$ функциянинг каср тартибли ҳосилалари мавжуд бўлиб, қуйидаги формулалар ўринли бўлади:*

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int\limits_{a}^{x}\frac{\varphi'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}\right], \qquad 0<\alpha<1,$$

$$D_{xb}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int\limits_{x}^{b}\frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}\right], \qquad 0<\alpha<1.$$

**Мисол.** $\varphi(x) = (x-a)^{\alpha-1}$ бўлсин. У ҳолда, (18) тенгликка асосан,

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\ \frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha}(t-a)^{\alpha-1}\,dt.$$

Интеграл ўзгарувчисини $t = a + (x - a)\; z$ формула билан алмаштирсак,

$$D^{\alpha}_{ax}\,\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\;\frac{d}{dx}\int\limits_0^1 z^{\alpha-1}\,(1-z)^{-\alpha}\;dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\;\frac{d}{dx}B(\alpha, 1-\alpha) = 0$$

тенглик келиб чиқади. Демак, $\varphi(x) = (x-a)^{\alpha-1}$ функция $\alpha \in (0,1)$ тартибли ҳосила учун ўзгармас сон вазифасини бажаради.

Энди $\alpha \geq 1$ бўлиб, $[\alpha]$ - унинг бутун қисми, $\{\alpha\}$ - эса каср қисми бўлсин. Агар $\alpha$ - бутун сон бўлса, $\alpha$ тартибли ҳосилалар сифатида оддий ҳосилаларни оламиз:

$$D^{\alpha}_{ax} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \qquad D^{\alpha}_{xb} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \dots .$$

Агар $\alpha$ - бутун сон бўлмаса, $\alpha$ тартибли ҳосилаларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{ax}\varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} D^{\{\alpha\}-1}_{ax}\varphi(x),$$

$$D^{\alpha}_{xb}\varphi(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{xb}\varphi(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} D^{\{\alpha\}-1}_{xb}\varphi(x).$$

Демак, умумий холда, $\alpha \geq 1$ бўлганда

$$D^{\alpha}_{ax}\varphi(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D^{\alpha-n}_{ax}\varphi(x), \qquad n = [\alpha] + 1, \tag{21}$$

$$D^{\alpha}_{xb}\varphi(x) = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} D^{\alpha-n}_{xb}\varphi(x), \qquad n = [\alpha] + 1. \tag{22}$$

Одатда $\alpha$ ($\alpha > 0$) каср тартибли интеграллар кўринишида ифодаланувчи функциялар синфини $D^{-\alpha}_{ax}(L_p)$ билан белгиланади, яъни

$$D^{-\alpha}_{ax}\,(L_p) = \left\{f(x) : f(x) = D^{-\alpha}_{ax}\varphi(x)\ ,\ \ \varphi(x) \in L_p(a,b)\,,\ \ 1 \leq p < \infty\right\}.$$

Қуйидаги теорема ўринли.

**Теорема.** $\alpha > 0$ *бўлсин. У холда*

$$D_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{-\alpha}\varphi(x) = \varphi(x), \qquad D_{xb}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}\varphi(x) = \varphi(x) \tag{23}$$

*тенгликлар барча* $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ *функциялар учун,*

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x), \qquad D_{xb}^{-\alpha}D_{xb}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x) \tag{24}$$

*тенгликлар эса мос равишда барча*

$$\varphi(x) \in D_{ax}^{-\alpha}(L_1), \qquad \varphi(x) \in D_{xb}^{-\alpha}(L_1)$$

*функциялар учун бажарилади.*

Агар охирги шартлар ўрнига $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ бўлса, (24) тенгликлар умуман олганда нотўғри бўлади ва, масалан, биринчиси қуйидаги формула билан алмашади [9].

$$D_{ax}^{-\alpha}D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}\varphi_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a),$$

бу ерда $n = [\alpha] + 1$, $\varphi_{n-\alpha}(x) = D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x)$.

Демак, Абел интеграл тенгламаларини ва уларнинг ечимларини ифодаловчи (15) ва (20) тенгликлар билан аниқланган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни мос равишда (20) ва (15) тенгликларга қўйиш учун юқоридаги теорема шартлари бажарилиши зарур экан.

## 3-§. Каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ва уларнинг баъзи хоссалари

Ўтган параграфда функциянинг ихтиёрий каср ва бутун тартибли интегралига ва ҳосиласига таъриф бердик. Энди улар ёрдамида қуйидаги интегро-дифференциал операторларни киритамиз ва ўрганамиз:

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_a^x (x-t)^{-\alpha-1}\varphi(t)dt, & \text{агар} \quad \alpha < 0 \quad \text{бўлса}, \\ \varphi(x), & \text{агар} \quad \alpha = 0 \quad \text{бўлса}, \\ \dfrac{d^n}{dx^n}D_{ax}^{\alpha-n}\varphi(x), & \text{агар} \quad \alpha > 0 \quad \text{бўлса}, \end{cases}$$

$$D^{\alpha}_{xb}\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_x^b (t-x)^{-\alpha-1}\varphi(t)dt, & \text{агар } \alpha<0 \text{ бўлса},\\ \varphi(x), & \text{агар } \alpha=0 \text{ бўлса},\\ (-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}D^{\alpha-n}_{xb}\varphi(x), & \text{агар } \alpha>0 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

бу ерда $n=[\alpha]+1$.

4-§ да келтирилган теоремадан келиб чиқадики, $\alpha>0$ да $L_1(a,b)$ синфда $D^{\alpha}_{ax}$ оператор $D^{-\alpha}_{ax}$ операторга, $D^{-\alpha}_{ax}(L_1)$ синфда эса $D^{-\alpha}_{ax}$ оператор $D^{\alpha}_{ax}$ операторга тескаридир. Бундан ташқари бу операторлар қуйидаги хоссаларга ҳам эга.

1) Агар $0<\alpha,\beta<1$ ва $(x-a)^{-\alpha}f(x)$, $(x-a)^{-\beta}f(x)\in L_1(a,b)$ бўлса, у ҳолда деярли ҳамма $x\in(a,b)$ учун

$$D^{-\beta}_{ax}(x-a)^{-\beta}D^{-\alpha}_{ax}(x-a)^{-\alpha}f(x)=$$

$$=D^{-\alpha}_{ax}(x-a)^{-\alpha}D^{-\beta}_{ax}(x-a)^{-\beta}f(x) \qquad (25)$$

муносабат ўринли бўлади.

Таърифга асосан операторларнинг ёйилмасини қўйиб ва интеграллаш тартибини ўзгартириш ҳақидаги Дирихле формуласини қўлласак.

$$D^{-\beta}_{ax}(x-a)^{-\beta}D^{-\alpha}_{ax}(x-a)^{-\alpha}f(x)=$$

$$=D^{-\beta}_{ax}(x-a)^{-\beta}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-a)^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}ds\int_a^s (t-a)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (t-a)^{-\alpha}f(t)\,dt\int_t^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}(s-t)^{\alpha-1}ds$$

тенглик ҳосил бўлади.

Ички интегралда $s=t+(x-t)\xi$ алмаштириш бажариб, гипергеометрик функциянинг интеграл кўринишидан фойдаланамиз:

$$\int_t^x (s-a)^{-\beta}(x-s)^{\beta-1}(s-t)^{\alpha-1}ds=$$

$$= (t-a)^{-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}\int\limits_0^1 \xi^{\alpha-1}(1-\xi)^{\beta-1}\left(1-\frac{t-x}{t-a}\xi\right)^{-\beta} d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta,\frac{t-x}{t-a}\right).$$

Шундай қилиб,

$$D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{-\beta}D_{ax}^{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}f(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int\limits_a^x (t-a)^{-\alpha-\beta}(x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)\,F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta,\frac{t-x}{t-a}\right)dt.$$

Бу тенгликдан, гипергеометрик функция биринчи икки параметрга нисбатан симметрик бўлгани учун, (25) айният келиб чиқади.

2) Агар $0 < 2\alpha < 1$ ва $(x-a)^{-\alpha}f(x)$, $(b-x)^{-\alpha}f(x) \in L_1(a,b)$ бўлса, у ҳолда деярли ҳамма $x \in (a,b)$ учун қуйидаги айниятлар ўринли бўлади:

$$D_{ax}^{\alpha}(x-a)^{2\alpha-1}D_{ax}^{\alpha-1}(x-a)^{-\alpha}f(x) = (x-a)^{\alpha-1}D_{ax}^{2\alpha-1}f(x), \quad (26_1)$$

$$D_{xb}^{\alpha}(b-x)^{2\alpha-1}D_{xb}^{\alpha-1}(b-x)^{-\alpha}f(x) = (b-x)^{\alpha-1}D_{xb}^{2\alpha-1}f(x). \quad (26_2)$$

$(26_1)$ тенгликнинг чап томонини $g(x)$ орқали белгилаб, (13) ва (18) формулаларга асосан

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (x-t)^{-\alpha}(t-a)^{2\alpha-1}dt \times$$

$$\times \int\limits_a^t (s-a)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}f(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (s-a)^{-\alpha}f(s)\,ds\int\limits_s^x (x-t)^{-\alpha}(t-s)^{-\alpha}(t-a)^{2\alpha-1}dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (s-a)^{\alpha-1}(x-s)^{1-2\alpha}f(s)\,ds \times$$

$$\times \int\limits_0^1 \xi^{-\alpha}(1-\xi)^{-\alpha}\left(1-\frac{s-x}{s-a}\xi\right)^{2\alpha-1} d\xi = = \frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)} \times$$

$$\times \frac{d}{dx}\int\limits_a^x (s-a)^{\alpha-1}(x-s)^{1-2\alpha} f(s)\, F\left(1-\alpha, 1-2\alpha, 2-2\alpha, \frac{s-x}{s-a}\right) ds$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан,

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-b} F\left(c-a, b, c; \frac{z}{z-1}\right)$$

формулани қўллаб,

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(2-2\alpha)} \times$$

$$\times \frac{d}{dx}\int\limits_a^x (s-a)^{-\alpha}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{1-2\alpha} F\left(1-\alpha, 1-2\alpha, 2-2\alpha, \frac{x-s}{x-a}\right) f(s)\, ds$$

тенгликка келамиз. Энди

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{1-2\alpha} F\left(1-\alpha, 1-2\alpha, 2-2\alpha, \frac{x-s}{x-a}\right) =$$

$$= (1-2\alpha)\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{-2\alpha} F\left(1-\alpha, 2-2\alpha, 2-2\alpha, \frac{x-s}{x-a}\right)\frac{s-a}{(x-s)^2},$$

$$F(a,b,b;x) = (1-x)^{-a},$$

$$\Gamma(2-2a) = (1-2a)\,\Gamma(1-2a)$$

муносабатлардан фойдалансак, ушбу

$$g(x) = \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(1-2\alpha)}\int\limits_a^x (x-s)^{-2\alpha} f(s)\, ds = (x-a)^{\alpha-1} D_{ax}^{2\alpha-1} f(x)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $(26_1)$ айният исботланди.

$(26_2)$ айният ҳам шунга ўхшаш исботланади.

3) Агар $0 < 2\beta < 1$ ва $(x-a)^{\beta-1} f(x)$, $(b-x)^{\beta-1} f(x) \in L_1(a,b)$ бўлса, у ҳолда деярли барча $x \in (a,b)$ учун қуйидаги айниятлар ўринли бўлади:

$$D_{ax}^{1-\beta}(x-a)^{1-2\beta} D_{ax}^{-\beta}(x-a)^{\beta-1} f(x) = (x-a)^{-\beta} D_{ax}^{1-2\beta} f(x), \qquad (27_1)$$

$$D_{bx}^{1-\beta}\left(b-x\right)^{1-2\beta}D_{bx}^{-\beta}\left(b-x\right)^{\beta-1}f\left(x\right)=\left(b-x\right)^{-\beta}D_{bx}^{1-2\beta}f\left(x\right). \qquad (27_2)$$

$(27_1)$ тенгликнинг чап томонини $q\left(x\right)$ орқали белгилаб, $(26_1)$ айниятни исботидаги каби

$$q\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2\beta\right)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\left(s-a\right)^{\beta-1}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{2\beta-1}F\left(2\beta-1,\beta,2\beta;\frac{x-s}{x-a}\right)f\left(s\right)ds$$

тенгликка эга бўламиз.

Қуйидаги функцияни қарайлик:

$$q_\varepsilon\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2\beta\right)}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\left(s-a\right)^{\beta-1}\left(\frac{x-s}{x-a}\right)^{2\beta-1}F\left(2\beta-1,\beta,2\beta;\frac{x-s}{x-a}\right)f\left(s\right)ds.$$

Бу ерда дифференциаллаш амалини бажарамиз:

$$q_\varepsilon\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2\beta\right)}\left(x-a-\varepsilon\right)^{\beta-1}\left(\frac{\varepsilon}{x-a}\right)^{2\beta-1}F\left(2\beta-1,\beta,2\beta;\frac{\varepsilon}{x-a}\right)\times$$

$$\times f\left(x-\varepsilon\right)+\frac{2\beta-1}{\Gamma\left(2\beta\right)}\left(x-a\right)^{-\beta}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\left(x-s\right)^{2\beta-2}f\left(s\right)ds.$$

Текширилиши қийин бўлмаган ушбу

$$\left(2\beta-1\right)\int\limits_a^{x-\varepsilon}\left(x-s\right)^{2\beta-2}f\left(s\right)ds=$$

$$=\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}\left(x-s\right)^{2\beta-1}f\left(s\right)ds-\varepsilon^{2\beta-1}f\left(x-\varepsilon\right)$$

тенгликни инобатга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$q_\varepsilon\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(2\beta\right)}\varepsilon^{2\beta-1}\left(x-a\right)^{-\beta}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{x-a}{x-a-\varepsilon}\right)^{1-\beta}F\left(2\beta-1,\beta,2\beta;\frac{\varepsilon}{x-a}\right)-1\right]f(x-\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2\beta)}(x-a)^{-\beta}\frac{d}{dx}\int\limits_a^{x-\varepsilon}(x-s)^{2\beta-1}f(s)\,ds.$$

Бу ерда $\varepsilon\to0$ да лимитга ўтсак,

$$q(x)=\lim_{\varepsilon\to0}q_\varepsilon(x)=(x-a)^{-\beta}D_{ax}^{1-2\beta}f(x)$$

тенглик келиб чиқади. $(27_1)$ айният исботланди.

$(27_2)$ айният ҳам шу каби исботланади.

4) $f(x)\in C^{(0,\gamma)}(a,b)$, $0<\gamma\leq1$ ва $0<\alpha<1$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$D_{ax}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=\cos(\alpha\pi)\,f(x)+\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_a^b\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(t)\,dt}{t-x},\qquad(28_1)$$

$$D_{xb}^{\alpha}D_{ax}^{-\alpha}f(x)=\cos(\alpha\pi)\,f(x)-\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_a^b\left(\frac{b-t}{b-x}\right)^{\alpha}\frac{f(t)\,dt}{t-x}\qquad(28_2)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, (18) ва (14) тенгликларга асосан,

$$p(x)=D_{ax}^{\alpha}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=\frac{d}{dx}D_{ax}^{-(1-\alpha)}D_{xb}^{-\alpha}f(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x(x-t)^{-\alpha}dt\int\limits_t^b(s-t)^{\alpha-1}f(s)\,ds=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\int\limits_a^x(x-t)^{-\alpha}dt\left[\int\limits_t^x(s-t)^{\alpha-1}f(s)\,ds+\int\limits_x^b(s-t)^{\alpha-1}f(x)\,ds\right].$$

Бу ерда биринчи жуфт интегралга Дирихле формуласини қўллаймиз, иккинчисининг эса ўринларини алмаштирамиз, у ҳолда

$$p(x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\int\limits_a^x f(s)\;ds\int\limits_a^s(x-t)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}dt+\right.$$

$$+\int_x^b f(s)\,ds\int_a^x (x-t)^{-\alpha}(s-t)^{\alpha-1}\,dt\Bigg].$$

Ички интегралларда $\xi = (s-t)/(x-t)$ алмаштиришни бажариб. қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$p(x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{d}{dx}\Bigg[\int_a^x f(s)\,ds\int_a^{(s-a)/(x-a)}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi-$$

$$-\int_x^b f(s)\,ds\int_{(s-a)/(x-a)}^{+\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi\Bigg].$$

Ушбу

$$p_\varepsilon(x)=\int_a^{x-\varepsilon} f(s)\,ds\int_0^{(s-a)/(x-a)}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi-\int_{x+\varepsilon}^b f(s)\,ds\int_{(s-a)/(x-a)}^{+\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi$$

интегрални қараймиз ва $x$ бўйича дифференциаллаймиз:

$$p'_\varepsilon(x)=f(x-\varepsilon)\int_0^{(x-\varepsilon-a)/(x-a)}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi+f(x+\varepsilon)\int_{(x+\varepsilon-a)/(x-a)}^{+\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi+$$

$$+\int_a^{x-\varepsilon}\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(s)\,ds}{s-x}+\int_{x+\varepsilon}^b\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(s)\,ds}{s-x}.$$

Бу тенгликни этиборга олсак,

$$p(x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}p'_\varepsilon(x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}f(x)\int_0^{+\infty}\frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\,d\xi+$$

$$+\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_a^b\left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha}\frac{f(s)\,ds}{s-x}.$$

Маълумки,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\xi^{\alpha-1}}{1-\xi}\, d\xi = \pi\, ctg\,(\alpha\pi)\,.$$

Бунга асосан, аввалги тенглик

$$p\,(x) = \cos\,(\alpha\pi)\, f\,(x) + \frac{\sin\,(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_a^b \left(\frac{s-a}{x-a}\right)^{\alpha} \frac{f\,(s)\, ds}{s-x}$$

кўринишга келади.

Бундан $(28_1)$ тенглик келиб чиқади.

$(28_2)$ тенглик ҳам худди шундай исботланади.

5) Агар $v\,(x) \in C^{(0,\gamma)}\,(-1,1)$, $0 < \gamma \leq 1$, $0 < 2\beta < 1$ бўлса, у ҳолда қуйидаги айниятлар ўринли бўлади:

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{-1}^{x} (x-\xi)^{2\beta-1}\, d\xi \int\limits_{-1}^{1} \left[\,|\xi - t\,|^{-2\beta} - (1-\xi\, t)^{-2\beta}\right]\; v\,(t)\, dt =$$

$$= \pi tg\,(\beta\pi)\, v\,(x) + \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right) v\,(t)\, dt, \qquad (29_1)$$

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{x}^{1} (\xi - x)^{2\beta-1}\, d\xi \int\limits_{-1}^{1} \left[\,|\xi - t|^{-2\beta} - (1-\xi t)^{-2\beta}\right]\; v\,(t)\, dt =$$

$$= -\pi\, tg\,(\beta\,\pi)\; v\,(x) + \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{1-xt}\right) v\,(t)\, dt. \qquad (29_2)$$

Ушбу ифодани қараймиз:

$$l_1\,(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_{-1}^{x} (x-\xi)^{2\beta-1}\, d\xi \int\limits_{-1}^{1} |\xi - t|^{-2\beta}\; v\,(t)\;\; dt =$$

$$= \frac{d}{dx} \left[ \int\limits_{-1}^{x} (x-\xi)^{2\beta-1}\, d\xi \int\limits_{-1}^{\xi} (\xi - t)^{-2\beta} v\,(t)\, dt + \right.$$

$$+\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}\,d\xi\int_{\xi}^{1}(t-\xi)^{-2\beta}v(t)\,dt\Bigg] =$$

$$=\Gamma(2\beta)\Gamma(1-2\beta)\left[\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-2\beta}D_{-1x}^{2\beta-1}v(x)+\frac{d}{dx}D_{-1x}^{-2\beta}D_{x1}^{2\beta-1}v(x)\right].$$

(18), (23) ва $\Gamma(2\beta)\,\Gamma(1-2\beta)=\pi/\sin(2\beta\pi)$ тенгликларга асосан,

$$l_1(x)=\frac{\pi}{\sin(2\beta\pi)}\left[v(x)+D_{-1x}^{1-2\beta}D_{x1}^{-(1-2\beta)}v(x)\right].$$

Бу тенгликдан ($28_1$) айниятга асосан ($a=-1$, $b=1$, $\alpha=1-2\beta$),

$$l_1(x)=\frac{\pi}{\sin(2\beta\pi)}\left\{v(x)+\cos\left[(1-2\beta)\pi\right]v(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\left[(1-2\beta)\pi\right]}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{v(t)}{t-x}dt\right\}=$$

$$=\pi\,tg\,(\beta\pi)\,v(x)+\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{v(t)}{t-x}dt \qquad (30)$$

формула келиб чиқади. Энди

$$l_2(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}d\xi\int_{-1}^{1}(1-\xi\,t)^{-2\beta}v(t)\,dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}v(t)\,dt\int_{-1}^{x}(x-\xi)^{2\beta-1}(1-\xi\,t)^{-2\beta}\,dt$$

функцияни текширамиз. $x\in(-1,1)$ бўлганда $s=(x-\xi)/(1-\xi t)$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда,

$$l_2(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}v(t)\;dt\int_{0}^{(1+x)/(1+t)}\frac{s^{2\beta-1}}{1-ts}ds=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{1-2\beta}\frac{v(t)\;dt}{1-xt}. \qquad (31)$$

(30) ва (31) тенгликлардан ($29_1$) айният келиб чиқади.

($29_2$) айният ҳам шунга ўхшаш исботланади.

**6) $D^{\alpha}_{ax}$ $(0 < \alpha < 1)$ оператор учун экстремум принципи.** $[a, b]$ *кесмада* $\omega(t)$ *- камаймайдиган мусбат узлуксиз функция ва* $f(t)$ *- узлуксиз функция бўлсин. Агар* $[a, b]$ *кесманинг* $t = x$, $a < x < b$, *нуқтасида* $f(t)$ *функция мусбат максимум (манфий минимум)га эришса ва бу нуқтанинг ихтиёрий кичик атрофида* $\omega(t)\ f(t)$ *кўпайтма* $\gamma(> \alpha)$ *кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда* $D^{\alpha}_{cx}\omega f > 0$ $(D^{\alpha}_{ax}\omega f < 0)$ *бўлади.*

Ҳақиқатан ҳам,

$$\Gamma(1-\alpha)\, D^{\alpha}_{ax}\omega f = \Gamma(1-\alpha)\, \frac{d}{dx}\left[D^{-(1-\alpha)}_{ax}\omega f\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x} \frac{\omega(t)\, f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t) f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t)\, f(t) - \omega(x)\, f(x)}{(x-t)^{\alpha}}dt + \frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{\omega(x)\, f(x)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\omega(x-\varepsilon)\, f(x-\varepsilon) - \omega(x)\, f(x)}{\varepsilon^{\alpha}} - \int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{[\omega(x)\, f(x)]'}{(x-t)^{\alpha}}dt - \right.$$

$$-\alpha\int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{\omega(t)\, f(t) - \omega(x)\, f(x)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt + \frac{\omega(x)\, f(x)}{\varepsilon^{\alpha}} +$$

$$\left. + \int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{[\omega(x)\, f(x)]'}{(x-t)^{\alpha}}dt - \alpha\omega(x) f(x)\int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}}\right\}. \qquad (32)$$

Энди

$$\int\limits_{a}^{x-\varepsilon}\frac{dt}{(x-t)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha\varepsilon^{\alpha}} - \frac{1}{\alpha(x-a)^{\alpha}}$$

тенгликни эътиборга олиб ва ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, сўнгра $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтсак, (32) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Gamma(1-\alpha)\, D^{\alpha}_{ax}\omega f = \frac{\omega(x)\, f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\omega(x)\, f(x) - \omega(t)\, f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt +$$

$$+\alpha\int\limits_a^{x_0}\frac{\omega(x)f(x)-\omega(t)f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}dt, \tag{33}$$

бу ерда $x_0\in(x,a)$ бўлиб, $x$ га етарлича яқин сон.

(33) айниятдан юқорида баён қилинган экстремум принципи дарҳол келиб чиқади.

Агар $\omega(t)$ функция $[a,b]$ кесмада ўсмайдиган мусбат ва узлуксиз бўлса, исботланган экстремум принципида айтилган фикр $D_{xb}^{\alpha}$ оператор учун ҳам ўринли бўлади.

7) Каср тартибли интеграл операторлар учун қуйидаги тасдиқлар ҳам ўринли [18]:

$1^0$. Агар $p>1$, $(1/p)<\alpha<1+(1/p)$ ёки $p=1$, $1\le\alpha<2$ бўлиб, $f(x)\in L_p(a,b)$ бўлса, у ҳолда $D_{ax}^{-\alpha}f(x)$ функция $(a,b)$ интервалда $\alpha-(1/p)$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради;

$2^0$. Агар $\gamma\ge0$, $\alpha>0$, $\gamma+\alpha<1$ ва $f(x)$ $(a,b)$ интервалда $\gamma$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантирувчи ҳамда етарли кичик $x-a$ лар учун $f(x)=O\left((x-a)^{\gamma}\right)$ тенгликни қаноатлантирувчи функция бўлса, у холда $D_{ax}^{-\alpha}f(x)$ функция $(a,b)$ интервалда $\gamma+\alpha$ кўрсаткич билан Гёльдер шартини қаноатлантиради ва етарли кичик $x-a$ лар учун $D_{ax}^{-\alpha}f(x)=O\left((x-a)^{\gamma+\alpha}\right)$ тенглик ўринли бўлади.

$3^0$. Агар $g(x)\in C^{(0,\gamma)}[a,b]$ бўлса, у холда $g(x)=g(a)+D_{ax}^{-\alpha}f(x)$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $f(x)\in C^{(0,\gamma-\alpha)}(a,b)$, $0<\alpha<\gamma\le1$.

Одатда $2^0$ хосса *Харди-Литтльвуд теоремаси* дейилади.

## 4-§. $A_{kx}^{s,\lambda}$, $B_{kx}^{s,\lambda}$ ва $C_{kx}^{s,\lambda}$ операторлар ва уларнинг хоссалари

Фараз қилайлик, $f(x)\in C(m,n)\cap L_1(m,n)$, $g(x)\in C^1(m,n)\cap L_1(m,n)$, $q(x)\in C^{(0,\alpha)}(m,n)\cap L_1(m,n)$, $\alpha>1-2\beta$ ва $m<n$, $k\in[m,n]$, $x\in(m,n)$ бўлсин.

Қуйидаги операторларни киритайлик [14,22]:

$$A_{kx}^{s,\lambda}[f(x)]=f(x)-\int\limits_k^x f(t)\left(\frac{t-k}{x-k}\right)^s\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}\right]dt,$$

$$B_{kx}^{s,\lambda}[f(x)]=f(x)+\int\limits_k^x f(t)\left(\frac{x-k}{t-k}\right)^{1-s}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(t-k)(t-x)}\right]dt,$$

$$C^{0,\lambda}_{kx}\left[g\left(x\right)\right]=sign\left(x-k\right)\left\{\frac{d}{dx}g\left(x\right)+\frac{1}{2}\lambda^{2}\int\limits_{k}^{x}g\left(t\right)\bar{J}_{1}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt\right\},$$

$$C^{1,\lambda}_{kx}\left[q\left(x\right)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(2\beta\right)}\frac{d}{dx}\int\limits_{k}^{x}q\left(t\right)|x-t|^{2\beta-1}\bar{J}_{\beta}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt+$$

$$+\frac{\lambda^{2}sign\left(x-k\right)}{2\left(1+\beta\right)\Gamma\left(1+2\beta\right)}\int\limits_{k}^{x}q\left(t\right)|x-t|^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}\left[\lambda\left(x-t\right)\right]dt.$$

бу ерда $s=\overline{0,1}$.

Қилинган фаразларда $A^{s,\lambda}_{kx}\left[f\left(x\right)\right]$, $B^{s,\lambda}_{kx}\left[f\left(x\right)\right]$, $C^{s,\lambda}_{kx}\left[f\left(x\right)\right]$ $\left(s=\overline{0,1}\right)$ функциялар $(m,n)$ оралиқда мавжуд бўлади ва $C\left(m,n\right)$ синфга қарашли бўлади.

Киритилган операторлар

$$u_{xx}-u_{yy}+\lambda^{2}u=0,$$

$$|y|^{m}u_{xx}-u_{yy}+\lambda^{2}|y|^{m}u=0,$$

$$|y|^{m}u_{xx}-|x|^{n}u_{yy}+\lambda^{2}|x|^{n}|y|^{m}u=0$$

тенгламалар учун коррект масалалар қўйишда ва текширишда кенг фойдаланилади. Шунинг учун уларнинг хоссаларини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга.

$A^{s,\lambda}_{kx}$, $B^{s,\lambda}_{kx}$ ва $C^{s,\lambda}_{kx}$ $\left(s=\overline{0,1}\right)$ операторларнинг таърифидан бевосита

$$A^{s,0}_{kx}\equiv I,\qquad B^{s,0}_{kx}\equiv I\qquad\left(s=\overline{0,1}\right),$$

$$C^{0,0}_{kx}\equiv sign\left(x-k\right)\cdot\frac{d}{dx},\qquad C^{1,0}_{kx}\equiv D^{1-2\beta}_{kx}$$

тengликлар келиб чиқади, бу ерда $I$ - бирлик оператор, $D^{1-2\beta}_{kx}$ эса каср тартибли дифференциал оператор.

Бундан ташқари, агар $q\left(x\right)\in C^{1}\left(m,n\right)\cap L_{1}\left(m,n\right)$ бўлса,

$$\lim_{\beta\to0}C^{1,\lambda}_{kx}\left[q\left(x\right)\right]=C^{0,\lambda}_{kx}\left[q\left(x\right)\right]\tag{34}$$

тенглик ўринли бўлади.

Буни исботлаймиз. Шу мақсадда $C_{kx}^{1,\lambda}$ операторни

$$C_{kx}^{1,\lambda}[q(x)] \equiv \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_k^x q(t)|x-t|^{2\beta-1} \left\{ \bar{J}_\beta \left[ \lambda(x-t) \right] - 1 \right\} dt +$$

$$+D_{kx}^{1-2\beta} \left[ q\left( x \right) \right] + \frac{\lambda^2 sign(x-k)}{2(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)} \int_k^x q(t)|x-t|^{2\beta} \bar{J}_{\beta+1} \left[ \lambda(x-t) \right] dt \quad (35)$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$$\bar{J}_\beta \left[ \lambda \left( x-t \right) \right] - 1 = \left( x-t^2 \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -1 \right)^n \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{2n} \frac{\left( x-t \right)^{2(n-1)}}{n!} \cdot \frac{\Gamma\left( \beta+1 \right)}{\Gamma\left( \beta+n+1 \right)}$$

функциянинг $x$ бўйича хосиласи $(m. n)$ ораликда мавжуд ва ихтиёрий чекли $x$, $t$, $\lambda$. $\beta$ лар учун, хусусан, $\beta = 0$ учун ҳам чегараланган.

Буни ва $\lim\limits_{\beta \to 0} \Gamma\left( 2\beta \right) = +\infty$ ни эътиборга олсак, (35) даги биринчи кўшилувчининг $\beta \to 0$ даги лимити нолга тенг. Бу хулосани, $\lim\limits_{\beta \to 0} \Gamma(1+2\beta) = 1$ ва $D_{kx}^{1} \left[ q\left( x \right) \right] = sign\left( x-k \right) \dfrac{d}{dx} q\left( x \right)$ тенгликларни инобатга олсак, (35) дан $\beta \to 0$ да (34) тенглик келиб чиқади.

$C_{kx}^{1,\lambda}$ операторни бошқачароқ кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

Шу мақсадда уни қуйидагича ёзиб олайлик:

$$C_{kx}^{1,\lambda}[q(x)] \equiv \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_k^x \frac{\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]}{|x-t|^{1-2\beta}} q(t)dt+$$

$$\frac{\lambda^2 \mathrm{sign}(x-k)}{4\beta(\beta+1)\Gamma(2\beta)} \int_k^x |x-t|^{2\beta} \overline{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]q(t)dt + l(x,y). \qquad (36)$$

бу ерда

$$l(x.y) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_k^x \frac{\overline{J}_\beta[\lambda(x-t)] - \overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]}{|x-t|^{1-2\beta}} q(t)dt.$$

текширилиши қийин бўлмаган

$$J_{\beta-1}\left( z \right) - \bar{J}_\beta\left( z \right) = -\left[ z^2/4\beta\left( \beta+1 \right) \right] \bar{J}_{\beta+1}\left( z \right) \qquad (37)$$

тенгликка асосан,

$$l(x,y)=\frac{\lambda^2}{4\beta(1+\beta)\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_k^x|x-t|^{1+2\beta}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]q(t)dt.$$

Дифференциаллаш амалини бажариб ва

$$\bar{J}'_\beta(z)=-[z/(2\beta+2)]\,\bar{J}_{\beta+1}(z) \tag{38}$$

тенгликни эътиборга олиб, топамиз:

$$l(x,y)=\frac{\lambda^2(1+2\beta)\mathrm{sign}(x-k)}{4\beta(\beta+1)\Gamma(2\beta)}\int\limits_k^x|x-t|^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]q(t)dt-$$

$$-\frac{\lambda^2}{4\beta(\beta+1)\Gamma(2\beta)}\int\limits_k^x|x-t|^{1+2\beta}\frac{\lambda^2(x-t)}{2(\beta+2)}\bar{J}_{\beta+2}[\lambda(x-t)]q(t)dt.$$

Бу ердаги $\bar{J}_{\beta+2}[\lambda(x-t)]$ функцияга (37) формулани қўллаймиз:

$$l(x,y)=\frac{\lambda^2(1+2\beta)\mathrm{sign}(x-k)}{4\beta(\beta+1)\Gamma(2\beta)}\int\limits_k^x|x-t|^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]q(t)dt+$$

$$+\frac{\lambda^2\mathrm{sign}(x-k)}{2\beta\Gamma(2\beta)}\int\limits_k^x|x-t|^{2\beta}\left\{\bar{J}_\beta[\lambda(x-t)]-\bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]\right\}q(t)dt.$$

Буни (36) га қўйиб, $C_{kx}^{1,\lambda}$ операторнинг иккинчи кўринишига эга бўламиз:

$$C_{kx}^{1,\lambda}[q(x)]=\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_k^x\frac{\bar{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]q(t)}{|x-t|^{1-2\beta}}dt+$$

$$+\frac{\lambda^2\mathrm{sign}(x-k)}{\Gamma(1+2\beta)}\int\limits_k^x|x-t|^{2\beta}\bar{J}_\beta[\lambda(x-t)]q(t)dt. \tag{39}$$

**1-теорема.** *Ихтиёрий* $f(x)\in C(m,n)\cap L_1(m,n)$ *ва* $k\in[m,n]$, $x\in(m,n)$ *учун*

$$A_{kx}^{s,\lambda}\left\{B_{kx}^{s,\lambda}[f(x)]\right\}=f(x),\quad B_{kx}^{s,\lambda}\left\{A_{kx}^{s,\lambda}[f(x)]\right\}=f(x),\quad s=\overline{0,1}. \tag{40}$$

*тенгликлар ўринли, яъни $C(m,n)\cap L_1(m,n)$ синфда $A^{s,\lambda}_{kx}$ ва $B^{s,\lambda}_{kx}$ ўзаро тескари операторлардир.*

**Исбот.** Фараз қилайлик,

$$B^{s,\lambda}_{kx}[f(x)] = \varphi(x). \tag{41}$$

$B^{s,\lambda}_{kx}$ оператор ифодасини (41) га қўйиб ва $x-k=y$, $t-k=z$, $\bar f(y) = f(x)(x-k)^{s-1}$, $\tilde\varphi(y) = \varphi(x)(x-k)^{s-1}$ белгилашларни киритиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\bar f(y) + \int\limits_0^y \bar f(z)\frac{\partial}{\partial y}J_0\left[\lambda\sqrt{z(z-y)}\right]dz = \tilde\varphi(y).$$

Бу - Вольтерра типидаги интеграл тенглама бўлиб, ягона ечимга эга ва бу ечим

$$\bar f(y) = \tilde\varphi(y) - \int\limits_0^y \tilde\varphi(z)\frac{z}{y}\frac{\partial}{\partial z}J_0\left[\lambda\sqrt{y(y-z)}\right]dz$$

формула билан аниқланади [3]. Бундан $x$, $t$ ўзгарувчиларга ва $f(x)$, $\varphi(x)$ функцияларга қайтиб,

$$f(x) = \varphi(x) - \int\limits_k^x \varphi(t)\left(\frac{t-k}{x-k}\right)^s\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}\right]dt,$$

яъни

$$f(x) = A^{s,\lambda}_{kx}[\varphi(x)] \tag{42}$$

эканлигини топамиз. (41) ва (42) дан $A^{s,\lambda}_{kx}$ нинг $B^{s,\lambda}_{kx}$ операторга тескари оператор эканлиги, яъни (40) тенгликларнинг биринчиси тўғри эканлиги келиб чиқади.

Теореманинг иккинчи қисми ҳам худди шундай исботланади. Бунда

$$f(x) - \int\limits_0^x f(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{x(x-t)}\right]dt = \varphi(x)$$

тенгламанинг ечими

$$f(x) = \varphi(x) + \int\limits_0^x \varphi(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{t(t-x)}\right]dt$$

формула билан берилишидан фойдаланилади [3].

**2-теорема.** *Ихтиёрий* $f(x) \in C(m,n) \cap L_1(m,n)$ ***функция*** *ва* $k \in [m,n]$, $x \in (m,n)$ *учун*

$$A_{kx}^{0,\lambda}\left\{\int_k^x B_{kt}^{1,\lambda}[f(t)]dt\right\} = \int_k^x f(t)\, J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt \tag{43}$$

*тенглик ўринли.*

**Исбот.** $B_{kt}^{1,\lambda}[f(t)]$ ифодани

$$B_{kt}^{1,\lambda}[f(t)] = \frac{d}{dt}\int_k^t f(z)\, J_0\left[\lambda\sqrt{(z-k)(z-t)}\right]dz$$

кўринишида ёзиш мумкинлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Уни (43) нинг чап томонига қўямиз ва $A_{kx}^{1,\lambda}$ операторнинг ёйилмаси бўйича ёзамиз, сўнгра ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, топамиз:

$$A_{kx}^{0,\lambda}\left\{\int_k^x B_{kt}^{1,\lambda}[f(t)]dt\right\} = \int_k^x f(z)\, J_0\left[\lambda\sqrt{(z-k)(z-x)}\right]dz -$$

$$- \int_k^x f(z)\left\{\int_z^x J_0\left[\lambda\sqrt{(z-k)(z-t)}\right]\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}\right]dt\right\}dz. \tag{44}$$

(44) тенгликнинг ўнг томонида фигурали қавс ичида турган ифодани $\Phi$ билан белгилаб, $J_0(z)$ функция ёйилмасидан ва қаторларни кўпайтиришнинг Коши формуласидан [20] фойдаланиб,

$$\Phi = \int_z^x \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2}\sum_{l=0}^{j}\frac{(z-k)^l\,(x-k)^{j+1-l}}{(l!)^2\,(j-l)!(j+1-l)!}\,(z-t)^l\,(x-t)^{j-l}\,dt$$

тенгликка келамиз.

Бу ердан қаторни ҳадлаб интеграллаб (чунки қатор текис яқинлашади) ва

$$\Phi = \int_z^x (z-t)^l\,(x-t)^{j-l}\,dt = (-1)^l\,(x-z)^{j+1}\,B\,(l+1, j+1-l)$$

тенгликни эътиборга олиб, топамиз:

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2j+2} \frac{(x-z)^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{l=0}^{j} \frac{(-1)^l (z-k)^l (x-k)^{j+1-l}}{l!\ (j+1-l)!}.$$

Ички йиғиндига $\dfrac{(-1)^{j+1} (z-k)^{j+1}}{(j+1)!}$ ни қўшиб ва айириб, сўнгра

$$\sum_{l=0}^{p} \frac{(-1)^l (z-k)^l (x-k)^{p-l}}{l!\ (p-l)!} = \frac{1}{p!} (x-z)^p, \quad p \in N$$

айниятни ва $J_0(z)$ функция ёйилмасини эътиборга олсак,

$$\Phi = J_0\left[\lambda\sqrt{(z-k)(z-x)}\right] - J_0[\lambda(x-z)]$$

тенгликка келамиз. Буни (44)га қўйсак, (43) тенглик келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

**3-теорема.** *Ихтиёрий $f(x) \in C^1(m,n) \cap L_1(m,n)$ функция ва $k \in [m,n]$, $x \in (m,n)$ учун*

$$A_{kx}^{1,\lambda}\left\{\frac{d}{dx} B_{kt}^{0,\lambda}[f(x)]\right\} = sign\,(x-k)\, C_{kx}^{0,\lambda}[f(x)] \tag{45}$$

*тенглик ўринли.*

**Исбот.** Фараз қилайлик, $f(x) \in C^1(m,n) \cap L_1(m,n)$ бўлсин. У ҳолда, (43) тенглик ўринли Шунинг учун

$$\int_k^x f(t) J_0[\lambda(x-t)]dt = \varphi(x). \tag{46}$$

$$A_{kx}^{0,\lambda}\left\{\int_k^x B_{kx}^{1,\lambda}[f(t)]\,dt\right\} = \varphi(x) \tag{47}$$

белгилашлар киритиш мумкин ва бундан $\varphi(k) = 0$, $\varphi(x) \in C[m,n] \cap C^1(m,n)$ ва $\varphi'(x) \in L_1(m,n)$ бўлади.

(46) ва (47) тенгликларда $\varphi(x)$ ни маълум деб ҳисоблаб, $f(x)$ ни топайлик.

Аввал (46) ни караймиз. У Вольтерра типидаги интеграл тенглама бўлганлиги учун ягона ечимга эга. Ечимни топиш учун (46) нинг иккала қисмини $\dfrac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x}$ га кўпайтирамиз ва $x$ бўйича $(k, y)$ оралиқда интеграллаймиз:

$$\int_k^y \frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x}dx \int_k^x f(t)J_0[\lambda(x-t)]\,dt = \int_k^y \varphi(x)\frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x}dx.$$

Бу тенгликнинг чап томонида интеграллаш тартибини ўзгартириб, сўнгра ҳосил бўлган такрорий интегралда $z = y - x$ алмаштириш бажариб ва

$$\int_0^u J_\alpha(c\xi)J_\beta(cu - c\xi)\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{\alpha}J_{\alpha+\beta}(cu), \quad \mathrm{Re}\alpha > 0, \quad \mathrm{Re}\beta > -1$$

тенгликни [10] эътиборга олиб, топамиз:

$$\int_k^y f(t)J_1[\lambda(y-t)]\,dt = \int_k^y \varphi(x)\frac{J_1[\lambda(y-x)]}{y-x}dx. \tag{48}$$

(46) ни $x$ бўйича дифференциаллаймиз:

$$f(x) - \lambda\int_k^y f(t)J_1[\lambda(x-t)]\,dt = \varphi'(x). \tag{49}$$

(48) тенглик ва $C_{kx}^{0,\lambda}$ оператор ёйилмасини эътиборга олиб, (49) дан топамиз:

$$f(x) = sign(x-k)C_{kx}^{0,\lambda}[\varphi(x)]. \tag{50}$$

Демак, (46) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва у (50) формула билан аниқланади.

Энди (47) тенгликдан $f(x)$ ни топамиз. Унинг иккала томонига $B_{kx}^{0,\lambda}$ оператор татбиқ қилиб ва (40) тенгликларни эътиборга олсак,

$$\int_k^x B_{kt}^{1,\lambda}[f(t)]\,dt = B_{kx}^{0,\lambda}[\varphi(x)]$$

тенгликка келамиз. Бу тенгликни аввал $x$ бўйича дифференциаллаб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликка $A^{1,\lambda}_{kx}$ оператор татбиқ этиб ва (40) тенгликларга асосланиб топамиз:

$$f(x) = A^{1,\lambda}_{kx}\left\{\frac{d}{dx}B^{0,\lambda}_{kx}[\varphi(x)]\right\}. \tag{51}$$

(50) ва (51) дан (45) тенглик келиб чиқади.

**Эслатма.** [14,15] да (45) тенглик $A^{1,\lambda}_{kx}$, $B^{0,\lambda}_{kx}$ ва Бессел функцияларининг ёйилмасидан фойдаланиб исботланган.

**4-теорема.** *Агар* $\nu(x) \in C^{(0,\alpha)}(m,n)$, $\alpha > \beta$ *ва* $[(x-m)(n-x)]^{-2\beta}\nu(x) \in L_1(m,n)$ *бўлса, у ҳолда* $\forall k\,[m,n]$ *ва* $\forall x\,(m,n)$ *учун*

$$A^{1,\lambda}_{kx}\left\{|x-k|^{\beta-1}D^{2\beta-1}_{kx}|x-k|^{\beta}B^{1,\lambda}_{kx}\left[\nu(x)\,|x-k|^{-\beta}\right]\right\} =$$

$$= sign\,(x-k)\,\Gamma^{-1}(1-2\beta)\,|x-k|^{\beta-1}\int\limits_k^x \nu(t)\,|x-t|^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda(x-t)\right]dt$$

*тенглик ўринли бўлади, бу ерда* $0 < \beta < 1/2$.

**5-теорема.** *Агар* $\tau(x) \in C[m,n]$ *ва* $(m,n)$ *оралиқда* $1-\beta$ *дан катта кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда* $\forall k \in [m,n]$ *ва* $\forall x \in (m,n)$ *учун*

$$A^{1,\lambda}_{kx}\left\{|x-k|^{-\beta}D^{1-2\beta}_{kx}|x-k|^{1-\beta}B^{1,\lambda}_{kx}\left[\tau(x)\,|x-k|^{\beta-1}\right]\right\} =$$

$$= |x-k|^{-\beta}C^{1,\lambda}_{kx}\left[\tau(x)\right]$$

*тенглик ўринли бўлади, бу ерда* $0 < \beta < 1/2$.

**6-теорема.** $\lambda$, $\delta \in \mathbb{R}$; $p(x)$, $f(x) \in C[m,n] \cap C^1(m,n)$ *бўлсин. Агар* $\delta \geq |\lambda| > 0$, $p(x) > 0$, $p'(x) \geq 0$, $\sup\limits_{[m,n]}|f(x)| = |f(\xi)|$, $m < \xi < n$, $f(\xi) > 0$ $(< 0)$ *бўлса,*

$$C^{0,\lambda}_{m\xi}\left[e^{\delta\xi}p(\xi)\,f(\xi)\right] > 0 \;\; (< 0) \tag{52}$$

*тенгсизлик ўринли бўлади.*

**Исбот.** Таърифга асосан

$$C^{0,\lambda}_{mx}\left[e^{\delta x}p(x)\,f(x)\right] =$$

$$= \left[e^{\delta x}p(x)\,f(x)\right]' + \frac{1}{2}\lambda^2\int\limits_m^x e^{\delta t}p(t)\,f(t)\,\bar{J}_1\left[\lambda(x-t)\right]dt =$$

$$= e^{\delta x}[\delta p(x) + p'(x)]f(x) + e^{\delta x}p(x)f'(x) + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_m^x e^{\delta t}p(t)f(t)\bar{J}_1\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Интеграл остидаги ифодага $e^{\delta x}p(x)f(x)/2$ ни қўшиб ва айириб, сўнгра $x = \xi$ десак.

$$C^{0,\lambda}_{m\xi}\left[e^{\delta\xi}p(\xi)f(\xi)\right] =$$

$$= e^{\delta\xi}\left\{\left[p'(\xi) + p(\xi)\left(\delta - \frac{1}{2}\lambda^2\int_m^\xi e^{\delta(t-\xi)}dt\right)\right]f(\xi) + p(\xi)f'(\xi)\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2\int_m^\xi e^{\delta t}\left\{p(\xi)f(\xi) + p(t)f(t)\bar{J}_1\left[\lambda(\xi - t)\right]\right\}dt \qquad (53)$$

тенгликка эга бўламиз.

$f(\xi) > 0$ бўлсин. У ҳолда $\left|\bar{J}_1(z)\right| \leq 1$, $f(\xi) \geq |f(t)|$ и $p(\xi) \geq p(t)$ тенгсизликларга асосан, (53) тенгликнинг ўнг томонидаги иккинчи қўшилувчи манфий эмас. Бундан ташқари

$$\delta - \frac{1}{2}\lambda^2\int_m^\xi e^{\delta(t-\xi)}dt \geq \frac{1}{2}\delta\left[1 + e^{\delta(m-\xi)}\right] > 0, \quad \delta \geq |\lambda|.$$

Буни ва $p'(\xi) \geq 0$, $p(\xi) > 0$ ва $f'(\xi) = 0$ ларни эътиборга олсак, (53) нинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчининг мусбат эмаслиги келиб чиқади. Демак, (52) тенгсизлик тўғри.

Агар $f(\xi) < 0$ бўлса, (53) нинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб, мулоҳазани $[-f(\xi)]$ га нисбатан такрорлаш керак.

**7-теорема.** $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$; $p(x)$, $f(x) \in C[m,n] \cap C^1(m,n)$ *бўлсин. Агар* $\delta \geq |\lambda| > 0$, $p(x) > 0$, $p'(x) \leq 0$, $\sup\limits_{[m,n]}|f(x)| = |f(\xi)|$, $m < \xi < n$, $f(\xi) > 0 (< 0)$ *бўлса,*

$$C^{0,\lambda}_{n\xi}\left[e^{-\delta\xi}p(\xi)f(\xi)\right] > 0 \ (< 0) \qquad (54)$$

*тенгсизлик ўринли бўлади.*

Бу теорема ҳам 6-теорема каби исботланади.

**8-теорема.** $\lambda = \lambda_1 \cdot i$; $\lambda_1, \delta \in \mathbb{R}$; $p(x)$, $f(x) \in C[m,n] \cap C^1(m,n)$ *бўлсин. У ҳолда, агар* $\delta \geq |\lambda_1| > 0$, $p(x) > 0$, $p'(x) \geq 0$, $\sup\limits_{[m,n]} f(x) =$

$f(\xi) > 0$, $\left[\inf\limits_{[m,n]} f(x) = f(\xi) < 0\right]$, $m < \xi < n$ *бўлса, (52) тенгсизлик ўринли.*

**Исбот.** $\overline{J}_1[\lambda_1 i(\xi - t)] = \overline{I}_1[\lambda_1(\xi - t)]$ тенгликни эътиборга олсак,

$$C_{m\xi}^{0,\lambda_1 i}\left[e^{\delta\xi}p(\xi)f(\xi)\right] = e^{\delta\xi}\left[\delta p(\xi) + p'(\xi)\right]f(\xi) +$$

$$+e^{\delta\xi}p(\xi)f'(\xi) - \frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_m^\xi e^{\delta t}p(t)f'(t)\overline{I}_1[\lambda_1(\xi - t)]\,dt.$$

Буни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$C_{m\xi}^{0,\lambda_1 i}\left[e^{\delta\xi}p(\xi)f(\xi)\right] =$$

$$= e^{\delta\xi}\left\{\left[p'(\xi) + p(\xi)\left(\delta - \frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_m^\xi e^{\delta(t-\xi)}\overline{I}_1[\lambda_1(\xi - t)]\,dt\right)\right]f(\xi) +\right.$$

$$\left.+\,p(\xi)f'(\xi)\right\} + \frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_m^\xi [p(\xi)f(\xi) - p(t)f(t)]e^{\delta t}\overline{I}_1[\lambda_1(\xi - t)]\,dt. \quad (55)$$

Ушбу ифодани қарайлик:

$$l_1 = \delta - \frac{1}{2}\lambda_1^2\int\limits_m^\xi e^{\delta(t-\xi)}\overline{I}_1[\lambda_1(\xi - t)]\,dt.$$

Бу ерда $\xi - t = z$ алмаштириш бажариб, топамиз:

$$l_1 = \delta - |\lambda_1|\int\limits_0^{\xi - m} e^{-\delta z}z^{-1}I_1(|\lambda_1|z)\,dz.$$

$0 < \xi - m < +\infty$ ва қуйидаги

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\delta z}z^{-1}I_1(|\lambda_1|z)\,dz \le 1, \qquad \delta \ge |\lambda_1|$$

тенгсизликни [10] эътиборга олсак, $l_1 > 0$ келиб чиқади.

$f(\xi) > 0$ бўлсин. У ҳолда $l_1 > 0$, $p(\xi) > 0$, $p'(\xi) \geq 0$ ва $f'(\xi) = 0$ ларни эътиборга олсак, (55) тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчининг мусбат эканлиги келиб чиқади. $f(\xi) \geq f(t)$ ва $I_1(x) > 0$ тенгсизликларга асосан иккинчи қўшилувчи ҳам манфий эмас. Демак, теореманинг тасдиги тўғри.

Теорема $f(\xi) < 0$ бўлган ҳолда ҳам шундай исботланади.

**9-теорема.** $\lambda = \lambda_1 \cdot i$; $\lambda_1$. $\delta \in \mathbb{R}$; $p(x)$. $f(x) \in C[m,n] \cap C^1(m,n)$ *бўлсин. У ҳолда, агар* $\delta \geq |\lambda_1| > 0$, $p(x) > 0$. $p'(x) \leq 0$, $\sup\limits_{[m,n]} f(x) = f(\xi) > 0$, $\left[\inf\limits_{[m,n]} f(x) = f(\xi) < 0\right]$, $m < \xi < n$ *бўлса, (54) тенгсизлик ўринли.*

Бу теорема ҳам 8-теорема каби исботланади.

**10-теорема.** $\lambda$, $\delta \in \mathbb{R}$; $p(x)$, $f(x) \in C^{(0,\alpha)}[m,n]$. $\alpha > 1 - 2\beta > 0$ *бўлсин. У ҳолда, агар* $\delta \geq |\lambda|$, $p(x)$ *- камаймайдиган мусбат функция ва* $\sup\limits_{[m,n]} |f(x)| = |f(\xi)|$, $m < \xi < n$, $f(\xi) > 0$ $(< 0)$ *бўлса,*

$$C_{m\xi}^{1,\lambda}\left[e^{\delta\xi} p(\xi) f(\xi)\right] > 0 \ (< 0) \tag{56}$$

*тенгсизлик ўринли бўлади.*

**Исбот.** Қуйидаги тенгликни қарайлик:

$$\Gamma(2\beta) C_{mx}^{1,\lambda}\left[e^{\delta x} p(x) f(x)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{d}{dx} \int\limits_m^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta-1} p(t) f(t) e^{\delta t} \overline{J}_\beta[\lambda(x-t)]\, dt + \right.$$

$$\left. + \left[\lambda^2 / 4\beta(1+\beta)\right] \int\limits_m^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta} p(t) f(t) e^{\delta t} \overline{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]\, dt \right\}. \tag{57}$$

У $\varepsilon$ га нисбатан текис бажарилади. (57) ни қулай холга келтирамиз. Шу мақсадда фигурали қавс ичидаги биринчи ифодани $l_2$ билан белгилаймиз ва дифференциаллаш амалини бажарамиз. Натижада (38) тенгликни эътиборга олсак, $l_2$ учун қуйидаги тенглик келиб чиқади.

$$l_2 = e^{\delta(x-\varepsilon)} p(x-\varepsilon) f(x-\varepsilon) \overline{J}_\beta(\lambda\varepsilon) \varepsilon^{2\beta-1} -$$

$$-(1-2\beta) \int\limits_m^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta-2} p(t) f(t) e^{\delta t} \overline{J}_\beta[\lambda(x-t)]\, dt -$$

$$-\frac{\lambda^2}{2(1+\beta)}\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta}\,p(t)\,f(t)\,e^{\delta t}\bar{J}_{\beta+1}\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Бўлаклаб интеграллаб, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$(1-2\beta)\int\limits_m^{x-\varepsilon}e^{\delta t}(x-t)^{2\beta-2}\,dt=e^{\delta(x-\varepsilon)}\varepsilon^{2\beta-1}+\frac{\delta}{2\beta}e^{\delta(x-\varepsilon)}\cdot\varepsilon^{2\beta}-$$

$$-e^{\delta m}(x-m)^{2\beta-1}-\frac{\delta}{2\beta}e^{\delta m}(x-m)^{2\beta}-\frac{\delta^2}{2\beta}\int\limits_m^{x-\varepsilon}e^{\delta t}(x-t)^{2\beta}\,dt. \qquad (58)$$

$l_2$ га қуйидаги

$$(1-2\beta)\,p(x)\,f(x)\int\limits_m^{x-\varepsilon}e^{\delta t}(x-t)^{2\beta-2}\,dt$$

ифодани қўшиб ва айириб ҳамда (58) ни эътиборга олиб, топамиз:

$$l_2=e^{\delta(x-\varepsilon)}\varepsilon^{2\beta-1}\left\{p(x-\varepsilon)\,f(x-\varepsilon)\,\bar{J}_\beta(\lambda\varepsilon)-p(x)\,f(x)\right\}-$$

$$-\frac{\delta}{2\beta}e^{\delta(x-\varepsilon)}p(x)\,f(x)\,\varepsilon^{2\beta}+e^{\delta m}p(x)\,f(x)\left[(x-m)^{2\beta-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\delta}{2\beta}(x-m)^{2\beta}\right]+\frac{\delta^2}{2\beta}p(x)\,f(x)\int\limits_m^{x-\varepsilon}e^{\delta t}(x-t)^{2\beta}\,dt+$$

$$+(1-2\beta)\int\limits_m^{x-\varepsilon}\frac{p(x)\,f(x)-p(t)\,f(t)\,\bar{J}_\beta\left[\lambda(x-t)\right]}{(x-t)^{2-2\beta}}e^{\delta t}dt-$$

$$-\frac{\lambda^2}{2(1+\beta)}\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta}\,p(t)\,f(t)\,e^{\delta t}\bar{J}_{\beta+1}\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

$l_2$ нинг бу ифодасини (57) га қўйиб, баъзи алмаштиришлардан сўнг, $\alpha>1-2\beta$ ни эътиборга олиб, $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтамиз:

$$\Gamma(2\beta)\,C^{1,\lambda}_{mx}\left[e^{\delta x}p(x)\,f(x)\right]=$$

$$= p(x)\, f(x) \left\{ e^{\delta m} \left[ (x-m)^{2\beta-1} + \frac{\delta}{2\beta} (x-m)^{2\beta} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\delta^2/4\beta(1+\beta)\right] \left[ 2 + 2\beta - \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2 (1-2\beta) \right] \cdot \int\limits_m^x e^{\delta t} (x-t)^{2\beta}\, dt \right\} +$$

$$+ (1-2\beta) \int\limits_m^x \left\{ p(x)\, f(x) - p(t)\, f(t)\, \overline{J}_\beta \left[\lambda(x-t)\right] \right\} (x-t)^{2\beta-2} e^{\delta t} dt +$$

$$+ \frac{\lambda^2 (1-2\beta)}{4\beta(1+\beta)} \int\limits_m^x \left\{ p(x)\, f(x) + p(t)\, f(t)\, \overline{J}_{\beta+1} \left[\lambda(x-t)\right] \right\} (x-t)^{2\beta} e^{\delta t} dt. \quad (59)$$

Энди $f(\xi) > 0$ $(< 0)$ бўлсин. У холда $p(\xi) \geq p(t) > 0$, $\forall t \leq \xi$ ва $\left|\overline{J}_\nu(z)\right| < 1$. $\forall z \in \mathbb{R}$, $\nu > -1/2$ тенгсизликларга асосан,

$$p(\xi)\, f(\xi) - p(t)\, f(t)\, \overline{J}_\beta \left[\lambda(\xi-t)\right] \geq 0 \ \ (\leq 0), \ \ \forall t \leq \xi,$$

$$p(\xi)\, f(\xi) + p(t)\, f(t)\, \overline{J}_{\beta+1} \left[\lambda(\xi-t)\right] \geq 0 \ \ (\leq 0), \ \ \forall t \leq \xi$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Буларни ва $\delta \geq |\lambda|$, $1 - 2\beta > 0$. $\Gamma(2\beta) > 0$ ларни эътиборга олсак. (59) дан (56) келиб чиқади.

**11-теорема.** $\lambda$. $\delta \in \mathbb{R}$; $p(x)$, $f(x) \in C^{(0,\alpha)}[m,n]$, $\alpha > 1 - 2\beta > 0$ *бўлсин. У ҳолда, агар* $\delta \geq |\lambda|$. $p(x)$ - *мусбат ўсмайдиган функция,* $\sup\limits_{[m,n]} |f(x)| = |f(\xi)|$, $m < \xi < n$, $f(\xi) > 0$ $(< 0)$ *бўлса,*

$$C_{n\xi}^{1,\lambda}\left[e^{-\delta\xi} p(\xi)\, f(\xi)\right] > 0 \ \ (< 0)$$

*тенгсизлик ўринли бўлади.*

Бу теорема ҳам 10-теорема каби исботланади.

**12-теорема.** *Агар* $\lambda \in \mathbb{R}$. $\tau(x) \in C^{(0,\alpha)}[m,n]$. $\alpha > 1 - 2\beta > 0$. $\sup\limits_{[m,n]} |\tau(x)| = |\tau(x_0)| > 0$. $x_0 \in (m,n)$ *бўлса, у ҳолда* $\tau(x_0) > 0$ $(< 0)$ *бўлганда етарли кичик* $\lambda$ *учун*

$$C_{mx}^{1,\lambda}[\tau(x)]|_{x=x_0} > 0 \ (< 0), \qquad C_{nx}^{1,\lambda}[\tau(x)]|_{x=x_0} > 0 \ (< 0) \qquad (60)$$

*тенгсизликлар ўринли бўлади.*

**Исбот.** $C^{1,\lambda}_{mx}$ операторни (39) кўринишда олиб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$C^{1,\lambda}_{mx}[\tau(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_m^{x-\varepsilon}\frac{\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{1-2\beta}}\tau(t)dt+$$

$$+\frac{\lambda^2}{\Gamma(1+2\beta)}\int\limits_m^{x}(x-t)^{2\beta}\overline{J}_{\beta}[\lambda(x-t)]\tau(t)dt. \qquad (61)$$

Дифференциаллаш амалини бажариб ва (38) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda}_{mx}[\tau(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\varepsilon^{2\beta-1}\overline{J}_{\beta-1}(\lambda\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)-$$

$$-(1-2\beta)\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-2}\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]\tau(t)dt\Big\}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонига

$$(1-2\beta)\tau(x)\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-2}dt = \tau(x)[\varepsilon^{2\beta-1}-(x-m)^{2\beta-1}]$$

ифодани қўшамиз ва айирамиз:

$$\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda}_{mx}[\tau(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{\varepsilon^{2\beta-1}[\overline{J}_{\beta-1}(\lambda\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)-\tau(x)]+$$

$$+\frac{\tau(x)}{(x-m)^{1-2\beta}}+(1-2\beta)\int\limits_m^{x-\varepsilon}\frac{\tau(x)-\tau(t)\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{2-2\beta}}dt\Big\}. \qquad (62)$$

$\tau(x)\in C^{(0,\alpha)}[m,n]$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ бўлгани учун

$$|\tau(x)-\tau(x-\varepsilon)\overline{J}_{\beta-1}(\lambda\varepsilon)| = \varepsilon^{\alpha}O(1),$$

$$|\tau(x)-\tau(t)\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]| = (x-t)^{\alpha}O(1).$$

Буларга ва $\alpha > 1-2\beta$ га асосан, (62) лимит мавжуд ва

$$\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda}_{mx}[\tau(x)] = \tau(x)(x-m)^{2\beta-1}+(1-2\beta)\int\limits_m^{x}\frac{\tau(x)-\tau(t)\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x-t)]}{(x-t)^{2-2\beta}}dt.$$

Бу ерда $x = x_0$ қўямиз. У ҳолда, агар $\tau(x_0) > 0(< 0)$ ва $\lambda$ етарлича кичик бўлса, $\tau(x_0) - \tau(t)\overline{J}_{\beta-1}[\lambda(x_0 - t)] \geq 0(\leq 0)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Буни ва $\tau(x_0) > 0(< 0)$ ни эътиборга олсак, (60) тенгсизликнинг биричиси келиб чиқади.

(60) тенгсизликнинг иккинчиси ҳам шундай исботланади.

**13-теорема.** *Агар* $i\lambda \in \mathbb{R}$, $T(x) \in C^{(0,\alpha)}[m,n]$, $\alpha > 1 - 2\beta > 0$ *ва* $\sup\limits_{[m,n]} T(x) = T(x_0) > 0$ $\left[\inf\limits_{[m,n]} T(x) = T(x_0) < 0\right]$, $x_0 \in (m,n)$ *бўлса, қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:*

$$C_{ax}^{1,\lambda}[e^{|\lambda|x}T(x)]|_{x=x_0} > 0 \ \ (< 0), \qquad C_{bx}^{1,\lambda}[e^{-|\lambda|x}T(x)]|_{x=x_0} > 0 \ \ (< 0). \quad (63)$$

**Исбот.** $i\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{J}_{\beta-1}(ix) = \overline{I}_{\beta-1}(|x|)$ ларни ва (39) тенгликни эътиборга олиб, (62) каби қуйидагига эга бўламиз:

$$\Gamma(2\beta)C_{mx}^{1,\lambda}[e^{|\lambda|x}T(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-1}\overline{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]e^{|\lambda|t}T(t)dt - \right.$$

$$\left. -\frac{|\lambda|^2}{2\beta}\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta}\overline{I}_{\beta}[|\lambda|(x-t)]e^{|\lambda|t}T(t)dt\right\}.$$

Диффернциаллаш амалини бажариб, (37) формулани қўллаймиз:

$$\Gamma(2\beta)C_{mx}^{1,\lambda}[e^{|\lambda|x}T(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{2\beta-1}\overline{I}_{\beta-1}(|\lambda|\varepsilon)e^{|\lambda|(x-\varepsilon)}T(x-\varepsilon) - \right.$$

$$\left. -(1-2\beta)\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-2}\overline{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]e^{|\lambda|t}T(t)dt\right\}. \qquad (64)$$

Бўлаклаб интеграллаб ва (38) тенгликдан фойдаланиб, топамиз:

$$(1-2\beta)\int\limits_m^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-2}e^{|\lambda|t}\overline{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]dt =$$

$$= \varepsilon^{2\beta-1}e^{|\lambda|(x-\varepsilon)}\overline{I}_{\beta-1}(|\lambda|\varepsilon) - (x-m)^{2\beta-1}e^{|\lambda|m}\overline{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-m)] +$$

$$+|\lambda|\int\limits_{m}^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-1}\left\{\frac{|\lambda|(x-t)}{2\beta}\bar{I}_{\beta}[|\lambda|(x-t)]-\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]\right\}e^{|\lambda|t}dt.$$

Буни эътиборга олиб, (64) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda}_{mx}[e^{|\lambda|x}T(x)]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{2\beta-1}\bar{I}_{\beta-1}(|\lambda|\varepsilon)e^{|\lambda|(x-\varepsilon)}[T(x-\varepsilon)-T(x)]+\right.$$

$$+(1-2\beta)\int\limits_{m}^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-2}[T(x)-T(t)]I_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]e^{|\lambda|t}dt+$$

$$+T(x)(x-m)^{2\beta-1}e^{|\lambda|m}\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-m)]+T(x)\int\limits_{m}^{x-\varepsilon}(x-t)^{2\beta-1}\times$$

$$\left.\times\left[|\lambda|\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]-\frac{1}{2\beta}|\lambda|^{2}(x-t)\bar{I}_{\beta}[|\lambda|(x-t)]\right]e^{|\lambda|t}dt\right\}.$$

Бу ердан $\varepsilon\to 0$ лимитга ўтиб ва $T(x)\in C^{(0,\alpha)}[m,n]$, $\alpha>1-2\beta$ ни эътиборга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda}_{mx}[e^{|\lambda|x}T(x)]=$$

$$=(1-2\beta)\int\limits_{m}^{x}(x-t)^{2\beta-2}[T(x)-T(t)]\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]e^{|\lambda|t}dt+$$

$$+T(x)\left\{(x-m)^{2\beta-1}e^{|\lambda|m}\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-m)]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{m}^{x}(x-t)^{2\beta-1}\left[|\lambda|\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]-\frac{1}{2\beta}|\lambda|^{2}(x-t)\bar{I}_{\beta}[|\lambda|(x-t)]\right]e^{|\lambda|t}dt\right\}. \tag{65}$$

Биринчи бўлимдаги (85) формулани қўллаб, топамиз:

$$e^{-|\lambda|x}\int\limits_{m}^{x}(x-t)^{2\beta-1}e^{|\lambda|t}\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]dt=$$

$$=\frac{1}{2\beta}(x-m)^{2\beta}{}_{2}F_{2}\left[\beta-\frac{1}{2},2\beta;2\beta-1,2\beta+1;-2|\lambda|(x-m)\right], \tag{66}$$

$$e^{-|\lambda|x}\int\limits_m^x (x-t)^{2\beta}e^{|\lambda|t}\bar{I}_\beta[|\lambda|(x-t)]dt =$$

$$= \frac{1}{1+2\beta}(x-m)^{1+2\beta}e^{|\lambda|x}\,{}_1F_1\left[\beta+\frac{1}{2};2+2\beta;-2|\lambda|(x-m)\right]. \qquad (67)$$

Биринчи бўлимдаги (87) тенгликдан келиб чиқувчи

$$e^{-z}\bar{I}_{\beta-1}(z) = {}_1F_1\left(\beta-\frac{1}{2};2\beta-1;-2z\right), \qquad z>0$$

тенглик ва ${}_1F_1$, ${}_2F_2$ функцияларнинг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб коэффициентларни таққослаш усули билан қуйидаги тенгликнинг тўғрилигини кўрсатиш мумкин:

$$e^{-z}\bar{I}_{\beta-1}(z) + \frac{z}{2\beta}\,{}_2F_2\left(\beta-\frac{1}{2}, 2\beta; 2\beta-1, 2\beta+1; -2z\right) -$$

$$-\frac{z^2}{2\beta(1+2\beta)}\,{}_1F_1\left(\beta+\frac{1}{2}; 2+2\beta; -2z\right) = {}_1F_1\left(\beta-\frac{1}{2}; 2\beta; -2z\right). \qquad (68)$$

(66), (67), (68) ларга асосан, (65) дан

$$\Gamma(2\beta)e^{-|\lambda|x}C^{1,\lambda}_{m,x}[e^{|\lambda|x}T(x)] =$$

$$= (1-2\beta)\int\limits_m^x \frac{T(x)-T(t)}{(x-t)^{2-2\beta}}e^{|\lambda|(t-x)}\bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)]dt +$$

$$+T(x)(x-m)^{2\beta-1}\,{}_1F_1\left[\beta-\frac{1}{2}; 2\beta; -2|\lambda|(x-m)\right]. \qquad (69)$$

тенглик келиб чиқади.

$\sup\limits_{[m,n]} T(x) = T(x_0) > 0$ $\left[\inf\limits_{[m,n]} T(x) = T(x_0) < 0\right]$, $x_0 \in (m,n)$ бўлсин. У холда, $T(x_0) - T(t) \geq 0$ $(\leq 0)$, $\forall t \in [m,n]$; $T(x_0) > 0$ $(< 0)$, $1-2\beta > 0$,

$${}_1F_1\,[\beta-1/2; 2\beta; -2|\lambda|(x_0-m)] > 0, \quad \bar{I}_{\beta-1}[|\lambda|(x-t)] > 0$$

бўлгани учун, (69) дан $x = x_0$ да (63) тенгсизликнинг биринчиси келиб чиқади. Унинг иккинчиси хам шундай исботланади.

Эслатма. Одатда (6) - (13) теоремалар $C^{s,\lambda}_{k,x}$, $s = \overline{0,1}$ операторлар учун *экстремум принциплари* деб аталади.

## 5-§. $\mathbb{F}_{kx}$ оператор ва унинг хоссалари

Фараз қилайлик, $a$, $b$, $c$, $m$, $n$ $\in \mathbb{R}$, $0 < m < n$, $c \neq 0, -1, -2, ...$; $k \in (m, n)$; $f(x)$, $f'(x) \in C(m, n) \cap L_1(m, n)$ бўлсин.

Қуйидаги операторларни қараймиз [16, 17]:

$$\mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} a, b \\ c; x \end{array}\right] f(x) = \begin{cases} \dfrac{sign(x-k)}{\Gamma(c)} \displaystyle\int_k^x |x-t|^{c-1} F\left(a, b, c; \frac{x-t}{x}\right) f(t)\, dt, & c > 0; \\ f(x), \quad c = 0; \\ sign(x-k) x^a \dfrac{d}{dx} x^{-a} \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{cc} a, & b+1 \\ c+1; x \end{array}\right] f(x), & -1 < c < 0. \end{cases} \tag{70}$$

(70) операторлар *каср тартибли умумлашган интегро-дифференциал операторлар* деб аталиб, улардан хусусий ҳолда Риман-Лиувиллнинг интегро-дифференциал операторлари келиб чиқади, яъни

$$\mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} 0, b \\ c; x \end{array}\right] \equiv \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} a, 0 \\ c; x \end{array}\right] \equiv D_{kx}^{-c}, \quad c > 0;$$

$$\mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} 0, b \\ c; x \end{array}\right] \equiv \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} a, 0 \\ c; x \end{array}\right] \equiv \frac{d}{dx} D_{kx}^{-(c+1)} \equiv D_{kx}^{c}, \quad -1 < c < 0.$$

Демак, (70) - Риман-Лиувилл маъносидаги каср тартибли $D_{kx}^{c}$ интегро-дифференциал операторларни $F(a, b, c; x)$ - Гаусс гипергеометрик функцияси ёрдамидаги умумлашмаси экан.

Кейинги сатрларда $k < x$ да $\mathbb{F}_{kx} \equiv F_{kx}$, $k > x$ да эса $\mathbb{F}_{kx} \equiv F_{xk}$ каби ёзишга келишиб оламиз.

**1-теорема.** *Агар* $f(x) \in C(m, n) \cap L_1(m, n)$ *бўлса, ихтиёрий* $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in (0, 1)$ *ва* $x, k \in (m, n)$ *учун*

$$x^a \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} -a, b-c \\ -c; x \end{array}\right] x^{-a} \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} a, b \\ c; x \end{array}\right] f(x) = f(x) \tag{71}$$

*тенглик ўринли бўлади.*

**Исбот.** Аниқлик учун $0 < m < x < k < n$ деб олайлик. (70) га асосан (70)нинг чап томонини ёйиб ёзамиз:

$$M = x^a \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} -a, b-c \\ -c; x \end{array}\right] x^{-a} \mathbb{F}_{kx}\left[\begin{array}{c} a, b \\ c; x \end{array}\right] f(x) =$$

$$= -x^{a} \cdot x^{-a} \frac{d}{dx} \left\{ x^{a} F_{xk} \left[ \begin{array}{l} -a, b - c + 1 \\ 1 - c;\, x \end{array} \right] x^{-a} F_{xk} \left[ \begin{array}{l} a, b \\ c;\, x \end{array} \right] f(x) \right\} =$$

$$= -\frac{d}{dx} \left\{ x^{a} \frac{1}{\Gamma(1-c)} \int\limits_{x}^{k} (t-x)^{-c} F\left(-a, b-c+1, 1-c; \frac{x-t}{x}\right) t^{-a} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \frac{1}{\Gamma(c)} \int\limits_{t}^{k} (z-t)^{c-1} F\left(a, b, c; \frac{t-z}{t}\right) f(z)\, dz \right] dt \right\}.$$

Такрорий интегралга Дирихле формуласини қўллаймиз:

$$M = -\frac{\sin(c\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ x^{a} \int\limits_{x}^{k} f(z) \left[ \int\limits_{x}^{z} t^{-a} (t-x)^{-c} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times F\left(-a, b-c+1, 1-c; \frac{x-t}{x}\right) (z-t)^{c-1} F\left(a, b, c; \frac{t-z}{t}\right) dt \right] dz \right\}.$$

Иккинчи Гаусс функциясига

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1-z)^{-\beta} F\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma; \frac{z}{z-1}\right)$$

формулани қўллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$M = -\frac{\sin(c\pi)}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ x^{a} \int\limits_{x}^{k} f(z)\, z^{-b} \times \right.$$

$$\times \left[ \int\limits_{x}^{z} t^{b-a} (t-x)^{-c} (z-t)^{c-1} F\left(-a, b-c+1, 1-c; 1-\frac{t}{x}\right) \times \right.$$

$$\left. \left. \times F\left(c-a, b, c; 1-\frac{t}{z}\right) dt \right] dz \right\}.$$

Квадрат қавс ичидаги интегралга

$$\int\limits_{\sigma}^{\omega} x^{\alpha} (x-\sigma)^{c_1-1} (\omega-x)^{c'-1} F\left(a_1, b_1, c_1; 1-\frac{x}{\sigma}\right) F\left(a', b', c'; 1-\frac{x}{\omega}\right) dx =$$

$$= B\left(c_1, c'\right)(\omega - \sigma)^{c_1 + c' - 1} \sigma^{A} \omega^{B} F\left(C, D, c_1 + c'; 1 - \frac{\sigma}{\omega}\right),$$

бу ерда $0 < \sigma < \omega$, $\mathrm{Re}c_1$, $\mathrm{Re}c' > 0$; $A = -a$, $B = b$, $C = c - a - b$, $D = 0$, формулани қўллаб [11, 331 бет, 13 формула, 4-қатор]

$$M = -\frac{\pi}{\sin(c\pi)} \frac{d}{dx} \left\{ x^{a} \int\limits_{x}^{k} z^{-b} f(z) \left[B(1 - c, c)\, x^{-a} z^{b}\right] dz \right\}$$

ифодага эга бўламиз.

$B(1 - c, c) = \Gamma(1 - c)\Gamma(c)/\Gamma(1) = \pi/\sin(c\pi)$ тенгликни эътиборга олсак, охирги тенгликдан 11-теореманинг тасдиғи келиб чиқади.

Теорема қолган холларда ҳам шундай исботланади.

**2-теорема [16].** *Агар* $f(x) \in C^{(0,\delta)}(0,1) \cap L_1(0,1)$ *бўлса, ихтиёрий* $a$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in (0,1)$ $\delta \in (0,1]$, $x \in (0,1)$ *учун*

$$x^{a} F_{0x} \left[\begin{matrix} -a, b - c \\ -c;\ x \end{matrix}\right] x^{-a} F_{x1} \left[\begin{matrix} a, b \\ c; x \end{matrix}\right] f(x) =$$

$$= \cos(c\pi) f(x) + \frac{\lambda_1}{\pi} \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{t}{x}\right)^{c-a} \frac{f(t)dt}{t - x} + \frac{\lambda_2}{\pi} \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{t}{x}\right)^{c-b} \frac{f(t)\,dt}{t - x}$$

*тенглик ўринли бўлади, бу ерда*

$$\lambda_1 = \frac{\sin(b\pi)\sin[(c - a)\pi]}{\sin[(b - a)\pi]}, \qquad \lambda_2 = \frac{\sin(a\pi)\sin[(c - b)\pi]}{\sin[(a - b)\pi]}.$$

**3-теорема [12].** *Фараз қилайлик,* $(-1) < b < c < a < 0$ *ёки* $(-1) < a < c < b < 0$, $l \geq 0$; $w(x)$, $\tau(x) \in C[0,1]$; $w(x)$ - *камаймайдиган мусбат функция ва* $x = x_0$ $(0 < x_0 < 1)$ *нуқтанинг қисқа атрофида* $\tau(x)w(x)$ *кўпайтма* $\gamma\,[> (-c)]$ *тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирсин. Агар* $[0, x_0]$ *оралиқда* $\tau(x)$ *функция энг катта мусбат (энг кичик манфий) қийматга* $x = x_0$ *нуқтада эришса, у ҳолда*

$$F_{0x} \left[\begin{matrix} a, & b \\ c; & x \end{matrix}\right] x^{l} w(x)\tau(x)\Big|_{x = x_0} > 0 \qquad (< 0) \tag{72}$$

*тенгсизлик ўринли бўлади.*

**Исбот.** (70) таърифга асосан

$$M_1 = F_{0x} \left[\begin{matrix} a, & b \\ c; & x \end{matrix}\right] x^{l} w(x)\tau(x) = x^{a} \frac{d}{dx} x^{-a} F_{0x} \left[\begin{matrix} a, & b + 1 \\ c + 1; & x \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{x^a}{\Gamma(c+1)} \frac{d}{dx} x^{-a} \int\limits_0^x z^l (x-z)^c w(z)\tau(z) F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{x-z}{x}\right) dz.$$

Қуйидаги ифодани қараймиз:

$$M_{1\varepsilon} = \frac{x^a}{\Gamma(c+1)} \frac{d}{dx} x^{-a} \int\limits_0^{x-\varepsilon} z^l (x-z)^c w(z)\tau(z) F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{x-z}{x}\right) dz,$$

бу ерда $\varepsilon$ - етарлича кичик мусбат сон. Аниқки, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_{1\varepsilon} = M_1$.

Дифференциаллаш амалини 4-§ 2.6. формула бўйича бажариб,

$$M_{1\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(c+1)} \left\{ (x-\varepsilon)^l w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)\, \varepsilon^c F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) + \right.$$

$$\left. +c \int\limits_0^{x-\varepsilon} z^l w(z)\tau(z)(x-z)^{c-1} F\left(a,\, b.\, c;\, \frac{x-z}{x}\right) dz \right\}.$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни

$$M_{1\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(c+1)} \left\{ (x-\varepsilon)^l w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)\, \varepsilon^c F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) - \right.$$

$$-c \int\limits_0^{x-\varepsilon} z^{a+b-c} \left[x^{l+c-a-b} w(x)\,\tau(x) - z^{l+c-a-b} w(z)\,\tau(z)\right] \times$$

$$\times (x-z)^{c-1} F\left(a,\, b,\, c;\, \frac{x-z}{x}\right) dz +$$

$$\left. +c w(x)\tau(x) \int\limits_0^{x-\varepsilon} z^{a-b-c} x^{l+c-a-b} (x-z)^{c-1} F\left(a,\, b,\, c;\, \frac{x-z}{x}\right) dz \right\} \qquad (73)$$

кўринишда ёзиб оламиз. (73) даги охирги интегрални $M_2$ оркали белгилаб олиб, сўнгра Гаусс функцияси учун автотрансформация формуласини қўллаймиз:

$$M_2 = -x^{l+c} \int\limits_0^{x-\varepsilon} c\left(-\frac{1}{x}\right) \left(\frac{x-z}{x}\right)^{c-1} F\left(c-a,\, c-b,\, c;\, \frac{x-z}{x}\right) dz.$$

Ушбу

$$\frac{d}{d\theta}\left[\theta^{c_1-1}F(a_1,\, b_1,\, c_1;\theta)\right] = (c_1-1)\theta^{c_1-2}F(a_1,\, b_1,\, c_1-1;\theta)$$

формула ёрдамида охирги интегрални ҳисоблаймиз:

$$M_2 = x^{l+c}F(c-a,\, c-b,\, c+1;\, 1) - x^l\varepsilon^c F\left(c-a,\, c-b,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right).$$

Буни (73) га қўйиб, топамиз:

$$M_{1\varepsilon} = \frac{x^{l+c}}{\Gamma(c+1)}w(x)\tau(x)F(c-a,\, c-b,\, c+1;\, 1) + \frac{M_{3\varepsilon}}{\Gamma(c+1)} -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_0^{x-\varepsilon} z^{a+b-c}\left[x^{l+c-a-b}w(x)\tau(x) - z^{l+c-a-b}w(z)\tau(z)\right]\times$$

$$\times(x-z)^{c-1}F\left(a,\, b,\, c;\, \frac{x-z}{x}\right)dz, \tag{74}$$

бу ерда

$$M_{3\varepsilon} = (x-\varepsilon)^l w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)\,\varepsilon^c\, F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) -$$

$$-x^l w(x)\tau(x)\,\varepsilon^c\, F\left(c-a,\, c-b,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right).$$

$M_{3\varepsilon}$ ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_{3\varepsilon} = \left[(x-\varepsilon)^l - x^l\right]\varepsilon^c w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon)\ F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) +$$

$$+\left[w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon) - w(x)\tau(x)\right]\varepsilon^c x^l F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) +$$

$$+x^l w(x)\tau(x)\varepsilon^c\left[F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) - F\left(c-a,\, c-b,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right)\right].$$

$0 < \delta_1 < x-\varepsilon < x$ бўлсин, бу ерда $\delta_1$ етарлича кичик мусбат тайинланган сон. У ҳолда

$$w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon) - w(x)\tau(x) = \varepsilon^\gamma\cdot O(1), \qquad \gamma > -c,$$

$$(x-\varepsilon)^l - x^l = \varepsilon\cdot O(1).$$

$$F\left(a,\, b+1,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) - F\left(c-a,\, c-b,\, c+1;\, \frac{\varepsilon}{x}\right) = \varepsilon \cdot O(1).$$

Буларни эътиборга олсак,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M_{3\varepsilon} = 0, \qquad \forall x \in (\delta_1,\, 1]. \tag{75}$$

(74) дан $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтиб ва (75)ни инобатга олиб, ҳар бир $x \in (\delta_1,\, 1]$ учун

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(c+1)} \Big\{ x^{l+c}\, w(x)\tau(x) F(c-a,\, c-b,\, c+1;\, 1) -$$

$$-c \int_0^x z^{a+b-c} \left[ x^{l+c-a-b} w(x)\tau(x) - z^{l+c-a-b} w(z)\tau(z) \right] \times$$

$$\times (x-z)^{c-1} F\left(a,\, b,\, c;\, \frac{x-z}{x}\right) dz \Big\}$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу ерда $x = x_0$, $x_0 \in (0,\, 1)$ десак,

$$M_1|_{x=x_0} = \frac{1}{\Gamma(c+1)} \Big\{ x_0^{l+c}\, w(x_0)\tau(x_0) F(c-a,\, c-b,\, c+1;\, 1) -$$

$$-c \int_\delta^{x_0} z^{a+b-c} \left[ x_0^{l+c-a-b} w(x_0)\tau(x_0) - z^{l+c-a-b} w(z)\tau(z) \right] \times$$

$$\times (x_0-z)^{c-1} F\left(a,\, b,\, c;\, \frac{x_0-z}{x_0}\right) dz -$$

$$-c \int_0^\delta z^{a+b-c} \left[ x_0^{l+c-a-b} w(x_0)\tau(x_0) - z^{l+c-a-b} w(z)\tau(z) \right] \times$$

$$\times (x_0-z)^{c-1} F\left(a,\, b,\, c;\, \frac{x_0-z}{x_0}\right) dz \Big\} \tag{76}$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда $\delta$ - $x_0$ га чапдан етарлича яқин сон.

$(-1) < b < c < a < 0$ [ёки $(-1) < a < c < b < 0$] шартга асосан $a+1 > 0$, $b+1 > 0$, $c+1 > 0$, $0 < c-a-b < 1$ тенгсизликлар ўринли. Буларни ва гамма - функциянинг хоссаларини эътиборга олсак,

$F(c-a,\, c-b,\, c+1;\, 1) > 0$ тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади. Агар $(-1) < a < 0$, $(-1) < b < 0$, $(-1) < c < 0$, $0 < [(x-z)/x] < 1$ эканлигини ҳамда гипергеометрик функциянинг қатор кўринишидаги ифодасини эътиборга олсак,

$$\frac{d}{dz} F\left(a, b, c; \frac{x-z}{x}\right) = -\frac{ab}{cx} F\left(a+1, b+1, c+1; \frac{x-z}{x}\right) > 0$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $F(a, b, c; (x-z)/x)$ функция $z$ бўйича ўсувчи экан. Шу сабабли, $\forall x \in (0, 1]$ учун

$$F\left(a, b, c; \frac{x-z}{x}\right) > F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} > 0.$$

$(-1) < b < c < a < 0$ $[(-1) < a < c < b < 0]$ тенгсизликка асосан $c - b > 0$, $c - a < 0$ $[c - b < 0, c - a > 0]$ Буларни ва $l \geq c - a - b > 0$ тенгсизликни ҳамда $w(x)$ ва $\tau(x)$ функцияларга қўйилган шартларни ҳисобга олсак, (76) тенгликдан дарҳол (72) тенгсизлик келиб чиқади. 3-теорема исботланди.

**4-теорема.** *Фараз қилайлик,* $(-1) < c < a < 0 < b < 1 + c$ *ёки* $(-1) < a < c < b < 0$; $w(z), \tau(x) \in C[0,1]$; $w(z)$ - *ўсмайдиган мусбат функция ва* $x = x_0$ $(0 < x_0 < 1)$ *нуқтанинг қисқа атрофида* $w(x)\tau(x)$ *кўпайтма* $\gamma$ $[> (-c)]$ *кўрсаткичли Гёльдер шартини қаноатлантирсин. Агар* $[x_0, 1]$ *оралиқда* $\tau(x)$ *функция энг катта мусбат (энг кичик манфий) қийматга* $x = x_0$ *нуқтада эришса, у ҳолда*

$$F_{x1}\left[\begin{array}{c} a, b \\ c; x \end{array}\right] w(x)\tau(x)\Big|_{x=x_0} > 0 \quad (< 0) \qquad (77)$$

*тенгсизлик ўринли бўлади.*

**Исбот.** (70) таърифига асосан

$$M_2 = F_{x1}\left[\begin{array}{c} a, b \\ c; x \end{array}\right] w(x)\tau(x) = -x^{a}\frac{d}{dx}x^{-a}F_{x1}\left[\begin{array}{cc} a, & b+1 \\ c+1; & x \end{array}\right] w(x)\tau(x) =$$

$$= -x^{a}\frac{d}{dx}\frac{x^{-a}}{\Gamma(c+1)}\int\limits_{x}^{1}(z-x)^{c}w(z)\tau(z)F\left(a, b+1, c+1; \frac{x-z}{x}\right)dz.$$

Гипергеометрик функцияга

$$F(\alpha, \beta, \gamma; y) = (1-y)^{-\alpha}F[\alpha, \gamma-\beta, \gamma; y/(y-1)]$$

формулани қўллаб, $M_2$ ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$M_2 = -\frac{x^a}{\Gamma(c+1)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1 z^{c-a}w(z)\tau(z)\left(\frac{z-x}{z}\right)^c F\left(a, c-b, c+1; \frac{z-x}{z}\right)dz.$$

Худди 3-теоремадаги каби, ушбу функцияни киритамиз:

$$M_{2\varepsilon} = -\frac{x^a}{\Gamma(c+1)}\frac{d}{dx}\int\limits_{x+\varepsilon}^1 z^{c-a}w(z)\tau(z)\left(\frac{z-x}{z}\right)^c F\left(a, c-b, c+1; \frac{z-x}{z}\right)dz,$$

бу ерда $\varepsilon$ - етарлича кичик мусбат сон. Аниқки, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M_{2\varepsilon} = M_2$.

Дифференциаллаш амалини бажарамиз:

$$M_{2\varepsilon} = \frac{x^a}{\Gamma(c+1)}\left\{(x+\varepsilon)^{-a}\varepsilon^c w(x+\varepsilon)\tau(x+\varepsilon)F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) + \right.$$

$$\left. +c\int\limits_{x+\varepsilon}^1 z^{-a}w(z)\tau(z)(z-x)^{c-1}F\left(a, c-b, c; \frac{z-x}{z}\right)dz\right\}.$$

Бу ифодани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$M_{2\varepsilon} = \frac{x^a}{\Gamma(c+1)}\left\{(x+\varepsilon)^{-a}\varepsilon^c w(x+\varepsilon)\tau(x+\varepsilon)F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) - \right.$$

$$-c\int\limits_{x+\varepsilon}^1 z^{-a}\left[w(x)\tau(x) - w(z)\tau(z)\right](z-x)^{c-1}F\left(a, c-b, c; \frac{z-x}{z}\right)dz+$$

$$\left. +w(x)\tau(x)\int\limits_{x+\varepsilon}^1 cz^{-a}(z-x)^{c-1}F\left(a, c-b, c; \frac{z-x}{z}\right)dz\right\}. \qquad (78)$$

Гипергеометрик функция учун ўринли бўлган ушбу

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\alpha-\gamma, \beta-\gamma, \gamma; z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\gamma-1}(1-z)^{\beta-\gamma+1}F(\alpha, \beta, \gamma; z)\right] = (\gamma-1)z^{\gamma-2}(1-z)^{\beta-\gamma}F(\alpha-1, \beta, \gamma-1; z)$$

формулаларни қўллаб, охирги интегрални

$$(1-x)^c x^{b-a}F(c-a+1, b, c+1; 1-x) -$$

$$-\varepsilon^c x^{b-a}(x+\varepsilon)^{-b} F\left(c-a+1, b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right)$$

га тенглигини кўрсатиш кийин эмас. Буни эътиборга олиб, (78) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_{2\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(c+1)}\varepsilon^c \left[\left(\frac{x+\varepsilon}{x}\right)^{-a} w(x+\varepsilon)\tau(x+\varepsilon)F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{x+\varepsilon}{x}\right)^{-b} w(x)\tau(x)\ F\left(c-a+1, b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right)\right] +$$

$$+\frac{(1-x)^c x^b}{\Gamma(c+1)} F\left(c-a+1, b, c+1; 1-x\right) -$$

$$-\frac{x^a}{\Gamma(c)}\int\limits_{x+\varepsilon}^{1} z^{-a}\left[w(x)\tau(x) - w(z)\tau(z)\right](z-x)^{c-1} F\left(a, c-b, c; \frac{z-x}{z}\right) dz. \qquad (79)$$

Биринчи квадрат қавс ичидаги ифодани

$$w(x+\varepsilon)\tau(x+\varepsilon)\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-a} - 1\right] F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) +$$

$$+\left[w(x+\varepsilon)\tau(x+\varepsilon) - w(x)\tau(x)\right] F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) +$$

$$+w(x)\tau(x)\left[1-\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-b}\right] F\left(c-a+1, b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) +$$

$$+w(x)\tau(x)\left[F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) - F\left(c-a+1, b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right)\right]$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-a} - 1 = \varepsilon\cdot O(1), \qquad 1-\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)^{-b} - 1 = \varepsilon\cdot O(1),$$

$$F\left(a, c-b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) - F\left(c-a+1, b, c+1; \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) = \varepsilon\cdot O(1),$$

$$w(x-\varepsilon)\tau(x-\varepsilon) - w(x)\tau(x) = \varepsilon^{\gamma}\cdot O(1)$$

эканлигини эътиборга олсак, (79) тенгликдан $\varepsilon \to 0$ да лимитга ўтиб,

$$M_2 = \Gamma^{-1}(1+c)(1-x)^c x^b F\left(c-a+1, b, c+1; 1-x\right) -$$

$$-\frac{x^a}{\Gamma(c)} \int\limits_x^1 z^{-a}\left[w(x)\tau(x) - w(z)\tau(z)\right](z-x)^{c-1} F\left(a, c-b, c; \frac{z-x}{z}\right) dz$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу ерда дастлаб биринчи гипергеометрик функцияга автотрансформация формуласини қўллаб, сўнгра $x = x_0$ десак, $x_0$ га ўнгдан етарлича яқин бўлган $\delta$ сон учун

$$M_2\big|_{x=x_0} = \Gamma^{-1}(1+c)x_0^a(1-x_0)^c F\left(a, c-b+1, c+1; 1-x_0\right) -$$

$$-\frac{x_0^a}{\Gamma(c)} \int\limits_\delta^1 z^{-a}\left[w(x_0)\tau(x_0) - w(z)\tau(z)\right](z-x_0)^{c-1} F\left(a, c-b, c; \frac{z-x_0}{z}\right) dz -$$

$$-\frac{x_0^a}{\Gamma(c)} \int\limits_{x_0}^\delta z^{-a}\left[w(x_0)\tau(x_0) - w(z)\tau(z)\right](z-x_0)^{c-1} F\left(a, c-b, c; \frac{z-x_0}{z}\right) dz$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

$(-1) < c < a < 0 < b < c+1$ ёки $(-1) < a < c < b < 0$ шартлар бажарилганда, дифференциаллаш ёрдамида $F(a, c-b+1, c+1; 1-x)$ ва $F(a, c-b, c; (z-x)/z)$ функциялар $x$ бўйича ўсувчи эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Шу сабабли, $\forall x_0 \in (0, 1]$ учун

$$F(a, c-b+1, c+1; 1-x_0) > F(a, c-b+1, c+1; 1) > 0.$$

$$F(a, c-b, c; (z-x_0)/z) > F(a, c-b, c; 1) > 0.$$

Буларни, $\Gamma(c) < 0$ тенгсизликни ва теореманинг қолган шартларини эътиборга олсак, охирги тенгликдан (77) тенгсизликлар дархол келиб чиқади. 4-теорема исботланди.

Одатда 3- ва 4-теоремалар $F_{0x}$ ва $F_{1x}$ операторлар учун *экстремум принципи* деб аталиб, уларга ўхшаш теоремалар [17] да $a$ ва $b$ параметрларнинг бошқа қийматлари учун исботланган.

## Фойдаланилган адабиётлар

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. -М.: Наука, 1965. -296 с.
2. Ватсон Дж.Н. Теория бесселевых функций. Т.1. -М.: Издательство ИЛ, 1949. -798 с.
3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. -М.: Гостехиздат. 1948. -296 с.
4. Капилевич М.Б. О сингулярных задачах Коши и Трикоми // Докл. АН СССР, 1967, Т. 177, №6. -С. 1265-1268.
5. Капилевич М.Б. Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференциалные уравнения. -Минск, 1968, Т. 4, №8. -С.1465-1483.
6. Кузнецов Д.С. Специальные функции. - М.: Высшая школа, 1962. - 424 с.
7. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. -М.: Физматчиз. 1959. - 232 с.
8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. -М.: Наука, 1968. - 512 с.
9. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. -272 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. -М.: Наука, 1983. -752 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Допольнительные главы - М.: Наука, 1986. -800 с.
12. Салахиддинов М.С. Математик физика тенгламалари. -Тошкент: Ўқитувчи,2002. -448 бет.
13. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. -Toshkent. 2007. -256 bet.
14. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. -Ташкент: Фан, 1997. -168 с.

15. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. - Ташкент: Mumtoz So'z, 2010. -355 с.

16. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения// Дифференциальные уравнения. -Минск, 1983, Т. XIX, №1. -С. 110-119.

17. Салахитдинов М.С.,Хасанов А. Принцип экстремума для обобщенного оператора интегро-дифферецирования дробного порядка // Доклады АН УзССР. - Ташкент, 1988, №11. -С.3-4.

18. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. -М.: Высшая школа. 1985. -304 с.

19. Уринов А.К., Рафиков А.Н. Принцип экстремума для одного интегро-дифференциального оператора дробного порядка // Вестник Баткентского государственного университета. - Баткент, 2009. №5. -С. 184-187.

20. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. II. -М.: Физматгиз, 1960. - 440 с.

21. Appell P.. Kampe de Feriet J. Functions Hypergeometrigues et Hyperspheriques, Polunomes d'Hermite. -Paris, Gauthier-Villars.,1926. 440p.

22. Salakhitdiniov M.S., Urinov A.K. and Khaydarov I.U. An Extremum Principle for a Class of Hyperbolic type equations and for Operators Connected with Them // Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations, Springer Basel AG, Vol. 216, - Pp 211-231.

# МУНДАРИЖА

## БИРИНЧИ БЎЛИМ
## МАХСУС ФУНКЦИЯЛАР

## Қайдлар учун

Ўқув услубий нашр

АХМАДЖОН ЎРИНОВ

# МАХСУС ФУНКЦИЯЛАР
# ВА
# МАХСУС ОПЕРАТОРЛАР

Ўқув-услубий қўлланма

Муҳаррир: А.Садиқов
Техник муҳаррир: А.Исмоилов
Сахифаловчи дизайнер: И.Хайдаров

Нашриёт лицензияси AI № 162. 14.08.2009 й.
Теришга 21.09.2012 й. берилди. Босишга 17.11.2012 й. да рухсат этилди. Бичими 60x84 $^{1}/_{16}$ Офсет босма. "Times" гарнитураси. Шартли б.т. 7,25. Нашр-ҳисоб т. 7,0. Адади 150 нусха.

Буюртма № 18

"ФАРҒОНА" нашриёти.
1500114, Фарғона шаҳри, Соҳибқирон Темур кўчаси, 28-уй

"Водил принт" ХК босмахонаси
Фарғона тумани, Водил шаҳарчаси, Марғилон кўчаси

ISBN 978-9943-349-55-1
9 789943 349551