

S. Alixanov

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

S. ALIXONOV

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

*O`zbekiston Respublikasi oily va o`rta maxsus ta`limi vazirligi
matematika fakultetining bakalavr ta`lim yo`nalishidagi talabalari
uchun darslik sifatida tavsiya etgan*

Toshkent “O`qituvchi”
2008

Taqrizchilar

1. Pedagogika fanlari doktori, professor Jo'raboy Ikromov
2. Toshkent Milliy Universitetining dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent Mashrabjon Mamatov

Ushbu darslik universitet va pedagogika oliygoхlarining matematika fakulteti talabalari uchun "Matematika o'qitish metodikasi" fanining dasturi asosida yozilgan bo'lib, unda asosan umumiy metodikaga doir bo'lgan matematika o'qitish metodikasining maqsadi, mazmuni, formasi metod va vositalari orasidagi munosabatlar pedagogik, psixologik va didaktik nuqtai nazardan o'chib berilgan. Ushbu darslikda keltirilgan barcha-nazariy va amaliy mavzularning mazmuni talabalarni matematika o'qitish metodikasi fanidan olidigan amaldagi dasturiga to'la mos keladi. Darslikning barcha boblarining oxirida mustaqil ishlash uchun misollar, o'z o'zini nazorat qilish uchun savollar hamda tayanch iboralar keltirilgan. Ushbu kitob Universitetlarning matematika fakulteti bakalavr yo'nalishidagi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan.

A 51

Alixonov S.

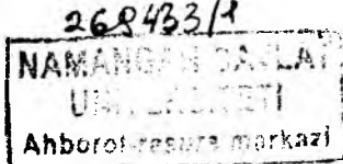
Matematika o'qitish metodikasi.

Universitetlarning matematika fakulteti bakalavr yo'nalishidagi talabalari uchun darslik – T.: O'qituvchi, 2008 y.

BBK 74.262

A 4306010500-5
353(04)-08 211-07

Toshkent "O'qituvchi" nashriyoti



SO'Z BOSHI

Ushbu darslik matematika va amaliy matematika bakalavr talabalar uchun matematika o'qitish metodikasi kursining dasturi asosida yozilgan. Darslikda matematik ta'limganing maqsadi, mazmuni, formasi, metodlari va uning vositalarini matematika darslariga tadbiq qilish qonuniyatlari psixologik, pedagogik va didaktik nuqtai-nazardan bayon qilingan. Matematik ta'limgani isloh qilish, kadrlar tayyorlash milliy dasturi va uzluksiz ta'limgani amalga oshirish masalalari ham bayon etilgan.

Ma'lumki, matematika fani mavjud moddiy dunyodagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o'rghanish jarayonida «ilmiy izlanish» metodlaridan foydalanadi. Shuning uchun ham ushu darslikda ilmiy izlanish metodlaridan kuzatish va tajriba, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraktlashtirish va konkretlashtirishlarni matematika darslarida qo'llanishi ilmiy-metodik jihatidan tushuntirishga harakat qilingan. Matematikani o'qitish jarayonida fikrlash formalarini paydo qilish metodikasi ham yoritilgan, ya'ni hissiy bilish (sezgi, idrok, tasavvur) bilan mantiqiy bilish (tushuncha, hukm, xulosa) orasidagi mantiqiy bog'lanishlar ochib berilgan. Matematik tushuncha va uni o'quvchilar ongida shakllantirish metodikasi, matematik hukm va uning turlari bo'lmish aksioma, postulat va teoremlarni o'quvchilarga o'rgatish metodikalari yoritilgan. Matematik xulosa va uning induktiv, deduktiv hamda analogik turlarini dars jarayonidagi tadbiqlari ko'rsatilgan. Matematika fanini o'qitishdagi didaktik prinsiplarning turlarini o'rgatishga alohida ahamiyat berilgan.

Darslikda yangi pedagogik texnologiya asosida o‘qitishning an'anaviy va noan'anaviy metodlaridan: ma’ruza, suhbat, mustaqil ish, evristik va muammoli ta’lim metodlarini dars jarayonida qo‘llanilishiga katta ahamiyat berilgan. Matematika darsi, uning tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi, matematika darsining turlari, darsga tayyorgarlik va uning tahlili matematika darsiga qo‘yilgan talablar ochib berilgan. Darslikda yana son tushunchasini kiritish va uni kengaytirish, ular ustida to‘rt amalni bajarish, maktabdagi ayniy shakl almashtirishlarni o‘rgatish, maktab matematika kursidagi tenglama turlari, tenglamalar sistemasi hamda parametrik usulda berilgan tenglamalarni yechish metodikalari ham ko‘rsatilgan. Darslik oxirida masala va uning turlarini yechish metodikasi ham ko‘rsatilgan. Har bir bob tugagandan keyin o‘quvchi talabalar uchun shu bob mavzularining mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo‘lgan savollar sistemasi, hamda tayanch iboralar keltirilgan.

Ushbu darslik haqida qimmatli fikrlarini bildirgan O‘zbekiston fanlar akademiyasining akademigi professor Sh.K.Farmonovga, pedagogika fanlari doktori, proffessor J.Ikromovga, professor N.G‘aybullayev va professor M.Tojiyevlarga hamda darslikni o‘qib chiqib o‘zlarini qimmatli fikrlarini bildirgan fizika-matematika fanlar nomzodi, Toshkent Milliy universitetining dotsenti Mashrabjon Mamatovga samimiyl minnatdorchiligidagi bildiraman.

Muallif.

I - BOB
UMUMITA'LIM MAKTABALARIDA MATEMATIKA
O'QITISH MASALALARI.

1-§. Matematika o'qitish metodikasi predmeti.

Matematika so'zi qadimgi grekcha - mathema so'zidan olingan bo'lib, uning ma'nosi «fanlarni bilish» demakdir. Matematika fanining o'rganadigan narsasi (ob'ekti) materiyadagi mavjud narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlardan iborat. Hozirgi davrda matematika fani shartli ravishda ikkiga ajraladi.

1) elementar matematika, 2) oliy matematika.

Elementar matematika ham mustaqil mazmunga ega bo'lgan fan bo'lib, u oliy matematikaning turli tarmoqlaridan, ya'ni nazariy arifmetikadan, sonlar nazariyasidan, oliy algebradan, matematik analizdan va geometriyaning mantiqiy kursidan olingan elementar ma'lumotlar asosiga qurilgandir.

Oliy matematika fani esa real olamning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni to'la hamda chuqur aks ettiruvchi matematik qonuniyatlarni topish bilan shu qo'llanadi.

Elementar matematika fani maktab matematika kursining asosini tashkil qiladi. Maktab matematika kursininng maqsadi o'quv-chilarga ularning psixologik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik bilimlar sistemasi ma'lum usulda (metodika) orqali o'quv-chilarga etkaziladi. (Metodika so'zi grekcha so'z bo'lib, «yo'l» degan ma'noni beradi). Matematika metodikasi pedagogika va didaktika fanining asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, jamiyatimiz taraq-qiyoti darajasida ta'lim maqsadlariga mos keluvchi matematikani o'qitish, o'rganish qonuniyatlarini o'rganadigan mustaqil fandir. Matematika metodikasi ta'lim jarayoni bilan bog'liq bo'lgan quyidagi uch savolga javob beradi:

1. Nima uchun matematikani o'rganish kerak?
2. Matematikadan nimalarni o'rganish kerak?
3. Matematikani qanday o'rganish kerak?

Matematika metodikasi haqidagi tushuncha birinchi bo‘lib shveysariyalik pedagog - matematik G.Pestalotsining 1803 yilda yozgan «Sonni ko‘rgazmali o‘rganish» asarida bayon qilingan. XVII asrning birinchi yarmidan boshlab matematika o‘qitish metodikasiga doir masalalar bilan rus olimlaridan akademik S.E.Gurev (I760-I813), XVIII asrning birinchi va ikkinchi yarmidan esa N.I.Lobachevskiy (I792-I856), I.N.Ulyanov (I83I-I886). L.N.Tolstoy (I828-I9IO) va atoqli metodist-matematik S.I.Shoxor-Trotskiy (I853-I923), A.N.Ostrogradskiy va boshqalar shug‘ullandilar va ular matematika faniga ilmiy nuqtai-nazardan qarab, uning progressiv asoslarini ishlab chiqdilar. Masalan, A.N.Ostrogradskiy «Ong kuzatishdan keyin paydo bo‘ladi, ong real, mavjud olamga asoslangan» deb yozgan edi. Geometriya metodikasidan materiallar (Materiali po metodike geometrii, 1884 yil, 8-bet.).

Keyinchalik matematika o‘qitish metodikasining turli yo‘nalishlari bilan N.A.Izvolskiy, V.M.Bradis, S.E.Lyapin, I.K.Andronov, N.A.Glagoleva, I.Ya.Dempman, A.N.Barsukov, S.I.Novoselov, A.Ya.Xinchin, N.F.Chetveruxin, A.N.Kolmogorov, A.I.Markushevich, A.I.Fetisov va boshqalar shug‘ullandilar.

1970 yildan boshlab maktab matematika kursining mazmuni yangi dastur asosida o‘zgartirildi, natijada uni o‘qitish metodikasi ham ishlab chiqildi. Hozirgi dastur asosida o‘qitilayotgan maktab matematika fanining metodikasi bilan professorlardan V.M.Kolyagin, J.Ikromov, R.S.Cherkasov, P.M.Erdniev, N.G‘aybullaev, T.To‘laganov, A.Abduqodirov va boshqa metodist olimlar shug‘ullanmoqdalar. Matematika o‘qitish metodikasi pedagogika institutlarining III-IV kurslarida o‘tiladi. U o‘zining tuzilishi xususiyatiga ko‘ra shartli ravishda uchga bo‘linadi:

1. Matematika o‘qitishning umumiy metodikasi. Bu bo‘limda matematika fanining maqsadi, mazmuni, formasi, metodlari va uning vositalarining metodik sistemasi, pedagogika, psixologiya qonunlari hamda didaktik prinsiplar asosida ochib beriladi.

2. Matematika o‘qitishning maxsus metodikasi. Bu bo‘limda matematika o‘qitish umumiy metodikasining qonun va qoidalarining aniq mavzu materiallariga tadbiq qiliш yo‘ilari ko‘rsatiladi.

3. Matematika o'qitishning aniq metodikasi.

Bu bo'lim ikki qismdan iborat:

1. Umumiy metodikaning xususiy masalalari;
2. Maxsus metodikaning xususiy masalalari.

Masalan, VI sinfda matematika darslarini rejalashtirish va uni o'tkazish metodikasi deyilsa, bu umumiy metodikaning xususiy masalasi bo'lib hisoblanadi.

2-§. O'rta umumta'lim mакtablарida matematika o'qitishning maqsadi

O'rta maktablarda matematika o'qitishning maqsadi quyidagi uch omil bilan belgilanadi:

1. Matematika o'qitishning umumta'limi maqsadi.
2. Matematika o'qitishning tarbiyaviy maqsadi.
3. Matematika o'qitishning amaliy maqsadi.

Matematika o'qitishning umumta'limi maqsadi o'z oldiga quyidagi vazifalarni qo'yadi:

a) O'quvchilarga ma'lum bir dastur asosida matematik bilimlar tizimini berish. Bu bilimlar tizimi matematika fani to'g'risida o'quvchilarga etarli darajada ma'lumot berishi, ularni matematika fanining yuqori bo'limlarini o'rganishga tayyorlashi kerak. Bundan tashqari, dastur asosida o'quvchilar o'qish jarayonida olgan bilimlarining ishonchli ekanligini tekshira bilishga o'rganishlari, ya'ni isbotlash va nazorat qilishning asosiy metodlarini egallashlari kerak.

b) O'quvchilarning og'zaki va yozma matematik bilimlarini tarkib toptirish.

Matematikani o'rganish o'quvchilarning o'z ona tillarida xatosiz so'zlash, o'z fikrini aniq, ravshan va lo'nda qilib bayon eta bilish malakalarini o'zlashtirishlariga yordam berishi kerak. Bu degan so'z o'quvchilarning har bir matematik qoidani o'z ona tillarida to'g'ri gapira olishlariga erishish hamda ularni ana shu qoidanining matematik ifodasini formulalar yordamida to'g'ri yoza olish qobiliyatlarini atroflicha shakllantirish demakdir;

v) O'quvchilarni matematik qoniuniyatlar asosida real haqiqatlarni bilishga o'rgatish. Bu yerda o'quvchilarga real olamda yuz

beradigan eng sodda hodisalardan tortib to murakkab hodisalargacha hammasining fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni tushunishga imkon beradigan hajmda bilimlar berish ko'zda tutiladi.

Bunday bilimlar berish orqali esa o'quvchilarning fazoviy tasavver qilishlari shakllanadi hamda mantiqiy tafakkur qilishlari yanada rivojlanadi.

Matematika o'qitishning tarbiyaviy maqsadi o'z oldiga quyidagilarni qo'yadi:

a) O'quvchilarda ilmiy dunyocqarashni shakllantirish. Bu g'oya bilish nazariyasi asosida amalga oshiriladi.

b) O'quvchilarda matematikani o'rghanishga bo'lgan qiziqishlarni tarbiyalash.

Bizga ma'lumki, matematika darslarida o'quvchilar o'qishning dastlabki kunlaridanoq mustaqil ravishda xulosa chiqarishga o'rghanadilar. Ular avvalo kuzatishlar natijasida, so'ngra esa mantiqiy tafakkur qilish natijasida xulosa chiqatadilar. Ana shu chiqarilgan xulosalar matematik qonuniyatlar bilan tasdiqlanadi.

Matematika o'qituvchisining vazifasi o'quvchilarda mustaqil mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish bilan birga ularda matematikaning qonuniyatlarini o'rghanishga bo'lgan qiziqishlarini tarbiyalashdan iboratdir.

v) O'quvchilarda matematik tafakkurni va matematik madaniyatni shakllantirish. Matematika darslarida o'rghaniladigan har bir matematik xulosa qat'iylikni talab qiladi, bu esa o'z navbatida juda ko'p matematik tushuncha va qonuniyatlar bilan ifodalanadi. O'quvchilar ana shu qonuniyatlarni bosqichma-bosqich o'rghanishlari davomida ularning mantiqiy tafakkur qilishlari rivojlanadi, matematik xulosa chiqarish madaniyatları shakllanadi. O'quvchilarni biror matematik qonuniyatni ifoda qilmoqchi bo'lgan fikrlarni simvolik tilda to'g'ri ifodalay olishlari va aksincha simvolik tilda ifoda qilingan matematik qonuniyatni o'z ona tillarida ifoda qila olishlariga o'rgatish orqali ularda matematik madaniyat shakllantiriladi.

3. Matematika o'qitishning amaliy maqsadi o'z oldiga quyidagi vazifalarni qo'yadi:

a) Matematika kursida olingen nazariy bilimlarni kundalik hayotda uchraydigan elementar masalalarni yechishga tadbiq qila olishga o'rgatish. Bunda asosan o'quvchilarda nazariy bilimlarni amaliyatga bog'lay olish imkoniyatlarini tarkib toptirish, ularda turli sonlar va matematik ifodalar ustida amallar bajarish malakalarini shakllantirish va ularni mustahkamlash uchun maxsus tuzilgan amaliy masalalarni hal qilishga o'rgatiladi.

b) Matematikani o'qitishda texnik vosita va ko'rgazmali qurollardan foydalanish malakalarini shakllantirish. Bunda o'quvchilarning matematika darslarida texnika vositalaridan, matematik ko'rgazmali qurollar, jadvallar va hisoblash vositalaridan foydalana olish malakalari tarkib toptiriladi.

v) O'quvchilarni mustaqil ravishda matematik bilimlarni egallahsga o'rgatish. Bunda asosan o'quvchilarni o'quv darsliklaridan va ilmiy-ommaviy matematik kitoblardan mustaqil o'qib o'rghanish malakalarini shakllantirishdan iboratdir.

3-§. Matematika o'qitish metodikasining boshqa fanlar bilan aloqasi.

Bizga ma'lumki, matematika o'qitish metodikasi fani pedago-gika fanining ma'lum bir bo'limi bo'lib, u matematika fanini o'qitish qoidalarini o'rghanish bilan shug'ullanadi. Matematika o'qitish metodikasi matematika fanini o'qitish qonuniyatlarini o'rghanish jarayonida pedagogika, mantiq, psixologiya, matematika, lingvistika va falsafa fanlari bilan uzviy aloqada bo'ladi. Boshqacha aytganda, maktabda matematika o'qitish muammolari mantiq, psixologiya, pedagogika, matematika va falsafa fanlari bilan uzviy bog'liqda hal qilinadi. Matematika o'qitish metodikasining metodologik asosi bilish nazariyasiga asoslangandir.

Matematika metodikasi fani matematik ta'limning maqsadi, mazmuni, formasi, uslubi va uning vositalarini dars jarayoniga tadbiqiy qonuniyatlarini o'rGANIB keladi. Matematika fani fizika, chizmachilik, kimyo va astronomiya fanlari bilan ham uzviy aloqada bo'ladi. Matematika fanining boshqa fanlar bilan uzviy aloqasi quyidagi ikki yo'l bilan amalga oshiriladi:

1) Matematika tizimining butunligini buzmagan holda o'qishni fanlarning dasturlarini moslashtirish.

2) Boshqa fanlarda matematika qonunlarini, formulalarini teoremlarni o'rganish bilan bog'liq bo'lган materiallardan matematika kursida foydalanish.

Hozirgi vaqtida matematika dasturini boshqa fanlar bilan moslashtirish masalasi ancha muvaffaqiyatli hal qilingan. Masalan, funksiyalar va ularni grafik tasvirlash haqida fizikada foydalaniладиган ба'зи ма'lumotlarni o'quvchilar VII sinfdan boshlab o'ргана boshlaydilar. VIII sinfda beriladigan geometrik yasashlarga doir ko'п bilimlar chizmachilik fani uchun boy material bo'ladi, chizmachilikning vazifasi bu bilimlarni turli chizmachilik ishlarini bajartirish yo'li bilan puxtalashdan iboratdir.

Matematika darslarida boshqa fanlardan foydalanish masalasini dasturda aniq ko'rsatish qiyin, buni o'qituvchining o'zi amalga oshiradi, ya'ni o'quv materialini rejalashtirishda va darsga tayyorlamish vaqtida e'tiborga olishi kerak. Masalan, tenglamalarni o'rganish davrida fizik miqdorlar orasidagi bog'lanishlarni aks ettiradigan tenglamalarni, ya'ni issiqlik balansi tenglamasi, issiqlikdan chiziqli kengayish tenglamasi va shunga o'xhash tenglamalarni ham yechirishi mumkin. Dasturning foiz, proporsiya va boshqa boblarini o'rganishda ximiya va fizika masalalaridan foydalanish ma'quldir (aralashmalar, quymalar va shunga o'xhashlar), masalan: 1) 20% li eritma hosil qilish uchun eritiladigan moddadan 240 g suvga qancha solish kerak? 2) 5% li 400 g eritmani qaynatib, 200 g ga keltirildi. Endi eritmaning o'tkirligi qancha bo'ladi?

Qo'shni fanlarga doir materiallardan matematika darslarida foydalanish fanlararo uzviy aloqadorlikni yanada mustahkamlaydi.

4-§. Ta'llimni isloh qilinishi.

O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgach mifikta ta'llimiga juda ham katta e'tibor berildi. Jumladan 1997 yil 29 avgust kuni O'zbekiston oliy majlisining IX sessiyasida ta'llim to'g'risidagi qonunga asoslagan kadrlar tayyorlash milliy dasturi qabul qilindi.

Bü qabul qilingan qonunga ko'ra uzlusiz ta'lim tizimining faoliyati davlat ta'lim standartlari asosida, o'z ichiga quyidagi ta'lim turlarini oladi.

Maktabgacha ta'lim, boshlang'ich ta'lim, umumiy o'rta ta'lim, o'rta maxsus kasb-hunar ta'limi, oliy ta'lim, oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim, kadrlar malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash, muktabdan tashqari ta'lim.

Kadrlar tayyorlash milliy modelining o'ziga xos xususiyati mustaqil ravishdagi to'qqiz yillik umumiy o'rta ta'lim hamda uch yillik o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limini joriy etishdan iboratdir.

Bu esa umumiy ta'lim dasturlaridan o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi dasturlariga izchil o'tilishini ta'minlaydi. Umumiy ta'lim dasturlari: maktabgacha ta'lim, boshlang'ich ta'lim (I-IV sinflar), umumiy o'rta ta'lim (V-IX sinflar), o'rta maxsus va kasb-hunar ta'limini qamrab oladi.

Maktabgacha ta'lim bola sog'lom, har tomonlama kamol topib shakllanishini ta'minlaydi, unda o'qishga intilish xissini uyg'otadi, uni muntazam bilim olishga tayyorlaydi. Maktabgacha ta'lim bola olti-etti yoshga etguncha davlat va nodavlat makgabgacha tarbiya, bolalar muassasalarida hamda oilalarda amalga oshiriladi.

Umumiy o'rta ta'lim I-IX sinflar o'qishidan iborat bo'lgan majburiy ta'limdir. Ta'limni bu turi boshlang'ich sinfni (I-IV sinflar) qamrab oladi hamda o'quvchilarining fikrlashlari bo'yicha muntazam bilim olishlarini, o'quv-ilmiy va umummadaniy bilimlarni, milliy umumbashariy qadriyatlarga asoslangan ma'naviy-ahloqiy fazillarni, mehnat ko'nikmalarini, hamda kasb tanlashni shakllantiradi. Umumiy o'rta ta'lim tugallanganidan keyin ta'lim fanlari va ular bo'yicha olingan baholar ko'rsatilgan hamda davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi attestat beriladi.

O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi umumiy o'rta ta'lim negizida o'qish muddati uch yil bo'lgan majburiy bo'lgan uzlusiz ta'lim tizimining turidir. O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi yo'nalishi akademik litsey yoki kasb-hunar kolleji o'quvchilar tomonidan ixtiyoriy tanlanadi.

Akademik iitsey davlat ta'lim standartiariga muvofiq o'rta maxsus ta'lim beradi. O'quvchilarini imkoniyatlari va qiziqishlarini

hisobga olgan holda ularning jadal intelektual rivojlanishi chuqur, sohalashtirilgan, kasbga yo'naltirilgan ta'lim olishini ta'minlaydi.

Kasb-hunar kolleji tegishli davlat ta'lim standartlari darajasida o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi beradi, bunda o'quvchilarning kasb hunarga moyilligi, bilim va ko'nikmalarini chuqur rivojlantirish, tanlab olgan kasb-hunar bo'yicha bir yoki bir necha ixtisosni egallash imkonini beradi.

Oliy ta'lim o'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi negiziga asoslanadi hamda ikki bosqichga ega.

1. Bakalavriat - mutaxassisliklar yo'nalishi bo'yicha fundamental va amaliy bilim beradigan, ta'lim muddati kamida to'rt yil bo'lgan tayanch oliy ta'limdir. Bakalavrlik dasturi tugagandan so'ng bitiruvchilarga davlat attestatsiyasi yakunlariga binoan kasb bo'yicha «bakalavr» darajasi beriladi.

Magistratura - aniq mutaxassislik bo'yicha fundamental va amaliy bilim beradigan bakalavr negizidagi ta'lim muddati kamida ikki *yıl* bo'lgan oliy ta'limdir. Magistr darajasini beradigan davlat malaka attestatsiyasi magistrlik dasturining nihoyasidir.

Magistrlarga davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi, kasb-hunar faoliyati bilan shug'ullanish huquqini beradigan diplom beriladi.

Oliy o'quv yurtidan keyingi ta'limni oliy o'quv yurtlarida, ilmiy tadqiqot muassasalarida aspirantura, doktorantura, mustaqil tadqiqotchi ko'rinishlaridagi bosqichlar asosida davom ettirish mumkin. Oliy o'quv yurtidan keyingi ta'lim bosqichlari dissertatsiya himoyasi bilan yakunlanadi. Yakuniy daylat attestatsiyalarining natijasiga ko'ra tegishli ravishda fan nomzodi va fan doktori ilmiy darajasi berilib, davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi diplomlar beriladi.

Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash mutaxassisliklarning kasb bilimlari va ko'nikmalarini yangilash hamda chuqurlashtirishga qaratilgan. Kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash ta'lim muassasalaridagi o'qish natijalariga ko'ra davlat tomonidan tasdiqlangan namunadagi guvohnoma va sertifikat topshiriladi.

I-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematika o‘qitish metodikasi fani nimani o‘rgatadi va qanday savollarga javob beradi?
2. Umumiy metodika bilan xususiy metodikaning farqi nimadan iborat?
3. Matematika fanini o‘qitishdagi umumta’limiy maqsad nimalardan iborat?
4. Matematikani o‘qitishdagi tarbiyaviy va amaliy maqsadlarni aytib bering.
5. Matematika o‘qitish metodikasi fani qaysi fanlar bilan uzviy aloqada bo‘ladi?
6. Ta’lim to‘g‘risidagi qonun qachon qabul qilingan?
7. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi qachon qabul qilingan?
8. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi necha bosqichdan iborat?
9. Uzluksiz ta’limning ma’nosini aytib bering.
10. Maktabgacha ta’lim nima?
11. Boshlang‘ich ta’lim nechanchi sinflarni o‘z ichiga oladi?
12. O‘rta umumiy ta’limga nechanchi sinflar kiradi?
13. Akademik litsey bilan kasb-hunar kollejlarining farqi nimalardan iborat?
14. Oliy ta’lim necha bosqichdan iborat?
15. Oliy ta’limning bakalavriat yo‘nalishini tushuntirib bering.
16. Oliy ta’limning magistratura yo‘nalishini tushuntiring.
17. Oliy ta’limdan keyingi ta’limlarni aytib bering.

I-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Matematika, metodika, umumiy metodika, xususiy metodika, umumta’limiy maqsad, tarbiyaviy maqsad, amaliy maqsad, ta’lim haqidagi qonun, kadrlar tayyorlash milliy dasturi, sifat bosqichi, uzluksiz ta’lim, maktabgacha ta’lim, boshlang‘ich ta’lim, o‘rta umumiy ta’lim, akademik litsey, kasb-hunar kolleji, oliy ta’lim, bakalavr, magistr, aspirantura, doktarantura, malaka oshirish.

II BOB

MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARI

1-§. Matematik tushunchcha

Biz ta'lim deyilganda o'qituvchi bilan o'quvchilar orasidagi ongli va maqsadga tomon yo'naltirilgan bilishga doir faoliyatni tushunamiz. Har qanday ta'lim o'z oldiga ikkita maqsadni qo'yadi.

1) O'quvchilarga dastur asosida o'rganilishi lozim bo'lgan zarur bilimlar sistemasini berish.

2) Matematik bilimlarni berish orqali o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ta'lim jarayonidagi ana shu ikki maqsad amalga oshishi uchun o'qituvchi har bir o'rgatilayotgan tushunchani psixologik, pedagogik va didaktik qonuniyatlar asosida tushuntirishi kerak. Buning natijasida o'quvchilar ongida **bilish** deb ataluvchi psixologik jarayon hosil bo'ladi.

Bizga falsafa kursidan ma'lumki, bilish jarayoni «jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga demakdir». Bunda ko'rindiki bilish jarayoni tafakkur qilishga bog'liq ekan. «Tafakkur - inson ongida ob'ektiv olamning aktiv aks etishi demakdir» (Yu.M.Kolyagin. «Matematika o'qitish metodikasi, M., 1980 y, 57-bet).

Psixologik nuqtai nazardan qaraganda bilish jarayoni ikki xil bo'ladi:

1) **Hissiy bilish** (sezgi, idrok va tasavvur).

Insonning hissiy bilishi uning sezgi va tasavvurlarida o'z ifodasini topadi. Inson sezgi a'zolari vositasida real dunyo bilan o'zaro aloqada bo'ladi. Bilish jarayonida sezgilar bilan birga idrok ham ishtirok etadi. Sezgilar natijasida ob'ektiv olamning sub'ektiv obrazi hosil bo'ladi, ana shu sub'ektiv obrazning inson ongida butunicha aks etishi idrok deb ataladi.

Tashqi olamdag'i narsa va hodisalar inson miya po'stlog'ida sezish va idrok qilish orqali ma'lum bir iz qoldiradi. Oradan ma'lum bir vaqt o'tgach, ana shu izlar jadallahishi va biror narsa yoki

hodisaning sub'ektiv obrazi sifatida qayta tiklanishi mumkin. Ana shu ob'ektiv olamning sub'ektiv obrazining ma'lum vaqt o'tgandan keyin qayta tiklanish jarayoni tasavvur deb ataladi.

2) Mantiqiy bilish (tushuncha, hukm va xulosa).

Har qanday mantiqiy bilish hissiy bilish orqali amalga oshadi, shuning uchun ham hap bir o'rganilayotgan matematik ob'ektdagi narsalar seziladi, abstrakt nuqtai nazardan idrok va tasavvur qilinadi, so'ngra ana shu o'rganilayotgan ob'ektdagi narsa to'g'risida ma'lum bir matematik tushuncha hosil bo'ladi.

T a ' r i f. Matematik ob'ektdagi narsalarning asosiy xossalari aks ettiruvchi tafakkur formasiga matematik tushuncha deyiladi.

Har bir matematik tushuncha o'zining ikki tomoni, ya'ni mazmuni va hajmi bilan xarakterlanadi.

T a ' r i f. Tushunchaning mazmuni deb, ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy, xossalari to'plamiga aytildi.

Masalan, to'g'ri to'rtburchak tushunchasini olaylik. To'g'ri to'rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalari to'plamidan iboratdir:

1) To'g'ri to'rtburchak diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.

2) Ichki qarama-qarshi burchaklarining yig'indisi 180^0 ga teng.

3) Diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada teng ikkiga bo'linadi.

T a ' r i f. Tushunchaning hajmi deb, ana shu tushunchaga kirgan barcha ob'ektlari to'plamiga aytildi.

Masalan, to'rtburchak tushunchasining hajmi shu to'rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to'rtburchak turlaridan, ya'ni parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat bo'ladi. Bundan to'rtburchak tushunchasining hajmi tomonlari uzunliklarining kattaligi turlicha bo'lgan barcha katta-kichik to'rtburchaklar tashkil qilishi ko'rindi.

Bizga hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor bo'lgan tushunchani jins tushunchasi, aksincha esa hajmi tor va mazmuni keng bo'lgan tushunchani tur tushunchasi deb yuritilishi psixologiya fanidan ma'lum.

1 - m i s o l. Akslantirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita, ya’ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bu yerda akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi, qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirishlar esa akslantirish tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari bo‘ladi. Bu mulohazalardan jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan hajm jihatidan keng va mazmun jihatidan tor tushuncha ekani ko‘rinadi.

2 - m i s o l. Ko‘pburchak tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan ikkita qabariq va botiq ko‘pburchak tushunchalari kelib chiqadi. Ko‘pburchak tushunchasi bu tushunchalariga nisbatan jins tushunchasi deb yuritiladi, chunki uning hajmi qabariq va botiq ko‘pburchaklar hajmlaridan kattadir. qabariq va botiq ko‘pburchaklar esa ko‘pburchak tushunchasiga nisbatan tur tushunchalari deb yuritiladi, chunki ulardan hap birining hajmi ko‘pburchak tushunchasining hajmidan kichik, ammo mazmunlari ko‘pburchak tushunchasining mazmunidan katta.

2-§. Matematik tushunchalarni ta’riflash metodikasi.

Har bir fanda bo‘lgani kabi matematika fanida ham ta’riflanadigan va ta’riflanmaydigan tushunchalar mavjud.

Maktab matematika kursida, shartli ravishda, ta’riflanmaydigan eng sodda tushunchalar qabul qilinadi. Jumladan, arifmetika kursida son tushunchasi va qo‘sish amali, geometriya kursida esa tekislik, nuqta, masofa va to‘g‘ri chiziq tushunchalari ta’riflanmaydigan tushunchalardir. Bu tushunchalar yordamida boshqa matematik tushunchalar ta’riflanadi.

Ta’rif degan so‘zning ma’nosi shundan iboratki, bunda qaralayotgan tushunchalarni boshqalaridan farqlashga, fanga kiritilgan yangi termin mazmunini oydinlashtirishga imkon beruvchi mantiqiy usul tushuniladi.

Tushunchaning ta’rifi ta’riflanuvchi tushuncha bilan ta’riflovchi tushunchalar orasidagi munosabatdan hosil bo‘ladi.

Tushunchaning ta’rifi inglizcha definitsiya (definite) so‘zidan olingan bo‘lib, «chegara» degan yoki «biror narsaning oxiri» degan

ma'noni bildiradi. Professor J.Ikromov o'zining «**Maktab matematika tili**» nomli kitobida tushunchalarning ta'rifini quyidagi turlarga ajratadi:

1) **Real ta'rif.** Bunda qaralayotgan tushunchaning shu gruppadagi tushunchalardan farqi ko'rsatib beriladi. Bunda ta'riflovchi va ta'riflanuvchi tushunchalar hajmlarining teng bo'lishi muhim rol o'ynaydi. Masalan: «Aylana deb tekislikning biror nuqtasidan masofasi berilgan masofadan katta bo'limgan masofada yotuvchi nuqtalar to'plamiga aytildi». Bu yerda ta'riflovchi tushunchalar esa tekislik, nuqta, masofa tushunchalaridir.

2) **Klassifikatsion ta'rif.** Bunda ta'riflanayotgan tushunchaning jins tushunchasi va uning tur jihatidan farqi ko'rsatilgan bo'ladi. Masalan, «kvadrat - barcha temonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdir». Bu ta'rifda «to'g'ri to'rtburchak» tushunchasi «kvadrat»ning jins tushunchasi, «barcha temonlari teng» esa tur jihatidan farqini ifoda qiladi.

3) **Genetik ta'rif yoki induktiv ta'rif.** Bunda asosan tushunchaning hosil bo'lish jarayoni ko'rsatiladi. Boshqacha qilib aytganda, tushunchaning hosil bo'lish jarayonini ko'rsatuvchi ta'rif genetik ta'rif deyiladi.

Bizga psixologiya kursidan ma'lumki, genetika so'zi grekcha *genesis* so'zidan olingan bo'lib «kelib chiqish» yoki «manba» degan ma'noni bildiradi.

Masalan: 1) To'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismni konus deyiladi.

2) To'g'ri burchakli trapetsiyaning balandligi atrofidan aylanishidan hosil bo'lgan jismni kesik konus deyiladi.

3) Doiraning diametri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism shar deyiladi.

Yuqoridaqlardan ko'rinadiki, tushunchalarni ta'riflashda har bir tushunchaning mazmuni beriladi, bu degan so'z tushunchaning asosiy alomatlari yoki muhim belgilarini sanab ko'rsatish demakdir. Demak, ta'rifda faqat ta'riflanadigan tushunchani boshqa turdag'i tushunchalardan ajratib turadagan muhim belgilari ifodalanadi.

Maktab matematika kursida tushunchalarning ta'rifi ikki usul bilan tuziladi:

1) Berilgan tushunchaning hajmiga kiruvchi barcha ob'ektlar to'plamiga asoslaniladi. Masalan, tekislikning (masofalarni o'zgartmagan holda) o'z-o'ziga akslanishi siljitish deyiladi. Bu yerda o'q va markaziy simmetriya, parallel ko'chirish va nuqta atrofida burish tushunchalari siljitish tushunchasining ob'ektiga kiruvchi tushunchalardir.

2) Berilgan tushunchalarning aniqlovchi alomatlar to'plamiga asoslaniladi. Bunday ta'rifni tuzishda tushunchaning barcha muhim alomatlari sanab o'tilmaydi, ammo ular tushunchaning mazmunini ochib berish uchun etarli bo'lishi kerak. Masalan, parallelogrammning muhim alomatlari quyidagilardan iborat:

- a) to'rtburchak;
- b) qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng va parallel;
- v) diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi;
- g) qarama-qarshi burchaklari teng;

Parallelogrammni ta'riflashda a) va b) alomatlar orqali quyidagi ta'rifni tuzish mumkin:

«Qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel va teng bo'lgan to'rtburchak parallelogramm deyiladi».

Endi a) va v) alomatlar orqali ta'rif tuzaylik: «diagonallari kesishib, kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linuvchi to'rtburchak parallelogramm deyiladi».

Aytilganlardan ma'lum bo'ladiki, tushunchani ta'riflashda tanlanadigan muhim alomatlar soni etarlicha bo'lgandagina ta'riflanayotgan tushuncha haqidagi ta'rif to'g'ri chiqadi.

3-§. Matematik tushunchalarini kiritish metodikasi

Maktab matematika kursida matematik tushunchalar ikki xil usulda kiritiladi:

1) Aniq - induktiv metod. Bunda o'quvchilar avval o'qituvchining topshiriqlarini bajargan holda o'rganilayotgan tushunchaning umumiyligi xossalari aniqlaydilar, so'ngra o'qituvchi rahbarligida

ta’rifni mustaqil holda tuzishga harakat qiladilar. Yangi tushuncha kiritishning bu yo‘li ayniqsa quyi sinflarda o‘z samarasini beradi.

Bundan tashqari aniq induktiv yo‘l orqali tushunchalarni kiritish jarayonida muammoli vaziyatlar hosil bo‘ladi, buning nati-jasida o‘quvchilarda mustaqil fikrlash qobiliyatlari shakllanadi. Fikrimizning dalili sifatida 6-sinfda o‘rgatiladigan «parallel to‘g‘ri chiziqlar» tushunchasini aniq-induktiv metod orqali kiritish usulini ko‘rib o‘taylik.

O‘rganish jarayonining bosqichlari	Tushuncha shakllanishining psixologik bosqichlari	O‘rganilayotgan tushunchaning aniq modeli
1. Parallel to‘g‘ri chiziqlar tushunchasiga mos keluvchi misol-larni kundalik hayo-timizdan olish	Sezish va idrok qilish	Chizg‘ichning ikki qir-g‘og‘idagi chiziqlar. Dos-kaning qarama-qarshi to-monlaridagi chiziqlar
2. Ana shu tushun-chani ifodalovchi asosiy va asosiy bo‘limgan xossalari ni aniqlash	Idrok qilishdan tasavvurga o‘tish	<p>1) To‘g‘ri chiziqlarning gorizontal joylashishi (asosiy bo‘limgan xossa)</p> <p>2) Bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro bir xil uzoqlikda joylashgan (asosiy xossa)</p> <p>3) To‘g‘ri chiziqlar umumiyluqtiga ega emas (asosiy xossa)</p> <p>4) To‘g‘ri chiziqlarni ikki tomonga cheksiz davom ettirish mumkin (asosiy bo‘limgan xossa)</p> <p>Ustma-ust tushuvchi to‘g‘ri chiziqlar ham bir-biridan bir xil masofada joylashgan bo‘ladi (masofa qiymati 0 ga teng)</p> <p>Parallel so‘zi grekcha so‘z parallelos bo‘lib, yonmay-on boruvchi degan</p>
3. Agar mavjud bo‘lsa, bu tushunchaning muhim holatlarni ham qaraladi.		
4. Parallel so‘zining mazmuni		

5. Parallel to'g'ri chiziqlar tushunchasining asosiy xossasini ajratish va uni ta'riflash	Tasavvurdan tushunchani hosil qilishga o'tish	<p>ma'noni bildiradi</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Bir-biridan bir xil uzoqlikdagi masofada turuvchi to'g'ri chiziqlar justi parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi (aniq bo'limgan ta'rif, chunki biror burchakning tomonlari ham shu burchak bissektrisasiiga nisbatan bir xil uzoqlikda joylashgan bo'ladi) 2) Parallel to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi (to'la bo'limgan ta'rif, chunki, kesishmaydigan to'g'ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi). 3) <i>T a ' r i f. Bir tekislikda yotib umumiy nuqtaga ega bo'limgan yoki ustma-ust tushuvchi ikki to'g'ri chiziq parallel to'g'ri chiziqlar deyiladi.</i>
6. Parallel to'g'ri chiziqlar tushunchasini aniq misollarda ko'rsatish	Tushunchaning hosil bo'lishi	<ol style="list-style-type: none"> 1) O'qituvchi sinf xonasining o'zaro parallel bo'lgan qirralarni ko'rsatadi.
7. Parrallel to'g'ri chiziqlarni simvolik belgilash	Tushunchani o'zlashtirish	<ol style="list-style-type: none"> 2) Kubning modelini ko'rsatib, uning mos qirralidan o'zaro ayqash bo'lgan to'g'ri chiziqlarni ko'rsatadi. Agar bizga <i>a</i> va <i>b</i> to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib, ular o'zaro parallel bo'lsa, uni biz <i>a b</i> kabi belgilaymiz.

4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt-deduktiv metodi.

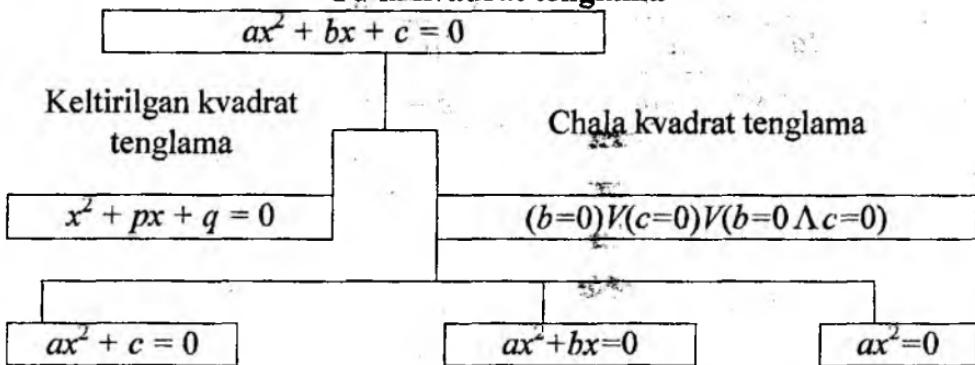
Bunda o'rganiladigan matematik tushuncha uchun ta'rif tayyor ko'rinishda oldindan aniq misol va masalalar yordamida tushuntirilmasdan kiritiladi. Masalan, 7-sinfda o'tiladigan to'la kvadrat tenglama tushunchasi abstrakt-deduktiv metod orqali kiritiladi.

1. Kvadrat tenglama tushuncqhasiga ta'rif beriladi.

T a ' r i f . $ax^2 + bx + c = 0$ ko'rinishidagi tenglamalar to'la kvadrat tenglama deyiladi. Bu yerda x - o'zgaruvchi, a , b , c - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar, $a > 1$.

2) Kvadrat tenglamaning xususiy hollari ko'rib chiqiladi. Buni jadval tarzida bunday ifodalash mumkin.

To'la kvadrat tenglama



3. Hosil qilingan keltirilgan va chala kvadrat tenglamalarga aniq misollar keltiriladi. Masalan,

$$2x^2 - 3x - 4 = 0, x^2 - 5x - 6 = 0,$$

$$3x^2 + 5x = 0, 2x^2 + 7x = 0, 5x^2 = 0, \dots$$

4. Kvadrat tenglama tadbiqiga doir hayotiy misollar keltirish kerak. Masalan, $S = \frac{gt^2}{2}$ formula fizika kursidan bizga ma'lum, bu tenglamani yechish $gt^2 - 2s = 0$ ko'rinishidagi chala kvadrat tenglama holiga keltirib, so'ngra yechiladi.

5. Kvadrat tenglamaning ildizlarini hisoblash formulasini keltirib chiqarish.

1 - u s u l. $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama ildizlari topilsin. Buning uchun quyidagi ayniy almashtirishlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \right] = \\
 &= a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = \\
 &= a \left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = \\
 &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0; \quad a \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_1 = -\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = -\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2-usul.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 ax^2 + bx &= -c \mid \cdot 4a, \\
 4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \mid + b^2, \\
 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac, \\
 (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac; \\
 2ax_{1,2} + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

Agar $ax^2 + bx + c = 0$ da $a=1$ bo'lsa, $x^2 + bx + c = 0$ ko'rinishdagи keltirilgan kvadrat tenglama hosil bo'lib, uning yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Agar $b=p$; $c=q$ desak, $x^2 + px + q = 0$ bo'ladı, uning yechimlari

$$x_1 = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ va } x_2 = \frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ bo'ladı.}$$

3 - usul. $x^2 + px + q = 0 \quad (1)$
 $b^2 = q; \quad 2ab = p$ desak,

$$b = \pm \sqrt{q}, \quad a = \pm \frac{p}{2\sqrt{q}}$$

Bularni (1) ga qo'sysak, u quyidagi ko'rinishni oladi.

$$x^2 + 2abx + b^2 = 0 \quad (2)$$

(2) ga a^2x^2 ni qo'shsak va ayirsak $x^2 + 2abx + b^2 + a^2x^2 - a^2x^2 = 0$ bo'ladı, $a^2x^2 + 2abx + b^2 - a^2x^2 + x^2 = 0$ yoki $(ax+b)^2 - a^2x^2 + x^2 = 0$

belgilashga ko'ra $b = \pm \sqrt{q}; \quad a = \pm \frac{p}{2\sqrt{q}}$ edi, shuning uchun

$$\left(\frac{px}{2\sqrt{q}} + \sqrt{q} \right)^2 - \frac{p^2}{4q}x^2 + x^2 = 0;$$

$$(px + 2q)^2 - p^2x^2 + 4qx^2 = 0;$$

$$px + 2q = \pm x\sqrt{p^2 - 4q};$$

$$2q = x(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q});$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}$$

1 - misol. $x^2 - 3x - 4 = 0; \quad p = -3; \quad q = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -1$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}} = \frac{2 \cdot (-4)}{3 \pm \sqrt{9+16}} = \frac{-8}{3 \pm 5};$$

$$x_1 = \frac{-8}{-2} = 4; \quad x_2 = \frac{-8}{8} = -1;$$

2 - misol. $x^2 - 5x - 6 = 0;$

$$p = -5; \quad q = -6$$

$$x_{1,2} = \frac{2q}{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}} = \frac{2 \cdot (-6)}{5 \pm \sqrt{25+24}} = \frac{-12}{5 \pm 7};$$

$$x_1 = \frac{-12}{12} = -1; \quad x_2 = \frac{-12}{-2} = 6;$$

3 - misol. $2x^2 - 5 = 0$ bo'lsa, $(2x^2 = 5)$

$$\Rightarrow \left(x^2 = \frac{5}{2} \right) \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

4 - misol. $2x^2 - 3x = 0$ bo'lsa, $[x(2x - 3) = 0]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$
 bo'ladi.

5 - misol. $2x^2 = 0$ bo'lsa, $x_{1,2} = 0$ bo'ladi.

5-§. Matematik hukm.

Matematik hukm mantiqiy bilish formalaridan biri bo'lib, unga quyidagicha ta'rif berilgan: «*Tushunchalar asosida hosil qilingan matematik fikrni tasdiqlash yoki inkor qilishga matematik hukm deyiladi*». Bu ta'rifdan ko'rindan, hukmning xarakterli xossasi aytilgan matematik fikrning to'g'riligini tasdiqlash yoki noto'g'-riligini inkor qilishdan iborat ekan.

Matematik tushunchalarni tasdiqlash ma'nosidagi hukmga quyidagicha misollar keltirish mumkin:

1. Paralellogrammning qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel va teng.
2. Har qanday turdag'i uchburchak uchta uchga ega.
3. Uchburchak ichki burchaklarning yig'indisi 180° ga teng.

4. Ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi $2d(n-2)$ ga teng.

Matematik tushunchalarni inkor qilish ma’nosidagi hukmlarga quyidagi misollarni keltirish mumkin:

1. Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunliklarining yig‘indisi uchinchi tomon uzunligidan kichik emas.

2. Piramidadagi uch yoqli burchaklarning yig‘indisi hech qachon o‘zgarmas son bo‘la olmaydi.

3. Har qanday to‘rburchakda ichki burchaklar yig‘indisi 360° dan katta emas.

Bundan kelib chiqadiki, har qanday matematik gap ham matematik hukm bo‘la olmas ekan. Masalan, «ABCD to‘rburchak parallelogramm bo‘la oladimi?» «Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng bo‘la oladimi?». Keltirilgan ikkala misolda ham inkor va tasdiq ma’nosi yo‘q, shuning uchun ular matematik hukmga misol bo‘la olmaydi.

Matematik hukm uch xil bo‘ladi:

1. Birlik hukm. 2. Xususiy hukm. 3. Umumiy hukm.

Matematikani o‘qitish jarayonida yuqorida hukmlarning uchala turi uzviy aloqada bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, birlik hukmning natijasi sifatida xususiy hukm hosil qilinadi, xususiy hukmning natijasi sifatida esa umumiy hukm hosil qilinadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ko‘raylik.

1) Birlik hukmlar:

a) Aylana to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

b) Ellips to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

v) Giperbola to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

g) Parabola to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi.

2) Xususiy hukm: "Aylana, ellips, giperbola va parabolalar ikkinchi tartibli egri chiziqlar hosil qiladi". Yuqorida birlik va xususiy hukmlarga asoslanib, quyidagi umumiy hukmni hosil qilamiz.

3) Umumiy hukm: "Ikkinchi tartibli egri chiziqlar to‘g‘ri chiziq bilan faqat ikki nuqtada kesishadi".

6-§. Matematik xulosa

Matematik xulosa ham mantiqiy tafakkur qilish shakllaridan biri. Matematik xulosaga bunday ta'rif berilgan:

«Ikkita qat'y hukmdan hosil qilingan uchinchi natijaviy hukmga xulosa deyladi».

M i s o l. 1-Hukm: to'rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratdi.

2-Hukm: Ha bir uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng.

3-Hukm: Denak, to'rtburchak ichki burchaklarining yig'indisi 360° ga teng (xulosa bo'ladi).

Maktab matematika kursida xulosalarning uchta turi, ya'ni induktiv, deduktivva analogik xulosalar o'rGANILADI.

T a ' r i f. Ayrim yoki xususuy ma'lumotlarga tayanib umumiyl xulosa chiqarishi induksiya deyiladi.

Induksiya ich xil bo'ladi: chala induksiya, to'la induksiya va matematik induksiya. Chala induksiya metodi orqali chiqarilgan xulosa ko'pgina hollarda to'g'ri, ammo ayrim hollarda noto'g'ri bo'ladi.

1 - m i s o l. Fermaning mashhur teoremasi bo'yicha $(2^n + 1)$ ko'rinishdagi sonlar $n = [0, 1, 2, 3, 4, \dots]$ bo'lganda 3, 5, 17, 257, 65537, ... kabi tub sonlardan iborat edi. Shuning uchun Ferma umumiyl holda $(2^n + 1)$ ko'rinishdagi barcha sonlar n ning ixtiyoriy qiymatlarida har tub sonlar bo'ladi, deb umumiyl xulosa chiqargan. XVIII asrda L.E'ler Ferma teoremasini tekshirib, uning qonuniyatini: $n=5$ bo'lganda tuzilishini, ya'ni hosil bo'lgan son murakkab son bo'lishini aniqlagan:

$$(2^5 + 1) = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Bu degan so'z $(2^n + 1)$ ifoda 641 ga bo'linadi, bundan $(2^5 + 1)$ tub son bo'lmay, balki murakkab son ekanligi kelib chiqadi. Demak, chalq induksiya metodi orqali Fermaning $\forall n \in N$ bo'lganda

$(2^{2^n} + 1)$ ko'rinishdagi sonlar tub bo'ladi, degan xulosasi noto'g'ri ekan.

Induksiya metodi orqali xulosa chiqarish esa biror matematik qonuniyat uch hol uchun o'rinali bo'lganidan n - hol uchun o'rinali deb qabul qilinadi.

1-misol:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{yig'indisini hisoblang}$$

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{6+2+1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

...

Bu uchta xususiy yig'indiga asoslanib, umumiy xulosani yozamiz:

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

Maktab algebra kursida daraja va logarifmlar xossalari o'tilgandan so'ng ana shu xossalarga asoslanib o'quvchilar induktiv xulosa chiqarish yordamida daraja va logarifmlarning umumlashgan xossasini chiqarishlari mumkin.

2 - m i s o l .

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$$

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot a^{n_3} = a^{n_1+n_2+n_3}$$

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot a^{n_3} \cdot a^{n_4} = a^{n_1+n_2+n_3+n_4}$$

...

$$a^{n_1} \cdot a^{n_2} \cdot a^{n_3} \cdot \dots \cdot a^{n_k} = a^{n_1+n_2+n_3+\dots+n_k}$$

3 - m i s o l .

$$\begin{aligned} \lg(x_1 x_2) &= \lg x_1 + \lg x_2 \text{ agar } x_1 > 0 \wedge x_2 > 0 \text{ bo'lsa,} \\ \lg(x_1 x_2 x_3) &= \lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3 \text{ agar } x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \text{ bo'lsa,} \\ \lg(x_1 x_2 x_3 x_4) &= \lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3 + \lg x_4 \text{ agar } (x_1 x_2 x_3 x_4) > 0 \text{ bo'lsa,} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\lg(x_1 x_2 x_3 \dots x_n) = \lg x_1 + \lg x_2 + \lg x_3 + \dots + \lg x_n \text{ agar } (x_1 x_2 x_3 \dots x_n) > 0 \text{ bo'lsa.}$$

Matematik induksiya metodi. Bu metodda biror matematik qonuniyat $n = 1$ hol uchun o'rinni bo'lsa, uni $n = k$ hol uchun o'rinni deb qabul qilib, so'ngra $n=k+1$ hol uchun o'rinni ekanligini ko'rsatiladi.

1 - misol. $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ yig'indining o'rinni ekanligini matematik induksiya metodi orqali ko'rsatilsin, bunda $n \in N$

$$1. \text{ Agar } n = 1 \text{ bo'lsa, } S_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

$$2. \text{ Agar } n = k \text{ bo'lsa, } S_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

$$3. \text{ Agar } n = k+1 \text{ bo'lsa,}$$

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \text{ ekanligini}$$

isbotlaymiz.

Isboti.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

$$\text{Demak, } S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ yig'indisi hisoblash}$$

formulasi to'g'ri ekan.

$$\text{2-misol. } S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in N$$

$$1. \text{ Agar } n = 1 \text{ bo'lsa, } S_1 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1.$$

2. Agar $n = k$ bo'lsa, $S_k = \frac{k \cdot (k+1)(2k+1)}{6}$.

3. Agar $n = k+1$ bo'lsa,

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

bo'lishligini isbotlang.

Isboti.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{k+1}{6} \cdot [2k^2 + 7k + 6] =$$

$$= \frac{2(k+1)(k+2)\left(k + \frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

3 - misol. $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in N$

1. Agar $n = 1$ bo'lsa, $S_1 = \frac{1 \cdot (1+1)^2}{4} = 1$.

2. Agar $n = k$ bo'lsa, $S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = 1$.

3. Agar $n = k+1$ bo'lsa,

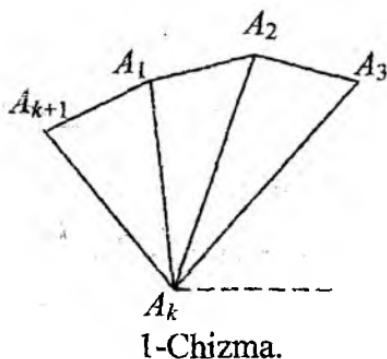
$$S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

bo'lishligini isbotlang.

Isboti.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$



1-Chizma.

T e o r e m a. Qabariq n burchak ichki burchaklarining yig'indisi $180^\circ(n-2)$ ga teng.

Bu teoremani matematik induksiya metodi bilan isbotlang. (1-chizma).

1. $n = 3$ bo'lganda $S_3 = 180^\circ$.

2. $n = k$ bo'lganda $S_k = 180^\circ(k-2)$ bo'ladi.

Agar $n = k$ uchun $S_k = 180^\circ(k-2)$ bo'lca, $n = k + 1$ uchun $S_{k+1} = 180^\circ[(k+1)-2]$ bo'lishini isbotlang.

Bu holni isbot qilish uchun $(k + 1)$ burchakli qavariq ko'pburchakni olamiz. A_1A_k diagonal berilgan ko'pburchakni k burchakli qavariq $A_1A_2A_3\dots A_k$ ko'pburchakka va $A_1A_kA_{k+1}$ uchburchakka ajratadi, u holda $S_{k+1} = S_k + S_3$ tenglik o'rini bo'ladi:

$$S_{k+1} = 180^\circ(k-2) + 180^\circ = 180^\circ[(k-2)+1] = 180^\circ[(k+1)-2].$$

Demak, teorema har qanday qavariq n burchak uchun ham o'rini ekan.

4 - misol. Quyidagi tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

Isboti. $n=1$, bo'lganda $1 = 1$ tenglik o'rini.

$$n=2 \text{ bo'lganda } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \text{ tengsizlik o'rini.}$$

Endi faraz qilaylik, berilgan tengsizlik $n = k$ uchun o'rini, ya'ni $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$ bo'lsin, uning $n=k+1$ hol uchun o'rini ekanini ko'rsatamiz:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Bu tengsizlikni kuchaytirish uchun $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}}$ o'rniga

\sqrt{k} ni qo'yamiz, u holda $\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$ (1) bo'ladi. Bu

tengsizlikni o'rini ekanini ko'rsatsak, berilgan tengsizlik isbotlangan bo'ladi.

(1) ning har ikki tomoni kvadratga ko'taramiz, u holda

$$k + \frac{1}{k+1} + \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} > k+1,$$

$$\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} > \frac{k}{k+1}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlikni har ikkala tomonini $\sqrt{\frac{k}{k+1}}$

ga bo'lsak, $2 > \sqrt{\frac{k}{k+1}}$ tengsizlik k ning $k-1$ dan boshqa qiymatlaridan o'rini, shuning uchun

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

tengsizlik n ning hap qanday qiymatida ham o'rini.

5 - m i s o l. $(2n-1)! > n!$ tengsizlikni matematik induksiya metodi bilan isbotlang.

I s b o t i. Bizga ma'lumki. $(2n-1)! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \cdot (2n-1)$

1. $n = 1$ bo'lganda $1 = 1$ tenglik o'rini.

$n = 2$ bo'lganda $3 > 2$ sonli tengsizlik hosil bo'ladi.

2. Endi berilgan tengsizlik $n = k$ hol uchun o'rini, ya'ni $(2k-1)! > k!$ deb, faraz qilaylik, buning $n = k + 1$ hol uchun o'rini ekanini ko'rsatamiz:

$$\{[2(k+1)-1]! > (k+1)!\} \rightarrow (2k+1)! > (k+1)!$$

$(2k-1)! > k!$ tengsizlikni har ikki tomonini $k+1$ ga ko'paytiramiz: u holda

$k!(k+1) < (2k-1)!(k+1) < (2k-1)!(2k+1) = (2k+1)!$ ifoda hosil bo'ladi. Bundan esa $(k+1)! < (2k+1)!$. Shuning uchun tengsizlik n ning har qanday qiymatlarida o'rini.

Tengsizliklarni isbotlang:

$$1. \left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$$

$$2. \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

T a ' r i f: Umumiy ma'lumotlarga tayanib ayrim yoki xususiy xulosasi chiqarish deduksiya deyiladi.

Misollar 1. $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamaning diskriminantini hisoblab, uning yechimlari borligini ko'rsating. $D = 9 + 16 = 25$. $D > 0$. Bizga ma'lumki, kvadrat tenglamani yechish haqidagi qoidaga ko'ra uning diskriminanti musbat bo'lsa, u ikkita haqiqiy har xil yechimga ega edi, shuning uchun $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglama ham ikkita $x_1 = 4$ va $x_2 = -1$ yechimlarga ega.

2. $\sqrt{81 \cdot 0,09}$ ifodaning qiymatini hisoblang. Bu ifodaning qiymatini hisoblash uchun matab algebra kursidan umumiy qonuniyatni o'z ichiga oluvchi quyidagi teoremadan foydalanamiz.

T e o r e m a. $a \geq 0$ va $b \geq 0$ bo'lganda $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ bo'ladi.

Shuning uchun quyidagi xulosani hosil qilamiz.

$$\sqrt{81 \cdot 0,09} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{0,09} = 9 \cdot 0,3 = 2,7$$

3. Matab geometriya kursida kosinuslar teoremasining analitik ifodasi bunday:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos c \quad (1)$$

Agar (1) da $c=90^\circ$ bo'lsa, $\cos 90^\circ = 0$, shuning uchun $c^2 = a^2 + b^2$ (2) bo'ladi. Bizga ma'lumki, (2) Pifagor teoremasini ifodasidir.

Xulosa chiqarish metodlaridan yana biri bu analogiyadir.

T a ' r i f. O'xshashlikka asoslanib xulosa chiqarish analogiya deyiladi.

Analogiya bo'yicha xulosa chiqarishni sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin: F figura a, b, c, d, \dots xossalarga ega. F_1 figura esa a, b, c, \dots xossalarga ega bo'lsha, u holda F_1 figura ham d xossaga ega bo'lishi mumkin.

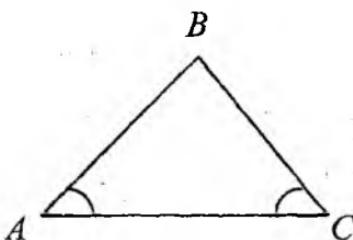
Fikrimizning dalili sifatida quyidagi tengsizlikni isbot qilaylik.

Har qanday tetraedr uchun $\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|AC|) < |SA|+|SB|+|SC|$ tengsizlik o'rini.

Bizga ma'lumki, fazodagi tetraedr figurasi tekislikda uchburchak figurasiga analogik figuradir, shuning uchun hap qanday uchburchak uchun o'rini bo'lgan quyidagi xossadan foydalanamiz.

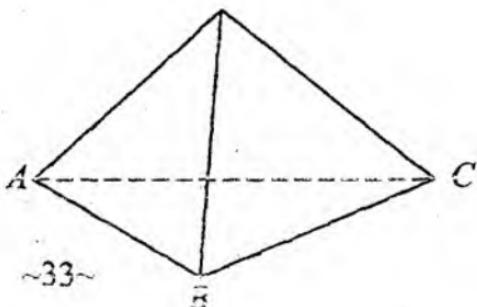
Har qanday uchburchakda ikki tomon uzunligining yig'indisi uchinchi tomon uzunligidan kattadir (2 chizma):

$$|AB| + |BC| > |AC|$$



Agar uchburchak uchun o'rini bo'lgan ana shu xossani unga analogik bo'lgan figura tetraedrga tadbiq qilsak, quyidagi tengsizlik hosil bo'ladi (3 chizma):

$$\left. \begin{array}{l} |AB| < |SA| + |SB| \\ |BC| < |SB| + |SC| \\ |AC| < |SA| + |SC| \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |AC|) < |SA| + |SB| + |SC|$$



7-§. Matematik hukmning turlari

Maktab matematika kursida matematik hukmning asosiy turlari quyidagilardan iborat: aksioma; postulat; teorema.

Aksioma grekcha axioma so'zidan olingan bo'lib, uning lug'aviy ma'nosi "obro'ga ega bo'lgan gap" demakdir. Shuning uchun ham aksiomaga maktab matematika kursida quyidagicha ta'rif berilgan:

«Isbotsiz qabul qilinadigan matematik hukm aksioma deyiladi».

Aksioma asosan eng sodda geometrik figura yoki sodda matematik qonuniyatlarning asosiy xossalarni ifodalovchi hukmdir. Masalan, maktab geometriya kursida o'r ganish uchun qabul qilingan aksiomalarni qaraylik:

1. *«Tekislikda yotuvchi ixtiyoriy bir nuqtadan shu tekislikdagi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin».*

2. *«Tekislikdagi har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin».*

Bizga ma'lumki, matematika fani aksiomalar sistemasi asosida qurilgandir. Matematika fanining mantiqiy asosda qurilishini yaratish uchun aksiomalarning bo'lishligi haqidada fikr Gretsiyada bundan ming yil avval paydo bo'lgan edi. XIX asrning oxiri va XX asrning boshlarida matematika fanining turli bo'limlarida aksiomalar chuqur o'r ganildi va rivojlantirildi.

Matematika kursidagi aksiomalar sistemasi asosan quyidagi uchta talabga javob berishi kerak.

1. Aksioma sistemasi ziddiyatsiz bo'lishi kerak. Bu degan so'z, biror aksiomadan chiqarilgan natija shu aksioma yordamida hosil qilingan boshqa natijaga yoki boshqa aksiomadan chiqarilgan xulosaga zid kelmasligi kerak.

2. Aksiomalar sistemasi mustaqil bo'lishi kerak, ya'ni hech bir aksioma ikkinchi bir aksiomadan kelib chiqadigan bo'limasligi kerak.

3. Aksiomalar sistemasi shu fanga oid istalgan bir yangi tushunchani isbot etish uchun etarli bo'lishi kerak, ya'ni biror matematik jumlanı isbotlashda hech qachon o'z-o'zidan tushunilishiga

yoki tajribaga tayanilmaydi, bu matematik jumla boshqa teoremlar bilan, oxirida aksiomalar bilan asoslanishi kerak bo‘ladi.

Maktab geometriya kursida quyidagi aksiomalar sistemasi mavjud.

1. Tegishlilik aksiomasi:

- a) har qanday to‘g‘ri chiziq nuqtalar to‘plamidan iboratdir.
- b) har qanday ikki nuqtadan bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

v) har qanday to‘g‘ri chiziqn ni olmaylik, shu to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgan va tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.

2. Masofa aksiomasi:

- a) har bir kesmaning uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan masofalar uzunliklarining yig‘indisiga teng: b) A nuqtadan B nuqttagacha bo‘lgan masofa B nuqtadan A nuqttagacha bo‘lgan masofaga teng: $|AB| = |BA|$.

v) Ixtiyoriy uchta A , B , C nuqta uchun A dan C gacha bo‘lgan masofa A dan B gacha va B dan C gacha bo‘lgan masofalar yig‘indisidan katta emas: $|AC| \leq |AB| + |BC|$

3. Tartib aksiomasi:

a) To‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasi orasida yotadi.

b) To‘g‘ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi.

4. Harakat aksiomasi:

a) Agar $|AB|$ masofa musbat bo‘lib, u $|A_1B_1|$ masofaga teng bo‘lsa, A nuqtani A_1 nuqta va B nuqtani B_1 nuqtaga akslantiruvchi faqat ikkita siljитish mumkin.

5. Parallel aksiomasi:

Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa bitta va faqat bitta parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

8-§. Postulat.

“Postulat” so‘zi lotincha so‘z bo‘lib, uning lug‘aviy ma’nosi “talabni belgilovchi” demakdir. Postulat - bu ma’lum bir talab yoki shartlarni ifodalovchi matematik hukm bo‘lib, bundagi talab va

shartlarni ba'zi bir tushuncha yoki tushunchalar orasidagi munosabatlar orqali qanoatlantiradi.

1-misol. Evklidning "Negizlar" kitobida paralellik aksiomasi "beshinchı postulat" deb atalgan. qadimgi matematiklar ana shu paralellik aksiomasini XIX aср boshlarigacha isbotlashga urinib keldilar. Bu urinishlar har doim muvaffaqiyatsizlik bilan tugadi. Paralellik aksiomasini to'g'riligi hech kimda shubha tug'dirmasa-da, uni mavjud aksiomalarning va ilgari isbot qilingan geometrik faktlarning asosi uchun qabul qilish mumkin emasmikan, ya'ni u o'zicha teoremadan iborat emasmikan, degan savol barcha matematiklarni qiziqtirar edi. Parallel to'g'ri chiziqlar aksiomasini teskarisidan faraz qilish usuli bilan, ya'ni nuqta orqali berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bir nechta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin, deb qabul qilib isbotlashga urinishlar matematik qonuniyatlarga zid bo'lgan holatlarni keltirib chiqarishi kerak edi, ammo bunday bo'l-madi. Buyuk rus matematigi N.I.Lobachevskiy va undan bexabar holda venger matematigi Ya. Boya nuqta orqali berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bir necha to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin, degan farazni qabul qilib, boshqa "noevklid geometriya"ni qurish mumkinligini isbot qildilar. Lobachevskiy geometriyasi ana shunday dunyoga keldi.

2 - m i s o l. Munosabatlar ekvivalentligini ta'rifi ham quyidagi uchta postulat orqali ifodalanadi:

1) munosabat refleksiv bo'lishi kerak: $\forall a \in A : a \xrightarrow{f} a$

2) munosabat simmetrik bo'lishi kerak:

$$\forall a, b \in A : (a \xrightarrow{f} b) \Rightarrow (b \xrightarrow{f} a)$$

3) munosabat tranzitiv bo'lishi kerak:

$$\forall a, b, c \in A : [(a \xrightarrow{f} b) \wedge (b \xrightarrow{f} c)] \Rightarrow (a \xrightarrow{f} c)$$

9-§. Teorema va uning turrlari.

Teorema so'zi grekcha so'z bo'lib, uning lug'aviy ma'nosi "qarab chiqaman" yoki «o'ylab ko'raman» demakdir, shuning uchun

ham maktab matematika kursida teoremaga quyidagicha ta'rif berilgan:

"*Isbotlashni talab etadigan matematik hukm teorema deyiladi*".

Maktab matematika kursida teoremlarning quyidagi turlari mavjuddir:

1. To‘g‘ri teorema.
2. Teskari teorema.
3. To‘g‘ri teoremaga qarama-qarshi teorema.
4. Teskari teoremaga qarama-qarshi teorema.

To‘g‘ri va unga nisbatan teskari bo‘lgan teorema tushunchalarini o‘quvchilar ongida shakllantirishni - VI sinf geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab amalga oshirish kerak. Masalan, quyidagi ikkita tushunchani olib qaraylik.

1. Bu figura parallelogrammdir
2. Bu figura to‘rtburchakdir.

Berilgan bu ikkala hukm o‘zaro bog‘liqdir. Boshqacha qilib aytganda, birinchisining haqiqatligidan ikkinchinining haqiqatligi kelib chiqadi, ammo ikkinchisining mavjudligidan birinchisining haqiqatligi har doim ham kelib chiqavermaydi. Agar bu bog‘lanishni simvolik ravishda yozadigan bo‘lsak u quyidagicha bo‘ladi:

parallelogramm \Rightarrow to‘rtburchak

Bu yerda biz parallelogramlar sinfini to‘rtburchaklar sinfiga kiritdik. Yuqoridagidek bog‘lanishlar geometriya kursining birinchi darslaridan boshlab tekshirayotgan matematik hukmlarning ichki o‘zaro bog‘lanishini ochib beradi. Masalan, "Ichki almashinuvchi burchaklar o‘zaro teng" degan hukmni simvolik holda quyidagicha yozish mumkin:

Ichki almashinuvchi burchaklar \Rightarrow Teng burchaklar

Bu erga agar ichki almashinuvchi burchaklar mavjud bo‘lsa, u holda ular teng bo‘ladi, degan fikrni tasdiqlayapmiz. Agar yo‘nalish teskari tomonga qo‘yilsa, bunday mulohaza hosil bo‘ladi: "Agar burchaklar teng bo‘lsa, u holda ular ichki almashinuvchi burchaklardir". Agar biz teoremadagi shart va xulosaning o‘zaro bog‘liqligini "agar", "u holda" so‘zlari bilan bog‘lasak, bunda o‘quvchilar teoremaning sharti, natijasi va ular orasidagi bog‘lanish haqida chuqurroq tasavvurga ega bo‘ladilar. Masalan, agar bir uchburchakni ikki tomoni

ikkinci uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi. Bu aytilgan teoremaning shartidan uning xulosasi kelib chiqmaydi, ammo uning xulosasidan sharti har doim kelib chiqadi. Shuning uchun uni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

Bir uchburchakning ikki tomoni
ikkinci uchburchakning ikki tomoniga
mos ravishda teng bo'lsa



uchburchaklar teng

Maktab geometriya kursida shunday teoremlar borki, ularning shartidan xulosasining to'g'riliqi va aksincha, xulosasidan shartining to'g'riliqi kelib chiqadi. Masalan:

1. Agar to'g'ri chiziq burchak bissektrisasi bo'lsa, u berilgan burchakni teng ikkiga bo'ladi.

Bunga teskari bo'lган teorema ham o'rinnlidir: "Agar to'g'ri chiziq burchakni teng ikkiga bo'lsa, bu to'g'ri chiziq shu burchakning bissektrisasi". Bu aytilganlarni simvolik ravishda bunday yozish mumkin:

Agar to'g'ri chiziq burchak
bissektrisasi bo'lsa



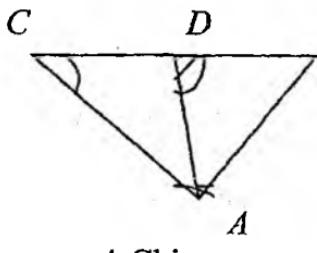
Burchak teng ikkiga
bo'linadi

Bundan ko'rindan, teorema shartining mavjudligidan uning xulosasining haqiqiyligi kelib chiqsa va aksincha, uning xulosasining mavjudligidan haqiqatligi kelib chiqsa, teoremaning shart va xulosalarida qatnashayotgan "agar" va "u holda" bog'lovchilarining o'rinnlari o'zgaradi.

Agar biz shartli ravishda berilgan teoremani to'g'ri teorema desak, bu teoremadagi shart va xulosalarning o'rinnlarini almashtirish natijasida hosil qilingan teoremani teskari teorema deb ataymiz.

Endi to'g'ri va teskari teoremlarning berilishi hamda ularni isbotlash uslubiyatini ko'rib chiqaylik.

1. **T o' g' r i t e o r e m a:** "Agar uchburchakning biror tomoni katta bo'lsa, u holda ana shu katta tomon qarshisida katta burchak yotadi".



4-Chizma.

B Berilgan: $\triangle ABC$, $BC > AB$.
Icbot qilish kerak: $\angle A > \angle C$.

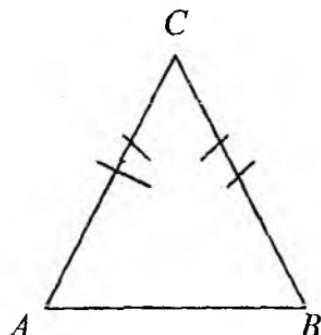
I s b o t i. $\triangle ABC$ uchburchakning BC tomonida AB tomonga teng $BD = AB$ kesmani o'lchab, ana shu D nuqtani A nüqta bilan birlash-tiramiz (4-chizma), natijada ABD teng yonli uchburchak hosil bo'ladi. ABD uchburchak teng yonli bo'lgani uchun $\angle BAD = \angle BDA$. BDA burchak ADC burchakning tashqi burchagi bo'lgani uchun $\angle BAD = \angle C + \angle DAC$ bo'ladi, bundan $\angle BAD > \angle C$ ekan kelib chiqadi. Bu yerdagi BAD burchak A burchakning bir qismi xolos. Shuning uchun $\angle A > \angle C$.

Teskari teorema: "Agar uchburchakning biror burchagi katta bo'lsa, u holda ana shu katta burchak qarshisida katta tomon yotadi".

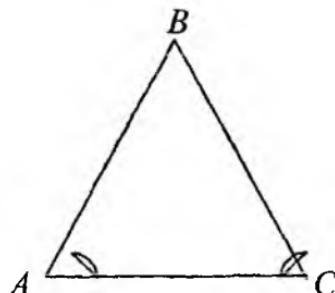
B e r i l g a n: $\triangle ABC$, $\angle A > \angle C$.

I s b o t q i l i s h k e r a k: $BC > AB$.

I s b o t i. 1) $\triangle ABC$ uchburchakning AB tomoni hech qachon BC tomonidan katta bo'la olmaydi, chunki to'g'ri teoremada biz katta tomon qarshisida katta burchak yotadi, deb isbot qildik, aks holda $\angle C > \angle A$ ligi kelib chiqadi, bu esa teorema shartiga ziddir.



5-Chizma.



6-Chizma.

2) AB tomon BC tomonga teng ham bo'la olmaydi, chunki $\angle ABC$ teng yoni emas, agar teng yonli bo'lganda edi $\angle C > \angle A$ tenglik o'rinli bo'lib, bu ham teorema shartiga zid bo'lar edi.

3) Agar AB tomon BC tomondan katta bo'lmasa yoki unga teng bo'lmasa, u holda $BC > AB$ ligi kelib chiqadi.

2. To'g'ri teorema. Agar uchburchakning tomonlari teng bo'lsa, u holda bu tomonlar qarshisida teng burchaklar yotadi

Berilgan: $\triangle ABC$, $AC = CB$.

Isbot qilish kerak: $\angle A = \angle B$.

Isboti. ABC asosi AB bo'lgan teng yonli uchburchak bo'lsin. $\angle A = \angle B$ ekanligiri isbotlaymiz. Uchburchaklar tengligini birinchi alomatiga ko'ra CAB burchak CBA burchakka teng bo'ladi, chunki $CA = CB$ va $\angle C = \angle C$. Bu uchburchaklarning tengligidan: $\angle A = \angle B$.

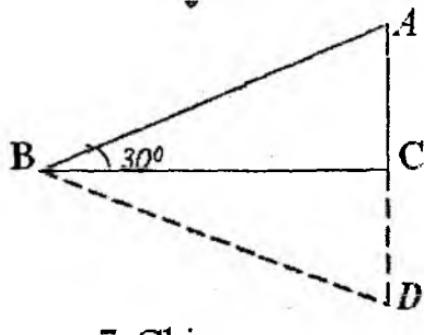
Teskari teorema. Agar uchburchakning burchaklari o'zaro teng bo'lsa, u holda bu burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi (6-chizma).

Berilgan: $\angle ABC$, $\angle A = \angle C$.

Isbot qilish kerak: $BC = AB$.

Isboti. 1) BC tomon AB tomondan katta bo'la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko'ra $\angle A > \angle C$ bo'lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir.

2) BC tomon AB tomondan kichik ham bo'la olmaydi, aks holda avvalgi isbot qilingan teoremaga ko'ra $\angle C > \angle A$ bo'lar edi, bu esa teorema shartiga ziddir. Demak, $BC = AB$.



4. To'g'ri teorema. Agar uchburchak to'g'ri burchakli bo'lib, uning bir burchagi 30° bo'lsa, u holda 30° li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng bo'ladi. (7-chizma).

Berilgan: ABC burchak to'g'ri burchakli, $\angle B = 30^\circ$.

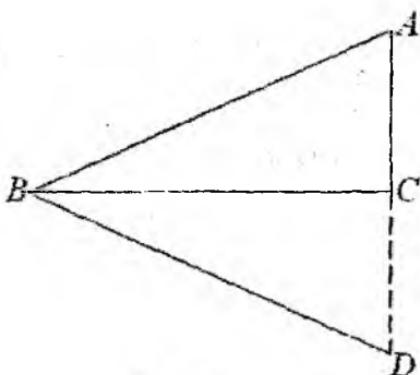
$$\text{Isbot qilish kerak: } AC = \frac{AB}{2}$$

Isboti. AC katetni davom ettirib, $CD=AC$ kesmani qo'yib, D nuqtani B nuqta bilan birlashtiramiz. U holda $\triangle ABCD=\triangle BCA$ tenglik hosil bo'ladi, chunki $\angle D=\angle A$ va $\angle D=60^\circ$ bo'lganligi uchun ABD uchburchakning A va D burchaklari 60° dan, $\angle ABD=60^\circ$ AD teng tomonli uchbur-chakdir. Chizmadan $AC=\frac{AD}{2}$; $AD=AB$, shuning uchun $AC=\frac{AB}{2}$.

Teskari teorema. Agar to'g'ri burchakli uchburchakning kateti gipotenuzaning yarmiga teng bo'lsa, u holda shu katet qarshisidagi burchak 30° ga teng bo'ladi (8-chizma).

Berilgan: $\triangle ABC$ to'g'ri burchakli,

$$AC = \frac{1}{2} AB.$$



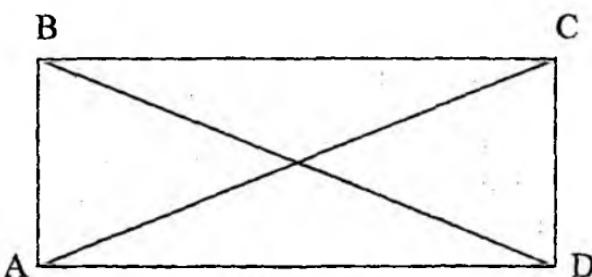
8-Chizma.

Isbot qilish kerak: $\angle ABC = 30^\circ$.

Isboti. AC katetni davom ettirib $CD=AC$ ni qo'yamiz, u holda $AD = 2AC$ bo'ladi, bundan $AD=AB$, ekan kelib chiqadi. B va D nuqtalarni birlashtirsak, $\triangle BCD=\triangle BCA$ bo'ladi, chunki bularning ikkita kateti va ular orasidagi burchaklari o'zaro teng.

$\triangle BCD=\triangle BCA$ ekanidan $AD=AB$ ga, $\angle ABC=\angle DBC$ u holda $AD=AB$ va $DB=AB$ bulardan $\triangle ABD$ teng tomonli ekanligini kelib chiqadi, u holda $\angle ABD=60^\circ$, $\angle ABC=\angle DBC$, bu burchaklar yig'indisi $\angle ABD$ ni hosil qiladi, shuning uchun $\angle ABC=30^\circ$.

4. To'g'ri teorema. Agar to'rtburchak to'g'ri burchakli bo'lsa, u holda uking diagonallari o'zaro teng bo'ladi (9-chizma).



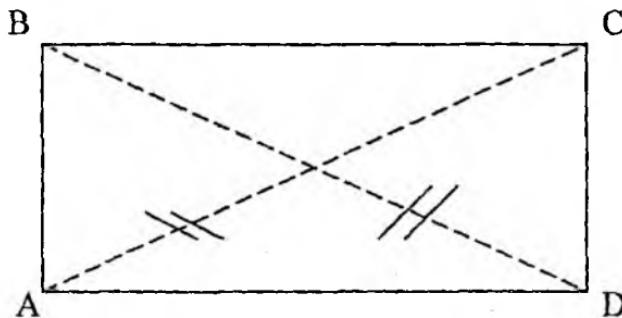
9-Chizma.

Berilgan: $ABCD$ - to‘g‘ri to‘rtburchak.

I sb o t q i l i s h k e r a k: $AC = BD$

I s b o t i. ABD va DCA to‘g‘ri burchakli uchburchaklarda AD umumiyl, BA va DC tomonlari esa o‘zaro teng, chunki parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari o‘zaro tengdir. Shuning uchun $\triangle ABD = \triangle DCA$ bo‘ladi, bundan $AC = BD$ ekanligi kelib chiqadi.

Teskari teorema. Agar parallelogrammning diagonallari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda bu parallelogramm to‘g‘ri to‘rtburchakdir (10 - chizma).



10-Chizma.

Berilgan: $ABCD$ – parallelogramm, $AC = BD$.

I sb o t q i l i s h k e r a k: $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak.

I s b o t i. ABD va DCA uchburchaklardan quyidagi tengliklarni yoza olamiz: $AB = BC$, AD - umumiyl va $AC = BD$. Shuning uchun $\triangle ABD = \triangle DCA$ bo‘ladi, u holda $\angle BAD = \angle CDA$ bo‘ladi. Bundan tashqari ichki bir tomonli burchaklar bo‘lganligi uchun $\angle BAD + \angle CDA = 2d$. Bulardan $\angle BAD = \angle CAD = d$ ekanligi kelib chiqadi. Demak $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak ekan.

5. To‘g‘ri teorema. Agar to‘g‘ri, burchakli uchburchakning gipotenuzasi va uning katetlariga o‘zaro o‘xshash ko‘pburchaklar yasalsa, u holda gipotenuzaga yasalgan ko‘pburchakning yuzi uning katetlariga yasalgan ko‘pburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. (11 - chizma).

Berilgan: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$. $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $ABDE3 \approx ANMKC \approx CLHTB$, $ABDE3_{\text{юзу}} = S_a$, $ANMKC_{\text{юзу}} = S_b$, $CLHTB_{\text{юзу}} = S_c$.

Isbot qilish kerak: $S_c = S_a + S_b$

Isboti. 7-sinfda o‘xshash ko‘pburchaklar yuzlarining nisbati mavzusi o‘tiladi, ana shu mavzuda quyidagi teorema bor. "Agar ikkita ko‘pburchak o‘zaro o‘xshash bo‘lsa, ular yuzlarining nisbati mos tomonlori kvadratlarining nisbatiga teng". Shunga asosan quyidagi nisbatni tuzishimiz mumkin:

$$(ANMKC \approx ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2} \right) \Rightarrow s_b \cdot c^2 = s_c \cdot b^2. \quad (1)$$

$$(CLHTB \approx ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2} \right) \Rightarrow s_a \cdot c^2 = s_c \cdot a^2. \quad (2)$$

(1) va (2) larni o‘zaro xadlab qo‘shsak:

$$(S_a c^2 + S_b c^2 = S_c c^2 + S_c b^2) \Rightarrow [c^2 (S_a + S_b) = S_c (a^2 + b^2)] \\ c^2 = a^2 + b^2 \text{ bo‘lgani uchun } S_a + S_b = S_c \text{ bo‘ladi.}$$

Teskari teorema. Agar uchburchak bir tomoniga yasalgan ko‘pburchakning yuzi uning qolgan ikkita tomoniga yasalgan ko‘pburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘lsa, u holda bu uchburchak to‘g‘ri burchaklidir.

Berilgan: $\triangle ABC$, $S_a + S_b = S_c$

Isbot qilish kerak: $\triangle ABC$ to‘g‘ri burchakli.

Isboti. Teorema shartiga ko‘ra $S_a + S_b = S_c$ bo‘lgani uchun

$$(ANMKC \approx ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_b}{S_c} = \frac{b^2}{c^2} \right) \Rightarrow s_b \cdot c^2 = s_c \cdot b^2. \quad (1)$$

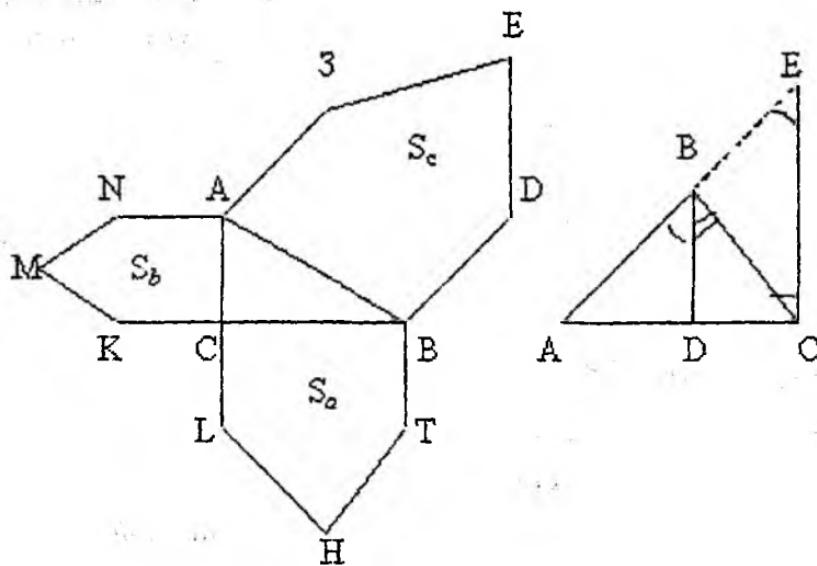
$$(CLHTB \approx ABDE3) \Rightarrow \left(\frac{S_a}{S_c} = \frac{a^2}{c^2} \right) \Rightarrow s_a \cdot c^2 = s_c \cdot a^2. \quad (2)$$

$$(1) \text{ va } (2) \text{ larni o'zaro hadlab qo'shsak,} \\ (S_a c^2 + S_b c^2 = S_c c^2 + S_c b^2) \Rightarrow [c^2(S_a + S_b) = S_c(a^2 + b^2)]$$

$S_a + S_b = S_c$ shuning uchun: $a^2 + b^2 = c^2$. Bizga ma'lumki, bu tenglik Pifagor teoremasining ifodasıdir. Pifagor teoremasi to'g'ri burchakli uchburchaklar uchun o'rini bo'lar edi.

Shuning uchun $\triangle ABC$ to'g'ri burchaklidir.

6. To'g'ri teorema. Agar har qanday uchburchakda ichki burchak bissektrisasi o'tkazilsa, u holda bu bissektrisa qarshisida yotgan tomonni qolgan ikki tomonga nisbatan proporsional bo'laklarga bo'ladi (12-chizma).



11-Chizma

12-Chizma

Berilgan: $\forall \triangle ABC$, BD - bissektrisa, $\angle ABD \cong \angle DBC$.

Isbot qilish kerak:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

Isboti. Bu teoremani isbot qilish uchun uchburchakning $[AB]$ tomonini E nuqtada kesguncha $[CE]/[BD]$ ni o'tkazamiz, natijada $\angle AEC$ va $[BD]/[EC]$ larni hosil qildik. Agar burchakning

tomonlari parallel to'g'ri chiziqlar bilan kesilsa, proporsional bo'laklarga bo'linadi. Shunga ko'ra:

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|DC|} \quad (1)$$

Endi $[BE]$ ni $[BC]$ ga teng ekanligini ko'rsatsak, izlanayotgan proporsiya hosil qilgan bo'lamiz. Buning uchun $\triangle ABC$ ning teng yonli ekanligini ko'rsatish kifoya. Chizmadan $\angle ABD \cong \angle AEC$ parallel to'g'ri chiziqlardagi moc burchaklar bo'lgani uchun $\angle BCE \cong \angle DBC$ bo'ladi, chunki parallel to'g'ri chiziqlardagi ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun

$$\left. \begin{array}{l} \angle E \cong \angle B \\ \angle BCE \cong \angle DBC \end{array} \right\} \Rightarrow (\angle E \cong \angle C) \Rightarrow [BE] \cong [BC]$$

Shuning uchun (1) quyidagi ko'rinishda oladi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$$

Teskari teorema. Agar uchburchakning biror uchidan uning qarshisidagi tomonga tushirilgan kesma shu tomon kesmalarini qolgan ikki tomonga nisbatan proporsional bo'laklarga bo'lsa, u holda bu kesma shu burchak bissektrisasiadir.

Agar biz to'g'ri teoremaning shartini p va uning xulosasini q desak, u holda yuqoridagi teorema turlari uchun quyidagi simvolik ifodalar o'rinnlidir:

- 1) $p \Rightarrow q$ (to'g'ri teorema); 2) $q \Rightarrow p$ (teskari teorema);
- 3) $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ (to'g'ri teoremaga qarama-qarshi teorema);
- 4) $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ (teskari teoremaga qarama-qarshi teorema).

Quyidagi teoremani to'g'ri teorema deb olib, unga nisbatan yuqoridagi teoremaning turlarini qo'llasak, bunday teoremlar hosil bo'ladi:

1) Agar to'rtburchak paralellogramm bo'lsa, uning diagonali kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi, ya'ni $p \Rightarrow q$.

2) Agar to'rtburchanning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, u holda bu to'rtburchak paralellogrammdir, ya'ni $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$

3) Agar to'rtburchak paralellogramm bo'lmasa, uning diagonallari kesishish muqtasida teng ikkiga bo'linmaydi, ya'ni $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$.

4) Agar to'rtburchakning diagonali kesishib, teng ikkiga bo'linmasa, u holda bunday to'rtburchak paralellogramm emas, ya'ni $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

Bu misoldan ko'rindik, agar to'g'ri teoremani shart va xulosalarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda ana shu to'g'ri teoremaga teskari, qarama-qarshi hamda to'g'ri teoremadan hosil qilingan teskari teoremaga qarama-qarshi teoremlarni hosil qilish mumkin.

10-§. Teoremlarni isbotlash metodlari.

T a ' r i f. Isbotlash - deduktiv xulosa chiqarish zanjiri, demakdir.

Har qanday isbotlash jarayoni quyidagi uch qismni o'z ichiga oladi:

1. Teoremaning bayoni - isbot talab etiladigan holat.
2. Argumentlar - teoremani isbotlash jarayonida ishlatilgan matematik hukmlar.
3. Isbotlash - deduktiv xulosa chiqarish orqali teorema xulosasida topish talab qilingan noma'lumni uning shartlari hamda avvaldan ma'lum bo'lgan argumentlardan foydalanib keltirib chiqarish.

Teoremani isbotlashga kirish va uni isbotlash jarayonida o'qituvchi yordamida o'quvchilar quyidagi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan bosqichlarni bajarishlari kerak:

- 1) Teoremaning sharti va uning xulosasi nimadan iborat ekanligini to'la tushunib olishlari kerak.
- 2) Ana shu teoremani shart va xulosasida qatnashayotgan har bir matematik tushunchaning ma'nosini bilishlari kerak.
- 3) Teoremaning shart va xulosa qismlarini matematik simvollar orqali ifodalashlari kerak.

4) Teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum parametrler teorema xulosasidagi noma'lumni aniqlay oladimi yoki yo'qmi ekanligini biliishlari kerak.

5) Teoremani isbotlash jarayonida teoremadagi shartlardan teorema xulosasining to'g'riligini ko'rsatuvchi natijalar keltirib chiqarishi kerak.

6) Teoremani isbotlash jarayonidagi ma'ntiqiy mulohazalarda teoremaning shartidan to'la foydalanishlari kerak.

7) Teorema isbot qilib bo'lingach, isbotlashda qo'llanilgan metodni ko'zdan kechirish va imkonni bo'lsa, isbotlashning boshqa usullarini qidirib topish kerak.

Maktab matematika kursidagi teoremalarni isbotlash ikki usulda amalga oshiriladi.

1) Bevosita isbotlash usuli (to'g'ri isbotlash usuli);

2) Bilvosita isbotlash usuli (teskarisidan faraz qilish usuli);

Bevosita isbotlash usuli jarayonida teoremaning shartida qatnashayotgan ma'lum va parametrlardan hamda avvaldan ma'lum bo'lgan aksioma, ta'rif va teoremalardan foydalangan holda mantiqiy mulohaza yuritib, teorema xulosasida talab qilingan noma'lumlarni topiladi. Teoremalarni bunday isbotlash analiz va sintez orqali amalga oshiriladi.

T a ' r i f. Noma'lumlardan ma'lumlarga tomonga izlash metodi analiz deyiladi.

Psixologik olimlar analiz metodini quyidagicha ta'riflaydilar:

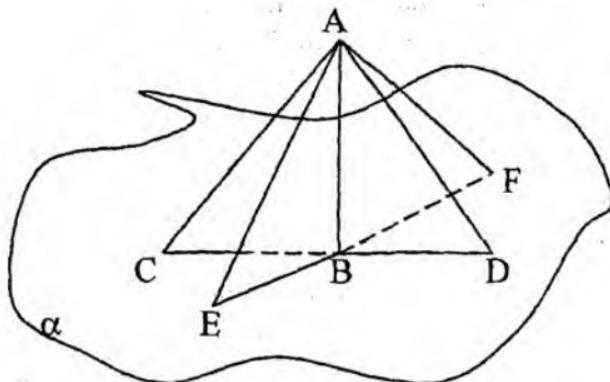
analiz - bu butunlardan bo'laklarga tomon izlash demakdir.

T a ' r i f. Ma'lumlardan noma'lumlarga tomon izlash metodiga sintez deyiladi.

Psixologik nuqtai-nazardan sintez metodi bo'laklardan butunlarga tomon izlash metodi demakdir.

Fikrimiz dalili sifatida quyidagi teoremalarni analiz va sintez metodlari orqali isbotlaymiz.

1 - t e o r e m a. V nuqtada kesishuvchi CD va EF to'g'ri chiziqlar α tekislikda yotadi va $CB = BD$, $EB = BF$. α tekislikda yotmaydigan A nuqta $AE = EF$ va $AC = AD$ tengliklarni qanoatlantiradigan qilib taniansa, AB to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikulyar bo'ladi (13 - chizma).



13-Chizma.

B e r i l g a n: - α tekislik, $(CD) \wedge (EF) = B$,
 $(CB=BD) \wedge (EB=BF)$, $(AE=AF) \wedge (AC=AD)$.

Isbot qilish kerak: $AB \perp a$.

Isboti. Bu teoremani analiz metodi bilan isbotlaymiz.

1. $AB \perp a$ ekanligini isbot qilish uchun $AB \perp CD$ va $AB \perp EF$ ekanligini isbot qilish etarli.

2. $AB \perp CD$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABC = \angle ABD$ ekanligini isbot qilish etarli.

3. Bu burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta ABC = \Delta ABD$ ekanligini isbot qilish etarli, lekin $BC = BD$, $AC = AD$, $AB = AB$ shuning uchun $\Delta ABC = \Delta ABD$.

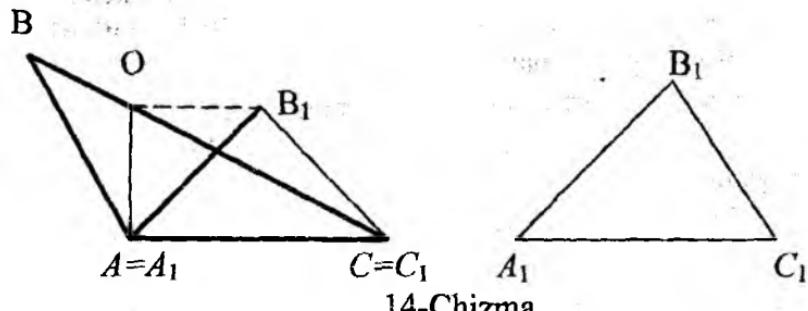
4. $AB \perp EF$ ekanligini isbot qilish uchun $\angle ABE = \angle ABF$ ekanligini isbot qilish etarli.

5. Bu burchaklarning tengligini isbot qilish uchun $\Delta ABE = \Delta ABF$ ekanligini isbot qilish etarli, lekin $BE = BF$, $AE = AF$, $AB = AB$, shuning uchun $\Delta ABE = \Delta ABF$, bundan $AB \perp a$ ekanligi kelib chiqadi.

Isbotning sintez usuli

1. $\Delta ABE = \Delta ABF$.
2. $\angle ABE = \angle ABF$.
3. $\Delta ABC = \Delta ABD$.
4. $\angle ABC = \angle ABD$.
5. (2) va (4) ga ko'ra $AB \perp CD$ va $AB \perp EF$.
6. (5) ga ko'ra $AB \perp a$.

2 - teorema. Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga o'zaro teng bo'lsa, u holda bu tomonlar orasidagi burchak qaysi uchburchakda katta bo'lsa, shu burchak qarshisida katta tomon yotadi (14 - chizma).



Berilgan: $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle BAC > \angle B_1A_1C_1$.

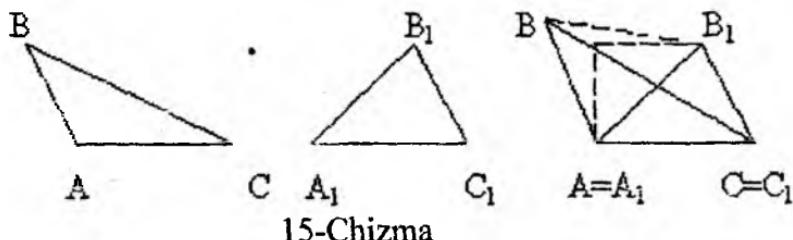
Isbot qilish kerak: $BC > B_1C_1$.

Isbotning analiz metodi, 1 - usul.

$A_1B_1C_1$ uchburchakni ABC uchburchak ustiga teng tomonini moslab siljitalmiz, natijada $AC=A_1C_1$ bo'ladi. $\angle BAB_1$ dan AO bissektrisani o'tkazamiz, u holda $\triangle OAB=\triangle OAB_1$ hosil bo'ladi, bundan $BO=B_1O$ ekani kelib chiqadi, $\triangle OAB_1$ dan quyidagi tengsizliklarni yoza olamiz:

$$OC + OB_1 > B_1O, OC + OB > B_1C, BC > B_1C_1.$$

2 - usul. (15 - chizma)



Berilgan: $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$. $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$.

Isbot qilish kerak: $BC > B_1C_1$.

Isboti. $A_1B_1C_1$ uchburchakning ABC uchburchak ustiga shunday qo'yaylikki, natijada $AC=A_1C_1$ bo'lsin.

1. $BC > B_1C_1$ ni isbot qilish uchun oldin qachon bir kesma ikkinchi kesmaga nisbatan uzun bo'ladi, degan savolga javob berishimiz kerak.

2. BC va B_1C_1 kesmalarni taqqoslash uchun $A_1B_1C_1$ uchburchakni ABC uchburchak ustiga siljitim natijasida hosil qilingan BB_1C uchburchak tomonlarini o'zaro taqqoslash etarli.

3. Qanday shart bajarilganda uchburchakning bir tomoni uning ikkinchi tomonidan katta bo'ladi (katta burchak qarshisida katta tomon yotadi)?

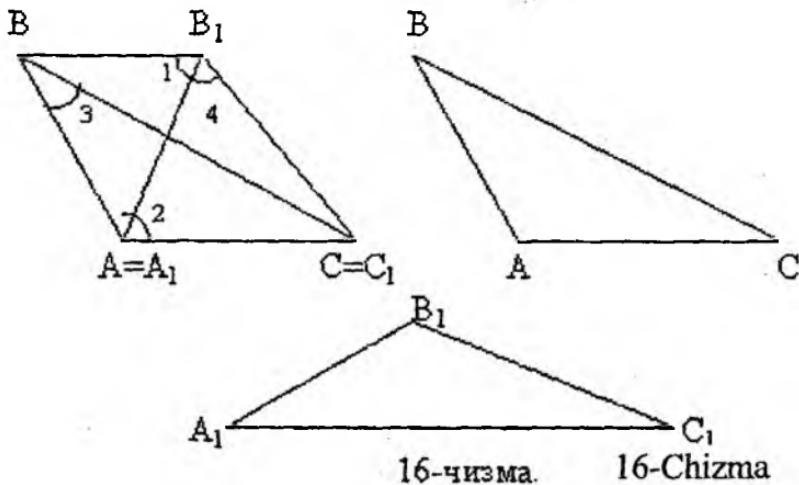
4. BCB_1 uchburchakning BC tomoni BB_1C burchak qarshisida va CB_1 tomoni esa B_1BC burchak qarshisida yotadi. $BC > B_1C_1$ bo'lishi uchun $\angle CBB_1 < \angle CB_1B$ ekanligini ko'rsatish kifoya.

5. $\triangle BAB_1$ teng yonli, chunki teorema shartiga ko'ra $AB = AB_1$ edi, shuning uchun $\angle ABB_1 = \angle AB_1B = \angle 1$.

$$\angle BB_1C = \angle 1 + \angle AB_1C. \quad \angle CBB_1 = 1 - \angle ABC.$$

$$\angle 1 + \angle AB_1C > 1 - \angle ABC.$$

$\angle BB_1C > B_1BC$ bundan $BC > B_1C_1$ bo'ladi.



Isbotning sintez usuli (16 - chizma)

1. $AB = AB_1$. 2. $\angle ABB_1 = \angle AB_1B = \angle 1$.

3. $\angle AB_1B + \angle 4 > \angle AB_1B - \angle 3$. 4. $\angle CB_1B > CBB_1$.

5. Katta burchak qarshisida katta tomon yotadi, shuning uchun $BC > B_1C_1$ bo'ladi.

3-teorema. Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng.

Berilgan: $\triangle ABC$.

Isbot qilish kerak: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (17- chizma).

Isbotning analiz metodi.

1. Uchburchakning B uchidan AC tomoniga parallel qilib DK ni o'tkazamiz, natijada $\angle 5 + \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ li yoyiq burchakni hosil qilamiz.

2. $\angle 5 = \angle 1$, chunki $DK \parallel AC$, bu yerda AB kesuvchi.

3. $\angle 4 = \angle 3$, chunki $DK \parallel AC$, bu yerda CB kesuvchi.

4. $\angle 5 + \angle 4 + \angle 2 = 180^\circ$

5. (2) va (3) larga ko'ra $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

Isbotning sintez metodi:

1. DK ni AB ga parallel qo'yib o'tkazamiz, ya'ni $DK \parallel AB$.

2. $\angle 4 = \angle 3$, chunki $DK \parallel AC$, bu yerda BC kesuvchi.

3. $\angle 5 = \angle 1$, chunki $DK \parallel AC$, bu yerda AB kesuvchi.

4. $\angle 5 + \angle 2 + \angle 4 = 2d$ yoyiq burchak.

5. (2) va (3) larga ko'ra $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$

Endi quyidagi teoremani isbotlash bosqichlari asosida isbotlaymiz:

T e o r e m a. Agar a, b, c $\triangle ABC$ uchbukchakning tomonlari va p uning yarim perimetri bo'lsa, u holda bu uchburchakning yuzi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ga teng bo'ladi.

1. Teoremaning sharti: "agar a, b, c $\triangle ABC$ uchburchakning tomonlari va R uning yarim perimetri bo'lsa", teoremaning xulosasi: "u holda bu uchburchakning yuzi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ga teng bo'ladi".

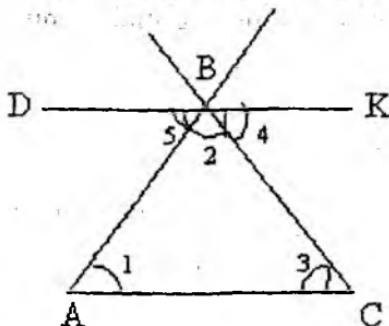
2. Teoremaning shart va xulosa qismlarida uchburchak, uchburchakning tomonlari, uning perimetri va yarim perimetri hamda uning yuzi kabi tushunchalar qatnashayapti (18-chizma).

3. Berilgan: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$,

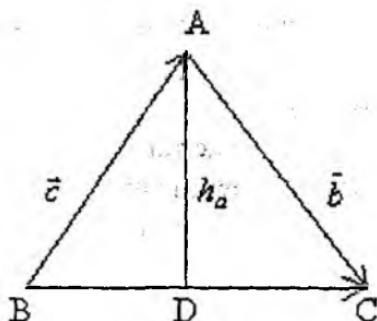
$$\frac{a+b+c}{2} = p$$

Isbot qilish kerak:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



17-Chizma



18-Chizma

4. Teorema shartida berilgan uchburchak, uning tomonlari, yarim perimetri kabi tushunchalar uning xulosasida talab qilinayotgan $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ noma'lumni topish uchun etarlidir.

5. Teoremaning isboti. ΔABS da

$\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$ deb olamiz.

Chizmadan:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a \quad (1)$$

18 - chizma.

$$\Delta ADC \Rightarrow \left(\frac{h_a}{b} = \sin \hat{c} \right) \Rightarrow h_a = b \cdot \sin \hat{c} \quad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'ysak:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \cdot \sin \hat{c} = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 \sin^2 \hat{c}} = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 (1 - \cos^2 \hat{c})} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 - (ab \cos \hat{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \hat{c})^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned} \quad (3)$$

$|a||b|\cos\hat{c}$ ifoda \vec{a} va \vec{b} vektorlarning skalyar ko‘paytmasidir.

$\Delta ABC \Rightarrow \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ bo‘ladi, bu ifodaning har ikki tomonini kvadratga ko‘tarsak,

$$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \vec{a}^2 \vec{b}^2,$$

$$\vec{a}^2 \vec{b}^2 = \frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - \vec{c}^2}{2}. \quad (4)$$

(4) ni (3) ga qo‘ysak:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{ab}{2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right) \left(\frac{ab}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{4} \right) \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4} \right)} =$$

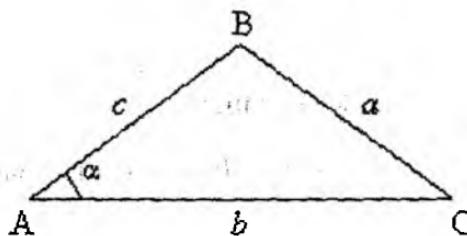
$$= \sqrt{\left[\frac{c^2 - (a-b)^2}{4} \right] \left[\frac{(a+b)^2 - c^2}{4} \right]} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c-2a}{2} \right) \left(\frac{a+b+c-2b}{2} \right) \left(\frac{a+b+c-2c}{2} \right) \left(\frac{a+b+c}{2} \right)} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

6. Teoremani isbotlashda vektor, vektorlarni qo‘shish, skalyar ko‘paytma va uchburchakning yuzi kabi tushunchalar asosida mantiqiy mulohaza yuritib, teorema shartida berilgan uchburchakning tomonlari perimetri va yarim perimetri kabi tushunchalardan to‘la foydalanim teoremaning isboti keltirib chiqarildi.

7. Qaralgan teoremani yuqoridagidan farqli usul bilan han isbot qilish mumkin (19-chizma)



19-Chizma

Isbotning ikkinchi usuli.

Berilgan: $\triangle ABC$, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Isbot qilish kerak:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

I s b o t i. ΔABC ning yuzi uning tomonlari va ular orasidagi burchagiga ko'ra bunday ifodalananadi:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}cb \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$\sin \alpha = \frac{2S}{bc}$$

Kosinuslar teoremasiga ko'ra: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, bundan

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (2); \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (3)$$

(1) va (2) larni (3) ga qo'ysak:

$$\left(\frac{2S}{bc} \right)^2 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 = 1.$$

$$\frac{4S^2}{b^2 c^2} + \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2 c^2} = 1,$$

$$16S^2 + (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2 c^2,$$

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16} = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{16} = \\
 &= \frac{[(b+c)^2 - a^2][(a^2 - (b-c)^2]}{16} = \\
 &= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c), \\
 S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.
 \end{aligned}$$

Bilvosita isbotlash usuli (teskaridan faraz qilish orqali isbotlash usuli).

T a ‘ r i f. Teoremaning xulosasidagi no’malumlarni topish unga zid bo’lgan jumlani inkor qilish orqali amalga oshirilgan bo’lsa, uni bilvosita isbotlash usuli deyiladi.

Yuqoridaq ta’rifdan ko’rinadiki, isbotlashning bilvosita usulida biz oldin teorema tasdiqlagan fikrga qarama-qarshi fikrni to‘g’ri deb faraz qilamiz: shundan keyin aksiomalar va oldin isbotlangan teoremalarga asoslanib mulohazalar yuritish yo‘li bilan teorema shartiga zid keladigan yoki biror aksiomaga yoki ilgari isbotlangan biror teoremaga zid keladigan xulosaga kelamiz. Shunga ko’ra farazimiz noto‘g’ri bo’ladi. Natijada teoremadagi yoki berilgan masaladagi da’vo to‘g’ri degan xulosaga kelamiz.

Bilvosita isbotlash ikki xil usul bilan amalga oshiriladi:

1) Apagogik usul.

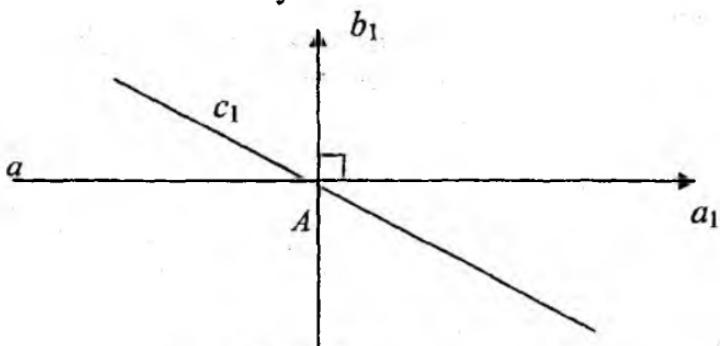
2) Ajratish usul.

Apagogik usul ko‘pincha teskarisidan faraz qilish metodi deb ham yuritiladi. Quyidagi teoremani apagogik - teskarisidan faraz qilish usuli bilan isbot qilaylik.

1 - t e o r e m a. To‘g’ri chiziqning har bir nuqtasidan unga perpendikulyar to‘g’ri chiziq o’tkazish mumkin va faqat bitta.

Isboti. Faraz qilaylik, a - berilgan to‘g’ri chiziq, A unda berilgan nuqta bo’lsin. a to‘g’ri chiziqning boshlang‘ich nuqtasi A bo’lgan yarim to‘g’ri chiziqlaridan birini a_1 bilan belgilaymiz, a_1 yarim to‘g’ri chiziqdan boshlab 90° ga teng ($a_1 \wedge b_1$) burchakni qo‘yamiz. U holda b_1 nurni o‘z ichiga olgan to‘g’ri chiziq a to‘g’ri chiziqqa perpendikulyar bo’ladi. Faraz qilaylik, A nuqtadan o‘tib a

to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan boshqa to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqning b_1 nur bilan bir tekislikda yotuvchi yarim to‘g‘ri chizig‘ini s_1 bilan belgilaymiz. Har biri 90° ga teng ($a_1 b_1$) va ($a_1 c_1$) burchaklar a_1 yarim to‘g‘ri chiziqdandan boshlab bitta yarim tekislikka qo‘yilgan. Ammo berilgan yarim tekislikka a_1 yarim to‘g‘ri chiziqdandan boshlab 90° ga teng bitta burchak qo‘yish mumkin. Shu sababli A nuqta orqali o‘tib a to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan boshqa to‘g‘ri chiziqning mavjudligi mumkin emas. Shu bilan teorema isbotlandi. Endi quyidagi masalani ham teskarisidan faraz qilish metodi bilan isbotlaymiz.



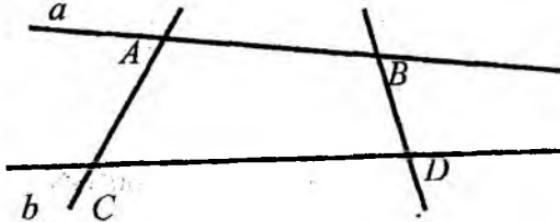
20-Chizma.

1 - masala. α va β kesishuvchi tekisliklar berilgan. a tekislikda yotuvchi A nuqta orqali a va a_1 to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. β tekislikda a va a_1 to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar mavjud emasligini isbot qiling.

Isboti. β tekislikda shunday B nuqta mavjudki, bu nuqtadan o‘tvuchi b va b_1 to‘g‘ri chiziqlar mos ravishda a va a_1 to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan deylik. U holda tekisliklarning parallellik alomatiga ko‘ra $\alpha \parallel \beta$ bo‘lishi kerak. Bu esa masala shartiga zid. Demak, β tekislikda a va a_1 to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo‘lgan tekisliklar mavjud. Ajratish metodi bilan isbotlashda tezis mazkur masala yuzasidan qilinadigan mumkin bo‘lgan barcha farazlardan biri bo‘ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani ajratish metodi orqali yechamiz.

2 - masala. a va b uchrashmas to‘g‘ri chiziqlar berilgan. A va B nuqtalar a to‘g‘ri chiziqda, C va D nuqtalar b to‘g‘ri chiziqda yotadi.

C va *BD* to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatini aniqlang (21 - chizma).



I s b o t i. Ma’lumki, fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq quyidagi uch holatdar birini egallaydi:

1. $AC \parallel BD$.
2. $AC \cap BD$.
3. AC va BD to‘g‘ri chiziqlar uchrashmas.

1. Faraz qilaylik, $AC \parallel BD$ bo‘lsin, u holda bu to‘g‘ri chiziqlar *a* va *b* uchrashmas to‘g‘ri chiziqlar ham etadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu esa masala shartiga zid.

2. $AC \cap BD$ bo‘lsin, u holda bu ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar *a* va *b* uchrashmas to‘g‘ri *b* chiziqlar ham yotadigan birgina tekislikni aniqlaydi. Bu ham masala shartiga zid. Demak AC va BD to‘g‘ri chiziqlar uchrashmas to‘g‘ri chiziqlardir.

2 - t e o r e m a. *To‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va faqat bitta.*

I s b o t i. *a* - berilgan to‘g‘ri chiziq va *A* bu to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsin. *a* - to‘g‘ri chiziq va *A* nuqta orqali *a* tekislik o‘tkazamiz. α tekislikda *A* nuqtadan *a* to‘g‘ri chiziqqa parallel a_1 to‘g‘ri chiziqnini o‘tkazamiz. *a* ga parallel bo‘lgan a_1 to‘g‘ri chiziqning yagona ekanini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilaylik, *A* nuqtadan o‘tadigan va *a* to‘g‘ri chiziqqa parallel boshqa a_2 to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsin, *a*, a_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali α_2 tekislikni o‘tkazish mumkin. α_2 tekislik *a* to‘g‘ri chiziq va *A* nuqta orqali o‘tadi, u holda to‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin” degan teoremaga ko‘ra y α tekislik bilan ustma-ust tushadi. Endi parallel to‘g‘ri chiziqlar aksiomasiga ko‘ra a_1 , a_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Shu bilan teorema isbot bo‘ldi.

11-§. Teoremlarni zaruriy va etarli shartlari

T a ‘ r i f. Agar q mulohazadan p mulohazaning to‘g‘riliği kelib chiqsa, ya‘ni $q \Rightarrow p$ bo‘lsa, u holda p mulohaza q mulohaza uchun zaruriy shart bo‘lib, q mulohaza esa p mulohaza uchun etarli shart deyiladi.

1 - m i s o l. Agar natural son juft bo‘lsa, u holda u 6 soniga bo‘linadi.

Bu teoremada natural son 6 ga bo‘lishligi uchun uning juft bo‘lishligi zaruriy shart bo‘lib, etarli shart bo‘la olmaydi, chunki har qanday juft son ham 6 ga bo‘linavermaydi.

2 - m i s o l. Agar natural son 6 ga bo‘linsa, u holda u juft bo‘ladi.

Bu teoremada natural son juft bo‘lishligi uchun uning 6 ga bo‘linishi etarli shart bo‘lib, zaruriy shart bo‘la olmaydi, chunki 6 ga bo‘linmaydigan juft sonlar ham mavjuddir.

3 - m i s o l. Agar natural son juft bo‘lsa, u holda u 2 soniga bo‘linadi.

Bu teoremada natural son 2 ga bo‘linishi uchun uning juft bo‘lishi zarur va etarlidir, chunki hap qanday juft natural son 2 ga bo‘linadi.

4 - m i s o l. Har qanday natural son 2 ga bo‘linsa, u holda bunday son juft bo‘ladi.

Bu teoremada natural son juft bo‘lishi uchun uning 2 ga bo‘linishi zarur va etarlidir.

1 - t e o r e m a. $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lgan $y=f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ aniq integrali mavjud bo‘lishi uchun $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S-s)=0$ bo‘lishligi zarur va etarlidir.

Isbotining zarurligi. $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral mavjud bo‘lganda $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S-s)=0$ ekanligini isbotlaymiz. Aniq integral mavjud bo‘lishligi uchun ta’rifga ko‘ra, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma=1$ bo‘ladi. Limit ta’rifiga ko‘ra:

$$|\sigma - 1| < \varepsilon \text{ yoki } -\varepsilon < \sigma - 1 < \varepsilon, 1 - \varepsilon < \sigma < 1 + \varepsilon \quad (1)$$

Bizga ma'lumki, δ - integral yig'indi Darbuning quyi va yuqori yig'indilarining orasida yotar edi, shuning uchun

$$s \leq \sigma \leq S \quad (2)$$

bo'ladi. (1) va (2) larning birlashtirib quyidagi tengsizliklarni tuzamiz:

$$1 - \varepsilon \leq s \leq \sigma \leq S \leq 1 + \varepsilon \quad (3)$$

(3) tengsizlikda quyidagi tengsizliklarni ajratib olish mumkin:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} I - \varepsilon < s \\ I + \varepsilon > S \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\begin{array}{l} I - s < \varepsilon \\ I - S > -\varepsilon \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} I - s < \varepsilon \\ S - I < \varepsilon \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} |s - I| < \varepsilon \\ |S - I| < \varepsilon \end{array} \right) \Rightarrow \\ \left(\begin{array}{l} \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I \end{array} \right) &\Rightarrow \left(\lim_{\lambda \rightarrow 0} s - \lim_{\lambda \rightarrow 0} s \right) \Rightarrow (I - I = 0) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0. \end{aligned}$$

Teoremaning zaruriy qismi isbotlandi.

Isbotning etarligi. $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$ bo'lganda $\int_a^b f(x)dx$ bo'lishligini ko'rsatamiz. Buning uchun $\lambda \rightarrow 0$ da σ integral yig'indisini chekli I limitga ega ekanligini ko'rsatish kifoya. Bizga ma'lumki, Darbuning quyi yig'indisi monoton o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangandir, bundan tashqari u o'zining aniq yuqori chegarasiga ham egadir, ya'ni: $\sup\{s\} = 1^*$

Xuddi shuningdek, Darbuning yuqori yig'indisi o'zining quyi chegarasiga ega, ya'ni; $\inf\{S\} = I_*$

Aniq yuqori va quyi chegaralarning ta'riflariga ko'ra $s \leq I^*$ ba $S \geq I_*$ bo'ladi. Bu ikkala tengsizliklarni birlashtirsak, $s \leq I^* \leq I_* \leq S$

$$\text{Ammo } \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0 \text{ bo'lgani uchun } \lim_{\lambda \rightarrow 0} (I^* - I_*) = 0$$

$$(\lim_{\lambda \rightarrow 0} I^* - \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_* = 0) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} I^* - \lim_{\lambda \rightarrow 0} I_* = I \quad (2)$$

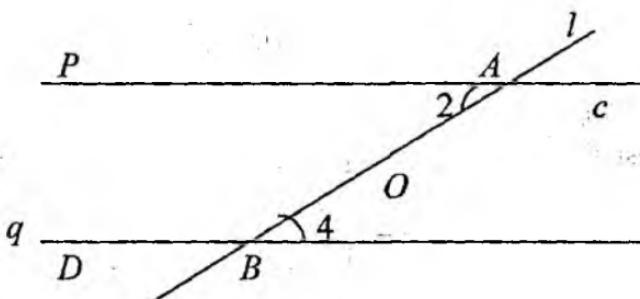
(2) ga ko'ra (1) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$s \leq I \leq S \quad (3)$$

Bizga ma'lumki, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$, bundan tashqari $s \leq \sigma \leq S$ (4)

bo'lgani uchun, (3) va (4) larga ko'ra: $I = \int_a^b f(x)dx$. Shu bilan teoremaning etarli qismi isbot bo'ldi.

2 - t e o r e m a. *Ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel bo‘lishi uchun ularni kesib o‘tuvchi uchinchi to‘g‘ri chiziq hosil qilgan mos burchaklari o‘zaro teng bo‘lishi zarur va etarlidir* (22 - chizma).



22-Chizma.

Zarurlikning isboti. Faraz qilaylik p va q to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lsin, l esa p va q larni kesuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lsin, u holla biz $\angle 2 = \angle 4$ ekanini isbot qilishimiz kerak. p va q to‘g‘ri chiziqlarda C va D nuqtalarni olamiz. O nuqta A va B nuqtalarga nisbatan simmetriya markazi desak, u holda quyidagi munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$1) [AO] \rightarrow [BO]. \quad 2) [AC] \rightarrow [BD]. \quad 3) \angle 4 \rightarrow \angle IAC.$$

Chizmada $\angle 2 = \angle IAC$ chunki ular vertikal burchaklardir. Shuning uchun $\angle 2 = \angle 4$ ekan kelib chiqadi.

Etarllilikning isboti. Faraz qilaylik, l p va q to‘g‘ri chiziqlarni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq, $\angle 2 = \angle 4$ bo‘lsin. U holda $p \parallel q$ ekanligini isbot qilishimiz kerak. $p \cap l = A$, $q \cap l = B$. Faraz qilaylik, p va q to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lmashin, u holda $p \cap q = C$. U holda $\angle 2 > \angle B = \angle 4$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa yuqorida qo‘yilgan $\angle 2 = \angle 4$ shartga ziddir, demak, $q \parallel p$ ekan.

3 - t e o r e m a. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad (i=1, \infty)$ (1)

(1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun xususiy yig‘indilarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi chegarolangan bo‘lishi zarur va etarlidir.

Zaruriylikning isboti. (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo'lganda xususiy yig'indilarning $\{A_n\}$ ketma-ketligi chegaralangan ekanligini ko'rsatsak, teoremaning zaruriy qismini isbotlagan bo'lamiz. (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $\sum_{t=1}^{\infty} a_t = A$ chekli son bo'ladi, bundan $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (yoki $\sup\{A_n\} = A$) bo'ladi. Limitning ta'rifiga ko'ra $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ bo'lgani uchun $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural N sonni topish mumkinki, $n > N$ bo'lganda $|A_n - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinni bo'ladi, bundan:

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< A_n - A < \varepsilon \\ A - \varepsilon &< A_n < A + \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

By (2) tengsizlik $\{A_n\}$ ketma-ketlikning $n > N$ nomerli hamma elementlari uchun bajariladi. (2) tengsizlikdan ko'rindaniki, $\{A_n\}$ ketma-ketlik $n > N$ dan boshlab $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ oraliqqa joylashgan bo'lar ekan. Bu degan so'z $\{A_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deganidir.

Etarlikning isboti. $\{A_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lganda (1) musbat hadli qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. $\{A_n\}$ - o'zgaruvchi:

1) monoton o'suvchi

2) yuqoridan chegaralangan bo'lganligi uchun monoton o'zgaruvchining limiti haqidagi teoremaga ko'ra u chekli limitga ega bo'ladi, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ chekli son bo'ladi, shuning uchun qator yaqinlashuvchi bo'lishining ta'rifiga ko'ra (1) musbat hadli qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday teoremlar borki, ular uchun zaruriy shart bajariladi, lekin etarli shart doim ham bajarilmaydi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi teoremani ko'rib chiqaylik.

Theorem a.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{t=1}^{\infty} a_t \quad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning umumiy hadi $a_n \rightarrow 0$, ya'ni $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

I s b o t i. (1) qator teorema shartiga ko'ra yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \dots A$ chekli son bo'ladi.

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} = A - A = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Bundan ko'rindiki, qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning n -hadining $n \rightarrow \infty$ dagi limiti 0 ga teng bo'lar ekan, bu shart qator yaqinlashuvchi bo'lishligi zaruriy sharti bo'la olmaydi. Bu degan so'z $n \rightarrow \infty$ da n -hadining limiti 0 ga teng bo'lgan har bir qator yaqinlashuvchi bo'lavermaydi.

1 - m i s o l. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qatorni garmonik

qator deb ataladi, bu qatorning n -hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo'lib, $n \rightarrow \infty$ da 0 ga intiladi-yu, lekin qatorning o'zi uzoqlashuvchidir.

I s b o t i:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \right) + \\ & + \dots + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \right) + \dots = \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots + = \infty \end{aligned}$$

Demak, bu qator uzoqlashuvchi.

2 - misol.

$$\ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \\ + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

qatorning n – hadi $n \rightarrow \infty$ da 0 ga intiladi, ammoy qatorning o‘zi uzoqlashuvchi qatordir. Bunda ham qator yaqinlashuvchi bo‘lishining zaruriy sharti bajarilib, uning etarli sharti bajarilmaydi.

II-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Bilish deb qanday psixologik jarayonga aytildi?
2. Tafakkur tushunchasini ta’rifini aytib bering.
3. Sezgi deb nimaga aytildi?
4. Idrok va tasavvur tushunchalarini ta’riflang?
5. Matematik tushunchaga ta’rif bering.
6. Tushunchaning mazmunini ta’riflang?
7. Tushunchanning hajmi deganda nimani tushunasiz?
8. Tushunchaning jinsi va uning turi deganda nimani tushunasiz?
9. Ta’rif so‘zini lug‘aviy ma’nosini aytib bering.
10. Real, klassifikatsion va genetik ta’riflarini aytib bering.
11. Matematik tushunchalar qanday metodlar yordamida kiritiladi?
12. Matematik hukm tushunchasiga ta’rif bering.
13. Matematik xulosa deb nimaga aytildi?
14. Matematik xulosa turlarini aytib bering.
15. Matematik induksiya metodini tushuntiring?
16. Teoremaning qanday turlari bor?
17. Teoremani isbotlash deganda nimani tushunasiz?
18. Isbotni qanday turlari bor?
19. Teoremalarni zaruriy va etarli shartlarini ayting.
20. Geron formulasini isbotlang.

II-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR.

Bilish, tafakkur, hissiy bilish, mantiqiy bilish, sezgi, idrok, tasavvur, tushuncha, tushunchaning mazmuni, tushunchaning hajmi, tushunchaning jinsi, ta'rif, genetik ta'rif, matematik tushuncha, matematik hukm, matematik xulosa, induksiya, deduksiya, teorema, analogiya, zaruriy va etarli shart, perimetrlar, analiz va sintez metodlari, to'g'ri teorema, teskari teorema, postulat, aksioma, qabariq va botiq ko'pburchak.

III BOB.

MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA TA'LIM METODLARI.

1-§. Matematik ta'lim metodlari

Metod so'zi grekcha so'z bo'lib, "yo'l ko'rsatish" demakdir. "Ta'lim metodi" tushunchasi esa hozirgi zamon metodika va didaktika fanlaridagi asosiy tushunchalardan biridir, ammo bu tushuncha yaqin vaqtlargacha qadar turli metodik adabiyotlarda turli mazmunda qo'llanib kelinar edi. XIX asrga qadar bo'lgan metodik adabiyotlarda "metod" tushunchasi matematika kursining asosiy mazmunini bayon qiluvchi mavzuning tavsifisi sifatida ishlataladi. Masalan, "Sonlarni o'rghanish metodi", "Geometrik figuralarni o'rghanish metodi" va hokazo.

Hozirgi zamon didaktikasida, jumladan, matematika o'qitish metodikasi fanida ta'lim metodining muammolari umumiy holda hal qilingan bo'lib, u o'zining quyidagi ikki tomoni bilan xarakterlanadi:

- a) o'qitish (o'qituvchining faoliyati);
b) o'rghanish (o'quvchilarning ongli bilish faoliyati).

Ta'lim jarayoni o'qitish va o'rghanishdan iborat bo'ladigan bo'lsa, u holda o'qitish (o'quvchilarning bilish faoliyatlarini boshqarish va tekshirishga doir axborot turlari, usul va vositalari), o'rghanish (o'quv materialini o'quvchilar tomonidan o'zlashtirishning turlari, usul va vositalari) o'zining quyidagi metodlari orqali amalga oshiriladi. O'qitish va o'rghanish metodlari o'zaro bir-biri bilan uzviy aloqadorlikda bo'lib, maktabda o'qitish jarayonini amalga oshiradi. Maktab matematika kursida ta'lim metodlarini quyidagicha klassifikatsiyalash mumkin.

1. Ilmiy izlanish metodlari (kuzatish, tajriba, taqqoslash, analiz va sintez, umumlashtirish, abstraksiyalash va klassifikatsiyalash).

2. O'qitish metodlari (evristik metod, proglammalashtirilgan ta'lim metodi, muammoli ta'lim metodi, ma'ruza va suhbat metodlari).

3. Xulosa chiqarish metodlari (induksiya, deduksiya va analogiya).

2-§. Matematika o‘qitishdagi ilmiy izlanish metodlari.

Bizga ma’lumki, matematika fanini o‘rganadigan ob’ekti materiyadagi narsalarning fazoviy shakllari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlardan iboratdir. Ana shu shakllar orasidagi miqdoriy munosabatlarni aniqlash jarayonida matematiklar izlanishning ilmiy metodlaridan vosita sifatida foydalanadilar. Matematikadagi izlanishning ilmiy metodlari bir vaqtning o‘zida matematikani o‘qitishdagi ilmiy izlanish metodlari vazifasini ham bajaradi. O‘qitishdagi ilmiy izlanish metodlari quyidagilardan iboratdir.

1. Tajriba va kuzatish;
2. Taqqoslash;
3. Analiz va sintez;
4. Umumlashtirish;
5. Abstraksiyalash;
6. Aniqlashtirish;
7. Klassifikatsiyalash.

3-§. Tajriba va kuzatish metodi.

T a ‘ r i f. Matematik ob’ektdagi narsalarning xossalari va ularning o‘zaro munosabatlarini belgilovchi metod kuzatish deyiladi.

Misol. IV-V sinf o‘quvchilariga bir necha figurani ko‘rsatib, bu figuralar ichidan o‘q simmetriyasiga ega bo‘lgan geometrik figuralarni ajrating deb buyursak, o‘quvchilar barcha figuralarni ko‘rib chiqib quyidagicha xulosaga kelishlari mumkin. Figuralar ichida o‘zidan biror o‘qqa nisbatan ikki qismga ajragan figuralar bo‘lsa hamda ularni ana shu o‘q bo‘yicha buklaganda qismlar ustma-ust tushsa, bunday figuralar simmetrik figuralar bo‘ladi. Ammo boshqa figuralarda o‘zlarini teng ikkiga bo‘luvchi to‘g‘ri chiziqlar bo‘lmasligi mumkin. U holda bunday figuralar nosimmetrik figuralar bo‘ladi. Biz figuralardagi bunday xossa va ular orasidagi munosabatlarni kuzatish orqali figuralarni simmetrik va nosimmetrik figuralarga ajratdik.

T a ‘ r i f. Matematik ob’ektdagi narsalarning xossalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni suniy ravishda bo‘lak (qism)larga ajratish yoki ularni birlashtirish tajriba metodi deyiladi.

M i s o l. o‘quvchilarga natural sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratishni o‘rgatiladi:

$$1=1, 2=2\cdot 1; 3 = 3\cdot 1; 4 = 4\cdot 1; 5 = 5\cdot 1; \dots$$

O'quvchilarda ixtiyoriy natural sonlarni misolda ko'rsatilganidek, tub ko'paytuvchilarga ajratish jarayonida tajriba hosil bo'lib, ular natural sonlar to'plamida tub va murakkab sonlar mavjud ekanligini tushunib etadilar. Murakkab natural sonlarni ham tub ko'paytuvchilarga ajralishini, ammo ularning ko'paytuvchilari kamida uchta va undan ortiq bo'lishini tajriba orqali tekshirib ko'radilar.

Masalan: $4 = 2 \cdot 2 \cdot 1$; $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$; $25 = 5 \cdot 5 \cdot 1$; $36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$;

Kuzatish va tajriba natijasida tub va murakkab sonlarni qonun va qoidalari o'quvchilarga tushuntiriladi.

4-§. Taqqoslash metodi.

T a ' r i f. O'rganilayotgan matematik ob'ektdagi narsalarning o'xshash va farqli tomonlarini aniqlovchi metod taqqoslash metodi deyiladi.

Taqqoslash metodi ham ilmiy izlanish metodlaridan biridir. Taqqoslash metodini matematika darslarida o'rganilayotgan mavzu materiallariga tadbiq qilishda quyidagi prinsiplarga amal qilihadi:

1) taqqoslanayotgan matematik tushunchalar bir jinsli bo'lishi kerak;

2) taqqoslash o'rganilayotgan matematik ob'ektdagi narsalarning asosiy xossalari nisbatan bo'lishi kerak.

1 - m i s o l. Uchburchak figurasi bilan to'rburchak figurasi taqqoslaganda ularning o'xshash tomonlari: uchlari, burchaklari; ularning o'zaro farqli tomonlari:

a) uchburchakda uchta uch va uchta tomon;

b) to'rburchakda to'rtta uch va to'rtta tomonidan iboratligi aniqlanadi.

Bu misolda taqqoslashning ikkala prinsipi ham bajarildi, ya'ni uchburchak va to'rburchak figuralari bir jinsli tushunchalar bo'lib, ikkalasi ham ko'pburchakning xususiy hollaridir hamda taqqoslash metodi ikkala figuraning asosiy xossalari nisbatan amalga oshirildi.

2 - m i s o l. 8-sinf algebra kursida arifmetik progressiya n -hadini hisoblash formulasini keltirib chiqarish ham taqqoslash metodi orqali amalga oshiriladi.

T a ‘r i f. Ikkinci hadidan boshlab o‘zidan avvalgi har bir hadiga biror o‘zgarmas son qo‘shilishidan hosil bo‘ladigan sonlar ketma-ketligi arifmetik progressiya deyiladi.

Faraz qilaylik, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ko‘rinishdagi sonlar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. d - o‘zgarmas son bo‘lsin, u holda ta’rifga ko‘ra:

$$a_2 = a_1 + d \quad (1)$$

$$a_3 = a_2 + d \quad (2)$$

(1) va (2) dan :

$$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d \quad (3)$$

Xuddi shuningdek,

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \quad (4)$$

(3) va (4) larning o‘zaro taqqoslash hamda induksiya metodini tadbiq qilish natijasida arifmetik progressiya n - hadini hisoblash formulasi keltirib chiqariladi:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d$$

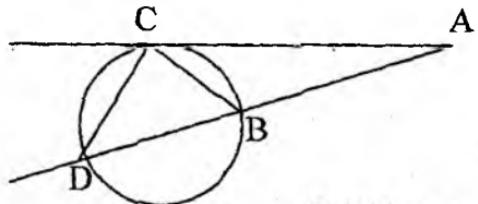
5-§. Analiz va sintez metodi.

T a ‘r i f. Noma'lumlardan ma'lumlarga tomon izlash metodi analiz deyiladi.

Analiz metodi orqali fikrlashda o‘quvchi quyidagi savolga javob berishi kerak: "Izlanayotgan noma'lumni topish uchun nimalarni bilish kerak?" Analiz metodini psixologlar bunday ta’riflaydilar: "butunlardan bo‘laklarga tomon izlash metodi analiz deyiladi".

Fikrlashning analiz usulida har bir qadamning o‘z asosi bor bo‘ladi, ya’ni har bir bosqich bizga ilgaridan ma’lum bo‘lgan qoidalarga asoslanadi. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi teoremani analiz metodi bilan isbot qilamiz.

T e o r e m a. Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga kesuvchi va urinma o‘tkazilsa, kesuvchi kesmalarining ko‘paytmasi urinmaning kvadratiga teng (23 - chizma).



23-Chizma.

Berilgan: teoremada berilgan barcha shartlarni III, xulosani esa X bilan belgilaylik.

III: $[AC]$ - urinma;

C - urinish nuqasi;

$[AD]$ - kesuvchi;

$[AB]$ - uning tashqi qismi.

Isbot qilish kerak: $AC^2 = |AD| \cdot |AB|$.

Izboti. Bu teoremani izbotlash uchun bizga oldindan ma'lum bo'lgan matematik faktlar kerak bo'ladi, biz ularni qisqacha Φ bilan belgilasak, teoremani shart va xulosalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$III, \Phi \xrightarrow{?} X$$

Isbotlash natijasida hosil qilinadigan $AC^2 = |AD||AB|$ natijani yana quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\left[(III, \Phi), \left(\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|} \right) \right] \xrightarrow{?} X.$$

Endi bizning maqsadimiz shart va ma'lum faktlar asosida $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ni aniqlashdan iborat. Bu savolga javob

proporsiyaning o'zidan ko'rinib turibdi, agar biz AC va AD larni bir uchburchak tomonlari desak, u holda AC va AB larni ikkinchi uchburchak tomonlari deb olamiz. U holda $\triangle ACD$ va $\triangle ABC$ larni hosil qilish kerak bo'ladi. Buning uchun B va C hamda C va D nuqtalarni o'zaro birlashtirish kifoya. U holda;

$$[(III, \Phi), (\Delta ACD \sim \Delta ABC)] \xrightarrow{?} \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Endi esa bu uchburchaklarning o'xshashliklari bizga noma'lumdir ya'ni:

$\stackrel{?}{III}, \Phi \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta ABC$.

Bu yerda ikki uchburchak o'xhash bo'lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak, degan savol tug'iladi, bunga quyidagicha javob berish mumkin:

$[(III, \Phi), \angle A = \angle A, \angle ACB = \angle ADC] \stackrel{?}{\Rightarrow} (\Delta ACD \sim \Delta ABC)$

Bu mulohazalardan esa quyidagi savollar kelib chiqadi:

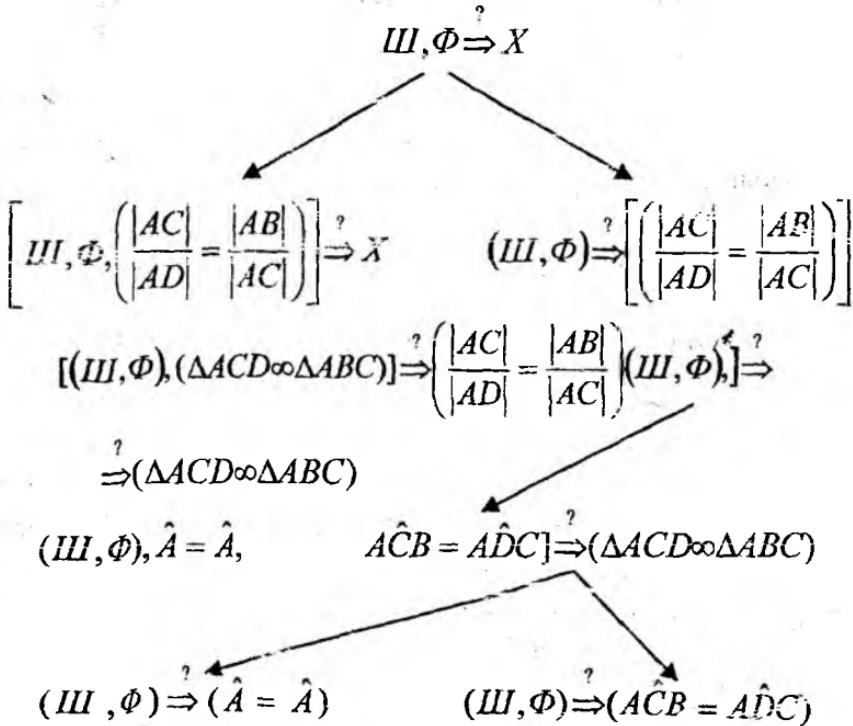
1) $(III, \Phi) \stackrel{?}{\Rightarrow} \angle A = \angle A$. 2) $(III, \Phi) \stackrel{?}{\Rightarrow} \angle ACB = \angle ADC$.

Bu savollarga esa quyidagicha javob berish mumkin:

1) har qanday burchak o'z-o'ziga teng.

2) Aylanaga ichki chizilgan burchaklar haqidagi teoremliga ko'ra yoki ushbu burchaklarni o'lhash orqali hal qilish mumkin.

Yuqoridaagi isbotni sxema orqali bunday ifodalash mumkin:



T e o r e m a. *Ikki son yig'indisining o'rta arifmetigi shu sonlar o'rta geometrigidan kichik emas.*

$$\forall (a, b) \geq 0$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Isboti.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \rightarrow \text{analiz}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

M i s o l. Quyidagi tenglama analiz metodi bilan yechilsin:

$$\frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)} = 2$$

Bu tenglamaning yechimini topishning o'zi noma'lumdan ma'lumga tomon izlanish demakdir. Bu tenglama $x > 3$ va $x \neq 4$ larda ma'noga egadir.

$$\lg 2(x+1) = 2\lg(x-3),$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\lg 2(x+1) = \lg(x-3)^2,$$

$$x_1 = 7$$

$$2(x+1) = (x-3)^2,$$

$$x_2 = 1$$

$$2x + 2 = x^2 - 6x + 9$$

Bu yerda $x > 3$ bo'lgani uchun $x_2 = 1$ yechim bo'la olmaydi, shuning uchun $x_1 = 7$ yagona yechimdir.

T a ' r i f. *Malumlardan noma'lumlarga tomon izlash metodi sintez deyiladi.*

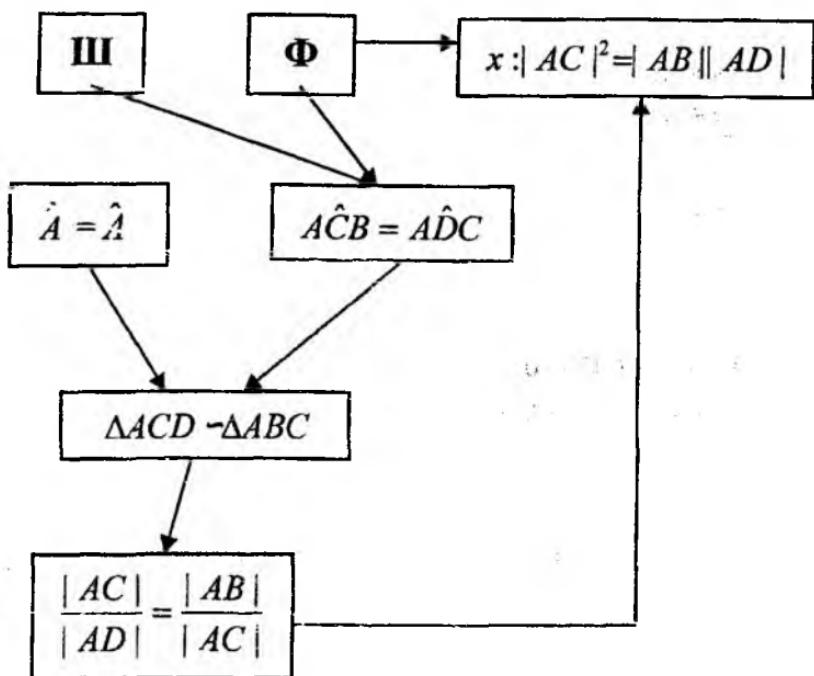
Sintez metodida fikrlashning bir bosqichidan ikkinchi bosqichiga o'tish go'yoki ko'r-ko'rona bo'ladi, bu o'tishlar o'quvchiga noaniqroq bo'ladi.

Sintez metodida biz berilganlarga asoslanib nimalarni topa olamiz, degan savolga javob beramiz. Yuqoridagi teoremani sintez metodi orqali isbot qilaylik.

B e r i l g a n: III: $[AC]$ - urinma; C - urinish nuqtasi; $[AD]$ - kesuvchi; $[AB]$ – uning tashqi qismi.

Isbot qilish kerak: (III. Φ) $\xrightarrow{?}$ ($X:AC^2 = |AD| |AB|$).

Biz isbotning sintez metodini quyidagi sxema orqali chizib ko'ramiz:



2-teorema. Ikki son yig'indisining o'rta arifmetigi shu sonlarni o'rta geometrigidan kichik emas.

$$\forall (a, b) \geq 0$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Isboti.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Yuqoridagilardan ko'rinaldiki, analiz sintez metodiga nisbatan ancha qulay metod ekan, chunki bunda o'quvchilar o'z mulohazalarni mustaqil ravishda asoslab isbotlashga doir misol va masalalarni yechishlariga yordam beradi. Umuman olganda, analiz va sintez metodlari bir-biridan ajralmaydigan metodlardir. Masalan, teoremani analiz yo'li bilan isbet qilsak, uni sintez metodi orqali tushuntiramiz, chunki bu metod ancha ixcham va maqsadga tomon tezroq olib

keladigan metoddir. Fikrlarimizning dalili sifatida quyidagi misolni ham sintez metodi orqali yechamiz.

Misol. $x_1 = 7$ va $x_2 = 1$ yechimlarni qanoatlashtiruvchi logarifmik tenglama tuzilsin. Bu yerda quyilgan savolning o'zi ma'lumdan noma'lumga tomon izlashni talab qilyapti, shuning uchun bu savolga sintez metodi orqali javob beriladi. Bu yerdagi bajarilishi kerak bo'lgan matematik jarayon ildizdan tenglamaga tomon olib boriladi.

1) $x_1=7$ va $x_2=1$ yechimlarni qanoatlantiruvchi tenglamani quyidagicha tuzish mumkin:

$$(x - 7)(x - 1) = 0,$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

Ayniy almashtirish bajarish bilan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$x^2 - 6x - 2x + 9 - 2 = 0,$$

$$2x + 2 = x^2 - 6x + 9,$$

$$\frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)} = 2$$

$$2x + 2 = (x - 3)^2,$$

$$\lg(2(x+1)) = 2 \cdot \lg(x - 3); \lg(x - 3) \neq 0.$$

Biz sintez metodi yordamida ma'lum bo'lgan $x_1=7$ va $x_2=1$ ildizlarni qanoatlantiruvchi $\frac{\lg 2(x+1)}{\lg(x-3)} = 2$ ko'rinishdagi noma'lum tenglamani hosil qildik.

6-§. Umumlashtirish metodi.

Umumlashtirish tushunchasi ham matematika o'qitishdag'ilmiy izlanish metodlaridan biri bo'lib hisoblanadi. Umumlashtirish usulini ahamiyatini atoqli olim A.N.Kondakov quyidagicha ta'riflaydi.

"Umumlashtirish shunday mantiqiy usulki, uning vositasi orqali birlik fikrlashlardan umumiyl fikrlashlarga o'tiladi".

Maktab matematika kursida umumlashtirish tushunchasi quyidagicha tadbiq qilinadi:

1. Matematik tushunchalarni umumlashtirish;

2. Teoremaarni isbotlashda umumlashtirish;
3. Misol va masalalarni yechishda umumlashtirish;
Endi umumlashtirish tadbiquclarini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1. Matematik tushunchalarini umumlashtirish

Ta'rif. *Matematik ob'ektdagi narsalarning asosiy xossalari aks eptiruvchi tafakkur shakli matematik tushuncha deyiladi.*

Har bir matematik tushuncha o'zining ikki tomoni bilan xarakterlanadi:

- a) tushunchaning mazmuni;
- b) tushunchaning hajmi.

Ta'rif. *Tushunchaning mazmuni deb, ana shu tushunchani ifodalovchi asosiy xossalarning to'plamiga aytildi.*

Masalan, to'rtburchak tushunchasini olaylik. To'rtburchak tushunchasining mazmuni quyidagi asosiy xossalari to'plamidan iborat:

- 1) to'rtburchakning diagonali uni ikkita uchburchakka ajratadi.
- 2) ichki qarama-qarshi burchaklarning yig'indisi 180° ga teng.
- 3) diagonallari bir nuqtada kesishadi va shu nuqtada ikkita bo'lakka bo'linadi.

Ta'rif. *Tushunchaning hajmi deb ana shu tushunchaga kirgan barcha ob'ektlar to'plamiga aytildi.*

Masalan, to'rtburchak tushunchasining hajmi to'rtburchak tushunchasiga kirgan barcha to'rtburchak turlaridan, ya'ni: parallelogramm, kvadrat, romb va trapetsiyadan iborat. Bundan ko'rindan. to'rtburchak tushunchasining hajmini tomonlari uzunliklarining miqdori turlicha bo'lgan barcha katta va kichik to'rtburchaklar tashkil qilar ekan. Hajm jihatidan keng, mazmun jihatidan esa tor bo'lgan tushunchani *jins tushunchasi* va aksincha hajmi tor, mazmuni esa keng bo'lgan tushunchani *tur tushunchasi* deb yuritiladi. Masalan, akslayshtirish tushunchasini olaylik. Bu tushunchadan qaytuvchi va qaytmaydigan akslayshtirish tushunchalari kelib chiqadi.

Bu yerda akslayshtirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslayshtirish tushunchalariga nisbatan *jins tushunchasi*, qaytuvchi va qaytmaydigan akslayshtirish tushunchalari akslayshtirish tushunchasiga

nisbatan tur tushunchalari bo'ladi. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rindiki, jins tushunchasi tur tushunchalariga nisbatan umumiy bo'lgan tushuncha ekan. Shuning uchun ham tushunchani umumlashtirishga quyidagicha ta'rif berilgan: "*Tur tushunchalaridan jins tushunchalariga o'tish tushunchani umumlashtirish deyiladi*". Umumlashtirish jarayonida, o'rganilayotgan tushunchalar orasida umumiy xarakterli mosliklar o'rnatilib, umumiy fikrlashlarga o'tiladi. Yuqoridagi mulohazalardan ko'riniib turibdiki, umumlashtirish jarayonida umumlashtirilgan tushunchaning hajmi ortib, mazmuni torayar ekan.

Misol. Qaytuvchi akslantirish tushunchasining hajmi B bo'lsin, uning mazmuni α bo'lsin. Akslantirish tushunchasining hajmi H bo'lsin, uning mazmuni esa β bo'lsin. Tushunchani umumlashtirishga berilgan ta'rifga ko'ra quyidagi munosabat o'rinni bo'ladi: $(B \subset H) \Rightarrow (\alpha > \beta)$. Bu yerda B - qaytaruvchi akslantirishning hajmiga bi'ektiv akslantirish kiradi. H - akslantirishning hajmiga esa barcha akslantirishlar kiradi. Shuning uchun qaytuvchi akslantirish tushunchasi akslantirish tushunchasining qismi bo'lyapti. Boshqacha aytganda, akslantirish tushunchasi qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalarining umumlashgan holi ekan.

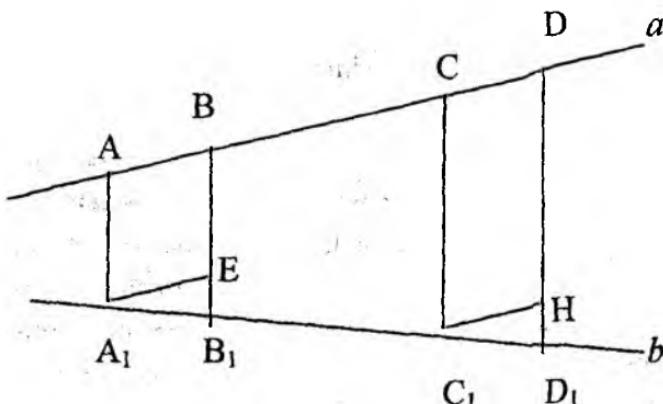
Endi uning mazmuniga kelsak, bu yerda qaytuvchi akslantirish deganda biz faqat shu akslantirishning xossalariqina o'rganamiz. Demak, biz o'rganadigan tushunchanining mazmuni aniq. Endi akslantirish tushunchasini olsak, bu yerda biz o'rganadigan tushunchanining mazmuni noaniqroq, chunki akslantirish tushunchasidan ikkita, ya'ni qaytuvchi va qaytmaydigan akslantirish tushunchalari kelib chiqadi. Bulardan ko'riniib turibdiki, qaytuvchi akslantirish tushunchasining mazmuni akslantirish tushunchasining mazmunidan katta ekan, ya'ni: $\alpha > \beta$.

2. Teoremlarni isbotlashda umumlashtirish

Teoremlarni umumlashtirish jarayonida o'quvchilar uning shart va xulosa qismini o'zaro ajratishlari hamda ular orasidagi o'xshash va farq tomonlarini analiz qilishlari lozimdir.

Analiz qilish quyidagi bosqichlar orqali amalga oshiriladi:

- 1) teoremada qatnashayotgan xossalarni asosiy va asosiy bo'lmagan xossalarni gruppasiga ajratiladi;
- 2) teoremani umumlashtirish uchun uning shartida qatnashayotgan asosiy xossalardan qaysi birini mazmunini o'zgartirish kerakligi aniqlanadi;
- 3) teorema umumlashgan holda isbot qilinadi.



24-Chizma.

Teorema. Agar bir to 'g'ri chiziqda bir necha kongurent kesma ajratilsa va ularning uchlaridan ikkinchi to 'g'ri chiziqni kesuvchi o'zaro parallel to 'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, ular ikkinchi to 'g'ri chiziqda o'zaro kongurent kesmalar ajratadi (24-chizma).

Berilgan:

$$[AB] \wedge [CD] \in a,$$

$$[AB] \cong [CD],$$

$$[AA_1] \amalg [BB_1] \amalg [CC_1] \amalg [DD_1]$$

Isbot qili sherkarak:

$$[A_1B_1] \cong [C_1D_1] \in b,$$

Isboti. Bu teoremani isbotlashda uchburchaklar kongurentligini alomatidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Chizmadan:

$$[AB] \amalg [A_1E] \wedge [CD] \amalg [C_1H]$$

$\Delta A_1EB_1 \cong \Delta C_1HD_1$ bir tomoni va unga yopishgan burchaklariga ko'ra, natijada:

$$[A_1B_1] \cong [C_1D_1] \in b.$$

Fales teoremasida asosan ikki shart bor: 1) a to‘g‘ri chiziqda konguruent kesmalar ajratilsin, 2) kesmalarning uchlaridan b to‘g‘ri chiziqni kesuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsin. Faraz qilaylik, a to‘g‘ri chiziqda konguruent kesmalar emas, balki ixtiyoriy kesmalar ajrataylik, u holda teoremaning mazmuni quyidagicha bo‘ladi: “Agar bir to‘g‘ri chiziqda bir necha ixtiyoriy kesma ajratilsa va ularning uchlaridan ikkinchi to‘g‘ri chiziqni kesuvchi o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, ular ikkinchi to‘g‘ri chiziqda ham ixtiyoriy kesmalar ajratadi”.

Berilgan:

$$([AB] \wedge [BC]) \in a; [AA_1] \amalg [BB_1] \amalg [CC_1] \amalg [DD_1]$$

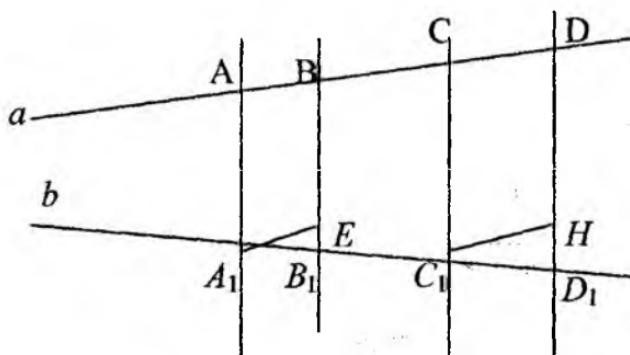
Isbot qilish kerak:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

I s b o t i: chizmadan (25-chizma):

$$(\Delta A_1EB_1 \sim \Delta C_1HD_1) \Rightarrow \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|} = \frac{|A_1E|}{|C_1H|} \quad (1)$$

$$[A_1E] \amalg [AB] \wedge ([C_1H] \amalg [CD]) \Rightarrow [A_1E] \cong [AB] \wedge ([C_1H] \cong [CD]) \Rightarrow \\ \Rightarrow (|A_1E| = |AB|) \wedge (|C_1H| = |CD|).$$



25-Chizma.

(1) tenglikdagi $|A_1E|$ va $|C_1H|$ o‘rniga (2) tenglikdagi AB va CD larni qo‘ysak:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

(3) tenglik proporsional kesmalar haqidagi teoremaning natijasidir. Demak, proporsional kesmalar haqidagi teorema Fales teoremasining umumlashgan holi ekan.

3. Masalalarni yechishda umumlashtirish

Bizga ma'lumki, maktab geometriya kursi deduktiv asosda mantiqiy qurilgan fandir. Shuning uchun ham maktab matematika kursidagi barcha amaliy materiallar o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini har tomonlama shakllantirishga qaratilgandir. O'quvchilarning mantiqiy fikrlash qibiliyatlarini shakllantirish esa matematikada yechiladigan amaliy mavzu materiallariga o'qitishning ilmiy izlanish metodlarini izchillik bilan tadbiq qilish lozimligini taqazo etadi. Ana shunday metodlardan biri umumlashtirish usulidir.

1 - m i s o l. Berilgan ikki kesmaga o'rta proporsional bo'lgan kesmani yasash qoidasiga asoslanib, bir-biriga teng bo'lmagan ixtiyoriy ikki musbat sonning o'rta arifmetigi shu sonlarning o'rta geometrigidan katta son ekanligini isbot qiling.

Berilgan: a va b sonlar; $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$.

$$\text{Isbot qilish kerak: } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

I s b o t i.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0,$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0,$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{demak} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

I. Faraz qilaylik, berilgan sonlar uchta bo'lsin. Berilgan: a , b , c - sonlar; $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b \neq c$.

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Isboti. Faraz qilaylik, $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ bo'lsin, u holda

$$\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} \right) \Rightarrow \left(x^3 + y^3 + z^3 \geq \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} \cdot 3 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz) \Rightarrow (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0) \quad (1)$$

Agar biz (1) tengsizlikni o'rini bo'lishini ko'rsatsak,

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$
 ekanligini ko'rsatgan bo'lamiz.

$$[(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \geq 0] \Rightarrow [(x+y+z)^3 - 3(x+y+z) \times \\ \times (xy + xz + yz)] \geq 0 \Rightarrow [(x+y+z) \times \\ \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz)] \geq 0 \quad (2)$$

(2) dagi birinchi ko'paytuvchi musbat, shuning uchun biz ikkinchi ko'paytuvchini musbat ekanligini ko'rsatsak, (1) tengsizlikni musbat ekanligini ko'rsatgan bo'lamiz:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(x-z)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \quad (3)$$

(3) tengsizlik doimo berilishiga ko'ra musbatdir, agar $x=y=z$ bo'lsa, (3) tengsizlik nolga teng bo'ladi, bu holda (1) tengsizlik tenglikga aylanadi.

Demak, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ tengsizlik o'rini ekan.

II. Faraz qilaylik, berilgan sonlar to'rtta bo'lsin.

Berilgan: a, b, c, d - sonlar; $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$;

Isbot qilish kerak: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

Isboti. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ga asosan

$$\left[\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)} \right] \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{c+d}{2}\right)}.$$

$$\left(\frac{a+b}{2} \right) \geq \sqrt{ab}, \quad \left(\frac{c+d}{2} \right) \geq \sqrt{cd}. \quad (4)$$

bo‘lgani uchun bularni (4) ga qo‘ysak:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Demak, $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Endi yuqoridagi tengsizlikni har qanday n uchun o‘rinli deb, matematik induksiya metodi orqali umumlashgan $(n+1)$ hol uchun isbot qilamiz:

$$a_{n+1} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = N_n;$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = N_{n+1};$$

$$a_{n+1} = N_n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{bo‘lsin}$$

$$\left(N_{n+1} = \frac{nN_n + a_{n+1}}{n+1} \right) \Rightarrow \left(N_{n+1} = \frac{nN_n + N_n + \varepsilon}{n+1} \right) \Rightarrow$$

$$\left(N_{n+1} = \frac{N_n(n+1) + \varepsilon}{n+1} \right) \Rightarrow \left(N_{n+1} = N_n + \frac{\varepsilon}{n+1} \right);$$

$$(N_{n+1})^{n+1} = \left(N_n + \frac{\varepsilon}{n+1} \right)^{n+1} = N_n^{n+1} + (n+1) \cdot N_n^n \cdot \frac{\varepsilon}{n+1} + \dots \geq$$

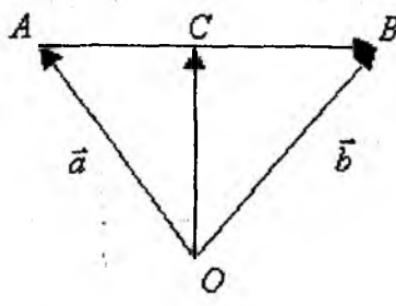
$$\geq (N_n^{n+1} + N_n^n \cdot \varepsilon) = N_n^n (N_n + \varepsilon) = N_n^n a_{n+1};$$

$$\left((N_{n+1})^{n+1} \geq N_n^n a_{n+1} \right) \Rightarrow \left(N_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{N_n^n a_{n+1}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}.$$

Demak, $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$

2-misol. C nuqta $[AB]$ kesmani teng ikkiga bo'ladi. O ixtiyoriy nuqta. \overrightarrow{OC} vektorni $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang (26-chizma).



26-Chizma

Berilgan: $[AB]$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$,

$$\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 1 \right) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|.$$

Tojish kerak: $\overrightarrow{OC} = ?$

Yechish: shartga ko'ra: $\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = 1 \right)$ bo'lgani uchun

$|\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|$ (1) bo'ladi. Chizmadan: \overrightarrow{AC} va \overrightarrow{AB} vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lgani uchun

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad (3)$$

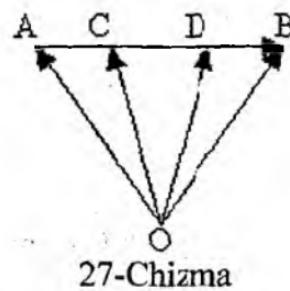
(2) va (3) larni (1) ga qo'ysak:

$$OC - OA = \frac{1}{2} (OB - OA), \quad OC = \frac{1}{2} (OB + OA),$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{2} \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{OA}, \quad \vec{OC} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{a})$$

Endi shu kesmani ikkita C va D nuqtalar yordamida teng uch bo'lakka bo'laylik. O ixtiyoriy nuqta. \vec{OC} va \vec{AD} vektorlarni $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

vektorlar orqali ifodalang (27-chizma).



Berilgan: $[AB]$, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \frac{1}{3} \vec{AB}$

Topish kerak: $\vec{OC} = ?$

Yechish: shartga ko'ra: $\left(\frac{\vec{AC}}{\vec{AB}} = \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \vec{AC} = \frac{1}{3} \vec{AB} \quad (1)$

\vec{AB} va \vec{AC} vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lganligi uchun

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}, \quad (2)$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \quad (3)$$

(2) va (3) larni (1) ga qo'ysak:

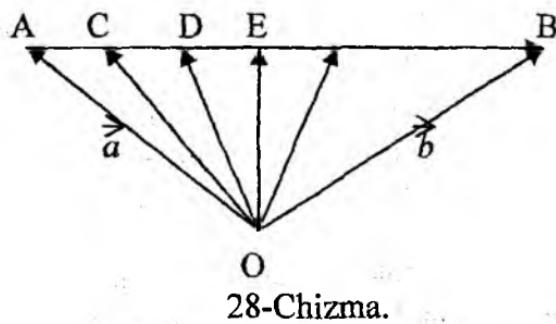
$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{1}{3} (\vec{OB} - \vec{OA}),$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{2}{3} \vec{OA},$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3} (\vec{OB} + 2\vec{OA}),$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{3} (\vec{b} + 2\vec{a}).$$

Endi shu $[AB]$ kesmani C, D, E, \dots nuqtalar yordamida teng n ta bo'lakka bo'laylik. O – tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (28-chizma). \vec{OC} vektorni $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.



28-Chizma.

Berilgan: $[AB], \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{n}$

Topish kerak: $\vec{OC} = ?$

Yechish: shartga ko'ra: $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{n}$

\vec{AC} va \vec{AB} vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lganligi uchun

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}, \quad (2)$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \quad (3)$$

(2) va (3) larni (1) ga qo‘ysak:

$$\vec{OC} - \vec{OA} = \frac{1}{n} \left(\vec{OB} - \vec{OA} \right),$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{n} \left(\vec{OB} + (n-1)\vec{OA} \right).$$

$$\vec{OC} = \frac{1}{n} \left(\vec{b} + (n-1)\vec{a} \right).$$

7-§. Abstraksiyalash metodi

O‘qitish jarayonidagi ilmiy izlanish metodlaridan biri bu abstraksiyalashdir. Abstraksiyalash - o‘rganilayotgan ob’ektidagi narsalarning muhim belgilarini, sifat yoki xususiyatlarini fikran ajratib olib ana shu belgi, sifat yoki xususiyatlarni mustaqil fikr ob’ektiga aylantirishdan iborat tafakkur operatsiyasidir.

1 - misol. O‘qituvchi abstraksiyalash metodini o‘quvchilarga $3 \cdot 5=15$ misol orqali tushuntirishi maqsadga muvofiq. Bizga ma’lumki, bu oddiy matematik tenglikdir, ammo u ob’ektiv olamdagi ma’lum bir qonuniyatlarni aks ettiradi. Agar biz $3 \cdot 5=15$ tenglikka ma’lum bir shartlarni

qo‘ysak, u holda bu tenglik quyidagi qonuniyatlarni ifodalaydi:

Agar biz 3 sonini qalamlarning soni, 5 sonini har bir qalamning qiymati desak, u holda 15 soni jami qalamlarning qiymatini (qancha turishini) ifodalaydi.

Agar biz 3 sonini odamning piyoda yurgan vaqtin, 5 soni uning bir soatdagi tezligi desak. u holda 15 soni piyoda odamning 3 soat ichida bosib o‘tgan yo‘lini ifodalaydi.

2 - misol. Biz fizika kursida jismning harakat tezligi tushunchasini $v_t = v_0 + at$ formula bilan, metall sterjen uzunligini qizdirilgandagi o‘zgarishini $l_x = l_0 + at$ formula bilan, chiziqli funksiyaning burchak koefitsientli formulasini esa $f(x) = ax + b$ bilan ifodalaymiz. Agar biz bu formulalarga diqqat bidan qarasak, $v_t = v_0 + at$ va $l_x = l_0 + at$ formulalar $f(x) = ax + b$ chiziqli funksiya formulasining fizikada yozilishi ekanligini ko‘ramiz.

Yuqoridagi misollardan ko'rinish turibdiki, abstraksiyalash usulida narsalarning aniq holatidan uzoqlashib, ularning muhim belgilari haqidagina gap boradi, narsalarning turli ko'rinishlari bo'yicha fikr yuritilmaydi. O'quvchilarga abstraksiyalash metodini o'rgatish ularning narsa va hodisalarini muhim belgilarini ajrata olishlari hamda ilmiy tushunchalarni o'zlashtirishlari uchun katta ahamiyatga egadir.

8-§. Aniqlashtirish metodi

O'rganilayotgan ob'ektdagi narsalarning xossalarni bir tomonlama xususiy holda fikrlash aniqlashtirish deyiladi.

1 - m i s o l. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ bu formulani aniq hollar uchun quyidagicha qo'llash mumkin:

$$\sqrt{81^2 - 63^2} = \sqrt{(81 - 63)(81 + 63)} = \sqrt{18 \cdot 144} = 12 \cdot 3\sqrt{2} \approx 36 \cdot 1.144 \approx 50,9.$$

2 - m i s o l. Bizga ma'lumki, kosinuslar teoremasini

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

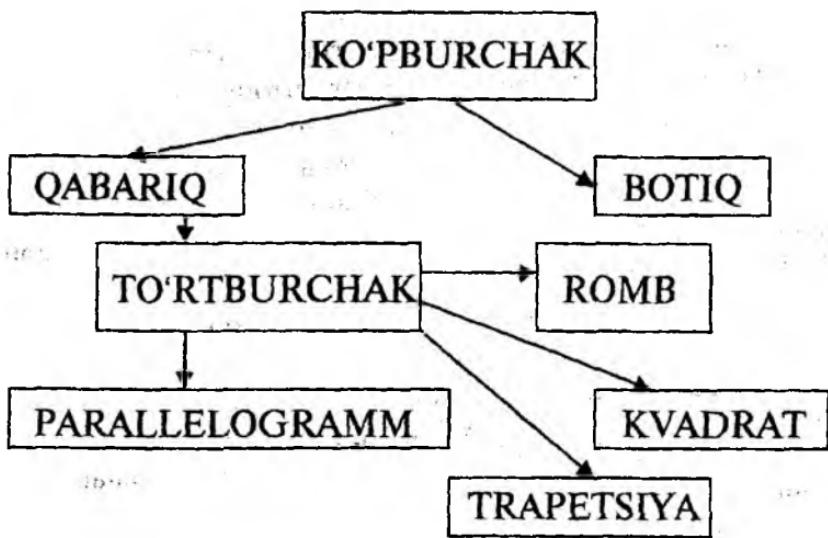
formula bilan ifodalaymiz: Agar $C = 90^\circ$ bo'lsa, $\cos 90^\circ = 0$, u holda $c^2 = a^2 + b^2$ - Pifagor teoremasi kelib chiqadi.

9-§. Klassifikatsiyalash metodi.

T a ' r i f. *Jins tushunchalaridan tur tushunchalariga o'tish klassifikatsiyalash deyiladi.*

Klassifikatsiyalash jarayonida o'quvchilar (muhim yoki o'xshash) belgiga asoslangan holda, ularni bir sinfga birlashtirishga harakat qiladilar, ya'ni ularni o'xshash, umumiylar farqli tomonlarini qarab bir-biridan ajratadilar, buning natijasida ular tushunchalarni klassifikatsiya qiladilar.

Masalan, ko'pburchak tushunchasini klassifikatsiyalash quyidagicha amalga oshiriladi:



10-§. Evristik ta’lim metodi.

"Evristika" degan so‘zning ma’nosи savol-javobga asosan topaman demakdir. Evristik metod bilan o‘qitish maktabdarda asosan, XIX asr boshlaridan boshlab qo‘llanila boshlandi.

Atoqli pedagog-matematik S.I.Shoxor-Trotskiy o‘zining "Geometriya na zadachax" nomli kitobida bunday yozadi: "Geometrik mashg‘ulotlar o‘quvchilarga qiziqarli bo‘lishi uchun, bu mashg‘ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so‘zma-so‘z quruq yodlash uchun emas, balki ularning aqliy faoliyatlarini ishga soladigan xarakterda bo‘lishi kerak. (Shoxor-Trotskiy S.I. "Geometriya na zadachax" M., 1908 y. 14-bet).

Amerikalik olim D.Poya o‘zining "Kak reshat zadachu" nomli kitobida evristik ta’lim metodini bunday tushuntiradi: "Evristikaning maqsadi - yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir". U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

1. Masalaning qo‘yilishini tushunish.
2. Masalani yechish rejasini tuzish.
3. Tuzilgan rejasini amalga oshirish.
4. Orqaga nazar tashlash (hosil qilingan yechimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o'quvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

1. Masalada nima noma'lum?
2. Masalada nimalar ma'lum?
3. Masalaning sharti nimalardan iborat?
4. Ilgari shunga o'xhash masala yechilganmi?
5. Agar shunga o'xhash masala yechilgan bo'lsa, undan foydalanib qo'yilayotgan masalani yecha olamizmi?

Albatta, yuqorida reja-sxema o'quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatlarini shakllantiradi, ammo bu reja - sxema o'quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan-bir yo'l bo'la olmaydi.

Matematik-metodist V.V.Repev evristik metod orqali o'qitishni bunday ta'riflaydi: "Bu metodning mohiyati shundan iboratki, o'qituvchi tomonidan sinf o'quvchilari uchun o'tiladigan mavzu materialining mazmuni muammo kilib qo'yiladi, so'ngra maqsadga tomon yo'naltiruvchi savollar sistemasini o'quvchilarga berish orqali qo'yilgan muammoni hal qilinadi. (Репьев В. В. "Общая методика математики", М., 1958 й., 149-бет).

Endi yuqorida aytilgan fikrlarning dalili sifatida quyidagi tenglama va masalani evristik ta'lim metodi bilan yechib ko'rsatamiz.

1. Ushbu $|x^2 - 3x - 9| = -5$ - tenglama evristik metod bilan yechilsin.

Bu tenglamani evristik metod bilan yechishda o'qituvchi bilan o'quvchilar orasidagi suhbatni keltiramiz, bu ta'lim jarayonidagi evristik metod mohiyatini ochib beradi:

O'qituvchi. $|x^2 - 3x - 9| = -5$ tenglamani qanday yechiladi?

O'quvchi. Bu tenglamani yechish uchun uning $x^2 - 3x - 9 = -5$ va $-x^2 + 3x + 9 = -5$ tenglamalar ko'rinishida yozib olamiz.

O'qituvchi: $x^2 - 3x - 9 = -5$ va $-x^2 + 3x + 9 = -5$ tenglamalarni qanday qoidaga asoslanib yozdingiz?

Agar bizga $|a|$ soni berilgan bo'lsa, u quyidagiga teng edi:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

O'qituvchi. Xo'sh, u holda hosil qilingan tenglamalar qanday yechiladi?

O'q u v ch i.

$$x^2 - 3x - 9 = -5,$$

$$x^2 - 3x - 9 + 5 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

O'qituvchi. $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamani qaysi formuladan foydalanib yechamiz?

O'quvchi. $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglama $x^2 + px + q = 0$ ko'rinishga keladi, bu keltirilgan kvadrat tenglamadir.

O'qituvchi. Kim aytadi, $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning umumiy yechimi qanday bo'laredi?

O'quvchi. $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

bo'lar edi.

O'qituvchi. $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamani bu formulaga qanday qilib qo'yamiz?

O'quvchi. $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamada $p = -3$ va $q = -4$ ga teng, biz ularni umumiy yechimiga qo'ysak, berilgan tenglamaning yechimini topgan bo'lamiz:

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2},$$

O'qituvchi. $-x^2 + 3x + 9 = -5$ tenglama qanday yechiladi?

$$O'quvchi. -x^2 + 3x + 9 + 5 = 0$$

O'qituvchi. Endi nima qilamiz?

O'quvchi. o'xshash hadlarini ixchamlaymiz: $-x^2 + 3x + 14 = 0$

O'qituvchi. Noma'lum x oldidan manfiy ishorani musbat qilish uchun nima qilamiz?

O'quvchi. Tenglikni har ikkala tomonini (-1) ga ko'paytiramiz:

$$-x^2 + 3x + 14 = 0 \cdot (-1), \quad x^2 - 3x - 14 = 0.$$

Bu tenglama ham yuqoridagi kabi yechiladi:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 14} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{65}}{2};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{65}}{2};$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{65}}{2};$$

II. Endi quyidagi masalani evristik metod bilan yechamiz.

Masala. Oralaridagi masofa 60 km bo'lgan A nuqtadan B nuqtaga bir vaqtda ikki velosipedchi jo'nadi. Ular bir vaqtda B punktga kelishlari kerak edi. Birinchi velosipedchi esa har soatda 2 km kam yurgani uchun bir soat kech keldi. Har bir velosipedchi soatiga necha km yurgan?

O'qituvchi. Masalaning shartlari qanday? Unda nimalar berilgan? Masala shartida qanday kattaliklar qatnashayapti?

O'quvchilar. A va B punktlar orasidagi masofa 60 km ekanı berilgan. Velosipedchilarning tezliklari orasidagi hamda ana shu masofalarini bosib o'tishlari uchun ketgan vaqtlar orasidagi farqlar berilgan. Bu masala shartida harakat, masofa va vaqt kabi kattaliklar berilgan.

O'qituvchi. Masalada nimani topish kerak?

O'quvchilar. Masalada har qaysi velosipedchining tezligini topish so'rалмоқда.

O'qituvchi. Biz tezliklarni topish uchun qanday formulalardan foydalanamiz?

O'quvchilar. Bizga fizika kursidan ma'lum bo'lgan $S=v \cdot t$, $v=\frac{S}{t}$ formulalardan foydalanamiz.

O'qituvchi. Masalani shartiga ko'ra nimani x bilan belgilaymiz?

O'quvchilar. x km/soatni A punktdan B punktgaga borayotgan velosipedchining tezligi deb olamiz.

O'qituvchi. Agar biz birinchi velosipedchini tezligini x desak, ikkinchi velosipedchini tezligini ana shu noma'lum orqali ifodalay olasizmi?

O'quvchilar. Ha, $(x-2)$ km/soat ikkinchi velosipedchining tezligi bo'ladi.

O'qituvchi. A punktdan B punktgacha masofani birinchi ikkinchi velosipedchilar qancha vaqtda bosib o'tgan?

O'quvchilar. $\frac{60}{x}$ - soatda, va $\frac{60}{x-2}$ soatda.

O'qituvchi. Bu velosipedchilarning 60 km.li masofani o'tishlari uchun ketgan vaqtarni qanday tenglash mumkin?

O'quvchilar. $\frac{60}{x-2} - 1 = \frac{60}{x}$ tenglama orqali.

O'qituvchi. Bu tenglamani qanday yechamiz?

O'quvchilar. Tenglama yechishning umumiy qoidasiga ko'ra:

$$60x + 120 - 60x = x^2 - 2x,$$

$$x^2 - 2x - 120 = 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+120} = 1 \pm 11.$$

$$x_1 = 12 \text{ km / coam},$$

$$x_2 = 10 \text{ km / coam}.$$

11-§. Matematika darslarida muammoli ta'lif.

Umumta'lif maktablari jamiyatning ijtimoiy-iqtisodiy va madaniy hayotdagi muhim o'zgarishlarga hamisha o'z munosabatini bildirib keldi. Jamiyat taraqqiyotining har bir davri uchun ta'lif nazariyasi rivojining ma'lum bir mazmuni mos keladi. Boshqacha qilib aytganda, jamiyat taraqqiyotining har bir bosqichiga mos ravishda o'qitish dasturlarining mazmuni, tarbiya prinsiplari, o'quvtarbiya jarayonini tashkil qilishning forma va metodlari hamda ta'lif muddatlari mos keladi. Pedagogika kursidan ma'lumki, ta'lif metodini aniqlashtirish jarayoni o'quvchi bilan o'qituvchining o'zaro munosabatlari prinsipidan kelib chiqadi, bunda o'qituvchi o'quvchilarga bilimlarni bayon qilishi, ana shu bilimlarga erishishdagi o'quvchilarning shaxsiy faoliyatlarini uyushtirishi hamda tushuntiriladigan mavzu materialini o'qituvchining o'zi qanday bayon qilish nuqtai-nazaridan yondashiladi.

Og'zaki ko'rsatmalik ta'lif jarayonida o'quvchilar o'qituvchining tushuntirishi orqali bilimlarni ongli ravishda o'zlashtiradilar hamda ularni amalda qo'llash malakalari hosil bo'ladi.

Asta-sekin umumta'lif maktablarining mazmuni tubdan o'zgartirildi, ya'ni ta'lifni matabning maqsad va vazifalariga mos keladigan yangi, ancha takomillashgan izohli-illyustrativ metodi

vujudga keltirildi. Izohli-illyustrativ ta'limda o'rganilayotgan ob'ekt mohiyati izohlanadi, hayotiy faktlar bilan bog'lanadi hamda o'qituvchining ana shu o'rganilayotgan ob'ektga nisbatan ko'rsatadigan misol va xilma-xil ko'rgazmali qurollari orqali tasdiqlovchi xulosasi bilan yakunlanadi.

Izohli-illyustrativ ta'limda o'qituvchi faktlarni o'zi bayon qilib beradi, o'zi ularni tahlil qiladi va yangi tushunchalarining mohiyatini tushuntiradi, ya'ni teorema, qoida va qonunlarni o'zi ta'riflaydi.

Izohli-illyustrativ ta'lim metodi umumta'limiy maktablarimizda qo'llanish darajasiga nisbatan an'anaga aylandi va hozirda ham qo'llanilmoqda. Hozirgi zamon ilmiy-texnika revolyusiyasi davrida izohli-illyustrativ ta'lim metodi o'quvchilarining fikrlash qobiliyatini etarli darajada rivojlantira olmaydi, ularni o'rganilayotgan mavzu materialini puxta bilishlariga bo'lgan ehtiyojlarini qanoatlantira olmaydi hamda fanga bo'lgan qiziqishlarini yuqori darajada shakllantira olmaydi. Shuning uchun ham 1960 yilning boshlaridan boshlab, maktablarimizda ta'lim jarayonini jadallashtirish g'oyasi keng tarqalib, ta'limning yangi metodi - *muammoli ta'lim metodi* vujudga kela boshladi.

Ta'lim metodlarining turini aniqlash o'quv jarayonini tashkil qilish prinsiplarini o'zigagina emas, balki aqliy faoliyat xarakteriga ham bog'liqidir, bu esa o'z navbatida fikrlashning reproduktiv va produktiv turlarini o'zar oq'shib olib borish bilan belgilanadi. Izohli-illyustrativ ta'lim jarayonida barcha bilimlar, ko'nikmalar va malakalar o'zlashtirishning reproduktiv metodi asosida amalga oshiriladi, ya'ni o'quvchilar fanning tayyor natijalarini, tayyor faoliyat usullarini o'zlashtiradilar, bu esa ularda xotira va reproduktiv fikrlash malakalarini shakllantiradi. Faqatgina produktiv ijodiy fikrlash malakalarini o'rganilgan nazariy mavzu materialiga bog'liq bo'lган masala yoki misollarni yechish davomida egallanadi, xolos. Birok reproduktiv fikrlash natijasida to'plangan ma'lum hajmdagi bilim va malakalar o'quvchilarining mustaqil bilish va ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish uchun etarli bo'lmaydi. Shuning uchun ham ta'limni jadallashtirish g'oyasini turli yo'nalishlari turli olimlar (M.A.Bankov, M.A.Danilov, M.Maxmutov, Yu.K.Babanskiy va boshqalar) tomonidan eksperiment qilinib ko'rildi va nazariy jihatidan isbotlandi.

O'tkazilgan eksperiment va kuzatishlar natijasida ta'limgarayonida o'quvchilarining bilish faoliyatlarini jadallashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori darajada foydalanish umumiy qonuniyatlar ishlab chiqildi. Bu qonuniyatlar quyidagilardan iborat:

1. O'rganilayotgan mavzu materiallari yuzasidan muammoli savollar sistemasini tuzish.

2. Tuzilgan muammoli savollar sistemasi aoosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materialini o'rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish.

3. Muammoli savollar asosida izlanish xarakteridagi o'quv vazifalarini qo'yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o'quv materiali tushuntirilganda o'quvchilar o'zлari darrov tushunib etmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar, natijada o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo'ladi.

T a ' r i f. O'rganilayotgan ob'ekt (bilishga doir nazariy material yoki masala) bilan o'r ganuvchi sub'ekt (o'quvchi) orasidagi o'zaro harakatlarning o'ziga xos bo'lgan turiga muammoli vaziyat deyiladi.

Muammoli vaziyat - bu o'quvchilarni o'rganilayotgan mavzu materialidagi fakt - va tushunchalarning qanday hosil bo'lishini bilmaslikdan ham ana shu mavzu materialining tub mohiyatini olib beruvchi matematik tushuncha, aksioma va teoremlarni o'rganilayotgan mavzu materialiga tadbiq qila olmaslik paytida vujudga keladigan intellektual qiynalishdir.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o'quvchilarning tez fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o'quv jarayonini qayta qurish muammoli ta'limgarayonida asosiy g'oyasini belgilab beradi. Muammoli ta'limgarayonida bilimning deyarli katta qismi o'quvchilarga tayyor holda berilmaydi, balki o'quvchilar tomonidan muammoli vaziyatlarni mustaqil xal qila bilish faoliyati jarayonida egallab olinadi.

T a ' r i f. Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil kilingan dars jarayoni muammoli ta'limgarayonida deyiladi.

Yuqoridagi mulohazalardan muammoli ta'lif nazariyasi o'quvchi intellektual imkoniyatlarini ochib beruvchi rivojlantiruvchi xarakterdagi ta'lif tashkil kilishning psixologik, pedagogik yo'llari va usullarini tushuntiradigan ta'lif jarayoni ekanligi ko'rindi.

Muammoli ta'lifda o'qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunini tushuntira borib o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida muntazam ravishda muammoli vaziyatlar vujudga keltiradi, o'quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o'quvchilar bu faktlarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar, tushuncha, qoida va teoremalarni o'qituvchi yordamida aniqlab ifoda qilinishi yoki ma'lum bilimlarni yangi vaziyatlarda qo'llanishini o'rganadilar, natijada o'quvchilarda aqliy operatsiya va bilimlarni amaliyotda qo'llanish malakalari shakllanadi.

Maktab matematika kursida o'rganiladigan nazariy mavzu materiallari masala va misollarni ularning mazmuniga ko'ra muammoli va muammoli bo'limgan turlarga ajratish mumkin.

Agar o'rganilayotgan mavzu materialidagi masala va misollar ni yechish jarayoni o'quvchilar uchun yangi matematik tushuncha, fakt va qoidalarni o'z ichiga olgan bo'lib, avvalgi usul bilan yechish mumkin bo'lmasa-yu, yechishning yangi usullari talab etilsa, u holda bunday masala yoki misol mazmunan muammolidir, aksincha, shunday masala yoki misollar o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga yechish uchun berilishi mumkinki, bunday masala va misollar o'quvchilar uchun muammoli bo'lmay qoladi, chunki ular masala va misol yechilishining yangi usullarini mustaqil izlanmasdan, o'qituvchining tushuntirishiga qarab o'zlashtirib oladilar, berilgan masala yoki misol faqatgina koeffitsientlari bilan avvalgilaridan farq qiladigan darajada bo'ladi.

1-misol. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchilariga quyidagi misollarni berish mumkin:

$$6 + 2 \times 3 = 24$$

$$6 + 2 \times 3 = 12$$

Mazmuniga ko'ra bu masala muammoli bo'ladi, chunki bir xil toifadagi ikkita misol hap xil natijaga ega bo'lyapti. Bas, shunday ekan, misollarni yechish usullari ham har xil bo'lishi kerak.

O'quvchilarga esa faqatgina bitta ketma-ket hisoblash usuli ma'lum, xolos. Ikkinchi usuli esa ular uchun noma'lumdir. Mana shu yerda muammoli vaziyat hosil bo'ladi. Yuqoridagi qo'yilgan misollarning ikkinchi sinfdagi yuqori o'zlashtiruvchi o'quvchilar tomonidan yechilishi mumkin. Agar o'qituvchi dastlab o'quvchilarga bir xil miqdorilardan tuzilgan misollarni turlicha usullar bilan yechish namunalarini ko'rsatgan bo'lsa edi, ular bu misollarni namunadan foydalaniib yecha oladilar, natijada bu misollarni yechish jarayoni hech qanday muammoli vaziyatni hosil qilmaydi.

2 - m i s o l. Agar o'qituvchi $ax^2+bx+c=0$ to'la kvadrat tenglamaning umumiyligi $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ yechimini topib, unga

doir $5x^2+7x+2=0$ misolni ko'rsatgandan so'ng, o'quvchilarga $6x^2+5x+1=0$ tenglamani yechinglar desa, bu holat o'quvchilar uchun muammoli vaziyatni hosil qilmaydi, chunki ular uchun bu misolni yechishga andaza bor. O'quvchilar bu misolni yechish jarayonida hech qanday yangi matematik qonun yoki qoidani ishlatmasdan avvalgi misoldagi koeffitsientlar o'rniiga yangilarini qo'yadilar, xolos, bunda o'quvchilarning fikrlash qobiliyatları shakllanmaydi.

3 - m i s o l. O'qituvchi kvadrat tenglama mavzusini o'tib bo'lganidan keyin bikvadrat tenglamani o'tish jarayonida quyidagicha muammoli vaziyatlarni hosil qilishi mumkin.

O'qituvchi: $6x^4+5x^2+1=0$ tenglamani qanday tenglama deb aytamiz?

O'quvchilar: 4 - darajali tenglama deyiladi.

O'qituvchi: to'g'ri, shunday deyish ham mumkin, ammo matematikada shu ko'rinishdagi tenglamalarni *bikvadrat tenglama* deyiladi va uning umumiyligi $ax^4+bx^2+c=0$ kabi bo'ladi. Xo'sh, bu ko'rinishdagi tenglamani qanday yechish mumkin?

O'quvchilar: Biz bunday tenglamalarni yechmaganmiz.

Mana shu yerda o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida biliishga doir muammoli vaziyat hosil bo'ladi.

O'qituvchi: $x^2=y$ deb belgilasak, x^4 ni qanday belgilaymiz?

O'quvchilar: mulohaza yuritish, ilgari o'tilganlari eslash orqali $x^4=y^2$ deb belgilash to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qiladilar.

O'qituvchi: Bu tenglamani hozirgi belgilashlarga ko'ra qanday ko'rinishda yozish mumkin?

$$\text{O'quvchidar: } 6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

O'qituvchi: bu hosil qilingan tenglamani qanday tenglama deyiladi?

O'quvchilar: to'la kvadrat tenglama déyiladi.

O'qituvchi: bu tenglamani qanday yechamiz?

O'quvchilar: to'la kvadrat tenglama umumiy yechimini topish formulasiga qo'yib topamiz:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}; \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{3};$$

O'qituvchi: biz hozir tenglamani yechib, qaysi noma'lumni topdik?

O'quvchilar: noma'lum y ni topdik.

O'qituvchi: nimani topish so'ralgan edi?

O'quvchilar: x ni topish so'ralgan edi.

O'qituvchi: x ni qanday topamiz?

Mana shu yerdagi noma'lum x ni topish jarayoni ham ko'pchilik o'quvchilar uchun muammoli vaziyatni hosil qiladi.

O'quvchilar noma'lum x ni o'zlarini topishlari mumkin, bo'shraq o'quvchilarga o'qituvchi yordamlashadi:

$$x^2 = \frac{1}{2}; \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$x^2 = \frac{1}{3}; \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}};$$

Demak, tenglama 4-darajali bo'lgani uchun biz 4 ta yechimini topdik. Bu misolni yechib bo'linganidan keyin $ax^4 + bx^2 + c = 0$ bikvadrat tenglamaning umumiy yechimini o'qituvchi rahbarligida o'quvchilarning o'zlarini topa oladilar:

$$x^2 = y,$$

$$ay^2 + by + c = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

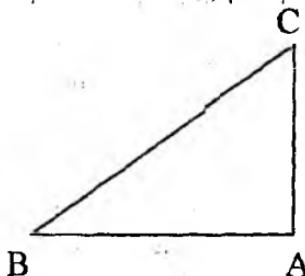
$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

Shunday qilib, muammoli savol, muammoli masala - o'quv muammosining turli shaklda ifodalanishi bo'lib, bularning qo'llanishi muammoli vaziyat va o'quvchilarning izlanish faoliyatining yuzaga kelishiga olib keladi.

3 - m i s o l. Kosinuslar teoremasini o'rganish uchun o'qituvchi oldin o'quvchilar bilan birlgilikda to'g'ri burchakli uchburchakning elementlaridan birortasini topishga doir bo'lgan masalalardan yechadi.

1 - masala. $\triangle ABC$ to'g'ri burchakli uchburchakda $\angle A=90^\circ$, $|BC|=15\text{ sm}$ va $|AB|=9\text{ sm}$ bo'lsa, $|AC|$ - tomonining uzunligi topilsin (29-chizma).



29-chizma.

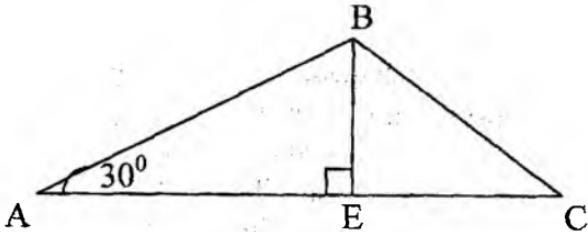
Berilgan: $\triangle ABC$, $\angle A=90^\circ$, $|BC|=15\text{ sm}$ va $|AB|=9\text{ sm}$.

Topish kerak: $|AC|$ - ?

Yechish. Pifagor teoramesiga ko'ra: $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Rightarrow |AC| = \pm \sqrt{|BC|^2 - |AB|^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$.

$|AC|=12\text{ sm}$.

2-masala. $\triangle ABC$ da $\angle A=30^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $|AB|=2\text{ sm}$, $|AC|=\frac{4}{3}\sqrt{3}\text{ sm}$ bo'lsa, $|BC|$ - ning uzunligini toping (30-chizma).



30-chizma.

Berilgan: $\triangle ABC$ da $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $|AB| = 2$ sm,
 $|AC| = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ sm

Topish kerak: BC - ?

Yechish. Chizmadan:

$$\Delta ABE \sim \Delta BEC, \quad \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{BE}, \quad BE = \frac{AB}{2} = 1 \text{ sm},$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{1}, \quad |BC| = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ sm.}$$

Yechilgan bu masalalar muhokama qilingandan keyin o'quvchilar oldiga quyidagicha muammoli savol qo'yish mumkin. Agar ixtiyoriy uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi berilgan bo'lsa, uning uchinchi tomonini topish mumkinmi? Bu muammoli savolga javob topish bizni kosinuslar teoremasini o'rganishga olib keladi.

12-§. Matematika darslarida dasturlashtirilgan ta'lim.

Dasturlashtirilgan ta'lim jarayonida o'quvchilar o'qituvchi tomonidan maxsus tayyorlangan didaktik vositalar yordami bilan mustaqil ravishda yangi bilimlarni o'zlashtiradilar. O'quv materialini dasturlashtirish muktab matematika kursida chiziqli va tarmoqli bo'lib, ular ta'lim jarayonida mashinali va mashinasiz amalga oshiriladi.

Dasturlashtirilgan ta'lim metodi o'quvchilarning qisman esga tushirish va qisman yangi bilimlarni o'zlashtirish faoliyatlarini

amalga oshiruvchi sistemadan iboratdir. Mashinasiz dasturlashtirilgan topshiriqlarni qo'llash quyidagicha amalga oshiriladi. O'qituvchi tomonidan beriladigan har bir topshiriq bo'lak bo'lak bo'lgan kadr elementlaridan iborat bo'lib, har bitta kadr element o'rganiladigan mavzu materialining bir qismini hosil qilib, u savollar va javoblar yoki yangi bilimlar bayoni hamda mashqlar tarzida ifodalanadi. Mavzu materialiga doir kadrlar tuzishda eng keng tarqalgan yo'l javoblar tanlab olinadigan usuldir:

- berilgan savolga tayyor javob olinadigan qoida va xulosa tarzidagi axborotlardan iborat kadrlar;
- javoblarning to'g'riliqini nazorat qilish uchun zarur bo'lgan kadrlar.

1 - misol. Logarifmik funksiya:

$$y = \log_a x, a \neq 1, x > 0, a > 0$$

funksiya logarifmik funksiya deyiladi

Misol. $y = \log_3 x; y = \log_2 2x; y = \log_{112} x; \dots$

Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi – R_+

Misollar:

1. $y = \log_3 \sqrt{5x}$ logarifmik funksiya bo'la oladimi?

2. $y = \log_5 x; y = \log_5(-3x); y = \log_4 \frac{x}{7}; \dots$

J: Ha.

J: $y = \log_5 x; y = \log_4 \frac{x}{7}.$

3. Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi qanday?

J: R_+ .

Mashinali dasturlashtirilgan ta'lim topshiriqlari elektron hisoblash mashinalarida amalga oshiriladi. Qo'yilgan matematik masalalar elektron hisoblash mashinalari yordamida quyidagi bosqichlar orqali yechiladi.

1. Masalaning quyilishi - bu ishni matematik amalga oshiradi.

2. Quyilgan masala yechimini dasturlashtirish - bu ishni maxsus tayyorgarlikda o'tgan dasturchi bajaradi.

3. Tuzilgan dasturni berilgan ma'lumotlarga ko'ra kartalashtirish.

Bu yerda qo'yilgan matematik masala yoki misolni yechish uchun dastur tuzish juda ko'p mehnat talab etadi. Dastur tuzuvchi berilgan masalani arifmetik amallari tartibidagi elementar masalalarining yig'indisi ko'rinishiga keltirib oladi, so'ngra unga nisbatan dastur tuzadi. Faraz qilaylik, bizni elektron hisoblash mashinamiz quyidagi kodlardan iborat bo'lgan komandani tushunadigan bo'lsin.

Nº	Komanda	Operatsiyalar kodi	Belgilanishi
1	Qo'shish	01	$a + b = R$
2	ayirish	02	$a - b = R$
3	ko'paytirish	03	$a \times b = R$
4	bo'lish	04	$a : b = R$
5	to'xtatish	017	To'xta

$y = \frac{ax - b}{cx + d}$ funksiya uchun dastur tuzilsin. Bu kasr chiziqli funksiya uchun quyidagicha dastur tuzish mumkin:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &\Rightarrow R \\
 R - b &\Rightarrow surat \\
 c \cdot x &\Rightarrow R \\
 R + d &\Rightarrow max\ raj \\
 surat : max\ raj &= y \\
 to'xtash
 \end{aligned}$$

Elektron hisoblash mashinasida chiziqli funksiyada qatnashayotgan barcha koeffitsientlar orasidagi arifmetik amallar uchun quyidagi yacheyka va adreslar ajratilgan bo'lsin:

$a - 1001$

$b - 1002$

$c - 1003$

$d - 1004$

$x - 1005$

- 0512

- 0513

- 0514

$y - 2000$

Komanda	Yacheyka	Kod	Adres	Adres	Adres
$ax \Rightarrow R$	0060	03	1001	1005	0512
$R-b \Rightarrow surat$	0061	02	0512	1002	0513
$c \cdot x \Rightarrow R$	0062	03	1003	1005	0512

$R+d \Rightarrow maxraj$	0063	01	0512	1004	0514
$surat: maxraj \Rightarrow y$	0064	04	0513	0514	2000
$to 'xtash$	0065	17	0000	0000	0000

Yuqoridagilardan ko'rindik, har bir elektron hisoblash mashinasi uchun alohida ishchi dasturlari tuzish kerak bo'ladi, bundan tashqari har bir mashinaning tili har xil bo'ladi. Ana shulurni hisobga olib mashinalar uchun *algoritmik til* ishlab chiqiladi, bunda asosan qo'yilgan masala uchun algoritmk tilda dastur tuziladi, bu tuzilgan dastur mashinaga qo'yilganda u algoritmk tilni o'z tiliga o'tkazib masala yechimini hal qiladi. "Algol-60" elektron hisoblash mashinasida keltirilgan kvadrat tenglamani yechish uchun tuzilgan algoritmk til dasturini ko'rib chiqaylik.

Dasturlashtirilgan ta'limda o'rgatuvchi qurilmalar keng qo'llanishi tufayli bu ta'lim metodi istiqbolga ega, ammo barcha o'quv materiallarini dasturlashtirilgan xarakterda o'tish maqsadga muvofiq emas. Dasturlashtirilgan ta'limda o'quvchilar bilan o'qituvchi orasida deyarli og'zaki aloqa bo'lmaydi. O'quvchilarning matematik nutqi umuman rivojlanmaydi, shuning uchun ham mavzu materiallarini har xil metodlar yordamida o'quvchilarga o'rgatish maqsadga muvofiqdir.

No	Algoritmik tilda yozilishi	Analitik yozuv usuli
1	Haqiqiyalar p, q, x_1, x_2, D	P, q, x_1, x_2, D
2	Ishga tushirish (p, q)	P, q
3	$D:p \uparrow 2-4 x q$	$D=p^2-4q$
4	Agar $D \neq 0$ bo'lsa, M_1 ga o'tish kerak, aks holda $x_1=x_2=(-p)/2$	Agar $D \neq 0$ bo'lsa, $x_1=x_2=-p/2$ bo'lmaydi.
5	M_1 : agar $D < 0$ bo'lsa, u holda M_2 ga o'tish kerak. $x_1=(-p+D\uparrow 0,5)/2$ $x_2=(-p-D\uparrow 0,5)/2$	Agar $D < 0$ bo'lsa, x_1 va x_2 yechimlar haqiqiy sonlarda mavjud emas, u holda $D > 0$ holini qaraymiz, bunda $x_1=(-p+\sqrt{D})/2$ va $x_2=(-p-\sqrt{D})/2$ bo'ladi.
6	Chiqish: Xulosa ($x_1; x_2$)	x_1 va x_2 yechimlar topildi.

III-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematik ta'lif metodlari qanday metodlarni o'z ichiga oladi?
2. Ilmiy izlanish metodlarining turlarini aytib bering.
3. Tajriba va kuzatish metodini tushuntiring.
4. Taqqoslash metodini aytib bering.
5. Analiz va sintez metodlarini ta'riflang.
6. Umumlashtirish metodini ta'riflang va uni matematika darslariga tadbiqini tushuntirib bering.
7. Tushunchani umumlashtirish deb nimaga aytildi?
8. Teoremlarni umumlashtirishni tushuntirib bering.
9. Misol va masalalarni umumlashtirish qanday amalga oshiriladi?
10. Abstraksiyalash metodini tushuntirib bering.
11. Aniqlashtirish metodi deganda nimani tushunasiz?
12. Klassifikatsiyalash metodini aytib bering.
13. Qanday ta'lif metodiga evristik ta'lif deyiladi?

14. Muammoli vaziyat deb nimaga aytildi?
15. Muammoli ta'lim deganda nimani tushunasiz?
16. Dasturlashtirilgan ta'limni tushuntirib bering.
17. Sonlar ketma-ketligi deb qanday to'plamga aytildi?
18. Qanday sonlar ketma-ketligi arifmetik progressiya deyiladi?

III-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Ta'lim metodi, ilmiy-izlanish metodi, tajriba metodi, kuzatish metodi, taqqoslash metodi, analiz metodi, sintez metodi, umumlashtirish metodi, tushunchani umumlashtirish, teoremani umumlashtirish, misollarni umumlashtirish masalalarini umumlashtirish, abstraksiyalash metodi, klassifikatsiyalash metodi, evristik ta'lim, muammoli ta'lim, dasturlashtirilgan ta'lim, sonlar ketma-ketligi, arifmetik progressiya, o'qituvchining faoliyati, o'quvchilarning faoliyati.

IV BOB. O'QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKURLARNI SHAKLLANTIRISH METODIKASI.

1-§. Matematik ta'lif jarayonida masalaning roli va o'rni.

Matematik ta'lif jarayonida masalalardan foydalanish qadim zamonlardan beri qo'llanib kelinayotir. Shuning uchun ham matematika darslarida matematik masalaning roli va uning o'rni haqida gap borganda quyidagi uch bosqichni ko'zda tutish maqsadga muvofiqidir.

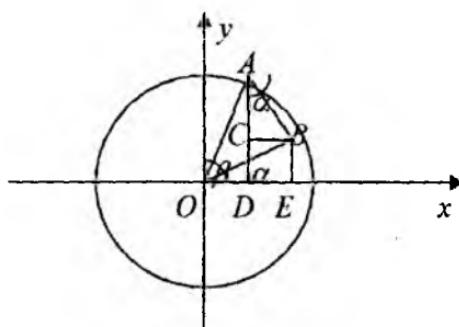
1. Matematika fanining nazariy qismlarini o'rganish matematik masalalarni yechish maqsadida amalga oshiriladi.

2. Matematika fanini o'rgatish matematik masalalarni yechish bilan birgalikda olib boriladi.

3. Matematikani o'rganish masala yoki misollar yechish orqali amalga oshiriladi.

Aytiganlardan ko'rindiki, jamiyat rivojlanishining har bir bosqichida masalaning roli va uning o'rniiga har xil baho berib kelgingan.

1966 yili xalqaro matematiklar simpoziumida matematik masala va misollarni yechish o'quvchilarning faqatgina matematik faoliyatlarini shakllantiribgina qolmay, balki ana shu fanga doir bilimlarni o'zlashtirish va uni amaliyotga tadbiq qilishga ham xizmat qiladi, deyiladi.



31-chizma.

Aytigan har bir bosqichni aniq mavzu materiallari asosida ko'rib chiqamiz.

1. Darsda "Ikki burchak yig'indisining sinusi" nomli mavzuni o'quvchilarga tushuntirsak, ular chiqarilgan natijaviy formuladan foydalanib mavzu materialiga doir misollarni yecha oladilar (31-chizma).

Berilgan: C – aylana, $[AB] \perp OB$, $OA=R=1$, $\angle EOB=\alpha$, $\angle BOA=\beta$, $\angle DOA=\alpha+\beta$

Isbot qilish kerak: $\sin(\alpha+\beta) ?$ (31-chizma)

$$\text{Isboti: } \Delta OAD \Rightarrow \left(\frac{AD}{OA} = \sin(\alpha + \beta) \right)$$

$$OA = 1 \text{ bo'lgani uchun } \sin(\alpha + \beta) = AD = CD + CA \quad (1)$$

Chizmadan: $CD = EB$, chunki bular o'zaro paralell to'g'ri chiziqlar orasidagi kesmalar

$$\Delta OBE \Rightarrow \left(\frac{EB}{OB} = \sin \alpha \right) \Rightarrow (EB = OB \sin \alpha) \quad (2)$$

$$\Delta OAB \Rightarrow \left(\frac{OB}{OA} = \cos \beta \right) \Rightarrow (OB = OA \cos \beta) \Rightarrow (OB = \cos \beta) \quad (3)$$

$$(3) \text{ ni } (2) \text{ ga qo'ysak } EB = \sin \alpha \cdot \cos \beta. \quad (4)$$

$$\Delta ACB \Rightarrow \left(\frac{AC}{AB} = \cos \alpha \right) \Rightarrow (AC = AB \cos \alpha). \quad (5)$$

$$\Delta OAB \Rightarrow \left(\frac{AB}{OA} = \sin \beta \right) \Rightarrow (AB = OB \sin \beta). \quad (6)$$

(6) ni (5) ga qo'ysak:

$$AC = \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (7)$$

(4) va (7) larni (1) ga qo'ysak,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \text{ bo'ladi.}$$

Misol:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

$$\text{Demak, } \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

$$\text{Hisoblang: } \sin 135^\circ = ? \quad \cos 150^\circ = ? \dots$$

2. Matematik tushunchalarni o'rGANISH matematik misol va masalalarni yechish bilan birgalikda olib boriladi, chunki o'qituvchi yangi o'rganiqidigan matematik tushunchaning ta'rifini bergandan

keyin uning analitik ifodasini yozadi. Masalan $a^x = b$, $a \neq 1$ ko'rishdagi tenglamaga ko'rsatkichli tenglama deyiladi deb ta'riflangandan so'ng, quyidagi ko'rinishdagi ko'rsatkichli tenglamani ifodalovchi misollarni ko'rsatish mumkin: $3^x = 27$; $2^x = 16$; $5^x = 125$; ...

O'qituvchi $a^x = b$ ko'rinishdagi tenglamaning yechimini geometrik nuqtai-nazardan ko'rsatib berishi maqsadga muvofiqdir. O'qituvchi o'quvchilarga, agar koordinatalar tekisligida ikki funksiya grafigi o'zaro kesishsa, ular kesishish nuqtasining absiscasi ana shu funksiyalarni tenglash natijasida hosil qilingan tenglamaning yechimi bo'lishini takrorlagandan so'ng $a^x = b$ tenglamani ham $y = a^x$ va $y = b$ ko'rinishlarda yozib, ularning har birining grafigini chizib, bu grafiklarning kesishish nuqtasining absissasini $x = \log_a b$ deb belgilash qabul qilinganligini tushuntirishi lozim. Bundan ko'rinadiki, $a^x = b$ tenglamaning yechimi $x = \log_a b$ bo'lar ekan. $(3^x = 27) \rightarrow x = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3$.

Ko'rsatkichli tenglamalarning barchasi ayniy algebraik almash-tirishlar yordamida soddalashtirilib, $a^x = b$ ko'rinishga keltiriladi, so'ngra bundan, x noma'lum $x = \log_a b$ ko'rinishda topiladi.

1-misol.

$$5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3} = 155,$$

$$5^x \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \right) = 155,$$

$$5^x \left(\frac{25+5+1}{125} \right) = 155,$$

$$5^x \cdot 31 = 155 \cdot 125.$$

$$5^x \cdot 31 = 31 \cdot 5 \cdot 5^3,$$

$$5^x = 5^4,$$

$$x = 4.$$

2-misol.

$$4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$$

$$(2^{\sqrt{x-2}})^2 + 16 - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} = 0.$$

$$2^{\sqrt{x-2}} = y \text{ desak,}$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0.$$

$$y_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 16} = 5 \pm 3$$

$$y_1 = 8; y_2 = 2.$$

$$1) 2^{\sqrt{x-2}} = 8$$

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2^3$$

$$\sqrt{x-2} = 3$$

$$x-2 = 3^2$$

$$x_1 = 11.$$

$$2) 2^{\sqrt{x-2}} = 2$$

$$\sqrt{x-2} = 1$$

$$x-2 = 1$$

$$x_2 = 3.$$

Misollar

$$1) 2^x \cdot 5^x = 0,1(10^{x-1})^5.$$

$$2) 3^{x^2-x-2} = 81.$$

$$3) \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x-5} = 25.$$

$$4) \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4,8.$$

3. Hozirgi davrda masala yoki misollar yechish orqali matematik ta'lim jarayonini olib borishning metodik usul va vositalari ishlab chiqilgan va bu usullar haqida ko'pgina ilmiy metodik va didaktik adabiyotlarda bayon qilingan. Matematik tushunchani masala yoki misollar yordamida kiritish va uning tub mohiyatini o'quvchilarga tushuntirish murakkab bo'lgan pedagogik jarayondir. Shuning uchun ham bir maktab o'qituvchisi dars jarayonida ishlatiladigan masalani tanlash yoki uni tuzishda juda ham ehtiyyot bo'lmog'i lozimdir. Tuzilgan masalalarni dars jarayonida qo'llanish ana shu o'quvchilarining o'zlashtirish qobiliyatlarini hisobga olgan holda bo'lishi kerak. Har bir dars jarayonida ishlatiladigan masala yoki misol darsning maqsadiga mos kelishi kerak.

Agar darsda o'qituvchi o'quvchilarga biror yangi matematik tushunchani o'rgatmoqchi bo'lsa, tuziladigan masala yoki misol ana shu tushuncha mohiyatini ochib beruvchi xarakterda bo'lishi kerak.

Masalan $y=a^x$, $a \neq 1$ ko'rsatkichli funksiyaning grafigi nomli mavzuni o'tishdan oldin o'qituvchi $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=3^x$ kabi xususiy holdagi ko'rsatkichli funksiyalarga doir bo'lgan misollarning grafiklarini Dekart koordinatalar sistemasida o'quvchilar bilan savolvjavob asosida chizib ko'rsatish maqsadga muvofiqdir.

a ning xususiy qiymatiga nisbatan chizilgan grafiklardan o'quvchilar o'qituvchi bilan birlgilikda $y=a^x$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va uning xossalari haqida umumiylar xulosalarini keltirib chiqara oladilar. Bu yerda darsni tushuntirish metodikasi xususiylikdan umumiylikka tomon bo'lib, bunda o'quvchilar har bir tushunchani mohiyatini anglab etadilar.

2. Matematika o'qitishda masalalarning bajaradigan funksiyalari.

Hozirgi zamon didaktikasida A.D.Semushin, K.I.Neshkov va Yu.M.Kolyagin, J.Ikromov, T.To'laganov va N.G'aybullaev kabi metodist matematiklar matematika kursidagi masala va misollarning bajaradigan funksiyasini quyidagicha turlarga ajratishadi:

1. Masalaning ta'limiyl funksiyasi.
2. Masalaning tarbiyaviy funksiyasi.
3. Masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagi funksiyasi.
4. Masalaning tekshiruv xarakterdagi funksiyasi.

Masalaning matematika darsi jarayonida bajaradigan funksiyalarini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

1. Masalaning ta'limiyl funksiyasi asosan maktab matematika kursida o'rganilgan nazariy ma'lumot, matematik tushuncha, aksioma, teorema va matematik xulosalar, qonun-qoidalarning aniq masala yoki misollarga tadbiqi natijasida o'quvchilarda mustahkam matematik bilim va malakalar hosil qilish orqali amalga oshiriladi.

O'qituvchi ikki burchak yig'indisi va ayirmasining sinusi teoremasini o'tib bo'lganidan keyin, ana shu mavzu materialini

o'quvchilar ongida mustahkamlash uchun quyidagicha misollarni yechish mumkin.

1 - m i s o l. Ayniyatni isbotlang:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin \alpha.$$

Bu yerda o'qituvchi o'quvchilarga ayniyat tushunchasining mohiyatini takrorlab berishi lozim.

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \\ + \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \\ = 2 \sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sqrt{3} \sin \alpha. \end{aligned}$$

2 - m i s o l. Ayniyatni isbotlang:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

Maktab matematika kursidagi masala yoki misollarni yechish o'quvchilarda matematik malaka va ko'nikmalarni shakllantiribgina qolmay, balki olingan nazariy bilimlarni amaliyatga tadbiq qila olishini ham ko'rsatadi. Agar o'qituvchi kvadrat tenglama mavzusini o'tib uni, mustahkamlash jarayonida kvadrat tenglamaga keltirildigan masalalarni yechib ko'rsatsa, o'quvchilarni ana shu mavzu materiali yuzasidan bilimlari mustahkamlanadi hamda kvadrat tenglama tushunchasining tadbiqi haqidagi fikr o'quvchilar ongida shakllanadi.

1 - m a s a l a. Sport formasi sotib olish uchun ikki komandaning har biriga 84 so'mdan pul ajratildi. Komandalardan birining olgan har bir formasi ikkinchi komandaning olgan formasidan 2 so'm arzon bo'lgani uchun u bitta ortiq sport formasi oldi. Har bir komanda nechtadan sport formasi olgan?

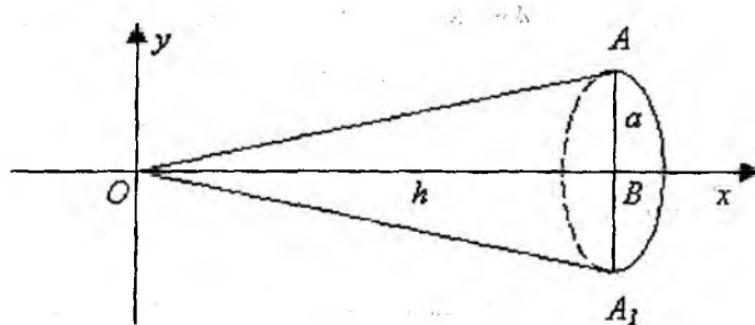
x - birinchi komanda olgan bitta formaning narxi,

(x - 2) - ikkinchi komanda olgan bitta formaning narxi,

$$\frac{84}{x} - \text{birinchi komanda olgan formalar soni,}$$

$$\frac{84}{x-2} - \text{ikkinchi komanda olgan formalar soni.}$$

1 - m a s a l a. Balandligi h va asosining uzunligi a ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan to'g'ri doiraviy konusning hajmi hisoblansin (32-chizma).



Berilgan: $OB = h$, $AB = a$

Topish kerak: $V = ?$

Yechish. $V = \pi \int_a^b y^2 dx .$

Chizmadan:

$$y = OA = \tan \alpha \cdot x = \frac{a}{h} x,$$

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h \frac{a^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \pi \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h =$$

$$= \pi \frac{a^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3} = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot h; \quad a^2 = r^2; \pi r^2 = S$$

bo‘lgani uchun $V = \frac{1}{3} S \pi.$

Masala shartida ikki komanda olgan formalarning narxi arzon bo‘lgani uchun u birinchi komandaga qaraganda bitta ortiq forma olgani aytilgan. Shu asosda biz sport formalarning soniga nisbatan quyidagi tenglamani tuzishimiz mumkin

$$\frac{84}{x-2} - 1 = \frac{84}{x}$$

$$\frac{84}{x-2} - \frac{84}{x} = 1$$

$$84x - 84x + 168 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 168 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+169} = 1 \pm 13.$$

J. 1) $\frac{84}{14} = 6$ dona. I-komanda olgan formalarning soni.

2) $\frac{84}{12} = 7$ dona. I - komanda olgan formalarning soni.

2 - m a s a l a. Oralaridagi masofa 60 km bo‘lgan A punktdan B punktga avtobus jo‘nadi. 20 minutdan keyin uning ketidan engil mashina jo‘nadi. Engil mashinaning tezligi avtobus tezligidan 20 km/s ortiq. Agar avtobus B punktga engil mashinadan 10 minut keyin kelgan bo‘lsa, avtobusning tezligini toping?

3 - m a s a l a. Motorli qayiq to‘xtovsiz oqim bo‘yicha 8 km so‘ng oqimga qarshi 16 km yurdi. U barcha yo‘lga $1\frac{1}{4}$ soat vaqt sarf qildi. Agar qayiqning turg‘un suvdagi tezligi 20 km/s bo‘lsa, oqimning tezligini toping?

Agar o'qituvchi geometriya darsida konusning hajmi mavzusini o'tib, unga doir misollarni integral tushunchasidan foydalanib yechib ko'rsatsa o'quvchilar algebra bilan geometriya fanlari orasidagi mantiqiy bog'lanishni ko'radilar hamda ularda fazoviy tasavvur qilish faoliyati yanada shakllanadi.

2. Masalaning tarbiyaviy funksiyasi o'quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantiradi hamda ularni mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalaydi. Bizga ma'lumki, matematika fanining o'rganadigan ob'ekti materiyadagi narsalarning fazoviy formalari va ular orasidagi miqdoriy munosabatlarni o'rganishdan iboratdir. Bas, shunday ekan, fazoviy forma bilan miqdoriy munosabatlar orasidagi bog'lanish analitik ifodalangan formula bilan yoziladi.

Ana shu formulani kundalik hayotimizdagи elementar masalalarni yechishga tadbiqi o'quvchilarda ilmiy dunyoqarashni shakllantiradi. Albatta o'qituvchi bu yerda bilish nazariyasiga asoslangan bo'lishi kerak. "Jonli mushohadadan abstrakt tafakkurga va undan amaliyotga borish kerak".

O'qituvchi matematika darsida yechiladigan masalalar orqali o'quvchilarni mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalashi lozim. Buning uchun o'qituvchi halol va sifatli mehnatni ulug'laydigan masalalarni tanlashi kerak bo'ladi.

1-masala. Ikki ishchi ma'lum muddatda 120 ta detal tayyorlashi kerak edi. Ishchilardan biri ikkinchisiga qaraganda soatiga 2 tadan ortiq detal tayyorlab topshiriqni 5 soat oldin bajardi. Har bir ishchi soatiga nechtadan detal tayyorlagan?

x - birinchi ishchi ishlagan vaqtı,

$(x - 5)$ - ikkinchi ishchi ishlagan vaqtı.

$\frac{120}{x}$ - birinchi ishchi tayyorlagan detallar soni,

$\frac{120}{x-5}$ - ikkinchi ishchi tayyorlagan detallar soni.

Yuqorida qilarga asoslanib quyidagi tenglamani tuzishimiz mumkin.

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{x-5} - 2,$$

$$x - 5 \quad x$$

$$120x - 120x + 600 = 2x^2 - 10x,$$

$$2x^2 - 10x - 600 = 0 \text{ yoki}$$

$$x^2 - 5x - 300 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 300} = \frac{5}{2} \pm \frac{35}{2}$$

$$x_1 = \frac{40}{2} = 20; \quad x_2 = -15.$$

Bularidan 1-ishchi 20 saat ikkinchisi esa 15 saat ishlaganligi kelib chiqadi.

$\frac{120}{20} = 6$ ta 1-ishchining 1 saatda tayyorlagan detallar soni.

$\frac{120}{15} = 8$ ta 2-ishchining 1 saatda tayyorlagan detallar soni.

Masalani yechib bo'lgandan keyin o'qituvchi masala mohiyatini quyidagi tartibda tishuntirishi mumkin. Agar biror kishi biror topshirilgan ishni ortig'i bilan bajarsa, uning mehnat unumi ortib, unga to'laydigan haq ham ortib boradi. Bu esa o'quvchilarni halol mehnatga muhabbat ruhida tarbiyalaydi.

2 - masal a. Ishchilr brigadasi ma'lum muddatda rejaga muvofig 250 ta detal tayyorlasilar kerak edi. Kuniga normadagidan 5 tadan ortiqcha detal tayyorlnib muddatidan bir kun ilgari 270 ta detal tayyorlandi. Brigada necha kun ishlagan?

3. Masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagи funksiyasi o'quvchilarni mantiqiy tafakkur qilish faoliyatlarini shakllantiradi. Bizga psixologiya kursidar ma'lumki. O'quvchilarning mantiqiy tafakkur qilish faoliyatları tafakkur operatsiyalari (taqqoslash, analiz - sintez, umumlashtirish, aniqlashtirish, abstraksiyalash va klassifikatsiyalash) orqali amalga oshiriladi. Maktab matematika kursidagi masalaning rivojlantiruvchi xarakterdagи funksiyasi o'quvchilarni matematika o'qitish metodikasining metodlaridan masala yoki misoliarni yechish jarayonida to'g'ri foydalanish malakalarini rivojlan-

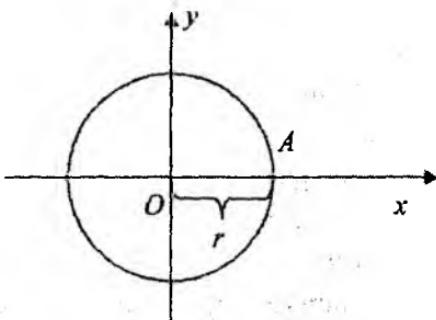
tiribgina qolmay, balki ularni biror matematik hukm va xulosalar to‘g‘risida aniq fikr yuritish imkoniyatlarini shakllantiradi hamda masalalar yechish qobiliyatlarini rivojlanтирди.

4. Masalaning tekshiruv xarakterdagи funksiyasi o‘z ichiga quyidagi oladi:

- 1) O‘quvchilarning nazariy oлган bilimlari darajasi;
- 2) O‘quvchilarning nazariy oлган bilimlarini amaliy xarakterdagи misol va masalalar yechishga tadbiq qilishi;
- 3) matematik hukmlardan xulosalar chiqarish darajalari;
- 4) O‘quvchilarning matematik tafakkur qobiliyatlarini rivojlanish darajasi.

Endi bitta masala olib, ana shu masala yordamida yuqorida aytib o‘tilgan funksiyalarning bajarilishini ko‘rib chiqamiz.

Masala. Radiusi r ga teng bo‘lgan doiraning yuzi integral yordamida hisoblansin (33-chizma).



33-Chizma.

Berilgan: S- aylana. OA = r.
Topish kerak: S = ?

Yechish. $x^2 + y^2 = R^2$ aylana tenglamasidan $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ni yozib olamiz. Yuzalarni integral yordamida hisoblash formulasi $S = \int_b^a f(x)dx$ edi.

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (1)$$

$$x = R \sin t, \quad x = 0, \quad t = 0,$$

$$dx = R \cos t dt, \quad x = R, \quad t = \frac{\pi}{2}.$$

Shuning uchun

Bu almashtirishlarni (1) ga qo‘ysak, u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\
 &= 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\
 &= 4R^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4R^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \pi}{2} \right)^2 = 4R^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi R^2.
 \end{aligned}$$

$$S = \pi R^2.$$

1) Bu masalani yechish jarayonida o'quvchilarda integral yordamida yuzalarini hisoblash mumkin, degan tushuncha shakllanadi, bu esa ana shu masalani yechishdagi asosiy ta'limiyl funksiya bo'lib hisoblanadi.

2) Bu masalaning tarbiyaviy funksiyasi esa shundan iboratki, o'quvchilarda bu masalani yechishga bo'lgan qiziqish shakllanadi, chunki ular integral yordamisiz doiraning yuzi nimaga teng ekanini biladilar, integral yordamida hisoblaganda ham uning yuzi $S=\pi R^2$ ekanini kelib chiqishi o'quvchilarni shu fanga bo'lgan hamda uning turli metodlariga bo'lgan qiziqishlarini orttiradi.

3) Bu masalaning rivojlantiruvchi xarakterdag'i funksiyasi esa masalaning yechish jarayonida hosil bo'lgan muammolarni hal qilishning matematik qonuniyatlarini o'rgatadi, o'quvchilarda matematik tafakkurni shakllantiradi.

4) Bu masalaning amaliy ahamiyati esa shundaki, bunda o'quvchilarning masalani yechish imkoniyatiga qarab ularning olgan nazariy bilimlarining darajasi aniqlanadi.

3-§. Matematika darslarida ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish metodikasi.

Maktab matematika kursida ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish asosan quyidagi metodlar orqali amalga oshiriladi:

1) umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish metodi;

- 2) gruppalash metodi;
- 3) berilgan ko'phadga qisqa ko'paytirish formulalarini tadbiq qilish metodi.
- 4) berilgan ko'phadga qo'shimcha hadlarni kiritish metodi;
- 5) berilgan ko'phadni matematik formulalar yordamida ayniy almashtirib ko'paytuvchilapga ajratish metodi;
- 6) berilgan ko'phadni ildizlariga ko'ra ko'paytuvchilarga ajratish metodi;
- 7) noma'lum koeffitsientlar orqali ko'paytuvchilarga ajratish metodi.

1-misol. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ko'phad ko'paytuvchilarga ajratilsin.

Berilgan ko'phad o'quvchilar bilan birgalikda ko'rib chiqiladi, unga nisbatan bunday mulohaza yuritish mumkin, berilgan ko'phadda umumiy ko'paytuvchi yo'q, ko'phadda qatnashayotgan to'rtala xadni har qanday gruppalaganda ham biror natija olib bo'lmaydi, shuning uchun bu ko'phadga yordamchi hadlarni kiritish orqali uning ko'rinishini o'zgartirib, qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, ayniy almashtirish natijasida ko'paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b - 3ab^2 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc = \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc = \\
 &= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = \\
 &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c) = \\
 &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2 - 3ab] = \\
 &= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab) = \\
 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)
 \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \quad (1)$$

Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish natijasida quyidagicha xulosalar chiqarish mumkin:

a) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0$ ifoda $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ tengsizligidan kelib chiqadi, agar biz $a \geq 0$, $b \geq 0$, desak, u holda $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0$ bo'ladi, bundan $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$ kelib chiqadi.

b) agar biz $a^3=x$, $b^3=y$, $c^3=z$ desak,

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \quad (2)$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu degan so'z uchta sonning o'rta arifmetigi ularning o'rta geometrigidan kichik emas, deganidir;

v) faraz qilaylik, x , y , z , sonlari to'g'ri burchakli paralleipedning uchta o'lchovi bo'lsin. U holda $xyz = V$ (3) parallipipedning hajmini beradi. Agar biz $x+y+z=E$ (4) deb belgilab,

(3) va (4) ni (2) ga qo'ysak, $\frac{E}{3} \geq \sqrt[3]{V}$ (5) bo'ladi. Demak, to'g'ri burchakli parallipiped hajmi uning uchta tomoni o'lchovlari yig'indisini uchdan biridan katta emas ekan.

2 - m i s o l . $x^4 - 8x + 63$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

Berilgan ko'phadni faqatgina yordamchi hadlarni kiritish metodi yoki noma'lum koefitsientlar metodi orqali ko'paytuvchilarga ajratish mumkin.

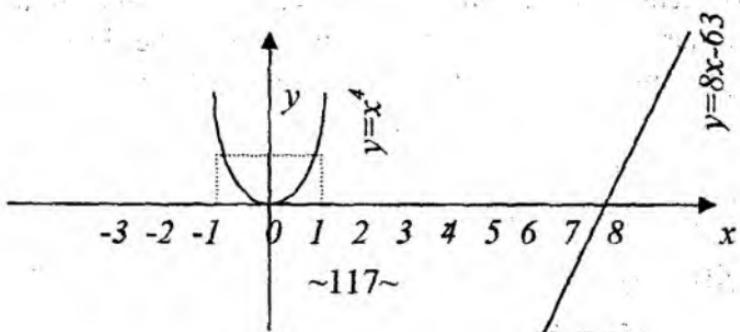
1. $x^4 - 8x + 63$ ko'phadni yordamchi hadlarni kiritish metodi orqali ko'paytuvchilarga ajrataylik (34-chizma).

$$\begin{aligned} x^4 - 8x + 63 &= x^4 + 16x^2 - 16x^2 - 8x + 64 - 1 = \\ &= (x^4 + 16x^2 + 64) - (16x^2 + 8x + 1) = (x^2 + 8)^2 - (4x + 1)^2 = \\ &= (x^2 + 8 + 4x + 1)(x^2 + 8 - 4x - 1) = (x^2 - 4x + 9)(x^2 - 4x + 7). \end{aligned}$$

Demak:

$$x^4 - 8x + 63 = (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7)$$

Hosil qilingan kvadrat uchxad ildizlarini tekshirib ko'ramiz, agar u ikkita haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, ularning har birining yana ko'paytuvchilarga ajratish mumkin, aks holda esa shunday qoldiriladi. $x^4 - 8x + 63$ ko'phadning ildizlarini tekshirib ko'raylik. Ushbu ko'phadni $y = x^4$ va $y = 8x - 63$ ko'rinishda yozib, ularning grafiklarini chizamiz (34 - chizma).



34-chizma.

Chizmadan ko'rindiki, bu funksiyalarning grafiklari kesishmaydi, shuning uchun ham bu ko'phad haqiqiy har xil yechimlarga ega bo'lmaydi. Bu ko'phad haqiqiy har xil yechimlarga ega bo'lmasani uchun chiziqli ko'paytuvchilarga ajralmaydi, shuning uchun bu ko'phad ikkita ikkinchi darajali ko'paytuvchilarga ajraladi xolos.

$$x^4 - 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) \quad (1)$$

$$x^4 - 8x + 63 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q) =$$

$$x^4 + x^3p + x^2q + ax^3 + apx^2 + aqx + bx^2 + bpx + bq =$$

$$= x^4 + x^3(a + p) + x^2(q + ap + b) + x(aq + bp) + bq;$$

$$\begin{cases} a + p = 0, \\ aq + bp = -8, \\ ap + b + q = 0, \\ bq = 63, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -p, \\ b + q = a^2, \\ a \cdot (b - q) = 8, \\ bq = 63, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + q = \frac{64}{(b - q)^2}, \\ bq = 63, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (b + q)(b - q)^2 = 64 \\ bq = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b + q)[(b + q)^2 - 4bq] = 64 \\ bq = 63 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b + q)[(b + q)^2 - 252] = 64 \\ bq = 63 \end{cases}$$

agar $b + q = z$ desak:

$$z(z^2 - 252) = 64,$$

$$z^2 - 252z - 64 = 0.$$

Bu tenglama 64 sonining bo‘luvchilaridan biri bo‘ladi, uning bo‘luvchilari esa 1, 2, 3, 4, 8, 32, 64. Bularni berilgan tenglamaga qo‘yib, tekshirish natijasida 16 soni uning ildizi ekanini topamiz. Demak, $z=16$

$$\begin{cases} b+q=16 \\ bq=63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=16-q \\ bq=63 \end{cases},$$

$$q(16-q)=63,$$

$$-q^2 + 16q = 63,$$

$$q^2 - 16q + 63 = 0,$$

$$q_{1,2} = 8 \pm \sqrt{64 - 63} = 8 \pm 1,$$

$$q_1 = 9; \quad q_2 = 7.$$

$$b_1 = 7; \quad b_2 = 9.$$

$$a = \frac{8}{b-q} = \frac{8}{7-9} = -4,$$

$$a_1 = -4,$$

$$a = \frac{8}{b-q} = \frac{8}{9-7} = 4$$

$$a_2 = 4;$$

$p=-a$ shuning uchun $p_1 = 4$; $p_2 = -4$. Bu koeffitsientlarni (1) ga qo‘ysak:

$$x^4 - 8x^2 + 64 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 9)$$

3 - misol. $x^2 + 2xy + 2yz - z^2$ ko‘phad ko‘paytuvchilarga ajratilsin.

Bu ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratishda gruppash metodidan foydalanamiz:

$$x^2 + 2xy + 2yz - z^2 = (x^2 - z^2) + (2xy + 2zy) =$$

$$(x-z)(x+z) + 2y(x+z) = (x+z)(x-z+2y).$$

4 - misol. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ ko‘phad ko‘paytuvchilarga ajratilsin.

Bu ko‘phadni ko‘paytuvchilarga ajratishda yordamchi hadlami kiritish metodidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned}
 x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 = \\
 (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = \\
 &= (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)
 \end{aligned}$$

5 - мисол. $a^2 + b^2$ ifoda ikki had ko‘paytuvchilarga ajratilsin.
1-usul:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + 2ab - 2ab &= (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab = \\
 &= (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 - (\sqrt{2ab})^2 = \\
 &= (a+b - \sqrt{2ab})(a+b + \sqrt{2ab}).
 \end{aligned}$$

2- usul: $a^2 + b^2 = a^2 - (bt)^2 = (a-bt)(a+bt)$.

6 - мисол. $a^4 + b^4$ ikki had ko‘paytuvchilarga ajratilsin.

1 - usul.

$$\begin{aligned}
 a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = \\
 &= (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2ab})^2 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2ab})(a^2 + b^2 + \sqrt{2ab}).
 \end{aligned}$$

2 - usul. $(a^4 + b^4) = (a^2)^2 - (b^2i)^2 = (a^2 - b^2i)(a^2 + b^2i)$.

7 - мисол. $x^4 + 4x + 15$ ko‘phad ko‘paytuvchilarga ajratilsin.

$$\begin{aligned}
 x^4 - 4x + 15 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 - 4x - 1 = \\
 &= (x^4 + 8x^2 + 16) - (8x^2 + 4x + 1) = (x^2 + 4)^2 - \\
 &- (\sqrt{8x^2 + 4x + 1})^2 = (x^2 + 4 - \sqrt{8x^2 + 4x + 1}) \times \\
 &\times (x^2 + 4 + \sqrt{8x^2 + 4x + 1}).
 \end{aligned}$$

4-§. Matematika darslarida didaktik prinsiplar.

Bizga ma’lumki, didaktik prinsiplar ta’lim nazariyasining asosini tashkil qiladi. Shuning uchun ham o‘quv materialini tushuntirish metodlarini tanlashda ta’lim nazariyasi tomonidan ishlab chiqilgan quyidagi didaktik prinsiplarga amal qilish kerak:

1. Ilmiylik prinsipi. Bu prinsipning mohiyati shundan iboratki, maktab matematika kursida o‘tiladigan hap bir mavzu materiali nazariy jihatdan isbotlangan, ya’ni avvalgi o‘tilgan matematik

tushuncha, aksioma va teoremalarga asoslangan holda bayon qilinishi lozim. Ilmiylik prinsipi matematika darsining har bir qadamida kerak bo‘ladi, masalan, o‘qituvchi o‘quvchilarga $x^2 + 1$ tenglamani yeching desa, qo‘yilgan bu savol to‘la ilmiy asosga ega bo‘lmaydi, chunki o‘quvchilar bu tenglamani haqiqiy sonlar to‘plamiga nisbatan yechadigan bo‘lsalar, u yechimga ega emas, agar ular bu tenglamani kompleks sonlar to‘plamiga nisbatan yechadigan bo‘lsalar, u ikkita har xil yechimga ega bo‘ladi. Shuning uchun ham matematika darslarida ilmiylik prinsipi quyidagi talablarga javob berishi kerak:

1) o‘rganilayotgan har bir matematik tushuncha, ta’rif, aksioma va teoremlar bayon qilinishi jihatidan sodda va aniq ifodalangan bo‘lishi kerak;

2) matematika darslarida o‘rganiladigan har bir mavzu materialiga nisbatan o‘quvchilarni tanqidiy qarashga o‘rgatish hamda ularni ana shu nuqtai-nazardan ilmiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish.

Ana shu nuqtai-nazardan ilmiylik prinsipi mактаб математика kursida o‘rganiladigan faktlarni ular fanda qanday yoritiladigan bo‘lsa, shunga moslab yoritishni talab etadi.

2. Ko‘rsatmalilik prinsipi. Ko‘rsatmalilik prinsipi o‘quvchilar tafakkurining anqlikdan abstraktlikka qarab rivojlanish xususiyatlarga bog‘liqdir. Matematikani o‘qitishdan asosiy maqsad mantiqiy tafakkurni rivojlantirishdan iboratdir, bircq matematikani o‘qitish aniq fakt va obrazlardan ajralmasdir, aksincha, har qanday masalani o‘rganishni shu aniq fakt va obrazlarni tekshirishdan boshlash kerak bo‘ladi.

Ko‘rsatmalilik ilmiy bilishlarga qiziqishni oshiradi, o‘quv materialini o‘zlashtirishni osonlashtiradi va matematik bilimlarni mustahkam bo‘lishiga yordamlashadi.

3. Onglilik prinsipi. Onglilik prinsipi o‘quvchilarni o‘quv materialini ongli ravishda o‘zlashtirishga, ya’ni ularni turli faktlarni tushuna bilishga hamda bu faktlar orasidagi bog‘lanishlarni va qonuniyatlarni ocha bilishga o‘rgatishdan iboratdir. Matematikani o‘qitishda bu prinsipning muhimligi shundan iboratki, matematikadan olinaidigan biiimlar faqat ongii ravishda o‘ziashtirilgandagina o‘quvchilar miqdoriy munosabatlarning xarakterini, matematik figura

va ularning o'zaro joylanish xususiyatlarini bilib oladilar. Agar onglik prinsipi mavzu materialini o'zlashtirish jarayonida buzilsa, o'quvchilarning oladigan bilimlari yuzaki bilim bo'lib qoladi. O'quvchilardagi yuzaki bilimlarni quyidagi hollarda ko'rishimiz mumkin:

1. Agar biror o'quvchiga funksiyaning grafigini chiz deb aytilsa, u koordinata tekisligida ana shu grafikning umumiy ko'rinishini chizish mumkin, ammo funksiyaning argument qiymatlariga mos qiymatlarni topib bera olmasligi mumkin.

2. O'quvchi miqdorlarning absolyut qiymati ta'rifini biladiyu, ammo uni $|x| = 5$ tenglamaga yoki $|x| < 5$ tengsizlikka tadbiq qila olmasligi mumkin.

4. **Aktivlik prinsipi.** Bu prinsipning mohiyati shundan iboratki, bunda maktab matematika kursidagi ta'limning har bir bosqichi rivojlantiruvchi xarakterdagi ta'lim asosiga qurilgan bo'lishi kerak, bu esa o'quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatlarini shakllantirishga xizmat qiladi. Matematika darslarida o'quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatlarisiz bilimlarni ongli ravishda o'zlashtirishlariga erishib bo'lmaydi, shuning uchun ham hozirgi zamon maktab matematika kursining asosiy maqsadi o'quvchilarni matematika darslarida aktiv fikrlash faoliyatlarini shakllantirishdan iboratdir.

O'quvchilarning matematika darslarida aktiv, ongli fikrlash faoliyatlarini hosil qilish uchun mavzu materialini darc jarayonida muammoli vaziyatlar hosil qilish asosida o'tish maqsadga muvoqadilr.

5. **Puxta o'zlashtirish prinsipi.** Puxta o'zlashtirish prinsipi matematik materiallarni puxta o'zlashtirishga erishishda ayniqsa katta shamiyatlarga egadir. Matematik tushunchalar o'zaro shunday huq'langanligi majburlyk minimumning biror qisminigina bilmagan taqdirda ham o'quvchilar o'z bilimlaridan turmushda foydalana olmay qoladilar. Matematikada hisoblash, algebraik ifodalarni ayniy almashtirish, geometrik figuralarini tasvirlash malakalarini puxta egallashning shamiyati kattadir. Ayniqsa matematikada boshqa funlardagi quranganda ham, dasturning biror qismini yaxshi o'zlashtirmadan va malakan ni yaxshi mustahkamlamasdan turib muvafiqiyut bilin oldinga siljish mumkin emas. Yuqorida gildardan ko'rinal-

diki, o'quvchilarning matematika fanidan oladigan bilimlari puxta bo'lishi uchun quyidagi shartlarni bajarilishi zarur.

1. O'quvchilarning matematikaga qiziqishlarini shakllantirish.
2. Tushuntirilgan mavzu materialini o'quvchilarning mantiqiy asosda o'zlashtirishlariga erishish.
3. Matematika darslari davomida o'quvchilarning mantiqiy fikrplash faoliyatlarini hosil qilib borish.
6. **Sistemalik prinsipi.** Matematika darslarida sistemalik prinsipi shundan iboratki. bunda o'qitishni shu fanning sistemasiga moslab olib borish talab etiladi.

IV-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematik tafakkur deganda nimani tushunasiz?
2. Matematika darslarida masalaning rolini tushuntirib bering.
3. Masalaning ta'limiyl funksiyasi nimalardan iborat bo'ladi?
4. Masalaning tarbiyaviy funksiyasichi?
5. Masalaning rivojlantiruvchi funksiyasini aytib bering.
6. Masalani tekshiruv xarakterdagi funksiyasini tushuntirib bering.
7. O'quvchilarning matematik qobiliyatlari qanday shaklantiriladi?
8. Matematik hukmning qanday turlari mavjud?
9. Matematik hukmlar qanday tushunchalar ko'rinishida ifoda qilinadi?
10. Birhad deb qanday ifodaga aytildi?
11. Ko'phad tushunchasini aytib bering.
12. Ko'phadlarni qanday usullar yordamida ko'paytuvchilarga ajratiladi?
13. Ko'paytuvchilarga ajratishning gruppash metodiga misol keltiring.
14. Qo'shimcha hadlar kiritish orqali ko'phad qanday qilib ko'paytuvchilarga ajratiladi?
15. Ko'phadni ildizlariga ko'ra ko'paytuvchilarga ajratilishini tushuntirib bering.
16. Ko'phadni nomalum koeffitsientlar orqali ko'paytuvchilarga ajratish qanday amalga oshiriladi?

17. Matematika darslarida didaktik prinsiplar va ularni matematika darslariga tadbiqini tushuntirib bering.

IV-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Matematik tafakkur, masala, masalaning tarbiyaviy funksiyasi, masalaning ta'limiyl funksiyasi, matematik qobiliyat, matematik hukm, birhad tushunchasi, ko'phad tushunchasi, ko'paytuvchilarga ajratish, gruppash metodi, ko'phad ildizlari, didaktik prinsiplar, no'malum koeffitsient, geometrik figura, absolyut qiymat tushunchasi, koordinata tekisligi, algebraik ifoda.

1-§. Matematika darsining tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi

Bizga pedagogika kursidan ma'lumki, dars maktablarda olib boriladigan o'quv-tarbiyaviy jarayonning asosidir. Shuning uchun ham dars jarayonida o'tiladigan mavzu mazmunini umumta'limiy, tarbiyaviy, rivojlantiruvchi va amaliy xarakterdagi tomonlari ohib beriladi. Kadrlar tayyorlash milliy dasturini qabul qilinganidan keyin maktablarimizda o'tiladigan har bir dars vazirlar mahkamasi tomonidan ishlab chiqilgan, ta'lim standartlari asosida olib borilishligi aytib o'tilgan. Har bir dars o'quv tarbiyaviy jarayondir. Shuning uchun ham har bir darsda o'quv-tarbiyaviy jarayonining maqsadi, mazmuni, shakli, metodlari va uning vositalari orasidagi o'zaro aloqalar mazmunan ohib beriladi. Agar biz metodika nuqtai-nazaridan matematika darsining tuzilishiga nazar tashlaydigan bo'lsak, unda quyidagi didaktik maqsadlar amalgalashiriladi. Darsning boshida o'quvchilar bilimi tekshiriladi. Bu tekshirish savol-javob asosida yoki didaktik tarqatma materiallar asosida o'tkaziladi. Bunda qaysi o'quvchining avvalgi o'tilgan mavzu mazmunini qanday o'zlashtirgani va qanday qiyinchilikka uchragani hamda ana shu mavzu materiali yuzasidan o'quvchilarning olgan bilimi va ko'nikmalari tekshiriladi. O'quvchilarning bergen javoblari o'qituvchi tomonidan izohlab baholanadi. Shundan keyin darsning asosiy maqsadi yangi mavzu o'quvchilarga tushuntiriladi va uni mustahkamlash uchun o'quvchilar bilan birgalikda misol yoki masalalar yechiladi. Bundan tashqari ana shu mavzu mazmunini qanday darajada o'quvchilar o'zlashtirganliklarini bilish uchun o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga nazariy va amaliy xarakterdagi savollar ham berib boriladi. Bundan keyin uyg'a vazifa berish va uni bajarish yuzasidan zarur ko'rsatmalar beriladi. Yuqorida aytib o'tilgan bosqichlardan ko'rinishiki, matematika darsiga tayyorgarlik ko'rish o'qituvchidan o'rganiladigan mavzuning maqsadi va uning mazmuni nimalardan iborat ekanligini aniqlashdan iboratdir. Har bir o'qituvchi ertaga o'tadigan matematika darsida qanday o'quv-metodik jarayonni

amalga oshiraman degan savolga javob izlashdan boshlashi kerak. 45-minutlik dars vaqtini taqsimlashda yangi materialni o'quvchilarga tushuntirishga va uni mustahkamlash yuzasidan misol va masalalar yechishga ko'proq vaqtini ajratish zarur. Ko'p hollarda məktəb o'qituvchilari ko'proq vaqtini uy vazifasini tekshirishga sarf qilib, yangi mavzu mazmunini bayon qilish va uni mustahkamlash vaqtini qisqartirishga olib keladilar. Bu usuldan qo'chish kerak, chunki darsning asosiy maqsadi yangi mavzu mazmunini o'quvchilarga tushuntirish va uni mustahkamlashdan iboratdir. Fikrlarimiz dalili sifatida «Bikvadrat tenglama ildizlarini topish» mavzusini o'rgatish metodikasini ko'rib chiqaylik.

- Darsning maqsadi.** Bikvadrat tenglama va uning ildizlarini topishni o'rgatish.
- Oldingi darsda o'tilgan mavzu materialini o'quvchilar tomonidan takrorlash uchun savollar.
 - $ax^2 + bx + c = 0$ va $x^2 + px + q = 0$ ko'rinishdagi ifodalar qanday tenglamalar deyiladi?
 - $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhaddan to'la kvadratga ajratish uchun qanday ayniy almashtirishlarni bajarish kerak?
 - $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamani yeching.
- Yangi mavzu mazmuni bilan tanishtirish.

O'qituvchi: $6x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ tenglamani qanday tenglama deb ataymiz?

O'quvchilar: 4-darajali tenglama deyiladi.

O'qituvchi: To'g'ri, shunday deyish ham mumkin, ammo matematikada shu ko'rinishdagi tenglamalarni bikvadrat tenglama deyiladi va uning umumiy ko'rinishi $ax^4 + bx^2 + c = 0$ kabi bo'ladi. Xo'sh bunday tenglamani qanday yechish mumkin?

O'quvchilar: Biz bunday tenglamalarni yechmaganmiz.

O'qituvchi: Agar $x^2 = y$ deb belgilasak, x^4 ni qanday belgilaymiz?

O'quvchilar: Mulohaza yurtish, ilgari o'tganlarini eslash orqali $x^4 - y^2$ deb belgilaymiz deb aytadilar.

O'qituvchi: Yuqorida belgilashlarga ko'ra $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tenglamasi qanday ko'rinishni oladi?

O'quvchilar: $ay^2 + by + c = 0$ bu tenglama kvadrat tenglamadir.

Bunday tenglamani yechishni bilamiz.

O'qituvchi: $6x^4 + 5x^2 + 1 = 0$ tenglamani $x^2 = y$ belgilash orqali qanday tenglamaga keltiramiz?

O'quvchilar: $6y^2 + 5y + 1 = 0$ to'la kvadrat tenglama ko'rinishiga.

O'qituvchi: Bunday tenglamani yechishni bilamizmi?

O'quvchi: Bilamiz, $y_1 = \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{1}{3}$ bu tenglama yechimlari bo'ladi.

O'qituvchi: Bizdan qanday noma'lumni topish so'ralgan edi?

O'quvchilar: Noma'lum x -topishni.

O'qituvchi: x -ni qanday topamiz?

O'quvchilar: $x^2 = y$ tenglikdan $x^2 = \frac{1}{2}$ bo'ladi, bundan

$x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2 = \frac{1}{3}$ tenglikdan esa, $x_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ bo'ladi.

4. O'tilgan mavzu mazmunini mustahkamlash uchun $9x^4 + 5x^2 - 4; x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ va hokazoga o'xshash misollarni o'quvchilar bilan birgalikda yechish maqsadga muvofiqdir.

5. Uyga vazifa berish. 401, 402 misollarni yechib kelinglar. (Algebra darsligi, Sh.Alimov va boshqalar, T. 2004 yil). Agar uyga vazifa berish ishi to'g'ri tashkil etilsa, ular o'quvchilarining bilimlarini mustahkamlaydi, mustaqil ishlash malakasini shakllantiradi, matematika fanini o'rganishda chidamlilik va tirishqoqlik malakalarini tarbiyalaydi. Uyga berilgan har bir topshiriq ko'pchilik o'quvchilarining kuchi etadigan, o'quvchilar vazifaning ma'nosini va qanday bajarish kerakligini tushuna oladigan darajada bo'lishi kerak. Topshiriqning og'ir engilligi o'quvchining sinfda o'tilgan materialni o'zlashtirishi va uni tushunishi bilan uzviy bog'liqdir, shuning uchun ham o'qituvchi uy vazifasini belgilashda o'quvchilarining uni bajarishga tayyor yoki tayyor emasligini nazarda tutishi lozimdir. Berilgan vazifalarga qo'yilgan maqsadga ya'ni o'quvchilarni o'tilgan mavzular mazmunini puxta o'zlashtirishlariga olib keladi.

2-§. Matematika darsining turlari

1. Yangi mavzu mazmuni bilan tanishtirish.
2. Yangi mavzuni mustahkamlash.
3. O'quvchilarning bilimlarini, ko'nikma va malakalarini tekshirish.
4. O'quv materiallarini takrorlash va umumlashtirish.

Matematikadan 45-minutlik dars o'tilgan mavzuni o'quvchilardan so'rash yangi mavzuni bayon qilish, uni mustahkamlash, o'quvchilarning bilim, ko'nikma va malakalarini tekshirish kabi qismlarga ajratish, o'tiladigan har bir darsni didaktik maqsad va mazmunini tushunarli bo'lishini ta'minlaydi.

Maktab matematika darslarida yangi mavzu mazmunini tushuntirish asosan uch xil usulda olib boriladi. Ular ma'ruza, suhbat va mustaqil ishdir.

Hozirgi yangi pedagogik texnologiyani mohiyati ham suhbat metodi orqali yangi mavzu mazmuni ochib berishdan iboratdir. Bunda mavzu mazmunini o'quvchining o'zi bayon qiladi, lekin mantiqiy mulohazalar vaqtida va turli hisoblashlarni bajarishda o'qituvchi o'quvchilarga mavzu mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan savollar tizimi orqali murojaat qiladi, o'quvchilar ana shu savollarga javob berish orqali mavzu mazmunini chuqurroq o'zlashtirib oladilar.

Shu usulda o'tkaziladigan darsning bir qismini misol qilib ko'rsatamiz.

Bir necha qo'shiluvchilar yig'indisining kvadrati formulasini keltirib chiqarish o'tilmoqda.

O'qituvchi: Ikki son yig'indisining kvadrati to'g'risidagi ifodani esingizga keltiring. Nosir sen ayt men doskaga yozaman.

O'quvchi: Doskaga $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ifoda yoziladi.

O'qituvchi: Endi $(a + b + c)^2$ ning qanday ifodalananishini uniqlaylik.

Agar biz ikkita qo'shiluvchi yig'indisi kvadratining ifodasini biladigan bo'lsak, uchta qo'shiluvchi yig'indisi kvadratini ifodasini chiqarishni qanday boshlashimiz mumkin?

O'qituvchi: Shu uch son yig'indisini ikki son yig'indisi shaklida yozib olish kerak, masalan: $[(a+b)+c]^2$.

O'qituvchi: Bu yozilgan yig'indini kvadratga ko'taring, mumkin bo'lgan xamma sodalashtirishlarni bajaring. Karim, senda natija nima chiqdi, o'qib ber va hosil bo'lgan ifodani aytib tur, men doskaga yozib qo'yay.

Karim aytib turadi, o'qituvchi yozadi.

O'qituvchi: Shu xilda muloxaza qilib, to'rtta qo'shiluvchi yig'indisini kvadratga ko'taring: $(a+b+c+k)^2$. Raxim, qanday muloxaza qilganingni, qanday shakl o'zgartirishlarni bajarish kerakligini aytib ber, natijani yana men doskaga yozay.

Rahim to'rt hadni qanday qilib kvadratga ko'tarish kerakligini so'zlab beradi.

O'qituvchi: Ko'rib chiqqan xamma misollarimizda hosil bo'lgan ifodalarni diqqat bilan ko'rib chiqinglarchi, bulardan ko'phad kvadratini xosil qilish qoidasini chiqarish mumkin emasmi? Nosir, nima payqading, ayt-chi?

Nosir so'zlab beradi va qoidani aytadi.

O'qituvchi. To'g'ri. Ammo biz faqat bir necha misol natijalarigagina suyanib xulosa chiqardik, shuning uchun uning to'g'riligidan shubxalanish, demak, uni isbot qilishni talab etish xam o'rinli bo'lar edi. Uning isboti bilan siz VIII sinfda tanishasiz, hozir u sizga og'irlik qiladi. Siz chiqargan xulosa to'g'ri va biz bundan keyin undan foydalanadigan bo'lamiz. Bu qoidani yana bir marta aytib chiqaylik . . .

Ba'zan biron teoremani isbot qilishdagi, yoki biron formulani keltirib chiqarishdagi ishni butun sinf yana ham mustaqilroq bajaradi, ammo bu holda ham o'qituvchi rahbarlik qiladi. Bunda o'quvchilarga o'z rejasini isbotlash metodini yoki mulohazalarini taklif etishga keng imkoniyat beriladi. Shu bilan birga, o'qituvchi ba'zan yordamchi savollar tashlaydi, ko'rsatmalar beradi, ayrim o'quvchilar o'z mulohazalarida xatoga yo'l qo'ygundai bo'lsa, tushuntirib beradi. Biroq bu yo'l juda ko'p vaqt oladi, chunki o'quvchilarning turli-tuman takliflari ularni asosiy masaladan chetga chiqaradi.

Endi yuqorida aytilgan fikrlarning dalili sifatida quyidagi tenglama va masalani suhbat metodi bilan yechib ko'rsataylik.

1. Ushbu $|x^2 - 3x - 9| = -5$ -tenglama suhbat metod bilan yechilsin.

Bu tenglamani suhbat metod bilan yechishda o'qituvchi bilan o'quvchilar orasidagi suhbatni keltiramiz, bu ta'lim jarayonidagi suhbat metod mohiyatini ochib beradi:

O'qituvchi: $|x^2 - 3x - 9| = -5$ tenglamani qanday yechiladi?

O'quvchi: Bu tenglamani yechish uchun uning $x^2 - 3x - 9 = -5$ va $-x^2 + 3x + 9 = -5$ tenglamalar ko'rinishida yozib olamiz.

O'qituvchi: $x^2 - 3x - 9 = -5$ va $-x^2 + 3x + 9 = -5$ tenglamalarni qanday qoidaga asoslanib yozdingiz?

O'quvchi: Agar bizga $|\alpha|$ soni berilgan bo'lsa, u quyidagiga teng edi: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha > 0, \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$

O'qituvchi: Xo'sh, u holda hosil qilingan tenglamalar qanday yechiladi?

O'quvchi:

$$x^2 - 3x - 9 = -5,$$

$$x^2 - 3x - 9 + 5 = 0,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

O'qituvchi: $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamani qaysi formuladan foydalanim yechamiz?

O'quvchi: $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglama $x^2 + px + q = 0$ ko'rinishga keladi, bu keltirilgan kvadrat tenglamadir.

O'qituvchi: Kim aytadi, $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning umumiy yechimi qanday bo'lar edi?

O'quvchi: $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
 bo'lar edi.

O'qituvchi: $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamani bu formulaga qanday qilib qo'yamiz?

O'quvchi: $x^2 - 3x - 4 = 0$ tenglamada $p = -3$ va $q = -4$ ga teng, biz ularni umumiy yechimga qo'ysak, berilgan tenglamaning yechimini topgan bo'lamiz:

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

O'qituvchi: $-x^2 + 3x + 9 = -5$ tenglama qanday yechiladi?

O'quvchi: $-x^2 + 3x + 9 + 5 = 0$

O'qituvchi: Endi nima qilamiz?

O'quvchi: O'xshash hadlarini ixchamlaymiz: $-x^2 + 3x + 14 = 0$

O'qituvchi: Noma'lum x oldidagi manfiy ishorani musbat qilsh uchun nima qilamiz?

O'quvchi: Tenglikni har ikkala tomonini (-1) ga ko'paytiramiz:

$$-x^2 + 3x + 14 = 0 \mid \cdot (-1), \quad x^2 - 3x - 14 = 0$$

Bu tenglama ham yuqoridagi kabi yechiladi:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 14} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{65}}{2};$$
$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{65}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{65}}{2}$$

Sinfda yangi materialni o'rganishda qo'llaniladigan usullar dan yana biri bu o'quvchilarining mustaqil ishlari. O'quvchilarining mustaqil ishlarida misol va masalalar yechishni mashq qilish, teorema isbotlarini turli xil usullarda bajarish (agar imkon bo'lsa), mavzu mazmuniga qarab natijaviy formulalarini chiqarish va unga doir misollar yoki masalalarni tadbiq qilish kabi o'quv metodik ishlar amalga oshiriladi. Masalan, o'qituvchi to'la kvadrat tenglamasi va uning ildizlarini topish mavzusi o'tilgandan keyin, keltirilgan kvadrat tenglama va uning yechimlarini topishni mustaqil ish sifatida berishi mumkin. Bunda o'qituvchi o'quvchilarini kvadrat tenglama va uning yechimlari mavzusining mazmunini ochib beruvchi mantiqiy ketma-

ketlikga ega bo'lgan savollar tuzishi bilan o'quvchilarni yo'naltirib turishi maqsadga muvofiqdir. O'qituvchi har bir o'quvchini qo'yilgan topshiriq mazmunini ochishdagi xato va kamchiliklarini to'g'rilib borishi lozim bo'ladi. Shundagina mustaqil ishlash usuli orqali o'quvchilar bilimini chuqurlashtirish mumkin bo'ladi.

Matematika darslarida ma'ruza metodidan ham foydalanim darslar o'tiladi. Bu holda o'qituvchi o'quvchilarni mulohazada ishtiroy etdirmasdan, mavzu mazmunini yolg'iz o'zi bayon etadi. Shu bilan birga bayon etilayotgan mavzu mazmunidan nimani yozib olish, qanday chizmani chizib olish, doskadan nimalarni ko'chirib yozish kerakligi o'quvchilarga aytib beriladi.

O'qituvchi nazariy materialnigina emas, balki masalalarni yechilishini ham o'zi bajarishi, hamda mantiqiy mulohazalarni o'zi aytishi va barcha chizmalarni chizish va yozuvlarni yozishni ham o'zi bajarishi mumkin. Bunda o'qituvchining mavzu mazmunini bayon qilish usuli o'quvchilar uchun namuna bo'lishi, o'quvchilar ham o'z fikrlarini o'qituvchilardek bayon etishga intiladigan bo'lishi kerak. O'qituvchilarning nutqi savodli, mulohaza va isbotlari etarli darajada asoslangan bo'lishi hamda nutqi ravon bo'lishi kerak. Agar darsda qo'llanilgan metodlar o'quvchilarda qiziqish tug'dirgan, ular diqqatini jalb qilgan bo'lsa, o'quvchilar mavzudagi asosiy mulohazalarni to'g'ri takrorlab bera olgan bo'lsalar, demakki, o'qituvchi mavzu mazmunini yoritishda qo'llangan metodidan qanoat hosil qilishi mumkin.

O'tilgan mavzuni mustahkamlash deganda biz asosan o'quv materialini nazariy ma'lumotlarini takrorlash hamda o'quvchilarni o'tilgan mavzu materiallari yuzasidan malaka va ko'nikmalarini shakllantirish uchun misol, masalalar yechish orqali o'tilgan darslarini takrorlab mustahkamlashni tushunamiz. O'tilgan materialni takrorlash ilgari olingen bilimlarni yangilashga, o'tilgan mavzu mazmuniga umumiyoq nuqtai-nazardan qarashga yordam beradi.

O'tilgan mavzu mazmunini mustahkamlashda asosan quyida-gilarga e'tibor berish kerak.

1. Yangi mavzu mazmunida ishlatalgan asosiy tushunchalarni o'quvchilar tomonidan o'zlashtirilganlik darajasi.
2. Yangi mavzudagi teorema yoki uning isbotini o'quvchilar tomonidan aytib berilishi darajasi.
3. Yangi mavzula o'rganilgan teorema va formulalardan misol, masahlar yechishda o'quvchilarning foydalana olish darajasi.
4. O'quvchilarning yangi mavzu mazmunini kundalik hayotda uchriyidigan elementar muammolarga tadbiq qilish darajasi.

O'quvchilarni biliir, ko'nikma va malakalarini tekshirish o'tilgan materiallar yuzasidan og'zaki so'rash yoki yozma ish olish usuli bilan aniqlanadi.

Bunday tekshirish darslarini o'tkazish o'qituvchi tomonidan bift hafta oldin e'lon qilinib, o'quvchilarga og'zaki so'raladigan mavzu materiallari va ular asosida o'qituvchi tomonidan tuzilgan savollar ketma-ketligi beriladi.

Agar tekshiruv darsi yozma ish orqali o'tkaziladigan bo'lsa, bunda ham yozma ish variantiila tushadigan misol va masalalar qaysi mavzularga taalluqligi o'qituvchi tomonidan bir hasta oldin aytib qo'yiladi.

O'quv materialini takrorlash va umumlashtirish.

Maktab matematika darslarida biror bob o'tib bo'lingandan keyin ana shu bob mavzu materiallarini umumlashtirish xarakteridagi takrorlash, umumlashtirish darsleri o'tkaziladi.

O'tilgan materiallarni takrorlash-umumlashtirish darslari ilgari olingen bilimlarni yangilashiga, ularni ma'lum bir tizimga solishga va o'tilgan materialga umumiyoq nuqtai-nazardan qarashga yordam beradi. Maktab matematika darslarida takrorlash-umumlashtirish darslarini quyidagi turlarga ajratish mumkin.

1. O'quv yili boshidagi takrorlash-umumlashtirish.
2. Kundalik takrorlash.
3. Tematik takrorlash-umumlashtirish darsi.
4. Yakuniy takrorlash-umumiiashtirish darsi.

Har bir takrorlash darsini o‘z o‘rnii va maqsadi bordir. O‘quv yili boshidagi takrorlash darsida o‘qituvchi avvalgi sinfda o‘tilgan asosiy mavzu materiallarining mazmunini hamda bu mavzularda ishlatalgan asosiy matematik tushunchalarni o‘qituvchining o‘zi takrorlab imkoniyati boricha umumlashtirib beradi. Matematika fanini o‘zi shunday fanki, o‘qituvchining o‘zi har bir darsda yangi mavzuning mazmunini tushuntirish jarayonida ilgari o‘tilgan mavzular mazmuni va ulardagi matematik tushunchalardan foydalanib dars o‘tadi. Bunday takrorlashni kundalik takrorlash darsi deb yuritiladi.

Matematikadan biror bob mavzu materiallari o‘tib bo‘linganidan keyin alohida takrorlash-umumlashtirish darslari o‘tkaziladi. Bunday takrorlashni tematik takrorlash-umumlashtirish darsi deyiladi. Tematik takrorlash-umulashirish darsi bo‘lishidan oldin o‘qituvchi takrorlanadigan bob mavzu materiallarini o‘z ichiga oluvchi mantiqiy ketma-ketlikka ega bo‘lgan savollarni o‘quvchilarga bir hafta ilgari berib qo‘yishi va ana shu savollar asosida tematik takrorlash darsi bo‘lishini aytib qo‘yishi lozim. Ana shu berilgan savollar asosida o‘quvchilar bo‘ladigan tematik takrorlash darsiga oldindan tayyorgarlik ko‘radilar. Bunday takrorlash darsini o‘qituvchi savol javob usuli orqali o‘tkazadi. O‘qituvchi rahbarligida o‘quvchilar mavzularning ketma-ketligi va ularda qatnashayotgan matematik tushunchalar orasidagi mantiqiy bog‘lanishlarni tushunib etadilar. Natijada o‘quvchilarning ana shu bob mavzu materiallari yuzasidan olgan bilimlari mantiqiy ketma-ketlikka ega bo‘ladi va umumlashadi.

Uquv yili oxirida ham reja asosida takrorlash darsi ajratilgan bo‘ladi, bunday takrorlashni yakuniy takrorlash darsi deb yuritiladi. Yakuniy takrorlash darsida o‘quv yili davomida o‘tilgan har bir bob mavzu materiallari takrorlab umumlashtirib boriladi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsining muvaffaqiyatlari o‘tishi uchun o‘quv yili boshidagi, kundalik, tematik takrorlash darslari o‘z vaqtida o‘tkazilgan bo‘lishi kerak. Yakuniy takrorlash-

umumlashtirish darsi orqali o'quvchilarning yil davomida olgan bilimlari umumlashtiriladi va sistemalashtiriladi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini hamma o'qituvchilar ham metodik jihatdan tashkil qilmaydilar. Biz bir necha maktabda o'tkazilgan yakuniy takrorlash-umumlashtirish darslarini kuzatdik, ular o'quv materiallarini umumlashtirish va sistemalashtirish o'rniga ba'zi maktablarda o'quvchilarni doskaga chiqarib qo'yib, ulardan o'tilgan o'quv materiallarini so'rash, ba'zilarida esa bir necha misol yoki masala yechish bilan cheklanishdi.

Ko'pchilik o'qituvchilar yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini o'tkazishda quyidagi kamchiliklarga yo'l qo'yadilar:

1. Takrorlash-umumlashtirish darsi uchun faqat o'quv yili oxirida soat ajratib uni o'tkazadilar.
2. Takrorlash-umumlashtirish darsi uchun material tanlashga befarq qaraydilar.
3. Takrorlash-umumlashtirish darsini o'tkazish metodikasini to'g'ri tanlay olmaydilar.
4. Takrorlash-umumlashtirish darsi uchun material yuzasidan savollar va mashqlar sistemasini tuzmaydilar.

O'qituvchi yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi bo'lishidan bir necha kun avval shu darsda qaysi materiallarni qanday usullar bilan takrorlash va umumlashtirishini hamda ularga doir qanday masalalarni yechish kerakligini aniqlab, so'ngra o'quvchilarga shu mavzular bo'yicha tuzilgan savollar va mashqlar sistemasini berishi ular shu o'qituvchi ko'rsatmasiga asosan yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsiga tayyorgarlik ko'rishlari kerak. O'qituvchi yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsini uyushtirishdan oldin quyidagilarga e'tibor berishi kerak:

1. Takrorlash-umumlashtirish darsining materiali o'sha kursni umumlashtiruvchi xarakterda bo'lishi kerak.
2. Shu darsda o'tish uchun ajratilgan material bo'yicha savollar sistemasi tuzilgan bo'lishi kerak.

3. Takrorlash-umumlashtirish darsida ishlanadigan mashqlar sistemasi tuzilgan bo‘lishi kerak.
4. Tuzilgan savollar va mashqlar sistemasi takrorlanayotgan materialni sistemalashtiruvchi va umumlashtiruvchi xarakterda bo‘lishi kerak.
5. Takrorlash-umumlashtirish darsini o‘tkazish metodikasiga e’tibor berish kerak.

O‘qituvchi yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi uchun mavzularni avvaldan rejulashtirishi kerak. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi o‘qituvchining umumiylari ma’ruzasi yoki o‘quvchilarning shu mavzuga doir tayyorlangan ma’ruzalarini eshitish orqali o‘tkaziladi. Dars oxirida o‘qituvchi takrorlash-umumlashtiruvchi darsida faol qatnashgan o‘quvchilarni rag‘batlantiradi; faol qatnashmagan o‘quvchilarni ogohlantiradi, so‘ngra o‘tilgan mavzu materialini umumlashtiradi va sistemalashtiradi.

Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi bo‘lishidan 5-6 kun oldin takrorlanadigan mavzular o‘quvchilarga beriladi. O‘quvchilar esa o‘qituvchining ko‘rsatmasiga asosan belgilangan kitoblardan foydalanib, takrorlash-umumlashtirish darsiga ma’ruzalar tayyorlaydilar. Yakuniy takrorlash-umumlashtirish darslarini bunday yusushtirish orqali har bir o‘quvchini mustaqil ishga o‘rgatiladi.

Mavzularni yakuniy takrorlash-umumlashtirish darsi rejasiga bob yoki kursni o‘z ichiga oladigan materiallardan tanlanadi.

Masalan, VIII sinfda «Ko‘pburchaklarning yuzlari» nomli bobga quyidagicha reja tuzish mumkin.

1. Geometrik figuraning yuzi deganda nimani tushunasiz?
2. Nima uchun qobariq va botiq ko‘pburchaklar ko‘pburchakning xususiy holi bo‘lishini tushuntiring.
3. Uchburchak, to‘rtburchak va trapetsiyaning yuzlari qanday hisoblanadi.
4. Nima uchun parallelogramm qobariq to‘rtburchakning xususiy holi bo‘ladi?

5. Nima uchun trapetsiya yuzini hisoblash formulaлари uchburchak, to‘rtburchak yuzlarini hisoblash formulaларining umumlashgan holi bo‘ladi?

SAVOLLAR

1. Kesma deb nimaga aytildi?
2. Siniq chiziq deb nimaga aytildi?
3. Qanday geometrik figurani ko‘pburchak deyiladi?
4. Qanday ko‘pburchak qobariq ko‘pburchak deyiladi?
5. Qanday ko‘pburchak botiq deyiladi?
6. To‘rtburchak deb nimaga aytildi?
7. Parallelogramm deb qanday to‘rtburchakni aytildi?
8. To‘g‘ri to‘rtburchak deb qanday geometrik figuraga aytildi?
9. Trapetsiya nima?
10. Romb nima?
11. Kvadrat nima?
12. Qanday geometrik figurani uchburchak deyiladi?
13. Uchburchak tomonlariga ko‘ra necha turli bo‘ladi?
14. Uchburchak burchaklariga ko‘ra necha turli bo‘ladi?
15. Uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasida qanday bog‘lanish bor?
16. Qobariq ko‘pburchak ichki burchaklari yig‘indisi necha gradusga teng?
17. Parallelogrammning yuzi nimaga teng?
18. Uchburchakning yuzichi?
19. Trapetsiyaning yuzi qanday o‘lchanadi?
20. Rombning yuzi nimaga teng?

Bu savollar tizimi asosida o‘quvchilar uylarida mustaqil tayyorlanadilar, buning natijasida ular o‘quvchilarda kitob bilan ishlash malakasi hamda mavzu mazmunlarini mustaqil o‘zlashtirish malakalari shakllanadi.

3-§. Matematika darsiga tayyorgarlik va darsning tablili

Matematika o‘qituvchisi darsga tayyorgariik ko‘rishni o‘quv yili boshida o‘ziga ajratilgan sinf dasturiga ko‘ra yillik ba’zan yarim yillik ish rejasini tuzishdan boshlaydi. Bundan tashqari har bir matematika darsi uchun alohida ish rejasini tuzadi. Matematikaga doir ish rejada har bir mavzuning asosiy savollari, bu savollarni o‘tish uchun ajratilgan soatlar va o‘tilish muddati ko‘rsatilgan bo‘lishi kerak. Matematikadan tuzilgan ish rejada har bir mavzuni o‘tish uchun qanday ko‘rgazmali qurollardan foydalanish va qanday amaliy xarakterdagи misol va masalalarni yechish ham ko‘rsatilgan bo‘lishi maqsadga muvofiqdir. Matematikadan tuzilgan ish rejani maktabdagи o‘quv metodika hay’ati muhokama qiladi va maktab direktori tomonidan tasdiqlangan u rasmiy hujjatga aylanadi va ana shu tasdiqlangan reja asosida o‘qituvchi matematika darsini har bir mavzusini o‘tadi, maktab rahbariyati ham ana shu tasdiqlangan ish rejani asosida o‘qituvchini o‘quv faoliyatini tekshiradi. O‘qituvchi har bir dars uchun mavzu yuzasidan ish rejani tuzishda quyidagilarga ahamiyat berish kerak bo‘ladi.

1. Mavzu va uning shu darsda o‘rganiladigan qismi ko‘rsatiladi.
2. Uy vazifasi qanday tekshiriladi?
3. Qaysi o‘quvchilardan so‘raladi?
4. Sinfdagи o‘quvchilar uchun qanday mustaqil ishlар beriladi va qanday vaqtда beriladi?
5. Yangi mavzu bayoni ko‘rsatiladi, o‘quvchilarga qanday metod orqali tushuntirilishi va qaysi erlarini yozishligi belgilanadi?
6. O‘tilgan yangi mavzuni mustahkamlash uchun beriladigan savollar yoki misol va masalalar yozib qo‘yiladi.
7. Uyga beriladigan vazifa, mavzu paragrafi, misol va masala nomerlari hamda o‘quvchilarga beriladigan ko‘rsatmalar yozib qo‘yiladi. O‘qituvchi har bir dars oxirida o‘quvchilar bilan birgalikda bugungi darsni yakunlashi va o‘quvchilar bilimini tekshirishi lozim. O‘qituvchi har bir darsning mazmunini yaxshi o‘ylab rejalashtirsagina o‘quvchilar chuqr matematik bilimga ega bo‘ladilar.

Matematikadan ish rejani quyidagi ko'rinishda tuzish maqsadga muvofiqdir

No	Mavzular va uning mazmuni	Takrorlash	Soatlar	O'tish muddati	Mustaqil ishlar	Eslatma
1.	<p>Kvadrat tenglama.</p> <p>a) Kvadrat tenglamaga ta'rif</p> <p>b) Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratish</p> <p>v) Diskriminant tushunchasi va uning $D = 0, D > 0, D < 0$ bo'lqandagi hollari</p> <p>g) Kvadrat tenglamani geometrik ma'nosini ochib berish</p> <p>d) Kvadrat tenglama yechimini misollarga tadbiq qilish.</p>	Tenglama ta'rifi, Tenglikdagi ishoralarini o'zgartirish	2	Sentyabr 1-5	Kvadrat tenglamaning ildizlari formulasi tadbiqi asosida misollar yechish kitoblardan misollar keltiriladi.	Geometrik tasvirini chizib ko'rsatish.

Har bir mavzu uchun yuqoridaq kabi aniqlik asosida ish rejasi tuziladi va asosiy darslikdan tashqari qo'shimcha adabiyotlar ro'yxati ham o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga berilishi maqsadga muvofiqdir.

Matematika darsining tahlili.

Bizga ma'lumki, har bir dars quyidagi bosqichlardan iborat edi.

1. O'tilgan darsni o'quvchilardan so'rash va uni mustahkamlash.
2. Yangi mavzuni o'qituvchi tomonidan tushuntirish va uni mustahkamlash.
3. Uyga vazifa berish.

Ana shu asosiy uch bosqichni amalgalashda o'qituvchini ilmiy-metodik faoliyati maydalab mantiqiy tahlil qilinadi.

1. O'tilgan darsni o'quvchilardan so'rash paytida, o'qituvchi tomonidan o'quvchilarga mavzu yuzasidan berilgan savollar to'g'ri bo'ldimi yoki yo'qmi?
2. Doskaga chiqqan o'quvchilarga savollar to'g'ri berildimi, qo'shimcha savollarchi?
3. Ularni bilimlarini baholashda o'qituvchi reyting mezoniga rioya qildimi, o'quvchilarni javoblari o'qituvchi tomonidan tahlil qilindimi?
4. O'tilgan mavzuni o'quvchilardan so'rash uchun o'qituvchi ortiqcha vaqt sarf qilmadimi?
5. Tarqatma materialni yechib bo'lgan o'quvchilar bilimini qanday baholandi?
6. O'qituvchi o'zi avvalgi mavzu mazmunini va o'quvchilar javoblarini qisqacha tahlil qilib yakunladimi?
7. Yangi mavzuni mazmunini ochib berishda ilmiy-metodik xatoga yo'l qo'ymadimi?
8. Yangi mavzuni qanday metod bilan tushuntirdi?
9. Yangi mavzuni mustahkamlashga qanday e'tibor berdi?
10. Yangi mavzuni geometrik ma'nosini ko'rsatib bera oldimi?
11. Uyga berilgan vazifalardan namuna ko'rsatdimi?
12. 45-minutlik vaqtini to'g'ri taqsimladimi?

13. O'qituvchi mavzu mazmunini tushuntirishda o'zini qanday tutdi?
14. Uqituvchi yangi mavzuni tushuntirishda sinf o'quvchilarini o'ziga qarita oldimi?
15. O'qituvchi o'quvchilarni shaxsiyatiga tegmadimi?
16. Darsni tahlilidan so'ng o'qituvchiga beriladigan o'quv, ilmiy, metodik va tarbiyaviy maslahatlar.

Har bir matematika darsini tahlil qilish yuqoridaagi savollarga javob topish orqali amalga oshirilishi maqsadga muvofiqdir. Shundagina darsning tahlili samarali bo'ladi.

4-§. Matematika darsiga qo'yilgan talablar

Matematika darsining tahlifi shuni ko'rsatadiki, darsning maqsadi shu darsning tuzilish strukturasini va ana shu darsda bo'ladigan barcha bosqichlarning o'zaro mantiqiy munosabatlarini aniqlaydi.

1. Matematika darsiga qo'yilacigan birinchi talab bu uning maqsadga tomon yo'naltirilganlidir. Maqsadga tomon yo'naltirilganlik deganda biz darsning maqsadida qo'yilgan mavzu mazmunini tushuntirish orqali o'quvchilarni mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini shakllantirish hamda ularni aqliy va ma'naviy tarbiyalashni tushunemiz.
2. Matematika darsiga qo'yilgan ikkinchi talab bu dars va uning mazmunini ratsional taqsimlashtir. Dars va uning turlarini to'qri taqsimlash hamda matematika darsida o'quvchilarning mavzu mazmunini yaxshi o'zlashtirishlari orqali matematik, umumintelлектual va o'quv faoliyatiga nisbatan bilim, ko'nikma hamda tafakkur qilish faoliyatları shakllanadi.
3. Matematika darsiga qo'yilgan uchinchi talab bu darsni o'tkazishdagi o'quv, tarbiya metodi va vositalarini tanlashdan iboratdir. Matematika darslarida o'quv, tarbiya usullarini tanlash katta ahamiyatga egadir. Matematika o'qituvchisi mavzu mazmuniga qarab tushuntirish, ilmiy izlanish va xulosa chiqarish metodlaridan qaysilarini qo'llansa o'quvchilar

mavzu mazmunini yaxshiroq o'zlashtirishlarini aniqlab olishi lozim, shundagina dars samarali bo'ladi.

4. Matematika darsiga qo'yilgan to'rtinchi talab bu darsni o'tkazishda o'quvchilarning bilishga doir bo'lgan faoliyatlarini shakllantirish uchun o'quv jarayonini har xil usullarda tashkil qilishdir. O'qituvchi darsda o'tiladigan mavzu mazmuniga qarab o'quvchilar faoliyatlarini oldindan belgilashi kerak bo'ladi. Agar darsda yangi mavzu o'tiladigan bo'lsa, unda o'qituvchining o'zi mavzu mazmunini ma'ruza yoki suhbat usullari orqali o'quvchilarga tushuntiradi. Agar darsdagi mavzu avvalgi o'tilgan mavzuga doir misol yoki masala yechish bo'lsa, unda mustaqil ishlash yoki yakka tartibda topshiriqlar berish usullaridan foydalanish mumkin. Buning natijasida sinfdagi o'quvchilar o'zlarining intellektual qobiliyatlari orqali mavzu mazmunini u nazariy yoki amaliy xarakterda bo'lsin yaxshi o'zlashtiradilar.

5-§. O'quvchilarning bilimlarini tekshirish

«Ijroni tekshirish»ning to'g'ri yo'lga qo'yilishi har qanday ish sohasida katta ahamiyatga ega bo'lgani singari, o'qitish ishlarida ham g'oyat katta ahamiyatga egadir. U, o'qituvchiga o'quvchilarda mas'uliyat tuyg'usini tarbiyalashga, o'quvchilarning bilimlaridagi kamchiliklarni o'z vaqtida aniqlab olishga, o'z ishini to'g'ri baholashga imkon beradi.

O'quvchilarning bilimlarini tekshirish ishi muntazam ravishda, ya'ni har kuni olib borilishi kerak. Dastavval yangi materialni bayon etgandan keyin uning qay darajada tushunilganligini tekshirib olish lozim. Darsning asosiy maqsadi o'tiladigan mavzu mazmunini o'quvchilarga tushuntirish ekanini, o'quvchilar bilimni asosan darsda olishlari kerakligini esda tutib, o'qituvchi o'zining shu maqsadga erishgan yoki erishmaganligini har bir darsda o'tilgan mavzu mazmunini asosiy erlarini o'quvchilardan so'rash orqali tekshirib borishi zarur.

O'quvchilarning o'zlashtirish darajasini turii yo'llar bilan tekshirish mumkin, ya'ni biron formulani chiqarish yoki biron

teoremani isbotlashdagi asosiy mulohazalarni o'quvchi tomonidan bajarish, ilgaridan tayyorlab qo'yilgan mavzu mazmuniga doir savollarni o'quvchilarga berish, olingan nazariy xulosalarini masala yoki misollar yechishga tatbiq qila olish qobiliyatlarini aniqlab bilishdan iboratdir.

Bularning hammasi o'quvchilarning o'zlashtirish natijalarini aniqlashga va shu bilan birga o'tilgan materialni mustahkamlashga yordam beradi.

Yozma uy vazifalarining bajarilgan-bajarilmaganligini tekshirish ishi ko'pincha sinfni «aylanib chiqib» o'quvchilarning daftarlarini ko'rish yo'li bilan bajariladi. Bu yo'l vazifaning bajarilganligini aniqlashga imkon beradi, ishning sifatini esa bu yo'l bilan aniqlab olish qiyin.

Uy vazifasini tekshirish uchun aylanma daftar tutish ijobiy natija beradi, chunki vazifasi tekshirilgan daftar o'quvchiga berilganda ular daftardagi o'qituvchi tomonidan qo'yilgan baholarni va izohlarni ko'rib berilgan topshiriqlar bo'yicha qanday bilimga ega ekanliklarini bilib ola'dilar. O'qituvchi uy vazifalar natijasini reyting mezonì bo'yicha ballar asosida baholashi shart.

Bundan tashqari doskaga ayrim o'quvchilarni chiqarib, o'tilgan mavzuga doir o'qituvchi aytgan masala yoki misolning yechilishini so'rash orqali ham aniqlanadi.

Har bir masala yoki misolning yechilishini mufassal bir o'quvchining o'zi oxiriga etkazishi shart emas. Berilgan vazifa yuzasidan eng muhim savollarni ilgaridan tayyorlab qo'yib, tekshirishni ana shu reja bo'yicha olib borish mumkin.

Masala va misollarning yechilishini tekshirganda bir masalaning bir necha xil yechilish variantlarini aniqlash, hisoblashga doir misollarda esa qo'llanilgan turlicha yechish usullarini ko'rsatish va ular ichidan yechishning eng ma'qul usullarini aniqlab olish kerak.

Har kuni hamma o'quvchilarning daftarlarini tekshirib chiqish mumkin emas, ammo bu ishni hech bo'limganda tanlab olish yo'li bilan qilish kerak. Har bir darsning oxirida 8-10 o'quvchining daftarini olish yo'li bilan bir oyda har bir o'quvchining daftarini aqallli uch marotaba ko'zdan kechirish kerak. Bu holda o'quvchining ikki hafta davomida bajargan hamma ishlarini tekshirib chiqishga ulguriladi. Bunda tekshirilgan daftarlarda ko'rsatilgan xatolarni o'quvchilarga albatta tuzattirish kerak, shu holdagini tekshirish ishlari maqsadga muvofiq bo'ladi.

Bunday tekshirganda bajarilgan ishning to'g'rilingini, topshiriqning to'la bajarilishini va ishning chiroyli, ozoda va batartib bajarilishini e'tiborga olib turib, uy vazifalarini bajarishga alohida reyting mezonlari asosida baho qo'yish kerak.

Daftarlarni tekshirib borish o'qituvchiga o'quvchilar tomonidan berilgan vazifalarni bo'sh o'zlashtirilgan joylarini, misollarni yechishdagi o'quvchilarni yo'l qo'ygan xatoliklarini aniqlab olishga va o'z vaqtida ularni to'g'rilib olish choralarini ko'rishga imkon beradi.

O'quvchilar bilimini tekshirishning yana yo'llaridan biri bu ulardan og'zaki so'rashdir. Buning uchun avvalo o'qituvchi tomonidan mavzu mazmunini ochib beradigan mantiqiy ketma-ketlikka ega bo'lgan ta'riflar, qoidalar, murakkab bo'limgan xulosalar va teoremalarning isbotini tushuntirib berishni talab etadigan savollar tizimi tuziladi. Savol sinf o'quvchilariga berilib, javobini o'ylashga bir necha daqiqa vaqt beriladi. So'ngra bir o'quvchidan so'raladi. Uning javobini baholashda butun sinf ishtirot etadi (to'g'ri, noto'g'ri, etarli darajada mukammal, javob asosli yo asosli emas va hokazo); javobga qo'shimcha qiluvchilarga yoki xatoni tuzatuvchilarga ham so'z beriladi.

Javoblar reyting asosida baholanadi, biroq sinf jurnaliga yozilmaydi, uch-to'rt marta shu xil joyda turib berilgan javoblarga o'qituvchi tomonidan umumiy ball qo'yilib, bu ball sinf jurnaliga va

o'quvchining kundalik daftariga yozib qo'yiladi. Bu holda o'qituvchi berilgan savol va olingan javoblarni maxsus yuritilgan reyting daftariga yozib boradi.

Masalan, B sinfda «Sonlarning bo'linishi» mavzusidan keyin shunday savollarni tuzib olish mumkin:

- 1) Sonning (masalan, 84 ning) hamma bo'luchilari qanday topiladi?
- 2) Berilgan sonlarning (12, 18 ning) umumiy bo'luchisi deb qanday songa aytildi va unday sonlar nechta bo'ladi?
- 3) Berilgan sonlarning (masalan, 24 bilan 36 ning) eng katta umumiy bo'luchisi deb qanday songa aytildi va u qanday topiladi?
- 4) Qanday son berilgan sonlarning (masalan, 12 va 9 ning) umumiy bo'linuvchisi deb ataladi va bunday sonlardan nechtasini topish mumkin?
- 5) Qanday son berilgan sonlarning (masalan, 14 va 21 ning) eng kichik umumiy bo'linuvchisi deb ataladi va u qanday topiladi?
- 6) 4 ga bo'linish belgisi, uni tushuntirib bering.
- 7) Biron son qanday shartda 15 ga bo'linadi?
- 8) Yig'indi juft son bo'lishi uchun qo'shiluvchilarning har biri juft son bo'lishi zarurmi? Misollar keltiring.

Maktab tajribasida doskaga chiqarib so'rashning turli yo'llari qo'llaniladi. Doskaga bir o'quvchini chiqarib biron xulosa chiqartirish, teoremani isbotlash yoki masala yechdirish kuproq qo'llaniladi, sinfdagi boshqa o'quvchilar esa doskaga chiqqan o'quvchining javobini eshitib turadilar. Bu holda javob beruvchi o'z javobini bermalol, to'la o'ylab olish, uni bayon etishga tayyorlanib olish imkoniyatidan mahrum bo'ladi, chunki unga o'qituvchi ham qarab turadi, o'quvchilar ham o'zlarining chidamsizlik qarashlari bilan uni bezovta qiladi, shoshiltiradi.

O'qituvchi, darsni ish rejasini tuzgan vaqtidayoq, so'ramoqchi bo'lgan o'quvchilarni belgilab qo'ysa, va ularning har

biriga navbatdagi va takrorlanadigan material yuzasidan so'raladigan 2-3 ta savolni ham aniqlab qo'yishi kerak bo'ladi.

Doskaga 1-2 o'quvchi chiqarilganda ularning har biriga berilgan savolga javob tayyorlash kerak bo'lib qolganda doskada chizma chizish, javobni bog'lanishli qilib aytib berishni osonlashtiradigan yozuvlarni qisqacha yozib qo'yishga imkon beriladi.

Bu o'quvchilar javob tayyorlagunlaricha o'qituvchi qolgan o'quvchilar bilan suhbat asosida savol-javob qilib, og'zaki masalalar yechdirishi, ta'riflarni, teoremalarni aytishini, sodda hulosalar chiqarish kabilarni so'rab turishi lozim bo'ladi.

Ba'zilar, o'qituvchining sinf bilan qiladigan suhbatidan ikki o'quvchini bo'lsa ham ajratib qo'yish zararli deb, bu xil so'rashga e'tiroz bildiradilar. Ammo, chiqarilgan o'quvchilarining tayyorlanish vaqtida butun sinfni zerikib kutib o'tirishga majbur qilishdan ko'ra, ikki o'quvchini bu xil suhbatdan mahrum qilish yaxshiroq. Doskaga chiqarib o'quvchilar javobini eshitish ham yaxshi natija beradi.

Doskaga chaqirilganlarning javobini eshitishga kelganda ish boshqacha; ularning javoblarini butun sinf o'quvchilari eshitishi kerak. Sinf o'quvchilarini bu vaqtida doskadagi o'quvchilar javoblarini eshitishga jalb qilish kerak. Chaqirilgan o'quvchilar javob bergandan keyin boshqa o'quvchilarga qo'shimcha qilishga, tuzatishlar berishga, o'z fikrlarini aytishga imkon beriladi. Bu savolga to'la va to'g'ri javob olingandan keyin o'qituvchi shu o'quvchining o'ziga endi uzoq tayyorlanishni talab etmaydigan va ilgaridan belgilab qo'yilgan savollarini berishi mumkin.

Ba'zi o'quvchilarining javob beruvchi o'quvchiga shu mavzuga doir qo'shimcha savollar berishiga yo'l qo'yiladi. Bu, o'quvchilarni shu mavzuga doir hamma materialni xotirlashga majbur qiladi. Ammo o'quvchilarni muhim savollar berishga o'rgatish lozim, buning uchun esa o'qituvchi mavzuni o'rganish vaqtida o'rganiladigan materialning eng kerakli va muhim tomonlarini ajratib ko'rsata bilishi kerak bo'ladi.

Har holda, so'rash usulidan qat'i nazar, o'qituvchi, birinchidan, so'raladigan materialni ilgaridan belgilab qo'yishi, savollarning qay tarzda berilishini puxta o'ylashi, masala

yechilishining yoki isbotning qanday borishi kerakligini ham oldindan o'ylab qo'yishi lozimdir. Shundagina o'tilgan mavzu bo'yicha o'quvcilarni olgan bilimlari sifatli bo'ladi.

O'quvchiar bilimini tekshirishni yana bir usuli bu o'qituvchi tomonidan o'tilajotgan mavzuga va takrorlashga doir savollar yozilgan kartochkalarini oldindan tayyorlab qo'yishdir. Bunday kartochkalar doskaga chiqarilgan 2-3 o'quvchiga beriladi va tayyorgarlik (javobri o'ylash, doskada kerakli yozuvlarni yozish) uchun 8-10 minut vaqt ko'rsatiladi.

Ular tayyoranayotganda o'qituvchi sinf bilan suhbat o'tkazadi yoki butun sinfga kichikina mustaqil ish beradi. Doskaga chiqarilgan o'quvclilar o'z javoblarini to'la bayon etganda o'quvchilar qulqoq soadi va ularga har bir savolning javobidan keyin qo'shimcha qilishga imkon beriladi. O'qituvchi o'quvchilarning javoblarini reyting aksesida ballar bilan baholab boradi.

So'rash usuli qanday bo'lishidan qat'i nazar, unga nisbatan ba'zi majburiy taloqlar qo'yishga to'g'ri keladi. Bu talablar quyidagilardan iboratdir.

- a) ma'lum maqsadri ko'zda tutish kerak. Bu maqsad ba'zi o'quvchilarga aniq bo'lmasligi mumkin, ammo o'qituvchi uni ochiq-oydin tasavvur qilishi shart;
- b) mavzuning asosiy qoidalarini takrorlashga va mustahkamlashga yordam berishi hamda teoremlar, o'rganilgan qonunlar va bajariladigan shakl o'zgartirishlar orasidagi bog'lanishni aniqlashga, fazoviy tasavvurlarni kengaytirishga, mantiqiy fikrlashni o'stirishga, o'z fikrini to'g'ri va chioyli nutq bilan bayon etishga yordam berishi kerak;
- v) berilgan savolni tezlik bilan o'qib olish va qisqa, aniq javob bera olish qobiliyatini o'quvchilarda tarbiyalashi kerak;
- g) teorema yo qonunlarning aytishiga o'tkir diqqat eta bilishga, javobning, yozuvlarning va chizmalarining to'g'rilingini va tugalligini baholay bilishga, qo'shimcha va tuzatishlar bera bilishga o'rgatishi kerak;
- d) so'rashda o'qituvchi beradigan savollar oz vaqt talab qiladigan, ravon, mazmunli bo'lishi shart.

Yozma tekshirish ishlari (yozma ish, test nazorat ishlari) qisqa vaqtga ~10-12 minutga mo‘ljallab, ba‘zilar esa ko‘proq vaqtga ~1-2 soatga mo‘ljallab berilishi mumkin. Qisqa vaqtga mo‘ljallangan yozma ishlarni darsning ikkinchi yarmida berish qulayroq va bunda ko‘proq o‘quvchilarning har xil hisoblashlarni tez bajara olishlarini tekshirish, ayniy shakl o‘zgartirishlarni bajara bilishini tayyor tenglamalarni tez yecha bilishini, geometrik figuralarning xossalarini aytib bera olishlarini tekshirishlar ko‘zda tutilgan bo‘lishi kerak.

V-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR.

1. Matematika darsining tuzilishini gapirib bering.
2. Matematika darsini tashkil qilish qanday amalga oshiriladi?
3. Yangi mavzuni tushuntirish qanday usullar bilan amalga oshiriladi?
4. Yangi mavzu mustahkamlash deganda nimani tushunasiz?
5. O‘quvchilarning bilimlarini tekshirish qanday usullar orqali amalga oshiriladi?
6. O‘quv materialini takrorlash turlarini aytib bering.
7. Yakuniy takrorlash bilan tematik takrorlashni farqlarini aytib bering.
8. O‘qituvchini matematika darsiga tayyorgarlik ko‘rishini aytib bering.
9. Matematika darsiga qo‘yilgan talablarni aytib bering.
10. Matematika darsining tahlilini tushuntiring.
11. O‘quvchilar bilimlarini tekshirish usullarini aytib bering.
12. Yozma ish deganda nimani tushunasiz?

TAYANCH IBCRALAR.

Matematika darsi, darsning tuzilishi, yangi mavzu, darsni mustahkamlash, takrorlash turlari, darsga tayyorgarlik, ishchi reja, matematika dasturi, darsga qo‘yilgan talab, dars tahlili, bilimlarni tekshirish, yozma ish, reyting nazorati.

SON TUSHUNCHALARINI KIRITISH, UNI KENGAYTIRISH VA SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH METODIKASI.

1-§. Natural son tushunchasini kiritish va ular ustida amallar bajarish metodikasi.

Eramizdan avvalgi asrlarda yashagan insonlar tirikchilik uchun hap xil qushilar, kiyiklar va boshqa jonivorlarni ovlash bilan kun kechirganlar. Ana shu ovlangan kiyiklarni, umuman olganda jonivorlar sonini dastlab qo'l va oyoq barmoqlari bilan ko'rsatib tushuntirishga odatlanganlar. Agar ovlangan jonivorlar soni ikkala qo'l barmoqlari sonidan ko'p bo'lsa, ularni hisoblash uchun oyoq barmoqlaridan ham foydalanganlar. Vaqt c'tishi bilan kishilarning ongi ham ana shu davrga nisbatan shakllana borgan, Har xil xo'jalik ishlarini bajarish jarayonidagi hisoblaiga oyoq va qo'l barmoqlarining soni javob berolmay qolgan, natijada ular hisoblash ishlarini bajarishda tayoqchalardan foydalanganlar. Ana shu qo'l va oyoq barmoqlari hamda ishlatilgan tayoqchalarni sanash natijasida bir, ikki, uch, to'rt va hokazo sonlar hosil qilingan. Masalan, bitta qush, ikkita kiyik, uchta yo'lbars va hokazo. Yuqoridagi mulohazalardan ko'rindiki, son - bu odamlar sanash natijasida narsalarning miqdoriy qiymatlarini ifoda qiluvchi tushuncha ekan. Sonlar raqamlar bilan belgilanadi, bizning sanoq sistema o'nlik sistema bo'lganligi uchun u to'qqizta qiymatli va bitta qiymatsiz raqam bilan belgilanadi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Matematika kursida 1, 2, 3, ... qatorni *natural sonlar qatori*, deb ataladi. Natural sonlar to'plami quyidagi xossalarga ega:

1. Natural sonlar to'plamining birinchi elementi 1 ga teng.
2. Natural sonlar to'plamida ixtiyoriy natural sondan keyin keladigan va undan bitta ortiq bo'lgan birgina natural son mavjuddir.
3. Natural sonlar to'plamida 1 sonidan boshqa har bir natural sondan bitta kam bo'lgan va bu sondan oldin keladigan birgina natural son mavjuddir.

Boshlang'ich sinf matematika kursida natural sonlar to'plami haqidagi eng sodda tushunchalar o'quvchilarda shakllantiriladi. IV sinfda esa koordinata tekisligi va nur tushunchalari kiritilganidan keyin natural sonlar to'plamining geometrik tasviri ko'rsatiladi.

Har bir natural songa koordinata nurning bitta nuqtasi mos kelishini o'qituvchi ko'rgazmali qurollar yordamida tushuntirishi lozim. Shundan keyin o'quvchilarga natural sonlami og'zaki va yozma nomerlash ishlari o'rgatiladi. Buning natijasida o'quvchilar natural sonlarni o'qish va yozishni o'rganadilar.

1. Sanash vaqtida birinchi o'nta sonning har biriga alohida nom beriladi.

2. Sanoq birliklari gruppalarga shunday birlashtiriladiki, buning natijasida bir xil o'nta birligidan yangi ikkinchi xona birligi, ikkinchi xonaning o'nta birligidan yangi uchinchi sanoq birligi va hokazolar tuziladi.

3. Ikkinchi xonadan boshlab har bir xona birligi shu xonadan bevosita quyi xonaning o'nta birligidan tuzilgani uchun bizning sanoq sistemamiz o'nlik sanoq sistemasi deb ataladi. 10 soni esa sanoq sistemasining asosi deb ataladi.

4. Turli xonalardan iborat bo'lган sonlarning har uchtasining birliklarini birlashtirib sinflar tuziladi. Dastlabki to'rtta xona birliklariga alohida nomlar beriladi, ya'ni bulardan to'rtinchi xona birligi ming, ikkinchi sinf birligi deb qaraladi va undan xuddi asosiy birliklardan tuzilgan kabi, navbatdagi birliklar tuziladi. Ikkinchi sinfning mingta birligi uchinchi sinfning birligi - millionni tashkil etadi va hokazo.

5. Sonlarni yozish uchun 10 ta raqam ishlatiladi, noldan boshqa hamma raqamlar *qiymatli raqamlar* hisoblanadi.

6. Qiymatli raqamlarning qiymati ularning sondagi o'rniiga qarab o'zgaradi. Bundan keyin o'qituvchi o'quvchilarga natural sonlarni qo'shish, va ayrishni hamda ko'paytirish va bo'lishni kundalik hayotda uchraydigan misollar asosida o'rgatishi maqsadga muvofiqdir.

Masalan, Odiljon 35 ta ko'chat ekdi, Qobiljon esa 30 ta ko'chat ekdi. Ularning ikkalasi birgalikda necha to'p ko'chat ekishgan? $30 + 35 = 65$ ta

Ikkita natural sonni qo'shish natijasida yangi bir natural son hosil bo'ldi, uni shu sonlarning yig'indisi deyiladi. 30 va 35 sonlari *qo'shiluvchilar*, 65 soni *yig'indi* deb ataladi. Shu fikrlar o'quvchilarga o'rgatiladi, so'ngra qo'shish amaliga ta'rif beriladi.

T a ' r i f. *Ikki sonning yig'indisini topish amaliga qo'shish deb ataladi.*

Natural sonlarni qo'shish yana quyidagicha usul bilan tushuntirilishi mumkin.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... natural sonlar to'plamini doskaga yozib, unda 4 sonini belgilaymiz, so'ngra ana shu 4 sonidan unga qarab 6 ta sonini sanaymiz, natijada 10 soni hosil bo'ladi. Demak $4+6=10$ bo'lar ekan. $6+4=10$ bo'lishini ham yuqoridagidek tushuntirish mumkin. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ... natural sonlar to'plamida 6 sonini belgilab, undan o'ngga qarab 4 ta sonni sanaymiz, natijada 10 soni hosil bo'ladi, demak, bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi $a + b = b + a$. Bu tenglikdan qo'shish amaliga nisbatan quyidagi qoidani ifoda qilish mumkin.

Q o i d a. *Qo'shiluvchilarning o'rni almashgani bilan yig'indining qiymati o'zgarmaydi, ya'ni $a + b = b + a$.*

Biz qo'shiluvchilar sonini uchta olganimizda ham yuqoridagi qoida o'rinli bo'lib, $(a+b)+c=(a+c)+b$ tenglik hosil bo'ladi, bu esa qo'shish amaliga nisbatan gruppash qoidasini ifodalaydi.

Endi natural sonlarni ayirishni qaraymiz. Natural sonlarda ayirish amalini o'rgatish uchun quyidagidek masalalarni qarash mumkin. Taqsimchada 20 dona konfet bor edi. Fozil shu konfetdan 6 donasini eb qo'ydi. Tarelkada necha dona konfet qoldi? Bu masalani yechish uchun biz shunday noma'lum x sonini topishimiz kerakki, bunda $6 + x = 20$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Bu hosil qilingan tenglikni o'qiydigan bo'lsak, birinchi qo'shiluvchi va yig'indi ma'lum bo'lib, ikkinchi qo'shiluvchi esa noma'lumdir.

Q o i d a. *Qo'shiluvchilardan biri va yig'indi ma'lum bo'lganda ikkinchi qo'shiluvchi noma'lum sonni topish amaliga ayirish deb ataladi.*

$$x = 20 - 6. \quad x = 14.$$

Agar biz umumiyl hoida $a + x = b$ desak, bundan $x = b - a$ hosil bo'ladi.

bu yerda x - ayirma, b - kamayuvchi, a - ayiriluvchi deb yuritiladi.

Ayirish amalini o'quvchilarga yana quyidagicha tushuntirish mumkin. Masalan, 20 sonidan 6 sonini ayirish kerak bo'lsin. Buning uchun 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 ... natural sonlar qatorini doskaga yozib, 20 sonini belgilaymiz va undan chapga qarab oltita sonni belgilaymiz, natijada 14 soni hosil bo'ladi, bu degan so'z $20 - 6 = 14$ deganidir deb o'quvchilarga tushuntiramiz. Bu yerda 20 soni kamayuvchi, 6 soni ayiriluvchi, 14-soni esa ayirma deb ataladi.

Masala. 5 ta tokchaning har biriga 16 ta donadan kitob terilgan bo'lsa, hammasi bo'lib qancha kitob terilgan?

Bu masalani yechish uchun qo'shish amalidan bunday foydalanamiz. $16+16+16+16+16=80$ yoki bu tenglikni $16 \cdot 5=80$ ko'rinishda ham yozish mumkin: bunda javoblarning bir xil bo'lganligini o'qituvchi o'quvchilarga tushuntirishi lozim. Bu yerda 16 va 5 sonlari *ko'paytuvchilar*, 80 soni esa *ko'paytma* deb yuritiladi.

T a ' r i f. Qo'shiluvchilari o'zaro teng bo'lgan sonlarning yig'indisini topish amaliga *ko'paytirish* deyiladi va u bunday yoziladi:

$$\underbrace{a + a + a + \dots + a}_b = a \cdot b = c$$

a va b sonlari *ko'paytuvchilar*, c esa *ko'paytma* deb yuritiladi.

Yuqoridagi ma'lumotlardan keyin *ko'paytirish* amaliga nisbatan o'rinali bo'lgan quyidagi uch qonunni ko'rsatish lozim.

1. *Ko'paytirish* amaliga nisbatan o'rinali almashtirish (komutativlik) qonuni o'rinali.

$$a \cdot b = c \text{ bo'lsa, } b \cdot a = c \text{ bo'ladi.}$$

2. *Ko'paytirish* amaliga nisbatan tarqatish (distributivlik) qonuni o'rinali.

$$a(b + c) = ab + ac$$

Bu qonunni bunday tushuntirish mumkin.

$$(b + c) \cdot a = \underbrace{(b + c) + (b + c) + (b + c) + \dots + (b + c)}_a = ab + ac$$

3. *Ko'paytirish* amaliga nisbatan gruppalash (assotsiativ) qonuni o'rinali $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, bu tenglikni quyidagicha tushuntirish mumkin,

$$(a \cdot b) \cdot c = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b} + \underbrace{a + a + \dots + a}_{b} + \underbrace{a + a + \dots + a}_{b} = a \cdot (b \cdot c)$$

Bu tenglikni quyidagicha izohlash mumkin. Har bir qatorda b tadan $qo'shiluvchi b$ bo'lib har bir $qo'shiluvchi a$ ga teng, ya'ni $(b \cdot c) \cdot a$ deb yozish mumkin.

4. Omborga 5 yashikda 625 kg olma keltiridi. Har yashikda necha kilogrammdan olma bo'lgan? Bu masalani yechish uchun biz shunday x sonini topishimiz kerakki, $x=625 : 5$ bo'lsin. Bunday son 125 bo'ladi.

Ana shu 125 sonini hosil qilish uchun bo'lishni, ya'ni $x=625:5$ amalni bajariladi, bu amal bo'lish deb yuritiladi.

T a ' r i f. Ko 'payuvchi sonlardan biri va ko 'paytma son ma'lum bo'lganda, ikkinchi ko 'payuvchi sonni topish amaliga bo'lish deyiladi va u quyidagicha yoziladi $a \cdot x=c$, $x=c:a$, x - bo'linma, c - bo'linuvchi, a - bo'luvchi deb yuritiladi. Yuqoridagi misolda esa 625 - bo'linuvchi, 5 - bo'luvchi, x - bo'linma deb ataladi.

Har qanday natural sonni 0 soniga bo'lish mumkin emas, chunki $\bullet x=c$ tenglikni qanoatlantiradigan x sonini topish mumkin emas. Demak, $x=x:0$ tenglikning bo'lishi mumkin emas.

Bizga ma'lumki, $qo'shish$ amaliga nisbatan qarama-qarshi amal ayirishni va bu ko 'paytirishga nisbatan teskari amal bo'lishni quyidagi sxema orqali ko 'rsatish ham mumkin:

35-Chizma

$$\begin{array}{ccc} & 3+5=8 & \\ 3+x=8 & & u+5=8 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x=8-3=5 & & u=8-5=3 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x=5 & & v=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot 4 = 20 & & 5 \cdot y = 20 \\ x \cdot 4 = 20 & \swarrow & \searrow \\ x = 20:4 = 5 & & y = 20:5 = 4 \end{array}$$

Bu sxemani jadval tarzida ham berish mumkin.

To‘g‘ri amallar	qarama-qarshi amal
qo‘sish	Ayirish
$3 + 5 = 8$	1. $8 - 3 = 5$ 2. $8 - 5 = 3$
ko‘paytirish	Teskari amal bo‘lish
$5 \times 4 = 20$	1. $20 : 4 = 5$ 2. $20 : 5 = 4$

2-§. Natural sonlar to‘plamini kengaytirish.

Bu mavzuni tushuntirish jarayonida o‘qituvchi o‘quvchilarga koordinata nurining har bir nuqtasiga bittadan natural son mos kelmasligini, ya’ni koordinata nuridagi nuqtalar to‘plamini ortib qolishini ko‘rgazmali asosda tushuntirishi lozimdir. Bu mulohazaga ko‘ra natural sonlar to‘plamini yanada kengaytirish va natijada yangi sonlar to‘plamini hosil qilish ehtiyoji zarur ekanligini o‘qituvchi yana bir marta o‘quvchilarga tushuntirishi lozim. Bundan tashqari o‘qituvchi natural sonlar to‘plamida har doim qo‘sish va ko‘paytirish amallarini bajarish mumkin, ammo ayirish va bo‘lish amallarini har doim ham bajarish mumkin emasligini misollar yordamida ko‘rsatish kerak.

Masalan, $5 + 3 = 8$, $2 \cdot 7 = 14$. Bu yerda hosil qilingan 8 yig‘indi va ko‘paytma 14 sonlar natural sonlar to‘plamida mavjuddir, ammo $3 - 5$ ayirmada chiqadigan - 2 soni natural sonlar to‘plamida mavjud emas, bu natural sonlar to‘plamida har doim ham ayirish amalini bajarish mumkin emas degan so‘zdir. Umuman olganda natural sonlar to‘plamida $X + M = P$ ko‘rinishdagi tenglama $P=M$ bo‘lgan holda yechimga ega emas. $X+M=P$ tenglama yechimi $X = P - M$ $P \leq M$ bo‘lganda ham o‘rinli bo‘lishi uchun 0 soni va barcha butun manfiy sonlar to‘plami degan tushuncha kerakdir, shuning uchun ham natural sonlar to‘plamini kengaytirish orqali boshqa yangi sonlar to‘plamini hosil qilish g‘oyasi kelib chiqadi.

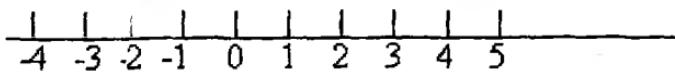
3-§. Butun sonlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi

5 - sinfda "Koordinata to'g'ri chizig'i" nomli mavzu o'tiladi, ana shu mavzuni o'tish uchun sanoq boshi degan tushuncha kiritilgan bo'lib, shu sanoq boshi nomli nuqtani 0 (nol) soni bilan belgilangan.

0 so'zi lotincha nallse - so'zidan olingan bo'lib "hech qanday qiymatga ega bo'lman" degan ma'noni bildiradi. Nol soni natural sonlar to'plamiga kirraydigan qiymatsiz son hisoblanadi. Matematikadan bo'sh to'plam tushunchasini ham 0 soni bilan ifodalanadi.

To'g'ri chiziqdagi saroq boshi deb ataluvchi 0 nuqtadan unga 1, 2, 3 sonlari, chapga esa -1, -2, -3, ... sonlarni yozish va chapdagagi sonlarni "minus bir", "mirus ikki", "minus uch" ... deb o'qishga kelishilgan. 0 soni to'g'ri ciiziqda musbat va manfiy sonlarni ajratib turadi. 0 sonidan o'ng tononidagi natural sonlarni butun musbat sonlar, chap tomonidagi sorlarni esa butun manfiy sonlar deb ataladi. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra butun sonlar to'plamiga quyidagicha ta'rif berish numkin.

T a ' r i f. Barcha natural, butun manfiy va nol sonlari birgalikda butun sonlar to'plami deyiladi (35-chizma).



35-Chizma.

Bu yerda naturalsonlarga nisbatan qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir, masalan, 1 va -1, 2 va -2, 3 va -3, qarama-qarshi sonlar barcha butun manfiy sonlardir;

Butun sonlar to'plamida faqatgina 0 soniga nisbatan qarama-qarshi bo'lgan son yo'qdir:

$$0 = 0 + 0$$

Maktab matematika kursida mansiy son tushunchasi kiritilganidan keyin sonning moduli tushunchasi ham kiritiladi.

T a ' r i f. Musbat sonning moduli o'ziga teng

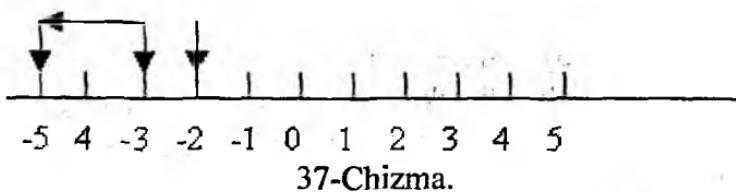
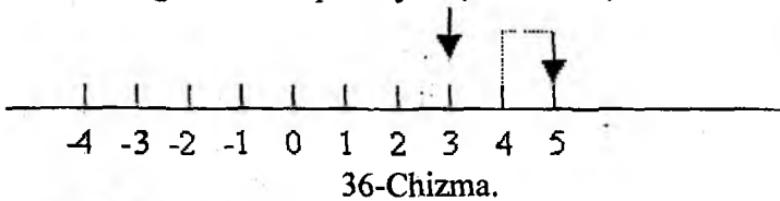
$$|a| = a. |5| = 5.$$

T a ' r i f. Manfiy sonning moduli o'ziga qarama-qarshi songa teng.

$$|-a| = a. |-5| = 5.$$

Butun sonlar bilan to'rt amalning bajarilishini ko'rib chiqaylik.

1. Butun sonlar bilan qo'shilish amali quyidagicha bajariladi, masalan 3 soniga 2 sonini qo'shaylik (36-chizma).



Butun sonlar qatorida 3 sonini belgilab, undan o'ngga qarab ikkita sonni sanaymiz. Natijada 5 soni hosil bo'ladi, demak, $3 + 2 = 5$
2, -2 soniga -3 sonini qo'shing (37-chizma).

Butun sonlar to'plamidan -2 sonini belgilab, undan chapga qarab uchta sonni sanaymiz, natijada -5 soni hosil bo'ladi, demak, $(-2) + (-3) = -5$

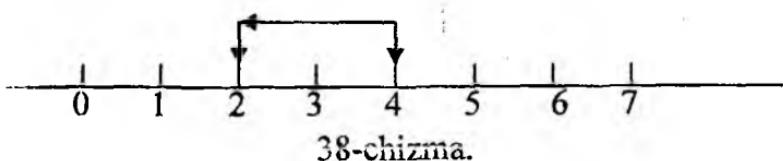
Q o i d a.

Bir xil ishoradagi butun sonlarni o'zapo qo'shilish uchun ularning modullarini o'zaro qo'shib yig'indi son oldiga qo'shiluvchilar oldidagi ishora qo'yiladi.

$$\text{Masalan. } 5 + 4 = + (5 + 4) = +9 = 9$$

$$(-3) + (-2) = -(3 + 2) = -5$$

3. 4 soniga -2 sonini qo'shing. Buning uchun butun sonlar qatorida 4 sonini belgilab, undan chapga qarab ikkita sonni sanaymiz, hosil bo'lgan son izlanayotgan son bo'ladi (38-chizma)



Q o i d a. Ishoralari har xil bo'lgan butun sonlarni o'zaro qo'shish uchun ularning katasini modulidan kichigini ayirib, katta son ishorasi qo'yiladi.

$$1) 5 + (-3) = 5 - 3 = +2 = 2$$

$$2) (-8) + 3 = -(8 - 3) = -5.$$

Bu yerda $|8| > 3$, shuning uchun yig'indi son manfiy bo'ladi.

I. O'zaro qarama-qarshi sonlar yig'indisi esa nolga teng.

$$a + (-a) = 0$$

Masalan,

$$5 + (-5) = 0$$

II. Butun sonlar ustida ayirish amali quyidagicha bajariladi. Bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun kamayuvchiga ayiriluvchiga qarama-qarshi sonni qo'shish kerak, ya'ni $(a-b)+b=a$.

$$1) 25 - 9 = 16; \quad 2) -15 - 30 = -15 + (-30) = -45;$$

$$3) -12 - (-13) = -12 + 13 = 1.$$

1. Har xil ishorali ikkita butun sonni ko'paytirish uchun bu sonlarning modulini ko'paytirish va hosil bo'lgan son oldiga "minus" ishorasini qo'yish kerak:

$$a(-b) = -(ab) = -ab, \quad 2 \cdot (-3) = -(2 \cdot 3) = -6,$$

2. Ikkita butun manfiy conni c'zaro ko'paytirish uchun ularning modullarini o'zaro ko'paytirish kerak:

$$(-a)(-b) = a \cdot b.$$

$$(-5)(-3) = 5 \cdot 3 = 15.$$

3. Agar ko'paytuvchilardan biri nolga teng bo'lsa, u holda ko'paytma nolga teng bo'ladi:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

IV. Butun sonlarni bo'lish amali quyidagicha bajariladi.

1. Butun manfiy sonni manfiy conga bo'lish uchun bo'linuvchining modulini bo'luchching moduliga bo'lish kerak:

$$(-a) : (-b) = |-a| : |-b| = a : b;$$

$$(-81) : (-3) = |-81| : |-3| = 81 : 3 = 27$$

2. Hap xil ishorali ikkita butun sonni o'zaro bo'lish uchun bo'linuvchining modulini bo'luchching moduliga bo'lish va hosil bo'lgan sonning oldiga "minus" ishorasini qo'yish kerak:

$$(-a) : b = |-a| : b = -\frac{a}{b} (-15) : 3 = |-15| : 3 = -5$$

3. Nolni nolga teng bo‘lmagan har qanday butun songa bo‘lishda nol soni hosil bo‘ladi:

$$0 : a = 0$$

4. Ixtiyoriy butun sonni nol soniga bo‘lish mumkin emas:

$$a : 0 = \text{ma’nosizlik}$$

4-§. Kasr son tushunchasini kiritish va uni o‘rgatish metodikasi

Butun sonlar to‘plamida har doim qo‘sish, ayirish, ko‘paytirish amallarini bajarish o‘rinlidir, lekin bo‘lish amali har doim bajarilavermaydi. Chunki bir butun sonni ikkinchi butun songa bo‘lganda har doim bo‘linmada butun son hosil bo‘lavermayda.

Masalan, $7:2 = 3.5$, $9:4 = 2\frac{1}{4}$, ... Bu yerda hosil qilingan

bo‘linmadagi 3.5 ; $2\frac{1}{4}$, ... sonlari butun sonlar to‘plamida mavjud

emas. Umuman olganda $m \neq n$, $m \neq 0$ ko‘rinishdagi tenglamaning yechimi butun sonlar to‘plamida har doim mavjud emas, bu tenglama

har doim $x = \frac{n}{m}$ ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘lishi uchun kasr tushunchasini kiritish orqali butun sonlar to‘plamini kengaytirib, unga barcha manfiy va musbat kasr sonlarni qo‘sish kerak. Bu

degan so‘z $\left\{-\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q}\right\}$ ko‘rinishdagi ratsional sonlar to‘plamini

hosil qilish kerak deganidir. Shundagina $mx=n$ ko‘rinishdagi tenglamalar har doim yechimga ega bo‘ladi. Bu yerda r va q lar natural sonlardir. Yuqoridagi mulohazalarga ko‘ra ratsional songa

quyidagicha ta’rif berish mumkin: $\frac{p}{q}$ ko‘rinishdagi qisqarmas

kasrga ratsional son deyiladi.

Endi kasr tushunchasini kiritish uchun foydalaniladigan misollarni ko‘rib o‘taylik.

Agar bir metr uzunlikdagi yog‘ochni o‘zaro teng ikki bo‘lakga bo‘linsa, u holda bo‘laklarning har birining uzunligi ana shu yog‘och

uzunligining yarmiga teng bo'ladi va uni $\frac{1}{2}$ kabi yoziladi. Agar ana shu bir metr uzunlikdagi yog'ochni o'zaro teng uch bo'lakka bo'linsa, u holda bo'laklardan har birining uzunlngi shu yog'och uzunligining uchdan biriga teng bo'ladi va uni $\frac{1}{3}$ kabi yoziladi.

Xuddi shuningdek, $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \dots$

Agar bir metr uzunlikdagi yog'ochni teng uch bo'lakka bo'lib, undan ikki qismini oladigan bo'lsak, olingan uzunligini $\frac{2}{3}$ kabi yoziladi.

Agar ana shu yog'ochni to'rt bo'lakga bo'lib, undan uch qismini olsak, olingan qism uzunligini $\frac{3}{4}$ kabi ifodalanadi. Yuqorida qilingan mulohazalarga asoslanib kasr tushunchasining ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

T a ' r i f. Butun sonning o'zaro teng bo'lgan ma'lum bir ulushi, shu sonning kasri deyiladi.

Yuqorida $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ kasr sonlarni hosil qildik. Berilgan narsalarni yoki butun sonni qancha teng qismga bo'linganligini ko'rsatuvchi sonni kasrning *maxraji*, shunday qismdan nechasi olinganligini ko'rsatuvchi sonni kasrning *surati* deyiladi. Maxraj kasr chizig'ining ostida, surat esa kasr chizig'ining ustiga yoziladi.

Umumiyl holda kasrni $\frac{p}{q}$ ko'rinishda ifodalanadi. Bunda r - kasrning surati, q - kasrning maxraji deb yuritiladi. $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi kasrlarga qarama-qarshi kasrlarni $-\frac{p}{q}$ ko'rinishda ifodalanadi.

Koordinata o'qida $-\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi kasrlar nol sonidan

chapda joylashgan bo'ladi. Biz butun sonlar to'plamini kengaytirish

orqali $-\frac{p}{q}$ va $\frac{p}{q}$ ko'rinishdagi kasrlarni hosil qildik. Natijada

koordinata o'qida $\{-\frac{p}{q}, 0, \frac{p}{q}\}$ ko'rinishdagi sonlar to'plami hosil

bo'ldi.

Bunday to'plam **ratsional sonlar to'plami** deb ataladi. Agar ratsional sonlar to'plamidagi $-\frac{p}{q}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarning maxrajlari $q = 1$

desak, bizga ma'lum bo'lgan butun sonlar to'plami hosil bo'ladi. Bundan ko'rindiki, butun sonlar ratsional sonlar to'plamining xususiy bir holi ekan. Ratsional sonlar to'plami bilan koordinata to'g'ri chizig'i nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinmi, degan savol tug'ilishi tabiiydir. Bu savolga quyidagicha javob berishimiz mumkin, aksincha, har bir nuqtaga bittadan ratsional soni mos keltirish mumkin emas.

Kasrlar uch xil bo'ladi:

1. To'g'ri kasrlar. 2. Noto'g'ri kasrlar. 3. O'nli kasrlar.

1. Agar kasrning surati uning maxrajidan kichik bo'lsa, bunday kasrlarni **to'g'ri kasrlar** deyiladi.

Masalan: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \dots$

2. Agar kasrning surati uning maxrajidan katta bo'lsa, bunday kasrlarni **noto'g'ri kasrlar** deyiladi. Masalan, $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{17}{5}, \dots$

3. Agar kasrning maxraji bir va nol sonlaridan iborat bo'lsa, bunday kasrlarni **o'nli kasrlar** deyiladi.

Masalan, $\frac{1}{10} = 0,1; \frac{1}{100} = 0,01; \dots$

Kasr tushunchasi kiritilganidan keyin kasrlarning tengligi tushunchasi kiritiladi. Bu tushunchani o'quvchilarga quyidagicha tushuntirish mumkin.

Faraz qilaylik, bizga bir metr uzunlikdagi kesma be-rilgan bo'lsin. Agar shu kesmani teng ikkiga bo'lsak, har bir kesmaning uzunligi $\frac{1}{2}$ kabi kasr bilan ifodalanadi. Endi bo'lingan hap bir kesmani yana ikkiga bo'lsak har bir kesma-ning uzunligi $\frac{1}{4}$ kasr bilan ifodalanadi. Ana shu teng to'rtga bo'lingan kesmalardan ikkitasining uzunligi $\frac{2}{4}$ kasr bilan ifodalanadi. Bu esa butun kesma uzunligining teng ikkiga bo'lgandagi $\frac{1}{2}$ kasr bilan ifodalangan qiymatiga tengdir. Shuning uchun $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$. Bundan ko'rindiki, $\frac{1}{2}$ va $\frac{2}{4}$ kasrlarning qiymatlari teng bo'lib, ularni ifoda qilish har xildir.

O'quvchilarga kasrlarning tengligi tushunchasini tushuntirilganidan so'ng kasrning quyidagi xossalari ni ifoda qilish mumkin.

I - x o s s a. Agar kasrning surat va maxrajini bir xil songa ko'paytirilsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi. $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}$.

$$1) \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10};$$

$$2) \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{12}{28}; \quad 3) 1 = \frac{1}{1} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{4}{4} = \frac{4 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{100}{100}.$$

II - x o s s a. Agar kasrning surat va maxrajini bir xil songa bo'linsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi. $\frac{p:n}{q:n} = \frac{p}{q}$ Bu yerda $n > 1$ bo'lishi kerak.

$$\text{Misollar} \quad 1) \frac{4}{8} = \frac{4}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad 2) \frac{15}{3} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$$

III - x o s s a. Agar kasrning surat va maxrajidagi sonlar umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmasa, u holda bunday kasr qisqarmas kasr bo'ladi. Masalan $\frac{5}{7}, \frac{4}{5}, \frac{17}{19}, \dots$ qisqarmas kasrlardir, chunki 5 va 7, 4 va 5, 17 va 19 sonlari o'zaro umumiy bo'luvchilarga ega emas.

5-§. Kasrlarni taqqoslash

1. Kasrlarni o'zaro taqqoslash uchun berilgan kasrlarni o'zaro bir xil maxrajli kasrlar holiga keltirish kerak, so'ngra ulardan qaysi birining surati katta bo'lsa, o'sha kasrning qiymati katta bo'ladi.

$$\text{Masalan: } \frac{3}{4} \text{ va } \frac{2}{5}; \quad \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20} \text{ va } \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}, \frac{15}{20} > \frac{8}{20},$$

shuning uchun $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$. Bu yerda kasrning surati va uning maxrajini

bir xil songa ko'paytirilsa, kasrning qiymati o'zgarmaydi degan xossaladan foydalandik.

2. Suratlari bir xil va maxrajlari har xil bo'lgan kasrlardan qaysi birining maxraji katta bo'lsa, o'sha kasr kichik bo'ladi. Qaysi birining maxraji kichik bo'lsa, o'sha kasr katta bo'ladi.

$$\text{Masalan: } \frac{4}{15} \text{ va } \frac{4}{21} \text{ lar uchun } \frac{4}{15} > \frac{4}{21}.$$

6-§. Kasrlarni qo'shish

Faraz qilaylik, bizga AB kesma berilgan bo'lsin, biz uni teng ettiga bo'laylik, ulardan $AC = \frac{1}{7}$, $CD = \frac{3}{7}$, $AD = \frac{4}{7}$ bo'lsin, u holda AD kesmaning qiymati AC va CD kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni $AD = AC + CD$. Shu bilan birga $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$. Yuqoridagi mulohazaga ko'ra quyidagi qoidani yezishimiz mumkin.

I. Maxrajlari bir xil bo'lgan kasrlarni qo'shish uchun ularning suratlarini o'zar qo'shib, maxrajlardan bittasini yozish kifoya.

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{q} = \frac{p+r}{q}; \quad \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}.$$

II. Maxrajlari har xil bo'lgan kasrlarni qo'shish uchun ularni eng kichik umumiy maxrajga keltirib, bir xil maxrajli kasrlarni qo'shish qoidasidan foydalanib, qo'shish kifoya:

$$1) \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{14+15}{35} = \frac{29}{35};$$

$$2) \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{18}{24} + \frac{4}{24} = \frac{18+4}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12};$$

Umumiy holatda esa $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s} + \frac{r \cdot q}{s \cdot q} = \frac{ps + rq}{sq}$.

III. Yig'indida butun son chiqadigan kasrlarni qo'shish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$1) \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$2) \quad \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{1+7}{8} = \frac{8}{8} = 1;$$

$$3) \quad \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{2+2}{4} = \frac{4}{4} = 1;$$

IV. Butun sonni kasrga qo'shish

$$1) \quad 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2};$$

$$2) \quad 3 + \frac{1}{2} = \frac{3}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2};$$

V. Aralash sonni kasrga qo'shish

$$3\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 3 + \left(\frac{3}{4} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}\right) = 3 + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) = 3 + \left(\frac{3+2}{4}\right) = 3 + \frac{5}{4} = 4 + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}.$$

VI. Aralash sonni aralash songa qo'shish:

$$2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} = (2+3) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] = 5 + \left[\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}\right] = 5 + \frac{2+3}{6} = 5 + \frac{5}{6} = 5\frac{5}{6}.$$

Qo'shish qonunlari.

1. Kasr qo'shiluvchilarning o'rni almashgani bilan yig'indi kasr sonning qiymati o'zgarmaydi :

$$\frac{a}{q} + \frac{b}{q} = \frac{a+b}{q} = \frac{b+a}{q} = \frac{b}{q} + \frac{a}{q}.$$

Misol:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}.$$

2. Kasr sonlarda qo'shish amaliga nisbatan gruppalash qonuni o'rindidir:

$$\left(\frac{a}{q} + \frac{b}{q} \right) + \frac{c}{q} = \frac{a}{q} + \left(\frac{b}{q} + \frac{c}{q} \right).$$

Istboti:

$$\left(\frac{a}{q} + \frac{b}{q} \right) + \frac{c}{q} = \frac{a+b}{q} + \frac{c}{q} = \frac{(a+b)+c}{q} = \frac{c+(b+a)}{q} = \frac{a}{q} + \frac{b+c}{q} = \frac{a}{q} + \left(\frac{b}{q} + \frac{c}{q} \right).$$

Misol:

$$\frac{1}{7} + \frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{7} \right) + \frac{3}{5} = \frac{1+2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{3}{7} + \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{15+21}{35} = \frac{36}{35}.$$

7-§. Kasrlarni ayirish.

1) Faraz qilaylik, bizga AB kesma berilgan bo'lib, u teng 7 bo'lakka bo'lingan bo'lsin.

Ulardan $AC = \frac{1}{7}$, $CD = \frac{3}{7}$, $AD = \frac{4}{7}$ larga teng bo'lsin. CD

kesmaning qiymati $CD = AD - AC$ bo'ladi, u holda $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$ tenglik o'rini.

2) Karim ikki mashinadagi yukni $\frac{5}{7}$ soatda tushirdi. U birinchi mashinadagi yukni $\frac{3}{7}$ soatda tushirib bo'ldi. Karim ikkinchi mashinadagi yukni necha soatda tushirgan? $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$. Topilgan natijani to'g'riligini tekshirish qo'shish amali orqali amalga oshiriladi:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

Endi kasrlarni ayirish uchun chiqarilgan quyidagi qoidalarni ko'rib chiqamiz:

1. Maxrajlari bir xil bo'lgan kasrlarni ayirish uchun ularning suratlarini o'zaro ayirib, maxrajlardan bittasini maxraj qilib yozish kifoya.

$$1) \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}; \quad 2) \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4-3}{7} = \frac{1}{7};$$

2. Maxrajlari har xil bo'lgan kasrlarni ayirish uchun ularni eng kichik umumiy maxrajga keltirib, bir xil maxrajli kasrlarni ayirish qoidasidan foydalilanildi:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{21-8}{28} = \frac{13}{28}.$$

Umumiy holda:

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s} - \frac{r \cdot q}{s \cdot q} = \frac{ps - rq}{sq}.$$

III. Butun sondan kasrni ayirish:

$$1\text{- usul. } 4 - \frac{2}{3} = \frac{4}{1} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3} = \frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{12-2}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$2\text{- usul } 4 - \frac{2}{3} = 3 + \left(\frac{3}{3} - \frac{2}{3} \right) = 3 + \left(\frac{3-2}{3} \right) = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

IV. Kasrdan butun sonni ayirish:

$$\frac{3}{7} - 2 = -\left(2 - \frac{3}{7} \right) = -\left(\frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 7} - \frac{3}{7} \right) = -\left(\frac{14}{7} - \frac{3}{7} \right) = -\frac{14-3}{7} = -\frac{11}{7} = -1\frac{4}{7}.$$

V. Butun sondan aralash sonni ayirish:

$$5 - 2\frac{1}{4} = 4\frac{5}{5} - 2\frac{1}{4} = (4 - 2) + \left(\frac{5}{5} - \frac{1}{4}\right) = 2 + \left(\frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5}\right) = \\ = 2 + \frac{20 - 5}{20} = 2 + \frac{15}{20} = 2 + \frac{3}{4} = 2\frac{3}{4}.$$

VI. Aralash sondan butun sonni ayirish:

$$1) \quad 3\frac{3}{4} - 2 = (3 - 2) + \left(\frac{3}{4} - 0\right) = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

$$2) \quad 3\frac{3}{4} - 2 = \frac{15}{4} - \frac{2}{1} = \frac{15}{4} - \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = \frac{15 - 8}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

VII. 1 sonidan kasr sonni ayirish:

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{1} - \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{3}{4} = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4}.$$

VIII. 1 sonidan aralash sonni ayirish:

1 -usul.

$$1 - 3\frac{1}{2} = -\left(3\frac{1}{2} - 1\right) = \left[\left(3 - 1\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right] = -\left(2 + \frac{1}{2}\right) = -2\frac{1}{2}.$$

$$2 -\text{usul.} \quad 1 - 3\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{7}{2} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} - \frac{7}{2} = \frac{2 - 7}{2} = \frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}.$$

8-§. Kasrlarni ko‘paytirish.

1. Kasrni butun songa ko‘paytirish uchun shu butun sonni kasrning suratiga ko‘paytirish kifoya:

$$1) \quad \frac{5}{17} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{17} = \frac{15}{17}; \quad 2) \quad \frac{2}{9} \cdot (-4) = \frac{2 \cdot (-4)}{9} = -\frac{8}{9}.$$

Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $\frac{5}{17} \cdot 3$, $\frac{2}{9} \cdot (-4)$ ifodalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$1) \quad \frac{5}{17} \cdot 3 = \frac{5}{17} + \frac{5}{17} + \frac{5}{17} = \frac{5+5+5}{17} = \frac{15}{17};$$

$$2) \frac{2}{9} \cdot (-4) = -\frac{2}{9} \cdot 4 = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = -\left(\frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right) = -\frac{8}{9}.$$

2. Aralash sonni butun songa ko‘paytirish uchun aralash sonni noto‘g‘ri kasrga aylantirib, butun sonni uning suratiga ko‘paytirish kifoya:

$$1. \text{ a)} \quad 2\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \cdot 3 = \frac{5}{2} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

$$\text{b)} \quad 2\frac{1}{2} \cdot 3 = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 6 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \\ = 6 + \left(\frac{1+1+1}{2}\right) = 6 + \frac{3}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

$$2. \text{ a)} \quad 3\frac{3}{4}(-2) = \frac{3 \cdot 4 + 3}{4} \cdot (-2) = \frac{15}{4} \cdot (-2) = \frac{15 \cdot (-2)}{4} = \\ = -\frac{30}{4} = -\frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 2} = -\frac{15}{2} = -7\frac{1}{2}.$$

$$\text{b)} \quad 3\frac{3}{4}(-2) = -3\frac{3}{4} \cdot 2 = -3\frac{3}{4} + \left(-3\frac{3}{4}\right) = -\left(3\frac{3}{4} + 3\frac{3}{4}\right) = \\ = -\left(6 + \frac{3+3}{4}\right) = -\left(6 + \frac{6}{4}\right) = -7\frac{1}{2}.$$

3. Kasrni kasrga ko‘paytirish uchun ularning suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga ko‘paytirish kifoya:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{p \cdot s}{q \cdot r}.$$

Misol:

$$1) \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{10}{63}; \quad 2) \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 2}{11 \cdot 5} = \frac{14}{55};$$

4. Aralash sonlarni o‘zaro ko‘paytirish uchun ularning har birini noto‘g‘ri kasrga aylantirib, suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga o‘zaro ko‘paytirish kifoya:

$$1) \quad 2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{2}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{22}{5} = \frac{7 \cdot 22}{3 \cdot 5} = \frac{154}{15} = 10\frac{4}{15}.$$

$$2) \quad 7\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{23}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{23 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{115}{6} = 19\frac{1}{6}.$$

Kasrlarni ko'paytirish o'rinni almashtirish, gruppash va taqsimot qonunlariga bo'y sunadi.

1. Kasrlarni ko'paytirishda ko'paytuvchilarning o'rinni almashgani bilan ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

$$1) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21};$$

$$2) \quad \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{8}{21}.$$

2. Kasrlarni ko'paytirishda ularni gruppab ko'paytirilsa, ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

$$1) \quad \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \right) \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \right) \cdot \frac{3}{7} = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{7} = \frac{24}{105}.$$

$$2) \quad \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} \right) \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 3} \right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{21} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6 \cdot 4}{21 \cdot 5} = \frac{24}{105}.$$

3. Kasrlarni ko'paytirishda ularga taqsimot qonunini tadbiq qillinsa, ko'paytmaning qiymati o'zgarmaydi:

$$\left(\frac{a+b}{c} \right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{(a+b)p}{cd} = \frac{ap+bp}{cd}.$$

Misol.

$$1) \quad \left(\frac{4+3}{9} \right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{(4+3) \cdot 4}{9 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 4}{9 \cdot 5} = \frac{16+12}{45} = \frac{28}{45},$$

$$2) \quad \left(\frac{7+2}{11} \right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{(7+2) \cdot 2}{11 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{11 \cdot 3} = \frac{14+4}{11 \cdot 3} = \frac{18}{33},$$

9-8. Kasrlarni bo'lish.

9-sinf matematika kursida kasrlarni bo'lish mavzusini o'tiladi. ~~Mizan~~ butun sonlар mavzusidan ma'lumki, ikkita butun sonni o'zaro bo'lish uchun birinchisini ikkinchi sonning teskarisiga ko'paytirish kerak edi. Xuddi shuningdek, ikki kasr sonni ham o'zaro bo'lish uchun birinchi knurmı ikkinchi kasrning teskarisiga ko'paytirish

kerak, ya'ni: $\frac{15}{27} : \frac{2}{3} = \frac{15}{27} \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{54}$. Bu qoidani quyidagi masala orqali o'quvchilarga tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

M a s a l a . $\frac{6}{7}$ bo'lagi (qismi) 30 ga teng bo'lgan sonni toping.

Ye ch i sh. Noma'lum sonni x bilan belgilasak, u holda masala shartini quyidagicha yozish mumkin: $\frac{6}{7} \cdot x = 30$, chunki sonning bo'lagi ko'paytirish amali yordamida topiladi. Bu tenglik bunday yechiladi: $\frac{1}{7}x = 30 : 6 = 5$. Bundan $x = 5 \cdot 7 = 35$ bo'ladi, Demak, izlanayotgan son 35 ekan.

M a s a l a . Futbol maydoni yuzining $\frac{3}{4}$ qismi o'yin o'ynash uchun tayyor holga keltirildi. Bu 960 m^2 ni tashkil qiladi. Futbol maydonning yuzi kancha?

Ye ch i sh. Futbol maydonning yuzini x bilan belgilasak, shartga ko'ra bu maydonning $\frac{3}{4}$ qismi 960 m^2 edi, shuning uchun

$\frac{3}{4}x = 960$ tenglik o'rinali bo'ladi. x ni topish uchun tenglamaning

ikkala qismini $\frac{3}{4}$ ga bo'lish kerak. Demak, $x = 960 : \frac{3}{4} = 960 \cdot \frac{4}{3} = 320 \cdot 4 = 1280 \text{ m}^2$.

Futbol maydonining yuzi 1280 m^2 ekan.

Berilgan kasning qiymati bo'yicha sonning o'zini topishda ham sonning kasrni topishdek, turli hollarni ko'rib o'tish maqsadga muvofiqdir. Sonni kasrga bo'lish ta'rifi butun sonlarni bo'lish ta'rifidek ifodalanadi. Bu qoidani o'quvchilarga alohida ta'kidlab tushuntirish maqsadga muvofiqdir. Shundan keyin kasrlarni bo'lishga doir quyidagi hollarni ko'rib chiqish foydalidir.

1. Kasrni butun senga bo'lish uchun kasrni o'z holicha, butun sonni esa teskari yozib, ularni o'zarो ko'paytirish kifoya:

$$\frac{5}{7} : 4 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 4} = \frac{5}{28}.$$

2. Aralash sonni butun songa bo'lish uchun aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, so'ngra bo'lish kasrni butun songa bo'lishdek bajariladi:

$$2\frac{5}{7} : 4 = \frac{19}{7} : 4 = \frac{19}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{28}.$$

3. Butun sonni aralash songa bo'lish uchun butun sonni o'z holicha yozib aralash sonni noto'g'ri kasrga aylantirib, ularni o'zaro ko'paytirish kerak.

$$4 : 1\frac{3}{5} = 4 : \frac{8}{5} = 4 \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{8} = 2\frac{4}{8} = 2\frac{1}{2}$$

4. Aralash sonni aralash songa bo'lish uchun ularning hap birini noto'g'ri kasrlarga aylantirib, so'ngra bo'lishni ikki kasrni o'zaro bo'lish qoidasiga ko'ra bajariladi:

$$2\frac{3}{5} : 3\frac{2}{7} = \frac{13}{5} : \frac{23}{7} = \frac{13}{5} \cdot \frac{7}{23} = \frac{13 \cdot 7}{5 \cdot 23} = \frac{91}{115}$$

10-§. O'nli kasrlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi.

O'nli kasr tushunchasi XV asrda Samarqandlik olim Ali Qushchi tomonidan kiritilgan. U o'zining 1427 yilda yozgan "Hisobot san'atiga kalit", "Arifmetika kaliti" nomli kitobida o'nli kasr tushunchasidan foydalangan.

T a ' r i f. Maxraji o'n yoki uning darajalaridan iborat bo'lgan kasr o'nli kasr deyiladi.

o'nli kasrlarni bunday belgilash qabul qilingan:

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{1}{100} = 0,01; \quad \frac{1}{1000} = 0,001; \quad \frac{3}{10} = 0,3; \quad \frac{3}{1000} = 0,003; \quad 2,15 = 2\frac{15}{100}, \dots$$

O'nli kasrlarni maxrajsiz yozilganda verguldan o'ngdag'i birinchi xonadagi raqam o'ndan birlarni, ikkinchi xonadagilar esa yuzdan birlarni va hokazolarni bildiradi. Masalan, 6,732 o'nli kasrda

verguldan keyingi sonlarni turgan o'rniga qarab kasr ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin: $\frac{7}{10}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{2}{1000}$;

O'nli kasrlar uchun quyidagi qoidalar o'rinnlidir:

1. Har bir o'nli kasr o'zidan oldingi o'nli kasrga nisbatan o'n marta kattadir. Masalan, $0,001 = \frac{1}{1000}$; $0,01 = \frac{1}{100}$; $0,1 = \frac{1}{10}$;

2. O'nli kasrlarning maxrajlari 10 ning butun ko'rsatkichli darajalaridan, suratlari esa bir xonali sonlardan iborat kasrlarning yig'indisi shaklda ifodalash mumkin.

11-§. O'nli kasrlarni qo'shish va ayirish.

Bu mavzu materialini bayon qilishdan oldin o'qituvchi o'quvchilarga maxrajlari har xil bo'lgan oddiy kasrlarni umumiy maxrajlarga keltirib qo'shish va ayirish haqidagi tushunchani misollar yordamida ko'rsatishi, so'ngra o'nli kasrlarni qo'shish va ayirish haqidagi nazariy va amaliy bilimlarni berishi maqsadga muvofiqdir.

1 - Q o i d a. O'nli kasrlarni qo'shish uchun bir xil xonalari o'zaro butun sonlar kabi qo'shilib, yig'indida kasrlardagi vergulning tagiga to'g'ri keltirib butun qismi ajratiladi.

M i s o l.

25,382

+ 7,200

32,582

2-Qoida. O'nli kasrlarni ayirish uchun kamayuvchining tagiga ayirluvchining verguliga to'g'rilib, o'rin qiymati bir xil bo'lган raqamlar bir-birini ostiga yozib ayriladi, so'ngra ayirmani butun qismi vergul bilan ajratiladi.

M i s o l.

1) 14,273

- 5,040

9,233

2) 27,100

- 3,236

23,864

3) 27,1-3,235=?

O'nli kasrlarni ayirish jarayonida quyidagi holler bo'lishi mumkin: ayirluvchidagi kasr xonalarining soni kamayuvchidagi kasr

xonalardan ko'p, kamayuvchi va ayiriluvchi o'nli kasrlardagi kasr xonalari soni bir xil, butun sondan o'nli kasrnai ayirish, o'nli kasrdan butun sonni ayirish. O'qituvchi bu hollarning har biriga misollar ko'rsatishi kerak.

12-§. O'nli kasrlarni ko'paytirish.

O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirishni oddiy kasrlarni ko'paytirish qoidasiga asoslangan holda tushuntirishi lozim, chunki o'quvchilar o'nli kasrlarni oddiy kasrlarga aylantirish qoidasini biladilar.

M i s o l :

$$3,2 \cdot 0,12 = 3 \frac{2}{10} \cdot \frac{12}{100} = \frac{32}{10} \cdot \frac{12}{100} = \frac{32 \cdot 12}{10 \cdot 100} = \frac{384}{1000} = 0,384$$

Ko'paytma kasrning maxrajida nechta nol bo'lsa, uni maxrajsiz yoziladigan o'nli kasrga aylantirganda shuncha kasr xonasi bo'lishini o'quvchilarga tushuntirish lozim.

$$1) 3,2 \cdot 0,12 = \frac{384}{1000} = 0,384$$

$$2) 2,7 \cdot 1,3 = 2 \frac{7}{10} \cdot 1 \frac{3}{10} = \frac{27}{10} \cdot \frac{13}{10} = \frac{351}{10 \cdot 10} = \frac{351}{100} = 3,51$$

Ko'rib o'tilgan misollar asosida quyidagi qoidalar tushuntiriladi.

1 - Q o i d a. *O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning suratlarini suratlariga va maxrajlarini maxrajlariga ko'paytirib, ko'paytuvchi bilan ko'payuvchida jami nechta kasr xonasi bo'lsa, ko'paytmada shuncha xona ajratiladi. (Bu gap oddiy kasr shakdda yozilgan o'nli kasr haqida aytilgan.)*

Masalan,

$$3,4 \cdot 0,25 = 3 \frac{4}{10} \cdot \frac{25}{100} = \frac{34}{10} \cdot \frac{25}{100} = 0,85$$

2 - Q o i d a. *O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirish uchun ularning verguliga e'tibor bermay, butun sonlar kabi ko'paytirib, ko'payuvchi va ko'paytuvchida hammasi nechta kasr xonasi bo'lsa,*

ko'paytmaning o'ng tomonidan boshlab sanab shuncha raqamni vergul bilan ajratib qo'yiladi.

$$\begin{array}{r} 1) \quad 3,021 \\ \times 2,51 \\ \hline 3021 \\ + 15105 \\ \hline 6042 \\ \hline 7,58271 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2) \quad 7,124 \\ \times 3,213 \\ \hline 21372 \\ + 7124 \\ \hline 14248 \\ \hline 21372 \\ \hline \end{array}$$

22,889412

O'nli kasrlarni o'zaro ko'paytirishda ko'paytirishning ko'payuvchidagi yig'indisiga nisbatan tarqatish qonunini qo'llanishga asoslangan mulohazalarni ham olib borish foydali, buni quyidagicha sxema orqali ham ko'rsatish mumkin. Masalan, 2,37 ni 2 ta birlik, 3 ta o'ndan bir, 7 ta yuzdan birning yig'indisi shaklda yozish mumkin. Yig'indini biror songa ko'paytirish uchun har bir qo'shiluvchini shu songa ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish, ya'ni 2 birlikni 9 ga, 3 ta o'ndan birni 9 ga, 7 ta yuzdan birni 9 ga ko'paytirib, ko'paytmalarni o'zaro qo'shish kifoya.

$$2,37 \cdot 9 = 9 \cdot \left(1+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100} \right) = 9 + \\ + 9 \cdot \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} = \frac{2133}{100} = 21,33$$

O'nli kasrlarni 10 ning butun ko'rsatkichli darajalariga ko'paytirishni alohida ko'rib o'tish lozim, ya'ni o'nli kasrni 10 ga, 100 ga, 1000 ga va hokazolarga ko'paytirish uchun bu kasarda vergulni 1, 2, 3, ... raqam o'ngga surish kerak. O'nli kasrlarni 0,1, 0,01, 0,001 ga va hokazolarga ko'paytirish uchun bu kasrlarda vergulni 1, 2, 3, ... raqam chapga surish kifoya.

Masalan: 1) $3,7 \cdot 100 = 3,70 \cdot 100 = 370$. Bu misolni quyidagicha tushuntirish mumkin: 3,7 ni 100 ga ko'paytirish uchun, qoidaga ko'ra, 3,7 sonidagi vergulni o'ngga qarab ikki xona surish kerak edi, ammo bizda verguldan keyin bitta son bor, xolos. Shuning uchun 7 sonidan keyin bitta nol qo'yamiz. (Bu yerda o'qituvchi o'quvchilarga

3,7 soni 3,70 soniga teng ekanligini tushuntirish va kasr holga keltirib ko'rsatish maqsadga muvofiqdir.)

1) $45,76 \cdot 0,1 = 4,576$. Bu misolni quyidagicha tushuntirish mumkin. Buning uchun 4576 sonini 1 soniga ko'paytirib hosil bo'lgan ko'paytmada o'ngdan chapga qarab uchta raqamni - ikkala ko'paytuvchida ular nechta bo'lsa, shuncha raqamni vergul bilan ajratamiz. Shunday mulohaza yuritib, 45,76 ni 0,01 ga ko'paytirishda 45,76 sonidan vergulni ikki raqam chapga surish kerakligini ko'rsatamiz.

Masalan: $45,76 \cdot 0,01 = 0,4576$

13-§. O'nli kasrlarni bo'lish

O'nli kasrlarni bo'lish mavzusida quyidagi uch hol ko'rib o'tiladi: 1) o'nli kasrni butun songa bo'lish. O'nli kasrni butun songa bo'lish butun sonlarni bo'lishiga o'xshash bajariladi, bunda qoldiqlar borgan sari kichikroq ulushlarga maydalanim boradi. Masalan,

$$0,6 : 4 = 0,60 : 4 = 0,15.$$

1 - Q o i d a. O'nli kasrlarni butun songa bo'lish uchun, butun qism bo'luvchiga etadigan bo'lsa, butunini kasr xona almashguncha bo'lib, so'ngra bo'linmada vergul qo'yib bo'lishni davom ettirish kifoya.

M i s o l :

1) $\begin{array}{r} 25,232 \\ \hline 24 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 6,308 \\ \hline 12 \\ \hline 12 \\ \hline 032 \\ \hline 32 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25232 \mid 4000 \\ \hline 2400 \mid 6,308 \\ \hline -12320 \\ \hline 12000 \\ \hline 3200 \\ \hline -3200 \\ \hline 0 \end{array}$
---	---	--

Yuqoridagi misol va qoidalarni tushuntirish jarayonida o'qituvchi o'quvchilarga bo'lish amalining ta'rifini va uni bajarish qoldalarini takrorlashi lozim.

2) **Butun sonni o'nli kasrga bo'lish.** Bu holni ham o'qituvchi o'quvchilarga misol yordamida tushuntirishi kerak. Masalan: $51 : 0,17 = ?$

Bu misolni yechishni oddiy kasrlarni bo'lish qoidasi asosida bajarib ko'rsatadi.

Misol:

$$51 : 0,17 = 51 : \frac{17}{100} = (51 \cdot 100) : 17 = 5100 : 17 = 300$$

Bu mulohazalarga ko'ra quyidagi qoidani ifodalash mumkin.

Q o i d a. *Butun sonni o'nli kasrga bo'lish uchun bo'lувchidagi o'nli kasrni butun songa aylantirish kerak. Buning uchun bo'lувching vergul oxiriga suriladi va necha xona surilgan bo'lsa, bo'lувching o'ng tomoniga shuncha nol qo'yiladi hamda butun sonni butun songa bo'lish kabi bajariladi.*

Misol:

$$351 : 2,7 = 3510 : 27 = 130$$

$$25 : 6,25 = 2500 : 625 = 4$$

3) **O'nli kasrni o'nli kasrga bo'lish.** Bu holda ham o'qituvchi o'quvchilarga kasrni kasrga bo'lishning umumiy qoidasini takrorlab, so'ngra o'nli kasrlarni oddiy kasrlar holiga keltirib, kasrlarni o'zarbo'lish usulidek ko'rsatishi maqsadga muvofiqdir.

Masalan:

$$8,51 : 3,7 = \frac{851}{100} : \frac{37}{10} = \frac{851 \cdot 10}{100 \cdot 37} = \frac{851}{10} : 37 = 85,1 : 37 = 2,3$$

Bu misolni yana bunday yechib ko'rsatish ham mumkin:

$$8,51 : 3,7 = 8,51 : \frac{37}{10} = (8,51 \cdot 10) : 37 = 85,1 : 37 = 2,3$$

Yuqoridagi misollardan ko'rindaniki, o'nli kasrni o'nli kasrga bo'lish uchun bo'lувchida qancha kasr xonasi bo'lsa, bo'linuvchi va bo'lувchidagi vergullarni shuncha xona o'ng tomonga so'ramiz, natijada bo'lувchi butun songa aylanadi.

Buning natijasida bo'linuvchi va bo'lувchi bir xil marta ortgani uchun bo'linma o'zgarmaydi.

14-§. Oddiy kasrni cheksiz davriy kasrga aylantirish

2,73 O'nli kasr berilgan bo'lsin. Agar kasrning o'ng tomonidagi qismiga istalgancha nollar yozib qo'yilsa, uning qiymati o'zgarmaydi. $2,73 = 2,730 = 2,7300 = \dots = 2,7300\dots 0$. Shuningdek 2,73 kasrni cheksiz ko'p nollari bo'lgan o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, $2,73 = 2,73000\dots$. Bu yerda verguldan keyin cheksiz ko'p o'nli xonalar mavjud. Bunday o'nli kasr chek'siz o'nli kasr deyiladi.

Istalgan oddiy kasrni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin. Masalan, $3/14$ sonini olib, uning suratini maxrajiga bo'lib ketma-ket o'nli xonalarni hosil qilamiz. Bunda istalgan natural sonni barcha o'nli xonalari nolga teng bo'lgan cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkinligini qayd qilib o'tamiz.

Masalan, $3 = 3,00000\dots$.

$$\begin{array}{r} 3,00000000\dots \\ -\underline{28} \\ \hline 20 \\ -\underline{14} \\ \hline 60 \\ -\underline{56} \\ \hline 40 \\ -\underline{28} \\ \hline 0,214285714\dots \end{array}$$

Shunday qilib, $3/14 = 0,214285714\dots$

Bo'lish davomida chiqqan barcha qoldiqlarni ketma-ket yozib chiqamiz: 2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6 ... Bu qoldiqlarni barchasi bo'lувchidan, ya'ni 14 sonidan kichik. Bu bo'lishning qaysidir qismida ilgari uchragan qoldiq yana albatta uchrashi kerakligini bildiradi. Bizda ettinchi qadamda 2 qoldiq hosil bo'lib, u birinchi qadamda paydo bo'lgan edi. Bundan tashqari ilgari uchragan qoldiq paydo bo'lgan zaxotiyoy undan keyingi qoldiqlar ular avval qanday tartibda bo'lsa, shunday tartibda takrorlanadilar. Bizning misolimizda 2 qoldiqdan so'ng 6 qoldiq, undan keyin 4, undan keyin 12 keladi va hokmzo ya'ni biz qoldiqlarning quyidagi ketma-ketligini hosil qilamiz: 2, 6, 4, 12, 8, 10, 2, 6, 4, 12, 8, 10, ... Davriy takrorlanuvchi

qoldiqlar gruppasi mos ravishda sonning o‘nli yozuvidagi davriy takrorlanuvchi raqamlar gruppasiga olib keladi, ya’ni $3/14=0,2142857142857142857\dots$. Sonning o‘nli yozuvida verguldan keyingi ketma-ket takrorlanib keluvchi bunday raqamlar gruppasi davr deb ataladi, o‘z yozuvida ana shunday davrga ega bo‘lgan chekli o‘nli kasr davriy kasr deyiladi. Qisqalik uchun davrni bir marta qavs ichiga olib yozish qabul qilingan:

$0,214285714285714285714\dots=0,2(142857)$. Agar davr verguldan keyin boshlansa, bunday kasr *sof davriy kasr* deyiladi, agar vergul va davr orasida boshqa o‘nli xonalar bo‘lsa, kasr aralash davriy kasr deyiladi. Masalan, $2,(23)=2,2323232323\dots$ - sof davriy kasr, $0,2(142857)$ - aralash davriy kasr, $2,73=2,73000000\dots=2,73(0)$ aralash davriy kasrdir.

15-§. Cheksiz davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantirish

Cheksiz o‘nli kasrni 10, 100, 1000 va hokazo ko‘paytirish uchun chekli o‘nli kasr holatidagi kabi vergulni bir, ikki, uch va hokazo xona o‘ngga surish kifoya. Masalan, $0,1(23)\cdot 100=0,123232323\dots\cdot 100=12,3232323\dots=12,(32)$. Davriy o‘nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni quyidagi misollar orqali ko‘rib chiqaylik.

1. Sonni oddiy kasrga aylantiring: a) $0,(13)$; b) $2,(273)$; v) $0,2(54)$; g) $3,254(9)$.

Yechish: a) $x=0,13=0,131313\dots$ bo‘lsin. Sof davriy kasr x ni shunday songa ko‘paytiramizki, natijada vergul kasr davri qadar o‘ngga suriladi. Davrda ikkita raqam bo‘lgani uchun vergulni o‘ng tomonga ikki xona surish kerak, buning uchun esa x sonni 100 ga ko‘paytirish etarli, u holda $100\cdot x=0,131313\dots\cdot 100=13,13131313\dots=13,(13)$ $100x-x=13,(13)-0,(13)$. Demak, $99x=13$, bu yerdan

$$x = \frac{13}{99}.$$

B) $x=2,(273)$ bo‘lsin. Bu sof davriy kasrning davrida uchta raqam bor. x ni 1000 ga ko‘paytirib, $1000x=2273,(273)$ ni hosil qilamiz. Xuddi yuqoridagiga o‘xshash topamiz:

$1000x - x = 2273, (273) - 2, (273), \quad 999x = 2271$, bundan

$$x = \frac{2271 - 757}{999} = \frac{1514}{999} = 2 \frac{91}{333}$$

V) $x = 0,2(54)$ bo'lsin. Bu aralash davriy kasrda vergulni o'ng tomonga shunday suramizki, natijada sof davriy kasr hosil bo'lsin. Buning uchun x ni 10 ga ko'paytirib qo'yish kifoya. $10x = 2,(54)$ ni hosil qilamiz.

$y = 2,(54)$ bo'lsin va yuqoridagilarga o'xshash bu sof davriy kasrni oddiy kasrga aylantiramiz. $y = 2,(54)$ bundan $100y = 254(54)$,

$$100y - y = 254(54) - 2,54, \quad 99y = 252, \quad y = \frac{252}{99} = \frac{28}{11} \text{ demak, } 10x = \frac{28}{11},$$

$$\text{bundan } x = \frac{28}{11 \cdot 10} = \frac{11}{55}$$

G) $x = 3,254(9)$ deb $1000x = 3254(9)$ ni hosil qilamiz. $y = 1000x$ belgilashni kiritamiz, u holda $y = 3254,(9)$, bu yerdan $10y - y = 32549(9) - 3254(9); y = 3255$, $1000x = 3255$, $x = \frac{3255}{1000} = 3 \frac{51}{200}$

$$\text{Endi quyidagiga e'tibor beramiz. } \frac{3255}{1000} = 3,255 = 3,255(0)$$

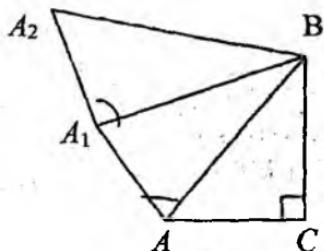
chekli o'nli kasr yoki davrida nol bo'lgan cheksiz kasrni hosil qilamiz.

Demak, $3,254(9) = 3,255(0)$. Bu hol davrida to'qqiz bo'lgan istalgan kasr ko'rinishida yozish mumkin. Buning uchun davr oldidagi o'nli raqamni bir birlikka ortirish kifoya. Masalan, $0,45(9) = 0,46(0); 14,(9) = 15,(0)$.

16-§. Irratsional son tushunchasini kiritish metodikasi

O'quvchilar VII sinfda birinchi marta irratsional son tushunchasi bilan tanishadilar. O'qituvchi bu mavzuni tushuntirishdan oldin o'quvchilarga kvadrat ildiz va arifmetik ildiz tushunchalarini tushuntirishi, so'ngra irratsional son tushunchasini quyidagi manbalani yechish orqali kiritishi lozim.

Masala: Katetlari bir birlikka teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi topilsin. (39 - chizma).



Berilgan: $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$, $CB=AC=1$

Topish kerak: $AB=?$

Yechish. Pifagor teoremasiga ko'ra:
 $AB^2=AC^2+CB^2$, $AB^2=1^2+1^2=2$

39-chizma.

Masalaning yechimini quyidagicha o'qish mumkin. Shunday AB soni topilsinki, uni kvadratga ko'tarilganda 2 soni hosil bo'lzin. Bunday AB son ratsional sonlar to'plamida mavjud emas. A nuqtadan AB ga perpendikulyar $AA_1=1$ katetni o'tkazib, uning A_1 nuqtasini B nuqta bilan birlashtirib, A_1B ning qiymatini hisoblaymiz: $A_1B^2=AB^2+1^2$; $A_1B^2=2+1=3$; $A_1B^2=3$ soni ham ratsional sonlar maydonida mavjud emas. Yuqoridagilardan ko'rindaniki, ratsional sonlar to'plamida mavjud bo'limgan yana qandaydir sonlar to'plami ham mavjud ekan, ya'ni: $AB^2=2$; $A_1B^2=3$, ...

"Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra $AB^2=2$, $A_1B^2=3$, ... ko'rinishdagi sonlarni ratsional bo'limgan yoki irratsional sonlar deb ataldi va ularni $AB=\sqrt{2}$, $A_1B=\sqrt{3}$, ... kabi belgilash qabul qilingan.

Ta'rif: $\frac{p}{q}$ kasr ko'rinishida tasvirlab bo'lmaydigan sonlar irratsional sonlar deyiladi. $(p, q) \in N$

Bu yerda o'quvchilarga yana shu narsani tushuntirish kerakki, har qanday ratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishda ifodalash mumkin, irratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'lmaydi, bunga quyidagi misollarni ko'rsatish mumkin.

1. $\sqrt{5} = 2,360679\dots$ bu yerdagi $\sqrt{5}$ irratsional son cheksiz davriy bo'limgan o'nli kasr ko'rinishida ifodalanayapti.

2. $\sqrt{2} = 1,41$ - bu yerdagi $\sqrt{2}$ irratsional son ta'rifini yana quyidagicha berish mumkin.

Ta'rif. Cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'lmaydigan sonlarni irratsional sonlar deb ataladi.

Teorema: Kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emas.

Bu teoremaning isbotini teskarisidan faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz, chunki $1^2 < 2 < 2^2$ butun sonlar to'plamida u kvadrati 2 ga teng bo'lgan son mavjud emas.

Isboti. Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ ko'rinishidagi qisqarmas kasr

mavjud bo'lsin, r va q - natural sonlar. Faraz qilaylik, kvadrati 2 ga

teng bo'lgan ratsional son mavjud bo'lsin, ya'ni: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, bu

yerda $p^2 = 2q^2$, bu yerda r ning ham ikkiga bo'linishi kelib chiqadi. Agar $r = 2n$ bo'lsa, $4n = 2q^2$ $2n = q^2$ bo'ladi, bundan q ning ham juft son ekanligi kelib chiqadi. Farazimizga ko'ra $\frac{p}{q}$ kasrni qisqarmas

kasr degan edik, isbotning natijasida esa $\frac{p}{q}$ kasr qisqaruvchi kasr

bo'lib chiqyapti, bunday qarama - qarshilik farazimizning noto'g'ri ekanligini tasdiqlab, teorema to'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Yuqoridagi ta'rif va isbot qilingan teoremalardan ko'rinaldi ki kvadrati 2, 3, 5, 7, 10, 11 larga teng bo'ladigan ratsional son mavjud emas ekan, biz ta'rifga ko'ra bularni irratsional sonlar deb atadik. Bunday irratsional sonlarni $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$ kabi belgilash qabul qilingan. Ularga qarama - qarshi bo'lgan sonlar ham irratsional sonlar bo'lib, ular $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \dots$ kabi belgilanadi. O'qituvchi bu yerdagi o'quvchilarga shuni eslatishi kerakki, irratsional sonlarga kvadrati berilgan musbat songa teng bo'lgan sonni topish masalasigina olib kelmaydi. Masalan, aylana uzunligining diametriga nishbatini ifodalovchi π sonini oddiy kasr ko'rinishida tasvirish mumkin emas, u ham irratsional sondir.

17-§. Haqiqiy sonlar.

Ratsional va irratsional sonlar birgalikda haqiqiy sonlar to‘plamini hosil qiladi. Har bir haqiqiy songa koordinata to‘g‘ri chiziqning yagona nuqtasi mos keladi. Haqiqiy sonlar to‘plami son to‘g‘ri chizig‘i deb ham ataladi. Son to‘g‘ri chizig‘ining geometrik modeli koordinata to‘g‘ri chizig‘idan iboratdir. O‘qituvchi haqiqiy sonlarning geometrik tasvirini ko‘rsatganidan keyin savol - javob metodi orqali haqiqiy sonlarni taqqoslashni va ularning natijasi sifatida hosil qilinadigan sonli tengsizlik hamda ularning xossalarini bayon qilishi maqsadga muvofiqdir.

Haqiqiy sonlarni taqqoslash masalasi quyidagi ikkita ta’rif asosida hal qilinadi.

Ta’rif. *a sonidan b sonini ayirganda ayirma musbat bo‘lsa, u holda a soni b sonidan katta deyiladi va u quyidagicha yoziladi. $a-b > 0$ bundan $a > b$ ekanini ko‘rinadi.*

Ta’rif. *a sonidan b sonini ayirganda ayirma manfiy bo‘lsa, u holda a soni b sonidan kichik deyiladi va u bunday yoziladi: $a-b < 0$, bundan $a < b$ ekanini ko‘rinadi.*

Bu yerdagi $a > b$ va $a < b$ ifodalar sonli tengsizliklar deyiladi.

Sonli tengsizliklar xossalari:

1. agar $a > b$ bo‘lsa, $b < a$ bo‘ladi.
2. agar $a > b$ va $b < c$ bo‘lsa, u holda $a < c$ bo‘ladi.
3. agar $a > b$ bo‘lsa, $a+c > b+c$ bo‘ladi.
4. agar $a > b$ va c musbat son bo‘lsa, u holda $ac > bc$.

Isboti: $ac-bc$ ayirmani hosil qilamiz. $ac-bc=c(a-b)$ shartga ko‘ra c musbat son va $a > b$ bo‘lgani uchun $a-b$ musbat son. Ikkita musbat sonning ko‘paytmasi musbat sondir, demak $c(a-b) > 0$. shunday qilib, $ac-bc > 0$. bundan: $ac > bc$.

5. Agar $a > b$ va c manfiy son bo‘lsa, u holda $ac < bc$ bo‘ladi. Agar tengsizlikning har ikkila tomoni bir xil manfiy songa ko‘paytirilsa, tengsizlikning ishorasi qarama - qarshiga o‘zgaradi.

6. agar $a > b$ va $c > d$ bo‘lsa, u holda $a+c > b+d$ bo‘ladi.
7. Agar $a > b > 0$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bo‘ladi.

8. Agar $a > b > 0$ bo'lsa, istalgan n natural son uchun $a^n > b^n$ tengsizlik o'rini bo'ladi.

Sonli oraliqlar va ularning tasviri.

Oraliqlar turi	Belgilanish	Tengsizliklar yordamida yozilishi.
Interval	$(a; b)$	$a < x < b$
Kesma	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
Yarim interval	$(a; b]$	$a < x \leq b$
Yarim interval	$[a; b)$	$a \leq x < b$
Nur	$[a; +\infty)$	$x \geq a$
Nur	$(-\infty; b]$	$x \leq b$
Ochiq nur	$(a; +\infty)$	$x > a$
Ochiq nur	$(-\infty; b)$	$x < b$

Haqiqiy sonning moduli va uning xossalari. Haqiqiy son a ning moduli deb, agar $a > 0$ bo'lsa, bu sonning o'ziga, agar $a < 0$ bo'lsa, uning qarama-qarshi songa aytildi. a sonning moduli $|a|$ kabi belgilanadi. Shunday qilib:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{agar } a > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -a & \text{agar } a < 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

masalan, $|x-3|=x-3$, chunki agar $\begin{cases} x-3 > 0, & x > 3 \\ x-3 < 0, & x < 3 \end{cases}$

Geometrik nuqtai nazardan $|a|$ ifoda koordinata to'g'ri chizig'ida a nuqtadan 0 nuqtagacha bo'lgan masofani bildiradi.

Modullarning xossalari:

$$1. |a| \geq 0 \quad 2. |a| = |-a| \quad 3. |ab| = |a| \cdot |b| \quad 4. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; b \neq 0$$

$$5. |a|^2 = a^2$$

18-§. Haqiqiy sonlar ustida amallar bajarish qoidalari.

Bir xil ishorali ikkita sonning yig'indisi o'sha ishorali yig'indi songa tengdir. Bunday yig'indining modulini topish uchun qo'shiluvchilar yig'indisini topish kerak.

Masalan, $(+12) + (+8) = +20$, $(-12) + (-8) = -20$.

Turli ishorali ikkita sonning yig'indisi katta bo'lgan qo'shiluvchining ishorasi bilan bir xil ishorali sondir, bu yig'indining qiymatini topish uchun katta sondan kichik sonni ayirish va ayirma oldiga katta son ishorasini qo'yish kerak.

Masalan:

$$(12) + (-8) = +(12 - 8) = 4, \quad (-12) + (+8) = -(12 - 8) = -4.$$

Bir sondan ikkinchisini ayirish uchun kamayuvchiga ayiriluvchiga qarama-qarshi bo'lgan sonni qo'shish kerak.

Masalan, $12 - (-8) = 12 + 8 = 20$, $12 - (+8) = 12 - 8 = 4$.

Bir xil ishorali ikki sonning ko'paytmasi (bo'linmasi) musbat, har xil ishorali ikki sonning ko'paytmasi manfiy, bo'linmasi ham manfiy bo'lgan sondir. Ko'paytmaning (bo'linmaning) topish uchun berilgan sonlarning o'zaro ko'paytirish (bo'lish) kerak.

Masalan, $(-12) \cdot (-8) = +12 \cdot 8 = 96$, $(-24) : (+3) = -24 : 3 = -8$.

Arifmetik amallarni xossalari.

$$1. a+b=b+a$$

$$6. (ab)c=a(bc)$$

$$2. (a+b)+c=a+(b+c)$$

$$7. a(b+c)=ab+ac$$

$$3. a+0=a$$

$$8. a \cdot 1=a$$

$$4. a+(-a)=0$$

$$9. a \cdot \frac{1}{a}=1, \quad a \neq 0$$

$$5. ab=ba$$

19-§. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasini kiritish.

VII sinf algebra kursida «arifmetik kvadrat ildiz» tushunchasi kiritiladi. Agar bizga $x^2=16$ tenglama berilgan bo'lsa, bu tenglamani o'quvchilar ko'paytuvchilarga ajratish orqali yechishni biladilar, ya'ni:

$$\begin{aligned} (x^2=16) &\Rightarrow [(x^2-16)=0] \Rightarrow [(x^2-4^2)=0] \Rightarrow \\ &[(x-4)(x+4)]=0 \Rightarrow (x_1=4) \wedge (x_2=-4) \end{aligned}$$

Demak, $x^2=16$ tenglamaning yechimlari $x_1=4$ va $x_2=-4$ sonlaridan iborat ekan. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra quyidagi qoidani chiqarish mumkin: $x^2=16$ tenglamining ildizlari, ya'ni kvadrati 16 ga teng bo'lgan sonlar 16 sonining *kvadrat ildizlari* deyiladi. $(-4)^2=16$ bundan $4^2=16$ bo'lgani uchun -4 va 4 sonlari $x^2=16$ tenglamaning kvadrat ildizlaridir.

Ta'rif. a sonining kvadrat ildizi deb kvadrati a songa teng bo'lgan songa aytildi.

Kvadrat ildiz tushunchasidan tashqari arifmetik kvadrat ildiz tushunchasi ham bo'lib, uni quyidagicha tushuntirish mumkin: $x_1=4$ va $x_2=-4$ lar $x^2=16$ tenglamada ikkita ildiz bo'lib, ulardan $x_1=4$ yechimi musbatdir. Bunday musbat yoki nomanfiy yechim ana shu tenglamaning *arifmetik kvadrat ildizi* deyiladi. Bu tushuncha umumiy holda esa quyidagicha ta'riflanadi.

Ta'rif. a sonining arifmetik kvadrat ildizi deb kvadrati a ga teng bo'lgan nomanfiy songa aytildi va u \sqrt{a} kabi belgilanadi.

20-§ Arifmetik to'rt amalga doir misollar yechish metodikasi.

$$1\text{-misol. } \frac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0,8 \cdot 0,25} = 29\frac{7}{12}$$

1)

$$172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12} = (172 - 170 + 3) + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right) = 5 + \frac{10 - 4 + 5}{12} = 5 + \frac{11}{12} = 5\frac{11}{12}$$

$$2) 0,8 \cdot 0,25 = \frac{8}{10} \cdot \frac{25}{100} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$3) 5\frac{11}{12} : \frac{1}{5} = \frac{71}{12} \cdot 5 = \frac{355}{12} = 29\frac{7}{12}$$

$$2\text{-misol. } \frac{\left[\left(40\frac{7}{30} - 38\frac{5}{12} \right) : 10,9 + \left(\frac{7}{8} - \frac{7}{30} \right) \cdot \frac{9}{11} \right] \cdot 4,2}{0,008} = 700$$

Yechish:

$$1) 40\frac{7}{30} - 38\frac{5}{12} = (40-38) + \left(\frac{7}{30} - \frac{5}{12}\right) = 2 + \frac{14-25}{60} = 1 + \frac{74-25}{60} = 1\frac{49}{60}$$

$$2) 1\frac{49}{60} : 10,9 = \frac{109}{60} : \frac{109}{10} = \frac{109}{60} \cdot \frac{10}{109} = \frac{1}{6};$$

$$3) \frac{7}{8} - \frac{7}{30} = \frac{105-28}{120} = \frac{77}{120}$$

$$4) \frac{77}{120} \cdot 1\frac{9}{11} = \frac{77}{120} \cdot \frac{20}{11} = \frac{7}{6}$$

$$5) \frac{1}{6} + \frac{7}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3};$$

$$6) \frac{4}{3} \cdot 4,2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{21}{5} = \frac{28}{5};$$

$$7) \frac{28}{5} : 0,008 = \frac{28}{5} \cdot 125 = 28 \cdot 25 = 700;$$

$$3-\text{misol.} 1\frac{7}{20} : 2,7 + 2,7 : 1,35 + \left(0,4 : 2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(4,2 - 1\frac{3}{40}\right) = 3$$

yechish.

$$1) 1\frac{7}{20} : 2,7 = \frac{27}{20} : 2\frac{7}{10} = \frac{27}{20} : \frac{27}{10} = \frac{27}{20} \cdot \frac{10}{27} = \frac{1}{2};$$

$$2) 2,7 : 1,35 = 2\frac{7}{10} : 1\frac{35}{100} = \frac{27}{10} : 1\frac{7}{20} = \frac{27}{10} : \frac{27}{20} = \frac{27}{10} \cdot \frac{20}{27} = 2$$

$$3) \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$$

$$4) 0,4 : 2\frac{1}{2} = \frac{2}{5} : \frac{5}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$5) 4,2 - 1\frac{3}{40} = 4\frac{1}{5} - 1\frac{3}{40} = (4-1) + \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{40}\right) = 3 + \frac{8-3}{40} = 3 + \frac{5}{40} = 3 + \frac{1}{8} = 3\frac{1}{8}$$

$$6) \frac{4}{25} \cdot 3\frac{1}{8} = \frac{4}{25} \cdot \frac{25}{8} = \frac{1}{2}$$

$$7) 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$4\text{-misol. } 1,7: \frac{\left(4,5 \cdot 1\frac{2}{3} + 3,75\right) \cdot \frac{7}{135}}{5:9} - \left(0,5 + \frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right) = 1\frac{17}{84}$$

yechish

$$1) 4,5 \cdot 1\frac{2}{3} = 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2};$$

$$2) 7\frac{1}{2} + 3\frac{75}{100} = 7\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} = (7+3) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = 10 + \frac{2+3}{4} = 10 + \frac{5}{4} = 11\frac{1}{4};$$

$$3) 11\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{135} = \frac{45}{4} \cdot \frac{7}{135} = \frac{7}{12};$$

$$4) \frac{7}{12} : \frac{5}{9} = \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{5} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20};$$

$$5) 1,7 : \frac{21}{20} = 1\frac{7}{10} : \frac{21}{20} = \frac{17}{10} \cdot \frac{20}{21} = \frac{34}{21};$$

$$6) 0,5 + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{6+4-5}{12} = \frac{5}{12};$$

$$7) \frac{34}{21} - \frac{5}{12} = \frac{136-35}{84} = \frac{101}{84} = 1\frac{17}{84};$$

$$5\text{-misol. } \frac{\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1\frac{1}{8}\right) : \frac{7}{2}}{\left(\frac{17}{80} - 0,0325\right) : 4} \cdot (6,79 : 0,7 + 0,3) = 250$$

$$1) 1,75 : \frac{2}{3} = 1\frac{75}{100} : \frac{2}{3} = 1\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{8};$$

$$2) 1,75 \cdot 1\frac{1}{8} = 1\frac{75}{100} \cdot 1\frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{8} = \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{63}{32};$$

$$3) \frac{21}{8} - \frac{63}{32} = \frac{84-63}{32} = \frac{21}{32};$$

$$4) \frac{21}{32} : \frac{7}{12} = \frac{21}{32} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3 \cdot 3}{8} = \frac{9}{8};$$

$$5) \frac{17}{80} - 0,0325 = \frac{17}{80} - \frac{325}{10000} = \frac{17}{80} - \frac{13}{400} = \frac{5 \cdot 17 - 13}{80} = \frac{85 - 13}{10000} = \frac{72}{400} = \frac{9}{50};$$

$$6) \frac{9}{50} : 4 = \frac{9}{50} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{200};$$

$$7) \frac{9}{8} : \frac{9}{200} = \frac{9}{8} \cdot \frac{200}{9} = 25;$$

$$8) 6,79 : 0,7 = 6 \frac{79}{100} : \frac{7}{10} = \frac{679}{100} \cdot \frac{10}{7} = \frac{97}{10};$$

$$9) \frac{97}{10} + 0,3 = \frac{97}{10} + \frac{3}{10} = \frac{100}{10} = 10;$$

$$10) 25 \cdot 10 = 250.$$

VI-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Natural sonlar to‘plamini tushuntirib bering.
2. Butun sonlar to‘plamiga misollar keltiring.
3. Ratsional sonlar to‘plamini ta’riflang.
4. Haqiqiy sonlar to‘plamini tushuntirib bering.
5. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz?
6. Qo‘sish amalini tushuntirib bering.
7. Ayirish amalini ta’riflang.
8. Ko‘paytirish amalini ta’riflang.
9. Bo‘lish amalini ta’riflang.
10. Kasr son deganda qanday sonni tushunasiz?
11. Kasr sonlar ustida to‘rt amal bajarish metodikasini aytib bering.
12. Kasrlarni taqqoslash qanday amalga oshiriladi?
13. Qanday kasr o‘nli kasr deyiladi?
14. O‘nli kasrlarni qo‘sish va ayirish qanday bajariladi?
15. O‘nli kasrlarni ko‘paytirish va bo‘lish qanday bajariladi?
16. Oddiy kasr qanday qilib cheksiz davriy o‘nli kasrga aylantiriladi?
17. Cheksiz davriy o‘nli kasr qanday qilib oddiy kasrga aylantiriladi?
18. Irratsional son tushunchasini tushuntirib bering.
19. Sonli tengsizlik xossalarni aytib bering.

20. Sonli oraliqlar deganda nimani tushunasiz?
 21. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasini tushuntirib bering.
 22. Kvadrat ildiz tushunchasi deganda qanday son tushuniladi?

VI-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR

Natural son, butun son, ratsional son, irratsional son, haqiqiy son, sonning moduli, to'rt amal tushunchasi, kasr son, kasrlarni taqqoslash, kasrlarni qo'shish, kasrlarni ayirish, kasrlarni ko'paytirish, kasrlarni bo'lish, o'nli kasr, cheksiz davriy o'nli kasr, kvadrat ildiz, arifmetik kvadrat ildiz, sonli oraliqlar, sonli tengsizlik.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR

1. $\frac{1,4 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}{\left(3\frac{1}{6} \cdot 6 - 5\frac{1}{2} \cdot 2\frac{5}{11} \right) : 3\frac{2}{3}}$. j. 1,6
2. $\frac{\left(2\frac{1}{4} - 1\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \right) \left(1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} \right)}{2\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{8} + \frac{7}{8} \right)}$. j. $\frac{3}{14}$
3. $\frac{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}}{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}$. j. 1
4. $\frac{28\frac{4}{5} : 14\frac{2}{5} + 6\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}}$. j. $9\frac{1}{3}$

5. $\frac{1\frac{9}{16} \cdot 3\frac{1}{5} - 9 : 2\frac{2}{5}}{1\frac{1}{3} \cdot \left(17\frac{7}{12} - 6\frac{1}{3} \right) : \frac{3}{4}}$ j. $\frac{1}{16}$
 6. $\left(\frac{0,012}{5} + \frac{0,04104}{5,4} \right) \cdot 4560 - 42\frac{1}{3}$ j. $3\frac{4}{15}$
 7. $\frac{\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18} \right) : 2\frac{2}{3}}{0,04}$ j. $18\frac{1}{3}$
 8. $\frac{\left(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12} \right) : 18\frac{1}{6}}{0,002}$ j. 50
 9. $\frac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18} \right) \cdot 2\frac{1}{4} + 0,373}{0,2}$ j. 23,865
 10. $\frac{\left(12\frac{1}{6} - 6\frac{1}{27} - 5\frac{1}{4} \right) \cdot 13,5 + 0,111}{0,02}$ j. 599,3
 11. $\frac{\left(68\frac{7}{30} - 66\frac{5}{18} \right) : 6\frac{1}{9} + \left(\frac{7}{40} + \frac{3}{32} \right) \cdot 4,5}{0,04}$ j. $38\frac{15}{64}$
 12. $\frac{(2,1 - 1,965) : (1,2 \cdot 0,045)}{0,00325 : 0,013} - \frac{1 : 0,25}{1,6 \cdot 0,625}$ j. 6
 13. $\left(17\frac{1}{2} - 8,25 \cdot \frac{10}{11} \right) \cdot \left(11\frac{2}{3} : \frac{2}{9} + 3,5 \right)$ j. 560
 14. $\left(\frac{1}{2} - 0,375 \right) : \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot (0,358 - 0,108)$ j. $\frac{15}{16}$
 15. $(10,5 \cdot 2,04 - 0,1) \cdot (6,25 \cdot 0,2 + 0,8 : 0,64)$ j. 53,3
 16. $\frac{2\frac{5}{7} - \frac{2}{3} \cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + 4,375 \right) : 9\frac{8}{9}}$ j. $2\frac{17}{21}$

17.

$$\frac{0,134 + 0,05}{18\frac{1}{6} - 1\frac{11}{14} - \frac{2}{15} \cdot 2\frac{6}{7}}.$$

j. 0,0115

$$18. \frac{\left(58\frac{4}{15} - 56\frac{7}{24}\right) : 0,8 + 2\frac{1}{9} \cdot 0,225}{8\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}}.$$

j. $\frac{157}{280}$

$$19. \frac{\left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0,03 - \left(0,3 - \frac{3}{20}\right) \cdot 1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{20} - 2,65\right) \cdot 4 + \frac{2}{5} - \left(1,88 + 2\frac{1}{25}\right) \cdot \frac{1}{80}} : 2\frac{1}{20}. \quad \text{j. } 10$$

$$20. \left(\frac{0,216}{0,15} + \frac{2}{3} : \frac{4}{15} \right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{7,7}{2\frac{3}{4}} \right) + 0,695 : 1,39. \quad \text{j. } 5$$

$$21. \frac{1}{3} : \frac{2}{3} + 0,228 : \left[\left(1,5291 - \frac{1,453662}{3 - 0,095} \cdot 0,305 \right) : 0,12 \right] \quad \text{j. } 10$$

$$22. \frac{\left[\left(6,2 : 0,31 - \frac{5}{6} \cdot 0,9 \right) \cdot 0,2 + 0,15 \right] : 0,02}{\left(2 + 1\frac{4}{11} \cdot 0,22 : 0,1 \right) \cdot \frac{1}{33}}. \quad \text{j. } 1320$$

$$23. 6 : \frac{1}{3} - 0,8 : \frac{1,5}{\frac{3}{2} \cdot 0,4 \cdot \frac{50}{1 : \frac{1}{2}}} + \frac{1}{4} + \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}}$$

$$24. \frac{(7 - 6,35) : 6,5 + 9,9}{\left(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1\frac{5}{16} \right) : \frac{169}{24}}. \quad \text{j. } 20$$

$$25. \frac{\left(\frac{1}{6} + 0,1 + \frac{1}{15} \right) : \left(\frac{1}{6} + 0,1 - 1\frac{1}{15} \right) \cdot 2,52}{\left(0,5 - \frac{1}{3} + 0,25 - \frac{1}{5} \right) : \left(0,25 - \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{7}{13}}. \quad \text{j. } -\frac{3}{4}$$

26. $\frac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4 \cdot 3\frac{1}{3}} \cdot \frac{5}{7} - \frac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right) \cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}$. j. 5
27. $\frac{\left(13,75+9\frac{1}{6}\right) \cdot 1,2}{\left(10,3-8\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}} + \frac{\left(6,8-3\frac{3}{5}\right) \cdot 4\frac{1}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right) \cdot 56} - 27\frac{1}{6}$. j. $\frac{34}{42}$
28. $\frac{0,4+\left(5-0,8 \cdot \frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left[1\frac{7}{8} \cdot 8 - \left(8,9-2,6 \cdot \frac{2}{3}\right)\right]:23\frac{1}{2}}$. j. $8\frac{7}{10}$
29. $\frac{0,125:0,25+1\frac{9}{16}:2,5}{(10-2:2,3) \cdot 0,46+1,6} + \left(\frac{17}{20}+1,9\right):0,5$. j. $5\frac{23}{28}$
30. $\left[\frac{8,8077}{20-[28,2:(13,333 \cdot 0,3+0,0001)] \cdot 2,004} + 4,9\right] \cdot \frac{5}{32}$. j. 1

VII - BOB.

MAKTABDA AYNIY SHAKL ALMASHTIRISHLARNI O'RGATISH METODIKASI

1-§. Ayniy shakl almashtirishlar.

Algebraik ifodalarni ayniy almashtirishlar muktab matematika kursida muhim o'rinni egallaydi va VI-XI sinflarning dastur materiallarini o'rganish jarayonida qo'llaniladi. Muktab matematika kursida sonlar va harflar bilan belgilangan algebraik ifodalarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish va logarifmlash kabi amallar bajariladi. Bu amallarni bajarish jarayonida ana shu algebraik ifodalarning miqdoriy qiymatlarini saqlab, ularni turli ko'rinishlarda yozishga to'g'ri keladi.

T a ' r i f. Algebraik ifodaning miqdoriy qiymatini o'zgarmasdan bir shakldan ikkinchi bir shaklga o'zgartirib yozish ayniy almashtirish deyiladi.

Muktab matematika kursida ayniyat degan tushuncha o'rganiladi, so'ngra ayniy almashtirish degan tushuncha kiritiladi.

Ta'rif. Tarkibidagi xarflarni har qanday qiymatlarida ham to'g'ri bo'laveradigan ikki algebraik ifodaning tengligi ayniyat deyiladi.

Masalan, $\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$ tenglik ayniyatdir, chunki

tenglikda qatnashayotgan noma'lum x ning ixtiyoriy qiymatlarida tenglikning chap tomoni uning o'ng tomoniga har doim teng chiqadi. 6-sinfda o'rganiladigan qisqa ko'paytirish formulalari ham ayniy tengliklardir:

- 1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$
- 2) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$
- 3) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$
- 4) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$

Yuqoridagi ta'rif va misollardan ko'rindaniki, ayniyat arifmetik amallar qonunlarining harfiy ifodalangan shakli ekan. Ayniy

shakl almashtirishlarda algebraik ifodalarni solishtirish, ular ustida amallar bajarish uchun ifodalardagi birhad va ko'phadlarning shaklini o'zgartirish kabi ishlarni bajarish ko'zda tutiladi. Maktab matematika kursidagi ayniy shakl almashtirishlarni shartli ravishda quyidagicha ketma-ketlik asosida ifodalash mumkin:

1. Butun ifodalarni ayniy almashtirish.
2. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish.
3. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish.
4. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish.

Har qaysi almashtirishni ko'rib chiqamiz.

1. Butun ifodalarni ayniy almashtirish. Ayniyat va ayniy almashtirish tushunchalari VI sinfdan boshlab kiritiladi, lekin I sinf matematika darslaridayoq ayniy almashtirishlar bajariladi. Masalan $3+2=5$ ifodaning yig'indisini hisoblash $3+(1+1)=(3+1)+1=4+1=5$ kabi ayniy almashtirish yordamida bajariladi. IV-V sinflarda sonlar ustida murakkabroq ayniy almashtirishlar bajariladi. Masalan: $52=5\cdot 10+2=5\cdot 5\cdot 2+2=25\cdot 2+2$; $35=3\cdot 10+5= =3\cdot 5\cdot 2+5=6\cdot 5+5$. Bu misollarda bajarilgan ishlar o'quvchilariga ayniy almashtirish deb o'rgatilmasada lekin aslida sonlar ustida ayniy almashtirish bajariladi.

Bizga ma'lumki, ratsional algebraik ifodalar arifmetik to'rt amal hamda darajaga ko'tarish amallari asosida tuziladi. Agar algebraik ifoda qo'shish, ayirish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallari asosida tuzilgan bo'lsa, u holda bunday ifodalar butun ifodalar deyiladi. Masalan:

- 1) $5y^2(2x^2 - 3y)$;
- 2) $(x+y)(y-x)$;
- 3) $(2x+5)(7-3x)$;
- 4) $(c+5)(c^2 - 3c + 5)$;

Butun ifodalarni ayniy almashtirishdagi asosiy vazifa berilgan matematik ifodani ko'phadlarni imkoniyati boricha algebraik amallar yordamida standart shaklidagi birhadlar ko'rinishiga keltirib soddalashtirishdan iboratdir. Shu yerda o'qituvchi o'quvchilarga

o'xshash hadlar, birhad va ko'phad tushunchalarini tushuntirish hamda ularga misollar ko'rsatishi lozim.

Har qanday algebraik ifoda birhad va ko'phadlardan iborat bo'ladi.

T a ' r i f. *Ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallari yordamida tuzilgan ifodalarni birhad deyiladi.*

Masalan: $5y^2x, \frac{4}{5}xya^2; \dots$

Birhadlarni ham standart shakllarga keltirish misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan: $6x \cdot 4y$ birhad sodda holga keltirilsin. Bu misolga biz ko'paytirish, o'rin almashtirish va gruppash qonunlarini qo'llasak, $6x \cdot 4y = 24xy$ bo'ladi.

T a ' r i f: *Bir necha birhadlarning yig'indisidan iborat bo'lgan ifoda ko'phad deyiladi.*

Masalan: 1) $5x^2y + \frac{3}{5}y^2x$

2) $13a^2b + \frac{4}{7}c^2a + \frac{3}{5}a^2b$

Yuqorida ta'rif va misollardan ko'rindiki, birhad ko'phadning xususiy holi ekan.

T a ' r i f: *Ko'phadning o'zaro koeffetsientlari bilangina farq qiladigan yoki butun koeffetsientli bo'lgan hadlari o'xshash hadlar deyiladi. O'xshash hadlarni arifmetik amallar yordamida birhad ko'rinishida ifodalashni ixchamlash deyiladi.*

Masalan:

$$1) 20y^2x + 4zt - 12y^2x - 3tz = 20y^2x - 12y^2x + (4zt - 3tz) = 8y^2x + zt$$

$$2) 2,4d^2b^2 + 3,2cd - 1,4d^2b^2 - 2,5cd = (2,4d^2b^2 - 1,4d^2b^2) + (3,2cd - 2,5cd) = d^2b^2 + 0,7cd$$

Butun ifodalarni ayniy almashtirishda belgilangan ko'phadlar birhadlarga, birhadlar esa standart shaklga keltiriladi. Bu ishlarni bajarishda o'qituvchi o'quvchilarni bir xil hadlardan iborat ko'phadlarni standart shaklga keltirishdan boshlashi kerak.

Ifodalarni soddalashtiring:

$$1) x + x + x = x \cdot 3 = 3x;$$

2. $x+x+x+x+x = (x+x)+(x+x+x) = 2x+3x=5x;$
3. $(1,2x^2)\cdot(-5x)+(-7x)\cdot(-2x)(3x^2) = -6x^3-7x+6x^3 = -7x$
4. $(5x^2y-14x^3-8xy^2)+(3x^3-7x^2y+9xy^2) = 5x^2y-14x^3-8xy^2+3x^3-7x^2y+9xy^2 = 2x^2y-11x^3+x^2y^2$

Shundan keyin qisqa ko‘paytirish formulalari yordamida soddalashtiriladigan misollarni ko‘rsatish lozim.

$$1) (2x+3y)^2+(4y-5x)^2 = 4x^2+12xy+9y^2+16y^2-40xy+25x^2 = 29x^2-28xy+25y^2.$$

$$2) (xy+4y)^3-(2xy-3y)^3 = (xy)^3+3(xy)^2\cdot 4y+3xy(4y)^2+(4y)^3 - [(2xy)^3-3(2xy)^2\cdot 3y+3\cdot 2xy(3y)^2-(3y)^3] = x^3y^3+12x^2y^3+48xy^3+64y^3-8x^3y^3+36x^2y^3-54xy^3+27y^3 = -7x^3y^3+48x^2y^3-6xy^3-6xy^3+91y^3.$$

$$4) \text{Ifoda soddalashtirilsin: } (a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2$$

$$\begin{aligned} \text{1-usul: } & (a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2 = [(a+d)-(b-c)]^2 + [(a+d)+(b-c)]^2 = (a+d)^2-2(a+d)(b-c)+(b-c)^2+(a+d)^2+2(a+d)(b-c)+(b-c)^2 = 2[(a+d)^2+(b-c)^2]. \end{aligned}$$

2-usul: $(a-b+c+d)^2=A$ deb $(a+b-c+d)^2=B$ deb belgilasak, A^2+B^2 hosil bo‘ladi. A^2+B^2 ni ayniy almashtirish orqali quyidagicha yozish mumkin: $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$, bularga asosan

$$\begin{aligned} (a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2 &= (a-b+c+d+a+b-c+d)^2-2(a-b+c+d)\cdot(a+b-c+d) = (2a+2d)^2-2(a-b+c+d)(a+b-c+d) = \\ &= 4(a+d)^2-2[(a+d)^2-(b-c)^2] = 2[(a+d)^2+(b-c)^2]. \end{aligned}$$

2-§. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish

VII sinf algebra kursidan boshlab kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirish bajariladi.

T a ‘ r i f: Agar algebraik ifoda qo‘shish, ayrish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari yordamida sonlar va o‘zgaruvchilardan tuzilgan bo‘lsa, u holda bunday ifodani kasr ratsional ifoda deyiladi.

$$\text{Masalan: } \frac{y^2-1}{y}; \quad \frac{x^2-3x-4}{x+4}; \quad \frac{x+5}{x(x-2)}; \dots$$

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirish jarayonida ana shu ifoda qatnashayotgan noma'lum sonlarning qabul qiladigan qiymatlarini aniqlash lozim.

Ta’rif: Kasr ratsional ifodadagi o‘zgaruvchilarning ma’noga ega bo‘ladigan qiymatlari o‘zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari deyiladi.

Masalan, $\frac{2x-y}{4xy} + \frac{11y-2x}{4xy}$ kasr ratsional ifodadagi x va y

larning qabul qiladigan qiymatlari $x=0$, va $y=0$ dan boshqa barcha son qiymatlardan iboratdir. Agar x va y o‘zgaruvchilardan biri nol qiymatini qabul qilsa, kasrning maxraji nol bo‘lib, o‘zining ma’nosini yo‘qotadi, chunki har qanday sonni nolga bo‘lish mumkin emas.

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirishdagi asosiy vazifa berilgan ifodaning surat va maxrajlarida turgan ko‘phadlarini ayniy almashtirishlar bilan bir hadlar ko‘rinishiga keltirishdan iboratdir.

Kasr ratsional ifodalarni ayniy almashtirishdan oldin o‘qituvchi kasr va ular ustida bajariladigan to‘rt amalga doir sonli misollardan namunalar ko‘rsatib, so‘ngra esa harfiy ifodalar qatnashgan kasrlar ustida bajariladigan ayniy almashtirishlarni ko‘rsatishi maqsadga muvofiqidir.

$$1. \text{ a) } \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10 + 3}{15} = \frac{13}{15};$$

$$\text{b) } \frac{x}{a} + \frac{y}{c} = \frac{x \cdot c}{a \cdot c} + \frac{y \cdot a}{c \cdot a} = \frac{xc + ya}{ca};$$

$$2. \text{ a) } \frac{4}{7} - \frac{1}{9} = \frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{36}{63} - \frac{7}{63} = \frac{36 - 7}{63} = \frac{29}{63};$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot d}{d \cdot b} = \frac{ad - cb}{db};$$

$$3. \text{ a) } \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} = \frac{5}{8}; \quad \text{b) } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$4. \text{ a) } \frac{7}{9} : \frac{28}{36} = \frac{7}{9} \cdot \frac{36}{28} = \frac{4}{4} = 1; \quad \text{b) } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc};$$

Yuqorida o‘xshash misollarni ko‘rsatgandan so‘ng o‘qituvchi yana bir ayniy almashtirishning mazmunini quyidagicha tushuntirishi lozim. Har qanday ayniy almashtirishning maqsadi misol yoki masalani yechish uchun berilgan matematik ifodani eng sodda yoki qulay holatga keltirib hisoblashdan iboratdir.

$$1\text{-misol. } \frac{a^2 - 25}{a+3} \cdot \frac{a}{a^2 + 5a} - \frac{a+5}{a^2 + 3a} \text{ ifodani soddalashtiring.}$$

Yechish:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{a^2 - 25}{a+3} \cdot \frac{a}{a^2 + 5a} = \frac{a^2 - 5^2}{a+3} \cdot \frac{a}{a(a+5)} = \\ & = \frac{(a-5)(a+5)}{(a+3)} \cdot \frac{a}{a(a+5)} = \frac{a-5}{a+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{a-5}{a+3} - \frac{a+5}{a^2 + 3a} = \frac{a-5}{a+3} - \frac{a+5}{a(a+3)} = \frac{(a-5)a}{(a+3)a} - \frac{a+5}{a(a+3)} = \\ & = \frac{a^2 - 5a - a - 5}{a(a+3)} = \frac{a^2 - 6a - 5}{a(a+3)} \end{aligned}$$

$$2\text{-misol. } \left(\frac{5x+y}{x^2 - 5xy} + \frac{5x-y}{x^2 + 5xy} \right) \cdot \frac{x^2 - 25y^2}{x^2 + y^2} \text{ ifodani soddalashtiring.}$$

Yechish:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{5x+y}{x^2 - 5xy} + \frac{5x-y}{x^2 + 5xy} = \frac{5x+y}{x(x-5y)} + \frac{5x-y}{x(x+5y)} = \\ & = \frac{(5x+y)(x+5y)}{x(x-5y)(x+5y)} + \frac{(5x-y)(x-5y)}{x(x+5y)(x-5y)} = \\ & = \frac{5x^2 + xy + 25xy + 5y^2 + 5x^2 - xy - 25xy + 5y^2}{x(x+5y)(x-5y)} = \\ & = \frac{10x^2 + 10y^2}{x(x+5y)(x-5y)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{10x^2 + 10y^2}{x(x+5y)(x-5y)} \cdot \frac{x^2 - 25y^2}{x^2 + y^2} = \\ & = \frac{10(x^2 + y^2)}{x(x+5y)(x-5y)} \cdot \frac{(x-5y)(x+5y)}{x^2 + y^2} = \frac{10}{x} \end{aligned}$$

3-misol. Ifodani soddalashtiring.

$$\left(\frac{m-n}{mn} + \frac{3m+n}{mn-m^2} + \frac{3n+m}{mn-n^2} \right) : \frac{2m+2n}{mn} + \frac{2m}{n-m}.$$

Yechish:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{m-n}{mn} + \frac{3m+n}{mn-m^2} + \frac{3n+m}{mn-n^2} = \frac{m-n}{mn} + \frac{3m+n}{m(m-n)} + \frac{3n+m}{n(m-n)} = \\ & = \frac{(m-n)(m-n) + (3m+n)n + (3n+m)m}{mr(m-n)} = \frac{m^2 - 2mn + n^2 + 3mn + n^2 + 3mn + m^2}{mr(m-n)} = \\ & = \frac{2m^2 + 4mn + 2n^2}{mr(m-n)} = \frac{2(m+n)^2}{mr(m-n)} \\ 2) \quad & \frac{2(m+n)^2}{mn(m-n)} : \frac{2m+2n}{mn} = \frac{2(m+n)^2}{mn(m-n)} \cdot \frac{mn}{2(m+n)} = \frac{m+n}{m-n}; \\ 3) \quad & \frac{m+n}{m-n} + \frac{2m}{n-m} = \frac{m+n}{m-n} - \frac{2m}{m-n} = \frac{m+n-2m}{m-n} \\ & = \frac{n-m}{m-n} = -\frac{m-n}{m-n} = -1. \end{aligned}$$

4-misol. $(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a+b-c}{a+b+c}$ ifodani soddalash-

tiring.

Yechish:

$$\begin{aligned} & (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) : \frac{a+b-c}{a+b+c} = [a^2 - (b-c)^2] : \frac{a+b-c}{a+b+c} = \\ & = (a-b+c)(a+b-c) : \frac{a+b-c}{a+b+c} = \\ & = (a-b+c)(a+b+c) = (a+c)^2 - b^2 \end{aligned}$$

5-misol. $\frac{2a}{a^2 - 4x^2} + \frac{1}{2x^2 + 6x - ax - 3a} \cdot \left(x + \frac{3x-6}{x-2} \right)$ ifodani

soddalashtiring

Yechish:

$$1) \quad x + \frac{3x-6}{x-2} = x + \frac{3(x-2)}{x-2} = x + 3$$

$$2) \frac{1}{2x^2 + 6x - ax - 3a} \cdot (x+3) = \frac{1}{2x(x+3) - a(x+3)} \cdot (x+3) = \\ = \frac{1}{(2x-a)(x+3)} \cdot (x+3) = \frac{1}{2x-a}$$

$$3) \frac{2a}{a^2 - 4x^2} + \frac{1}{2x-a} = \frac{2a}{a^2 - 4x^2} - \frac{1}{a-2x} = \frac{2a}{(a-2x)(a+2x)} - \frac{1}{a-2x} = \\ = \frac{2a - a - 2x}{(a-2x)(a+2x)} = \frac{a - 2x}{(a-2x)(a+2x)} = \frac{1}{a+2x}$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $(2x+1 - \frac{1}{1-2x}) : (2x - \frac{4x^2}{2x-1})$. J. $-2x$
2. $(a^2 + 2a + 1)(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a-1})$ j. $\frac{1+a}{1-a}$
3. $(1 - \frac{9x^2 + 4}{12x}) : (\frac{1}{3x} - \frac{1}{2}) + 1$ j. $1,5x$
4. $1 - (\frac{2}{a-2} - \frac{2}{a+2}) \cdot (a - \frac{3a+2}{4})$ j. $\frac{a}{a+2}$
5. $(y^2 - 4)(\frac{3}{y+2} - \frac{2}{y-2}) + 3$ j. $y-7$.
6. $(a+b - \frac{2ab}{a+b}) : (\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a})$. J. a
7. $(m+1 - \frac{1}{1-m}) : (m - \frac{m^2}{m-1})$. J. $-m$
8. $\left[\frac{x-2y}{x+2y} - \frac{1}{x^2 - 4y^2} : \frac{x+2y}{(2y-x)^3} \right] \cdot \frac{(x+2y)^2}{4y^2}$ j. $\frac{x^2 - 2xy}{2y^2}$
9. $(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2 + 4ab + b^2}) : (\frac{2a}{4a^2 - b^2} + \frac{1}{b-2a})$ J. $\frac{2ab - 4a^2}{2a+b}$

10. $\left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^2-1}{1-a}$
 j. $\frac{a^2+1}{(a^2+a+1)(a^2-1)}$
11. $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1} \right) \cdot \left(x - \frac{2x-1}{x+1} \right)$ j. 1
12. $(a+2b+\frac{4b^2}{a-2b}) : (a-\frac{2ab}{a+2b}) + 1$ j. $\frac{2a}{a-2b}$
13. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc : \frac{a+b-c}{a+b+c}$ j. $a^2 - (b+c)^2$
14. $\left(\frac{5x^2-15xy}{x^2-9y^2} - \frac{3xy+9y^2}{x^2+6xy+9y^2} \right) : \left(\frac{5}{y} - \frac{3}{x} \right)$. j. $\frac{xy}{x+3y}$
15. $\left(\frac{4a^2-6ac}{4a^2-6ac+9c^2} - \frac{6ac+9c^2}{4a^2+6ac+9c^2} \right) \cdot \frac{6a+9c}{4a^2+9c^2}$ j. $\frac{3}{2a-3c}$
16. $(x - \frac{4xy}{x+y} + y) \cdot (x + \frac{4xy}{x-y} - y)$ j. $x^2 - y^2$
17. $(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1) : (1 - \frac{1}{1-a})$ j. $-a$
18. $ab + \frac{ab}{a+b} \cdot \left[\frac{a+b}{a-b} - a - b \right]$ j. $\frac{ab}{a-b}$
19. $\left(\frac{y^2-xy}{x^2+xy} - xy + y^2 \right) \cdot \frac{x}{x-y} + \frac{x}{x+y}$ j. $-xy-1$
20. $\left[\frac{1}{(2a-b)^2} + \frac{2}{4a^2-b^2} + \frac{1}{(2a+b)^2} \right] \cdot \frac{4a^2+4ab+b^2}{16a}$
 j. $\frac{a}{(2a-b)^2}$
21. $\frac{4}{(c-2)^2} \cdot \left\{ \frac{1}{(c+2)^2} + \frac{1}{(c-2)^2} + \frac{1}{c^2-4} \right\}$ j. $\frac{4(c+2)^2}{3c^2+4}$

$$22. \left(\frac{25}{a^2 + 5a + 25} - \frac{2a}{5-a} - \frac{2a^3 + 10a^2}{a^3 - 125} \right) : \left(a-5 + \frac{13a - a^2 - 30}{a-5} \right)$$

$$\text{j. } \frac{25}{a^2 + 5a + 25}$$

$$23. \frac{x}{ax - 2a^2} - \frac{2}{x^2 + x - 2ax - 2a} \cdot \left(1 + \frac{3x + x^2}{3+x} \right) \quad \text{j. } \frac{1}{a}$$

$$24. \left(\frac{x}{x^2 - x - 6} - \frac{x-1}{3x^2 - 4x - 15} \right) : \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^2 + 11x + 10}. \quad \text{j. } \frac{2}{(x-3)(x-1)^2}$$

$$25. \frac{a^2}{6x(a+x)^2} - \left(\frac{a-x}{2a+2x} + \frac{ax}{a^2 - x^2} \right) \cdot \frac{a-x}{3x} \cdot \frac{x}{6a+6x}. \quad \text{j. } \frac{6a^2 - a^2x - x^3}{36x(a+x)^2}$$

$$26. \frac{a-x}{2a+2} \cdot \left(\frac{2a+1}{a+x} - \frac{x(2a+1)}{x^2 - a^2} + \frac{x}{a+x} - 1 \right). \quad \text{j. } \frac{a^2 + ax + a}{2(a+1)(x+a)}$$

$$27. \left(\frac{x+1}{x^2 + xy} - \frac{1}{x^2 - y^2} \right) \cdot \frac{(x-y)^2}{x^2 - y - yx} + \frac{y-x}{(x+y)^2}. \quad \text{j. } \frac{y}{x} \left(\frac{x-y}{(x+y)^2} \right)$$

$$28. \frac{1}{\frac{1}{a^2}(a^2 - b^2)} - \frac{a^2b}{a^2 + b^2} \cdot \left[\frac{1}{\frac{1}{a}(ab + b^2)} + \frac{1}{\frac{1}{b}(a^2 + ab)} \right]. \quad \text{j. } \frac{ab}{a^2 - b^2}$$

$$29. \left[\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right] : \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right). \quad \text{j. } \frac{a^2 - b^2}{a^2 \cdot b^2}$$

$$30. \left[\frac{p}{q} - \frac{q}{p} + \frac{1}{p+q} \left(\frac{q^2}{p} - \frac{p^2}{q} \right) \right] : \left(1 - \frac{q}{p} \right). \quad \text{j. } \frac{p}{p+q}$$

$$31. \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) : \left[\frac{a^2 + ab}{\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2)} - 1 \right] \right\}. \quad \text{j. } \frac{2}{b}$$

$$32. \frac{a^3 - 1}{n^2 + an} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{a - an^3 - n^4 + n}{1 - a^2}. \quad j. \frac{n^2 + n + 1}{n} \cdot \frac{1 + a + a^2}{1 + a}$$

$$33. \left(\frac{2a+10}{3a-1} + \frac{130-a}{1-3a} + \frac{30}{a} - 3 \right) \cdot \frac{3a^3 + 8a^2 - 3a}{1 - \frac{1}{4}a^2}. \quad j. \frac{12(2a+5)(a+3)}{a-2}$$

$$34. \left[\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right] : \left[\frac{5}{x^3+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right]. \quad j. \frac{x+2}{2}$$

$$35. \left(\frac{x-y}{2y-x} - \frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2} \right) : \frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}. \quad j. \frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$$

$$36. \frac{a^2+a-2}{a^{n+1}-2a^n} \cdot \left[\frac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4} - \frac{3}{a^2-a} \right]. \quad j. \frac{a+2}{a^{n+1}}$$

$$37. \frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}. \quad j. \frac{1}{abc}$$

$$38. \frac{2a^2(b+c)^{2^n} - \frac{1}{2}}{an^2 - a^3 - 2a^2 - a} : \frac{2a(b+c)^n - 1}{a^2c - a(nc - c)}. \quad j. \frac{[2a(b+c)^n + 1]c}{2(n+a+1)}$$

$$39. \frac{a-c}{a^2+ac+c^2} \cdot \frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2} \cdot \left(1 + \frac{c}{a-c} - \frac{1+c}{c} \right) : \frac{c(l+c)-a}{bc}. \quad j. \frac{1}{a+c}$$

$$40. \frac{\left[\frac{(a+x)^2}{ax} - 4 \right] \cdot \left[\frac{(a-x)^2}{ax} + 4 \right] : (a^6 - x^6)}{(a^2x - ax^2) \cdot [(a+x)^2 - ax] \cdot [(a-x)^2 + ax]} \cdot \frac{a - \frac{ax}{a+x}}{a + \frac{ax}{a-x}}. \quad j. \frac{3(x-2)}{2(x+3)}$$

$$41. \left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2} + 2 - \frac{1-x+x^2}{2x-x^2} \right)^{-1} \cdot 5 - 2x^2. \quad j. \frac{4-x^2}{2}$$

$$42. \frac{\left(m^2 - \frac{1}{n^2} \right)^m \cdot \left(n + \frac{1}{m^2} \right)^{n-m}}{\left(n^2 - \frac{1}{m^2} \right)^n \cdot \left(m + \frac{1}{n} \right)^{m-n}}. \quad j. \left(\frac{m}{n} \right)^{m+n}$$

$$43. \left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y} \right) : \frac{y^2}{4x^2-y^2}. \quad j. \quad \frac{24}{5y-2x}.$$

$$44. \left(1+2x - \frac{3x^2+11x-6}{3x+1} \right) : \left(x+1 - \frac{3x^2+x+2}{3x+1} \right). \quad j. \quad -\frac{3x^2-6x+7}{3x-1}.$$

$$45. \left(5a-1 - \frac{5a^2+3}{a+1} \right) : \left(3a - \frac{3a}{a+1} \right). \quad j. \quad \frac{4(a-1)}{3a^2}$$

$$46. \left[\left(\frac{x}{y-x} \right)^{-2} - \frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy} \right]^2 \cdot \frac{x^4}{x^2y^2-y^4}. \quad j. \quad \frac{x-y}{x+y}.$$

$$47. \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right] : \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) \quad j. \quad \frac{2bc}{(b+c-a)^2}.$$

3-§. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish.

Agar berilgan matematik ifodada irratsional ifoda qatnashgan bo'lsa, ayniy almashtirishlar orqali irratsional ifodani ratsional ifoda ko'rinishga keltiriladi va u hisoblanadi. Irratsional ifoda bu ildizlardan yoki butun son bo'limgan ratsional ko'rsatkichli darajadan tashkil topgan algebraik ifodadir. Shuning uchun irratsional ifodaga quyidagicha ta'rif berilgan.

T a ' r i f. Agar berilgan algebraik ifodada ildiz chiqarish amali qatnashsa, bunday ifoda irratsional ifoda deyiladi.

Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish orqali ratsional ifoda ko'rinishiga keltirish uchun asosan ildiz ostida qatnashayotgan birhad yoki ko'phadni ildiz ostidan chiqarish, imkoniyati boricha maxrajni irratsionallikdan qutqarish, noma'lum o'zgaruvchilar kiritish orqali berilgan irratsional ifodani ratsional ifoda ko'rinishiga keltirish kabi ishlar qilinadi.

Bundan tashqari o'quvchilarga sonning arifmetik ildizi va uning kvadrat ildizi hamda irratsional ifodalarning xossalari kabi tushunchalar tushuntirib o'tilib, so'ngra quyidagi ko'rinishdagi misollarni yechish maqsadga muvofiqdir.

1 - misol. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

2-misol. $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{3a\sqrt{a^5}}{4} - \frac{\sqrt{a^5}}{4a} \right) : (-\sqrt{a})$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

Yechish.

$$1) \quad \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{3a\sqrt{a^5}}{4} - \frac{\sqrt{a^5}}{4a} = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{3a\sqrt{a^4a}}{4} - \frac{\sqrt{a^4a}}{4a} = \\ = \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{3a^3\sqrt{a}}{4} - \frac{a^2\sqrt{a}}{4a} = \frac{2\sqrt{a} + 3a^3\sqrt{a} - a\sqrt{a}}{4} = \frac{\sqrt{a}}{4} \cdot (2 + 3a^3 - a)$$

$$2) \quad \frac{\sqrt{a}}{4} (2 + 3a^3 - a) : (-\sqrt{a}) = -\frac{1}{4} (2 + 3a^2 - a).$$

3- misol. $\sqrt{a^3} + a\sqrt{9a} - \frac{1}{a}\sqrt{a^5}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\sqrt{a^3} + a\sqrt{9a} - \frac{1}{a}\sqrt{a^5} = a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = 3a\sqrt{a}.$$

4-misol. $\frac{a}{a-b} \sqrt[3]{(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - b^2)(a+b)} \cdot \frac{a^3 - b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\frac{a}{a-b} \sqrt[3]{(a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - b^2)(a+b)} \cdot \frac{a^3 - b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} =$$

$$= \frac{a}{a-b} \sqrt[3]{(a-b)^2(a-b)(a+b)(a+b)} \cdot \frac{a^3 - b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} = \\ = \frac{a}{a-b} \cdot (a-b) \cdot \sqrt[3]{(a+b)^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} = a(a^3 - b^3).$$

5-misol. $\left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) : (x-y) + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ ifodani

soddalashtiring.

Yechish.

$$1) \quad \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x} - \sqrt{xy} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{xy} \cdot \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{x} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}};$$

$$2) \quad \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : (x-y) = \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2};$$

$$3) \quad \frac{x}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x + 2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + 2y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}.$$

1. Kasrli irratsional ifodalarning maxrajlarini berilishiga qarab irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi.

$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ko‘rinishlarda berilgan bo‘lsa, ularning o‘zaro ko‘paytmasi $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ bo‘ladi. Agar irratsional ifodalar $\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ va $\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ ko‘rinishlarda berilgan bo‘lsa, ularning maxrajlari irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

$$1) \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}, \text{ agar}$$

$a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ bo'lsa.

$$2) \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}, \text{ agar}$$

$a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$ bo'lsa.

1-misol.

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

2-misol.

$$\frac{5}{4 - \sqrt{11}} = \frac{5(4 + \sqrt{11})}{(4 - \sqrt{11})(4 + \sqrt{11})} = \frac{5(4 + \sqrt{11})}{16 - 11} = 4 + \sqrt{11}.$$

2. Agar irratsional ifodalar $\frac{A}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ va $\frac{A}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$

ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi.

$$1) \frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a + b}.$$

$$2) \frac{A}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a - b}.$$

$$3) \frac{A}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{A(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}.$$

$$4) \frac{A}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{A(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{A(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{a - b}, \quad a \neq b.$$

Misollar:

$$1) \frac{1}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{3};$$

$$2) \frac{12}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{9}} = \frac{12(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})}{(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{9})} = \\ = \frac{12(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})}{6 - 3} = 4\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{2} - 1)$$

3. Agar irratsional ifoda $\frac{A}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$ va $\frac{A}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}$ ko'rinishlarda berilgan bo'lsa, ularning maxrajlari irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi:

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}} = \frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})} = \\ = \frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{ab^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}})}{a - b}.$$

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}} = \frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + (-1)^{n-2}n\sqrt[n]{ab^{n-2}} + (-1)^{n-2}n\sqrt[n]{b^{n-1}})}{(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + (-1)^{n-2}n\sqrt[n]{ab^{n-2}} + (-1)^{n-2}n\sqrt[n]{b^{n-1}})} = \\ = \frac{A(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + (-1)^{n-2}n\sqrt[n]{ab^{n-2}} + (-1)^{n-2}n\sqrt[n]{b^{n-1}})}{a + b}.$$

Misollar.

$$1) \frac{4}{\sqrt[5]{5} - \sqrt[5]{3}} = \frac{4(\sqrt[5]{5^4} + \sqrt[5]{5^3 \cdot 3} + \sqrt[5]{5^2 \cdot 3^2} + \sqrt[5]{5 \cdot 3^3} + \sqrt[5]{3^4})}{5 - 3} =$$

$$= 2(\sqrt[5]{625} + \sqrt[5]{375} + \sqrt[5]{225} + \sqrt[5]{135} + \sqrt[5]{81}).$$

$$2) \frac{1}{\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{3^3} - \sqrt[4]{3^2 \cdot 2} + \sqrt[4]{3 \cdot 2^2} - \sqrt[4]{2^3}}{3 - 2} = \sqrt[4]{27} - \sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{12} - \sqrt[4]{8}.$$

4. Agar irratsional ifoda $\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqatiladi:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} &= \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})} = \\ &= \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{a + b - c + 2\sqrt{ab}} = \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{[(a + b - c) + 2\sqrt{ab}][(a + b - c) - 2\sqrt{ab}]} = \\ &= \frac{A(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a + b - c)^2 - 4ab}, \end{aligned}$$

$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, (a + b + c)^2 - 4ab \neq 0.$

5. Agar $\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}}$ ifoda berilgan bo'lsa, uning

maxraji irratsionallikdan quyidagicha chiqariladi, agar $ab = cd$ bo'lsa,

$$\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}} &= \frac{A((\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{c} + \sqrt{d}))}{[(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{c} + \sqrt{d})][(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{c} + \sqrt{d})]} = \\ &= \frac{A((\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{c} + \sqrt{d}))}{a + b - c - d}. \end{aligned}$$

$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, a + b \neq c + d.$

6. $\frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ ifoda berilgan bo'lsa, uning maxraji

irratsonallikdan quyidagicha chiqariladi. Buning uchun quyidagi ayniyatlardan foydalananamiz:

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Agar $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$ desak,

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc}) = a + b + c + 3\sqrt[3]{abc}.$$

Bu hosil qilingan natijani

$$(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{(abc)^2}$$

ga ko'paytirsak, ya'ni

$$[(a + b + c) - 3\sqrt[3]{abc}][(a + b + c)^2 + 3(a + b + c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{(abc)^2}] =$$

$$= (a + b + c)^2 - 27abc$$

ni hosil qilamiz. Demak,

$$\begin{aligned}
& \frac{A}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}} = \\
& = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})}{(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})} = \\
& = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})(a+b+c)^2 +}{(a+b+c - \sqrt[3]{abc})[(a+b+c)^2 + 3(a+b+c)\sqrt[3]{abc} +} \\
& \quad + 3(a+b+c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{(abc)^2}} \\
& \quad + 9\sqrt[3]{(abc)^2}] \\
& = \frac{A(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} - \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} - \sqrt[3]{bc})(a+b+c)^2 +}{(a+b+c)^3 - 27abc} \\
& \quad + 3(a+b+c)\sqrt[3]{abc} + 9\sqrt[3]{(abc)^2},
\end{aligned}$$

agar $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \neq 0$, $(a+b+c)^3 \neq 27abc$ bo'lsa.

7. Murakkab ildiz formulasi quyidagichadir:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Masalan:

$$1) \sqrt{11 + \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{121 - 40}}{2}} + \sqrt{\frac{11 - \sqrt{121 - 40}}{2}} = \sqrt{10} \pm 1;$$

$$2) \sqrt{15 - \sqrt{29}} = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{225 - 29}}{2}} - \sqrt{\frac{15 - \sqrt{225 - 29}}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{58} - \sqrt{2})$$

1-misol. $\left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \cdot \sqrt{ab}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\left(\sqrt{ab} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \cdot \sqrt{ab} =$$

$$= \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} + 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{ab} - \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \sqrt{ab} = \\ = |ab| + 2\sqrt{b^2} - \sqrt{a^2} + 1 = ab + 2|b| - |a| + 1.$$

2-misol. $A = \sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})} \cdot \sqrt{2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Agar $x \geq 0$ bo'lsa, $8x(7+4\sqrt{3}) \geq 0, 6x \geq 0$ va $2x \geq 0$; $7+4\sqrt{3} = 7+2\sqrt{12} = (\sqrt{3}+2)^2$ u holda

$$A = \sqrt[6]{8x(\sqrt{3}+2)^2} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6x} - 4\sqrt{2x}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2x}(\sqrt{3}+2)} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2x}(\sqrt{3}-2)} = \\ = \sqrt[3]{8x(3-4)} = -2\sqrt[3]{x};$$

3-misol. $\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - 1} - \frac{1}{a} \right)$

ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$A = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a^2} - \sqrt{(1-a)^2}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} - \frac{1}{a} \right) = \\ = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} = \frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a^2}$$

4-misol. $(-\sqrt[3]{1+a} + \sqrt{1-a}) : (-\sqrt[3]{1-a^2} + 1)$ ifodani soddalash-tiring.

Yechish.

$$1) -\sqrt[3]{1+a} + \sqrt{1-a} = (1+a)^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{1-a} = \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}}$$

$$2) -\sqrt[3]{1-a^2} + 1 = (1-a^2)^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} + 1 = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$3) \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} : \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{1+\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}} = \sqrt{1-a}$$

5-misol. $\frac{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \frac{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. I-usul.

$$\begin{aligned} & \frac{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \frac{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \frac{\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \\ & = \frac{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \frac{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \\ & = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} = 2\sqrt[3]{a^2} \end{aligned}$$

II-usul.

$$\begin{aligned} & \frac{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}} + \frac{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}} = \\ & = \frac{(a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) + (a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})}{\sqrt[3]{a^4} - \sqrt[3]{b^4}} = \\ & = \frac{(a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})}{a^3\sqrt{a} - b^3\sqrt{b}} = 2\sqrt[3]{a^2} \end{aligned}$$

6-misol. $(\frac{1}{\sqrt[16]{a}} + \frac{1}{\sqrt[16]{b}})(\frac{1}{\sqrt[16]{a}} - \frac{1}{\sqrt[16]{b}})(\frac{1}{\sqrt[8]{a}} + \frac{1}{\sqrt[8]{b}})(\frac{1}{\sqrt[8]{a}} - \frac{1}{\sqrt[8]{b}}) \cdot$

$$(\frac{1}{\sqrt[4]{a}} + \frac{1}{\sqrt[4]{b}})(\frac{1}{\sqrt[4]{a}} - \frac{1}{\sqrt[4]{b}})(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}})(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}})$$

Yechish. $(\frac{1}{\sqrt[16]{a}} + \frac{1}{\sqrt[16]{b}})(\frac{1}{\sqrt[16]{a}} - \frac{1}{\sqrt[16]{b}})$

$$1). \quad (a^{\frac{1}{16}} + b^{\frac{1}{16}})(a^{\frac{1}{16}} - b^{\frac{1}{16}}) = a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}}$$

$$2). \quad (a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}})(a^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{8}}) = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$$

$$3). \quad (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}) = a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$$

$$4). \quad (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = a^{-1} - b^{-1}$$

$$5). \quad (a^{-1} - b^{-1})(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1}) = a^{-2} - b^{-2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$. j. $\frac{1}{x}(x+\sqrt{1-x^2})$

2. $\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}} - \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2+4}} : \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{a+\sqrt{a^2-4}}$. j. $\frac{2a}{a+\sqrt{a^2-4}}$.

3. $(\frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}) : (2y+1) + \sqrt{\frac{1}{y^2}-1} - 1$. j. $\frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$.

4. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - 1$ j. $-\frac{\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{a-b}$ agar $a \neq b$ bo'lsa.

5. $3b^4 \sqrt[3]{\frac{a^7 \sqrt[3]{a^2}}{27b^2}}$ j. $a^{\frac{11}{3}} \sqrt[3]{27a^{11}b^6}$ agar $b > 0$, $a \geq 0$ bo'lsa.

6. $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}$ j. $x+y$

7. $\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2 - \sqrt{x})^{-1}}{(x + \sqrt{x} + x\sqrt{x})^{-1}}$ j. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

8. $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$ j. \sqrt{a}

9. $\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$ j. $\frac{2\sqrt[4]{1-x^2}}{x}$

10. $\left(\frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \sqrt{x} \right) : \left(\frac{y}{\sqrt{xy}-x} + \frac{x}{\sqrt{xy}+x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right)$ j. $\sqrt{y}-\sqrt{x}$

11. $\left(\frac{\sqrt{x^3}-2}{\sqrt{x}-2x} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x^3}+2}{\sqrt{x}+2x} - \sqrt{x} \right) : \frac{1+\frac{1}{4}x^2}{x-\frac{1}{4}}$. j. $\frac{1-x}{x}$.

$$12. \left(\frac{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a}}{1 - \sqrt{a}} + \frac{1 + \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} \right)^2 : \left(1 + \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a} \right). \quad j. \quad \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2}.$$

$$13. \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}. \quad j. \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

$$14. \left[a^2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{a+b^2} \cdot 2^{-4} \right] : \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a(a^2 + b)^{\frac{1}{2}} + 1}. \quad j. \quad \frac{3a^2 + b^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

$$15. \frac{c + \sqrt{c^2 - 4} + 2}{c - \sqrt{c^2 - 4} + 2} + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4} + 2}{c \cdot 2 + \sqrt{c^2 - 4}} - 2c. \quad j. \quad -c$$

$$16. \frac{\frac{1}{a^2} + 1}{\frac{1}{a+a^2} + 1} : \left(a^{\frac{3}{2}} - 1 \right)^{-1} \quad j. \quad a.$$

$$17. 2a + \sqrt{a^2 - 1} \left(\frac{a^2}{a^2 - 1} + 1 \right) - 1 : \frac{a + (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{1 + a(a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}. \quad j. 2(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

$$18. \frac{x^2 + 2 + \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 + 2 - \sqrt{x^2 - 4}} + \frac{x^2 + 2 - \sqrt{x^2 - 4}}{x^2 + 2 + \sqrt{x^2 - 4}}. \quad |x| > 2 \quad j. \quad x.$$

$$19. \frac{1}{2} \left(\frac{3x^{-1}}{x^2 - x^{-1}} - \frac{x}{x^4 - x} \right) (x^2 + x + 1); \quad x \neq 0, x \neq 1. \quad j. \quad \frac{1}{x-1}.$$

$$20. \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a(a-b)^4}}, \frac{a^{\frac{2}{3}}(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})}{\sqrt[3]{(a-b)}}. \quad j. \quad a^2 + ab + b^2.$$

$$21. \frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} - \frac{1}{a}. \quad j. \quad 0.$$

4-§. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish

Maktab matematika kursining trigonometriya bo'limida juda ko'p ayniy munosabatlar, jumladan, quyidagi munosabatlar o'rganiladi:

1. Trigonometrik funksiyalarning birini ikkinchisi orqali ifodaydigan ayniy almashtirishlar.
2. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishdagi ayniy almashtirishlar.
3. Trigonometrik ayniyatlarni isbotlashdagi ayniy almashtirishlar.
4. Trigonometrik tenglamalarni yechishdagi ayniy almashtirishlar.

Yuqoridagilardan ko'rindik, trigonometriya kursida ayniy almashtirishlar muhim o'rinni egallaydi. IX sinf geometriya kursida trigonometrik funksiyalarga ta'rif berilganidan so'ng, to'rtta trigonometrik funksiyalarni o'zaro bog'lovchi quyidagi uchta ayniyat o'rganiladi:

$$1. \cos^2 a + \sin^2 a = 1;$$

$$2. \operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a};$$

$$3. \operatorname{ctga} = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Bu ayniyatlarni keltirib chiqarish maktab geometriya kursida batafsil bayon qilingan. Bu ayniyatdardan yana quyidagi uchta ayniyat keltirib chiqariladi:

$$1. \operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1; \quad 2. \frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \operatorname{tg}^2 a; \quad 3. \frac{1}{\sin^2 a} = 1 + \operatorname{ctg}^2 a.$$

Yuqoridagi ayniyatlar trigonometrik ifodalarni hisoblashda bajariladigan ayniy shakl almashtirishlarda eng ko'p ishlataladigan ayniyatlar bo'lib hisoblanadi. O'qituvchi o'quvchilarga ildizli ifodalar uchida bajariladigan trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni bajarishiga alohida e'tibor berish lozim. Masalan, $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ifodani

olaylik. Buni hisoblaydigan bo'lsak, $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \pm \sin \alpha$ tengligi o'rini bo'ladi.

O'quvchilarga $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sin \alpha$ va $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -\sin \alpha$ tengliklarning ma'nosini tushuntirish lozim. Bu yerda $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \sin \alpha$ qiymat I chorakdagi, $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = -\sin \alpha$ esa III chorakdagi qiymat ekanligini geometrik nuqtai nazaridan ko'rsatib tushuntirish maqsadga muvofiq. Bundan tashqari α ning aniq son qiymatlarida ham bu ifodalarni hisoblash lozim. Masalan, $\alpha = \frac{\pi}{3}$

bo'lganda $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, shuning uchun $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ammo $-\sin \alpha = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Demak, $\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \pm \sin \alpha$ ekan.

O'quvchilar ayniy shakl almashtirishlarni yaxshi o'zlashtirishlari uchun birinchidan trigonometrik funksiyalar ta'rifini, ulardan birini ikkinchisi orqali ifodalovchi va asosiy ayniyatlar kabi formulalarni bilishlariga, ikkinchidan esa ana shu formulalarni trigonometrik ifoda berilishiga qarab tadbiq qila olish malakalariga bog'liqdir. Maktab matematika kursidagi trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni og'zaki bajarishga o'quvchilarni o'rgatish ularda mantiqiy matematik tafakkurni shakllantiradi. O'qituvchi biror trigonometrik ifodaning shaklini almashtirishni bajarishdan oldin o'quvchilarga eng sodda bo'lgan og'zaki trigonometrik mashqlardan namunalarni doskaga yozib, o'quvchilardan tezroq og'zaki soddalashtrishni bajarishlarini talab qilishi o'quvchilarni trigonometrik ayniyat va formulalarni esda doimo saqlashlariga imkon yaratadi.

Masalan,

$$1 - \cos^2 \alpha; \quad 1 - \sin^2 \alpha; \quad (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha);$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}; \quad \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + 1; \quad \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha};$$

Bundan keyin o'qituvchi murakkabrok trigonometrik almashtirishlarni ko'rsatishi maqsadga muvofiqdir.

1-misol. $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha$ ifodani soddalashtiring.

1-usul.

$$\begin{aligned}(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \\ &= 1-(1-\cos^2\alpha)-\cos^2\alpha = 1-1+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha = 0.\end{aligned}$$

2-usul.

$$\begin{aligned}(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)-\cos^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = \\ &= 1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 1-1 = 0;\end{aligned}$$

2-misol. $\frac{\sin^4x+\cos^4x-1}{\sin^6x+\cos^6x-1}$ ifodani soddalashtiring.

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4x+\cos^4x-1}{\sin^6x+\cos^6x-1} &= \frac{(\sin^2x)^2+\cos^4x-1}{(\sin^2x)^3+\cos^6x-1} = \frac{(1-\cos^2x)^2+\cos^4x-1}{(1-\cos^2x)^3+\cos^6x-1} = \\ &= \frac{1-2\cos^2x+\cos^4x+\cos^4x-1}{1-3\cos^2x+3\cos^4x-\cos^6x+\cos^6x-1} = \frac{2\cos^2x(\cos^2x-1)}{3\cos^2x(\cos^2x-1)} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3-misol. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$ = $\operatorname{ctg}\alpha$ ayniyatni isbotlang.

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} = \\ &= \frac{2\cos\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.\end{aligned}$$

4 - misol. $\frac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta}$ ifodani soddalashtiring.

$$\begin{aligned}\frac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\sec\beta+\sec^2\beta} &= \frac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{1+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos^2\beta}} = \frac{1+\cos\beta+\cos^2\beta}{\frac{\cos^2\beta+\cos\beta+1}{\cos^2\beta}} = \\ &= \frac{(\cos\beta+1)\cos^2\beta}{\cos^2\beta+\cos\beta+1} = \cos^2\beta.\end{aligned}$$

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, trigonometriya kursida ayniy almashtirishlar muhim o'rinni egallaydi. O'quvchilar trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni yaxshi o'zlashtirishlari uchun birinchidan, trigonometrik funksiyalarni birini ikkinchisi orqali ifodalovchi va asosiy ayniyat kabi formulalarini, ikkinchidan esa shu formulalarini trigonometrik ifodalani berilishiga qarab tadbiq qila olish malakalariga bog'liqdir. Trigonometrik ayniy shakl almashtirishlarni bajarish uchun quyidagi formulalarini bilishlari kerak:

1. Asosiy trigonometrik ayniyatlar:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad 2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1) \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, (\alpha \neq \pi n); \quad 4) \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1) \right], n \in \mathbb{Z};$$

$$5) \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, (\alpha \neq \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bu ayniyatlardan kelib chiqadigan formulalar quyidagilardir:

$$1) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha, \quad \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1) \right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha, \quad (\alpha \neq \pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1-misol. Ayniyatni isbotlang.

$$\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2\operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha = 2, \left[\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1) \right].$$

Isboti:

$$\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha + 2)(2\operatorname{tg} \alpha + 1) - 5 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \cos^2 \alpha \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2 \right) \left(\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) - 5 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$2 \sin^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 5 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2.$$

2-misol. Ayniyatni isbotlang:

$$(1 + \sin \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \sin \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha. \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right).$$

Isboti.

$$\begin{aligned}(1 + \sin \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(1 - \sin \alpha) &= (1 + \sin \alpha) \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) (1 - \sin \alpha) = \\ &= \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.\end{aligned}$$

II. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining trigonometrik funksiyalari.

$$1) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$2) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$3) \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \pm \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

$$\left[\alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z} \right].$$

$$4) \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}. \quad (\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$$

1-misol. $\cos 15^\circ$ ni hisoblang.

Hisoblash.

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 0,9659.\end{aligned}$$

2-misol. $\sin 15^\circ$ ni hisoblang .

Hisoblash.

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

Xuddi shuningdek, $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{stg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$,
 $\sec 15^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ larni hisoblash mumkin.

3-misol. $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$ ayniyatni isbotlang.

$$\text{Исботи. } \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta).$$

4-misol. $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ ayniyatni isbotlang.

$$\text{Isboti } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \\ = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha(1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta(1 - \sin^2 \alpha) = \\ = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

Keltirish formulalari:

$$1) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha;$$

$$2) \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha;$$

$$3) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha, \quad \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$4) \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha, \quad \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha;$$

$$5) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha;$$

$$6) \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha;$$

IV. Ikkilangan va uchiangan burchakning trigonometrik funksiyalari:

$$1) \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad 2) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$3) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \left[2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z} \right];$$

$$4) \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \quad (2\alpha, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z});$$

$$5) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad 6) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$7) \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha} \left[2a, \alpha \neq \frac{\pi}{2} (2n+1), n \in \mathbb{Z} \right];$$

$$8) \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \left[\alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \right];$$

$$9) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad 10) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$11) \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}; \quad 12) \cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4};$$

1-misol. $\sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

$$\text{Isboti } \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) = \sin \alpha (\sin^2 60^\circ - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha \left(\frac{3}{4} - \sin^2 \alpha \right) =$$

$$= \frac{1}{4} (3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha.$$

2-misol. $\cos \alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

3-misol. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$ ayniyatni isbotlang.

Bu ayniyatlardan foydalanib, quyidagi trigonometrik ifodalarni osonlikcha hisoblash mumkin:

$$a) \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{1}{4} \sin 3 \cdot 20^\circ = \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$b) \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{1}{4} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8};$$

$$c) \operatorname{tg} 6^\circ \cdot \operatorname{tg} 54^\circ \cdot \operatorname{tg} 66^\circ = \operatorname{tg} 18^\circ.$$

4-misol. $\sin 3\alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha$ ayniyatni isbotlang.

$$\text{Isboti} \quad \sin 3\alpha \cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha = \sin 3\alpha \frac{\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha}{4} +$$

$$+ \cos 3\alpha \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} = \frac{3}{4} (\sin 3\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 3\alpha) = \frac{3}{4} \sin 4\alpha.$$

5-misol. $\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. Berilgan ifodani $\sin \alpha$ ga ko'paytiramiz hamda bo'lamiz.

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha \right)}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 8\alpha \right) \right]}{\sin \alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha}.$$

6-misol. $\operatorname{tg} 4\alpha - \sec 4\alpha = \frac{\sin 2a - \cos 2a}{\sin 2a + \cos 2a}$ ayniyatni isbotlang.

V. Yarim argumentning trigonometrik funksiyalari

$$1) \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad 2) \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$3) \quad \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad [\alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z]$$

$$4) \quad \left| \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}};$$

$$5) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad [\alpha \neq \pi n, n \in Z]$$

$$6) \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}; \quad [\alpha \neq \pi n, n \in Z]$$

1-misol. $\operatorname{tg} 7^{\circ} 30'$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 7^{\circ} 30' &= \frac{1 - \cos 15^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} = \frac{1 - \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \\ &= \frac{(4 - \sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 8}{4} = \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2.\end{aligned}$$

2-misol. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^{\circ}}{1 + \operatorname{tg}^2 15^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ni isbotlang.

$$\text{Isboti. } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 15^{\circ}}{1 + \operatorname{tg}^2 15^{\circ}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos 30^{\circ}}{1 + \cos 30^{\circ}}}{1 + \frac{1 - \cos 30^{\circ}}{1 + \cos 30^{\circ}}} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

VI. Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish formulalari:

$$1) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$2) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$3) \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Misol. $\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + \pi\beta)$ ifodani soddalash-tiring.

Yechish. Berilgan ifodani $\sin \frac{\beta}{2}$ ga ko'paytiramiz va bo'lamiz.

$$\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin \frac{\beta}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\beta}{2} \cos(\alpha + \beta) + \sin \frac{\beta}{2} \cos(\alpha + 2\beta) + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \sin \frac{\beta}{2} \cos(\alpha + n\beta) \Big] = -\frac{1}{2 \sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) + \right. \\
 & + \sin \left(\alpha + \frac{3\beta}{2} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{5\beta}{2} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{3\beta}{2} \right) + \dots + \\
 & + \sin \left(\alpha + \frac{3\beta}{2} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) + \sin \left(\alpha + \frac{5\beta}{2} \right) - \sin \left(\alpha + \frac{3\beta}{2} \right) + \dots + \\
 & \left. + \sin \left(\alpha + \frac{2n+1}{2}\beta \right) - \sin \left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta \right) \right] = \\
 & = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \left[\sin \left(\alpha + \frac{2n+1}{2}\beta \right) - \sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) \right] = \\
 & = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} 2 \sin \frac{n+1}{2} \beta \cos \left(\alpha + \frac{n}{2} \beta \right) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \beta \cos \left(\alpha + \frac{n}{2} \beta \right)}{\sin \frac{\beta}{2}}
 \end{aligned}$$

VII. Trigonometrik funksiyalar yig'indisi va ayirmasining formulalari:

$$1) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$2) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$3) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$4) \quad \cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$5) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}, \quad \left[\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z} \right];$$

$$6) \quad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}, \quad \left[\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z} \right];$$

$$7) \quad \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}, \quad [\alpha, \beta \neq m\pi, n \in \mathbb{Z}]$$

$$8) \quad \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

1-misol.

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \quad \text{ayniyatni isbotlang.}$$

Isboti.

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cos \frac{\gamma + \alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha - \beta - \gamma}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} 2 \cos \frac{\alpha - \beta + \alpha - \beta + 2\gamma}{4} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta - \alpha - \beta - 2\gamma}{4} =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

2-misol. Agar $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ bo'lsa, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 =$

$$= 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \text{ tenglikning o'rinli ekanligini isbotlang.}$$

Isboti. Shartga ko'ra $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ u holda

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 [\pi - (\alpha + \beta)] - 2 =$$

$$= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 (\alpha + \beta) - 2 =$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + \frac{1 - \cos 2(\alpha + \beta)}{2} - 2 =$$

$$= -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2(\alpha + \beta) + 1] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos^2(\alpha + \beta)] = \\
 &= -\cos(\alpha + \beta) [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = \\
 &= -2 \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta = -2 \cos(\pi + \gamma) \cos \alpha \cos \beta = \\
 &= 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

VII. Trigonometrik funksiyalarni yarim argumentning tangensi orqali ifodalash:

$$1) \quad \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \quad [a \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}]$$

$$2) \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \quad [a \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}]$$

$$3) \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \quad \left[a, \frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z} \right];$$

5-§. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishga doir misollar yechish metodikasi.

1-misol. $(1 - \sin a)(1 + \sin a) - \cos^2 a$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. I-usul.

$$\begin{aligned}
 (1 - \sin a)(1 + \sin a) - \cos^2 a &= 1 - \sin^2 a - \cos^2 a = 1 - (1 - \cos^2 a) - \cos^2 a = \\
 &= 1 - 1 + \cos^2 a - \cos^2 a = 1 - 1 + \cos^2 a - \cos^2 a = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II- usul. } (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) - \cos^2 \alpha &= \\
 &= 1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

$$2 \text{ misol. } \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} \text{ ifodani soddalashtiring.}$$

Yechish.
$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{(\sin^2 x)^2 + \cos^4 x - 1}{(\sin^2 x)^3 + \cos^6 x - 1} =$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x - 1}{(1 - \cos^2 x)^3 + \cos^6 x - 1} = \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x - 1}{1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x + \cos^6 x - 1} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x(\cos^2 x - 1)}{3\cos^2 x(\cos^2 - 1)} = \frac{2}{3}.$$

3 misol $\frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{1 + \sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1 - (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx.$$

4-misol. $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{ctg^2 x} - \frac{\sin^2 x}{tg^2 x}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{ctg^2 x} - \frac{\sin^2 x}{tg^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x = \frac{1 - \sin^2 x - \cos^4 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^4 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \sin^2 x.$$

5-misol. $\frac{[\cos(-a) + \sin(-a)]^2 - 1}{\cos^2(-a) + \sin^2(-a) - 1}$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{[\cos(-a) + \sin(-a)]^2 - 1}{\cos^2(-a) + \sin^2(-a) - 1} = \frac{(\cos a - \sin a)^2 - 1}{\cos^2 a - \sin^2 a - 1} =$$

$$= \frac{\cos^2 a - 2\cos a \sin a + \sin^2 a - 1}{\cos^2 a - \sin^2 a - (\cos^2 a + \sin^2 a)} = \frac{-2\cos a \sin a}{-2\sin^2 a} = ctga.$$

6-misol. $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$ ifodani ko'paytma shakliga keltiring.

Yechish. $1 + \sin \alpha + \cos \alpha = (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha =$

$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin 45^\circ \cdot$$

$$\cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

7-misol. $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha$ ifodani ayniy almashhtirish orqali ko'paytma shakliga keltiring.

Yechish. $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \alpha \right) = 2(\sin 60^\circ - \sin \alpha) =$

$$= 4 \sin \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right).$$

8-misol. $\frac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $\frac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \frac{(\sin \alpha + \sin 5\alpha) + 2 \sin 3\alpha}{(\sin 3\alpha + \sin 7\alpha) + 2 \sin 5\alpha} =$

$$= \frac{2 \sin 3\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin 3\alpha}{2 \sin 5\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin 5\alpha} = \frac{2 \sin 3\alpha (\cos 2\alpha + 1)}{2 \sin 5\alpha (\cos 2\alpha + 1)} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$$

9-misol. $1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi \right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ifodani soddalashtiring.

Yechish. $1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi \right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi \right) -$

$$- \left(\cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} \right) = 1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = 1.$$

10-misol. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ ifodani soddalashtiring.

Yechish.

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3\sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \\ &- 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= 1 - 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - (1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0. \end{aligned}$$

11-misol. $A = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$ ifodani

hisoblang.

Yechish. $A = \left(\sin^2 \frac{\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin^2 \frac{5\pi}{16} \right)^2 + \left(\sin^2 \frac{7\pi}{16} \right)^2 =$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \cos \frac{\pi}{8} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{5\pi}{8} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{7\pi}{8} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[4 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \right) \right] = 1 - \frac{1}{2} \times$$

$$\times 2 \left(2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{3\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{8} \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(4 + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $\frac{1 + i \operatorname{tg}(-60^\circ)}{\sin 60^\circ + \sin(-30^\circ)}$ ifodani soddalashtiring. J: -2

2. $\frac{2 - \sin(-45^\circ) \cdot \cos(-45^\circ)}{\tg(-45^\circ) \cdot \ctg 45^\circ}$ ifodani soddalashtiring. J: -2,5
3. $\frac{[\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)]^2}{1 - 2\sin(-\alpha) \cdot \cos(-\alpha)}$ ifodani soddalashtiring. J: 1
4. $\frac{\cos(-\alpha)}{1 + 2\sin^2(-\alpha)} - \frac{\sin(-\alpha)}{1 - 2\cos^2(-\alpha)}$ ifodani soddalashtiring.

$$j. \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

QUYIDAGI IFODALARNI HISOBLANG:

5. $\frac{4 - 2\tg 45^\circ + \tg 60^\circ}{3\sin 90^\circ - 4\cos 60^\circ + 4\ctg 45^\circ} \cdot j. \frac{2 + \sqrt{3}}{5}$
6. $\frac{4 - \tg^2 \frac{\pi}{4} + \ctg^4 \frac{\pi}{3}}{3\sin^3 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \ctg \frac{\pi}{4}} \cdot j. \frac{112}{153}$
7. $\left(4\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(2\tg \frac{\pi}{6}\right)^2 - \left(2\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 - \left(2\ctg \frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot j. -1.$
8. $\sin 2\pi + \cos 4\pi + \tg 2\pi \quad \text{ж.1}$
9. $\ctg \frac{\pi}{2} + \cosec \frac{\pi}{2} + \sec 0^\circ \quad \text{ж.2.}$
10. $a^2 \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cos \pi - b^2 \sin \frac{3}{2}\pi \cdot j. (a-b)^2.$
11. $10\tg 2\pi + 3\cos \frac{3}{2}\pi - 4\tg \pi - 5\sin \frac{3}{2}\pi \cdot j. 5.$
12. $4\sin 90^\circ + 3\cos 720^\circ - 3\sin 630^\circ + 5\cos 900^\circ \cdot j. 5.$
13. $5\tg 540^\circ + 2\cos 1170^\circ + 4\sin 990^\circ - 3\cos 540^\circ \cdot j. -1.$
14. $100\ctg^2 990^\circ + 25\tg^2 540^\circ - 3\cos^2 900 \cdot j. -3.$

15. $\operatorname{tg} 900^\circ - \sin(-1095^\circ) + \cos(-1460^\circ)$. j. $\sqrt{1,5}$.
16. $\sin(-1125^\circ) + \cos^2(-900^\circ) + \operatorname{tg} 1710^\circ$ j. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
17. $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$. j. -1.
18. $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) + \operatorname{cosec}^2 \frac{29\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{4}$. j. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.
19. $\frac{5 + \sin 30^\circ \cos 60^\circ - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{a + b \cos 2\pi - \sin \pi}$. j. $\frac{17}{4(a+b)}$.
20. $\frac{m \cos \frac{\pi}{4} + n \sin \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \pi}{mn - m \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - c \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}$. j. $\frac{\sqrt{2}(m+n)}{2m(n-1)}$.
21. $(\sin \varphi + \cos \varphi)^2 + (\sin \varphi - \cos \varphi)^2$. j. 2.
22. $\frac{1 + \cos \beta + \cos^2 \beta}{1 + \sec \beta + \sec^2 \beta}$. j. $\cos^2 \beta$.
23. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\alpha}{2}$. j. 1.
24. $\frac{1}{\cos ec^2 2\alpha - 1} + \frac{\cos^2 2\alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$. j. $\sec^2 2\alpha$.
25. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} + \sin^2 \beta$. j. $\cos^2 \beta$.
26. $(1 - \cos^2 x) \operatorname{ctg}^2 x - 1$. j. $-\sin^2 x$.
27. $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x$. j. $\cos^2 x$.
28. $\frac{1 - \sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}{2 \sin^4 2\alpha} + 1$. j. 1.
29. $(1 - \cos^2 \beta) \operatorname{g}^2 \beta - \sec^2 \beta$. j. $-\cos^2 \beta$.

30. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cosec^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cosec^2 \frac{\alpha}{2}$. j. $\cosec^2 \frac{\alpha}{2}$.
31. $\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$. j. 0.
32. $\frac{1 + 2 \sin 2x \cdot \cos 2x}{\cos 2x + \sin 2x} - \cos 2x$ j. $\sin 2x$.
33. $(\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha$. j. 1.
34. $\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta} + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin^2 \beta$. j. $\cosec^2 \beta$.
35. $\sqrt{\frac{\cosec^4 \alpha - \operatorname{ctg}^4 \alpha}{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}}$ j. $\frac{1}{|\sin \alpha|} = |\cosec \alpha|$.
36. $\frac{\cosec^2 \alpha - 1}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha}$. j. $\cosec^2 \alpha$
37. $\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ j. -1.
38. $\frac{\sin^4 3\alpha - \cos^4 3\alpha}{\sin^2 3\alpha - \cos^2 3\alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha$. j. $\sec^2 \alpha$.
39. $\frac{\sin^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \beta}{\cosec^2 \beta - \operatorname{ctg}^2 \beta} \cdot \operatorname{ctg}^2 \beta$. j. $-\sin^2 \beta$.
40. $\sin \alpha(1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha(1 + \operatorname{ctg} \alpha)$ j. $\cosec \alpha + \sec \alpha$.
41. $\frac{\cosec \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ j. 1.
42. $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ - \alpha)}{\sqrt{3} \sin \alpha - 2 \sin(30^\circ + \alpha)}$ j. $\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$.
43. $\frac{\sin(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta}$ j. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.
44. $\frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}$ j. $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

$$45. \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha} \quad j. \operatorname{tg}\alpha.$$

$$46. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\alpha}{\cos\frac{\pi}{4}} \quad j. 1.$$

$$47. \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha + \sin\beta}. \quad j. \sin\alpha - \sin\beta.$$

$$48. \left(\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \right)^2 + \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad j. \sec^2(\alpha + \beta)$$

$$49. \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha - \beta)}. \quad j. 2\operatorname{ctg}\beta.$$

$$50. \frac{\operatorname{tg}(25^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(65^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(65^\circ - \alpha)\operatorname{tg}(25^\circ + \alpha)} \quad j. \infty.$$

$$51. \frac{\sin(\alpha - \beta)}{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \quad j. \cos\alpha.$$

$$52. \frac{1 - \cos^2 \phi}{1 - \sin^2 \phi} + \operatorname{tg}\phi \operatorname{ctg}\phi = \sec^2 \phi.$$

$$53. (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = 4.$$

$$54. \frac{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha} = 1 + \sin\alpha.$$

VII-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

1. Ayniy shakl almashtirish deb nimaga aytildi?
2. Ayniyat tushunchasini ta'riflab bering.

3. Birhad deb nimaga aytildi?
4. Ko'phad deganda nimani tushunasiz?
5. O'xhash hadni ta'riflab bering.
6. Ixchamlash deganda nimani tushunasiz?
7. Qanday ifodaga kasr ratsional ifoda deyiladi?
8. Irratsional ifodani ta'riflab bering.
9. Trigonometrik ifodalardagi ayniy almashtirishlar qanday bajariladi?
10. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining sinusi nimaga teng?
11. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining kosinusi nimaga teng?
12. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining tangensi nimaga teng?
13. Ikki burchak yig'indisi va ayirmasining kotangensi nimaga teng?
14. Asosiy trigonometrik ayniyatlarni yozib bering.
15. Ikkilangan va uchlangan trigonometrik funksiyalarni tushuntirib bering.
16. Yarim argumentni trigonometrik funksiyalari deganda nimani tushunasiz?
17. Trigonometrik funksiyalar ko'paytmasini yig'indiga qanday keltiriladi?
18. Trigonometrik funksiyalar yig'indisi va ayirmasining ko'paytmaga qanday keltiriladi?
19. Trigonometrik funksiyalarni yarim argumentli tangensi orqali qanday ifodalanadi?
20. Trigonometrik ifodalarni soddalashtirish deganda nimani tushunasiz?

VII-BOB UCHUN TAYAN IBORALAR

Ayniyat tushunchasi, birhad, ko'phad, o'xhash had, ixchamlash, kasr ratsional ifoda, irratsional ifoda, trigonometrik ifoda, ikki burchak yig'indisining sinusi, kosinusi, tangensi, kotangensi, ikki burchak ayirmasining sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi, trigonometrik ayniyat, ikkilangan trigonometrik funksiyalar.

1-§. Tenglama tushunchasini kiritish metodikasi.

Tenglama tushunchasi maktab matematika kursida konkret-induktiv metod orqali kiritiladi. O'quvchilar IV sinfgacha natural sonlar ustida ta'rifsiz to'rt amalni bajarishni o'rganadilar, so'ngra o'quvchilarga qo'shish, ayirish, bo'lish amallarida qatnashayotgan komponentlardan ikitasi ma'lum bo'lganda noma'lum qatnashayotgan komponentni topish o'rganiladi. Bunda ana shu topilishi kerak bo'lgan komponentni harf bilan belgilanadi. Masalan, qanday songa 4 ni qo'shsak, 7 soni hosil bo'ladi? ($x + 4 = ?$). Qanday sondan 8 ni ayirsak, 10 soni hosil bo'ladi? ($x - 8 = 10?$). Qanday sonni 5 ga bo'lsak, 7 soni hosil bo'ladi? ($x : 5 = 7?$), 18 soni qanday songa bo'linsa, 3 soni hosil bo'ladi? ($18 : x = 3?$). Shu xildagi savollar asosida harfiy ifoda qatnashgan to'rt amalga doir tengliklarni hosil qilishimiz mumkin. O'quvchilar $x + 4 = 7$ tenglikdagi noma'lum x sonini topishni ayirish mavzusidan biladilar, ya'ni "noma'lum qo'shiluvchini topish uchun yig'indidan ma'lum qo'shiluvchini ayirish kerak" degan qoidaga ko'ra berilgan $x + 4 = 7$ tenglikdagi noma'lum sonni quyidagicha topadilar: $x = 7 - 4 = 3$. Ana shu fikrlarni o'quvchilarga tushuntirib, so'ngra $x+4=7$ tenglik matematika kursida tenglama deb atalishini, so'ngra unga berilgan quyidagi ta'rifni keltirish mumkin.

Ta'rif. Noma'lum son qatnashgan tenglik tenglama deyiladi.

$$x + 4 = 7; x - 5 = 9; 12 - x = 6,27; x = 9; x : 8 = 7 \dots .$$

Tenglama deb qaralayotgan tengliklarda noma'lum sonlar x , y , z , ... harflar bilan belgilanadi. Tenglamani yechish degan so'z uning hamma ildizlarini topish demakdir, boshqacha qilib aytganda, noma'lumning tenglamani chap qismini uning o'ng qismiga teng qiladigan qiymatni topish tenglamani yechish deb ataladi. Masalan, $x+4=7$ tenglama, $x=3$ soni uning ildizidir, chunki tenglamaning ildizigina berilgan tenglikni to'g'ri tenglikka aylantira oladi.

T a' r i f. Nomalum sonning topilgan qiymati berilgan tenglamaning yechimi yoki ildizi deyiladi.

Bundan ko‘rinadiki, noma’lumning tenglamani ikkala qismini son jihatidan teng qiladigan qiymati tenglamaning ildizi yoki yechimi bo‘lar ekan. Demak, $x=3$ yechim bo‘lgani uchun $3+4=7$ bo‘ladi. IV sinf o‘quvchilariga bir noma’lumli tenglamalarni yechish uchun quyidagi qoida o‘rgatiladi:

1. Agar berilgan tenglamada noma’lum son kamayuvchi bo‘lsa, u quyidagi qoidaga ko‘ra topiladi. *Noma’lum kamayuvchini topish uchun ayiriluvchi bilan ayirmani ko‘shish kerak.* Umumiy holda $x-b=c$ bo‘lsa, $x=b+c$ bo‘ladi.

2. Agar berilgan tenglamada noma’lum son ayiriluvchi bo‘lsa, u quyidagi qoidaga ko‘ra topiladi. *Noma’lum ayiriluvchini topish uchun kamayuvchidan ayirmani ayirish kerak.* Umumiy holda: $a-x=c$ bo‘lsa, $x=a-c$ bo‘ladi.

3. Agar berilgan tenglamada noma’lum son ko‘payuvchilardan biri bo‘lsa, u quyidagi qoidaga ko‘ra topiladi. *Nomalum ko‘payuvchini topish uchun ko‘paytmani ma’lum ko‘payuvchiga bo‘lish kerak.* Umumiy holda: $a \cdot x = c$ bo‘lsa. $x=c:a$ bo‘ladi.

4. Agar berilgan tenglamada noma’lum son bo‘luvchi bo‘lsa, u holda u quyidagi qoidaga ko‘ra topiladi. *Noma’lum bo‘luvchini topish uchun bo‘linuvchini bo‘linmaga bo‘lish kerak.* Umumiy holda $a : x = c$ bo‘lsa, $x = a : c$ bo‘ladi.

5. Agar berilgan tenglamada noma’lum son bo‘linuvchi bo‘lsa, u quyidagi qoidaga ko‘ra topiladi. *Noma’lum bo‘linuvchini topish uchun bo‘linmaga bo‘luvchini ko‘paytirish kerak.* Umumiy holda $x : a = c$ bo‘lsa, $x = a \cdot c$ bo‘ladi.

6. V sinf matematika kursida manfiy sonlarni ayirish mavzusi o‘tiladi, bunda berilgan yig‘indi va qo‘shiluvchilardan biriga ko‘ra ikkinchi qo‘shiluvchi topiladi. Masalan, $x+(-5)=12$ tenglik berilgan bo‘lsin. x ni topish uchun tenglikni hap ikki qismiga 5 sonni qo‘shamiz, $x+(-5)+5=12+5$, $x=17$. Eundagi 17 soni 12 va -5 sonlarining ayirmasidir, ya’ni $12-(-5)=12+5=17$. Javobning to‘g‘riligini qo‘shish amali^c orqali tekshiriladi: $17+(-5)=12$. Agar $x+(-5)=12$ tenglikka IV sinfdagi berilgan tenglama ta’rifini qo‘llasak, $x+(-5)=12$ tenglik tenglama bo‘lib hisoblanadi. Bu yerdagi $x=17$ soni esa $x+(-5)=12$ tenglamaning ildizi bo‘ladi. Yuqorida yechish bosqichlariga ko‘ra $x+a=o$ yoki $-x+a=o$ ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish qoidasini

chiqarish mumkin. $x+a=b$ yoki $-x+a=b$ ko‘rinishdagi har qanday tenglamani yechish uchun ularning chap va o‘ng qismlariga birgina $-a$ sonini qo‘shish kifoya. $(x+a=b) \Rightarrow [x+a-a=b-a] \Rightarrow (x=b-a)$;

$$(-x+a=b) \Rightarrow (-x+a-a=b-a) \Rightarrow (-x=b-a) \Rightarrow (x=a-b).$$

M i s o l l a r: 1) $y+9=-5$ 2) $x-3=-17$.

$$\begin{array}{ll} y+9-9=-5-9 \\ y=-14. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x-3+3=-17+3 \\ x=-14. \end{array}$$

$$3) 4 - (2,8 - x) = 1,5$$

Tekshirish:

$$4 - 1,5 = 2,8 - x$$

$$4 - (2,8 - 0,3) = 1,5$$

$$-2,8 + 2,5 = 2,8 - 2,8 - x$$

$$1,5 = 1,5.$$

$$-x = -0,3 \Rightarrow x = 0,3.$$

Shu misollardan keyin tenglama tuzishga olib keladigan masalalarni yechish foydali bo‘ladi.

1 - m a s a l a. Savatda bir necha qo‘ziqorin bor edi. Unga yana 27 ta qo‘ziqorin solinganidan keyin qo‘ziqorinlar 75 ta bo‘ldi. Savatda nechta qo‘ziqorin bo‘lgan?

Ye ch i sh. Savatdagi bor qo‘ziqorinlar sonini x bilan belgilaymiz. U holda shartga muvofiq $x+27=75$ tenglamani tuzamiz.

Tenglamani yechish uchun bunday mulohaza yuritamiz: tenglikdagi noma’lum qo‘shiluvchini topish uchun yig‘indidan ma’lum qo‘shiluvchini ayirish kifoya, ya’ni $x=75-27=48$ (ta). Tenglama yechimini to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini bilish uchun tuzilgan tenglamadagi noma’lum x o‘rniga 48 sonini qo‘yib, uni hisoblaymiz. Agar tenglamaning chap qismida ham 75 chiqsa u to‘g‘ri yechilgan bo‘ladi. $48+27=75$, $75=75$. Demak, yechim to‘g‘ri ekan.

2- m a s a l a. O‘quvchida 81 tiyin bor edi. U bir necha tiyinga konfet oldi, shundan keyin unda 63 tiyin qoldi. Konfet qancha tiyin turadi?

Matematika fanida tenglik tushunchasi taqqoslash tushunchasi orqali quyidagicha tushuntiriladi: o‘rganilayotgan matematik ob’ekt-dagi narsalarning o‘zaro o‘xshash va farqli tomonlarini fikran aniqlash taqqoslash deyiladi. Ana shu o‘rganilayotgan narsalarning o‘xshash yoki farqli tomonlarini taqqoslaganda bir xil son qiymatiga ega bo‘lsa, u holda bu narsalar son jihatidan teng deb qaraladi, u tenglik (\Rightarrow) ishorasi bilan belgilanadi. Agar a va b sonlar o‘zaro teng bo‘lsa, u $a=b$ kabi belgilanadi, agar ular teng bo‘lmasa, $a\neq b$ kabi

belgilanadi. Masalan, $3=3$, $7+1=8$, $9-6=3$ Xuddi shuningdek, $8\neq 9$, $3+5\neq 4$, . . . kabi yoziladi.

Matematika kursida tengliklar ikki xil bo‘ladi, ayniyat va tenglama.

T a ‘ r i f. Tarkibidagi noma’lum sonlarning yo‘l qo‘yiladigan har qanday qiymatlarida ikkali qismi bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan tenglik ayniyat deyiladi. Masalan,

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1);$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2, \quad \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

1) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ tenglikni olaylik, x ning ixtiyoriy qiymatlarida tenglikning chap tomoni o‘ng tomoniga teng chiqadi. Masalan,

$$x = 2 \text{ bo‘lsin}, 2^2 - 1 = (2 - 1)(2 + 1), \text{ bundan } 3 = 3$$

$$x = 5 \text{ bo‘lsin}, 5^2 - 1 = (5 - 1)(5 + 1), \text{ bundan } 24 = 24$$

2) $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1}$. tenglikni olaylik, bu yerda eng avvalo

bü tenglikdagi noma’lumlarning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlarini aniqlash lozim. Bu tenglikda $x \neq \pm 1$ bo‘lishi kerak, aks holda kasrning maxraji nolga teng bo‘lib, u ma’noga ega bo‘lmay qoladi. Shuning uchun berilgan xarflarning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlariga quyidagicha ta‘rif berilgan.

T a ‘ r i f. Tenglik tarkibiga kiruvchi harflarning shu tenglikning o‘ng va chap qismi ma’noga ega bo‘ladigan qiymatlari bu harflarning yo‘l qo‘yiladigan qiymatlari deyiladi. Yuqoridagi tenglamada yo‘l quyiladigan qiymatlar $x \neq \pm 1$ lardan boshqa barcha haqiqiy sonlardir. Masalan,

$$\text{agar } x = 2 \text{ bo‘lsa}, \frac{1}{2^2 - 1} = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{1}{2-1}, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{agar } x = 3 \text{ bo‘lsa}, \frac{1}{3^2 - 1} = \frac{1}{3+1} \cdot \frac{1}{3-1}, \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Endi matematika kursida shunday tengliklar ham borki, ularning ikkala qismi harfning bir xil yo‘l qo‘yiladigan qiymatlarida turii son qiymatlarini qabul qiladi. Masalan: $x+5=7$, $2x - 7 = 8$.

Bu ko'inishdagi tengliklarni tenglamalar deb ataladi, tenglama biror berilgan tenglikni ikkala qismi noma'lum harfning yo'l qo'yiladigan qiymatlarida bir xil son qiymatlar qabul qilishini aniqlash masalasini o'rganuvchi tenglik bo'lib hisoblanadi. V sinfda $4x=2x+16$ ko'inishdagi tenglamani yechish o'rganiladi. Bunday tenglamalarni yechish uchun tenglikning har ikkala tomoniga $-2x$ ifodani qo'shamiz. $4x+(-2x)=2x+(-2x)+16$, $4x-2x=2x-2x+16$. Bu ifodaning tengligini quyidagicha tushuntirish mumkin. Tarozining har ikkala pallasidan o'zaro teng bo'lgan miqdordagi narsalarni olib tashlaymiz, u holda $2x=16$ tenglik hosil bo'ladi, bundan $x=8$ soni kelib chiqadi, $x=8$ soni $4x=2x+16$ tenglamaning yechimi yoki ildizi bo'ladi.

Bir noma'lumga nisbatan ikki tenglamadan birining har bir ildizi ikkinchi tenglamaning ham ildizi bo'lsa, ikkinchi tenglamaning har bir ildizi esa shu bilan birga birinchi tenglamaning ham ildizi bo'lsa, bu ikki tenglama *teng kuchli (ekvivalent) tenglamalar* deyiladi. Masalan, $2x+5=7$ va $x-1=0$ tenglamalar teng kuchli tenglamalardir, chunki ularning ikkalasining ham ildizi $x=1$ sonidan iboratdir. Bundan tashqari ildizlari mavjud bo'lмаган tenglamalar ham teng kuchlidir. Masalan, $x^2=-3$ va $x^2+2=-5$ va hokazo. Teng kuchli tenglamalarning quyidagi xossalarni o'quvchilarga tushuntirish maqsadga muvofiqdir.

1 - x o s s a. Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli hivor songa ko'paytirlisa yoki bo'linsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglash hosil bo'ladi.

Masalan, $15x-5=25$, bu tenglamaning har ikki tomonini 5 soniga bo'lsak, $3x-1=5$ tenglama hosil bo'ladi, bu tenglama oldingi tenglamaga teng kuchli bo'lgan tenglamadir.

Masalan: $12x-7=2x+13$. $12x-2x=13+7$, $10x=20$, $x=2$.

2-§. Chiziqli tenglamalar.

Maktab matematika kursida chiziqli tenglama tushunchasini kiritish abstrakt-deduktiv usul orqali amalga oshiriladi, chunki bu tenglama uchun avvalo ta'rif beriladi, so'ngra tenglamaning umumiy ko'rinishi va uni yechish usullari hamda grafigi o'rganiladi.

Ta’rif. Agar tenglamaning chap va o‘ng qismlari, noma’lum o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli funksiyalardan iborat bo‘lsa, bunday tenglama chiziqli tenglama deyiladi.

Chiziqli tenglama umumiy holda $ax+b=cx+d$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bu yerda a, b, c, d - berilgan ma’lum sonlar, x esa noma’lum son. Bu ko‘rinishdagi tenglamalarni yechish quyidagicha amal oshiriladi.

$$ax+b=cx+d \text{ (1), } ax-cx=d-b, x(a-c)=d-b, x = \frac{d-b}{a-c} \quad (2)$$

1. Agar $a \neq c$ bo‘lsa, (1) tenglama (2) ko‘rinishdagi bitta yechimga ega bo‘ladi.

2. Agar $a=c=0$, $d-b \neq 0$ bo‘lsa. (1) tenglama $0x=d-b$ ko‘rinnshni oladi, bunday tenglama x ning hech bir qiymatida o‘rinli bo‘lmaydi. Demak, bu holda tenglama yechimga ega emas.

3. Agar $a=c=0$ va $d-b=0$ bo‘lsa, (1) tenglama $0x=0$ ko‘rinishni oladi, bu tenglik x ning barcha kiymatlarida o‘rinli, shuning uchun (1) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, Hap qanday son uning yechimi bo‘laveradi.

1-m i s o l. $a+x=a^2x-1$ tenglamani x ga nisbatan yeching.
Ye ch i sh. $a+1=a^2x-x$, $a+1=x(a^2-1)$; $a+1=x(a-1)(a+1)$

1. Agar $a \neq +1$ bo‘lsa, tenglama $x = \frac{1}{a-1}$ yechimga ega.

2. Agar $a=-1$ bo‘lsa, tenglama $0x = 1$ ko‘rinishni oladi, bu holda u yechimga ega emas.

3. Agar $a=-1$ bo‘lsa, tenglama $-2x=1$, $x = -\frac{1}{2}$ ko‘rinishni oladi, bu holda u tenglama yechimga ega.

2 - m i s o l. $3-ax=x-b$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

3 - m i s o l. $ax-b=1+x$ tenglamani x ga nisbatan yeching.

3-§. Parametrik usulda berilgan kasr - ratsional tenglamalarni yechish.

Parametrik usuldagi tenglamalarni yechish degan so'z tenglamada qatnashayotgan parametrlerning yo'l qo'yiladigan barcha qiymatlariga mos keluvchi ildizlarni topish demakdir.

$$\text{M i s o l. } \frac{5}{ax-4} = \frac{1}{9x-a} \text{ tenglama yechilsin.}$$

Bu tenglama ma'noga ega bo'lishi uchun $ax-4 \neq 0$ va $9x-a \neq 0$ bo'lishi kerak. Tenglamaning har ikkala tomonini $(ax-4) \cdot (9x-a)$ ga ko'paytirsak $45x - ax = 5a - 4$ tenglama hosil bo'ladi, bundan:

$$45x - ax = 5a - 4, x(45 - a) = 5a - 4. \quad (1)$$

Endi biz a ning qanday qiymatlarida $9x-a=0$ ga $ax-4=0$ tengliklar o'rinali bo'lishini topamiz. $x = \frac{a}{9}$ va $x = \frac{4}{a}$, $a \neq 0$. Bu qiymatlarni (1) tenglamaga qo'ysak, a ga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo'ladi:

$$1) \frac{a}{9} (45 - a) = 5a - 4. \quad 2) \frac{4}{a} (45 - a) = 5a - 4$$

$$45a - a^2 = 45a - 36, \quad 180 - 4a = 5a^2 - 4a \\ a^2 = 36, \quad a = \pm 6. \quad a^2 = 36, \quad a = \pm 6.$$

Agar parametr $a = \pm 6$ qiymatni qabul qilsa, berilgan tenglama maxraji nolga teng bo'lib, u ma'noga ega bo'lmaydi, shu sababli $(45-a)x = 5a - 4$. (1) tenglama berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lganligi uchun, $a \neq \pm 6$ shartga ko'ra, bu tenglamani quyidagicha yechamiz:

- Agar $45 - a \neq 0$ bo'lsa, $a \neq 45$ bo'ladi. Bu holda (1) tenglama bitta yechimga ega bo'ladi.

- Agar $45 - a = 0$ bo'lsa, (1) tenglama $0 \cdot x = 221$ bo'ladi, bu holda tenglama yechimga ega emas. Javob: $x = \frac{5a - 4}{45 - a}$, $a \neq 45$ va $a = \pm 6$.

- Agar $a = 45$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

- Agar $a = \pm 6$ bo'lsa, tenglama ma'noga ega bo'lmaydi.

$$2-\text{m i s o l. } \frac{1}{2n+nx} + \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{2(n+3)}{x^3 - 4x} \text{ tenglama yechilsin.}$$

J a v o b : 1) agar $n = -4$ bo'lsa, $x = 8$; 2) agar $n = -2$ bo'lsa, $x = 4$; 3) agar $n = -1$ bo'lsa, $x = 1$; 4) agar $n = 1$ bo'lsa, $x = 3$.

3 - misol. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-b} = 1 + \frac{1}{b}$ tenglama yechilsin.

Javob: $x_1 = b + 1, x_2 = \frac{2b}{b+1}, b \neq 0, b \neq 1$.

Agar $b = -1$ bo'lsa, $x = 0$. Agar $b = 1$ bo'lsa, $x = 2$.

4-§. Noma'lum absolyut miqdor belgisi ostida qatnashgan tenglamalarni yechish metodikasi

Absolyut miqdor ta'rifiga ko'ra x sonining absolyut miqdori quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Masalan. $|5| = 5, |-2| = 2; \dots$

T a ' r i f. Agar tenglamadagi noma'lum soni absolyut qiymati belgisi bilan kelsa, bunday tenglama absolyut miqdor belgisi ostidagi tenglama deyiladi.

Masalan, $|3x - 1| = 4, |2x - 1| = |5x - 7|, |5x - 7| = 13$

Bu ko'rinishdagи tenglamalarni quyidagi usullar bilan yechiladi.

1-misol. $|5x - 7| = 13$.

Yechish. 1 - usul.

$$1) 5x - 7 = 13,$$

$$2) 5x - 7 = -13,$$

$$5x = 13 + 7,$$

$$5x = -13 + 7,$$

$$5x = 20,$$

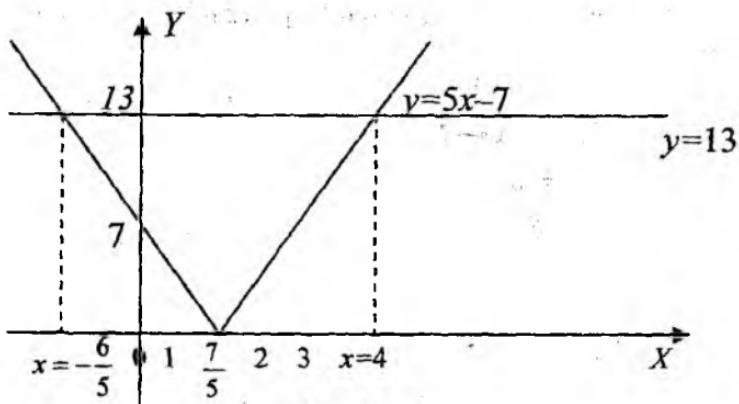
$$5x = -6,$$

$$x = 4,$$

$$x = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5},$$

Tekshirish. $20 - 7 = 13, 13 = 13$. Demak, $x = 4, x = -6/5$ sonlari berilgan tenglamaning ildizlari bo'ladi.

2 - usul. (Grafik usuli): $y = 5x - 7$ funksiya grafigini chizamiz, ularning kesishish nuqtasingin absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi (40-chizma).



40-chizma.

X	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4
Y	7	2	3	8	13	18	23	12	17	22	27

Buning uchun $y=|5x-7|$ funksiyaning grafigini yasaymiz. Bu grafikning x o'qidan yuqorida yotgan qismini o'zgarishsiz qoldiramiz. Uning uchun $5x-7>0$, shu sababli $|5x-7|=5x-7$ bo'ladi. Bu grafikning absissalar o'qidan pastga yetgan qismiga shu o'qqa nisbatan simmetrik akslantiramiz. Bu holda $5x-7<0$ bo'ladi, ya'ni $|5x-7|=-(5x-7)$. Natijada $y=5x-7$ funksiya grafigi $y=13$ chiziq bilan ikki nuqtada kesishadi, kesishish nuqtalarning absissalari $x=4$ va $x=-\frac{1}{5}$ nuqtalardan iborat bo'ladi, ana shu nuqtalar $|5x-7|=13$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

3 - usul. (oraliqlar metodi). Absolyut miqdor belgisi ostidagi $|5x-7|$ ifoda $x=\frac{7}{5}$ da nolga aylanadi. Sonlar to'g'ri chizig'ida $x=\frac{7}{5}$ nuqtani belgilab, bu nuqtadan chapda $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$ va o'ngda $\left(\frac{7}{5}; \infty\right)$ olingan qiymatlarga ko'ra $|5x-7|$ ifodani absolyut miqdor belgisiz quyidagicha yozish mumkin:

$$|5x-7| = \begin{cases} -5x+7, & \text{birinchi } \left(-\infty; \frac{7}{5}\right) \text{ oraliqda,} \\ 5x-7, & \text{ikkinci } \left(\frac{7}{5}; \infty\right) \text{ oraliqda.} \end{cases}$$

Bularga ko'ra tenglamani quyidagi ikki ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{aligned} 1) \quad -5x + 7 &= 13, \\ -5x &= 13 - 7, \\ -5x &= 6, \\ x &= -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 5x - 7 &= 13, \\ 5x &= 13 + 7, \\ 5x &= 20, \\ x &= 4, \end{aligned}$$

2 - misol. $|7x - 1| = 21 - 9x$.

Yechish.

$$\begin{aligned} 1) \quad 7x - 1 &= 21 - 9x, \quad 2) \quad 7x - 1 = -(21 - 9x), \\ 7x + 9x &= 21 + 1, \quad 7x - 1 = 9x - 21 \\ 16x &= 22, \quad 9x - 7x = 21 - 1, \\ x &= \frac{22}{16} = \frac{11}{8}, \quad x = 1\frac{3}{8}. \quad 2x = 20, \quad x = 10. \end{aligned}$$

Tekshirish.

$$7 \cdot \frac{11}{8} - 1 = 21 - 9 \cdot \frac{11}{8}, \quad \frac{77 - 8}{8} = \frac{168 - 99}{8}.$$

Demak, $x = \frac{11}{8}$ soni berilgan tenglama yechimi ekan.

3-misol. $|x-1| + |x+1| = 2$ tenglama yechilsin. Bu tenglamada $x-1=0$ va $x+1=0$, demak, ular $x=1$ va $x=-1$ yechimlarga ega bo'ladi. Sonlar to'g'ri chizig'ida $x=1$ va $x=-1$ nuqtalarni belgilaymiz, bu holda sonlar to'g'ri chizig'i uchta oraliqqa ajraladi. Birinchi oraliq $(-\infty, -1)$, ikkinchi oraliq $[-1, 1]$, uchinchi oraliq $(1, \infty)$ dan iboratdir. $|x-1|$ va $|x+1|$ ifodalarning har birini hosil qilingan oraliqlarda absolyut miqdor belgisiz quyidagicha yozish mumkin:

1) agar $x \leq -1$ bo'lsa, $|x-1| + |x+1| = 2$ tenglama $-x+1-x-1=2$ bo'ladi, bundan $-2x=2$ yoki $x=-1$ yechimiga ega bo'lamiz;

2) agar $-1 \leq x \leq 1$ bo'lsa, $|x-1| + |x+1| = 2$ tenglama $-x+1+x+1=2$ bo'ladi, bundan $2x=2$ yoki $x=1$ bo'ladi. Demak, $x=-1$ va $x=1$ yechimlarga ega bo'ladi.

4 - misol. $2x^2 - 5x - 3|x-2|=0$ tenglama yechilsin.

1) agar $x < 2$ bo'lsa, $2x^2 - 5x - 3|x-2|$ tenglama $2x^2 - 5x + 3x - 6 = 0$ yoki $x^2 - x - 3 = 0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$,

ya'ni $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ va $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ yechimlar hosil qilinadi.

Bunda: $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ yechim qaralayotgan sohada yetmaydi,

shuning uchun $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $(-\infty, 2)$ oraliq uchun yechim bo'ladi;

2) agar $x \geq 2$ bo'lsa, berilgan tenglamadan $2x^2 - 5x - 3 = 0$ hosil bo'ladi yoki ushbu $x^2 - 4x + 3 = 0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak, $x_1 = 1$ va $x_2 = 3$ yechimlarga ega bo'lamiz. Bundagi $x_1 = 1$ yechim qaralayotgan oraliqda yotmaydi, shuning uchun $(2, \infty)$ oraliq uchun yechim $x_2 = 3$ bo'ladi. Demak. $2x^2 - 5x - 3|x-2|=0$ tenglamaning yechimi $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = 3$ bo'ladi.

5-§. Kvadrat tenglama tushunchasini kiritish metodikasi.

Kvadrat tenglama tushunchasi VII sinfda o'tiladi. Bu tema materialini o'tishdan bir necha kun oldin o'qituvchi qo'shimcha vazifa sifatida o'quvchilarga kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratish mavzusini o'rganib kelishlarini vazifa qilib berilishi kerak.

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Misol.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 3 &= 2\left(x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right) = 2\left(x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{2} - 1\right) = \\ &= 2((x+1)^2 - \frac{5}{2}) = 2(x+1)^2 - 5. \end{aligned}$$

Kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratishni tushuntirilganidan so'ng kvadrat tenglama tushunchasini abstrakt-deduktiv usul orqali kiritiladi.

T a ' r i f: $ax^2 + bx + c = 0$ (1) ko'rinishdagi tenglama kvadrat tenglama deyiladi, bu yerda a, b, c berilgan sonlar, $a \neq 0$, x noma'lum sondir.

Bu tenglamaning ildizlarini topish uchun tenglikning chap tomonida turgan kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz, ya'ni

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \text{ yoki } \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

(2) tenglama (1) tenglamaga teng kuchli tenglamadir. (2) haqiqiy yechimga ega bo'lishi uchun $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$ bo'lishi kerak.

Bu yerdagi $b^2 - 4ac$ (1) ning diskriminanti deyiladi va u $D = b^2 - 4ac$ kabi belgilanadi.

1) Agar diskriminant $D = b^2 - 4ac > 0$ bo'lsa, (1) tenglama ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi. Bu yechimni (2) tenglamadan topa olamiz:

$$x_{1,2} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

2) Agar diskriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ bo'lsa, (1) tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

3) Agar diskriminant $D = b^2 - 4ac = 0$ bo'lsa, (1) bitta haqiqiy yechimga ega bo'ladi: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Maktab matematika kursida to'la kvadrat tenglama koeffitsientlariga ma'lum shartlar qo'yish orqali chala kvadrat tenglamalar hosil qilamiz.

Agarda (1) $b=0$ va $c=0$ bo'lsa, $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama $ax^2 = 0$ ko'rinishni oladi, uning yechimi $x=0$. bo'lgan $x_1 = x_2 = 0$ bo'ladi. Agar $b=0$ bo'lsa, $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama $ax^2 + c = 0$ ko'rinishni oladi, uni

yechsak, $x^2 = -\frac{c}{a}$ bo'ladi, agar $\frac{c}{a} < 0$ bo'lsa, $-\frac{c}{a} > 0$ bo'ladi, bunda $ax^2 + c = 0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega bo'ladi, ya'ni $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Agar $\frac{c}{a} > 0$ bo'lsa, $ax^2 + c = 0$ tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

3) Agar $c=0$ bo'lsa, $ax^2 + bx + c = 0$ tenglama $ax^2 + bx = 0$ ko'rinishni oladi, uni yechsak

$$(ax^2 + bx) = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases} \text{ yechimlarni hosil}$$

qilamiz.

$ax^2 + bx + c = 0$ ko'rinishdagi tenglama ildizlarini yana quyidagi usul bilan ham hisoblash mumkin. Berilgan tenglamani $ax^2 + bx = -c$ ko'rinishda ifodalab, uning har ikkala tomonini $4a$ ga ko'paytiramiz, natijada $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ tenglik hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan tenglikning har ikki tomoniga b^2 ni qo'shamiz: $4a^2c^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ bundan: $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$.

Agar $D = b^2 - 4ac \geq 0$ bo'lsa, bu tenglikning har ikki tomonidan arifmetik kvadrat ildiz chiqarish mumkin:

$$(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Bunda ikki hol bo'lish mumkin:

$$1) \quad \text{agar } 2ax + b < 0 \text{ bo'lsa, } -(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2};$$

$$2) \quad \text{agar } 2ax + b > 0 \text{ bo'lsa,}$$

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Shunday qilib, diskriminant $D = b^2 - 4ac > 0$ bo'lsa, tenglama ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi.

Kvadrat tenglama ildizlarini uning diskriminantiga ko'ra tekshirishni quyidagi jadval orqali tushuntirilsa, o'quvchilarning mantiqiy fikrlash qobiliyatları ortadi:

$D=b^2-4ac > 0$	Agar $c > 0$ bo'lsa, $c < 0$ bo'lsa, ikkala ildiz har xil bo'ladi	$b < 0$ bo'lsa, ikkala ildiz musbat, $b > 0$ bo'lsa, ikkala ildiz manfiy. $b < 0$ bo'lsa, ikkala ildiz musbat, $b > 0$ bo'lsa, ikkala ildiz manfiy.
$D=b^2-4ac=0$	$c = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$	$b > 0$ bo'lsa, ildizlardan biri nolga teng, ikkinchisi esa manfiy bo'ladi, $b < 0$ bo'lsa, ildizlardan biri nolga teng, ikkinchisi esa musbat bo'ladi.
$D=b^2-4ac < 0$		$b > 0$ bo'lsa, ikkala ildiz manfiy bo'ladi, $b < 0$ bo'lsa, ikkala ildiz musbat bo'ladi.

Agar $ax^2+bx+c=0$ tenglamada $a=1$ bo'lsa, hosil bo'lgan $x^2+bx+c=0$ tenglama keltirilgan kvadrat tenglama deyiladi. Har qanday to'la kvadrat tenglamaning har ikkala tomonini a ga bo'lish orqali uni keltirilgan kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirish mumkin;
 $ax^2+bx+c=0$ bo'lsa, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, agar $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ desak, u holda $x^2+bx+q=0$ tenglama keltirilgan kvadrat tenglamaning umumiy ko'rinishi bo'ladi.

Bu tenglamaning yechimi $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ formula bilan ifodalanadi.

Misollar: 1) $3x^2-5x+2=0$, $a=3$, $b=-5$, $c=2$. To'la kvadrat tenglama yechimi formulasiga ko'ra

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ bo'ladi.}$$

2) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ tenglamaning har ikki tomonini 3 ga bo'lsak,
 $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ bo'ladi. Bu tenglamaning ildizlarini keltirilgan

kvadrat tenglama formulasidan foydalanib topamiz:

$$p = -\frac{5}{3}, \quad q = +\frac{2}{3}.$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{q} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\left(-\frac{5}{6}\right) \pm \sqrt{\frac{25}{36} - \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25-24}{36}} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6}.$$

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

6-§. Viyet teoremasi.

Viyet teoremasi ham matematik tushunchalarni kiritishning konkret induktiv usuli orqali kiritiladi, chunki bu teoremani bayon qilishdan oldin teorema xulosasiga olib keladigan quyidagi ko'rinishdagi tushuntirish ishlari bilan shug'ullaniladi. Agar $x^2 + px + q = 0$ keltirilgan kvadrat tenglama diskriminanti manfiy

bo'limasa, uning ildizlari $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ va $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

bo'lar edi.

Bu x_1 va x_2 yechimlarni o'zaro qo'shsak,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -p, \text{ ko'paytirsak}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bularga ko'ra teoremani quyidagicha ifodalash mumkin.

Teorema. Agar keltirilgan kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, bu ildizlarning yig'indisi qarama-qarshi ishora bilan olingan x oldidagi koeffitsientga, ularning ko'paytmasi esa shu tenglamaning ozod xadiga teng bo'ladi.

M i s o l. $x^2 - 3x + 2 = 0$ tenglamani Viyet teoremasi asosida tekshiring.

$$\text{Yechish. } D = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{shuning}$$

uchun $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$ bo'ladi. Agar berilgan tenglamani yechsak,

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}, \text{ bundan } x_1 = 2, x_2 = 1 \text{ ekani topiladi. Demak,}$$

$$x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3, x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Bundan tashqari bu sistemani yechsak, noma'lumlarning biriga nisbatan berilgan tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_2^2 = 3x_2 \Rightarrow (x_2^2 = 3x_2 - 2) \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0.$$

Xuddi shuningdek x_1 noma'lumga nisbatan yechish ham mumkin.

7-§. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalar

1. $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) tenglama bikvadrat tenglama deyiladi. Bu yerda a , b va c berilgan sonlar bo'lib, $a \neq 0$ dir. Agar (1) da $x^2 = z$ desak, $az^2 + bz + c = 0$ (2) ko'rinishdagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi.

Bu tenglamani z ga nisbatan yechamiz: $z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ va

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Agar } z_1 > 0 \text{ va } z_2 > 0 \text{ (} a > 0, c > 0, b^2 - 4ac \geq 0, b < 0 \text{)}$$

yoki $a < 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac \geq 0$, $b > 0$) bo'lsa, (1) ko'rinishdagi kvadrat tenglama quyidagi ko'rinishdagi to'rtta yechimga ega bo'ladi:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

1 - misol. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ tenglama yechilsin.

Agar $x^2 = z$ deb belgilasak, tenglama $z^2 - 3z - 4 = 0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamaning yechimi $z_1 = 4$ va $z_2 = -1$ bo'lib $x_{1,2} = \pm 2$ bo'ladi, $x_{3,4} = \pm \sqrt{-1}$ yechimi esa haqiqiy sonlar to'plamida mavjud emas.

2 - misol. $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$. $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$.

Yechish. Agar $x^2 = z$ desak, berilgan tenglama $2z^2 - 5z + 3 = 0$ ko'rinishni oladi. Bunda $D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$:

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}, \quad z_1 = \frac{3}{2}, \quad z_2 = 1.$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{1} = \pm 1.$$

Yechimni formulalardan foydalanib topish mumkin:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{4}} = \pm \sqrt{\frac{5 - 1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{4}{4}} = \pm 1;$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{4}} = \pm \sqrt{\frac{5 + 1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Maktab matematika kursida o'zaro teskari noma'lum ifodalarni o'z ichiga olgan tenglamalar ham kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi. Fikrimizning dalili quyidagi tenglamani yechaylik:

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Bu ko'rinishdagì tenglamalarni yechish jarayonida o'qituvchi eng avvalo noma'lum o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasini aniqlash lozimligini o'quvchilarga tushuntirishi kerak. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymatlari sohasi $x \neq -1$ va $x \neq 0$. Agar $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = z$ desak, $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \frac{1}{z}$ bo'lib, z

o'zgaruvchiga ko'ra berilgan tenglama $z - \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$ yoki $2z^2 - 3z - 2 = 0$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamadan: $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = 2$

1) $z_1 = -\frac{1}{2}$ bo'lganda $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = -\frac{1}{2}$ bo'ladi, bundan

$\frac{x}{x+1} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama haqiqiy sonlar to'plamida yechimga ega emas.

2) $z = 2$ bo'lganda $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 2$ bo'ladi, bundan yoki

$\frac{x}{x+1} = \pm \sqrt{2}$ tenglamalar hosil qilamiz.

$$a) \left(\frac{x}{x+1} = \sqrt{2} \right) \Rightarrow (x = \sqrt{2}x + \sqrt{2}) \Rightarrow (x - \sqrt{2}x = \sqrt{2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow [x(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}] \Rightarrow \left(x = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right) \Rightarrow \left(x = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(x = \frac{\sqrt{2} + 2}{1 - 2} \right) \Rightarrow (x_1 = -2 - \sqrt{2})$$

$$b) \left(\frac{x}{x+1} = -\sqrt{2} \right) \Rightarrow (x = -\sqrt{2}x - \sqrt{2}) \Rightarrow (x + \sqrt{2}x = -\sqrt{2}) \Rightarrow \\ \Rightarrow [x(1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2}] \Rightarrow \left(x = \frac{-\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right) \Rightarrow \left(x = \frac{(1 - \sqrt{2})(-\sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(x = \frac{-\sqrt{2} + 2}{1 - 2} \right) \Rightarrow (x_2 = \sqrt{2} - 2)$$

Javob: $x_1 = -2 - \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2} - 2$.

3. To'rtinchi darajali $ax^4+bx^3+cx^2+dx+c=0$ ko'rinishdagi tenglamalarni ham to'la kvadrat ajratish yo'li bilan kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

M i s o l. $x^4+6x^3+9x^2-4x^2+12x+3=0$ tenglamani yeching.

$$\text{Yechish. } x^4+6x^3+9x^2-4x^2+12x+3=(x^2+3x)^2-4(x^2+3x)+3=0$$

$x^2+3x=z$ desak, tenglama $z^2-4z+3=0$ ko'rinishni oladi. Bundan $z_1 = 1$ va $z_2 = 3$.

1) $z_1=1$ bo'lganda $x^2+3x=1$ yoki $x^2+3x-1=0$ bo'ladi.

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2};$$

2) $z_2 = 3$ bo'lganda $x^2+3x=3$ yoki $x^2+3x-3=0$ bo'ladi.

$$x_{3,4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Javob: } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}; \text{ va } x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

4. Agar $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a$ tenglamada koeffitsientlarning $a_n=a_0$, $a_{n-1}=a_1$, $a_{n-2}=a_2$, ... tengliklari o'rini bo'lsa, bunday tenglama qaytma tenglama deyiladi. Qaytma tenglamalar ham ayniy almashtirishlar bajarish orqali kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

M i s o l. $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani har ikkala tomonini $x^2 \neq 0$ ga bo'lamiz. $2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$ yoki $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$.

Agar $x+\frac{1}{x}=z$ desak, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=z^2$ bo'ladi, bunda:

$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$. Bu belgilashlarga asosan berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$2(z^2-2)+3z-16=0 \text{ yoki } 2z^2+3z-20=0,$$

bundan

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 20}}{4} = \frac{-3 \pm 13}{4}, \quad z_1 = \frac{5}{2}, \quad z_2 = -4$$

1) Agar $z_1 = \frac{5}{2}$ bo'lsa, $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ yoki $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

bundan $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}$;

2) agar $z_2 = -4$ bo'lsa, $x + \frac{1}{x} = -4$ yoki $x^2 + 4x + 1 = 0$ bo'ladi,

bundan $x_1 = -2 + \sqrt{3}$ va $x_2 = -2 - \sqrt{3}$.

Javob: $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$

5. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$) ko'rinishdagi tenglama ham qaytma tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi. Berilgan tenglamani $x^2 \neq 0$ ga bo'lsak, $a\left(x^2 + \frac{e}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0$

bo'ladi. Agar $x + \frac{d}{bx} = t$ desak, $\left(x + \frac{d}{bx}\right)^2 = t^2$ bo'ladi, bundan

$$x^2 + \frac{d^2}{b^2 x^2} = t^2 - \frac{2d}{b}, \quad \text{agar} \quad \frac{e}{d} = \frac{d^2}{b^2} \quad \text{bo'lsa,} \quad x^2 + \frac{e}{dx^2} = x^2 + \frac{d^2}{b^2 x^2} = t^2 - \frac{2d}{b}$$

yoki $at^2 + bt + c - \frac{2ad}{b} = 0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglama hosl

bo'ladi. Demak, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ tenglamada $\frac{e}{d} = \frac{d^2}{b^2}$ tenglik bajarilsa, bu tenglama ham qaytma tenglama kabi kvadrat tenglamaga keltirib yechilar ekan.

Misol. $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

Yechish. $a = 2, e = 50, d = 105, b = 21$. Shartga ko'ra $\frac{e}{d} = \frac{d^2}{b^2}$

bo'iishi kerak edi, shuning uchun $\frac{50}{2} = \left(\frac{105}{21}\right)^2$ yoki $25 = 25$ tenglik

o'rinni bo'ladi. Bu tenglikning har ikkala tomonini $x^2 \neq 0$ ga bo'lsak,
 $2x^2 - 21x + 74 - \frac{105}{x} + \frac{50}{x^2} = 0$. $2\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) - 21\left(x + \frac{5}{x}\right) + 74 = 0$ Agar
 $x + \frac{5}{x} = t$ desak, $x^2 + \frac{25}{x^2} = t^2 - 10$ tenglik hosil bo'ladi, u holda
tenglama $2t^2 - 21t + 54 = 0$ ko'rinishni oladi.

Bundan $t_1 = \frac{9}{2}$ va $t_2 = 6$ yechimlarni hosil qilamiz.

1) Agar $t_1 = \frac{9}{2}$ bo'lsa, $x + \frac{5}{x} = \frac{9}{2}$ yoki $2x^2 - 9x + 10 = 0$ bundan
 $x_1 = 2$ va $x_2 = \frac{5}{2}$ yechimlarni topamiz.

2) agar $t_2 = 6$ bo'lsa, $x + \frac{5}{x} = 6$ yoki $x^2 - 6x + 5 = 0$, bundan $x_3 = 1$ va
 $x_4 = 5$ yechimlarni topamiz. Javob. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$.

6. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ ko'rinishdagi tenglama ham
ma'lum bir shart va ayniy almashtirishlarni bajarish orqali kvadrat
tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi. Agar bu berilgan tenglamada
 $a+b=c+d$ yoki $a+c=b+d$ yoki $a+d=b+c$ tengliklar o'rinni bo'lsa, bu
tenglama ham kvadrat tenglama ko'rinishiga keltirib yechiladi.

M i s o l. $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6)=-96$.

$a=2$, $b=-3$, $c=1$, $d=6$. Shartga ko'ra $a+c=b+d$ edi, shuning
uchun $2+1=-3+6$, bunga ko'ra berilgan tenglamani quyidagicha
guruhlaymiz: $[(x+2)(x+1)][(x-3)(x+6)] = -96$, $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 18) =$
 -96 . $x^2 + 3x = t$ desak, $(t+2)(t-18) = -96$ tenglik o'rinni bo'ladi,
bundan tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi $t_1 = 6$ va
 $t_2 = -10$ bo'ladi.

1) agar $t_1 = 6$ bo'lsa, $x^2 + 3x = 6$ yoki $x^2 + 3x - 6 = 0$, bundan

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 24}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2};$$

2) agar $t_2 = -10$ bo'lsa, $x^2 + 3x = 10$ yoki $x^2 + 3x - 10 = 0$ bo'ladi.

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}, \quad x_3 = -5, \quad x_4 = 2.$$

$$\text{Javob: } x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}, \quad x_3 = -5, \quad x_4 = 2.$$

$$7. (x+a)^4 + (x+b)^4 = c \text{ ko'rinishdagi tenglama han } x = t - \frac{a-b}{2}$$

almashtirish orqali bikvadrat tenglama ko'rinishiga keltrib yechiladi.

Agar $\begin{cases} x+a = t+m \\ x+b = t-m \end{cases}$ desak, bu sistemadagi englamalarni

o'zaro hadma-had ayirsak, $a-b=2m$, $m=\frac{a-b}{2}$ bo'lди, u holda

$x+a=t+\frac{a-b}{2}$ yoki $x=t-\frac{a+b}{2}$ bo'ladi. U holda berilgan tenglama

$$\text{quyidagi ko'rinishni oladi: } \left(t+\frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(t-\frac{a-b}{2}\right)^4 = c$$

Bundan:

$$t^4 + 4t^3 \frac{a-b}{2} + 6t^2 \frac{(a-b)^2}{4} + 4t \frac{(a-b)^3}{8} + \frac{(a-b)^4}{16} +$$

$$+ t^4 - 4t^3 \frac{a-b}{2} + 6t^2 \frac{(a-b)^2}{4} - 4t \frac{(a-b)^3}{8} + \frac{(a-b)^4}{16} =$$

$$= 2t^4 + 12t^2 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = c.$$

$$t^4 + 6t^2 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^4 = \frac{c}{2}.$$

Bu tenglamani bikvadrat tenglamani yechish usuli bo'yicha yecha olamiz. Masalan, $(x+6)^4 + (x+4)^4 = 82$ tengama berilgan bo'lsin.

Bu tenglamada $x = t - \frac{6+4}{2} = t - 5$ almashtirishi bajaramiz, u

holda berilgan tenglama ko'rinishi quyidagicha bo'adi:

$$(t+1)^4 + (t-1)^4 = 82.$$

$$t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 82,$$

$$2t^4 + 12t^2 + 2 = 82, \quad t^4 + 6t^2 - 40 = 0.$$

$t^2 = y$ desak, $y^2 + 6y - 40 = 0$, $y_1 = 4$, $y_2 = -10$.

1) agar $t^2 = 4$ bo'lsa, $t_{1,2} = \pm 2$;

2) agar $t^2 = -10$ bo'lsa, haqiqiy sonlar to'plamida yechim mavjud emas.

$$x_1 = t - 5 = 2 - 5 = -3, \quad x_2 = t - 5 = -2 - 5 = -7.$$

8. Agar tenglama $\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + mx + q} = c$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, unda $px + \frac{q}{x} = t$ almashtirish bajariladi. Agar tenglamada $c = 0$ bo'lsa, $x_1 = 0$ bo'lib qolgan yechimlarni x o'zgaruvchiga nisbatan kvadrat tenglamaga keltirib topiladi. Agar $c \neq 0$ bo'lsa, $x \neq 0$ bo'lib, bu holda berilgan tenglamaning surat va maxrajini x ga bo'lamiz:

$$\frac{a}{px + n + \frac{q}{x}} + \frac{b}{px + m + \frac{q}{x}} = c$$

Bunda $px + \frac{q}{x} = t$ desak, t o'zgaruvchiga nisbatan kvadrat tenglama hosil bo'ladi: $\frac{a}{t+n} + \frac{b}{t+m} = c$. Bu yerda $t \neq -n$, $t \neq -m$ dir.

Bularga ko'ra tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$ct^2 + (mc + nc - a - b)t + mnc - am - bn = 0$$

M i s o l. $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning chap tomonida turgan qo'shiluv-chilarining surat va maxrajlarini x ga bo'lsak,

$\frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6$ tenglik hosil bo'ladi. $2x + \frac{3}{x} = t$ desak,

$\frac{2}{t-5} + \frac{13}{t+1} = 6$ tenglik hosil bo'ladi, (bu yerda $t \neq -5$ va $t \neq -1$ bo'lishi kerak):

$$2t^2 - 13t + 11 = 0, \text{ bundan } t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{11}{2}.$$

1) agar $t_1=1$ bo'lsa, $2x+\frac{3}{x}=1$ yoki $2x^2-x+3=0$ bo'lib, uning yechimlari haqiqiy sonlar to'plamida mavjud emas.

2) agar $t_2=\frac{11}{2}$ bo'lsa, $2x+\frac{3}{x}=\frac{11}{2}$ yoki $4x^2-11x+6=0$ bo'ladi,

bundan $x_1=\frac{3}{4}$ va $x_2=2$ yechimlar topiladi.

J a v o b: $x_1=\frac{3}{4}, x_2=2$.

8-§. Irratsional tenglamalarni yechish

Irratsional son tushunchasi maktab matematika kursining VIII sinfida o'tiladi. O'quv qo'llanmasida irratsional tenglamaga ta'rif berib, uni yechish usullari ko'rsatilgan. O'quv qo'llanmasidagi ta'rif quyidagicha ifodalanadi.

T a'r i f. "Noma'lumlari ildiz ishorasi ostida bo'lgan tenglamalar irratsional tenglamalar deyiladi".

Bu ta'rifni kengroq ma'noda quyidagicha ham berish mumkin. "Noma'lumlari ildiz ishorasi ostida yoki kasr ko'rsatkichli daraja belgisi ostida bo'lgan tenglama irratsional tenglama deyiladi".

$$\text{Masalan, } \sqrt{4-5x} = 6 \quad x^{\frac{1}{2}} - 7 = 0$$

$$\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7, \quad \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$$

$$\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{x-b} \text{ va hokazo.}$$

Maktab matematika kursida faqatgina kvadrat ildizlarni o'z ichiga olgan irratsional tenglamalarni yechish o'rgatiladi. Shuning uchun ham bu mavzu materialini o'tish jarayonida o'qituvchi o'quvchiarga sonning kvadrat ildizi va uning arifmetik ildizi degan tushunchalarni takrorlab tushuntirish lozim, chunki biz maktab algebra kursida faqat manfiy bo'limgan sonlardan ildiz chiqarishni o'rgatamiz. $\sqrt{-3}, \sqrt{-7}, \sqrt{-36}, \dots$ lar haqiqiy sonlar maydonida ma'noga ega emas. Biz musbat sonning kvadrat ildizi deganda uning arifmetik ildizini, ya'ni uning musbat qiymatlarini tushunamiz.

Masalan, $\sqrt{9} = \pm 3$ bo'ladi, ammo -3 soni arifmetik ildiz bo'la olmaydi, 3 soni esa 9 sonning arifmetik ildizidir.

Irratsional tenglamaning yechishdan avval uning aniqlanish sohasini topish lozim.

1 - m i s o l. $\sqrt{3x-6} + \sqrt{1+x} = 2$ tenglamaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish. $3x-6 \geq 0$ va $1+x \geq 0$ bu tengsizliklardan: $x \geq 2$ va $x \geq -1$. Demak, bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x \geq 2$ bo'ladi. Haqiqatdan ham, bu tenglama yechilsa, uning ildizi 2 ga teng yoki undan katta son chiqishi uning aniqlanish sohasidan ko'rindi.

2 - m i s o l. $\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x} = \sqrt{x+2}$ tenglamaning aniqlanish sohasi topilsin. $x-1 \geq 0$, $3-x \geq 0$, $x+2 \geq 0$ bu tengsizliklardan $x \geq 1$, $x \leq 3$, $x \geq -2$. Bularga ko'ra tenglamuning aniqlanish sohasi $1 \leq x \leq 3$ bo'ladi, bu degan so'z tenglama ildizi 1 soni bilan 3 soni orasida bo'ladi, deganidir.

Irratsional tenglamalar ayniy shakl almashtirishlar orqali ratsional tenglama ko'rinishiga keltiriladi. Irratsional tenglamalarni yechish uchun eng ko'p ishlataladigan shakl almashtirish berilgan tenglikning har ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish va

$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = \sqrt{f(x)g(x)}, \quad \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \quad \text{kabi usullardir.}$$

Bunday shakl almashtirishlarni bajarish jarayonida yechilayotgan tenglama uchun chet ildiz hosil bo'lishi mumkin, chunki bu ayniy tengliklarning o'ng tomonlarining aniqlanish sohasi chapga qaraganda kengroqdir.

Teorema. Agar $f(x)=g(x)$ (1) tenglamaning har ikkala qismini kvadratga ko'tarilsa, berilgan tenglama uchun chet ildiz hosil bo'ladi, bu chet ildiz $f(x)=-g(x)$ tenglamuning ildizidir.

I s b o t i. Agar (1) tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $[f(x)]^2=[g(x)]^2$ yoki $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$. Bu degan so'z $[f(x)-[g(x)][f(x)+g(x)]=0$ deganidir. Bunda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin: 1) agar $f(x)-g(x)=0$ bo'lsa, $f(x)+g(x)\neq 0$ u holda $f(x)=g(x)$ bo'ladi; 2) agar $f(x)+g(x)=0$ bo'lsa, $f(x)-g(x)\neq 0$ u holda $f(x)=-g(x)$ bo'ladi. Demak, hosil bo'ladigan chet ildiz yoki $[f(x)]^2-[g(x)]^2=0$ tenglamuning ildizi bo'ladi.

Misol. $4x=7$ tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $16x^2=49$ bo'ladi. Bundan $(16x^2-49=0) \Rightarrow (4x-7)(4x+7)=0$.

$$1) \text{ agar } 4x-7=0 \text{ bo'lsa, } 4x+7 \neq 0 \text{ bundan } x=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$$

$$2) \text{ agar } 4x+7=0 \text{ bo'lsa, } 4x-7 \neq 0 \text{ bundan } x=-\frac{7}{4}=-1\frac{3}{4}$$

$$\text{Bunda } x=-1\frac{3}{4} \text{ chet ildizdir, haqiqatda ham } 4 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)=7$$

bundan $-7=7$, bu $x=-1\frac{3}{4}$ yechim tenglamani qanoatlantirmaydi

deganidir. Bu chet ildiz $4x=7$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish natijasida hosil bo'ladi. Maktab matematika kursida irratsional tenglamalarni yechish quyidagi ikkita usul orqali amalga oshiriladi:

1) irratsional tenglamaning har ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish;

2) yangi o'zgaruvchilar kiritish usuli;

Irratsional tenglamalarning ikkala tomonini bir xil darajaga ko'tarish usuli quyidagi ketma-ketlik asosida amalga oshiriladi:

a) berilgan irratsional tenglama $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ ko'rinishga keltiriladi;

b) bu tenglamaning ikkala tomoni n darajaga ko'tariladi;

v) hosil bo'lgan $f(x)=g(x)$ ratsional tenglama hosil bo'ladi;

g) natijada $f(x)=g(x)$ ratsional tenglama yechiladi va tekshirish orqali chet ildiz aniqlanadi.

1 - misol. $\sqrt{3x+4} = x$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz: $x \geq 0$ va $3x+4 \geq 0$, bundan $x \geq -\frac{4}{3}$.

1-usul. Har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $[(\sqrt{3x+4})^2 = x^2] \Rightarrow [3x+4 = x^2]$. Bundan $x^2-3x-4=0$ tenglamani hosil qilamiz. Uning yechimlari $x_1=4$ va $x_2=-1$, $x_2=-1$ yechim

$\sqrt{3x+4} = x$ tenglama uchun chet ildizdir, chunki u tenglamani qanoatlantirmaydi.

2-usul. $[(\sqrt{3x+4})^2 = x^2] \Rightarrow (3x+4=x^2) \Rightarrow$

$$\{[x^2-(3x+4)] = 0\} \Rightarrow (x-\sqrt{3x+4})(x+\sqrt{3x+4}) = 0$$

1) Agar $x-\sqrt{3x+4} = 0$ bo'lsa, $x+\sqrt{3x+4} \neq 0$ bo'ladi, bundan $x=\sqrt{3x+4}$ berilgan tenglama hosil bo'ladi, buning yechimi $x=4$ bo'ladi.

2) Agar $x+\sqrt{3x+4} = 0$ bo'lsa, $x-\sqrt{3x+4} \neq 0$ bo'ladi, bundan $x=-\sqrt{3x+4}$ bo'ladi, buning yechimi $x=-1$ dir.

Demak, $\sqrt{3x+4} = x$ tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarish natijasida $x=1$ chet ildiz hosil bo'ladi, $x=4$ esa uning haqiqiy yechimi bo'ladi.

Irratsional tenglamalarni yangi o'zgaruvchilar kiritish usuli bilan ham yechiladi.

2 - misol. $\sqrt[5]{(x-5)^2} - \sqrt[5]{x-5} = 6$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $(-\infty, \infty)$. Agar $\sqrt[5]{x-5} = y$ deb belgilasak, tenglama $y^2-y-6=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama $y_1=3$ va $y_2=-2$ yechimlarga ega. Bunga ko'ra $(\sqrt[5]{x-5} = 3) \Rightarrow (\sqrt[5]{x-5})^5 = 3^5; x-5=243; x=248. \sqrt[5]{x-5} = -2$ tenglama aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan ildizga ega. Demak, $x_1=248, x_2=-27$ tenglamaning yechimi bo'lar ekan.

3 - misol. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 8$ tenglama yechilsin.

Yechish. 1. Aniqlanish sohasini topamiz. $x+4 \geq 0$ va $x+20 \geq 0$, bulardan $x \geq -4$ va $x \geq -20$ bo'ladi. Bundan $x \geq -4$ qiymat olinadi.

2. Berilgan tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20})^2 = 8^2,$$

$$x+4 + 2\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+20} + x+20 = 64.$$

$$2x + 2\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x+20} = 40.$$

$$(\sqrt{(x+4)(x+20)})^2 = (20-x)^2,$$

$$(x+4)(x+20) = 400 - 40x + x^2$$

$$x^2 + 24x + 80 = 400 - 40x + x^2,$$

$$64x = 320, \quad x \approx 5.$$

Bu tenglamani yana quyidagi usul bilan ham yechish mumkin:

$$(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20})^2 = 8^2, \quad [(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20})^2 - 8^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20}) - 8][(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+20}) + 8] = 0$$

$$1) \sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 8, \text{ buning yechimi } x=5$$

$$2) \sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = -8, \text{ bu tenglama yechimga ega emas.}$$

4 - misol. $\sqrt{2x+3} = a$, parametrik ko'rinishdagi irratsional tenglama yechilsin. Bu yerda tenglamaning aniqlanish sohasiga nisbatan $a > 0$ shartni qo'yish etarli bo'ladi. $(\sqrt{2x+3})^2 = a^2$,

$$2x+3 = a^2, \text{ bundan } 2x = a^2 - 3 \text{ yoki } x = \frac{a^2 - 3}{2} \text{ yechim hosil bo'ladi.}$$

Tekshirish. $\sqrt{2 \frac{a^2 - 3}{2} + 3} = a, \quad \sqrt{a^2} = a, \quad a = a$

5-misol. $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 10$ irratsional tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamari $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2} = 10$ yoki $|x+2| + |x-5| = 10$ ko'rinishga keltirib, so'ngra yechamiz.

a) agar $x < -2$ bolsa, $-x - 2 - x + 5 = 10$, bundan $-2x = 7$ yoki $x = -3,5$

b) agar $-2 \leq x \leq 5$ bolsa, $x + 2 - x + 5 = 10$, yoki $7 = 10$, bu holda tenglama yechimga ega emas.

v) agar $x > 5$ bolsa, $x + 2 + x - 5 = 10$, bundan $2x = 13$ yoki $x = 6,5$.
Javaob. $x = -3,5$ va $x = 6,5$

6-misol. $\sqrt{1 - 4x} + 2 = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani $\sqrt{1 - 4x} + 2 = \sqrt{(x-3)^2}$ ko'rinishda yozib olamiz, u holda: $\sqrt{1 - 4x} + 2 = |x - 3|$. Bu tenglamaning

aniqlanish sohasi $1-4x \geq 0$ yoki $x \leq \frac{1}{4}$ bo'ladi. Aniqlanish sohasi

$x \leq \frac{1}{4}$ bo'lgani uchun $\sqrt{1-4x} + 2 = 3 - x$ bo'ladi.

$$(\sqrt{1-4x} + 2 = 3 - x) \Rightarrow (1-4x = 1-2x+x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+2x=0) \Rightarrow (x_1=-2 \text{ ba } x_2=0)$$

Tekshirish. $\sqrt{1-4 \cdot (-2)} + 2 = \sqrt{(-2)^2 - 6(-2) + 9}; 5=5$

7 - misol. $1 - \frac{1}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x} \sqrt{4 - \frac{7}{x^2}}}$ tenglama yechilsin.

Yechish. 1) Bu tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz, $-\frac{1}{x} < 1$ bo'ladi.

2) Berilgan tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \sqrt{4 - \frac{7}{x^2}}$ tenglamani hosil qilamiz.

3) Bu tenglamaning har ikkala tomonini yana kvadratga ko'tarsak, $\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{4}{x^2} - \frac{7}{x^2}$ yoki $\frac{8}{x^4} - \frac{4}{x^3} = 0$

4) Oxirgi tenglamani yechamiz: $8x^3 - 4x^2 = 0; 4x^3(2-x) = 0$

a) Agar $4x^3 = 0$ bo'lsa, $2-x \neq 0$, bundan $x_{1,2,3}=0$

b) Agar $2-x = 0$ bo'lsa, $4x^3 \neq 0$, bundan $x_4 = 2$

Tekshirish. $1 - \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{7}{4}}}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Javob. $x = 2$.

8-misol. $\sqrt{x^2 - 8x + 7} + 2\sqrt{x^2 - 18x + 17} = 2\sqrt{x^2 - 32x + 31}$ tenglamani yeching.

Yechish. 1. Bu ko'rinishdagi tenglamalarni yechish uchun ildiz ostidagi ifodalarni ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\sqrt{(x-1)(x-7)} + 2\sqrt{(x-1)(x-17)} = 2\sqrt{(x-1)(x-31)}$$

2. Aniqlanish sohasini topamiz:

$$\begin{cases} (x-1)(x-7) \geq 0, \\ (x-1)(x-17) \geq 0, \\ (x-1)(x-31) \geq 0, \end{cases} \text{ bulardan } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 31 \end{cases}$$

3. Tenglama ko'rinishini quyidagicha yczib olamiz:

$$\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x-7|} + 2\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x-7|} = 2\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x-31|}$$

yoki $\sqrt{|x-1|}(\sqrt{|x-7|} + 2\sqrt{|x-17|} - 2\sqrt{|x-31|}) = 0$ bundan

a) $(\sqrt{|x-1|} = 0) \Rightarrow (x_1 = 1);$

b) $\sqrt{|x-7|} + 2\sqrt{|x-17|} - 2\sqrt{|x-31|} = 0,$

agar $x \leq 1$ bo'lsa, tenglamani $\sqrt{7-x} + 2\sqrt{17-x} - 2\sqrt{31-x} = 0$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Bundan: $\sqrt{7-x} + 2\sqrt{17-x} = 2\sqrt{31-x}$

4. Hosil qilingan tenglamaning har ikkala tomoni kvadratga ko'tarib ixchamlasak, $15x^2 - 482x - 497 = 0$ tenglama hosil bo'ladi,

uni yechsak, $x_1 = -1$ va $x_2 = \frac{497}{15}$ yechimlari topiladi, ammo $x_2 = \frac{497}{15}$

yechim berilgan tenglamaning $x \leq 1$ aniqlanish sohasida yotmaydi, shuning uchun bu hol uchun yechim $x = -1$ bo'ladi. Agar $x \geq 31$ bo'lsa, tenglama $\sqrt{x-7} + 2\sqrt{x-17} - 2\sqrt{x-31} = 0$ ko'rinishni oлади, bunday tenglamani yechishni bilamiz.

Javob: $x_1 = -1$ va $x_2 = 1$.

9-misol. $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$ irratsional tenglama yechilsin.

Yechish. **1-usul.** $\sqrt[3]{x+45} = u$, $\sqrt[3]{x-16} = v$ deb belgilasak,

bulardan $x+45=u^3$ va $x-16=v^3$ hamda $u-v=1$ bo'ladi. Bulardan sistemani hosil qilamiz: $\begin{cases} u^3 - v^3 = 61, \\ u - v = 1. \end{cases}$

$$(u-v)(u^2 + uv + v^2) = 61; \quad u^2 + uv + v^2 = 61; \quad u = v + 1;$$

$$(v+1)^2 + (v+1)v + v^2 = 61; \quad 3v^2 + 3v - 60 = 0; \quad v^2 + v - 20 = 0;$$

$$v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2};$$

$$v_1 = -5; \quad v_2 = 4; \quad x_1 = v_1^3 - 45 = -10;$$

$$x_2 = v_2^3 + 16 = 4^3 + 16 = 64 + 16 = 80;$$

2-usul. Tenglamaning ikkala tomonini kubga ko'taramiz:

$$(\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16})^3 = 1^3 \text{ yoki}$$

$$x+45-x+16-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16})=1$$

$$61-3\sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=1, \quad \text{bundan} \quad \sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20, \\ (x+45)(x-16)=8000, \quad x^2+29x-8720=0. \quad \text{Bu tenglamani yechsak,} \\ x_1=-109 \text{ va } x_2=80 \text{ yechimlar kelib chiqadi.}$$

10-misol. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ tenglama yechilsin.

Yechish: $\sqrt[3]{2-x} = u$ va $\sqrt{x-1} = v$ desak, u holda $u^3 = 2-x$,

$$v^2 = x-1, \quad v + u = 1, \quad v \geq 0. \quad \text{Bu tengliklardan} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = 1 \\ v + u = 1 \end{cases} \quad \text{sistemani}$$

hosil qilib uni yechamiz.

$$v = 1 - u; \quad u^3 + u^2 - 2u = 0; \quad u(u^2 + u - 2) = 0, \quad \text{bundan}$$

$$u_1 = 0; \quad u_2 = -2; \quad u_3 = 1; \quad v_1 = 1; \quad v_2 = 3; \quad v_3 = 0.$$

Bularga asosan:

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \sqrt[3]{2-x} = 0, & 2) \quad \sqrt[3]{2-x} = -2, & 3) \quad \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ 2-x = 0, & 2-x = -8, & 2-x = 1, \\ x_1 = 2. & x_2 = 10. & x_3 = 1. \end{array}$$

Javob. $x_1 = 2; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = 1.$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $1 + \sqrt{2x-2} = x. \quad j. \quad 3.$
2. $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3. \quad j. \quad x_1 = 4; \quad x_2 = -5$
3. $\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}. \quad j. \quad x = 4.$
4. $\sqrt{1+x}\sqrt{x^2+24} = x+1. \quad j. \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 5$
5. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2x}. \quad j. \quad x_1 = -a; \quad x_2 = a$
6. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+18} = x \quad j. \quad x = 7.$
7. $\sqrt{x+4} + \sqrt{20+x} = 8 \quad j. \quad x = 5.$
8. $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}. \quad j. \quad x = 4,$

9. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$. j. $x = 5$.
10. $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$. j. $x = -1$
11. $1 + \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x$. j. $x = 7$.
12. $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$. j. $x_1 = -1; x_2 = 3$.
13. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$. j. $x = 0$.
14. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = 1$. j. $x = 3$.

9-§. Parametrlı irratsional tenglamalarnı yechish

1-misol. $\sqrt{x-1} = x-a$ tenglama yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz:

$$x-1-\sqrt{x-1}+1-a=0 \quad (1)$$

Agar bu tenglamada $\sqrt{x-1} = y$ desak, $x-1 = y^2$ bo'ladi, u holda tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y^2 - y + 1 - a = 0, \quad y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (1-a)} =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4+4a}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{4a-3}}{2};$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}; \quad y_2 = \frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}.$$

(1) tenglama faqat $a \geq \frac{3}{4}$ bo'lgandagina, yechimga ega bo'ladi, ya'ni:

$$\sqrt{x-1} = \frac{1-\sqrt{4a-3}}{2}, \quad (2)$$

$$\sqrt{x-1} = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}, \quad (3)$$

(2) tenglama $1-\sqrt{4a-3} \geq 0$ bo'lganida yechimga ega bo'ladi. (2) va (3) ni yechsak, $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ tongsizlik hosil bo'ladi, u holda tenglama quyidagi ko'rinishdagı ikkita haqiqiy har xil yechimga ega bo'ladi:

$$x_1 = \frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2}; \quad x_2 = \frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$$

Agar $a > 1$ bo'lsa, tenglama $x_{1,2} = \frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$ yechimga ega bo'ladi, agar $a < \frac{3}{4}$ bo'lsa, tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

2 - misol. $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a$ tenglama yechilsin.
Yechish: Bu tenglamaning aniqlanish sohasi

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

bo'ladi, u holda berilgan tenglama $a \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ bo'lgandagina yechimga ega bo'ladi, agar $a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ bo'lsa, yechimga ega emas:

$$\sqrt{3x-2} = a - \sqrt{x+2} \quad (1)$$

$$3x-2 = a^2 - 2a\sqrt{x+2} + x+2,$$

$$2x-4 = a^2 - 2a\sqrt{x+2},$$

$$2x+4 + 2a\sqrt{x+2} - a^2 - 8 = 0,$$

$$2(x+2) + 2a\sqrt{x+2} - a^2 - 8 = 0.$$

agar $\sqrt{x+2} = y$ desak, $2y^2 + 2ay - a^2 - 8 = 0$ yoki $2y^2 + 2ay - (a^2 + 8) = 0$, bundan

$$y_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 2a^2 + 16}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{3a^2 + 16}}{2};$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{-a - \sqrt{3a^2 + 16}}{2}; \quad (3)$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{-a + \sqrt{3a^2 + 16}}{2}; \quad (4)$$

$a \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}$ da (3) tenglama yechimga ega emas, (4) tenglama esa

$x = \frac{2a^2 + 4 - a\sqrt{3a^2 + 16}}{2}$ yechimga ega bo'ladi.

3 - misol. $\sqrt{x^2 - ax + 2} = x - 1$ tenglama yechilsin.

Yechish: $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x^2 - ax + 2 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (a - 2)x = 1. \end{cases}$

Agar $a=2$ bo'lsa, sistema yechimga ega emas, agar $a \neq 2$

bo'lsa $\begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{a-2} \end{cases}$ hosil bo'ladi, u holda $\frac{1}{a-2} \geq 1$ yoki $2 < a \leq 3$

bo'ladi.

J. Agar $2 < a \leq 3$ bo'lsa, $x = \frac{1}{a-2}$, agar $a \leq 2$, $a > 3$ bo'lsa, tenglama yechimga ega emas.

4 - misol. $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a+x \geq 0, \\ a - \sqrt{a+x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ a \geq \sqrt{a+x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ a^2 \geq a+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq -a, \\ x \leq a^2 - a. \end{cases}$$

Tenglamaning aniqlanish sohasi, agar $a \geq 1$ bo'lsa, $0 \leq x \leq a^2 - a$ bo'ladi. $a - \sqrt{a+x} = x^2$ yoki $\sqrt{a+x} = a - x^2$, bu tenglama $a - x^2 \geq 0$ bo'lgandagina yechimga ega, shuning uchun $a+x = a^2 - 2ax^2 + x^4$ yoki $a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0$

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4x^2 + 4x}}{2};$$

$$a_1 = x^2 - x; \quad a_2 = x^2 + x + 1; \quad a_3 = x^2 - x$$

tenglama $a^2 - x^2 \geq 0$ shart uchun $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$

5 - misol. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamani yechish uchun uning har ikki tomonini uchinchida darajaga ko'taramiz:

$$a+x+a-x+3\sqrt[3]{a^2-x^2}(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x})=2a.$$

$$2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[3]{2a}=2a,$$

$$3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[3]{2a}=0$$

$$\sqrt[3]{a^2-x^2}=0; \quad a^2-x^2=0; \quad x_{1,2}=\pm a.$$

6-misol. $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2-x^2}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning har ikkala tomonini $\sqrt[3]{(a-x)^2}$ ga bo'lamiz, bu yerda $x \neq a$,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=t; \quad \frac{a+x}{a-x}=t^3,$$

$$t^2-5t+4=0; \quad t_1=4; \quad t_2=1.$$

$$1) \frac{a+x}{a-x}=64; \quad 65x=63a; \quad x_1=\frac{63a}{65}; \quad 2) \frac{a+x}{a-x}=1, \quad x_2=0$$

7 - misol. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamaning har ikki tomonini $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ formula bo'yicha kubga ko'taramiz:

$$a+\sqrt{x}+a-\sqrt{x}+3\sqrt[3]{a^2-x}\cdot(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}})=b.$$

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b} \quad \text{bo'lgani uchun}$$

$$2a + \sqrt[3]{a^2 - x} \cdot \sqrt[3]{b} = b;$$

$$\sqrt[3]{a^2 - x} = \frac{b - 2a}{\sqrt[3]{b}}; \quad a^2 - x = \frac{(b-2a)^3}{27b}, \quad b \neq 0 \text{ bo'lsa,}$$

$$x = a^2 - \frac{(b-2a)^3}{27b}.$$

8-misol. $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi:

$$\begin{cases} a-x \geq 0, \\ b-x \geq 0, \\ a+b-2x \geq 0. \end{cases}$$

Endi $\sqrt[4]{a-x} = t, \quad \sqrt[4]{b-x} = z$ belgilash kiritamiz, u holda $t^4 + z^4 = a+b-2x = (a-x) + (b-x)$. Bularni tenglamaga qo'shamiz: $t+z = \sqrt[4]{t^4 + z^4}$,

$$(t+z)^4 = t^4 + z^4,$$

$$t^4 + 4t^3z + 6t^2z^2 + 4tz^3 + z^4 = t^4 + z^4$$

$$tz(2t^2 + 3tz + 2z^2) = 0;$$

$$1) \quad t_1 = 0, \quad z_1 = 0; \quad (a-x=0) \Rightarrow x_1 = a;$$

$$(b-x=0) \Rightarrow x_1 = b;$$

2) $2t^2 + 3tz + 2z^2 = 0$ tenglama yechilsa, qolgan yechimlar hosil bo'ladi.

$$\text{9 - misol. } \sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}} = 2$$

Yechish. Bu tenglamaning yo'l quyiladigan qiymatlar sohasi

$x \neq a$ va $x \neq -b$. Bundan tashqari, $\frac{a-x}{b+x} > 0$ va $\frac{b+x}{a-x} > 0$. Agar bo'lsa, $a-x > 0$ va $b+x > 0$ yoki $a-x < 0$ va $b+x < 0$ bo'ladi, bulardan $x < a$ va $x > -b$ lar bo'ladi.

$$\frac{a-x}{b+x} = z^n \text{ desak, } \left(z + \frac{1}{z} = 2 \right) \Rightarrow (z^2 - 2z + 1 = 0)$$

$$z_{1,2} = 1; \frac{a-x}{b+x} = 1; a-x = b+x \text{ yoki } x = \frac{a-b}{2}.$$

Tekshirish:

$$\sqrt[n]{\frac{a - \frac{a-b}{2}}{b + \frac{a-b}{2}}} + \sqrt[n]{\frac{b + \frac{a-b}{2}}{a - \frac{a-b}{2}}} = \sqrt[n]{\frac{a+b}{a+b}} + \sqrt[n]{\frac{a+b}{a+b}} = 1+1=2.$$

10 - misol. $(x-a)\sqrt{x} - (x+a)\sqrt{b} = b(\sqrt{x} - \sqrt{b})$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglamaning chap tomonidagi ifodaning qavslarini ochib va o'ng tomonidagi ifodani qarama - qarshi ishora bilan chap tomonga o'tkazib quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$x\sqrt{x} - a\sqrt{x} - x\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b(\sqrt{x} - \sqrt{b}) = 0,$$

$$x(\sqrt{x} - \sqrt{b}) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) - b(\sqrt{x} - \sqrt{b}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})(x-b) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2(\sqrt{x} + \sqrt{b}) - a(\sqrt{x} + \sqrt{b}) = 0,$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{b})[(\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 - a] = 0,$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{b} \neq 0 \text{ bo'lsa, } (\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 - a = 0. \text{ bo'ladi bundan } (\sqrt{x} - \sqrt{b})^2 = a \text{ hosil bo'ladi.}$$

1. Agar $a < 0$ bo'lsa, bu tenglama yechimiga ega emas.

2. Agar $a > 0, b > 0$ bo'lsa, $\sqrt{x} - \sqrt{b} = \pm \sqrt{a}, \sqrt{x} = \sqrt{b} \pm \sqrt{a}$ bo'ladi, $x_{1,2} = (\sqrt{b} \pm \sqrt{a})^2$

3. Agar $b=0$ va $a > 0$ bo'lsa, $x_1=0, x_2=a$ yechimlar bo'ladi.

11-misol. $a^2b^2\sqrt[n]{x} - 4ab\sqrt{ab} \cdot \sqrt[2mn]{x^{m+n}} = (a-b)^2\sqrt[n]{x}, m \neq n$ tenglumani yeching.

Yechish. Bu yerda $ab > 0$. Agar $a=0$ yoki $b=0$ bo'lsa, tenglama $(a-b)^2\sqrt[n]{x} = 0$ bo'ladi, bu holda tenglama bitta $x=0$ yechimiga ega bo'ladi. Berilgan tenglamada $ab > 0$ va $x \neq 0$ deb, tenglikning har ikki tomonini $\sqrt[n]{x}$ ga bo'lsak,

$$a^2 b^2 \sqrt[mn]{x^{m-n}} - 4ab\sqrt{ab} \cdot \sqrt[2mn]{x^{m-n}} = (a-b)^2$$

hosil bo'ladi. Agar $\sqrt[2mn]{x^{m-n}} = y > 0$ desak, quyidagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi:

$$a^2 b^2 y^2 - 4ab\sqrt{ab} y - (a-b)^2 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{2ab\sqrt{ab} \pm \sqrt{4a^3b^3 + a^2b^2(a-b)^2}}{a^2b^2} = \frac{2ab\sqrt{ab} \pm ab\sqrt{4ab + (a-b)^2}}{a^2b^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{ab} \pm \sqrt{(a+b)^2}}{ab} = \frac{2\sqrt{ab} \pm (a+b)}{ab};$$

$$y_1 = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{ab}; \quad y_2 = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{ab}.$$

Agar $y > 0$ bo'lib, $a > 0$ va $b > 0$ bo'lsa,

$$y_1 = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} \right)^2 = \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} \right)^2. \text{ Agar } y > 0 \text{ bo'lib, } a < 0 \text{ va } b < 0$$

$$\text{bo'lsa, } y_2 = \left(\frac{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}{\sqrt{ab}} \right)^2 = \left((-a)^{-\frac{1}{2}} + (-b)^{-\frac{1}{2}} \right)^2. y = \sqrt[2mn]{x^{m-n}}$$

$$\text{bo'lgani uchun } x_1 = \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{4mn}{m-n}}, \quad x_2 = \left[(-a)^{-\frac{1}{2}} + (-b)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{4mn}{m-n}}$$

$$\text{12-Misol. } \frac{\sqrt[n]{a+x}}{a} + \frac{\sqrt[n]{a+x}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b} \text{ tenglama yechilsin.}$$

Yechish. Bu yerda $n \in N$ bo'lib, $x > 0$, $a+x > 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$. Tenglamaning chap tomonidagi $\sqrt[n]{a+x}$ ni qavsdan chiqaramiz:

$$\sqrt[n]{a+x} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}, \sqrt[n]{a+x} \cdot \frac{a+x}{ax} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{a+x}{x} \right)^{n+1}} = \frac{a}{b}.$$

Bu tenglikning chap tomoni noldan katta, shuning uchun o'ng tomoni ham noldan katta bo'ladi, ya'ni $\frac{a}{b} > 0$.

$$\left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{a}{b}; \quad \frac{a+x}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}; \quad \frac{a}{x} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}};$$

$$\frac{a}{x} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1; \quad a = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1\right]x.$$

Agar $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \neq 0, \quad a \neq 0$ bo'lsa, $x = \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}$.

1) **Agar** $a > 0, \quad \frac{a}{b} > 1$ bo'lsa, $a > b > 0$ bo'ladi.

2) **Agar** $a < 0, \quad \frac{a}{b} < 1$ bo'lsa, $0 > a > b$ bo'ladi.

Bu holda (1) yechim n ning juft hollari uchun o'rinni bo'ladi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Quyidagi tenglamalarni yeching.

$$1. \sqrt{x-3} = x-a, \quad J: \quad \text{agar } 2,75 \leq a \leq 3 \quad \text{bo'lsa},$$

$$x = \frac{1}{2}(2a+1 \pm \sqrt{4a-11}) \quad \text{agar } a \geq 3 \text{ bo'lsa}, \quad x = \frac{1}{2}(2a+1 + \sqrt{4a-11})$$

$$2. \sqrt{x-a} = b-x. \quad J: \quad \text{agar } b \geq a \quad \text{bo'lsa}, \quad x = \frac{1}{2}(2b+1 - \sqrt{4b-4a+1});$$

Agar $b < a$ yechimga ega emas.

$$3. \sqrt{x^2 - ax + 3a} = 2-x \quad J: \quad \text{agar } -4 \leq a \leq 4 \quad \text{bo'lsa}, \quad x = \frac{3a-4}{a-4} \quad a < 4,$$

$a > 4$ bo'lsa, yechimga ega emas.

$$4. \sqrt{2x-4} + \sqrt{x+7} = a \quad J: \quad \text{agar } a \geq 3 \quad \text{bo'lsa}, \quad x = 3a^2 + 11 - 2a\sqrt{2a^2 + 18}; \quad \text{agar } a < 3 \text{ bo'lsa, yechimga ega emas.}$$

5. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} = a$. J; agar $0,5\sqrt{6} \leq a \leq \sqrt{3}$ bo'lsa, $x=3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^3 - 3}$ agar $a > \sqrt{3}$ bo'lsa, $x=3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^3 - 3}$; agar $a < 0,5\sqrt{6}$ bo'lsa, yechimga ega emas.

6. $\sqrt{2x^2 - 2ax + 1} = x - 2$. J; agar $a \geq \frac{9}{4}$ bo'lsa, $x=a-2+\sqrt{a^2 - 4a + 7}$; agar $a < \frac{9}{4}$ bo'lsa, yechimga ega emas.

7. $\sqrt{3x-a} = a - 2x$. J; agar $a \geq 0$ bo'lsa, $x=\frac{1}{8}(4a+3-\sqrt{8a+9})$; agar $a < 0$ bo'lsa yechimga ega emas.

8. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = a$. J; agar $\sqrt{2} \leq a \leq 2$ bo'lsa, $x=(2 \pm \sqrt{4a^2 - a^4}):2$; agar $a \leq \sqrt{2}$, $a > 2$ bo'lsa, yechimga ega emas.

9. $x + \sqrt{1-x} = a$. J; agar $x_{1,2} = \frac{1-2a \pm \sqrt{5-4a}}{2}$, $a > \sqrt{2}$ bo'lsa, yechimga ega emas.

10 - §. Irratsional tenglamalar sistemasini yechish.

1 - misol. Tenglamalar sistemasi yechilsin:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13 \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{5}{6}\sqrt{xy}$ tenlamaning har

ikki tomonini kvadrat ko'tarib, ayniy almashtirishlarni bajarish orqali ratsional tenglamalar sistemasini hosil qilamiz;

$$x + y + 2\sqrt{xy} = \frac{25}{36}xy$$

$x+y=13$ bo'lgan uchun $13 + 2\sqrt{xy} = \frac{25}{36}xy$ bo'ladi.
 $25xy - 72\sqrt{xy} - 468 = 0$, agar $\sqrt{xy} = t$ desak, $25t^2 - 72t - 468 = 0$ bo'ladi,
 bundan $t_1 = 6$ va $t_2 = -\frac{7}{2}$ ildizlarni hosil qilamiz. $\sqrt{xy} = 6$ bo'lsa, $xy =$

36 bo'ladi:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$$

$x = 13 - y$, $(13 - y)y = 36$; $y^2 - 13y + 36 = 0$; $y^2 - 3y = 36$;

$$y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

J: $y_1 = 9$, $y_2 = 4$,

$$2 - \text{m i s o l. } \begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 15 \\ y - \sqrt{x+y} = \frac{12}{x-y} \end{cases} \text{ tenglama yechilsin.}$$

Yechish. $\frac{x+y}{x-y} \neq 0$ bo'lsa, ikki hol bo'lishi mumkin:

$$\text{a) } x > 0, y > 0, x > y \quad \text{u holda } x + y - \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x-y)^2}} - \frac{12}{x-y} = 0$$

$$\text{yoki } x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} - 12 = 0. \quad \text{Endi } \sqrt{x^2 - y^2} = t \text{ desak,}$$

$$t^2 - t - 12 = 0; \quad t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$\text{huning uchun } \sqrt{x^2 - y^2} = 4, \text{ bundan } x^2 - y^2 = 16$$

$t_1 = 4$, $t_2 = -3$, s

bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ xy = 15 \end{cases}$$

temasi hosil bo'ladi. Bu tenglamani yechib, mutsional tenglama sisni hosil qilamiz.

$x = 15$, $y = \pm 3$ yechimlari

b) $x < 0$, $y < 0$ va $x < y$ bo'lsa, tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$x + y - \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{(x-y)} - \frac{12}{x-y} = 0,$$

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} - 12 = 0,$$

$$\sqrt{x^2 - y^2} = t, \quad t^2 + t - 12 = 0,$$

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}; \quad t_1 = 3, \quad t_2 = -4.$$

$$\sqrt{x^2 - y^2} = 3 \text{ yoki } x^2 - y^2 = 9.$$

Natijada

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ xy = 15. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib,

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{981} + 9}{2}}, \quad y_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{981} - 9}{2}},$$

yechimlar hosil qilamiz.

3-misol. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz: $x + y + 2\sqrt{xy} = 16$ (1) hosil bo'ladi.

Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomonini $\sqrt{2}$ ga ko'paytiramiz:

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} + 2\sqrt{xy} = 16 \tag{2}$$

(2) dan (1) ni ayiramiz:

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} - (x + y) = 0,$$

$$\sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + y,$$

$$2(x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0, \quad (x - y)^2 = 0, \quad x = y.$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamadagi x o‘rniga u ni qo‘ysak,
 $2\sqrt{y} = 4$, $\sqrt{y} = 2$, bundan $y = 4$ bo‘ladi. J: $x = y = 4$.

4 - m i s o l. Sistemanı yeching:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} + \sqrt[4]{5-y} = 3, \\ 5x - y = 11. \end{cases}$$

Yechish: Agar $\sqrt[4]{1+5x} = u$ va $\sqrt[4]{5-y} = v$ desak,

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + v^4 = 17. \end{cases} \quad \text{bo‘ladi.}$$

$$u^4 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 = [(u + v)^2 - 2uv]^2 = 2u^2v^2 = 17,$$

$u + v = 3$ bo‘lgani uchun $(uv)^2 - 18uv + 32 = 0$ bundan $uv = 2$ va $uv = 16$ bo‘ladi. Bu yechimlarga ko‘ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

a) $\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2. \end{cases}$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechimlar hosil bo‘ladi: $u_1 = 1$, $v_1 = 2$,
 $u_2 = 2$, $v_2 = 1$.

b) $\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 16; \end{cases}$

bu tenglamalar sistemasini yechsak, u haqiqiy yechimga ega emas.
Bu yechimlarga ko‘ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+5x} = 2, \\ \sqrt[4]{5-y} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+5x = -16, \\ 5-y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 0, \\ y_1 = 4, y_2 = -1. \end{cases}$$

yechimlarni hosil qilamiz.

5-misol. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \frac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{2}}, \\ \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^3} = 9, \end{cases}$$

Yechish. $\sqrt{\frac{x+y}{2}} = u, \sqrt{\frac{x-y}{2}} = v$ desak, $\sqrt{x^2 - y^2} = 2uv$,

$$x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2 \quad \text{bo'ladi,} \quad \text{bularga} \quad \text{ko'ra}$$

$$\begin{cases} 2(u^4 - v^4) + 2uv(u^2 - v^2) = 14(u+v), \\ u^3 + v^3 = 9. \end{cases} \quad \text{bo'ladi. Sistemadagi}$$

birinchi tenglamaning har ikkala tomonini $u+v \neq 0$ ga bo'lamiz.

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 9 \\ u^3 - v^3 = 7 \end{cases} \quad \text{Buni yechsak, } u^3 = 8 \text{ va } v^3 = 1 \text{ yechimlar hosil bo'ladi.}$$

U holda $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x-y}{2}} = 1 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$

bundan $x=5$ va $u=3$ yechimlar hosil bo'ladi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 208 \\ y^2 + y\sqrt[3]{yx^2} = -1053, \end{cases}$$

$$\text{J: } x_1 = 8, \quad y_1 = 27, \quad x_2 = -8, \quad y_2 = 27,$$

$$x_3 = 8, \quad y_3 = -27, \quad x_4 = -8, \quad y_4 = -27.$$

2. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2 - y^2} = x + 9y, \\ x^4 + 2x^2y + y^2 + x = 2x^3 + 2xy + y + 506. \end{cases}$$

$$J: x_1 = 5, y_1 = 3;$$

$$x_2 = \frac{25 - 48\sqrt{6}}{29}, \quad y_2 = \frac{21(5 - 48\sqrt{6})}{29^2}.$$

3. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4}, \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52 \end{cases} \quad j: \begin{array}{ll} x_1 = 5, & y_1 = 4; \\ x_2 = -5, & y_2 = -4; \\ x_3 = 15, & y_3 = -12; \\ x_4 = -15, & y_4 = 12; \end{array}$$

4. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{5 + \sqrt{7}}{5 - \sqrt{7}} \\ x^3 + 2y^3 = 118. \end{cases} \quad j. x = 4 y = 3$$

11-§. Ko'rsatkichli tenglama.

Ko'rsatkichli tenglama tushunchasini tushuntirishdan oldin o'qituvchi o'quvchilarga daraja, ko'rsatkichli funksiya va ularning xossalari haqidagi ma'lumotlarni takrorlashi, so'ngra ko'rsatkichli funksiyaning ta'rifini berish lozim.

T a' r i f. *Daraja ko'rsatkichida noma'lum miqdor qatnashgan tenglamalar ko'rsatkichli tenglamalar deyiladi.* Masalan, $3^x=2^{x-1}$, $5^{x^2-6}-1=0,7^{x-2}\sqrt[3]{49}$ va hokazo. $a^x=b$ tenglama maktab matematika kursidagi eng sodda ko'rsatkichli tenglamadir. Bu yerda a va b berilgan musbat sonlar bo'lib, $a \neq 1$ $a > 0$ bo'lishi kerak. x esa noma'lum miqdordir. $a^x=b$ tenglama bitta yechimga egadir. Har qanday ko'rsatkichli tenglama ayniy almashtirishlarni bajarish orqali algebrailik yoki $a^x=b$ ko'rinishdagi sodda holga keltirib yechimlari topiladi.

Ko'rsatkichli tenglamalarini yechish darajasini quyidagi xossalariiga asoslanadi:

1. Agar o'zaro ikkita teng darajaning asoslari teng bo'lsa, ularning daraja ko'rsatkichlari ham o'zaro teng bo'jadi.

Masalan, agar $a^m = a^n$ bo'lsa, $m=n$ bo'ladi, albatta bu yerda $a \neq 0$ va $a \neq 1$, $a > 0$ bo'lishi kerak.

2. Agar o'zaro teng darajaning ko'rsatkichlari teng bo'lsa, u holda ularning asoslari ham teng bo'ladi, ya'ni $a^m = b^m$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi. Maktab matematika kursidagi ko'rsatkichli tenglamalar asoslarini tenglash, kvadrat tenglamaga keltirish, logarifmlash, ya'ni o'zgaruvchini kiritish va gruppash usullari bilan yechiladi. Bu usullarni quyidagi misollar orqali ko'rib chiqaylik.

$$\text{1-misol. } 36^x = \frac{1}{216} \text{ tenglamani yeching.}$$

Yechish. Bu tenglama asoslarini tenglash yo'li orqali yechiladi:

$$(36^x = 216^{-1}), (6^{2x} = 6^{-3}) \Rightarrow (2x = -3) \Rightarrow (x = -\frac{3}{2})$$

Ushbu tenglamani logarifmlash usuli bilan ham yechish mumkin. Logarifm ta'rifiga ko'ra: $x = \log_{36}\left(\frac{1}{216}\right)$ bundan

$$x = -\log_{36}216 = -\frac{1}{2}\log_6216 = -\frac{3}{2}, \text{ chunki } \log_6216=3.$$

2-misol. $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$ tenglama yechilsin. Bu tenglama yangi o'zgaruvchi kiritish usuli orqali kvadrat tenglamaga keltirib yechiladi. Agar $y = 5^x$ desak, berilgan tenglama $y^2 - y - 600 = 0$ ko'rinishni oladi.

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 600} = \frac{1}{2} \pm \frac{49}{2}; \quad y_1 = 25, \quad y_2 = 24$$

$$5^x = y \text{ yoki } 5^x = 25, \quad 5^x = 5^2, \quad x = 2$$

Javob: $x = 2$

$$\text{3 - misol. } 3^{x^2+1} + 3^{x^2-1} = 270 \text{ tenglamani yeching.}$$

$$\text{Yechish. } 3^{x^2} \cdot 3 + 3^{x^2} \cdot \frac{1}{3} = 270, \quad 3^{x^2} = y \text{ desak, } 3y + \frac{1}{3}y = 270$$

yoki $\frac{10}{3}y = 270$, bundan $y = 81$, $3^{x^2} = 81$ yoki $3^{x^2} = 3^4$ bundan $x^2 = 4$

va $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

4 - misol. $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$ tenglamani yeching. Bu tenglama gruppash usuli bilan yechiladi:

$$5^{2x}(1 - 35) = 7^x(1 - 35), \quad 5^{2x} = 7^x, \quad x = 0$$

$$\text{5-misol. } \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10 \text{ tenglamani yeching.}$$

$$\text{Yechish. Bu tenglamani yechishda } \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 1$$

ekanligidan foydalanamiz. Agar $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = y$ desak, u holda

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \frac{1}{y} \text{ bo'ladi. bu belgilashlarga ko'ra tenglama}$$

$$\text{quyidagicha ko'rinishni oladi. } y + \frac{1}{y} = 10, \text{ bundan } y^2 - 10y + 1 = 0$$

yoki $y_1 = 5 - 2\sqrt{6}$ va $y_2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

$$\text{a) } \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5 - 2\sqrt{6} \text{ bo'lsin, u holda}$$

$$(5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = \frac{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}{5+2\sqrt{6}} = (5+2\sqrt{6})^{-1}, \text{ bundan } \frac{x}{2} = -1, x_1 = -2;$$

$$\text{b) } \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x = 5 + 2\sqrt{6} \text{ bo'lsin, u holda } (5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = (5+2\sqrt{6})^1,$$

$$\text{bundan } \frac{x}{2} = 1, x_1 = 2;$$

Javob: $x = -2$ va $x = 2$

6 - misol. $100^x = 300$ tenglama yechilsin.

Yechish. Tenglikning ikkala tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz. $x \lg 100 = \lg 300$.

Bizga ma'lumki, $\lg 100 = 2$. Bu yerda $\lg 300 = \lg(100 \cdot 3) = \lg 100 + \lg 3 = 2 + \lg 3$ kabi ayniy almashtirishlar bajaramiz. Bu

almashtirishlarga ko'ra berilgan tenglama $x \cdot 2 = 2 + \lg 3$ ko'rinishni oladi. Bundan: $x = \frac{2 + \lg 3}{2} = 1 + \frac{\lg 3}{2}$

$$7 - \text{misol. } \left(2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$$

Yechish. Bu tenglamani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\left(2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) - 1 = 0$$

$$2^x - \frac{2}{2^x} = y \quad \text{deb belgilasak, u holda}$$

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}}$$

$$= \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) \left(2^{2x} + 2 + \frac{4}{2^{2x}}\right) = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) \left[\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^2 + 6\right] = y(y^2 + 6)$$

bo'ladi. Bu almashtirishlarga ko'ra berilgan tenglama o'zgaruvchi u ga nisbatan quyidagi ko'rinishni olad: $y(y^2 + 6) - 6y - 1 = 0$ yoki $y^3 = 1$, $y = 1$. $2^x - \frac{2}{2^x} = 1$, bundan $2^{2x} - 2^x - 2 = 0$ bo'ladi. Agar $2^x = t$ desak, u holda tenglama $t^2 - t - 2 = 0$ ko'rinishni oladi. Uning yechimlari $t_1 = 2$, $t_2 = -1$ bo'ladi. U holda $2^x = 2$ yoki $x = 1$, $2^x = -1$ tenglama yechimga ega emas.

Javob: $x = 1$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Quyidagi tenglamalarni yeching:

$$1. 5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$$

J: 2

$$2. \sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$$

J: $x = \frac{17}{13}$

$$3. 16\sqrt{(0.25)^{\frac{5-x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$$

J: $x = 24$

$$4. 4 + \frac{2}{3^x - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$$

J: $x = 1$

$$5. \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1,2 \quad J: x = 0$$

$$6. 7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x \quad J: x = \frac{\lg 7 - \lg 5}{\lg 3 - \lg 2}$$

$$7. 5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 17 + 7^x \cdot 17 = 0 \quad J: x = 0$$

$$8. 9^x = \left(\frac{1}{243}\right)^{5x} \quad J: x = 0$$

$$9. (0,4)^{\lg^2 x - 1} = (6,25)^{2 - \lg x^2} \quad J: x_1 = 10^5, x_2 = 10$$

$$10. x^{\lg^2 x + \lg x + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}} \quad J: x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{100}$$

$$11. 2 \cdot 11^{4(x-1)} - 1 = 121^{x-1} \quad J: x = 1$$

$$12. 2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81 \quad J: x_1 = 4, x_2 = 4 - \frac{\lg 5}{\lg 3}$$

12-§. Logarifmik tenglamalar.

Maktab matematika kursida logarifmik tenglamaga ta’rif berib, so‘ngra uni yechish usullari ko‘rsatiladi.

T a’ r i f. Noma’lum miqdor logarifm belgisi ostida qatnashgan tenglamalar logarifmik tenglamalar deyiladi.

Masalan, $\lg x = 3 - \lg 5$, $\lg x = \lg 2$, $2 \lg \sqrt{x} = \lg(15 - 2x)$ va hokazo. Logarifmik tenglama ham ko‘rsatkichli tenglama singari transsident tenglama turiga kiradi. $\log_a x = b$ tenglama eng sodda logarifmik tenglamadir. Bu yerda a , b lar ma’lum sonlar, x noma’lum sondir. Bu ko‘rinishdagi tenglama $x = a^b$ bitta yechimga ega bo‘ladi.

Logarifmik tenglamaning yechish jarayonida o‘qituvchi o‘quvchilarga logarifmik funksiya va uning xossalari haqidagi ma’luatlarni takrorlab berish lozim. Ayniqsa, o‘qituychi ko‘paytmaning $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$, kasrning $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$ va darajaning $\lg a^n = n \lg b$ logarifmlari hamda logarifmlarning bir asosidan boshqa asosiga

o'tish $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ formulasi va qoidalarni imkoniyat boricha

isboti bilan tushuntirib berishi maqsadga muvofiqdir, chunki logarifmik tenglamalarni yechish jarayonida ana shu qoidalardan foydalilaniladi. Logarifmik tenglamalarni yechish jarayonida ko'pincha $\lg A = \lg B$ bo'lsa, $A=B$ bo'ladi degan qoidaga amal qilamiz. Ayrim hollarda o'quvchilar $\lg A + \lg B = \lg C$ tenglikdan ham $A+B=C$ bo'ladi degan noto'g'ri xulosaga keladilar. Mana shunday xatoliklarning oldini olish uchun o'qituvchi yuqoridagi tengliklarni aniq misollar yordamida ko'rsatib berishi lozim. Masalan. $\lg 5 + \lg 9 = \lg 45$. Bu tenglikdan yuqoridagi xato mulohazaga ko'ra $5+9=45$ bo'lishi kerak, bunda $14 \neq 45$. Bundan ko'rinishdiki, $\lg A + \lg B = \lg C$ dan $A+B=C$ deb yozish katta xatolikka olib kelar ekan. Demak, $\lg A + \lg B = \lg C$ bo'lsa, ikki son ko'paytmasining logarifmi qoidasiga ko'ra $\lg(A \cdot B) = \lg C$ bo'ladi, bundan $A \cdot B = C$ ekanligi ko'rsatish kifoya. $\lg 5 + \lg 9 = \lg 45$, $\lg(5 \cdot 9) = \lg 45$. $45 = 45$. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tenglamani yechish uchun $f(x) = g(x)$ tenglamani yechish kerak va topilgan yechimlar ichidan $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ tengsizliklarni qanoatlantiradiganlarini tanlab olinadi. $f(x) = g(x)$ tenglamaning qolgan ildizlari esa $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ tenglama uchun chet ildiz bo'ladi. Har qanday logarifmik tenglama ayniy almashtirishlar yordamida uni $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ko'rinishga keltirib, $f(x) = g(x)$ tenglamani yechish orqali va yangi o'zgaruvchi kiritish orqali yechiladi. Logarifmik tenglamalarni yechishni uning aniqlanish sohasini topishdan boshlash lozim.

1 - m i s o l. $\log_a x = b$ tenglama yechilsin.

Yechish. Agar $a > 0$ va $a \neq 1$ bo'lsa, $x = a^b$ bo'ladi.

2 - m i s o l. $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)} = 2$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\lg 2x$ ning aniqlanish sohasi $x > 0$ bo'ladi. $\lg(4x-15)$ ning aniqlanish sohasi $4x-15 > 0$, bundan $x > \frac{15}{4}$ bo'ladi. Bundan tashqari $4x-15 \neq 0$ yoki $x \neq 4$ bo'lishi kerak, bularga asoslanib tenglamaning

aniqlanish sohasi $x > 3\frac{3}{4}$ va $x \neq 4$ bo'ladi. Tenglamani yechish uchun

quyidagicha ayniy almashtirish bajaramiz:

$$\lg 2x = 21g(4x-15), \quad \lg 2x = \lg(4x-15)^2; \quad 2x = 16x^2 - 120x + 225 \quad \text{yoki}$$
$$16x^2 - 122x + 225 = 0, \text{ bundan } x_1 = \frac{72}{15} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ yechim tenglamaning}$$

aniqlanish sohasida yotadi, shuning uchun $x_1 = 4\frac{1}{2}$ yechim bo'ladi.

3 - misol. $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x + 1}) - \log_2(\sqrt{\lg x + 1}) = 1$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari sohasi $x \geq 1$ bo'ladi. Berilgan tenglamani potensirlasak,

$$\frac{\lg x + 2\sqrt{\lg x + 1}}{\sqrt{\lg x + 1}} = 2 \quad \text{yoki} \quad \sqrt{\lg x + 1} = 2, \quad \sqrt{\lg x} = 1 \quad \text{bundan } x = 10.$$

4 - misol. $x^{1+\lg x} = 100$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamadagi noma'lumning qabul qiladigan qiymatlar sohasi $x > 0$ dir. Tenglikning har ikkala tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz: $\lg x \cdot (1 + \lg x) = \lg 100$

Agar $\lg x = t$ desak, $\lg 100 = 2$ bo'ladi. U holda $(1+t)t = 2$ yoki $t^2 + t - 2 = 0$, bundan $t_1 = 1$, $t_2 = -2$. $\lg x = 1$, bundan $x = 10$, $\lg x = -2$, bundan $x = \frac{1}{100}$ Javob. $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{100}$

5-misol. $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$ tenglama yechilsin

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $5x-4 > 0$ va $x+1 > 0$ bo'lishi kerak, bundan $x > \frac{4}{5}$ bo'ladi. Tenglamani potensirlasak:

$$\sqrt{5x-4} \cdot \sqrt{x+1} = 100 \cdot 0,18 \quad \text{yoki} \quad \sqrt{5x-4} \cdot \sqrt{x+1} = 18. \quad \text{Bunda}$$
$$5x^2 + x - 328 = 0, \text{ bundan } x_1 = -\frac{41}{5} \text{ va } x_2 = 8, \quad x_1 = -\frac{41}{5} \text{ bo'lgani uchun}$$

yechim bo'lilmaydi. Javob. $x = 8$.

6 - misol. $\frac{1}{12} \lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \lg x$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamaning aniqlanish sohasi $x > 0$. Agar $\lg x = y$ desak, $\frac{1}{12}y^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}y$, $y^2 + 3y - 4 = 0$, bundan $y_1 = 1$ va $y_2 = -4$, u holda $\lg x = 1$ yoki $x = 10$. $\lg x = -4$ yoki $x = \frac{1}{10^4}$.

$$\text{Javob. } x_1 = 10, x_2 = \frac{1}{10^4}$$

$$7 - \text{m i s o l. } \log_5 x + \log_x 5 = 2,5$$

Yechish. Tenglamaning aniqlanish sohasi $x > 0$ va $x \neq 1$. Bu tenglamada logarifm asoslarini bir xilga keltirish kerak. Buning uchun $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ formuladan foydalanamiz:

$$\log_5 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = \frac{1}{\log_5 x}$$

Bu almashtirishlarga ko'ra tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:
 $\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} = 2,5$, agar $\log_5 x = y$ desak, $y + \frac{1}{y} = 2,5$ yoki

$$y^2 - 2,5y + 1 = 0. \text{ Uni yechsak, } y_1 = 2 \text{ va } y_2 = \frac{1}{2}. \text{ Bularga ko'ra } \log_5 x = 2,$$

$$\text{bundan } x = 25 \text{ va } \log_5 x = \frac{1}{2}, \text{ bundan } x = \sqrt{5}.$$

$$\text{Javob: } x_1 = 25, x_2 = \sqrt{5}$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Quyidagi tenglamalarni yeching:

1. $\lg x = 3 - \lg 5$ $J: x = 200$
2. $100^{\lg(x+20)} = 10000$ $J: x = 80$
3. $\lg(0,5 + x) = \lg 2 - \lg x$ $J: x = \frac{\sqrt{33} - 1}{4}$
4. $\lg(x+6) - 2 = \frac{1}{2} \lg(2x-3) - \lg 25$ $J: x_1 = 14, x_2 = 6$

$$5. \frac{1}{5-4\lg x} + \frac{1}{1+\lg x} = 1$$

$$J: x = \sqrt{10}$$

$$6. \frac{1}{5-4\lg(x+1)} + \frac{4}{1+\lg(x+1)} = 3$$

$$J: x = 9, x = \sqrt{1041}$$

$$7. x^x = x$$

$$J: x = 1, x = -1$$

$$8. x^{\lg x + 2} = 1000$$

$$J: x = \frac{1}{1000}, x = 10$$

$$9. x = 10^{1-0.25\lg x}$$

$$J: \sqrt[5]{10000}$$

$$10. \log_3 x + \log_5 x = \log_x 15$$

$$J: x = 5$$

$$11. \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

$$J: x = 16$$

$$12. \log_{3x} 3 = \log_3 (3x)^2$$

$$J: x = 1$$

$$13. \log_{\sqrt{\frac{1}{16}}} x = 4$$

$$J: x = \frac{1}{256}$$

$$14. \log_{\sqrt{x-2}} (2\sqrt{x} + 6) = 2$$

$$J: x = 16$$

$$15. \log_3 \left(3 + \sqrt{3+x} \right) = \frac{2}{\log_x 3}$$

$$J: x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$16. \sqrt{\log_x \sqrt{2x}} \cdot \log_2 x = -1$$

$$J: x = \frac{1}{4}$$

$$17. \frac{\lg(x+4) - \lg(x-3)}{\lg 200 - \lg 25} = 1$$

$$J: x = 4$$

$$18. \log_b x + \log_{b^2} x + \log_{b^4} x = 1,75$$

$$J: x = b$$

$$19. \frac{\lg(2x+5) - \lg x}{2 + \lg 100} = \frac{1}{4}$$

$$J: x = \frac{5}{8}$$

$$20. \log_3 \{ 1 + \log_2 [1 + \log_4 (1 + \log_{\frac{1}{2}} x)] \} = 0$$

$$J: x = 1$$

$$21. \log_b x + \log_x 4 = 2$$

$$J: x = 4$$

$$22. \log_{\sqrt[4]{x}} x + \log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x = 8$$

$$J: 9$$

$$23. \log_7 [x + \log_2 (9 - 2^x) + 4] = 1$$

$$J: x = 0$$

$$24. \log_7 \log_4 \log_3^2 (x-7) = 0$$

$$J: x = 7\frac{1}{9}, x = 16$$

$$25. \log_3 x + 6 \log_x 3 = 5$$

$$J: x = 9, x = 27$$

$$26. \lg x + \lg(x+3) = \lg 2 + \lg(9 - 2\sqrt{x^2 + 3x - 6}) \quad J: x = 2.$$

13-§. Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish

Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish parametrsiz shunday tenglamalardan ana shu parametrni qanoatlan-tiruvchi tenglama yechimini uning yo'l qo'yiladigan qiymatlari ichidan izlash bilan farq qiladi.

$$\text{1-m is o l. } \log_a(a + \sqrt{a+x}) = \frac{2}{\log_x a} \text{ tenglama yechilsin.}$$

Yechish. Bu tenglamani yechish uchun avvalo uning parametrini qanoatlan-tiruvchi yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohanini topamiz:

$$x > 0, x \neq 1, a > 0, a \neq 1. \log_a(a + \sqrt{a+x}) = \log_a x^2$$

Potensirlash qoidasiga ko'ra $a + \sqrt{a+x} = x^2$, $\sqrt{a+x} = x^2 - a$, bu yerda $x^2 > a$ tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko'tarsak, $a+x = x^4 - 2ax^2 + a^2$, $a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0$ bu tenglamani yechsak,

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x + 1)}{2} \text{ hosil bo'ladi: } a_1 = x^2 + x + 1 \text{ va } a^2 = x^2 - x.$$

$a_1 = x^2 + x + 1$ tenglamaning yechimi yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasida yotmaydi, $x^2 - a > 0, x > 0$ bo'lgani uchun $a = x^2 - x$ tenglamani yechamiz: $x^2 - x - a = 0$, bundan

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+4a}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$$

Bulardan: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2}$. Bu yechimlardan

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$ tenglamaning yo'l qo'yiladigan qiymatlar sohasida-yotadi, shuning uchun u yechim bo'ladi.

Bu berilgan tenglamaning logarifm xossalari va potensirlashga ko'ra $a = \sqrt{a+x} = x^2$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglamaning har ikki tomoniga x ni qo'shamiz.

$$a+x+\sqrt{a+x} = x^2 + x$$

agar $\sqrt{a+x} = b$ desak, $b^2 + b = x^2 + x$ hosil bo'ladi. Bundan

$$(x^2 - b^2) + (x - b) = 0,$$

$$(x - b)(x + b) + (x - b) = 0,$$

$$(x - b)(x + b + 1) = 0;$$

$x+b+1 \neq 0$, bo'lgani uchun $x-b=0$ bo'ladi, b ning o'rniga $\sqrt{a+x}$ ni qo'ysak, $x-\sqrt{a+x}=0$ yoki $x^2-x-a=0$ bo'ladi. Biz bu tenglamani yechishni yuqorida ko'rib o'tdik.

2 - misol. $a^{\frac{x}{2}} + b^{\frac{x}{2}} = m(ab)^{\frac{1}{x}}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamadagi o'zgaruvchining yo'l qo'yiladigan qiymati $x \neq 0$

a) $a \cdot b > 0$ bo'lsin, u holda tenglamaning ikkala tomonidagi ifodalarni $(a \cdot b)^{\frac{1}{x}}$ ga bo'lamiz.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = m, \quad (m > 0).$$

Agar $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = t$ desak, $t + \frac{1}{t} = m$, bundan $t^2 - tm + 1 = 0$ bo'ladi.

Bu tenglamani yechamiz:

$$t_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \quad (1)$$

Bu yerda $m \geq 2$ bo'ladi.

a) $m > 2$ bo'lsin, bu holda (1) ning har ikki tomonini 10 asosga ko'ra logarifmlaymiz:

$$\frac{1}{x} \lg \frac{a}{b} = \lg(m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2,$$

$$x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg(m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2}, \quad (a \neq b).$$

b) $m = 2$ bo'lsin, u holda (1) quyidagi ko'rinishni oladi:

bundan: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = 1$, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}}$; $a = b \neq 0$ bo'lishi kerak.

2) $a \cdot b = 0$ bo'lsin.

a) $a=b=0$ bo'lsa, berilgan tenglamaning yechimi bo'lgan barcha sonlar.

b) $a=0$, $b \neq 0$ yoki $a \neq 0$, $b=0$ bo'lsa, tenglama yechimiga ega emas.

J: 1) Agar $m > 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ bo'lsa,

$$x = \frac{\lg a - \lg b}{\lg(m \pm \sqrt{m^2 - 4}) - \lg 2}$$

2) Agar a) $m = 2$, $a = b \neq 0$ bo'lsa, x – ixtiyoriy son.

b) $a=b=0$, $x \neq 0$ – ixtiyoriy son

3-m isol. $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$ tenglama yechilsin.

Yechish. Bu tenglamadagi a parametrning yo'l qo'yildigan qiymatlari sohasi $0 < a < 1$ bo'ladi. Tenglamaning har ikki tomonini

$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x \neq 0$ ga bo'lamiz:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1, \quad \frac{2a}{1+a^2} = \sin z, \quad \frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos z,$$

$$(\cos z)^x + (\sin z)^x = 1. \quad (1)$$

(1) tenglikning chap tomonida turgan ifodaning yo'l qo'yildigan qiymatlar sohasi $0 < z < \frac{\pi}{2}$ bo'ladi, bu oraliqda $f(x) = (\sin z)^x + (\cos z)^x$

funksiya monoton kamayuvchidir. $x=2$ da $f(x)=1$ bo'ladi, shuning uchun $x=2$ bu tenglamaning yechimi bo'ladi.

4-misol. $a^x - \frac{a^{2x} - 4a^x + 4}{\sqrt{a^{2x} - 4a^x + 4}} = 1$ tenglama yechilsin.

Yechish: Bu tenglama ma'noga ega bo'lishi uchun $\sqrt{a^{2x} - 4a^x + 4} = \sqrt{(a^x - 2)^2} = |a^x - 2| \neq 0$ bo'lishi kerak.

$$a^x - \frac{(a^x - 2)^2}{|a^x - 2|} = 1; \quad a^x - a^x + 2 = 1$$

A) agar $a^x \geq 2$ bo'lsa, $a^x - a^x + 2 = 1$ tenglama yechimga ega emas.

B) agar $0 < a^x < 2$ bo'lsa, $2a^x = 3$; $x = \log_a \frac{3}{2}$ yechim hosil bo'ladi.

5-misol. $2 \log_x^2 b - 3 \log_x bx^2 + 14 \log_{bx^2} bx = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish. $x > 0$, $x \neq \frac{1}{b^2}$ va $b > 0$, agar $\log_x b = y$ desak,

$$2y^2 - 3y + 1 = 0, \quad y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad \log_x b = 1$$

bundan $x_1 = b$, $\log_x b = \frac{1}{2}$ bundan $x_2 = \sqrt{b}$

6-misol. $\frac{2}{a} \lg x = 1 + \frac{a}{\lg x}$, $a \neq 0$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\frac{2}{a} \lg^2 x = \lg x + a; \quad \frac{2}{a} \lg^2 x - \lg x - a = 0;$$

$$\lg x = y; \quad 2y^2 - ay - a^2 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{4} = \frac{a \pm 3a}{4},$$

$$y_1 = a, \quad y_2 = -\frac{a}{2};$$

$$\lg x = a, \quad x = 10^a; \quad \lg x = -\frac{a}{2}, \quad x = 10^{-\frac{a}{2}}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1-misol. $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a \neq 0$, $a \neq 1$, $a > 0$ tenglama yechilsin.

$$j: \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad x_2 = \frac{1}{a^2 \sqrt{a}}.$$

2-misol. $\frac{\log_a 4 - 2}{\log_a(x+2)} = \frac{\log_a(5-x)}{\log_a(x+2)} - 1, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ tenglama yechilsin.

$$j: \quad x = 2 \frac{11}{13}.$$

3-misol. $\frac{\lg(4+a-x)}{\lg x} = 1 + \frac{\log_a 4 - 2}{\log_a x}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$ tenglama yechilsin.

$$j: \quad x = \frac{a^2(a+4)}{a^2+4}.$$

14-§. Ko‘rsatkichli va logarifmik tenglamalar sistemasini yechish.

1-misol. $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} = 5 \\ (x+y) \cdot 2^x = 100 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish. Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomonini x darajaga ko‘taramiz:

$$\begin{cases} x+y = 5^x, \\ (x+y) \cdot 2^x = 100. \end{cases}$$

$$(5^x \cdot 2^x = 100) \Rightarrow (10^x = 10^2) \Rightarrow (x = 2).$$

$$(2+y = 5^2) \Rightarrow y = 25 - 2 = 23. \quad \mathcal{K}: x = 2, \quad y = 23$$

2-misol. $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[3]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning har ikki tomonini y darajaga ko‘taramiz.

$$\begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\frac{2}{3}x\right)^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (x^y)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 1024 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (243)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 2^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \cdot (3^5)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^y = 243, \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases}$$

3 - misol. $\begin{cases} y^{\frac{x}{y}} = x, \\ y^3 = x^2 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Sistemadagi birinchi tenglamaning har ikki tomonini $2y$ darajaga, ikkinchi tenglamani esa y darajaga ko'taramiz:

$$\begin{cases} y^{2x} = x^{2y} \\ y^{3y} = x^{2y} \end{cases} \Rightarrow y^{2x} = y^{3y}; \quad y \neq 1 \text{ bo'lsa, } 2x = 3y, \quad x = \frac{3}{2}y, \quad x \text{ ning}$$

bu topilgan qiymatini sistemadagi ikkinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$\left(y^3 = \frac{9}{4}y^2 \right) \Rightarrow \left(y^3 - \frac{9}{4}y^2 = 0 \right) \Rightarrow y^2 \left(y - \frac{9}{4} \right) = 0;$$

$$y_{1,2} = 0, \quad y_3 = \frac{9}{4}, \quad x_{1,2} = 0, \quad x_3 = \frac{27}{8}, \quad y_3 = \frac{9}{4},$$

4-misol. $\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457, \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $5^x = a, 2^{x+y} = b$ desak,

$$\begin{cases} 9a + 7b = 457, \\ 6a - 14b = -890 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 64, \end{cases}$$

$$(5^x = 1) = (5^x = 5^0) = (x = 0); \quad 2^y = 64 = 2^6; \quad y = 6.$$

$$\text{J: } x = 0, y = 6.$$

5-misol. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish.

$$\begin{cases} x+y = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} \Rightarrow (2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}} = 3 \cdot 2^{x-y}) \Rightarrow (3^{\frac{x-y}{2}} = 3) \Rightarrow \\ x+y = 3 \cdot 2^{x-y} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x-y}{2} = 1 \right) \Rightarrow [(x-y) = 2] \Rightarrow (x = 2+y).$$

$$\begin{cases} x+y = 3 \cdot 2^2 = 12, \\ x-y = 2 \end{cases} \Rightarrow (2x = 14) \Rightarrow (x = 7);$$

$$\begin{cases} y = x-2 \Rightarrow y = 5, \\ x = 7. \end{cases}$$

J: $x=7, y=5.$

6-misol. $\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y}, \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish.

$$\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} = 3^{2y-x} \\ \log_2(x+y)(x-y) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2y-x, \\ (x+y)(x-y) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y = 4y-2x, \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 5y \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y, \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ \frac{25}{9}y^2 - y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ 16y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}y \\ y_{1,2} = \pm 3. \end{cases}$$

j: $x_1 = 5; y_1 = 3; x_2 = -5; y_2 = -3.$

7-misol. $\begin{cases} 7 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{y+z-x+1} = 9, \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{y+z-x+1} = 27, \\ \lg(x+y+z) - 3\lg x = \lg yz + \lg 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Agar $3^{x+1}=y$, $3^{y+z-x+1}=v$ desak, berilgan sistemadagi birinchi ikki tenglama quyidagi ko'mishni oladi:

$$\begin{cases} 7u - 6v = 9, \\ 2u + v = 27 \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak, $y=9$, $v=9$ yechimlarga ega bo'lamiz. Bu yechimlarga ko'ra $x=1$, $y+z-x=2$ yoki $y+z=3$ tengliklarni hosil qilamiz. Bu topilganlarga ko'ra sistemadagi uchinchi tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\lg(3+1) - 3\lg 1 = \lg yz + \lg 2,$$

$$\lg 4 - \lg 2 = \lg yz,$$

$$\lg 2 = \lg yz; \quad 2 = yz$$

Bularga ko'ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ yz = 2 \end{cases} \quad \text{bundan}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, & y_2 = 2, \\ z_1 = 2, & z_2 = 1, \end{cases}$$

$$j: \quad \begin{cases} x_1 = 1, & y_1 = 1, & z_1 = 2, \\ x_2 = 1, & y_2 = 2, & z_2 = 1, \end{cases}$$

8-misol. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 13 + 1, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3 \lg 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Bu tenglamalar sistemasidagi o'zgaruvchining yo'l quyiladigan qiymatlar sohasi $x+y>0$ va $x-y>0$ bo'ladi.

Potensirlash qoidasiga ko'ra tenglama sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi;

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ \frac{x+y}{x-y} = 8. \end{cases}$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamadan y ni topamiz:

$$x+y=8x-8y \quad \text{yoki} \quad 9y=7x, \quad y=\frac{7}{9}x.$$

Bu qiymatni birinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$x^2 + \frac{49}{81}x^2 = 130,$$

$$81x^2 + 49x^2 = 130 \cdot 81,$$

$$130x^2 = 130 \cdot 81, \quad x^2 = 81, \quad x_{1,2} = \pm 9;$$

$$y = \frac{7}{9} \cdot 9 = 7$$

$$j: x = 9, \quad y = 7.$$

9-misol. $\begin{cases} \lg(x-y) - 2\lg 2 = 1 - \lg(x+y) \\ \lg x - \lg 3 = \lg 7 - \lg y \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Tenglamalar sistemasidagi noma'lumlarning yo'l quyiladigan qiymatlar sohasi $x > 0, y > 0, x > y$.

$$\begin{cases} \lg(x-y) + \lg(x+y) = \lg 4 + \lg 10, \\ \lg x + \lg y = \lg 7 + \lg 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) = 40 \\ xy = 21 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak. Quyidagi yechimni hosil qilamiz: $x=7, y=3$.

10-misol. $\begin{cases} \log_2 \frac{x^2 \sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \log_8 x \log_2 (y+1)^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $x > 0, y > 0$ bo'lishi kerak. Ikki son ko'paytmasining logarifmi qoidasiga ko'ra sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} 2\log_2 x + \log_2 \frac{\sqrt{y+1}}{2} = 2, \\ \frac{1}{3}\log_2 x \cdot 2\log_2 (y+1) = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2(y+1) - \log_2 2 = 2, \\ \frac{1}{3}\log_2 x \cdot 2\log_2(y+1) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Agar $\log_2 x = u, \log_2(y+1) = v$ deb belgilasak, u holda tenglama sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} 2u + \frac{1}{2}v = 3, \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4u + v = 6, \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2 \end{cases} \text{ ba } \begin{cases} u_2 = \frac{1}{2}, \\ v_2 = 4 \end{cases}$$

- 1) $(\log_2 x = 1) \Rightarrow (x = 2).$
- 2) $[\log_2(y+1) = 2] \Rightarrow (y+1 = 4) \Rightarrow (y = 3).$
- 3) $\left(\log_2 = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x = \sqrt{2}).$
- 4) $[\log_2(y+1) = 4] \Rightarrow (y+1 = 16) \Rightarrow (y = 15).$

$$j : \begin{cases} x_1 = 2, & y_1 = 3, \\ x_2 = \sqrt{2} & y_2 = 15, \end{cases}$$

11-misol. $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5 \lg^2 a^2 \\ xy = a^2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $x > 0, y > 0$ va $a > 0$. Sistemadagi ikkinchi tenglamaning quyidagicha yozib olamiz: $\lg x + \lg y = 2 \lg a$.

Agar $\lg x = u$ va $\lg y = v$ desak, sistemani quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \lg^2 a \\ u + v = 2 \lg a \end{cases}$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamaga ko'ra quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$u = 3 \lg |a| = \lg x, \quad v = -\lg |a| = \lg y.$$

$$j : x_1 = |a|^3, \quad y_1 = \frac{1}{|a|}, \quad x_2 = \frac{1}{|a|}, \quad y_2 = |a|^3.$$

Bu tengliklardan $x = |a|^3, y = \frac{1}{|a|}$ bo'ladi.

12-misol. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_9 x + \log_3 y + \log_9 z = 2, \\ \log_{16} x + \log_{16} y + \log_4 z = 2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ bo'lishi kerak. Berilgan sistemaga bir asosdan boshqa asosga o'tish va potensirlash qoidalarini qo'llash orqali uni quyidagicha yoza olamiz:

$$\begin{cases} x^2yz = 16, \\ xy^2z = 81, \\ xyz^2 = 256. \end{cases}$$

Bu hosil qilingan sistemaning chap va o'ng tomonlarini o'zar ko'paytirsak, $(xyz)^4 = 24^4$ yoki $xyz = 24$ hosil bo'ladi. Bunga ko'ra

$$x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{27}{8}, \quad z = \frac{32}{3} \quad \text{yechimlarni qosil qilamiz.}$$

13-misol. $\begin{cases} \log_3 x(1 + \log_x y) = 4, \\ 3\left(2 \log_{y^4} x^2 - \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{x^2}} y^4\right) = 10 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamadagi no'malumlarning qabul qilidigan qiymatlari to'plami $x > 0$ va $y > 0$ bo'lishi kerak.

Sistemadagi birinchi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\log_3 x = \frac{\log_x x}{\log_x 3} = \frac{1}{\log_x 3}, \quad 1 + \log_x y = \frac{4}{\log_3 x}$$

$$1 + \log_x y = 4 \cdot \log_x 3 \quad \text{ëku} \quad \log_x x + \log_x y = 4 \log_x 3,$$

$$\log_x(xy) = \log_x 3^4, \quad xy = 3^4$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamada quyidagicha $\log_{y^4} x^2 = z$ belgilashni kiritamiz:

$$6z + \frac{3}{2z} = 10 \quad \text{yoki} \quad 12z^2 - 20z + 3 = 0,$$

$$z_1 = \frac{3}{2}, \quad z_2 = \frac{1}{6}.$$

a) $\left(\log_{y^4} x^2 = \frac{3}{2}\right) \Rightarrow (x = y^2), \quad \begin{cases} x = y^2, & x_1 = 27, \\ xy = 81, & y_1 = 3; \end{cases}$

$$b) \quad \left(\log_y x^2 = \frac{1}{6} \right) \Rightarrow (y = x^3), \quad \begin{cases} xy = 81, & x_2 = 3, \\ y = x^3, & y_2 = 27. \end{cases}$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1. $\begin{cases} 3^{x+y} + 3^x + 3^y = 7, \\ 3^{2x+y} + 3^{x+2y} = 12. \end{cases}$ $j: \begin{cases} x_1 = 0, & y_1 = 1, \\ x_2 = 1, & y_2 = 0, \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2 \cdot 9^x + 9^x = 5^x \cdot 5^{-y}, \\ 2 \cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 3 \cdot 9^x, \end{cases}$ $j: x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}.$
3. $\begin{cases} (3x - y)^{x+y} = 4, \\ 48^{x+y} = 7x^2 - 18xy + 3y^2 \end{cases}$ $j: x = \frac{5}{4}, \quad y = -\frac{1}{4}.$
4. $\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$ $j: x = 1 \quad y = -1.$
5. $\begin{cases} \sqrt[2]{4^x} = 32 \sqrt[3]{8^y}, \\ \sqrt[3]{3^x} = 3 \sqrt[5]{9^{1-y}}. \end{cases}$ $j: \begin{cases} x_1 = -2, & y_1 = 4, \\ x_2 = \frac{3}{2}, & y_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$
6. $\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2, \\ \log_b x - \log_b y = 4. \end{cases}$ $j: x = ab^2 \quad y = \frac{a}{b^2}.$
7. $\begin{cases} (1 + \log_x y) \log_2 x = 3 \\ \log_{\sqrt{y}} (y^4 x^2) - 0,5 \log_{\sqrt{x}} y^4 = 2. \end{cases}$ $j: \begin{cases} x_1 = 2, & y_1 = 4, \\ x_2 = 2^6, & y_2 = -\frac{1}{27}. \end{cases}$
8. $\begin{cases} x \cdot \log_2 \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{x}} 4 = y \sqrt{y} (\log_x 4 - 2), \\ \log_y 4 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 2. \end{cases}$ $j: x = 2^{\frac{3}{5}}, \quad y = 2^{\frac{2}{5}}.$
9. $\begin{cases} \log_2 xy + 4 \log_4 (x-y) = 5, \\ x^2 + y^2 = 20, \end{cases}$ $j: \begin{cases} x_1 = 4, & y_1 = 2, \\ x_2 = 2, & y_2 = 4. \end{cases}$
10. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20, \end{cases}$ $j: x = 5, \quad y = 5.$

11. $\begin{cases} \log_{xy}(x+y) = 0 \\ \log_{xy}(y-x) = 1 \end{cases} \quad j: x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

12. $\begin{cases} \lg^2 \frac{x}{y} = 3 \lg^2 x - \lg^2 y, \\ \lg^2(y-3x) - \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases} \quad j: x_1 = 1, \quad y_1 = 4, \\ \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = 2,$

13. $\begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt[5]{2^y} = \sqrt[3]{128}, \\ \lg(x+y) = \lg 40 - \lg(x-y). \end{cases} \quad j: x = 7, \quad y = 3.$

14. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases} \quad j: x = 2, \quad y = 6.$

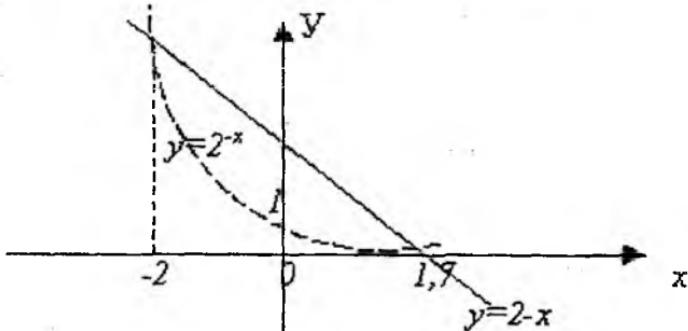
15-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechish.

1-misol. $2^{x+1} - x \cdot 2^x - 1 = 0$ tenglama grafik usulda yechilsin.

Yechish. Tenglamaning chap tomonida berilgan $y=2^{x+1} - x \cdot 2^x - 1 = 0$ funksiyaning grafigini chizish murakkabdir, shuning uchun bu tenglamani quyidagacha yozib olamiz: $2^{x+1} - x \cdot 2^x = 1$.

Bu tenglamaning har ikki tomonini $2^x \neq 0$ ga bo'lamiz. natijada $2-x=2^{-x}$ hosil bo'ladi. $y=2-x$ va $y=2^{-x}$ funksiyalarning grafiklarini (41-chizma) koordinata tekisligida chizsak, ularning kesishish nuqtalarining absissalari berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

$$J: x_1 = -2, x_2 = 1, 7.$$



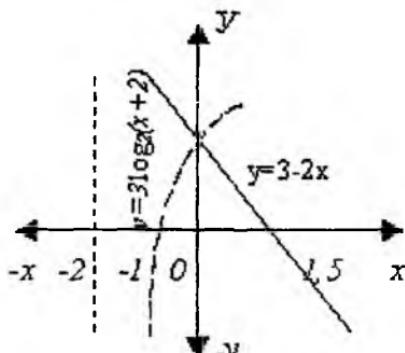
41-chizma.

2-misol. $3\log_2(x+2) + 2x - 3 = 0$ tenglama grafik usulda yechilsin.

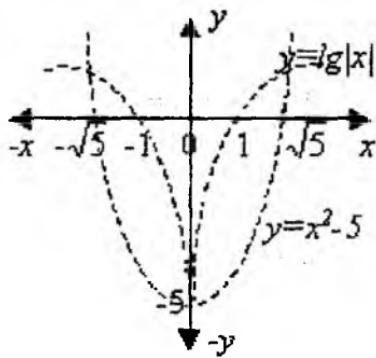
Yechish. Berilgan tenglamaning $3\log_2(x+2) = 3 - 2x$ ko'rinishida yozib olib, tenglikning har ikki tomonida turgan $y = 3\log_2(x+2)$ va $y = 3 - 2x$ funksiyalarining grafiklarini koordinata tekisligida yasaymiz (42-chizma). Bu grafiklar kesishish nuqtasining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. J: $x=0$.

3-misol. $\lg|x| - x^2 - 5 = 0$ tenglama grafik usulda yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha yozib olamiz: $\lg x = x^2 - 5$. $y = \lg x$ va $y = x^2 - 5$ funksiyalarini koordinata tekisligida grafiklarini yasaymiz (43 chizma).



42-chizma.

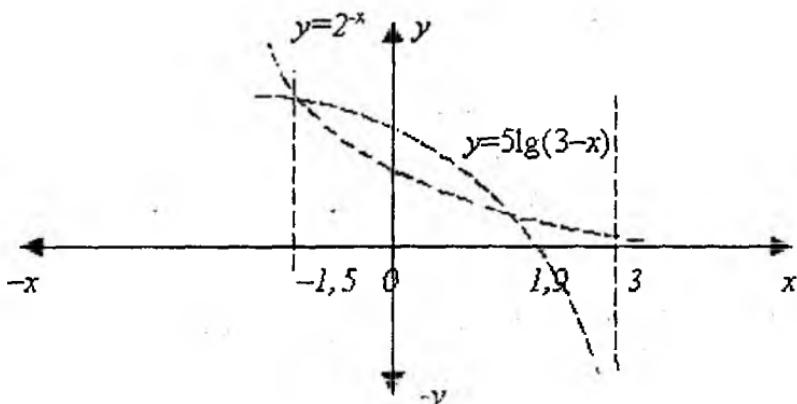


43-chizma.

Bu grafiklar kesishish nuqtalarining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

$$J: x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}.$$

4 - misol. $2^{-x} - 5\lg(3-x) = 0$ tenglama grafik usulda yechilsin.



44-chizma.

Yechish. Berilgan tenglamani $y=2^{-x}$ va $y=51g(3-x)$ ko'rinishda yozib, ularning grafiklarini koordinata tekisligida yasaymiz. Bu grafiklar kesishish nuqtalarining absissasi berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi (44-chizma).

$$J: x_1 = -1,5, x_2 = 1,9.$$

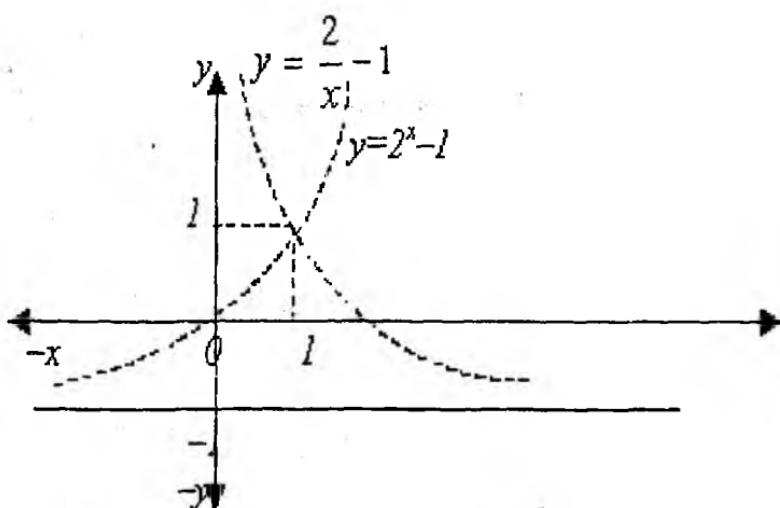
5 - misol. $\begin{cases} xy + x - 2 = 0, \\ x - \log_2(y+1) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi grafik

usulda yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} xy = 2 - x, \\ \log_2(y+1) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2-x}{x}, \\ y + 1 = 2^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} - 1, \\ y = 2^x - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$y = \frac{2}{x} - 1$ va $y = 2^x - 1$ funksiyalarning grafiklarini koordinata tekisligida chizamiz (45-chizma).



45-chizma.

Ularning kesishish nuqtalarining absissasi tenglamaning yechimi bo'ladi.

$$J: x = 1, y = 1.$$

16-§. Trigonometrik tenglamalar.

1. $\sin x = a$ tenglamada $|a| \leq 1$ bo'lsa, u $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ yechimga ega bo'ladi. Xususiy holda

a) agar $\sin x = 0$ bo'lsa, $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

b) agar $\sin x = 1$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

v) agar $\sin x = -1$ bo'lsa, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

g) agar $\sin^2 x = a$ bo'lsa, $x = \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Misol. $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sqrt{3} = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish:

$$\left[2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sqrt{3} = 0 \right] \Leftrightarrow \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{4} + x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\pi}{4} + x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. $\cos x = a$ tenglamada $|a| \leq 1$ bo'lsa, u $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ yechimga ega bo'ladi. Xususiy holda:

a) agar $\cos x = 0$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

b) agar $\cos x = 1$ bo'lsa, $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

v) agar $\cos x = -1$ bo'lsa, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

g) agar $\cos^2 x = a$ bo'lsa, $x = \pm \arccos \sqrt{a} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

Misol. $\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\left[\cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 0 \right] \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi k}{2} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x = \frac{1}{2} + \frac{\pi k}{2} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{4} + \frac{3\pi k}{2} \right), \quad k \in Z.$$

3. $\operatorname{tg} x = a$ tenglama $x = \arctg a + \pi k, k \in Z$ yechimga ega bo'ldi.
Xususiy holda

a) agar $\operatorname{tg} x = 0$ bo'lsa, $x = \pi k, k \in Z$;

b) agar $\operatorname{tg} x = 1$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

v) agar $\operatorname{tg} x = -1$ bo'lsa, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

g) agar $\operatorname{tg}^2 x = a$ bo'lsa, $x = \pm \arctg \sqrt{a} + \pi k, k \in Z$.

Misol. $3\operatorname{tg}^2 3x - 1 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\left(\operatorname{tg}^2 3x = \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow \left(3x = \pm \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + k\pi \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(3x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right) \Leftrightarrow \left(x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{18}(6k + 1) \right).$$

4. $\operatorname{ctg} x = a$ tenglama $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z$ yechimga ega bo'ldi.

a) agar $\operatorname{ctg} x = 0$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{2} \pi k, k \in Z$;

b) agar $\operatorname{ctg} x = 1$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

v) agar $\operatorname{ctg} x = -1$ bo'lsa, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

g) agar $\operatorname{ctg}^2 x = a$ bo'lsa, $x = \pm \operatorname{arcctg} \sqrt{a} + \pi k, k \in Z$.

Misol. $\operatorname{ctg}^2 \left[2x - \frac{\pi}{3} \right] = 3$ tenglama yechilsin.

Yechish.

$$\begin{aligned} \left[\operatorname{ctg}^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \right] &\Leftrightarrow \left[\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{3} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\left(2x - \frac{\pi}{3} = \pm \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k\right) \right] \Leftrightarrow \left(2x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi k\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Matematika kursida har qanday trigonometrik tenglamalar ayniy almashtirishlarni bajarish orqali sodalashtirib, $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ ko'rinishdagi eng sodda trigonometrik tenglamalarga keltiriladi.

Trigonometrik tenglamalar quyidagi metodlar yordamida yechiladi.

1. Ko'paytuvchilarga keltirish usuli.

1 - misol. $\sin 2x = \cos 2x \sin 2x$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sin 2x - \cos 2x \sin 2x = 0$, $\sin 2x(1 - \cos x) = 0$

1) Agar $1 - \cos x \neq 0$ bo'lib, $\sin 2x = 0$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$ bo'ladi.

2) Agar $\sin 2x \neq 0$ bo'lib, $1 - \cos x = 0$ bo'lsa, $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ bo'ladi.

2 - misol. $\sin 3x - \sin x = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sin 3x - \sin x = 2 \sin x \cos 2x = 0$

1) Agar $\cos 2x \neq 0$ bo'lib, $\sin x = 0$ bo'lsa, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

2) Agar $\sin x \neq 0$ bo'lib, $\cos 2x = 0$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ bo'ladi.

bo'ladi.

3-misol. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1,5$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ formulaga ko'ra

$$\left(\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0) \Leftrightarrow [(\cos 2x + \cos 6x) + \cos 4x = 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0] \Leftrightarrow \cos 4x(\cos 2x + 1) = 0.$$

1) Agar $2\cos 2x + 1 \neq 0$ bo'lib, $\cos 4x = 0$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) Agar $\cos 4x \neq 0$ bo'lib, $2\cos 2x + 1 = 0$ bo'lsa, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$,

$$2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; x = -\frac{\pi}{3} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

II. O'zgaruvchilarni kiritish usuli.

1 - misol. $2\cos^2 x - 3 \sin x$ tenglama yechilsin.

$$\text{Yechish. } (2\cos^2 x - 3 \sin x = 0) \Leftrightarrow (3\sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (3\sin x - 2 + 2\sin^2 x = 0).$$

Agar $\sin x = y$ desak,

$$2y^2 + 3y - 2 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = -2$$

$$\left(\sin x = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2 - misol. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ formulaga ko'ra
 $(1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0) \Leftrightarrow (2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0) \Leftrightarrow \sin x = y$ desak,

$$2y^2 + 5y + 2 = 0, \quad y_1 = -2, \quad y_2 = -\frac{1}{2}.$$

1) $\sin x = -2$ tenglama yechimga egaemas.

$$2) \quad \left(\sin x = -\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(x = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + \pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

III. Bir jinsli tenglamalarni yechish

1-misol. $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglama sinus va kosinus funksiyalariga nisbatan bir jinslidir. Tenglamalarning har ikki tmonini $\cos^2 x \neq 0$ ga bo'lsak,

$2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$ hosil bo'ladi. Bundan $\operatorname{tg} x = 1$ va $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$.

1) Agar $\operatorname{tg} x = 1$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) Agar $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$ bo'lsa, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ bo'ladi.

2-misol. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 3$ tenglamani yeching.

Yechish. Bu tenglamani ayniy almashtirishlar bajarish orqali bir jinsli ko'rinishga keltiramiz.

$$\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x),$$

$$\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$$

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 0,$$

$$2\cos x(\cos x - \sqrt{3} \sin x) = 0.$$

1) Agar $\cos x - \sqrt{3} \sin x \neq 0$ bo'lib, $\cos x = 0$ bo'lsa, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) Agar $\cos x \neq 0$ bo'lib, $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$ bo'lsa, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

IV. $a\sin x + b\cos x = c$ ko'rinishdagi tenglamani yeching.

1-usul. Bu tenglamani yechish uchun $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ almashtirish

bajaramiz. Bizga ma'lumki, $\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$,

edi, shunga ko'ra berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{2at}{1+t^2} + \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} = c,$$

$$2at + b - bt^2 = c + ct^2, \quad (b+c)t^2 - 2at + (c-b) = 0,$$

$$t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b},$$

$$x = 2\arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a^2 + b^2 \geq c^2 \text{ ba } b \neq -c.$$

Agar $b = -c$ bo'lsa, kvadrat tenglama chiziqli tenglamaga almashadi:

$$2at + 2b = 0, \quad t = -\frac{b}{a}, \quad x = -2\arctg \frac{b}{a} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2-usul. Tenglamaning har ikkala tomonini $\sqrt{a^2 + b^2}$ ga bo'lamic:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1 \quad \text{ba} \quad \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|^2 \leq 1,$$

$$\left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|^2 \leq 1$$

Agar $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ va $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$ desak, berilgan

tenglama $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ko'rinishni oladi,

bundan $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bo'ladi. $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$; agar $a^2 + b^2 \geq c^2$

bo'lsa,

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1-misol. $3\cos x + 4\sin x = 5$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ bo'lgani uchun tenglamaning har ikki tomonini 5 ga bo'lamiz: $\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1$,

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, shuning uchun $\frac{3}{5} = \sin \varphi$ va $\frac{4}{5} = \cos \varphi$ bo'ladi, bundan $\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x = 1$ tenglamani hosil qilamiz yoki $\sin(x + \varphi) = 1$ bo'ladi:

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \varphi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{3}{5}, \quad x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2-usul. Agar $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, va $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, ekanligini

nazarda tutib, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$ desak, $3 \cdot \frac{1 - y^2}{1 + y^2} + 4 \cdot \frac{2y}{1 + y^2} = 5$, yoki $3 - 3y^2 + 8y = 5 + 5y^2$ yoki $4y^2 - 4y + 1 = 0$ bundan $y = \frac{1}{2}$ yechim hosil bo'ladi:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k \right),$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLAR.

Trigonometrik tenglamalarni yeching.

$$1. \quad \operatorname{tg}x + \sin x \operatorname{tg}x = 0 \quad j : n\pi$$

$$2. \quad 2 \sin x - 3 \cos x = 6. \quad j : x \in \emptyset.$$

$$3. \quad \sin^2 x - (1 + \sqrt{3}) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

$$j : \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \arctg 3 + n\pi$$

$$4. \quad \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

$$j : \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \arctg 3 + n\pi.$$

$$5. \quad \sqrt{3} \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

$$j : \frac{\pi}{3} + n\pi, \quad \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

$$6. \quad \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{-5 - \sqrt{3}}{2}.$$

$$j : \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$7. \quad 7 \cos^2 x - 7 \sin 2x = 2. \quad j : x = \arctg \frac{-7 \pm \sqrt{53}}{2}.$$

$$8. \quad \frac{2}{3\sqrt{2} \sin x - 1} = 1. \quad j : x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \quad \frac{6}{\operatorname{tg}x - 2} = 3 - \operatorname{tg}x \quad j : \emptyset$$

$$10. \quad (1 - 2 \sin x) \sin x = 2 \cos 2x - 1 \quad j : x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$11. \quad \sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 0$$

$$j : x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin (2 - \sqrt{2}) + \frac{k\pi}{2}$$

$$12. \sin^3 x \cos x - \cos^3 \sin x = \cos^4 \frac{x}{3}$$

$$j: x = \frac{1}{4} \left[(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{4} + k\pi \right].$$

$$13. \sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x \quad j: \frac{\pi}{2} n.$$

$$14. \operatorname{tg}(40^\circ + x) \operatorname{ctg}(50^\circ - x) = \frac{2}{3} \quad j: x = \frac{1}{2} \left[\pi k - 35^\circ + (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{10} \right]$$

$$15. (\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \quad J: x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$16. \sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \frac{1}{8} \quad J: x = \pi k \pm \frac{\pi}{6}$$

$$17. \sin x + \sin 3x + \sin 7x = 3 \quad J: x = \emptyset$$

$$18. \operatorname{tg} 7x + \operatorname{tg} 3x = 0 \quad J: x = \frac{\pi k}{10}$$

$$19. 1 + \sin x + \cos x = 0 \quad J: x_1 = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, x_2 = \pi(2n+1)$$

$$20. \sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x \quad J: x = \frac{2k+1}{8}\pi$$

$$21. |\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad J: x = \pi k \pm \frac{\pi}{6}$$

$$22. 13 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0 \quad J: x = \frac{\pi k}{2}$$

$$23. 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x = 0 \quad J: x = \frac{\pi k}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$$

$$24. \cos^4 x + \cos^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad J: x = \frac{\pi}{2}(2k+1).$$

$$25. 2 \sin 2x + \sin x + \cos x = 1 \quad J: x_1 = 2k\pi, x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$26. 3 \sin x + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 3 \sin x \cos x \quad J: (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

27. $3 - \cos^2 x - 3 \sin x = 0$ $J: \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 28. $\cos^3 x + 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \cos x = 0$ $J: \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 29. $\cos^2 2x - \sin^2 2x = -\frac{1}{2}$ $J: \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$
 30. $\sin^3 x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$ $J: \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 31. $\sin^2 x \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x \sin \frac{x}{2} = 0$ $J: \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 32. $2 \operatorname{tg} 2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \sin x + \operatorname{tg} 2x = 0$ $J: \frac{1}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 33. $\frac{4 \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{3x}{2}} - \operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $J: -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}$
 34. $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 2 \operatorname{tg} 2x = 3$ $J: \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$
 35. $4 \sin^4 x + \sin^2 2x = 2$ $J: \frac{\pi}{4} (2k+1), k \in \mathbb{Z}$
 36. $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 2$ $J: \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$
 37. $\frac{1}{2} (\sin^4 x + \cos^4 x) = \sin x \cos x - \sin^2 x \cos^2 x$ $J: \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 38. $4 \sin x + \sin 2x = 0$ $J: \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 39. $\cos 2x + 2 \cos^2 x = \frac{5}{4}$ $J: \pm \arccos \frac{3}{4} + 2 \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 40. $0,5 + \cos x = \cos^2 \frac{x}{2}$ $J: \pm \frac{\pi}{2} + 2 \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 41. $\sin x + \cos x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$ $J: \frac{5\pi}{3} + 2 \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 42. $(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$ $J: (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

17-§. Parametrli trigonometrik tenglamalarni yechish.

Parametrli trigonometrik tenglamani yechish parametrlarning mumkin bo'lgan har bir qiymatlari sistemasi uchun berilgan tenglamaning hamma yechimlari to'plamini aniqlash demakdir. Parametrik ko'rinishdagi trigonometrik tenglamalarni yechish quyidagi ketma-ketliklar asosida amalga oshiriladi.

1. Parametrlarning mumkin bo'lgan har bir qiymatlari sistemasi uchun yechimlar sonini aniqlash.
2. Hosil qilingan parametrli yechim formulalarini topish.
3. Tenglamani parametrlar asosidagi qiymatlar sistemasini aniqlash.

1-misol. $\sin(\alpha+x) + \sin x = \cos \frac{\alpha}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish. Berilgan tenglamaning chap tomonida turgan ifodaga trigonometrik funksiyalar yig'indisini ko'paytmaga keltirish formulasini tadbiq qilsak, u quyidagi ko'rinishni oladi:

$$2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Bu tenglamada quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin.

1. Agar $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, $\alpha \neq (2n+1)\pi$ bo'lsa, u holda

tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) = 1,$$

$$x = -\frac{\alpha}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2. Agar $\alpha = (2n+1)\pi$ bo'lsa, u holda $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ bo'ladi. Bu

holda ham tenglik o'rinni bo'ladi:

$$J: x = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, & \alpha \neq (2n+1)\pi, \\ -ixtiyoriy son, & \alpha = (2n+1)\pi \end{cases}$$

2-misol. $\sin^2 x + a \sin^2 2x = \sin \frac{\pi}{6}$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\frac{1 - \cos 2x}{2} + a(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2},$

$$1 - \cos 2x + 2a - 2a \cos^2 2x = 1,$$

$$2a \cos^2 2x + \cos 2x - 2a = 0,$$

$$(\cos 2x)_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16a^2}}{4a}; \quad (\cos 2x)_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 16a^2}}{4a}$$

a) $\cos 2x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16a^2}}{4a}, \quad 1 + 16a^2 > 0, \quad \left| \frac{-1 + \sqrt{1 + 16a^2}}{4a} \right| \leq 1,$

$$-1 + \sqrt{1 + 16a^2} \leq 4a,$$

$$1 + 16a^2 \leq 4a^2 + 8a + 1,$$

$$12a^2 - 8a \leq 0; \quad a(12a - 8) \leq 0$$

1) $a=0, \quad 12a-8 \neq 0,$

2) $a \neq 0, \quad 12a-8=0, \quad a=\frac{2}{3},$ bundan $a \leq \frac{2}{3}$ bo'ladi.

b) $\cos 2x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 16a^2}}{4a}; \quad \left| \frac{-1 - \sqrt{1 + 16a^2}}{4a} \right| \leq 1,$

tengsizlik a ning hech qanday qiymatlarida bajarilmaydi. Agar $a=0$

bo'lsa $\left[\sin^2 x = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

J: $a \neq 0$ da $x_{1,2} = \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{-1 + \sqrt{1 + 16a^2}}{4a} \right].$

$a=0$ da $x_{3,4} = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

3-misol. $\cos x + \sin x = a$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left[x - \frac{\pi}{4} \right];$ agar $|a| \leq \sqrt{2}$ bo'lsa, bu

tenglama yechimiga ega bo'ladi. Agar $|a| \leq \sqrt{2}$ bo'lsa,

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}} + 2k\pi, \quad \text{agar } |a| > \sqrt{2} \text{ bo'lsa, yechim yo'q.}$$

4-misol. $\sin 2x + 3 \cos 2x = a$ tenglama yechilsin.

Yechish. $2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = a$,

$$2 \operatorname{tg} x + 3 - 3 \operatorname{tg}^2 x = a(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\operatorname{tg}^2 x(a+3) - 2 \operatorname{tg} x + (a-3) = 0,$$

$$[\operatorname{tg} x]_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{a+3}.$$

Agar $|a| \leq \sqrt{10}$ bo'lsa, $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{a+3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Agar $a=-3$ bo'lsa, $\sin 2x + 3 \cos 2x = -3$ bo'ladi.

$$2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x + 3 \cos^2 x - 3 = -3,$$

$$2 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x (\sin x + 3 \cos x) = 0,$$

1) $\cos x = 0$, $\sin x + 3 \cos x \neq 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\cos x \neq 0$, $\sin x + 3 \cos x = 0$, $x_2 = \operatorname{arctg}(-3) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

J: Agar $|a| \leq \sqrt{10}$ ($a \neq -3$) bo'lsa, $x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{10-a^2}}{a+3} + k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$, agar ($a \neq -3$) bo'lsa, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; agar $|a| > \sqrt{10}$ bo'lsa,

tenglama yechimiga ega emas.

5-misol. $\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x =$
 $= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$,

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^4 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos^4 x =$
 $= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$,

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = a(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x),$$

$$1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = a - 2a \sin^2 x \cos^2 x,$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{a-1}{2a-3}, \quad \sin^2 2x = 4 \cdot \frac{a-1}{2a-3}.$$

Agar bu yerda $0 \leq 4 \cdot \frac{a-1}{2a-3} \leq 1$ bo'lsa, tenglama ma'noga ega

bo'ladi. Bu tengsizlikni yechsak, $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ bo'ladi. Agar $a = \frac{3}{2}$ bo'lsa, $1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{3}{2} - 3\sin^2 x \cos^2 x$ hosil bo'ladi, bundan $1 = \frac{3}{2}$ tenglik hosil bo'ladi, buning bo'lishi mumkin emas.

Agar $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ bo'lsa, $x = \pm \frac{1}{2} \arcsin \left[2 \sqrt{\frac{a-1}{2a-3}} \right] + \frac{k\pi}{2}$

Agar $a < \frac{1}{2}$ va $a > 1$ bo'lsa, yechim yo'q.

6-misol. $\sin \frac{3x}{2} + \sin x = m \sin \frac{x}{2}$ tenglama yechilsin.

Yechish. $\sin \left[x + \frac{x}{2} \right] = \sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2}$, bunga ko'ra

$$\sin x + \sin x \cos \frac{x}{2} + \cos x \sin \frac{x}{2} - m \sin \frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin x \left[1 + \cos \frac{x}{2} \right] + \sin \frac{x}{2} (\cos x - m) = 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} \left[2 \cos \frac{x}{2} + 4 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 - m \right] = 0,$$

$$1) \quad \sin \frac{x}{2} = 0, \quad x = 2k\pi, \quad k \in Z;$$

$$2) \quad 4 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} - (1 + m) = 0,$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 + m \cdot 4}}{4}.$$

a) $\cos \frac{x}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5 + m \cdot 4}}{4}$, bu yerda quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

$$\begin{cases} 5 + 4m \geq 0, \\ \left| \frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} \right| \leq 1, \end{cases}$$

Bu tengsizliklarni yechsak, $-\frac{5}{4} \leq m \leq 5$ hosil bo'ladi. Bu shartga ko'ra

$$x = \pm 2 \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$6) \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5+4m}}{4}.$$

Buni yechsak,

$$x = \pm 2 \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5}{4} \leq m \leq 1.$$

J: Agar $-\frac{5}{4} \leq m \leq 1$. bo'lsa, $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$x_{2,3} = \pm 2 \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{Agar } 1 \leq m \leq 5$$

bo'lsa, $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$x_2 = \pm 2 \arccos \frac{-1 + \sqrt{5+4m}}{4} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Agar $m > 5$, $m < -\frac{5}{4}$ bo'lsa, $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$7\text{-misol. } a \sin 2x + b \sin \left[2x - \frac{\pi}{2} \right] + \sqrt{a^2 + b^2} \sin 6x = 0$$

tenglamani yeching.

Yechish. Bizga ma'lumki, $a \sin x + b \cos x = A \sin(x + \phi)$.

Bu yerda $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ burchakning qiymati esa quyidgai shartlardan kelib chiqadi: $\sin\varphi = \frac{b}{A}$, $\cos\varphi = \frac{a}{A}$, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$. Shuning

uchun $\sin(2x - \varphi) - \sin 6x = 0$, $\sin \frac{4x + \varphi}{2} \cos \frac{8x - \varphi}{2} = 0$;

$$a) \quad \sin \frac{4x + \varphi}{2} = 0, \quad 4x + \varphi = (-1)^k \arcsin 0^0 + 2\pi k,$$

$$4x = -\varphi + 2\pi k, \quad x = \frac{\pi k}{2} - \frac{1}{4} \arctg \frac{b}{a}.$$

$$b) \quad \cos \frac{8x - \varphi}{2} = 0, \quad \frac{8x - \varphi}{2} = \arccos 0^0 + 2\pi k, \quad 8x - \varphi = \pi + 2\pi k.$$

$$\text{J: } x = \frac{2k+1}{8}\pi + \frac{1}{8} \arctg \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

1-misol. $\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \operatorname{cosec} x = a$, ($a \neq 0$) tenglama yechilsin.

$$\text{J: Agar } \left| \frac{a+2}{a\sqrt{2}} \right| \leq 1 \text{ bo'lsa,}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin \frac{a+2}{a\sqrt{2}} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2-misol. $\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) = 1 - 2\cos 2x$ tenglama yechilsin.

$$\text{J: } x = \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-\cos a \pm \sqrt{\cos^3 2a + 4\cos 2a}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

18-§. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish

Tarkibida trigonometrik funksiyalar qatnashgan bir necha tenglama trigonometrik tenglamalar sistemasini hosil qiladi. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish tenglamadagi no'malum-larning shu tenglamalar sistemasini qanoatlantiradigan qiymatlarini topish demakdir. Ikki noma'lumli ikkita tenglama sistemasining yechimi deb, noma'lumlarning ikkala tenglamani ham qanoatlantiradigan juft qiymatlariga aytildi.

1-misol. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish.

$$y = \frac{\pi}{4} - x, \quad \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - x\right] = 1, \quad \frac{\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x - 1)}{1 + \operatorname{tg}x} = 0;$$

$$a) \quad \operatorname{tg}x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad y = -k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$b) \quad \operatorname{tg}x = 0, \quad x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$j: \begin{cases} x_1 = \pi k + \frac{\pi}{4}, \\ y_1 = -\pi k, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \pi k, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2- Misol. $\begin{cases} \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \frac{1}{9} \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{3} \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish:

$$\left[\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{1}{9} \right] \Rightarrow \left[\frac{\cos x \cos y + \frac{1}{3}}{\cos x \cos y - \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \right]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \left[\cos x \cos y + \frac{1}{3} \right],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} \cos x \cos y,$$

$$\frac{8}{9} \cos x \cos y = \frac{10}{27}, \quad \cos x \cos y = \frac{5}{12},$$

$$+ \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{5}{12} \\ \sin x \sin y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{12}, \\ \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = \frac{1}{12} \\ \cos(x-y) = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2k_1\pi \pm \arccos \frac{1}{2} \\ x-y = 2k_2\pi \pm \arccos \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$x = \pi(k_1 + k_2) \pm \frac{1}{2} \left[\arccos \frac{1}{12} + \arccos \frac{3}{4} \right] = \\ = \pi(k_1 + k_2) \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3 - \sqrt{1001}}{48}.$$

$$y = \pi(k_1 - k_2) \pm \frac{1}{2} \left[\arccos \frac{1}{12} - \arccos \frac{3}{4} \right] = \\ = \pi(k_1 - k_2) \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3 + \sqrt{1001}}{48}.$$

3-Misol. $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ x + y = 2b \end{cases}$ Tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish:

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \\ x+y = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \sin b \cos \frac{x-y}{2} = a, \\ x+y = 2b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \sin b} \right] \Rightarrow \left[x-y = 2 \left[k\pi \cdot 2 \pm \arccos \frac{a}{2 \sin b} \right] \right].$$

$$y = \frac{b}{2} - \arccos \frac{a}{\sin b} + k\pi, \quad x = \frac{3b}{2} + \arccos \frac{a}{\sin b} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1) agar $b=0, a \neq 0$ bo'lsa, sistema yechimga ega emas.

2) agar $b \neq 0, \left| \frac{a}{2 \sin b} \right| \leq 1$ bo'lsa, sistema yechimga ega.

3) agar $b=0, a=0$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

4-Misol. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$ tenglamalar sistemasi yechilsin.

Yechish. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, shuning uchun

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1, \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \pm \arccos 1 + 2k\pi, \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$+ \begin{cases} x-y = 4k\pi \pm 2\arccos 1, \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x = 4\pi k \pm \arccos 1 + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow (x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$-\begin{cases} x-y = 4k\pi \pm 2\arccos 1, \\ x+y = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \left[2y = \frac{\pi}{3} - 4k\pi \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \right].$$

$$j: x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5-misol. $\begin{cases} \sin x - \sin y = \operatorname{cosecx}, \\ \cos x + \cos y = \sec x \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yeching.

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \operatorname{cosecx} = \frac{1}{\sin x}, \\ \cos x + \cos y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y \sin x = 1, \\ \cos^2 x + \cos x \cos y = 1. \end{cases} \quad (1)$$

sistemadagi tenglamalarni o'zaro qo'shsak,

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \cos(x+y) = 2 \text{ yoki}$$

$$\cos(x+y) = -1; \quad x+y = \pi + 2k_1\pi$$

hosil bo'ladi. (1) sistemadagi tenglamalarni o'zaro ayirsak quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \cos y - \sin x \cos y$$

yoki

$$\cos 2x = \cos(x+y), \quad \cos 2x - \cos(x+y) = 0,$$

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos(x-y) &= -2 \sin \frac{2x+x+y}{2} \sin \frac{2x-x-y}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{3x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$1) \quad \sin \frac{3x+y}{2} = 0, \quad 3x+y = 2k_2\pi.$$

$$2) \quad \sin \frac{x-y}{2} = 0, \quad x-y = 2k_2\pi.$$

$$\begin{cases} x+y = \pi + 2\pi k_1, \\ 3x+y = 2k_2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi(k_2 - k_1) - \frac{\pi}{2}, \\ y = \pi(3k_1 - k_2) + \frac{3\pi}{2}, \quad k_{1,2} \in Z. \end{cases}$$

6-misol. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}, \\ x + y = 150^\circ \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}, \\ x + y = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} = \frac{1}{4}, \\ x + y = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2} - 2, \\ x + y = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos(x+y) \cos(x-y) = -\frac{3}{2} \\ x + y = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos 150^\circ \cos(x-y) = -\frac{3}{4} \right] \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x-y) = -\frac{3}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow (x-y) = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x - y = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right].$$

$$\begin{cases} x + y = 150^\circ, \\ x - y = 30^\circ + 360^\circ k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 180^\circ k + 15^\circ + 75^\circ, \\ y = 75^\circ - 180^\circ k - 15^\circ \end{cases}$$

7-misol. $\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$ tenglama sistemasini yeching.

Yechish.

$$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x = \frac{1}{4 \cos y} \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{4 \cos y} + \cos y = 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [4 \cos^2 y - 4 \cos y + 1 = 0]$$

$\cos y = t$ desak,

$$4t^2 - 4t + 1 = 0, \quad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_{1,2} = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\cos y = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \left[y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{1}{4 \cos y} = \frac{1}{4 \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\left[\cos x = \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \left[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$J: x = y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

8-misol. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg}x = 3 \operatorname{ctg}y \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechilsin.

Yechish. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg}x = 3 \operatorname{ctg}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 3 \cdot \frac{\cos y}{\sin y} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Bu sistemadagi tenglamalarni o'zaro hadlab qo'shamiz:

$$(\sin x \sin y + \cos x \cos y = 1) \Rightarrow (\cos(x - y)) = 1, \quad (x - y) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \left[\sin^2 x = \frac{3}{4} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow \left[x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$J: \quad x = y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MISOLLAR.

Tenglamalar sistemasini yeching.

1. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}+1}{4}. \end{cases}$ $j: \quad x = 45^\circ, \quad y = 15^\circ.$
2. $\begin{cases} \sin x : \sin y = \sqrt{1,5}, \\ \cos x : \cos y = \sqrt{0,5}. \end{cases}$ $j: \quad x = 60^\circ, \quad y = 45^\circ.$
3. $\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \sin y, \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \operatorname{tg} y. \end{cases}$ $j: \quad x = 45^\circ, \quad y = 30^\circ.$
4. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}. \end{cases}$ $j: \quad x = 0^\circ, \quad y = 60^\circ.$
5. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin x + \cos y = 1. \end{cases}$ $j: \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad y = \frac{\pi}{3}.$

6.
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cos y = 0,75 \end{cases}$$
 $j: x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}$

7.
$$\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
 $j: x = \frac{5\pi}{12}, y = \frac{\pi}{4}$

19 - §. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi

Masala - bu kundalik hayotimizda uchraydigan vaziyatlarning tabiiy tildagi ifodasidir. Masala asosan uch qismidan iborat bo'ladi.

1. Masalaning sharti - o'rganilayotgan vaziyatni xarakterlovchi ma'lum va no'malum miqdoriy qiymatlar hamda ular orasidagi miqdoriy munosabatlar haqidagi ma'lumot demakdir.

2. Masalaning talabi - masala shartidagi miqdoriy munosabatlarga nimani topish kerakligini ifodalash demakdir.

3. Masalaning operatori - masala talabini bajarish uchun shartdagi miqdoriy munosabatlarga nisbatan bajariladigan amallar yig'indisi.

Tenglama tuzish orqali masala yechish, masala talabida so'rалган miqdorni imkoniyati boricha biror harf bilan belgilash, masala shartida qatnashayotgan boshqa miqdorlarni belgilangan harf orqali ifodalash, masala shartida ko'rsatil-gan miqdoriy munosabatlarni, amallarning mantiqan to'g'ri ketma-ketligi orqali ifodalay-digan tengiama tuzish va uni yechish orqali masalaning talabini bajarish demakdir.

Masalalarni tenglama tuzish orqali yechishni quyidagi ketma-ketlik asosida olib borish maqsadga muvofiqdir.

1. Masala talabida so'rалган miqdorni, ya'ni noma'lum miqdorni harf bilan belgilash.

2. Bu harf yordamida boshqa no'malumlarni ifodalash.

3. Masala shartini qanoatlantiruvchi tenglama tuzish.

4. Tenglamani yechish.

5. Tenglama yechimini masala sharti bo'yicha tekshirish.

Maktab matematika kursida tenglama tuzish orqali yechiladigan masalalar ko'pincha uchta har xil miqdorlarni o'zaro bog'liqlik munosabatlari asosida beriladi. Chunonchi:

1) Tezlik, vaqt va masofa.

2) Narsaning qiymati, soni va jami bahosi.

3) Mehnat unumdarligi, vaqt va ishning hajmi.

4) Yonilg'inining sarf qilish normasi, transportning harakat vaqt yoki masofasi va yonilg'inining miqdori.

5) Jismning mustahkamligi, hajmi va uning og'irligi.

6) Ekin maydoni, hosildorlik va yig'ilgan hosildorlik miqdori.

7) Quvurni o'tkazish imkoniyati, vaqt va quvurdan o'tayotgan moddalarning aralashma miqdori.

8) Bir mashinaning yuk ko'tarishi, mashinalar soni va keltirilgan yuklarning og'irligi.

9) Suyuqlikning zichligi, chiqarish chuqurligi va bosimi.

10) Tokning kuchi, uchastka zanjirining qarshiligi va uchastkadagi kuchlanishning pasayishi.

11) Kuch, masofa va ish.

12) Quvvat, vaqt va ish.

13) Kuch, elkaning uzunligi va quvvat momenti.

Masalalarni tenglama tuzib yechishda no'malum miqdorlarni turlicha belgilash, ya'ni asosiy miqdor qilib noma'lumlardan istalgan birini olish mumkin. Asosiy qilib olinadigan va harf bilan belgilanadigan noma'lumni tanlash ixtiyoriy bo'lishi mumkin.

Noma'lum miqdorni tanlashga qarab tuziladigan tenglama har xil bo'ladi, ammo masalaning yechimi bir xil bo'ladi. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani turlicha usul bilan yechib ko'raylik.

1 - m a s a l a. Ikki idishga 1480 litr suv sig'adi. Birinchi idishga ikkinchi idishga qaraganda 760 litr suv ko'p sig'sa, har qaysi idishga necha litr suv sig'adi?

Yechish. **1 - usul.**

1. Belgilash: x_1 - ikkinchi idishdagi suv bo'lsin, u holda $(x + 760)$ - birinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar: I va II idishdagi suvlarning miqdori x_1 va $(x+760)$.

3. Tenglama tuzish: $x + x + 760 = 1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x + 760 = 1480$, $2x = 1480 - 760$, $2x = 720$.
 $x = 720 : 2 = 360$ litr. Bu ikkinchi idishdagi suv $x = 360 + 760 = 1120$ litr,
birinchi idishdagi suv.

5. Tekshirish. $360 + 360 + 760 = 1480$. $1480 = 1480$.

II- usul. Belgilash. x_1 - birinchi idishdagi suv bo'lsa, u holda
($x - 760$)₁ ikkinchi idishdagi suv bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. I va II idishdagi suvlarning
miqdori.

3. Tenglama tuzish. $x + x - 760 = 1480$.

4. Tenglamani yechish. $2x - 760 = 1480$, $2x = 1480 + 760 = 2240$.

$x = 2240 : 2 = 1120$ litr, birinchi idishdagi suv, $x = 1120 - 760 = 360$
litr, bu ikkinchi idishdagi suv.

5. Tenglamani tekshirish.

$x + x - 760 = 1480$, $1120 + 360 = 1480$, $1480 = 1480$.

III - usul. 1. Belgilash. Faraz qilaylik, birinchi idishga x l suv
sig'sin, ikkinchi idishga esa y l suv sig'sin.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Birinchi va ikkinchi idishlardagi
suv miqdorlari va ularning o'zaro farqi.

3. Tenglama tuzish. $\begin{cases} x + y = 1480, \\ x - 760 = y. \end{cases}$

4. Sistemani yechish. $\begin{cases} x + y = 1480, \\ x - 760 = y. \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x + x - 760 = 1480, \\ x - 760 = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1240, \\ x - 760 = y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1120, \\ y = 360 \end{cases}$

5. Tekshirish. $1120 + 360 = 1480$, $1480 = 1480$
 $1120 - 760 = 360$, $360 = 360$

2-masala. Bitta daftar va bitta bloknot hamda bitta qalam
uchun 2,2 so'm to'landi. Qalam daftarga qaraganda to'rt marta arzon,
bloknot esa daftarga qaraganda 0,4 so'm qimmat. Har qaysi
buyumning narxini toping.

1. Belgilashlar. Bloknotning narxini x so'm deb olamiz, u holda
daftarning narxi ($x - 0,4$) so'm, qalamning narxi ($x - 0,4$):4 so'm.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. Bloknot, daftar, qalam narxlari
va narxlar orasidagi munosabat.

3. Tenglama tuzish. $x + (x-0,4) + (x-0,4):4 = 2,2$.
 4. Tenglamani yechish. $9x-2=8,8$ $9x=10,8$ $x=1,2$ so'm bloknotning narxi, $x-0,4=1,2-0,4=0,8$ so'm daftarning narxi, $(x-0,4):4 = 0,8:4 = 0,2$ so'm qalamning narxi.

5. Tekshirish. $1,2+0,8+0,2=2,2$ $2,2=2,2$.

II - usul. Belgilashlar. Daftarning narxini x so'm deb olamiz, u holda bloknotning narxi $(x+0,4)$ so'm, qalamning narxi esa $(x : 4)$ so'm bo'ladi.

2. Tenglama tuzish va uni yechish.

$$x+x+0,4+x : 4=2,2, \quad 9x+1,6=8,8; \quad 9x=7,2;$$

$$x=0,8 \text{ so'm}, \quad x+0,4=1,2 \text{ so'm}, \quad x : 4=0,2 \text{ so'm}.$$

III - usul. 1. Belgilashlar. Qalamning narxini x so'm deb olamiz, u holda daftarning narxi $4x$ so'm bo'ladi. Bloknotning narxi esa $4x+0,4$ so'm. Tenglama tuzish va yechish.

$$x+4x+4x+0,4=2,2; \quad 9x+0,4=2,2. \quad 9x=1,8;$$

$$x = 0,2 \text{ so'm}; \quad 4 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ so'm}; \quad 4x+0,4 = 4 \cdot 0,2 + 0,4 = 1,2 \text{ so'm}$$

Yuqoridagi belgilashlar hap xil bo'lsa ham javob bir xil chiqadi. Qalam narxi 0,2 so'm, daftar narxi 0,8 so'm, bloknot narxi 1,2 so'm.

3-masala. Bir sabzovot omborida 21 t ikkinchida 18 t kartoshka bor edi. Birinchi omborga kuniga 9 tonnadan, ikkinchisiga 12 tonnadan kartoshka keltirilsa, necha kundan keyin birinchi ombordagi kartoshka ikkinchisidan 1,2 marta kam bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar x deb kartoshka tashilgan kunlar sonini belgilasak, u holda birinchi omborga $9x$ tonna, ikkinchi omborga esa $12x$ tonna kartoshka keltirilgan bo'ladi. Birinchi ombordagi jami kartoshka $(21+9x)$ t; ikkinchi ombordagi jami kartoshka $(18+12x)$ t bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $(21+9x)$ t va $(18+12x)$ t.

3. Tenglama tuzish. $1,2(21+9x)=18+12x$

4. Tenglamani yechish. $\frac{6}{5}(21+9x)=18+12x$

$$126+54x = 90+60x,$$

$$6x = 36. \quad x = 6 \text{ kun.}$$

5. Tekshirish. $\frac{6}{5}(21+54)=18+12 \cdot 6; \quad 90=90.$

4-masala. Tomosha zali 100 ta elektr lampochka bilan yoritiladi. Bir katta lampochkaning bir hafta davomida yonishi 15 tiyinga, kichik lampochkaning yonishi esa 10 tiyinga tushadi. Agar zalni bir hafta yoritish 13,50 so‘mga tushsa, zalga nechta katta lampochka va kichik lampochka o‘matilgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Faraz qilaylik, x dona katta va y dona kichik lampochkalar bo‘lsin, u holda katta va kichik lampochkalarning har birini haftada yonish puli $\frac{15x}{100}$ va $\frac{10y}{100}$ so‘mdan bo‘ladi.

2. Taqqsolanuvchi miqdorlar. $\frac{15x}{100}$ va $\frac{10y}{100}$

3. Tenglama tuzish.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y = \frac{27}{2} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}y = \frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ 3x + 2y = 270 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 300 \\ 3x + 2y = 270 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = 70 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- kichik lampochkalar soni} \\ \text{- katta lampochkalar soni} \end{array}$$

5. Tekshirish.

$$\begin{cases} 30 + 70 = 100 \\ \frac{3}{2} \cdot 70 + \frac{1}{10} \cdot 30 = \frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30 + 70 = 100 \\ \frac{27}{2} = \frac{27}{2} \end{cases} .$$

5-masala. Kotlovan qazish uchun ikkita ekskavator ishga solindi. I ekskavator soatiga II ekskavatorga qaraganda 40 kub m ortsiz tuproq oladi. I ekskavator 16 soat, II ekskavator 24 soat ishladi. Shu vaqt ichida ikkala ekskavatorda 8640 kub. m tuproq qazib olindi. Har qaysi ekskavator soatiga necha kub metr tuproq olgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I ekskavator soatda x kub metr tuproq qaziysi desak, u holda II ekskavator ($x-40$) kub metr tuproq qaziyi. I

ekskavatorning 16 soatdagи qazigan tuprog'i $16x$, II ekskavatorning 24 soatda qazigan tuprog'i $24(x-40)$ bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $16x$ va $24(x-40)$

3. Tenglama tuzish. $16x+24(x-40)=8640$.

4. Tenglamani yechish. $16x+24x-960=8640$. $40x=9600$, $x=240$ kub metr - I ekskavatorchingning I soatda qazigan tuprog'i. $x-40=240-40=200$ kub metr, II ekskavatorning 1 soat qazigan tuprog'i.

5. Tekshirish. $16 \cdot 240 + 24 \cdot 200 = 8640$, $8640 = 8640$.

6-masala. Ikki traktor birgalikda ishlab bir maydonni 6 soatda haydab bo'ladi. Agar I traktorchining yolg'iz o'zi ishlasa, bu maydonni II traktorchiga nisbatan 5 soat tez haydab bo'ladi. Bu maydonni har qaysi traktorchining yolg'iz o'zi necha soatda haydab bo'ladi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar I-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqtini x soat desak, u holda II-traktorning yerni haydash uchun sarflagan vaqtini $(x+5)$ soat bo'ladi.

$\frac{1}{x}$ - I - traktorning 1 soatdagи ishi.

$\frac{1}{x+6}$ - II - traktorning 1 soatdagи ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar. $\frac{1}{x}$ va $\frac{1}{x+5}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$$

$$6(x+5) + 6x = x^2 + 5x, \quad x^2 - 7x - 30 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 30} = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = -3 \quad \text{chet ildiz}$$

$x=10$ soat - birinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqt.

$x=15$ soat - kkinchi traktorning yerni hayday oladigan vaqt.

5. Tekshirish.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

II - usul. Eerilgan masalani tenglamalar sistemasini tuzish orqali yechish quyitagicha bajariladi.

1. Belgilash. Farz qilaylik, I - traktor yer maydonini x soatda, II - traktor yer maydonini y soatda haydab bo'lsin, y holda I-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{x}$, II-traktorning bir soatdagi ishi $\frac{1}{y}$ bo'ladi.

2. Taqqoslanvchi miqdorlar. Birinchi traktorning ish soati $\frac{1}{x}$ bilan ikkinchi traktorning ish soati $\frac{1}{y}$ hamda ular orasidagi vaqtning farqi.

3. Tenglama sistemasiini tuzish.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

4. Sistemani yechish.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \dots \\ x - y = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y + 6x = xy \\ x = 5 + y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6y + (5+y) = 5y + y^2) \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 7y - 30 = 0, \\ x = 5 + y \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 30} = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}.$$

$$y_1 = 10 \text{ kun}, x = 5 + 10 = 15 \text{ kun}, y_2 = -3 \text{ chet ildiz.}$$

5. Tekshirish.

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{6} \right).$$

7-masala. Turist paraxodda 72 km suzdi, paraxodda o'tgan yo'lidan 25% ortiq masofani avtomashinada yurdi. Avtomobil tezligi paraxod tezligidan soatiga 21 km ortiq. Turist avtomobilda paraxodda yurganiga qaraganda 1 soat kam yurgan bo'lsa, avtomobilning tezligi qancha?

Yechish.

1. Belgilashlar. x paraxodning tezligi bo'lsa, u holda $(x+21)$ - avtomobilning tezligi bo'ladi. $\frac{72}{x}$ - paraxodda sarf qilingan vaqt,

$\frac{90}{x+21}$ - avtomobilda sarf qilingan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{72}{x}$ va $\frac{90}{x+21}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{72}{x} - \frac{90}{x+21} = 1$

4. Tenglamani yechish. $\frac{72}{x} - \frac{90}{x+21} = 1$

$$72(x+21) - 90x = x^2 + 21x$$

$$x^2 + 21x - 72x + 90x - 1512 = 0$$

$$x^2 + 39x - 1512 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-39 \pm \sqrt{1521 + 4 \cdot 1512}}{2} = \frac{-39 \pm 87}{2}$$

$x=24$ km/s paraxod tezligi, $x=45$ km/s, avtomobil tezligi.

$$\frac{72}{24} - \frac{90}{45} = 1; \quad 72 \cdot 45 - 90 \cdot 24 = 24 \cdot 45$$

Tekshirish: $24 \cdot 45 = 24 \cdot 45$.

8-masala. Teplovoz ma'lum vaqt ichida 325 km masofosani o'tish kerak, shu yo'lning $\frac{2}{5}$ qismini o'tgandan keyin u 24 minut ushlanib qoldi. Keyin muddatida manzilga etib borish uchun tezligini soatiga 10 km oshirdi. Teplovozning tezligini toping?

Yechish.

Belgilash. Agar teplovozning dastlabki tezligi x km/s desak, u holda $(x+10)$ km/s uning keyingi tezligi bo'ladi.

$\frac{195}{x+10}$ - keyingi masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqt.

$\frac{130}{x}$ - avvalgi, masofani bosib o'tish uchun ketgan vaqt.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. $\frac{130}{x}; \frac{195}{x+10}$ va $\frac{325}{x}$

3. Tenglama tuzish. $\frac{130}{x} + \frac{195}{x+10} + \frac{2}{5} = \frac{325}{x}$

4. Tenglama yechish.

$$130 \cdot 5(x+10) + 5 \cdot 195x + 2(x^2 + 10x) = 5(x+10) \cdot 325,$$

$$650x + 6500 + 975 + 2x^2 + 20x - 1625x - 16250 = 0$$

$$2x^2 + 20x - 9750 = 0, \quad x^2 + 10x - 4875 = 0$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 4875} = -5 \pm \sqrt{4900} = -5 \pm 70$$

$x_1 = 65 \text{ km/s}$, avvalgi tezlik,

$x_2 = -75 \text{ km/s}$, chet ildiz,

$x+10=75 \text{ km/s}$ keyingi tezlik

5. Tekshirish.

$$\frac{130}{65} + \frac{195}{75} + \frac{2}{5} = \frac{325}{65}, \quad \frac{30+39+6}{15} = 5, \quad \frac{75}{15} = 5, \quad 5 = 5.$$

9-masala. Tomonlari 12 m va 10 m bo'lgan to'rtburchak shakldagi maydon o'rtasiga chetlari maydon chetlaridan bir xil masofada yotadigan va yuzi 8 m^2 ga teng bo'lgan gulxona ajratish kerak. Gulxonaning cheti maydon chetidan qanday masofada yotishi kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Oraliqdagi masofani $x \text{ m}$ desak, u holda $12-2x$ gulxonaning bo'yisi va $10-2x$ uning eni bo'ladi.

2. Taqqoslanuvchi miqdorlar. Gulxonaning bo'yisi $12-2x$, uning eni $10-2x$ va gulxonaning yuzi 8 m^2 .

3. Tenglama tuzish. $(12-2x)(10-2x) = 8$.

4. Tenglamani yechish.

$$120-24x-20x+4x^2=8$$

$$4x^2-44x+112=0$$

$$\text{yoki } x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} = \frac{11}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 7; \quad x_2 = 4;$$

$x = 4$ m oraliqdagi masofa.

5. Tekshirish.

$$1) (12 - 2 \cdot 7) \cdot (10 - 2 \cdot 7) = 8; \quad 2) (12 - 8) (10 - 8) = 8$$

$$(-2) \cdot (-4) = 8; \quad 4 \cdot 2 = 8$$

$$8 = 8 \quad 8 = 8$$

10-masala. 160 km masofani avtomashina 3 soatda bosib o'tadi. Yo'lning 75% asfalt qilingan, qolgan qismiga esa tosh yotqizilgan. Mashinaning tosh yo'ldagi tezligi asfalt yo'ldagi tezligiga qaraganda 20 km/s kam bo'lsa, u asfalt yo'lda qanday tezlik bilan yurgan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar mashinaning asfalt yo'ldagi tezligini $x \text{ km/s}$ desak, u holda uning tosh yo'ldagi tezligi $(x-20) \text{ km/s}$ bo'ladi.

$$\frac{120}{x} - \text{mashinaning asfalt yo'lni bosib o'tish uchun sarflagan vaqt.}$$

$$\frac{40}{x-20} - \text{mashinaning tosh yo'lni bosib o'tish uchun sarflagan vaqt.}$$

$$2. \text{ Taqqoslanadigan miqdorlar. } \frac{120}{x} \text{ va } \frac{40}{x-20}$$

$$3. \text{ Tenglama tuzish. } \frac{120}{x} + \frac{40}{x-20} = 3$$

4. Tenglamani yechish.

$$120x - 2400 + 40x = 3x^2 - 60x,$$

$$3x^2 - 220x + 2400 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{110 \pm \sqrt{12100 - 7200}}{3} = \frac{110 \pm \sqrt{4900}}{3} = \frac{110 \pm 70}{3}$$

$x = 60 \text{ km/s}$, mashinaning asfalt yo'ldagi tezligi.

$x-20=60-20=40 \text{ km/s}$, mashinaning tosh yo'ldagi tezligi.

5. Tekshirish:

$$\frac{120}{60} + \frac{40}{4} = 3; \quad 2 + 1 = 3; \quad 3 = 3$$

11-masala. Rejada belgilangan muddatda hosilni yig‘ib olish uchun xo‘jalik ikkita brigada ajratdi. 400 hektarli uchastkada ishlagan birinchi brigada topshiriqni muddatidan ikki kun oldin bajardi. Ikkinci brigada esa 900 hektarli uchastkada ishlab, topshiriqni muddatidan 2 kun keyin bajardi. Agar birinchi brigada ikkinchi brigada necha kun ishlagan bo‘lsa, shuncha kun, ikkinchi brigada necha kun birinchi brigada ishlagan bo‘lsa, shuncha kun ishlaganda edi, ikkala brigada teng miqdorda hosil yig‘ar edi. Reja bo‘yicha hosil necha kunda yig‘ib olinishni va har qaysi brigadaning kundalik ish unumini topping?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar rejada belgilangan muddatni x kun desak, u holda $(x-2)$ kun birinchi brigadaning hosilni yig‘ib olish uchun sarf qilgan vaqt, $x+2$ kun esa ikkinchi brigadaning sarf qilgan vaqt bo‘ladi. $\frac{400}{x-2}$ - birinchi brigadaning bir kunlik ishi, $\frac{900}{x+2}$ - ikkinchi brigadaning bir kunlik ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{400}{x-2}$ va $\frac{900}{x+2}$

3. Tenglama tuzish: $\frac{400}{x-2}(x+2) = \frac{900}{x+2}(x-2)$

4. Tenglamani yechish:

$$400(x+2)^2 = 900(x-2)^2 \quad 30x - 20x = 40 + 60$$

$$20(x+2) = 30(x-2) \quad 10x = 100,$$

$$20x + 40 = 30x - 60 \quad x = 100 : 10 = 10$$

$x=10$ – rejada belgilangan kun. $x=8$ - birinchi brigadaning ishlagan kuni, $x=12$ - ikkinchi brigadaning ishlagan kuni.

5. Tekshirish.

$$\frac{400}{8} \cdot 12 = \frac{900}{12} \cdot 8 \quad 600 = 600$$

12-masala. Oralari 24 km bo‘lgan A va B punktlardan ikki avtomobil bir vaqtida bir-biriga qarab yo‘lga chiqdi. A punktdan kelayotgan avtomobil uchrashuvdan 16 minut keyin B punktgaga etib

keldi, ikkinchi avtomobil esa A punktga 4 minutdan keyin keldi. Avtomobilarning tezliklarini toping?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar A puktdan chiqqan avtomobil uchrashguncha x km yo'l yurgan desak, u holda B punkdan chiqqan avtomobil $24-x$ km yo'l yurgan bo'ladi. $15x$ B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

$$\frac{15 \cdot (24 - x)}{4} \quad A - \text{dan chiqqan avtomobilning tezligi.}$$

$$2. \text{Taqqoslanadigan miqdorlar: } \frac{4x}{15 \cdot (24 - x)} \text{ va } \frac{(24 - x)}{15x}$$

uchrashguncha ketgan vaqtlar.

$$3. \text{Tenglama tuzish: } \frac{4x}{15 \cdot (24 - x)} = \frac{(24 - x)}{15x}$$

$$\begin{aligned} \text{Tenglamani yechish: } 60x^2 &= 15(24 - x)^2 & 2x &= 24 - x, \\ 4x^2 &= (24 - x)^2 & 3x &= 24; \quad x = 8. \end{aligned}$$

$x=8$ km A dan chiqqan avtomobilning uchrashguncha bosib o'tgan yo'li.

$x=16$ km B chiqqan avtomobilning uchrashguncha bosib o'tgan yo'li.

60 km/s A dan chiqqan avtomobilning tezligi.

120 km/s B dan chiqqan avtomobilning tezligi.

5. Tekshirish:

13-masala. Hovuzga ikki krandan suv keladi. Oldin birinchi kran olib qo'yildi, u ikkinchi kranning yolg'iz o'zi ishlaganda hovuzni qancha vaqtida to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha vaqt ochiq turdi. So'ngra, ikkinchi kran birinchi kran yolg'iz o'zi hovuzni qancha vaqtida to'ldirsa, shu vaqtning uchdan biricha ochiq turdi.

Shundan keyin hovuzning $\frac{13}{18}$ qismi suvgaga to'ldi. Agar ikkala kran baravar turganda hovuz 3 soat-u, 36 minutda to'lsa, hovuzni to'ldirish uchun har qaysi kranning yolg'iz o'ziga qancha vaqt kerak bo'lishi hisoblansin.

Yechish.

1. Belgilashlar. Birinchi kran hovuzni x soatda, ikkinchi kran y soatda to'ldiradi deylik, u holda birinchi kran bir soatda hovuzning

$\frac{1}{x}$ qismini to'ldiradi, masalaning shartiga ko'ra birinchi kran $\frac{1}{3}y$

soat ochiq turdi, demak, birinchi krandan kelgan suv hovuzning $\frac{1}{3}\frac{y}{x}$

qismini to'ldiradi. Ikkinci kran hovuzning $\frac{1}{3}\frac{x}{y}$ qismini to'ldirishi ham shu yo'l bilan topiladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{3}\frac{x}{y}$ va $\frac{1}{3}\frac{y}{x}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\frac{x}{y} + \frac{1}{3}\frac{y}{x} = \frac{13}{18}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish.

$$\frac{y}{x} = z \text{ desak, } \frac{1}{3}\frac{z}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{z} = \frac{13}{18}, \quad 6z^2 - 13z + 6 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} = \frac{13 \pm 5}{12};$$

$$z_1 = \frac{3}{2}; \quad z_2 = \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} \mid \cdot y, \quad \frac{y}{x} + 1 = \frac{5}{18} y$$

$$\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{18} y, \quad \frac{5}{2} = \frac{5}{18} y, \quad y = 9; \quad x = \frac{2}{3} y = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$$

Kranlarning biri hovuzni 9 soatda, ikkinchisi 6 soatda to'ldiradi.

14-masala. Sof spirt to'ldirilgan bakdan undagi spirting bir qismini quyib olindi va uning o'rniiga shuncha suv quyib qo'yildi. So'ngra bakdan yana o'shancha litr aralashma quyib olindi, shundan

keyin bakda 49 litr sofi spirt qoldi. Bakning sig'imi 64 l. Bakdan birinchi safar qancha va ikkinchi safar qancha spirt quyib olingan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar birinchi safar x l spirt quyib olingan bo'lsa, bakda $(64 - x)$ l spirt qoladi, ikkinchi safar $\frac{64 - x}{64}x$ l sofi spirt quyib olindi, u holda bakda $64 - x - \frac{64 - x}{64}x$ l sofi spirt qoladi.

2. Taqoslanadigan miqdorlar: $(64 - x)$ l va $\frac{64 - x}{64}x$ l.

3. Tenglama tuzish: $\frac{1}{64}(64 - x)^2 = 49$

4. Tenglamani yechish:

$$\frac{1}{64} \cdot 64^2 - \frac{1}{64} \cdot 64 \cdot 2x + \frac{1}{64}x^2 = 49$$

$$x^2 - 128x + 960 = 0$$

$$x_{1,2} = 64 \pm \sqrt{4096 - 960} = 64 \pm 56;$$

$$x_1 = 8 \text{ l}, \quad x_2 = 110 \text{ l.}$$

$$\frac{64 - x}{64}x = \frac{56}{64} \cdot 8 = 7 \text{ l}$$

spirt quyib olingan.

5. Tekshirish:

$$\frac{1}{64}(64 - 8)^2 = 49, \quad \frac{1}{64} \cdot 56^2 = 49, \quad 49 = 49$$

15-masala. Mashinistka o'ziga topshirilgan ishni har kuni belgilangan normadan 2 bet ortiq bossa, ishni muddatidan 3 kun ilgari tugatadi. Agar normadan 4 betdan ortiq bossa muddat'dan 5 kun ilgari tugatadi. U necha bet ko'chirishi va qancha vaqtida ko'chirishi kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar mashinistkaning bir kunlik normasini x bet, ishni tamomlash muddatini y kun desak, u holda jami ish xy bet

bo'ladi. $(x+2)$ mashinistkaning normadan ortiq bosgan bir kunlik betlar soni.

$(y-3)$ mashinistkaning ishni muddatidan ilgari tamomlash kuni.

$(x+4)$ mashinistkaning normadan ortiq bosgan bir kunlik betlar soni.

$(y-5)$ mashinistkaning ishni muddatidan ilgari tamomlash kuni.

2. Taqqoslanadigan miqddorlar: $x+2, y-3, x+4, y-5$, va xy .

3. Tenglama tuzish: $\begin{cases} (x+2) \cdot (y-3) = xy, \\ (x+4) \cdot (y-5) = xy. \end{cases}$

4. Tenglamani yechish: Sistemadagi birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayirsak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$xy - 3x + 2y - 6 + 5x - xy - 4y + 20 = 0,$$

$$2x - 2y + 14 = 0, \quad x = y - 7.$$

Bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'ysak, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$(y-5)(y-3) = (y-7)y$$

$$y^2 - 8y + 15 = y^2 - 7y, \quad y = 15 \text{ kun } x = 8 \text{ bet}$$

J: Mashinkada bosiladigan ish 120 bet ekan.

5. Tekshirish:

$$\begin{cases} (8+2) \cdot (15-3) = 15 \cdot 8, \\ (8+4) \cdot (15-5) = 15 \cdot 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120 = 120 \\ 120 = 120 \end{cases}$$

16-masala. Ikki ishchiga bir qancha bir xil detallar tayyorlash topshirildi. Birinchi ishchi 7 soat, ikkinchisi 4 soat ishlagandan keyin butun ishning $\frac{5}{9}$ qismini tamomlangani ma'lum bo'ldi. Ular

birgalikda yana 4 soat ishlagandan keyin butun ishni $\frac{1}{18}$ qismi qolganini aniqlashdi. Bu ishni har qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, necha soatda tamomlar edi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Agar birinchi ishchi ishni yolg'iz o'zi x soatda, ikkinchi ishchi u soatda tamomlay oladi desak, u holda birinchi ishchi bir soatda ishning $\frac{1}{x}$ - qismini, ikkinchisi esa $\frac{1}{y}$ qismini

tamomlaydi. $7 \cdot \frac{1}{x}$ - birinchi ishchining 7 soatdagi bajargan ishi,

$4 \cdot \frac{1}{y}$ - ikkinchi ishchining 4 soatda bajargan ishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 7 \cdot \frac{1}{x}$ va $4 \cdot \frac{1}{y}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{1}{x} + 4 \cdot \frac{1}{y} = \frac{5}{9} \\ 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 - \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18} \right) = \frac{7}{18} \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9} \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18} \end{cases}$$

Sistemadagi birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz:

$$\frac{7}{x} - \frac{4}{x} = \frac{5}{9} - \frac{7}{18}, \quad \frac{3}{x} = \frac{3}{18}, \quad x = 18 \quad c$$

Bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'yamiz:

$$7 \frac{1}{18} + \frac{4}{y} = \frac{5}{9}, \quad \frac{4}{y} = \frac{5}{9} - 7 \cdot \frac{1}{18}, \quad \frac{4}{y} = \frac{3}{18}$$

$$3y = 4 \cdot 18; \quad y = 24 \text{ soat.}$$

5. Tekshirish:

$$\left(\frac{7}{18} + \frac{4}{24} = \frac{5}{9} \right) \Rightarrow \left(\frac{28+12}{72} = -\frac{5}{9} \right) \Rightarrow \left(\frac{5}{9} = \frac{5}{9} \right).$$

17-masala. Paraxodga ko'tarma kran bilan yuk ortildi. Oldin quvvati bir xil bo'lgan 4 ta kran ishladi. Ular 2 soat ishlageandan keyin ularga yana kamroq quvvatga ega bo'lgan 2 ta ko'tarma kran qo'shildi va shundan keyin yuk ortish 3 soatda tamom bo'ldi. Agar hamma kran baravariga ishga tushirilsa, yuk ortish 4,5 soatda tugar edi. Agar bitta kuchli kran yolg'iz o'zi ishlatilsa, yuk ortishni necha

soatda tamomlash mumkin bo'lar edi? Bitta kuchsiz kran yolg'iz o'zi ishlasa, ishni necha soatda tamomlar edi?

Yechish.

1. Belgilashlar. Katta quvvatga ega bo'lgan kran x soatda yukni ortsin. Kichik quvvatga ega bo'lgan kran u soatda ortsin, u holda birinchi kran ja'mi ishning $\frac{1}{x}$ qismini bir soatda bajaradi. Kichik

quvvatga ega bo'lgan kran esa bir soatda ishning $\frac{1}{y}$ qismini bajaradi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: To'rtta katta kranning 5 soatdagi ishi $4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x}$ va ikkita kichik kranning $3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y}$ soatdagi ishi

hamda ularning 4,5 soatdagi ishlari $4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x}$ va $3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y}$

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ 4 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot 4,5 \cdot \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{20}{x} + \frac{6}{y} = 1 \cdot 3 \\ \frac{18}{x} + \frac{9}{y} = 1 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{60}{x} + \frac{18}{y} = 3 \\ \frac{36}{x} + \frac{18}{y} = 2 \end{cases}$$

1 - tenglamadan 2-tenglamani ayirsak, $\frac{24}{x} = 1$ hosil bo'ladi,

bundan $x = 24$;

$$\frac{36}{24} + \frac{18}{y} = 2, \quad \frac{18}{y} = 2 - \frac{3}{2}, \quad \frac{18}{y} = \frac{1}{2} \text{ soat}, y = 36 \text{ soat}.$$

$$5. \text{ Tekshirish: } \frac{20}{24} + \frac{6}{36} = 1, \quad \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1, \quad 1 = 1$$

18-masala. Elektrostansiya qurilishda g'isht teruvchilar brigadasi ma'lum vaqtida 120 ming dona g'isht terish kerak edi. Brigada ishni muddatidan 4 kun ilgari tamomladi. Agar brigada norma bo'yicha 4 kunda qancha g'isht terishi kerak bo'lsa, 3 kunda shundan 5 ming dona ortiq g'isht tergani ma'lum bo'lsa, har kungi g'isht terish normasi qancha bo'lgan va brigada haqiqatda kuniga qanchadan g'isht tergan?

Yechish.

1. Belgilashlar. Bir kunda teriladigan normadagi g'isht x ming dona bo'lsin, haqiqatda esa u ming donadan g'isht terilgan bo'lsa, $\frac{1}{x}$ - norma bo'yicha teriladigan kun, $\frac{1}{y}$ - haqiqatda terilgandagi sarf qilingan kun.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{120}{x}, \frac{120}{y}, 3y$ va $4x$.

3. Tenglama tuzish:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4 \\ 3y - 4x = 5 \end{cases}$$

4. Tenglamani yechish:

$$\begin{cases} \frac{120}{x} - \frac{120}{y} = 4 \\ 3y - 4x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30y - 30x = xy \\ y = \frac{5+4x}{3} \end{cases}$$

$$30 \cdot \frac{5+4x}{3} - 30x = x \cdot \frac{5+4x}{3}$$

$$30(5+4x) - 90x = 5x + 4x^2$$

$$150 + 120x - 90x = 5x + 4x^2$$

$$4x^2 - 25x - 150 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 2400}}{8} = \frac{25 \pm 55}{8}$$

$$x_1 = 10 \text{ ming dona}, y_1 = \frac{5+40}{3} = \frac{45}{3} = 15 \text{ ming dona.}$$

5. Tekshirish:

$$\frac{120}{10} - \frac{120}{15} = 4, \quad 12 - 8 = 4, \quad 4 = 4$$

19-masala. Quvvatlari turlicha bo'lgan ikki traktor birga ishlab xo'jalik erini 8 kunda haydab tamomladi. Dastlab dalaning yarmini bir traktor yolg'iz o'zi haydab, keyin ikkala traktor birga ishlasa, hamma ish 10 kunda tugar edi. Dalani har qaysi traktor yolg'iz o'zi necha kunda hayday olar edi?

Yechish. 1. Belgilashlar. Birinchi traktor bilan butun dalani x kunda, ikkinchi traktor bilan u kunda haydash mumkin bo'lsa, u holda birinchi traktor bir kunda $\frac{1}{x}$ qism erni haydasa, ikkinchi

traktor bir kunda $\frac{1}{y}$ qism erni haydaydi. Shartga ko'ra birinchi

traktor dalani yarmini haydagani uchun $\frac{x}{2}$ bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ va $\frac{x}{2}$.

3. Tenglama tuzish: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{x}{2} + 4 = 10 \end{cases}$

4. Tenglamani yechish: $\begin{cases} 8y + 8x = xy, \\ x = 12; \end{cases}$

$$8y + 8 \cdot 12 = 12y, \quad 4y = 96, \quad y = 24.$$

Demak, birinchi traktor bilan dalani 12 kunda, ikkinchi traktor bilan esa 24 kunda haydash mumkin.

20-masala. Ikki ayol bozorga 100 dona tuxum olib kelishdi. Ikkala ayol tuxumlarni turli narx bilan sotib, barobar miqdorda pul

to'lashdi. Agar birinchi ayoldagi tuxumlar ikkinchisidagicha bo'lsa, u 7,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi, agar ikkinchi ayoldagi tuxumlar birinchisidagicha bo'lsa, u 3,2 so'mlik tuxum sotgan bo'lar edi. Har qaysi ayol bozorga nechta dona tuxum oborgan?

Yechish. 1. Belgilashlar. Birinchi ayolda x dona, ikkinchi ayolda y dona tuxum bo'lsa, u holda masala shartiga

ko'ra birinchi ayol tuxumning bir donasini $\frac{7,2}{y}$ so'mdan sotib, $\frac{7,2}{y}x$ so'm pul to'plagan bo'ladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi ayolga ham $\frac{3,2}{x}y$ so'm pul tushgan bo'ladi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $x, y, \frac{7,2}{y}x$ va $\frac{3,2}{x}y$

3. Tenglama tuzish: $\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{3,2}{x}y = \frac{7,2}{y}x \end{cases}$

4. Tenglamani yechish:

$$3,2y^2 = 7,2x^2 \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{7,2}{3,2}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)_{1,2} = \pm \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{x}{y}\right)_1 = \frac{3}{2};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_2 = -\frac{3}{2}; \quad x = 100 - y, \quad \frac{y}{100-y} = \frac{3}{2}; \quad 5y = 300,$$

$$y = 60 \text{ dona} \quad x = 40 \text{ dona}$$

5. Tekshirish:

$$\begin{cases} 60 + 40 = 100 \\ \frac{3,2}{40} \cdot 60 = \frac{7,2}{60} \cdot 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = 100 \\ 4,8 = 4,8 \end{cases}$$

21-masala. Aravaning oldingi g'ildiragi 18 m masofada, keyingi g'ildirakdan 10 marta ortiq aylanadi. Agar oldingi g'ildirak aylanasini 6 dm ottirib, keyingi g'ildirak aylanasini 6 dm kumatyirilsa, shuncha masofada oldingi g'ildirak keyingisidan 4 ta ort q aylanadi. Har qaysi g'ildirak aylanasining uzunligini toping.

Yechish. 1. Belgilashlar. Oldingi g'ildirakning aylanasi x dm, keyingi g'ildirakning aylanasi y dm bo'lzin.

$\frac{180}{x}$ - oldingi g'ildirakning bir marta aylanishi.

$\frac{180}{y}$ - keyingi g'ildirakning bir marta aylanishi.

$\frac{180}{x+6}$ - oldingi g'ildirakning ortirilgandan keyingi bir marta aylanishi.

aylanishi.

$\frac{180}{y-6}$ - keyingi g'ildirakning kamaytirilganidan keyingi bir marta aylanishi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar: $\frac{180}{x}, \frac{180}{y}, \frac{180}{x+6}$ va $\frac{180}{y-6}$

3. Tenglama tuzish:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{180}{x} - \frac{180}{y} = 10 \\ \frac{180}{x+6} - \frac{180}{y-6} = 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{180}{x} - \frac{180}{y} = 10 \\ \frac{180}{x+6} - \frac{180}{y-6} = 4 \end{array} \right.$$

4. Tenglamani yechish:

$$18y - 18x = xy,$$

$$45(y-6) - 45(x+6) = (x+6)(y-6),$$

$$45y - 270 - 45x - 270 = xy - 6x + 6y - 36,$$

$$39y - 39x - 504 = 18y - 18x,$$

$$21y - 21x - 504 = 0,$$

$$y - x - 24 = 0, \quad y = x + 24.$$

$$18(x+24) - 18x = (x+24)x$$

$$18x + 332 - 18x = x^2 + 24x; \quad x^2 + 24x - 332 = 0$$

$$x_{1,2} = -12 \pm \sqrt{144 + 332} = -12 \pm 24.$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -36$$

$x_1=12$ dm oldinti g'ildirak, $y=36$ dm g'ildirak aylanasi uzunligi.

$$5. \text{ Tekshirish: } \frac{180}{12} - \frac{180}{36} = 10; 10 = 10.$$

22-masala. Bir qotishmada 1:2 nisbatda ikki xil metall bor. Ikkinci qotishmada esa shu metallar 2:3 kabi nisbatda. Tarkibida o'sha metallar 17:27 kabi nisbatda bo'lgan uchinchi bir qotishma hosil qilish uchun shu qotishmalarning har biridan qancha qism olish kerak?

Yechish.

1. Belgilashlar. Uchinchi qotishmada birinchi qotishmaning x qismi va ikkinchi qotishmaning y qismi bo'lsin, ya'ni birinchi qotishmaning x kilogramiga ikkinchi qotishmaning u kilogrami to'g'ri kelsin. U holda $(x+y)$ kilogramm uchinchi qotishmada birinchi metaldan $\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y$ va ikkinchi metaldan $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$ kg bo'ladi.

$$\text{2. Taqoslanadigan miqdorlar: } \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y \text{ va } \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$$

3. Tenglama tuzish:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{5}y \right) : \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y \right) = 17:27$$

4. Tenglamani yechish:

$$\frac{5x+6y}{15} : \frac{10x+9y}{15} = 17:27$$

$$\frac{5x+6y}{10x+9y} = \frac{17}{27}; \quad \frac{\frac{5x}{y} + 6}{\frac{10x}{y} + 9} = \frac{17}{27}$$

$$5 \frac{x}{y} + 6 = \frac{17}{27} \left(10 \frac{x}{y} + 9 \right)$$

$$5 \frac{x}{y} - \frac{170}{27} \frac{x}{y} - 9 \cdot \frac{17}{27} = 6; \quad \frac{35x}{27y} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{35}; \quad \frac{x}{y} = \frac{9}{35}$$

Ikkinci qotishmaning 9 qismiga, ikkinchi qotishmaning 35 qism olish kerak.

23-masala. Ikki ishchining ikkinchisi birinchisidan 1,5 kun keyin ishga tushib, ular bir ishni 7 kunda tamomlay oladilar. Agar bu ishni hap qaysi ishchi yolg'iz o'zi ishlasa, birinchi ishchi ikkinchisiga qaraganda 3 kun ortiq ishlashiga to'g'ri keladi. Har qaysi ishchi yolg'iz o'zi bu ishni necha kunda tamomlaydi?

Yechish.

1. **B e l g i l a s h l a r.** Agar ikkinchi ishchi butun ishni x kunda tamomlasa, birinchi ishchi $x+3$ kunda tamomlaydi. Birinchi ishchi 7 kun ishlab, butun ishning $\frac{7}{x+3}$ qismini, ikkinchi ishchi 5,5 kun ishlab, butun ishni $\frac{5,5}{x}$ qismini tamomlaydi.

2. Taqqoslanadigan miqdorlar; $\frac{7}{x+3}$ va $\frac{5,5}{x}$

3. Tenglama tuzish:

$$\frac{7}{x+3} + \frac{5,5}{x} = 1$$

4. Tenglamani yechish:

$$7x + 5,5x + 16,5 = x^2 + 3x,$$

$$x^2 - 9,5x - 16,5 = 0,$$

$$x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{33}{2} = 0,$$

$$2x^2 - 19x - 33 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 + 264}}{4} = \frac{19 \pm 25}{4}$$

$$x_1 = 11, \quad x_2 = -\frac{3}{2} - \text{chet ildiz}$$

J: birinchi ishchi ishni 14 kunda, ikkinchi ishchi 11 kunda tamomlaydi.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR.

1-masala. Velosipedchi 30 km yo'l yurishi kerak edi. Velosipedchi tayinlangan vaqtdan 3 minut kech yo'lga chiqib, 1 km/s ortiq tezlik bilan yurdi va boradigan joyiga o'z vaqtida etib keldi. Velosipedchining tezligini toping?

J: 25 km/s.

2-masala. Ikki stansiya orasidagi masofa 96 km. Bu masofani birinchi poezd ikkinchi poezddan 40 minut tez o'tadi. Birinchi poezdning tezligi ikkinchi poezdning tczligidan 12 km/s ortiq bo'lsa, ikkala poezdning tezligini toping?

J: Birinchi poezd tezligi 48 km/s,
ikkinchi poezd tezligi 36 km/s.

3-masala. Ikki yo'lovchi bir vaqtida bir-biriga qarab A va B shaharlardan yo'lga chiqdi. Birinchi yo'lovchi ikkinchisidan bir soatda 2 km/s ortiq yo'l bosadi va u ikkinchi yo'lovchi A shaharga bormasdan bir soat oldin B shaharga etib boradi. A va B shaharlar orasidagi masofa 24 km. Har qaysi yo'lovchi bir soatda necha kilometr yo'l bosadi?

J: 6 km va 8 km.

4-masala. A va B shaharlar orasidagi masofa 200 km. A shahardan B shahargacha bir-biriga qarab bir vaqtida ikkita avtomobil yo'lga chiqdi. Birinchi avtomobil ikkinchi avtomobilga qaraganda 20 km tez yurdi va ikkinchi avtomobilga qaraganda 50 minut oldin etib keldi. Har qaysi avtomobilning tezligini toping?

J: 80 km/s va 60 km/s.

5-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 60 km. Motorli qayiq bu masofani oqim bo'yicha oqimga qarshi suzganidan ketgan vaqtga qaraganda 50 minut tez suzib o'tadi. Agar daryo oqimining tezligi soatiga 3 km bo'lsa, motorli qayiqning tezligini toping?

J: 21 km/s.

6-masala. Ikki pristan orasidagi masofa 154 km. Bu pristanlarning birinchisidan ikkinchisiga qarab paraxod yo'lga chiqdi. Paraxod ikkinchi pristanga borib, 45 minut to'xtab turdi va yana yo'lga chiqqan joyiga 18,75 soatdan keyin qaytib keldi. Agar paraxodning turg'un suvdagi tezligi soatiga 18 km bo'lsa, daryo oqimining tezligini toping?

J: 4 km/s.

7-masala. Paxta terimida birinchi brigada 6 soat ishladi, shundan so‘ng yana bir brigada kelib qo‘sildi. Ikki brigada bиргаликда топширини 4 soatda tugatishdi. Agar birinchi brigada berilgan uchastkadagi hosilni bir o‘zi terib olishi uchun ikkinchi brigada yolg‘iz o‘zi ishlaganiga qaraganda 3 soat ortiq vaqt talab qilinsa, har qaysi brigadaning yolg‘iz o‘zi uchastkadagi hosilni necha soatda yig‘ib oladi?

J: birinchi brigada 15 kunda, ikkinchi brigada 12 kunda.

8-masala. Ikkita stanok bиргаликда 9 soat-u 36 minutda ishni tugallaydi. Agar bitta stanok o‘zi ishlasa, butun ishni bajarish uchun ikkinchiga qaraganda 8 soat ortiq vaqt talab qiladi. Har bir stanok alohida ishlaganda butun ishni necha soatda tugallaydi?

J: 16 soat, 24 soat.

9-masala. Ikki g‘isht teruvchi ma’lum bir ishni bиргаликда ishlab 4 soatda bajaradi. Agar, ishchi yolg‘iz o‘zi ishlasa va ishning yarmini bajarsa, so‘ngra ikkinchi ishchi ishning qolgan yarmini bajarsa u holda butun ishni bajarish uchun ularga 9 soat kerak bo‘ladi. Butun ishni har bir ishchi qancha vaqtda bajaradi?

J: 12 kun va 6 kun.

10-masala. Ikki payvandchi malum bir ishni bиргаликда ishlab 4 kunda төгата oladilar. Agar bulardan biri yolg‘iz o‘zi 3 kun ishlagandan keyin, ikkinchisi kelib qo‘silsa, ular bиргаликда топширини 5 kunda bajaradilar. Payvandchilarning har biri топширини necha kunda bajaradi?

J: 6 kun va 12 kun.

11-masala. 300 ishchini jo‘natish uchun bir necha avtobus chaqirilgan edi, ammo belgilanganidan ikkita avtobus kam keldi, shuning uchun har qaysi avtobusga mo‘ljallanganidan 5 kishi ortiq o‘tqizildi. Ishchilarni jo‘natish uchun nechta avtobus chaqirilgan edi?

J: 12 ta.

12-masala. Tez yurar poezd passajir poezdiga qaraganda soatiga 10 km ortiq yuradi. Tez yurar poezdning 210 km ni o‘tishi uchun ketkazgan vaqtiga passajir poezdining 240 km ni o‘tishi uchun ketgan vaqtdan bir soat kam bo‘lsa, tez yurar poezdning tezligini toping?

J: tez yurar poezd tezligi 70 km/s.

13-masala. Tajriba uchastkasida ekilganiga qaraganda 14 kg don ortiq yig‘ib olindi. Yig‘ib olingan donni yana ekildi va birinchi galdeg'i olingan hosil qancha bo‘lsa, shuncha marta hosil olindi,

hammasi bo'lib 128 kg don yigib olindi. Tajriba uchastkasiga birinchi galda qancha don ekilgan?

J: 98 kg.

14-masala. Suvoqchilar bilan bo'yoqchilar brigadasi bir uyni remont qildilar. Suvoqchilar soni bo'yoqchilarga qaraganda bittaga ortiq. Har qaysi brigada 150 so'mdan oldi. Agar har bir bo'yoqchi bir suvoqchi olgan pulni olganda edi, suvoqchilar brigadasi bo'yoqchilar brigadasiga qaraganda 67,5 so'm ortiq olgan bo'lardi. Suvoqchilar qancha bo'lgan va bo'yoqchilar qancha bo'lgan?

J: 5 ta suvoqchi, 4 ta bo'yoqchi.

15-masala. Ikkii pristan orasidagi masofa daryo bo'yicha 50 km. Katerda bu masofani biridan ikkinchisiga borib, u yerda 30 minut to'xtab yana birinchisiga qaytib kelishi uchun 5 soat vaqt sarf qilindi. Daryo oqimining tezligi 2,5 km bo'lsa, katerning turg'un suvdagi tezligini toping?

J: 22,5 km/s.

16-masala. Ikkii avtomashina birligalikda ishlab ma'lum yukni 15 soatda tashib bo'ladi. Birinchi avtomobil ikkinchisidan 6 soat kam ishlab yukning 40% ni tashidi, qolgan yukni 2-avtomobil tashigan bo'lsa, har qaysi avtomobil necha soat ishlagan?

J: 30 soat, 36 soat.

17-masala. Ikkii ishchi bir nechtadan detal tayyorlashi kerak edi. Birinchi ishchi bajargan ishi uchun 48 so'm, birinchi ishchidan 6 ta kam detal tayyorlagan ikkinchi ishchi esa 27 so'm oldi. Agar birinchi ishchi tayyorlaganicha detalni ikkinchi ishchi tayyorlaganida edi, ular bir xilda pul olgan bo'lar edilar. Ishchilar qanchadan detal tayyorlashgan?

J: Birinchi ishchi 24 ta, ikkinchi ishchi 18 ta detal yasagan.

18-masala. Oralaridagi masofa 900 km bo'lgan ikki stansiyadan bir-biriga qarab ikki poezd yo'lga chiqdi. Bu poezdlar yo'lni o'rtaida uchrashishi kerak edi. Agar bu poezdlardan birining tezligi ikkinchisidan 5 km/soat ortiq bo'lsa u belgilangan masofaga ikkinchisidan bir soat oldin keladi. Har bir poezdnинг tezligini toping?

J: 45 km/soat birinchi poezd tezligi,
50 km/soat ikkinchi poezd tezligi.

19-masala. Avtomashina 160 km kesik yo'lni 3 soatda o'tadi. Bu masofani 75% asfaltlangan bo'lib, qolgan qismi tosh yo'ldan iborat. Agar mashinaning asfalt yo'lidagi tezligi tosh yo'lidagi

tezligidan soatiga 20 km ortiq bo'lsa, mashina asfalt yo'lida qanday tezlik bilan yurgan?

J: 60 km/soat asfalt yo'ladi tezlik.

20-masala. Uch idishga suv quyilgan. Agar bir idishdagi suvning 1/3 qismini ikkinchi idishga quyib, so'ngra ikkinchi idishda bo'lган suvning 1/4 qismini uchinchi idishga quyib, nihoyat uchinchi idishda bo'lган suvning 1/10 qismini birinchi idishga quyilsa, har bir idishda 9 litrdan suv bo'ladi. Har qaysi idishda qancha suv bor edi?

J: 12 l, 8 l, 7 l.

21-masala. Oralari dagi masofa 650 km bo'lган ikki shahardan ikki poezd bir-biriga qarab yo'lga chiqdi. Agar poezdlar bir vaqtda jo'nab ketgan bo'lsa, 10 soatdan keyin uchrashadi. Agar ikkinchi poezd birinchidan 4 soatu 20 minut oldin yo'lga chiqsa, birinchi poezd yo'lga chiqqanidan 8 soat keyin uchrashadi. Har qaysi poezdning o'rtacha tezligi topilsin.

J: 35 km/soat birinchi poezd tezligi.

30 km/soat ikkinchi poezd tezligi.

22-masala. Ikki shahar orasidagi masofa daryo yo'li bilan 80 km. Paraxod bu yo'lni bir boshidan ikkinchi boshiga 9 soat-u 20 minütda borib keladi. Daryo oqimining tezligini soatiga 4 km deb hisoblab, paraxodning turg'un suvdagi tezligini toping.

J: 20 km/s.passajir poezd tezligi 60 km/s.

VIII-BOBNI TAKRORLASH UCHUN SAVOLLAR

- 1 Tenglama tushunchasiga ta'rif bering.
- 2 Tenglama ildizi deganda nimani tushunasiz?
- 3 Qanday tenglik ayniyat deyiladi?
- 4 Qanday tenglama chiziqli tenglama deyiladi?
- 5 Parametrik kasr ratsional tenglamani tushuntirib bering.
- 6 Absolyut miqdor belgisi qatnashgan tenglamani tushuntirib bering.
- 7 Kvadrat uchha'ddan to'la kvadrat ajratib bering.
- 8 To'la va keltirilgan kvadrat tenglamalarni farqini aytib bering.
- 9 Kvadrat tenglama ildizlari qanday topiladi?
- 10 Viet teoremasini aytib bering.
- 11 Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalarni turlarini ko'rsating.

12. Qanday tenglama irratsional tenglama deyiladi?
13. Parametrali irratsional tenglama qanday yechilishini ko'rsatib bering.
14. Irratsional tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
15. Qanday tenglama ko'rsatkichli tenglama deyiladi?
16. Logarifmik tenglamani ta'riflang?
17. Qanday tenglama parametrali ko'rsatkichli tenglama deyiladi
18. Qanday tenglama parametrali logarifmik tenglama deyiladi?
19. Ko'rsatkichli tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
20. Logarifmik tenglamalar sistemasi qanday yechiladi?
21. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechilishini ko'rsatib bering.
22. Qanday tenglamalar trigonometrik tenglama deyiladi?
23. Parametrik tenglamalar sistemasini yechish usullarini ko'rsatib bering.
24. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish usullarini ko'rsatib bering.
25. Masala tushunchasining mazmunini aytib bering.
26. Masalaning sharti deganda nimani tushunasiz?
27. Masalaning xulosasi degandachi?
28. Masalalarda ko'proq qanday miqdorlarning o'zaro bog'liqlik munosabatlari bo'lishini aytib bering.

VIII-BOB UCHUN TAYANCH IBORALAR.

Tenglik, tenglama, ayniyat, chiziqli tenglama, parametrali tenglama, kasr chiziqli tenglama, absolyut miqdor, kvadrat uchhad, to'la kvadrat, kvadrat tenglama, ildiz tushunchasi, Viet teoremasi, irratsional tenglama, tenglamalar sistemasi, ko'rsatkichli tenglama, logarifmik tenglama, parametrali ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalar, trigonometrik tenglamalar sistemasi, masala, masala sharti, masala xulosasi.

ADABIYOTLAR

1. Karimov I.A. «Kadrlar tayyorlashning milliy dasturi», T. «O'zbekiston», 1997 yil.
2. Algebra va analiz asoslari: o'rta maktablarning 10-11 sinflari uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O'qituvchi», 1996 yil.
3. Algebra: 7-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O'qituvchi», 1996 yil.
4. Algebra: 8-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O'qituvchi», 1996 yil.
5. Algebra: 9-sinf uchun darslik (Sh.O.Alimov, Yu.M.Kolyagin, Yu.V.Sidorov, M.I.Shabunin) T., «O'qituvchi», 1996 yil.
6. Alixonov S. «Geometriya darslarida umumlashtirish» T., «O'qituvchi», 1989 yil.
7. Alixonov S. «Matematika o'qitish metodikasi». T., «O'qituvchi» 1992 yil.
8. Alixonov S. « Matematika o'qitish metodikasi » Qayta ishlangan II nashri. T., «O'qituvchi» 1997 yil.
9. Bikboeva N.U. va boshqalar «Boshlang'ich sinflarda matematika o'qitish metodikasi», T., «O'qituvchi», 1996 yil.
10. N.G'aybullayev, Ortigov. «Geometriya 7-sinf uchun darslik» T. «O'qituvchi», 1998 yil.
11. N.G'aybullayev, Ortigov. «Geometriya 8-sinf uchun darslik» T. «O'qituvchi», 1999 yil.
12. Galitskiy M.A. va boshqalar «Algebra va matematik analiz kursini chuqur o'rghanish» T., «O'qituvchi», 1995 yil.
13. Davidov V.V. «Vozrotnaya i pedagogicheskaya psixologiya» M., Pedagogika, 1992.
14. Ikramov Dj.I. «Matematicheskaya kultura shkolnika» T., «O'qituvchi», 1981.
15. Ikramov Dj.I. va boshqalar «Matematika, 5-6 sinflar uchun darslik», T., «O'qituvchi», 1997.
16. Klarin M.V. «Innovatsionnie modeli obucheniya v zarubejnih pedagogicheskix poiskax», M., «Prosveshenie», 1994.
17. Kolyagin Yu.N. va boshqalar Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. Obhaya metodika., M. «Prosveshenie», 1983.
18. Litvinenko V.N., Mordkovich A.G. «Fizika po elementam po matematike» M. Izd-vo, «AVG», 1995.

17. Lyahenko S.E. «Laboratornie i prakticheskie raboti po metodike prepodavaniya matematiki» M., «Prosveshenie», 1988.
18. Metodika prepodavaniya matematiki v sredney shkole. (Pod redaksii Mishina). M. Prosveshenie, 1988.
19. Pogorelov A.V. «Geometriya 7-11 kl.» M., «Prosveshenie», 1995.
20. Stolyar A.A. «Metodi obucheniya matematike» Minsk, «Veyshaya shkola» 1993
21. Stolyar A.A. «Pedagogika matematiki» Minsk, «Veyshaya shkola», 1988
22. Fridman L.M. Kak reshat zadachi. M., «Prosveshenie» 1988.
23. Engeler E. Matematika elementarnoy matematike, Perevod nem. yazik. M., «Mir», 1986

QO'SHIMCHA ADABIYOTLAR.

1. N.R.G'aybullayev «Dirchenko I.i. Razvitiye matematicheskix sposobnostey uchashixsya» T., 1987.
2. Davidov V.V. Vidi obobheniya v obuchenii. M., «Pedagogika», 1982.
3. Davidov V.V. Problemi razvivayuhego obucheniya. M., «Pedagogika», 1986.
4. Demidov V.P., Saransev G.I. Metodika prepodavaniya matematiki. M., «Prosveshenie», 1978.
5. Lerner YA. Didakticheskaya osnovi metodov obucheniya. M., «Pedagogika», 1992.
6. Okon V. Vvedeniya v obheyu didaktiku. M., «Vishshaya shkola», 1990.
7. Sbornik zadach po matematike dlya postupayuhix vo vtuzi. (Pod redaksii M.I. Skanavi.) M., Vishshaya shkola., 1995.
8. Sirojiddinov S.X., Mirzaaxmedov M.A. Matematika kasbi haqida suhbatlar. T., «O'qituvchi», 1993.
9. Teslenko I.F. O prepodavaniya geometrii. M., «Prosveshenie». 1985.
10. Fridman L.M. Uchites uchitsya matematike. M, «Prosveshenie». 1986.
11. Erdniev P.N. Prepodavanie matematiki v shkole. M., «Prosveshenie», 1978.
12. Yastrebeneskiy G.A. Zadache s parametrami. M., «Prosveshenie». 1989.

MUNDARIJA

I-BOB. UMUMTA'LIMIY MAKtablarda MATEMATIKA O'QITISH MASALALARI

1-§. Matematika o'qitish metodikasi fani	5
2-§. O'rta umumta'limiylarda matematika o'qitishning maqsadi.....	7
3-§. Matematika o'qitish metodikasining boshqa fanlar bilan aloqasi	9
4-§. Ta'limni isloh qilinishi	10

II-BOB. MATEMATIKA DARSLARIDA BILISHNING TURLARI VA XULOSA CHIQARISH METODLARI

1-§. Matematik tushuncha	14
2-§. Matematik tushunchalarni ta'riflash metodikasi	16
3-§. Matematik tushunchalarni kiritish metodikasi	18
4-§. Matematik tushunchalarni kiritishning abstrakt - deduktiv metodi..	21
5-§. Matematik hukm.....	24
6-§. Matematik xulosa	26
7-§. Matematik hukmnинг turlari.....	34
8-§. Postulat.....	35
9-§. Teorema va uning turlari	36
10-§. Teoremlarni isbotlash metodlari	46
11-§. Teoremlarni isbotlashdagi zaruriy va etarli shartlar	58

III-BOB. MAKTAB MATEMATIKA KURSIDA TA'LIM METODLARI

1-§. Matematik ta'lim metodlari.....	65
2-§. Matematika o'qitishdagi ilmiy izlanish metodlari.....	66
3-§. Tajriba va kuzatish metodi	66
4-§. Taqqoslash metodi.....	67
5-§. Analiz va sintez metodi	68
6-§. Umumlashtirish metodi	73

7-§. Abstraksiyalash metodi	84
8-§. Konkretlashtirish metodi	85
9-§. Klassifikatsiyalash metodi	85
10-§. Evristik ta'lif metodi	86
11-§. Matematika darslarida muammoli ta'lif	90
12-§. Matematika darslarida dasturlashtirilgan ta'lif	97

IV-BOB. O'QUVCHILARNING MATEMATIK TAFAKKUR-LARINI SHAKLLANTIRISH METODIKASI

1-§. Matematik ta'lif jarayonida masalaning roli va o'rni	103
2-§. Matematika o'qitishda masalaning bajaradigan funksiyalari	107
3-§. Matematika darslarida ko'phadlarni ko'paytuvchilarga ajratish metodikasi	114
4-§. Matematika darslarida didaktik prinsiplar	119

V - BOB. MATEMATIK TA'LIMNI TASHKIL QILISH METODIKASI

1-§. Matematika darsining tuzilishi va uni tashkil qilish metodikasi	124
2-§. Matematika darsining turlari	127
3-§. Matematika darsiga tayyorgarlik va darsning taxlili	137
4-§. Matematika darsiga qo'yilgan talablar	140
5.O'quvchilarning bilimlarini tekshirish	141

VI - BOB. SON TUSHUNCHASINI KIRITISH, UNI KENGAY-TIRISH VA SONLAR USTIDA AMALLAR BAJARISH METODIKASI

1-§. Natural son tushunchasini kiritish va ular ustida amallar bajarish metodikasi	148
2-§. Natural sonlar to'plamini kengaytirish	153
3-§. Butun sonlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi	154
4-§. Kasr son tushunchasini kiritish va uni o'rgatish metodikasi	157
5-§. Kasrlarni taqqoslash	161

6-§. Kasrlarni qo'shish.....	161
7-§. Kasrlarni ayrish	163
8-§. Kasrlarni ko'paytirish	165
9-§. Kasrlarni bo'lish	167
10-§. O'nli kasrlar va ular bilan to'rt amalni bajarish metodikasi	169
11-§. O'nli kasrlarni qo'shish va ayrish	170
12-§. O'nli kasrlarni ko'paytirish	171
13-§. O'nli kasrlarni bo'lish	173
14-§. Oddiy kasrni cheksiz davriy kasrga aylantirish	175
15-§. Cheksiz o'nli davriy kasrni oddiy kasrga aylantirish	176
16-§. Irratsional son tushunchasini kiritish metodikasi	177
17-§. Haqiqiy sonlar	180
18-§. Haqiqiy sonlar ustida amallarni bajarish qoidalari	182
19-§. Arifmetik kvadrat ildiz tushunchasi	182
20-§. Arifmetik to'rt amalga doir misollar yechish	183

VII - BOB. MAKTABDA AYNIY SHAKL ALMASHTIRISH-LARNI O'RGATISH METODIKASI

1-§. Ayniy shakl almashtirishlar	191
2-§. Kasr ifodalarni ayniy almashtirish.....	194
3-§. Irratsional ifodalarni ayniy almashtirish.....	202
4-§. Trigonometrik ifodalarni ayniy almashtirish.....	213
5-§ Trigonometrik ifodalarni soddalashtirishga doir misollar yechish metodikasi	224

VIII - BOB. TENGLAMALARNI O'RGANISH METODIKASI

1-§. Tenglama tushunchasini kiritish metodikasi	233
2-§. Chiziqli tenglamalar	237
3-§. Parametrik usulda berilgan kasr ratsional tenglamalarni yechish ..	239
4-§. Noma'lumlari absolyut miqdor belgisi ostida qatnashgan tengiamaiarni yechish metodikasi.....	240

5-§. Kvadrat tenglama tushunchasini kiritish metodikasi.....	243
6-§. Vieta teoremasi.	247
7-§. Kvadrat tenglamaga keltirib yechiladigan tenglamalar	248
8-§. Irratsional tenglamalarni yechish	256
9-§. Ko'rsatkichli tenglamalar.....	264
10-§. Logarifmik tenglamalar.....	272
11-§. Parametrli irratsional tenglamalarni yechish	277
12-§. Irratsional tenglamalar sistemasini yechish.....	281
13-§. Parametrli logarifmik va ko'rsatkichli tenglamalarni yechish	286
14-§. Ko'rsatkichli va logarifmiklar tenglamalar sistemasini yechish ..	290
15-§. Ko'rsatkichli va logarifmik tenglamalarni grafik usulda yechish	298
16-§. Trigonometrik tenglamalar.....	301
17-§. Parametrli trigonometrik tenglamalarni yechish	311
18-§. Trigonometrik tenglamalar sistemasini yechish.....	317
19-§. Masalalarni tenglama tuzish bilan yechish metodikasi	324
ADABIYOTLAR	352

