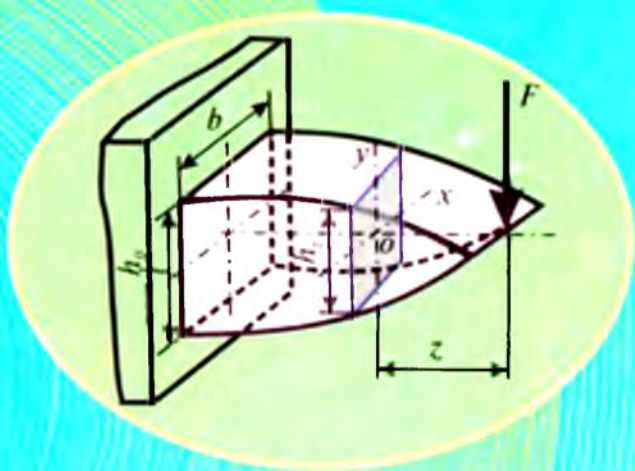


М. ЭРГАШЕВ

# РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ



**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**М.ЭРГАШЕВ**

**РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ  
РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ  
МАТЕРИАЛОВ**

*Министерством Высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов вузов*



Ташкент – 2007

**М.Эргашев.** Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов.Т.,Изд-во «Fan va texnologiya», 2007, 484 стр.

Учебное пособие содержит задачи расчетно-проектировочных работ по всем основным разделам курса сопротивления материалов. Каждая задача составлена в виде контрольных работ из тридцати вариантов и сопровождается несколькими примерами и указаниями по их выполнению.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов высших технических учебных заведений и может быть использовано для самостоятельного углубленного изучения и проведения различных олимпиад по данному курсу.

Решения большинство задач и примеров могут быть использованы при освоении курсов детали машин, прикладной или технической механики в вузах и профессиональных колледжах.

**Рецензенты:** Т.Мавлюнов, д.т.н., проф;  
А.Халджигитов, д.ф.-м.н., проф.

ISBN 978-9943-10-054-1

Изд-во «Fan va texnologiya», 2007г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс сопротивления материалов, входящий в раздел общинженерных дисциплин технических вузов, даст студентам основные знания и навыки по расчету прочности, надежности, устойчивости и выносливости конструкций, машин, сооружений и является базовым при изучении таких специальных курсов как детали машин, динамика и прочность машин и т.д.

Учитывая важность глубокого изучения данного курса, в учебных планах вузов предусматриваются лекционные, практические и лабораторные занятия, а также самостоятельное выполнение студентами в течение двух или трех семестров от шести до двенадцати расчетно – проектировочных работ (РПР). Обычно, каждая из РПР включает в себя от одной до трех или четырех задач из одного, или нескольких разделов курса. Несмотря на это, до сих пор отсутствует единый сборник задач или пособие по выполнению РПР по данному курсу.

В известных сборниках задач, пособиях, например в [1-5], даются только отдельные задачи для РПР или контрольные работы, но они имеют следующие недостатки: в [1,2] многовариантные задачи для РПР приведены только по отдельным разделам курса и в каждом варианте, как правило, имеются от пяти до десяти задач (в академических группах обычно от пятнадцати до тридцати студентов); [3,4] предназначены только для колледжей.

Отсутствие специального сборника задач или пособия создает определенные трудности для студентов, в частности, требует выполнения большого объема работ в ходе решения задач РПР.



Данный сборник содержит от одного до десяти и более задач РПР по всем основным разделам курса сопротивления материалов. Каждая задача составлена в виде контрольных работ из тридцати вариантов и сопровождается несколькими примерами и указаниями по их выполнению. Основные задачи, примеры и указания по их выполнению составлены авторами самостоятельно, за исключением отдельных задач, позаимствованных из [1-5]. Число вариантов каждой задачи доведено до тридцати, и в связи с этим, внесены изменения в исходные данные задач и примеры их решения.

Большинство задач пособия и примеры их выполнения могут быть использованы при освоении курсов «Прикладная механика» и «Техническая механика».

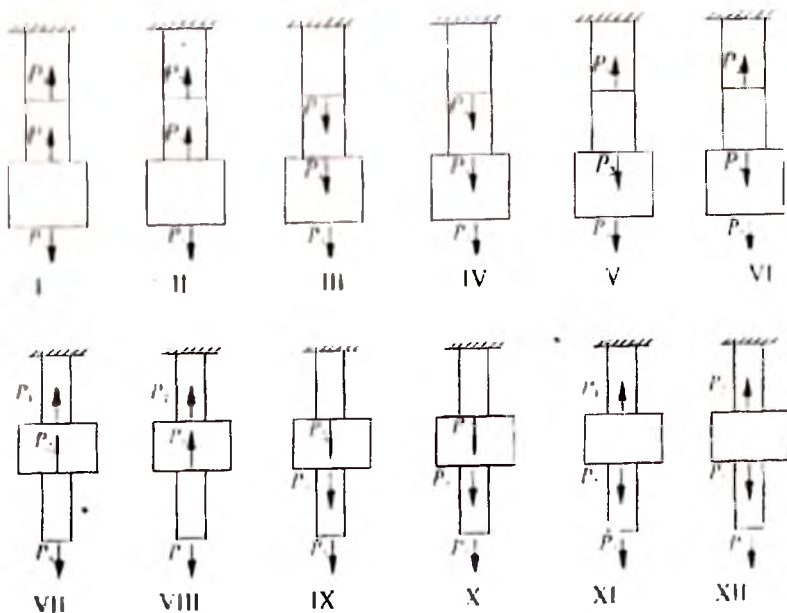
Пособие является переводом на русский язык книги данного автора «Материаллар қаршилиги – ҳисоблаш-лойиҳалаш ишлари» (Ташкент, Молия, 2005). В предлагаемом издании пособия устранены технические допущения, а также материалы дополнены новыми примерами решения задач и включены три новых раздела с учетом пожеланий и рекомендаций специалистов.

## Глава I. Растяжение и сжатие

Задача 1.1. Ступенчатым стержням длиной ступенек  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и площадью поперечных сечений  $F$  и  $2F$  приложены центральные силы  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ . Построить эпюры продольных усилий, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений стержня. Общая длина стержня ( $l$ ) равна сумме  $a+b+c$ , ступеньки с размерами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  расположены сверху вниз от закрепленного конца стержня (см.рис.1.1). Данные взять из таблицы 1.1.

$$(E=2 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}, [\sigma]=1,6 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2}).$$

Рисунки задачи 1.1.



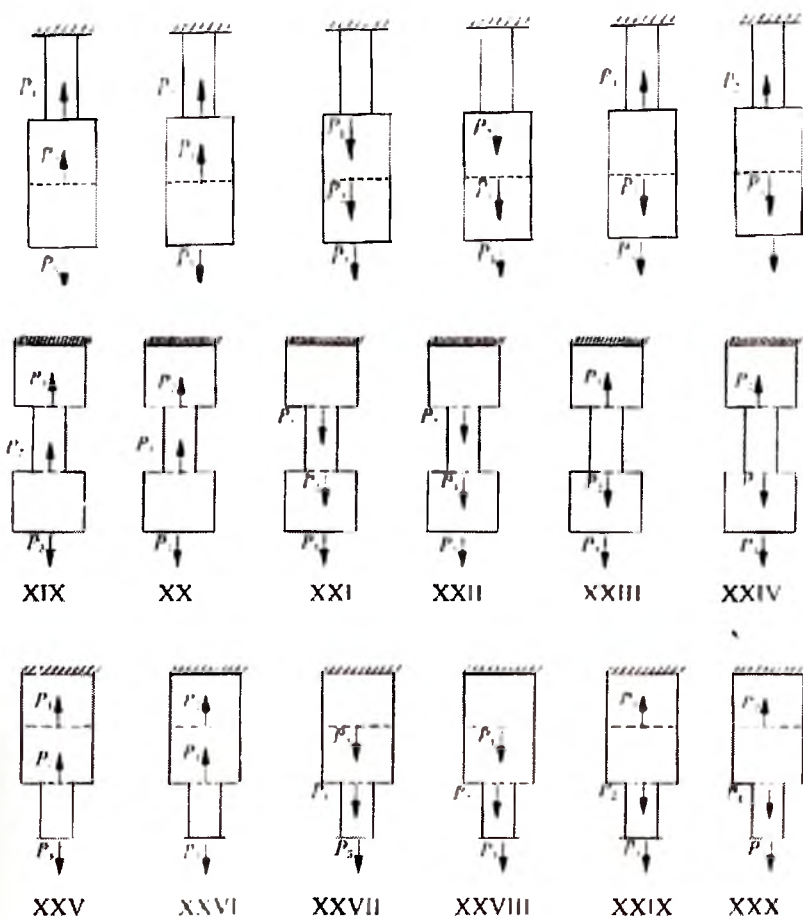


Таблица 1.1.

№	a	b	c	104F	$10^{-4}P_1$	$10^{-4}P_2$	$10^{-4}P_3$
				M <sup>2</sup>	H		
		м					
1	0.10	0.15	0.16	11	1.0	1.5	0.6
2	0.20	0.25	0.26	12	2.0	2.5	0.7
3	0.30	0.35	0.36	13	3.0	3.5	0.8
4	0.40	0.45	0.46	14	4.0	4.5	0.9

5	0.50	0.55	0.56	15	5.0	5.5	1.0
6	0.60	0.65	0.66	16	6.0	6.5	0.6
7	0.70	0.75	0.76	17	7.0	7.5	0.7
8	0.80	0.85	0.86	18	8.0	8.5	0.8
9	0.90	0.95	0.96	19	9.0	9.5	0.9
10	0.25	0.15	0.10	11	1.0	1.5	1.0
11	0.35	0.25	0.20	12	2.0	2.5	0.6
12	0.45	0.35	0.30	13	3.0	3.5	0.7
13	0.55	0.45	0.46	14	4.0	4.5	0.8
14	0.65	0.55	0.56	15	5.0	5.5	0.9
15	0.75	0.65	0.66	16	6.0	6.5	1.0
16	0.85	0.75	0.76	17	7.0	7.5	0.6
17	0.95	0.85	0.86	18	8.0	8.5	0.7
18	0.10	0.15	0.10	19	9.0	9.5	0.8
19	0.20	0.25	0.20	18	8.0	8.5	0.9
20	0.30	0.35	0.30	17	7.0	7.5	1.0
21	0.40	0.45	0.40	16	6.0	6.5	0.6
22	0.50	0.55	0.50	15	5.0	5.5	0.7
23	0.60	0.65	0.60	14	4.0	4.5	0.8
24	0.70	0.75	0.70	13	3.0	3.5	0.9
25	0.80	0.85	0.80	12	2.0	2.5	1.0
26	0.15	0.25	0.35	12	2.0	2.5	0.6
27	0.25	0.35	0.45	13	3.0	3.5	0.7
28	0.35	0.45	0.55	14	4.0	4.5	0.8
29	0.45	0.55	0.65	15	5.0	5.5	0.9
30	0.55	0.65	0.75	16	6.0	6.5	1.0

*Указания к решению задачи 1.1.*

А. Определить продольные силы и нормальные напряжения, возникающие в сечениях ступенчатого стержня. Найти перемещения поперечных сечений.

Дано: рис. 1.1;  $F=1.6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;  $a=0,55 \text{ м}$ ;  $b=0,65 \text{ м}$ ;  $c=0,75 \text{ м}$ ;  $P_1=6 \cdot 10^4 \text{ Н}$ ;  $P_2=6,5 \cdot 10^4 \text{ Н}$ ;  $P_3=6,6 \cdot 10^4 \text{ Н}$ .

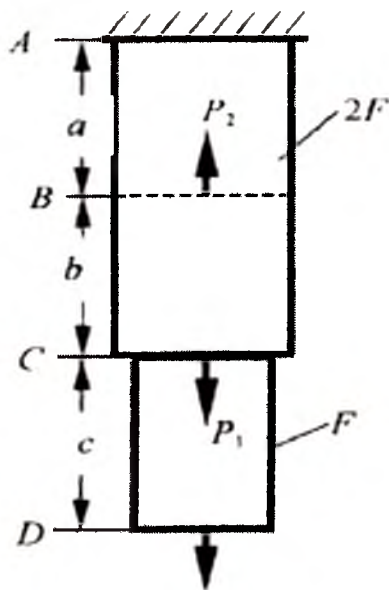


Рис. 1.1.

*Решение*

1) Обозначив особые сечения стержня через А, В, С, D получаем расчетную схему, изображенную на рис. 1.1.

2) Продольные усилия, нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях ступенек, абсолютные удлинения и перемещения поперечных сечений определяются из выражения:

– на участке АВ ( $0 \leq x_1 \leq a$ )

$$N_{AB} = -P_2 + P_1 + P_3,$$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{(\bar{n} P_2 + P_1 + P_3)}{2F},$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB}}{EF_{AB}} = \frac{(\bar{n} P_2 + P_1 + P_3)a}{2EF}.$$

$$\delta_B = \delta_A + \Delta l_{AB} = 0 + \frac{(\bar{n}P_2 + P_1 + P_3)a}{2EF} = \frac{(\bar{n}P_2 + P_1 + P_3)a}{2EF}$$

На участке BC ( $a \leq x_2 \leq a+b$ )

$$N_{BC} = P_1 + P_3, \quad \sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{P_1 + P_3}{2F}$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} BC}{EF_{BC}} = \frac{(P_1 + P_3)c}{2EF}$$

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_{BC} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \frac{(\bar{n}P_2 + P_1 + P_3)a}{2EF} + \frac{(P_1 + P_3)b}{2EF}$$

На участке CD ( $a+b \leq x_3 \leq a+b+c$ )

$$N_{CD} = P_3, \quad \sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{P_3}{F}, \quad \Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} CD}{EF_{CD}} = \frac{P_3 c}{EF}$$

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_{CD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{(\bar{n}P_2 + P_1 + P_3)a}{2EF} +$$

$$+ \frac{(P_1 + P_3)b}{2EF} + \frac{P_3 c}{EF}$$

Ответ:  $\delta_A = 0$ ,  $\delta_B = 0,61 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  $\delta_C = 1,94 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ ,  
 $\delta_D = 3,48 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Б. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине стержня (рис.1.2).

Дано: рис. 2.19;  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 2P$ ;  $P_3 = 4P$ ;  $F_1 = 2F$ ;  $F_2 = F$ ;  $F_3 = 2,5F$ .



### Решение

Разбиваем стержень на участки, начиная от свободного конца. Границы участков проходят через точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения. Эюра продольных сил приведена на рис. 1.2.

Для построения эюры перемещений достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков, так как между указанными сечениями эюра линейна.

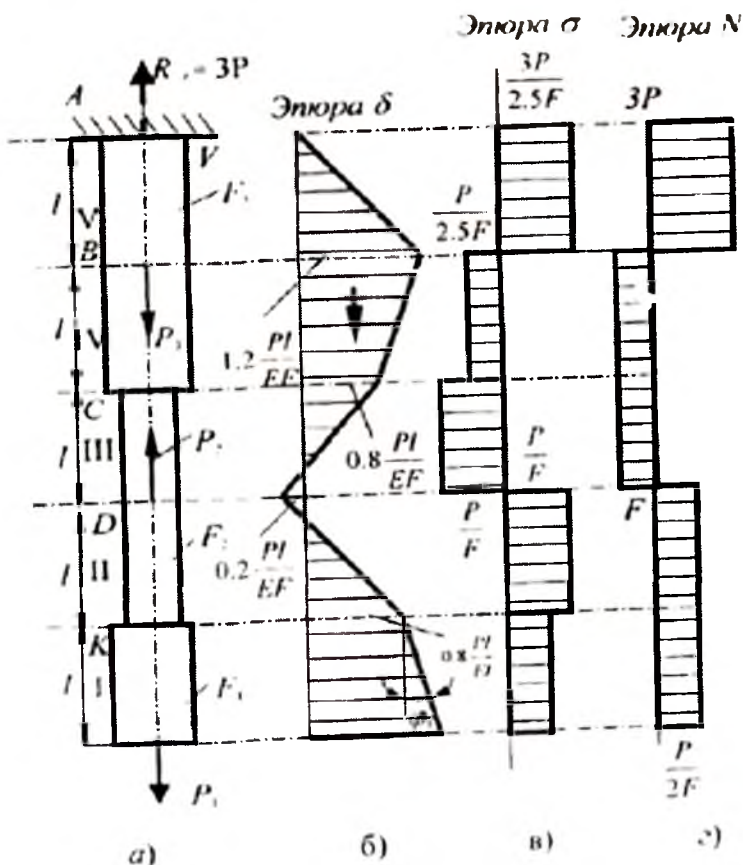


Рис. 1.2.

Сечение А неподвижно, то есть  $\delta_A=0$ .

Перемещение сечения В равно изменению длины (в данном случае удлинению) участка АВ (участка V) стержня:

$$\delta_B = \Delta l_V = \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} = \frac{2Pl}{E \cdot 2,5F} = 1,2 \frac{Pl}{EF}$$

Перемещение сечения С равно алгебраической сумме изменений длин участков V и IV стержня:

$$\delta_C = \Delta l_V + \Delta l_{IV} = \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} + \frac{N_{IV} l}{E \cdot 2,5F} = \frac{3Pl}{E \cdot 2,5F} \bar{n} \\ \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = 0,8 \frac{PL}{EF}$$

То же самое можно записать несколько компактно:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_{IV} = 1,2 \frac{Pl}{EF} \bar{n} - \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = 0,8 \frac{PL}{EF}$$

Аналогично,

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_{III} = \delta_C + \frac{N_{III} l}{EF} = 0,8 \frac{PL}{EF} \bar{n} - \frac{Pl}{EF} = \bar{n} 0,2 \frac{Pl}{EF}$$

Значения  $\delta_H$  и  $\delta_M$  указаны на эпюре (рис. 1.2, г).

Тангенс угла наклона эпюры к оси абсцисс пропорционален нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях данного участка стержня. Например, на рис. 1.2, г

$$\lg \varphi_1 = \frac{\delta_M \cdot \delta_K}{l} = \frac{\Delta l_1}{l} = \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{P}{E \cdot 2,5F}$$

В данном предыдущего примера (рис. 1.2) построить эпюры перемещений от действия каждой из сил в отдельности.

*Решение.* При действии силы  $P_1 = P$  (рис. 1.3, а) деформируется (растягивается) весь стержень. Границами участка служат сечения С, К, М — места изменения размеров поперечного сечения; перемещения этих сечений:

$$\delta_C = \frac{P \cdot 2l}{E \cdot 2,5F} = 0,8 \frac{Pl}{EF};$$

$$\delta_K = \delta_C + \frac{P \cdot 2l}{EF} = 0,8 \frac{Pl}{EF} + \frac{P \cdot 2l}{EF} = 2,8 \frac{Pl}{EF};$$

$$\delta_M = \delta_K + \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = 2,8 \frac{Pl}{EF} + 0,5 \frac{Pl}{EF} = 3,3 \frac{Pl}{EF};$$

При действии силы  $P_2$  (рис. 1.3, в) сжимаются участки АС и СD стержня. Участки DK и KM не деформируются, и все поперечные сечения этих участков перемещаются на ту же величину, что и сечение D.

Сила  $P_1$  растягивает участок АВ стержня.

На всех эпюрах стрелки указывают направления перемещений.

Если просуммировать все три эпюры перемещений, получим, как следует из принципа независимости действия сил, эпюру  $\delta$  от совместного действия всех заданных сил (эпюру, представленную на рис. 1.3).

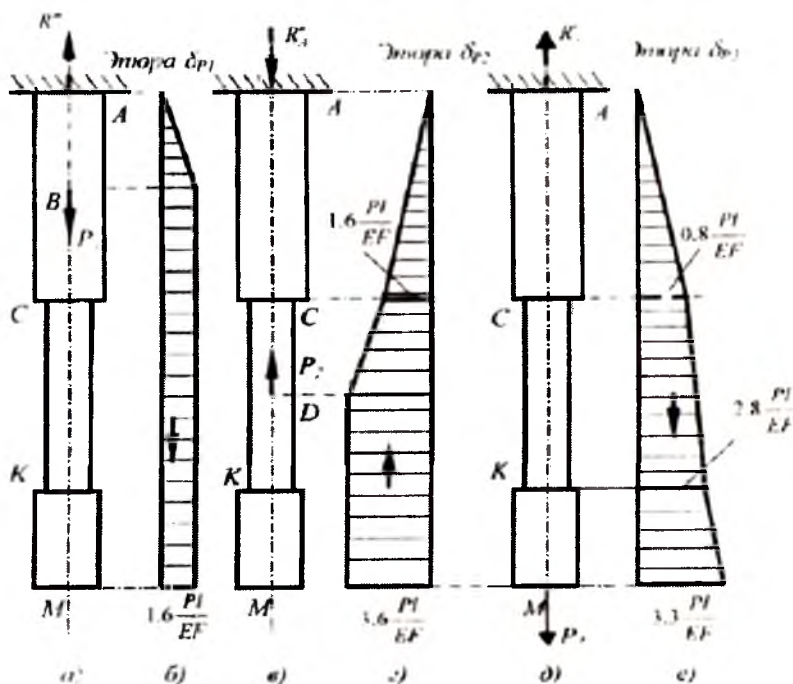


Рис. 1.3.

Задача 1.2. Статически неопределимым ступенчатым стержням длиной ступенек  $AB=a$ ,  $BC=b$ ,  $CD=c$  и площадью поперечных сечений  $F$  и  $2F$  (см. Рис. 1.4) приложены центральные силы  $P_1$  и  $P_2$ . Построить эпюры продольных усилий, нормальных напряжений и перемещения поперечных сечений стержня. Данные взять из таблицы 1.2. ( $E=2 \cdot 10^{11} \frac{H}{м^2}$ ,  $[\sigma]=1,6 \cdot 10^8 \frac{H}{м^2}$ ).

## Рисунки задачи 1.2.

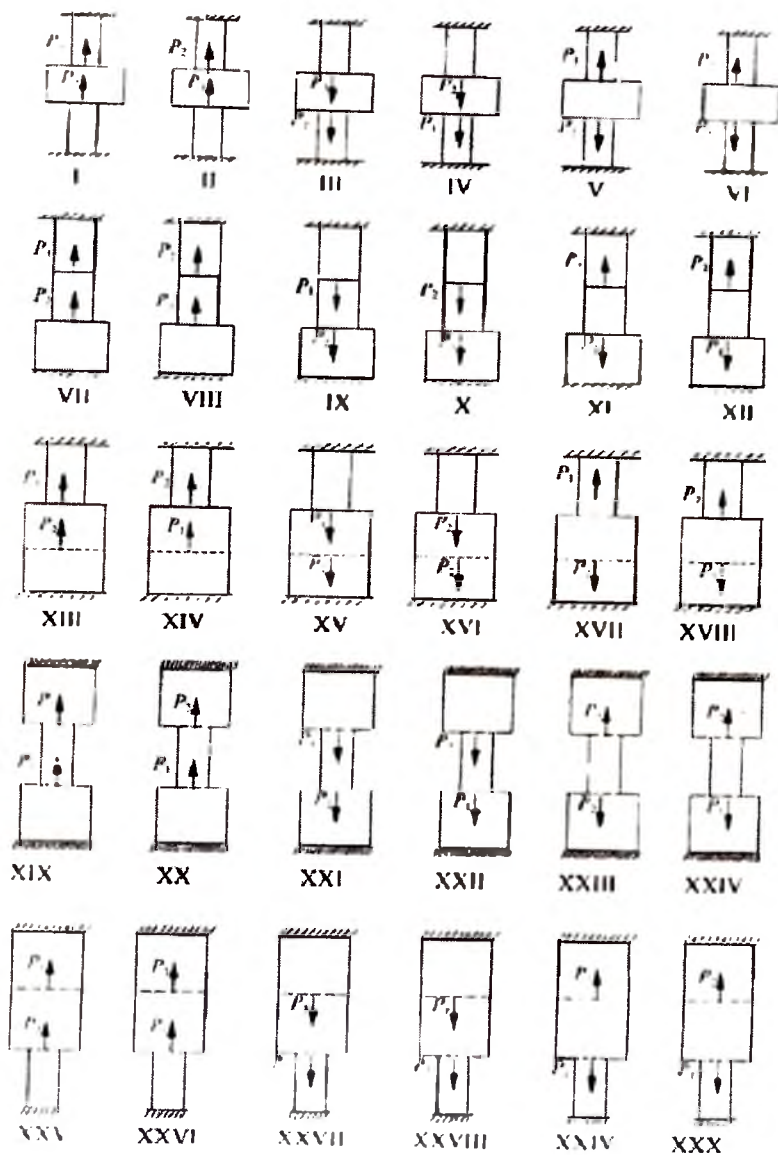


Таблица 1.2.

№	a	b	c	104F	$10^{-4}P_1$	$10^{-4}P_2$
	M			M <sup>2</sup>	H	
1	1.10	1.15	1.16	21	1.0	1.5
2	1.20	1.25	1.26	22	2.0	2.5
3	1.30	1.35	1.36	23	3.0	3.5
4	1.40	1.45	1.46	24	4.0	4.5
5	1.50	1.55	1.56	25	5.0	5.5
6	1.60	1.65	1.66	26	6.0	6.5
7	1.70	1.75	1.76	27	7.0	7.5
8	1.80	1.85	1.86	28	8.0	8.5
9	1.90	1.95	1.96	29	9.0	9.5
10	1.25	1.15	1.10	21	1.0	1.5
11	1.35	1.25	1.20	22	2.0	2.5
12	1.45	1.35	1.30	23	3.0	3.5
13	1.55	1.45	1.46	24	4.0	4.5
14	1.65	1.55	1.56	25	5.0	5.5
15	1.75	1.65	1.66	26	6.0	6.5
16	1.85	1.75	1.76	27	7.0	7.5
17	1.95	1.85	1.86	28	8.0	8.5
18	2.10	2.15	2.10	39	9.0	9.5
19	2.20	2.25	2.20	38	8.0	8.5
20	2.30	2.35	2.30	37	7.0	7.5
21	2.40	2.45	2.40	36	6.0	6.5
22	2.50	2.55	2.50	35	5.0	5.5
23	2.60	2.65	2.60	34	4.0	4.5
24	2.70	2.75	2.70	33	3.0	3.5
25	2.80	2.85	2.80	32	2.0	2.5
26	2.15	2.25	2.35	42	2.0	2.5
27	2.25	2.35	2.45	43	3.0	3.5
28	2.35	2.45	2.55	44	4.0	4.5
29	2.45	2.55	2.65	45	5.0	5.5
30	2.55	2.65	2.75	46	6.0	6.5



Указания к решению задачи 1.2.

А. Дано: рис. 1.4;  $F=20\text{см}^2$ ;  $a=1.10\text{м}$ ;  $b=0.5\text{м}$ ;  $c=2.20\text{м}$ ;

$P_1=4 \cdot 10^4\text{Н}$ ;  $P_2=6 \cdot 10^4\text{Н}$ ;  $P_1=4 \cdot 10^6\text{Н}$ .

### Решение

1) Активные и реактивные силы, действующие на стержень, расположены на центральной оси. Поэтому задача является один раз статически неопределимой. Для решения необходимо составить одно уравнение перемещения (деформации). Расчетную схему составим следующим образом:

- закрепление в нижнем конце стержня убираем;
- действия закрепления в нижнем конце стержня заменяем неизвестной реактивной силой  $R_D$ , в результате получится расчетная.

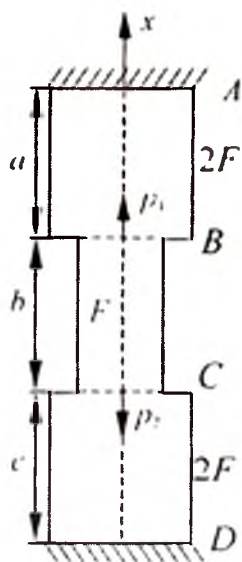


Рис 1.4

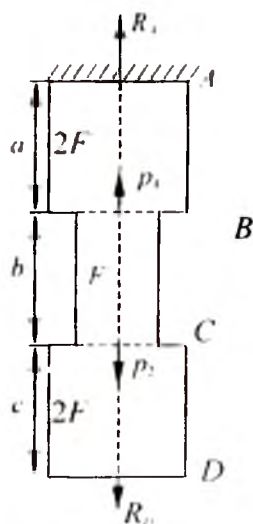


Рис 1.5

2) Составим уравнение равновесия статики:

$$\sum X=0, \quad R_A+P_1-P_2-R_D=0. \quad (a)$$

В данном уравнении имеются две неизвестные реактивные силы  $R_A$  и  $R_D$ .

3) Напишем выражения для продольных сил, нормальные напряжения и абсолютных удлинений:

- на участке CD

$$N_{CD}=R_D, \sigma_{CD}=\frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{R_D}{2F}, \Delta l_{CD} = \frac{N_{CD}CD}{EF_{CD}}; \quad (б)$$

- на участке BC

$$N_{BC}=P_2+R_D, \sigma_{BC}=\frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{R_2+R_D}{F}, \Delta l_{BC} = \frac{N_{BC}BC}{EF_{BC}}; \quad (в)$$

- на участке AB

$$N_{AB}=-P_1+P_2+R_D, \sigma_{AB}=\frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{P_1+P_2+R_D}{2F},$$

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB}AB}{EF_{AB}} \quad (г)$$

4) Перемещения сечений А, В, С, D стержня определяются из выражения:

- сечение А жестко закреплено, поэтому

$$\delta_A=\delta_A+\Delta l_{AB}=\delta_A+\frac{N_{AB} \cdot AB}{EF_{AB}}$$



$$= \delta_A + \frac{(\bar{n}P_1 | P_2 | R_D)a}{2EF} = \frac{(\bar{n}P_1 | P_2 | R_D)a}{2EF};$$

- перемещение сечения С

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_{DC} = \delta_C + \frac{N_{DC} \cdot DC}{EF_{DC}} = \delta_C + \frac{(P_2 | R_D)}{2EF};$$

- перемещение сечения D

$$\delta_D = \delta_C + \frac{(P_2 | R_D)c}{2EF} = \frac{(\bar{n}P_1 | P_2 | R_D)a}{3EF} + \frac{(P_2 | R_B)b}{EF} + \frac{(P_2 | R_B)c}{EF} \quad (д)$$

Выражение называется уравнением перемещения и служит для определения неизвестной реактивной силы  $R_B$ . Правая часть данного уравнения равно нулю, так как нижний конец стержня жестко закреплен, то есть:

$$\delta_D = \delta_C + \frac{(p_1 | R_D)}{2EF} = \frac{(\bar{n}p_1 | p_2 | R_D)a}{2EF} + \frac{(p_2 | R_D)b}{EF} + \frac{R_D c}{2EF} = 0$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$A(P_2 - P_1) + R_D a + 2bP_2 + 2R_D b + R_D c = 0$$

или

$$R_D(a + 2b + c) = -a(P_2 - P_1) - 2bP_2 = 0.$$

Следовательно.

$$R_D = -\frac{a(P_2 \mp P_1) + 2bP_2}{a + 2b + c}$$

Ответ:  $\delta_A = \delta_B = \delta_D = 0$ ,  $\delta_C = 5 \cdot 10^{-7}$  м.

Б. Определить площадь поперечного сечения  $E$  чугунного стержня (рис. 1.6, а) из условия прочности.

$$\text{Дано: рис. 1.6, а; } [\delta_p] = 33 \frac{H}{\text{мм}^2}; \quad [\delta_c] = 90 \frac{H}{\text{мм}^2};$$

*Решение.* Отбросим связи и заменим их действие на стержень реакциями  $R_B$  и  $R_C$ . Силы, действующие на стержень, показаны на рис. 1.6. б. Получается система сил, направленных на одной прямой. В этом случае статика дает одно уравнение равновесия, а именно:

$$\Sigma Z = 0, \quad R_B + R_C - 2P - P = 0.$$

Получается одно уравнение с двумя неизвестными, следовательно, задача один раз статически неопределяемая.

Для составления уравнения перемещений можно использовать одно из следующих условий: перемещение сечения В  $\delta_B = 0$ , либо перемещение сечения С  $\delta_C = 0$  (сечения В и С жестко закреплены).

В рассматриваемом примере составления уравнения перемещений используем условие  $\delta_C = 0$ . Для этого отбросим «лишнее» закрепление и заменим его действие на стержень реакцией  $R_C$ . В результате получается стержень, закрепленный одним концом (статически определимый стержень) и нагруженный, кроме заданных сил  $P$  и  $2P$  неизвестной пока силой  $R_C$  (рис. 1.6). Применяя принцип независимости действия сил, представим уравнения перемещений в виде:

$$\delta_C = \delta_{C(2P)} + \delta_{C(P)} + \delta_{C(RC)} = 0,$$

то есть перемещение от действий всех сил равно алгебраической сумме перемещений от действия каждой силы в отдельности:

$$\delta_{C(2P)} = -\frac{2P \cdot 2a}{EF} = -\frac{4Pa}{EF} \text{ - укорочение участка ВК;}$$

$$\delta_{C(P)} = -\frac{P \cdot 3a}{E \cdot 1.6F} = -3.87 \frac{4Pa}{EF} \text{ - сумма укорочений}$$

участков ВК и КЛ,

$$\delta_{C(RC)} = \frac{R_c \cdot a}{E \cdot 1.2F} + \frac{R_c \cdot 3a}{E \cdot 1.6F} + \frac{R_c \cdot 2a}{EF} = 4.7 \frac{Pa}{EF} \text{ -}$$

Сумма укорочений участков ВК, КЛ, LC.

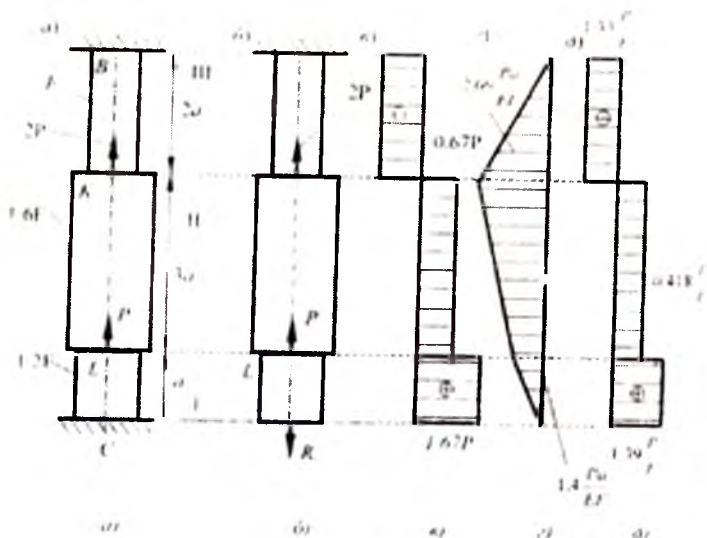


Рис. 1.6.

Подчеркнем, что определяя перемещение сечения С от каждой силы в отдельности, предполагаем, что она действует только одна, конечно, соответствующей ей реакцией в закреплении В, а остальные силы в это время отсутствуют.

Подставив найденные значения  $\delta_{C(2P)}$ ,  $\delta_{C(P)}$ ,  $\delta_{C(R_C)}$  в уравнение перемещений, получим

$$-4 \frac{Pa}{EF} - 3,87 \frac{Pa}{EF} + 4,7 \frac{R_C a}{EF} = 0,$$

откуда  $R_C = 1,67 P$ .

Из уравнения равновесия  $R_B + R_C = 3P$  находим  $R_B = 1,33P$ .

Реакции получаются положительными. Это указывает на то, что выбранные направления реакций соответствует действительным направлениям.

На рис. 1.6, д представлена эпюра продольных сил.

Эпюру перемещений строим, начиная с левого конца стержня; при построении используем эпюру N. Построение эпюры перемещений служит в некоторой степени для контроля правильности решения задачи. Действительно, начиная строить эпюру от левого закрепленного конца и получая в сечении С ординату эпюры, равную нулю, тем самым имеем подтверждение правильности определения реакций. Вычисления характерных ординат эпюры  $\delta$  не приводим, ограничиваясь их указанием на чертеже (рис. 1.6, в).

Эпюры нормальных напряжений представлены на рис. 1.66, д. Читателю рекомендуется построить эпюру  $\sigma$  самостоятельно.

Как видно из эпюры  $\sigma$ , участки II и III испытывают значительную недогрузку. Но уменьшить площади поперечных сечений этих участков нельзя, так как в статически неопределимых стержнях распределение сил зави-



сит от соотношения жесткости участков и изменение площади приведет к необходимости выполнения всего расчета заново – при других жесткостях участков получат другие опорные реакции.

Наибольшие напряжения растяжения возникают в поперечных сечениях участка I стержня.

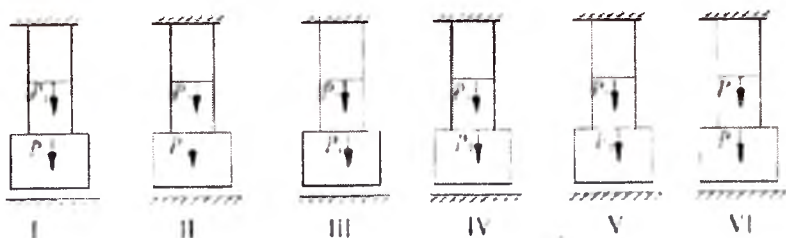
Условие прочности:

$$\max \sigma_p = 1,39 \frac{P}{F} \leq [\sigma_p],$$

$$F \geq 1,39 \frac{P}{[\sigma_p]} = 1,39 \frac{40 \cdot 10^3}{33} = 1,69 \cdot 10^3 \text{ мм}^2.$$

Задача 1.3. Расстояния между нижними концами ступенчатых стержней и недеформируемой горизонтальной плоскостью равны  $\Delta = 5 \cdot 10^{-5}$  м. Под действием центральных сил нижние концы стержней упираются к горизонтальной плоскости и в результате образуются статически неопределимые задачи. Построить эпюры продольных усилий, нормальных напряжений и перемещения поперечных сечений стержня. Данные взять из таблицы 1.3. ( $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ,  $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ ).

Рисунки задачи 1.3.



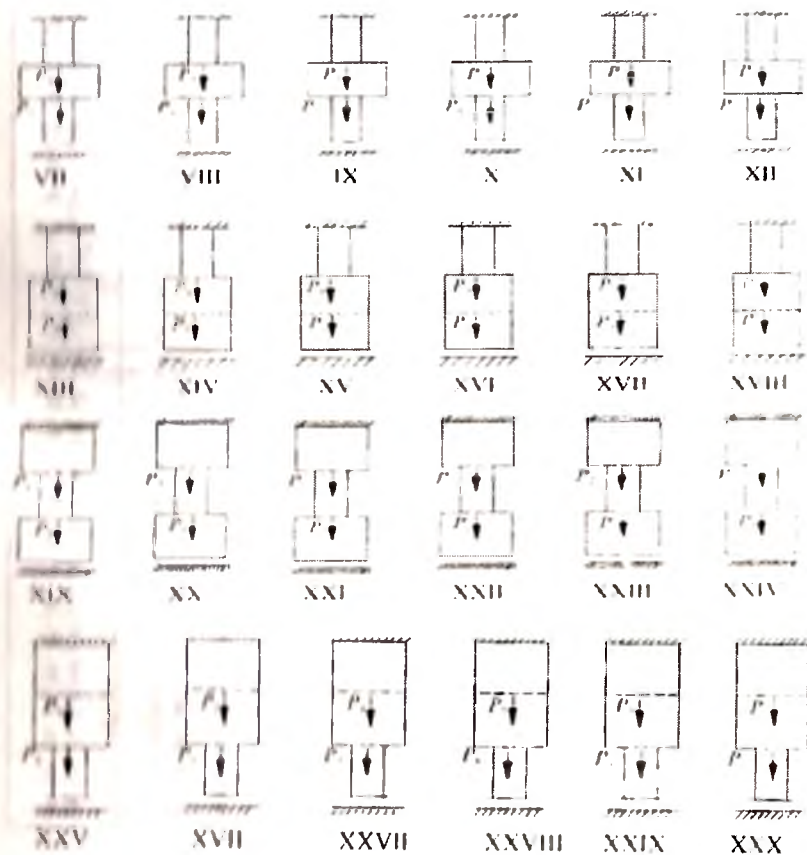


Таблица 1.3.

№	a	b	c	$104F^2$	$10^{-4}P_1$	$10^{-4}P_2$	$10^{-4}P_3$
				$M^2$	H		
1	1.40	2.15	2.16	21	1.0	1.5	1.6
2	1.50	2.25	2.26	22	2.0	2.5	2.6
3	1.60	2.35	2.36	23	3.0	3.5	3.6
4	1.70	2.45	2.46	24	4.0	4.5	4.6
5	1.80	2.55	2.56	25	5.0	5.5	5.6
6	1.90	2.65	2.66	26	6.0	6.5	6.6

7	1.20	2.75	2.76	27	7.0	7.5	7.6
8	1.30	2.85	2.86	28	8.0	8.5	8.6
9	1.40	2.95	2.96	29	9.0	9.5	9.6
10	1.55	2.15	2.10	21	1.0	1.5	1.6
11	1.65	2.25	2.20	22	2.0	2.5	2.6
12	1.75	2.35	2.30	23	3.0	3.5	3.6
13	1.85	2.45	2.46	24	4.0	4.5	4.6
14	1.95	2.55	2.56	25	5.0	5.5	5.6
15	1.25	2.65	2.66	26	6.0	6.5	6.6
16	1.35	2.75	0.76	27	7.0	7.5	7.6
17	1.45	2.85	0.86	28	8.0	8.5	8.6
18	2.50	1.15	0.10	39	9.0	9.5	9.6
19	2.60	1.25	0.20	38	8.0	8.5	8.6
20	2.70	1.35	0.30	37	7.0	7.5	7.6
21	2.80	1.45	0.40	36	6.0	6.5	6.6
22	2.90	1.55	0.50	35	5.0	5.5	5.6
23	1.60	1.65	0.60	34	4.0	4.5	4.6
24	1.70	1.75	0.70	33	3.0	3.5	3.6
25	1.80	0.85	0.80	32	2.0	2.5	2.6
26	1.15	0.25	0.35	42	2.0	2.5	2.6
27	1.25	0.35	0.45	43	3.0	3.5	3.6
28	1.35	0.45	0.55	44	4.0	4.5	4.6
29	1.45	0.55	0.65	45	5.0	5.5	5.6
30	1.55	0.65	0.75	46	6.0	6.5	6.6

Указания к решению задачи 1.3.

А. Дано: рис. 1.7, а.

### *Решение*

Под действием растягивающей силы  $P$  силы нижнего конца стержня упирается к горизонтальной плоскости. В результате образуется один раз статически неопределяемый стержень (рис. 1.7, б). Расчетная схема задачи приведена на рис. 1.7, в.

Выражения для продольных усилий, нормальных напряжений и абсолютных удлинений, возникающих в сечениях АВ, ВС, СД имеют вид:

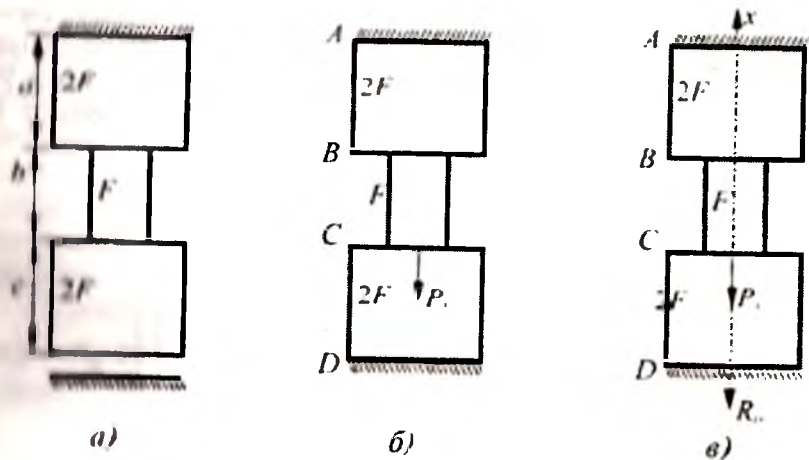


Рис. 1.7.

- в сечении CD

$$N_{CD} = R_D, \quad \sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{R_D}{2F}, \quad \Delta_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot CD}{EF_{CD}} = \frac{R_D \cdot c}{2EF};$$

- в сечении BC

$$N_{BC} = P_1 + R_D,$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{F_{BC}} = \frac{P_1 + R_D}{F}, \quad \Delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot BC}{EF_{BC}} = \frac{(P_1 + R_D) \cdot c}{EF};$$

$$N_{AB} = P_1 + R_D, \quad \sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{P_1 + R_D}{2F},$$

$$\Delta_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot AB}{EF_{AB}} = \frac{(P_1 + R_D) \cdot a}{2EF};$$

Б. Для стержня (рис. 1,8 а) построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений, если до нагружения его силами  $P_1$  и  $P_2$  между правым торцом и неподвижной опорой В имеется малый зазор  $\Delta = 0,5 \frac{Pa}{EF}$ .

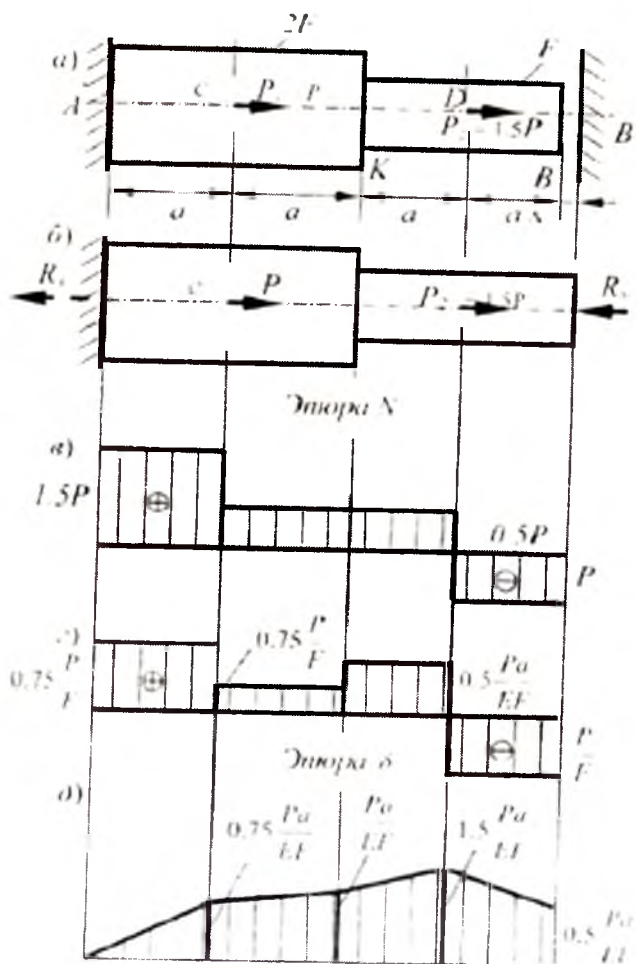


Рис. 1.8.

**Решение.** Если при нагружении стержня силами  $P_1$  и  $P_2$  перемещение правого торца бруса меньше зазора, то наличие правой опоры  $\sigma_B$  никакой роли не играет и, следовательно, задача статически определима. Если при нагружении стержня заданными силами зазор не только закрывается, но и возникает сила взаимодействия между торцом бруса и опорой В, то задача статически неопределима.

Предполагая, что правая опора отсутствует, найдем перемещение сечения В  $\sigma_B'$ . Применив принцип не зависимости действия сил,

$$\sigma_B' = \sigma_B' + \sigma_B''$$

где  $\sigma_B'$  - перемещение сечения В от действия только одной силы  $P_1 = P$ . Сила  $P_1$  растягивает часть АС стержня, а все сечения, принадлежащие части СВ стержня, перемещаются на одну и ту же величину, равную удлинению  $\Delta_{AC}$ :

$$\sigma_B' = \frac{Pa}{E \cdot 2F} = 0,5 \frac{Pa}{EF},$$

где  $\sigma_B''$  - перемещение сечения В от действия только одной силы  $P_2 = 1,5P$ . Сила  $P_2$  растягивает часть стержня AD; при этом сечения, принадлежащие части ВD стержня, перемещаются и ту же величину, равную удлинению  $\Delta_{AD}$ :

$$\sigma_B'' = \frac{1,5Pa}{EF} = \frac{1,5P \cdot 2a}{E2F} = 3 \frac{Pa}{EF}$$

$$\text{Следовательно, } \sigma_B = 0,5 \frac{Pa}{EF} + 3 \frac{Pa}{EF} = 3,5 \frac{Pa}{EF}.$$

Так как  $\sigma_B > \Delta$ , следовательно, задача статически неопределима. Силы действующие на стержень, показаны на рис. 1.8. б. Уравнение равновесия имеет вид:

$$P + 1,5P - (R_A + R_B) = 0, \quad R_A + R_B = 2,5P.$$

Составим уравнение перемещений. Для этого, считая попережнему, что правая опора отсутствует, заменим ее действие на стержень неизвестной пока силой  $R_B$  (рис. 1.8 б). Известно, что правый торец стержня может перемещаться только на величину  $\Delta$ , эта мысль выражена уравнением перемещения, то есть  $\sigma_B = \Delta$ .

Применив принцип независимости действия сил, перепишем уравнение перемещения в виде

$$\sigma_B = \sigma_B + \sigma_{B(R_B)} = \Delta.$$

Значение  $\sigma_B$  определено выше

$$\sigma_B = 3,5 \frac{Pa}{EF}.$$

Перемещение сечения В от действия силы  $R_B$

$$\sigma_{B(R_B)} = \Delta_{AB} = - \frac{R_B 2a}{EF} - \frac{R_B 2a}{E \cdot 2F} = -3 \frac{R_B a}{EF}.$$

Подставив значения  $\sigma_B$  и  $\sigma_{B(R_B)}$  в уравнение перемещений и учитывая, что

$$\Delta = 0,5 \frac{Pa}{EF}$$

получим

$$3,5 \frac{Pa}{EF} \approx 3 \frac{R_B 2a}{EF} \approx 0,5 \frac{Pa}{EF}$$

откуда  $R_B = P$ . Тогда

$$R_A = 2,5P - P = 1,5P$$

Эпюры  $N$  и  $\sigma$  представлены на рис. 1.8 в, г.

Строим эпюру перемещений:

$$\delta_A = 0, \quad \delta_C = \frac{1,5Pa}{E \cdot 2F} \approx 1,75 \frac{Pa}{EF}$$

$$\delta_K = 0,75 \frac{Pa}{EF} + \frac{0,5Pa}{E \cdot 2F} \approx \frac{Pa}{EF}; \quad \delta_D = \frac{Pa}{EF} + \frac{0,5Pa}{EF} \approx 1,5 \frac{Pa}{EF}$$

$$\delta_B = 1,5 \frac{Pa}{EF} \approx \frac{Pa}{EF} \approx 0,5 \frac{Pa}{EF} \approx \Delta;$$

Перемещение сечения В получается равным  $\Delta$ , так как это условие ( $\delta_B = \Delta$ ) было положено в основу раскрытия статической неопределенности. Эпюра  $\delta$  представлена на рис. 1.8, д.

Уравнение перемещения напишем из следующего условия. Перемещение  $\delta_D$  нижнего конца стержня равно заранее заданному значению  $\Delta$ , то есть  $\delta_D = \Delta$ .

Правая часть этого выражения равно



$$\delta_D = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{(P_1 + R_D)a}{2EF} + \frac{(P_1 + R_D)b}{EF} + \frac{R_D c}{2EF}$$

Отсюда найдем

$$(P_1 + R_D)(a + 2b) + R_D c = 2EF\Delta$$

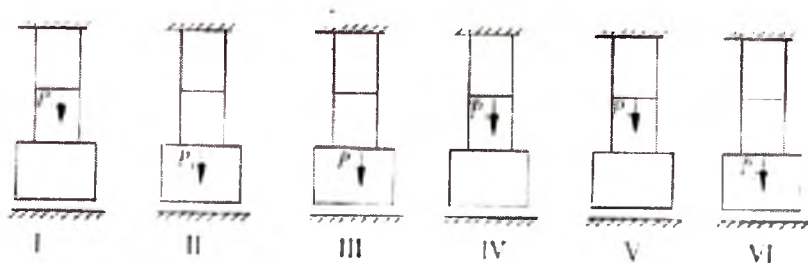
Данное уравнение служит для определения неизвестной реактивной силы  $R_D$ .

Задача 1.4. Расстояния между нижними концами ступенчатых стержней и недеформируемой горизонтальной плоскостью равны  $\Delta = 4 \cdot 10^{11}$  (см. Рис. 1.9, а). Под действием центральных растягивающих сил и в результате изменения температуры материала стержня на  $\Delta T_1 - T_0$  нижние концы упрутся к горизонтальной плоскости.

Построить эпюры продольных усилий, нормальных напряжений и перемещения поперечных сечений стержня. Данные взять из таблицы 1.4.

$$(E = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}, [\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2})$$

Рисунки задачи 1.4.





3	2.35	2.36	1.60	23	3.0	3.5	3.6	32
4	2.45	2.46	1.70	24	4.0	4.5	4.6	33
5	2.55	2.56	1.80	25	5.0	5.5	5.6	34
6	2.65	2.66	1.90	26	6.0	6.5	6.6	35
7	2.75	2.76	1.20	27	7.0	7.5	7.6	36
8	2.85	2.86	1.30	28	8.0	8.5	8.6	37
9	2.95	2.96	1.40	29	9.0	9.5	9.6	38
10	2.15	2.10	1.55	21	1.0	1.5	1.6	39
11	2.25	2.20	1.65	22	2.0	2.5	2.6	40
12	2.35	2.30	1.75	23	3.0	3.5	3.6	41
13	2.45	2.46	1.85	24	4.0	4.5	4.6	42
14	2.55	2.56	1.95	25	5.0	5.5	5.6	43
15	2.65	2.66	1.25	26	6.0	6.5	6.6	44
16	2.75	0.76	1.35	27	7.0	7.5	7.6	45
17	2.85	0.86	1.45	28	8.0	8.5	8.6	46
18	1.15	1.10	2.50	39	9.0	9.5	9.6	47
19	1.25	1.20	2.60	38	8.0	8.5	8.6	48
20	1.35	1.30	2.70	37	7.0	7.5	7.6	49
21	1.45	1.40	2.80	36	6.0	6.5	6.6	50
22	1.55	1.50	2.90	35	5.0	5.5	5.6	51
23	1.65	1.60	1.60	34	4.0	4.5	4.6	52
24	1.75	1.70	1.70	33	3.0	3.5	3.6	30
25	0.85	0.80	1.80	32	2.0	2.5	2.6	31
26	0.25	0.35	1.15	42	2.0	2.5	2.6	32
27	0.35	0.45	1.25	43	3.0	3.5	3.6	33
28	0.45	0.55	1.35	44	4.0	4.5	4.6	34
29	0.55	0.65	1.45	45	5.0	5.5	5.6	35
30	0.65	0.75	1.55	46	6.0	6.5	6.6	36

Указания к решению задачи 1.4.

Дано: Рис. 1.9, а;  $P=10^4$  Н;  $l_1=14$  м;  $F = 1100$  см<sup>2</sup>.

$[\sigma]=130 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ ;  $\Delta t^0=+50$  С<sup>0</sup> изменение температуры

*Решение*

1) Под действием силы  $P$  и в результате изменения температуры материала на  $\Delta T$  схема стержня принимает

вид, изображенный на рис. 1.9, б.

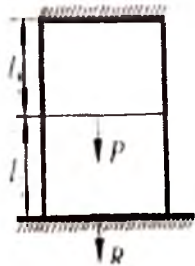
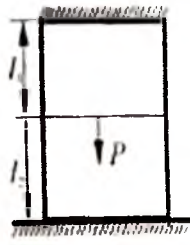
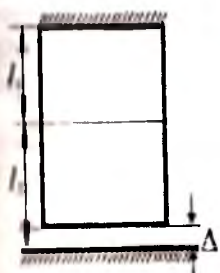


Рис. 1.9.

2) Основная расчетная схема приведена на рис. 1.9.

3) Уравнение равновесия статики имеет вид:

$$\sum X = 0, \text{ то есть } A - P + R_B = 0. \quad (a)$$

Напишем уравнение перемещения:

$$\Delta l_1 + \Delta l_p - \Delta l_{R_A} = 0, \quad (б)$$

где

$$\Delta l_1 = (l_1 + l_2) \Delta t, \quad \Delta l_p = \frac{Pl_1}{EF}, \quad \Delta l_{R_A} = \frac{Rl_1}{1.5EF} + \frac{Rl_2}{EF}$$

$\Delta = 125 \cdot 10^{-7}$  коэффициент линейного расширения материала стержня от температуры.

5) Найдем неизвестную реактивную силу. Для этого подставляем численные значения в полученные выражения:

$$\Delta l_p = \frac{Pl_1}{EF} = \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 11 \cdot 10^{-7}} = 0,18 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\Delta l_t = (l_1 - l_2) \Delta t \alpha = (1400 + 4000) \cdot 50 \cdot 125 \cdot 10^{-7} =$$

$$11 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\Delta l_R = \frac{Rl_2}{EF} + \frac{Rl_1}{1,5EF}, \quad \Delta l_p + \Delta l_t = \Delta l_{RA},$$

$$R_A = \frac{11 \cdot 43}{\frac{l_1}{1,5EF} + \frac{l_2}{EF}} = \frac{11 \cdot 43}{\frac{14 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1650} + \frac{4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 11}} = 189 \text{ кН.}$$

6) Вычисляем внутренние силы и нормальные напряжения

$$\Sigma X_1 = -N_1 + R_A = 0, \quad N_1 = R_A = 189 \text{ кН (сжатие),}$$

$$\Sigma X_2 = -N_2 - P + R_A = 0, \quad N_2 = R_A - P = 8,9 \text{ кН (сжатие),}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{18900}{1600} = 11,4 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{8960}{1100} = 8,094 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

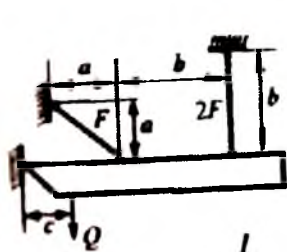
7) Проверяем условие прочности и определяем допустимое значение площади поперечного сечения стержня:

$$\sigma = \frac{N_1}{F} \leq [\sigma], \quad [F] \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{18900}{130} = 145 \cdot 10^6 \text{ м}^2$$

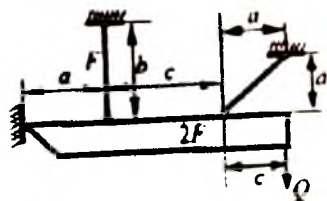
Задача 1.5. Одна точка абсолютно жесткого бруса закреплена шарнирной опорой. До момента приложения вертикальной силы Q брус при помощи шарнирной

опоры в двух стальных стержнях удерживается в горизонтальном положении. Найти продольные усилия и нормальные напряжения, возникающие в стержнях. Определить перемещения  $\sigma_Q$  нормальных сечений брусьев, куда приложены внешние силы  $Q$ . Данные взять из таблицы 1.5 ( $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}$ ,  $[\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2}$ ).

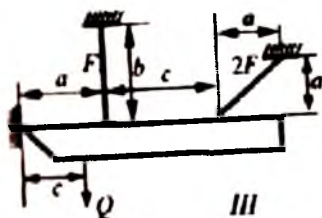
Рисунки задач 1.5-1.6.



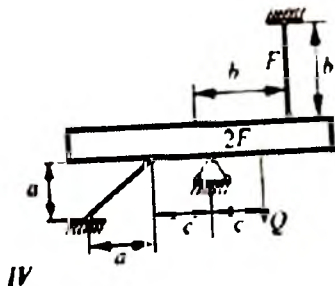
I



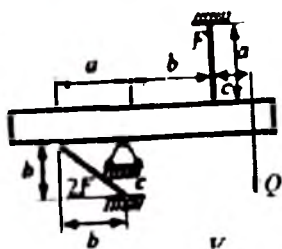
II



III



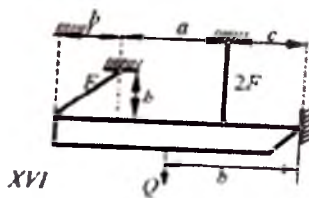
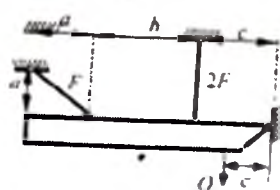
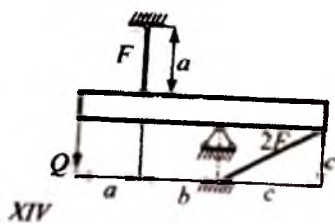
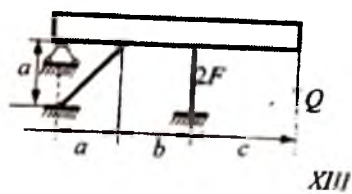
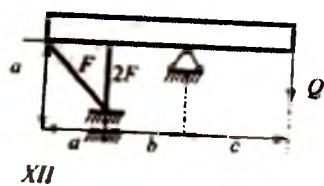
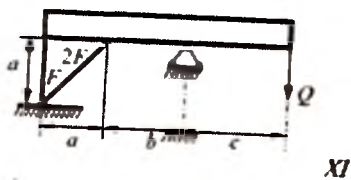
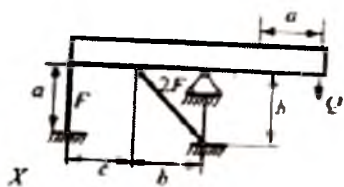
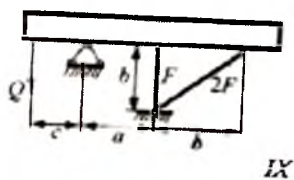
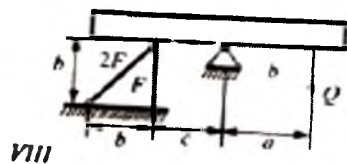
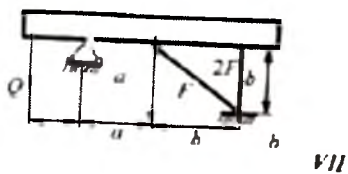
IV

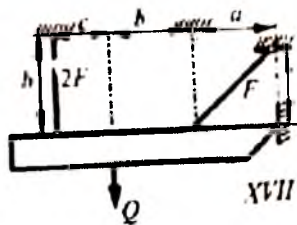


V

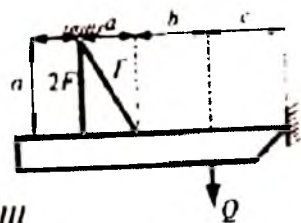


VI

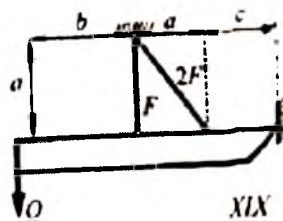




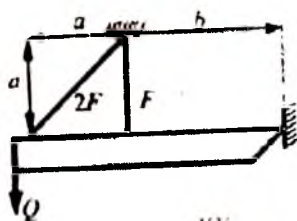
XVII



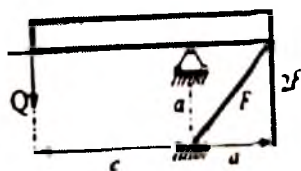
XVIII



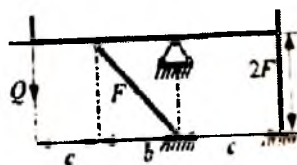
XIX



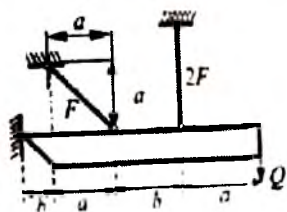
XX



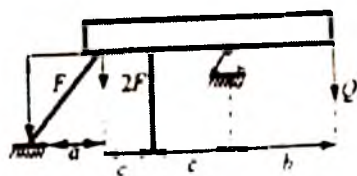
XXI



XXII

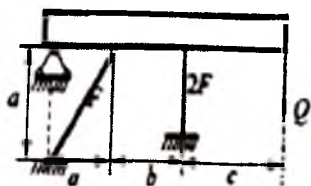


XXIII

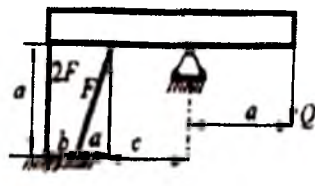


XXIV

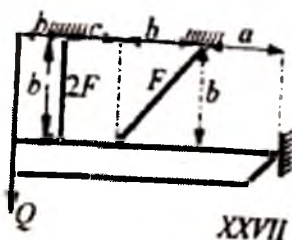




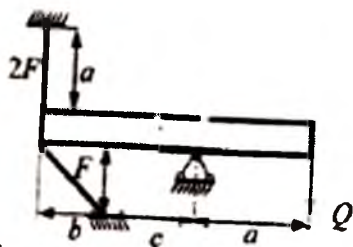
XXV



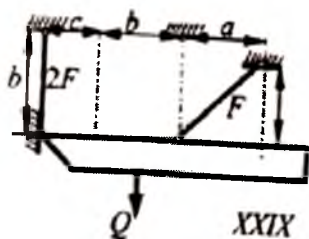
XXVI



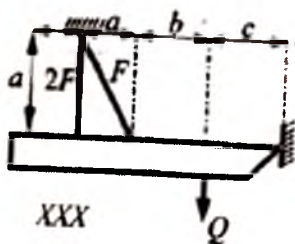
XXVII



XXVIII



XXIX



XXX

Таблица 1.5.

№	a	b	c	F	$\Delta T$	Q	P	13 <sup>3</sup> β
	м			$10^{-4} \text{M}^2$	град	кН	кН	
1	0.10	0.15	0.16	11	30	1.6	100	5
2	0.20	0.25	0.26	12	31	2.6	110	4
3	0.30	0.35	0.36	13	32	3.6	120	3
4	0.40	0.45	0.46	14	33	4.6	130	2
5	0.50	0.55	0.56	15	34	5.6	140	1
6	0.60	0.65	0.66	16	35	6.6	150	5

7	0.70	0.75	0.76	17	36	7.6	160	4
8	0.80	0.85	0.86	18	37	8.6	170	3
9	0.90	0.95	0.96	19	38	9.6	180	2
10	0.25	0.15	0.10	11	39	1.6	190	1
11	0.35	0.25	0.20	12	40	2.6	200	5
12	0.45	0.35	0.30	13	41	3.6	210	4
13	0.55	0.45	0.46	14	42	4.6	220	3
14	0.65	0.55	0.56	15	43	5.6	230	2
15	0.75	0.65	0.66	16	44	6.6	240	1
16	0.85	0.75	0.76	17	45	7.6	250	5
17	0.95	0.85	0.86	18	46	8.6	100	4
18	0.10	0.15	0.10	19	47	9.6	110	3
19	0.20	0.25	0.20	18	48	8.6	120	2
20	0.30	0.35	0.30	17	49	7.6	130	1
21	0.40	0.45	0.40	16	50	6.6	140	5
22	0.50	0.55	0.50	15	51	5.6	150	4
23	0.60	0.65	0.60	14	52	4.6	160	3
24	0.70	0.75	0.70	13	53	3.6	170	2
25	0.80	0.85	0.80	12	54	2.6	180	1
26	0.15	0.25	0.35	12	55	2.6	190	5
27	0.25	0.35	0.45	13	56	3.6	200	4
28	0.35	0.45	0.55	14	57	4.6	210	3
29	0.45	0.55	0.65	15	58	5.6	220	2
30	0.55	0.65	0.75	16	59	6.6	230	1

Указания к решению задачи 1.5.

А. Дано: Рис. 1,10;  $Q = 10^5 \text{ Н}$ ;  $F = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $A = 1 \text{ м}$ ;  
 $b = 2 \text{ м}$ ;

$$C = 3 \text{ м}; E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; [\sigma] = 1,6 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

*Решение.* Под действием силы  $Q$  происходит незначительное вращение бруса  $AB$  вокруг шарнирной опоры в точке  $A$ , изменения длины стержней и в результате брус принимает новое положение относительно гори-

горизонтальной плоскости. Сечение В бруса переходит в положение В' (рис. 1.11).

1) Принятые в данном случае направления неизвестных реактивных сил  $N_1, N_2$  указаны в расчетных схемах (рис. 1.11-1.12).

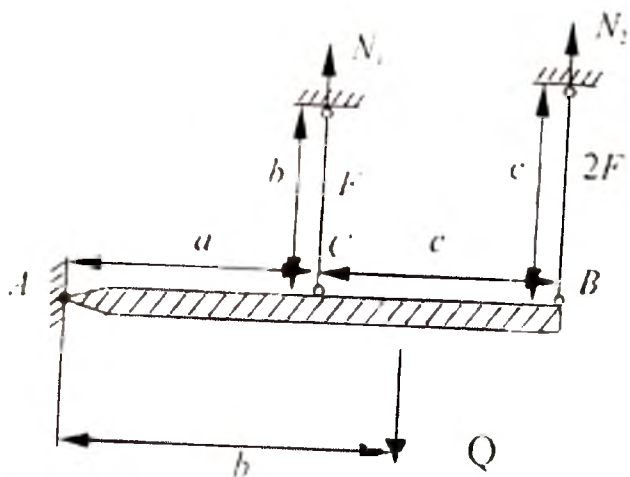


Рис. 1.10.

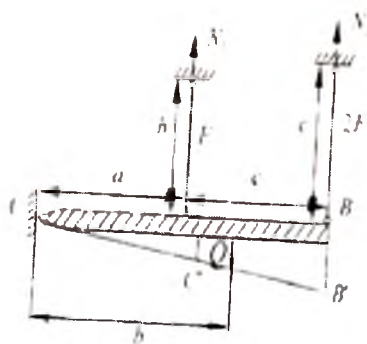


Рис. 1.11.

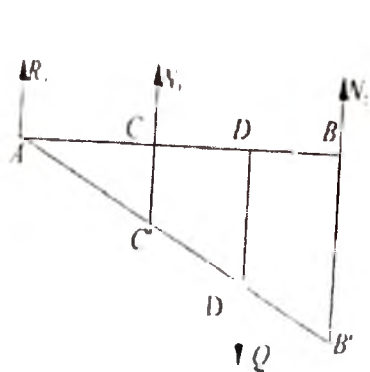


Рис. 1.12.

2) Составим уравнение равновесия статики

$$\sum M_A = 0. \quad N_1 a - Qb + N_2 (a+c) = 0.$$

В данном уравнении участвуют две внутренние неизвестные силы  $N_1$ ,  $N_2$ . Кроме того, реактивная сила  $N_A$ , возникающая на шарнирной опоре тоже является неизвестной, то есть, в задачу входят три неизвестные силы.

Задача является один раз статически неопределимой, так как все активные и реактивные расположены в одной плоскости и не пересекаются.

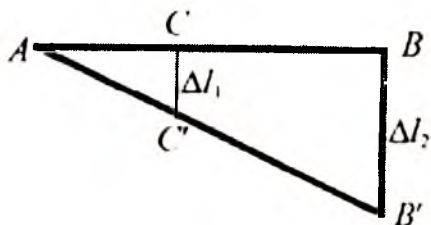


Рис. 1.13.

3) Составляем уравнение перемещения (рис. 1.13):

Используя условия подобия треугольников  $\Delta ACC'$  и  $\Delta ABB'$ , напомним следующую пропорцию

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{BB'}{AB}. \quad (a)$$

Здесь  $CC' = \Delta l_1$ ,  $BB' = \Delta l_2$ ,  $AC = a$ ,  $AB = a+c$  согласно условиям задачи.

Следовательно, равенство (2) приводится к виду

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{a + c}. \quad (2')$$

Данное равенство является уравнением перемещения.

4) Далее, используя закон Гука  $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$  последнее уравнение напишем в виде

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

Здесь  $l_1 = b$ ,  $l_2 = c$ ,  $F_1 = F$ ,  $F_2 = 2F$ ,  $E_1 = E_2 = E$ , поэтому

$$\frac{N_1 b}{a} = \frac{N_2 c}{2(a + c)}.$$

Отсюда найдем

$$2N_1 = \frac{3N_2}{8}, \text{ или } N_1 = \frac{3N_2}{16} = 0,18N_2. \quad (3)$$

5) Уравнения (1) и (3) образуют замкнутую систему

$$\begin{cases} aN_1 + bQ + N_2(a + c) = 0, \\ N_1 = 0,18N_2. \end{cases} \quad (4')$$

Данная система имеет решение

$$N_1 = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Н}, \quad N_2 = 0,9 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

6) Найдем нормальные напряжения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{900}{5} = 18 \cdot 10^6 \frac{H}{m^2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{4800}{10} = 48 \cdot 10^6 \frac{H}{m^2};$$

7) Определяем абсолютные удлинения стержней

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_1 b}{EF} = \frac{4,8 \cdot 10^4 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^4} = \frac{0,6}{625} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_2 c}{2EF} = \frac{0,69 \cdot 10^4 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^4} = \frac{267}{2 \cdot 10^4} \text{ м}.$$

8) Перемещение сечения, куда приложена сила, определяется из условия подобия треугольников  $ACC'$  и  $ADD'$ . Из рис. 1.12 найдем

$$\frac{DD'}{DA} = \frac{CC'}{AC},$$

Здесь  $AD = b$ ,  $AC = a$ ,  $CC' = \Delta l_1$ .

Следовательно,

$$DD' = \frac{ADCC'}{AC} = \frac{b\Delta l_1}{a} = \frac{2 \cdot \frac{0,6}{625}}{1} = \frac{1,2}{625} = 192 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

9) Допустимые значения площади поперечных сечений стержней определяются из следующих условий

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]}, \quad F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]}.$$

В. Дано: рис 1.14;

$$Q = 12 \cdot 10^4 \text{ Н}; F = 6 \cdot 10^4 \text{ м}^2; a = 2, \text{ м}; \\ B = 3,0; c = 1,0 \text{ м}.$$

1) Обозначим через  $N_1$  и  $N_2$  продольные силы, возникающие в стержня АВ и CD соответственно. Принятие направления векторов этих сил указаны в схеме расчета (рис.1.15).

2) Уравнение статики принимает вид

$$\sum M_0(P_i) = -N_1(b+c) - N_2 b \sin 45^\circ + aQ = 0. \quad (1)$$

В это уравнения входит неизвестные силы  $N_1$  и  $N_2$ , задача один раз статически неопределенна.

3) Дополнительные уравнения получаем, используя условия подобия треугольников  $\Delta AOA'$  и  $\Delta COC'$ :

$$\frac{AA'}{CC'} = \frac{AO}{CO} \text{ или } \frac{AA'}{CC'} = \frac{b+c}{b}. \quad (2)$$

4) При помощи закона Гука получаем следующие выражения

$$\Delta_{AE} = AA' = \frac{N_1 a}{EF}.$$

Далее

$$CC_1 = \frac{CK}{\sin 45^\circ} = \frac{\Delta_{CD}}{\sin 45^\circ} = \frac{N_2 \sqrt{2b^2}}{2EF \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{N_2 \sqrt{2b}}{\sqrt{2} \cdot FE} = \frac{N_2 b}{EF}.$$

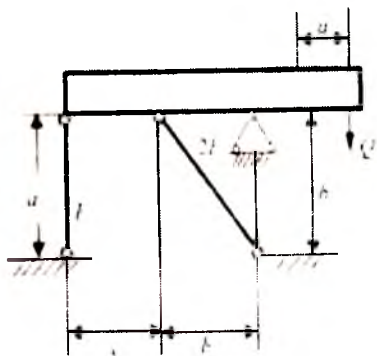


Рис. 1.14.

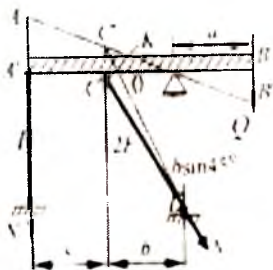


Рис. 1.15.

Подставляя полученные выражения в равенство (2), будем иметь

$$\frac{N_1 a}{EF} + \frac{N_2 b}{EF} = \frac{b+c}{b} = 1 \frac{1}{3}$$

Отсюда

$$\frac{N_1 a}{N_2 b} = \frac{1}{3}, \text{ или } \frac{N_1}{N_2} = 2. \quad (3)$$

5) Полученные выражения (1) и (3) образуют замкнутую систему относительно неизвестных сил  $N_1$  и  $N_2$

$$N_1 = 2N_2, \quad -N_1(b+c) - N_2 b \sin 45^\circ + aQ = 0.$$

Отсюда найдем:

$$-2N_2(b+c) - N_2 b \sin 45^\circ + aQ = 0$$

или



В. Дано: рис. 1.14;

$$Q = 12 \cdot 10^4 \text{ Н}; \quad F = 6 \cdot 10^4 \text{ м}^2; \quad a = 2, \text{ м}; \\ B = 3,0; \quad c = 1,0 \text{ м}.$$

1) Обозначим через  $N_1$  и  $N_2$  продольные силы, возникающие в стержнях АВ и СD соответственно. Принятые направления векторов этих сил указаны в схеме расчета (рис. 1.15).

2) Уравнение статики принимает вид

$$\sum M_0(P_i) = -N_1(b+c) - N_2 b \sin 45^\circ + aQ = 0. \quad (1)$$

В это уравнения входят неизвестные силы  $N_1$  и  $N_2$ . Задача один раз статически неопределенна.

3) Дополнительные уравнения получаем, используя условия подобия треугольников  $\Delta AOA'$  и  $\Delta COS'$ :

$$\frac{AA'}{CC'} = \frac{AO}{CO} \quad \text{или} \quad \frac{AA'}{CC'} = \frac{b+c}{b}. \quad (2)$$

4) При помощи закона Гука получаем следующие выражения

$$\Delta l_{AE} = AA' = \frac{N_1 a}{EF}.$$

Далее

$$CC_1 = \frac{CK}{\sin 45^\circ} = \frac{\Delta l_{CD}}{\sin 45^\circ} = \frac{N_2 \sqrt{2b^2}}{2EF \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{N_2 \sqrt{2b}}{\sqrt{2} \cdot FE} = \frac{N_2 b}{EF}.$$

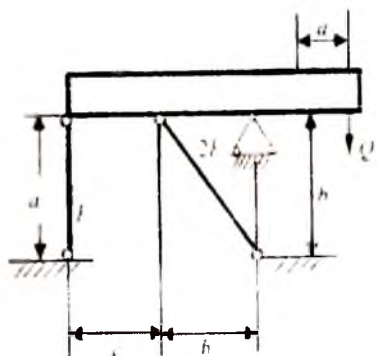


Рис. 1.14.

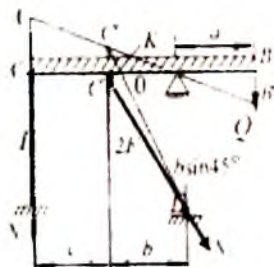


Рис. 1.15.

Подставляя полученные выражения в равенство (2), будем иметь

$$\frac{N_1 a}{1f} = \frac{N_2 b}{EF} = \frac{b+c}{b} = 1 \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$\frac{N_1 a}{N_2 b} = \frac{1}{3}, \text{ или } \frac{N_1}{N_2} = 2. \quad (3)$$

5) Полученные выражения (1) и (3) образуют замкнутую систему относительно неизвестных сил  $N_1$  и  $N_2$

$$N_1 = 2N_2. \quad -N_1(b+c) - N_2 b \sin 45^\circ + aQ = 0.$$

Отсюда найдем:

$$-2N_2(b+c) - N_2 b \sin 45^\circ + aQ = 0$$

или

ИЛИ

$$N_2 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

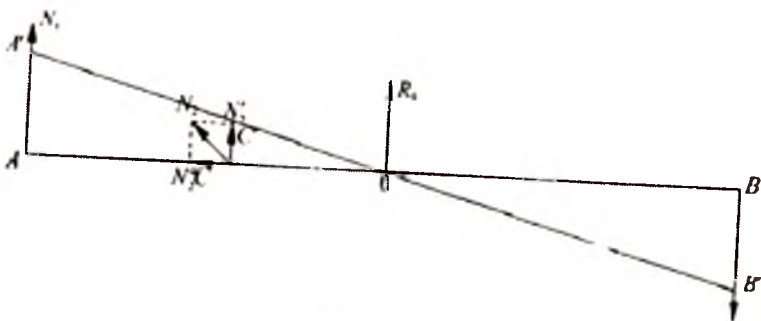


Рис. 1.16.

Далее, из уравнения (3) найдем

$$N_1 = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Н.}$$

б) Нормальные напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержней, определяются из следующих условий:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{48 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{24 \cdot 10^3}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

7) Перемещение сечения бруса, куда приложена сила Q определяются из условия подобия треугольников  $\Delta OAA'$ ,  $\Delta OBB'$  (рис. 1.16).

8) Допустимые значения площади поперечных сеч-

ний стержней определяются из следующих условий:

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]}, \quad F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]}$$

Задача 1.6. Абсолютно жесткий брус при помощи неподвижного шарнира и двух стальных стержней с площадью поперечных сечений удерживается в горизонтальном положении, и первоначальные усилия, возникающие под действием (см. рис. задачи 1.5) определить усилия, возникающие под действием внешней силы  $Q$  и в результате изменения температуры материала стержня с площадью поперечного сечения  $2F$  на  $\Delta T$ . Данные взять из табл. 1.5 ( $E=2 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}$ ,  $[\sigma]=1,6 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2}$ ).

Указания к решению задачи 1.6.

Дано: Рис. 1.17;  $\Delta T = 10^0 C$ ;  $d_{BH} = 0,05$  м;  $d_{DC} = 0,04$  м;  $l=12$  м.

Решение

1) Основная и расчетная схемы приведены на рис. 1.18-1.19 соответственно.

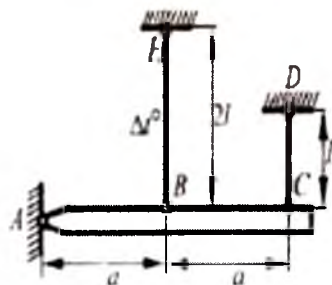


Рис. 1.17.



Рис. 1.18.

2) Уравнение равновесия статики имеет вид

$$N_{ВНА} - N_{CD} 2A = 0 \text{ или } N_{ВН} = 2N_{CD}. \quad (a)$$

Задача является один раз статически неопределимой, так как все активные и реактивные расположены в одной плоскости и не пересекаются.

Составляем уравнение перемещения. Из рис. 1.19 найдем

$$CC^* = 2BB^* \quad (6)$$

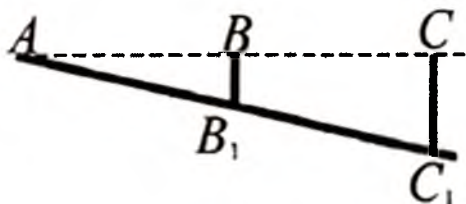


Рис. 1.19.

Перемещение шарнира С на основании закона Гука имеет

$$\delta_c = CC^* = \Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l}{EF_{CD}};$$

- перемещение шарнира В равно разности эластических удлинений стержня НВ под действием приращения температуры и внутреннего напряжения

$$BB^* = \delta_B = \Delta l_{ВН} = \Delta l_{ВН(T)} - \Delta l_{ВН(N)} = \alpha 2l \Delta T - \frac{N_{ВН} 2l}{EF_{ВН}}.$$

Подставляя последние выражения в уравнение (6)

получаем

$$\frac{N_{CD}l}{EF_{CD}} = 1(\alpha 2l\Delta T - \frac{N_{BH} 2l}{EF_{BH}})$$

или

$$\frac{N_{CD}}{F_{CD}} + \frac{4N_{BH}}{F_{BH}} = 4\alpha E\Delta T.$$

Отсюда найдем

$$N_{BH} = 41 \text{ кН}, \quad N_{CD} = 20.5 \text{ кН}.$$

Найдем нормальные напряжения, возникающие в стержнях

$$\sigma_{BH} = \frac{N_{BH}}{F_{BH}} = \frac{4110^3}{\frac{3.14 \cdot 50^2}{4}} = 20.9 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2},$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{20.5 \cdot 10^3}{\frac{3.14 \cdot 40^2}{4}} = 16.3 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}.$$

Задача 1.7. Для абсолютно жесткого бруса требуется определить:

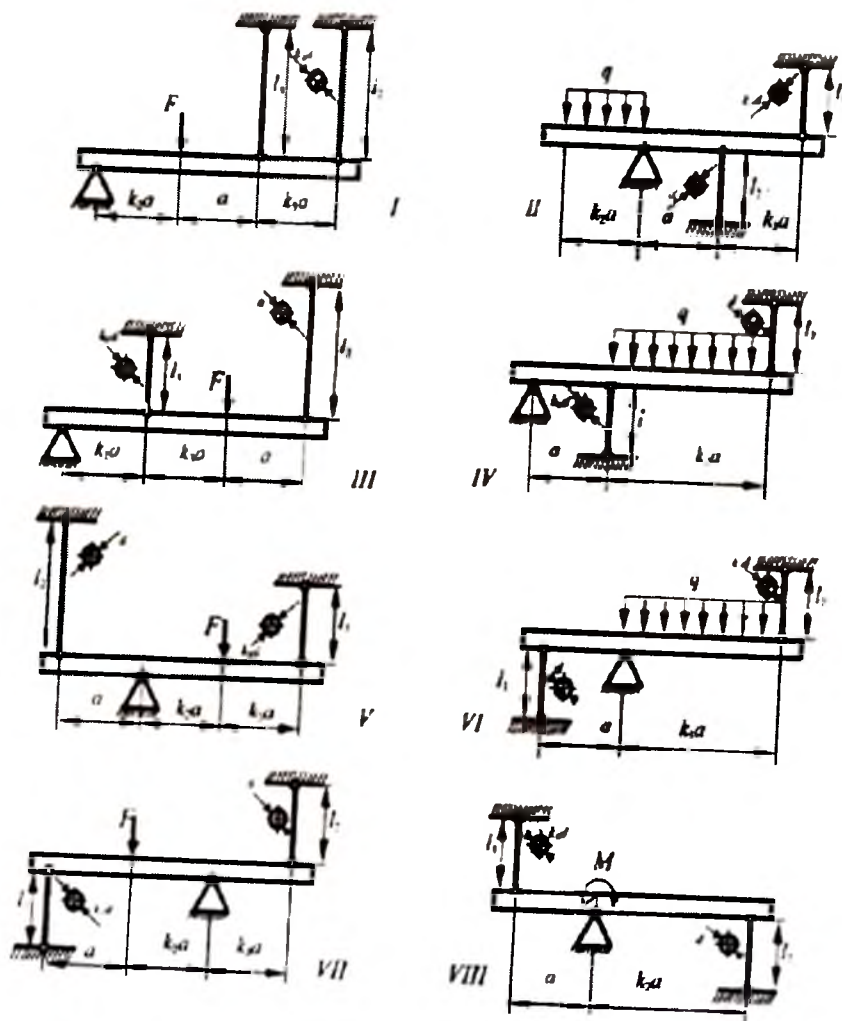
- реактивные силы, возникающие в стержнях, выразить через  $q$  и  $a$  или  $M$  и  $a$ ;

- используя данные таблицы 1.6, вычислить продольные усилия и нормальные напряжения, возникающие в стержнях;

- для материала со свойствами  $[\sigma_p] = 160 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$  опре-

делить допустимое значение площади поперечного сечения стержня. Данные взять из табл. 1.б.

Рисунки задачи 1.7.



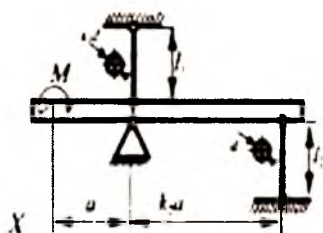
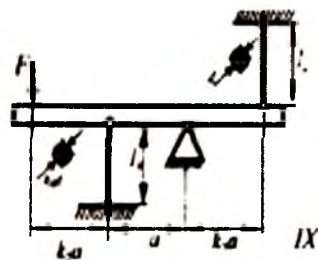


Таблица 1.6.

№	Вариант	Q кН/м	F кН	M, кНм	a	l <sub>1</sub>	l <sub>2</sub>	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>
I	I		80		1.2	1.3	1.4	1.1	1.3	1.4
	II		90		1.3	1.5	1.6	1.2	1.4	1.5
	III		100		1.4	1.6	1.7	1.3	1.5	1.6
	IV		110		1.5	1.7	1.8	1.4	1.6	1.7
II	I	30			1.4	0.8	1.8	1.2	1.5	0.5
	II	40			1.6	0.9	1.9	1.3	1.6	0.6
	III	50			1.8	1.0	2.0	1.4	1.7	0.7
	IV	60			2.0	1.1	2.1	1.5	1.8	0.8
III	I		55		1.3	1.2	1.6	1.4	1.5	
	II		60		1.4	1.3	1.7	1.3	1.6	
	III		65		1.5	1.4	1.8	1.2	1.7	
	IV		70		1.6	1.5	1.9	1.1	1.8	
IV	I	60			1.5	1.1	1.3	1.1	2.5	
	II	55			1.6	1.2	1.4	1.2	2.6	
	III	50			1.7	1.3	1.5	1.3	2.7	
	IV	45			1.8	1.4	1.6	1.4	2.8	
V	I		75		1.5	0.9	1.4	1.1	1.2	1.4
	II		80		1.4	1.1	1.6	1.2	1.3	1.5
	III		90		1.3	1.2	1.8	1.3	1.4	1.6
	IV		95		1.2	1.3	2.0	1.4	1.5	1.7
VI	I	20			1.1	1.3	1.6	1.1	2.5	
	II	25			1.2	1.2	1.5	1.2	2.8	



	III IV	30 35			1.3 1.4	1.1 1.0	1.4 1.3	1.3 1.4	3.2 3.4	
VII	I		85		1.6	1.4	1.5	1.4	0.8	1.3
	II		90		1.7	1.5	1.6	1.3	0.9	1.4
	III		95		1.8	1.6	1.7	1.2	1.0	1.5
	IV		100		1.9	1.7	1.8	1.1	1.1	1.6
VIII	I			40	1.2	1.6	1.3	1.1	2.2	
	II			45	1.3	1.7	1.4	1.2	2.4	
	III			50	1.4	1.8	1.5	1.3	2.6	
	IV			55	1.5	1.9	1.6	1.4	2.8	
IX	I		20		1.1	1.1	1.3	1.1	1.4	2.0
	II		25		1.2	1.1	1.4	1.2	1.6	2.1
	III		30		1.3	1.2	1.5	1.3	1.8	2.2
	IV		35		1.4	1.3	1.6	1.4	2.0	2.3
X	I			50	1.2	1.3	1.1	1.1	2.5	
	II			55	1.3	1.4	1.2	1.2	2.6	
	III			60	1.4	1.5	1.3	1.3	2.7	
	IV			65	1.5	1.6	1.3	1.4	2.8	

Задача 1.8. Стальной стержень ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа) находится под действием продольной силы  $P$  и собственного веса ( $\gamma=78$  кН/м<sup>3</sup>). Найти перемещение нижнего конца стержня. Данные взять из рис. Задачи 1.1. и табл. 1.1.

*Указания к решению задачи 1.8.*

А. Определить перемещения сечений I-I и II-II стержня (удельная сила тяжести равна  $\gamma$ ).

Дано: рис. 1.20;  $l_1 = l_2 = l$ ;  $F_2 = 3F_1$ ;  $P = 4\gamma F_1 l$ .

*Решение*

Перемещение сечения I-I равно удлинению верхней части стержня являются сосредоточенными нагрузками, а собственная сила тяжести — равномерно распределенной нагрузкой.

Применяя принцип независимости действия сил, имеем

$$\delta_i = \Delta l = \frac{Pa}{EF_2} + \frac{G_H a}{EF_2} + \frac{G_{B1} a}{EF_2} + \frac{G_{B2} a}{EF_2},$$

где  $G_H = \gamma F_1 l_1$  — сила тяжести нижней части;  $G_{B1} = \gamma F_2 (l_2 - a)$  — сила тяжести участка верхней части, расположенного ниже сечения I-I;  $G_{B2} = \gamma F_2 a$  — сила тяжести участка, расположенного выше сечения I-I.

Перемещение сечения II-II равно удлинению всего бруса, то есть

$$\delta_H = \Delta l_H + \Delta l_B.$$

Удлинение нижней части складывается из удлинений от силы  $P$  (сосредоточенной) и силы тяжести этой части (распределенной!):

$$\Delta l_H = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{G_H l_1}{2EF_1} = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{(\gamma_1 F_1) l_1}{2EF_1}.$$

Удлинение верхней части складывается из удлинений от сосредоточенной силы, равной  $P + G_H$ , и равномерно распределенной нагрузки — силы тяжести  $G_B$  этой части:

	III IV	30 35			1.3 1.4	1.1 1.0	1.4 1.3	1.3 1.4	3.2 3.4	
VII	I		85		1.6	1.4	1.5	1.4	0.8	1.3
	II		90		1.7	1.5	1.6	1.3	0.9	1.4
	III		95		1.8	1.6	1.7	1.2	1.0	1.5
	IV		100		1.9	1.7	1.8	1.1	1.1	1.6
VIII	I			40	1.2	1.6	1.3	1.1	2.2	
	II			45	1.3	1.7	1.4	1.2	2.4	
	III			50	1.4	1.8	1.5	1.3	2.6	
	IV			55	1.5	1.9	1.6	1.4	2.8	
IX	I		20		1.1	1.1	1.3	1.1	1.4	2.0
	II		25		1.2	1.1	1.4	1.2	1.6	2.1
	III		30		1.3	1.2	1.5	1.3	1.8	2.2
	IV		35		1.4	1.3	1.6	1.4	2.0	2.3
X	I			50	1.2	1.3	1.1	1.1	2.5	
	II			55	1.3	1.4	1.2	1.2	2.6	
	III			60	1.4	1.5	1.3	1.3	2.7	
	IV			65	1.5	1.6	1.3	1.4	2.8	

Задача 1.8. Стальной стержень ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа) находится под действием продольной силы  $P$  и собственного веса ( $\gamma=78$  кН/м<sup>3</sup>). Найти перемещение нижнего конца стержня. Данные взять из рис. Задачи 1.1. и табл. 1.1.

*Указания к решению задачи 1.8.*

А. Определить перемещения сечений I-I и II-II стержня (удельная сила тяжести равна  $\gamma$ ).

*Дано:* рис. 1,20;  $l_1 = l_2 = l$ ;  $F_2 = 3F_1$ ;  $P = 4\gamma F_1 l$ .

*Решение*

Перемещение сечения I-I равно удлинению верхней части стержня являются сосредоточенными нагрузками, а собственная сила тяжести – равномерно распределенной нагрузкой.

Применяя принцип независимости действия сил, имеем

$$\delta_1 = \Delta_1 = \frac{Pa}{EF_2} + \frac{G_H a}{EF_2} + \frac{G_{B1} a}{EF_2} + \frac{G_{B2} a}{EF_2},$$

где  $G_H = \gamma F_1 l_1$  — сила тяжести нижней части;  $G_{B1} = \gamma F_2 (l_2 - a)$  — сила тяжести участка верхней части, расположенного ниже сечения I-I;  $G_{B2} = \gamma F_2 a$  — сила тяжести участка, расположенного выше сечения I-I.

Перемещение сечения II-II равно удлинению всего бруса, то есть

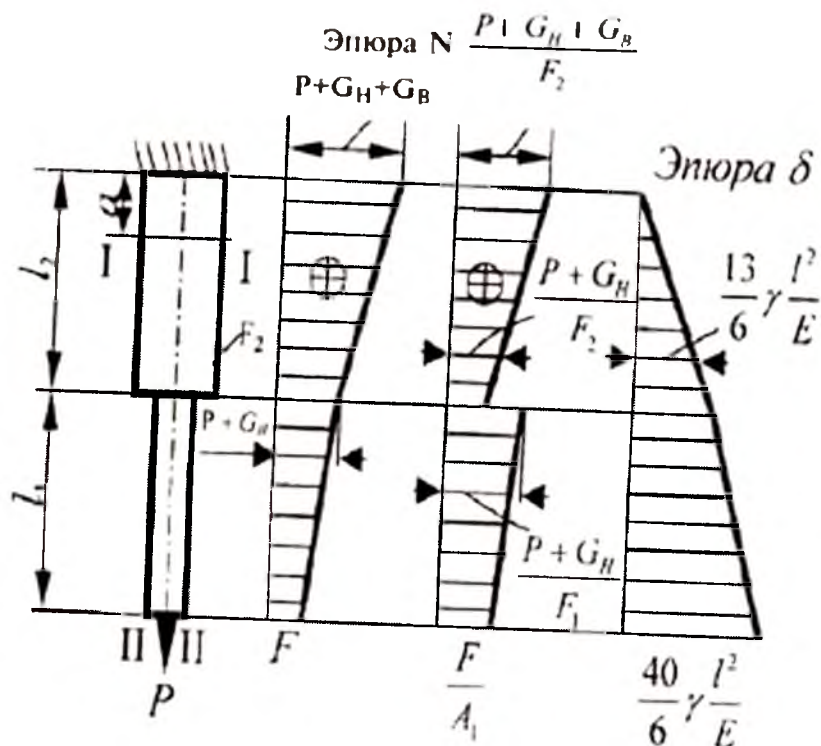
$$\delta_H = \Delta_H + \Delta_B.$$

Удлинение нижней части складывается из удлинений от силы  $P$  (сосредоточенной) и силы тяжести этой части (распределенной!):

$$\Delta_H = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{G_H l_1}{2EF_1} = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{(\gamma_1 F_1) l_1}{2EF_1}.$$

Удлинение верхней части складывается из удлинений от сосредоточенной силы, равной  $P + G_H$ , и равномерно распределенной нагрузки — силы тяжести  $G_B$  этой части:

Эпюра  $\delta$



**Задача 1.9.** Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров (рис. задачи 1.5.). Требуется: 1) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $Q$ ; 2) найти допустимую нагрузку  $G_{доп.}$ , приравняв большее из напряжений двух стержней допустимому напряжению  $[\sigma] = 240$  МПа и запас прочности  $K=1,5$ ; 4) сравнить величины  $Q_{доп.}$  полученные при расчете по допустимым напряжениям и допустимым нагрузкам. Данные взять из рис. 1.5. и таб. 1.1.

### Указания к решению задачи 1.9.

Для определения двух неизвестных сил в стержнях надо составить одно уравнение статики и одно уравнение деформаций.

Для ответа на третий вопрос задачи следует иметь в виду, что в одном из стержней напряжение больше, чем в другом. При увеличении нагрузки напряжение в первом стержне достигнет предела текучести раньше, чем во втором. Когда это произойдет, напряжение в первом стержне не будет некоторое время расти, при увеличении нагрузки система станет как бы статически определимой, нагруженной силой  $Q$  (пока еще независимой) и усилием в первом стержне:

$$N_1 = \sigma_1 F_1. \quad (1)$$

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжение и во втором стержне достигнет предела текучести:

$$N_2 = \sigma_2 F_2. \quad (2)$$

Написав уравнение статики и подставив в него значения усилий (1) и (2), найдем из этого уравнения предельную грузоподъемность  $Q_f^k$ .

**Задача 1.10.** Жесткий брус прикреплен к двум стальным стержням с площадью поперечного сечения  $F$ , опирающимся на неподвижное основание. К брусу прикреплен средний ступенчатый стальной стержень с зазором  $\Delta = \beta c$  (см. рис. данной задачи). Требуется (без учета собственного веса): 1) установить, при какой силе  $H$  зазор закроется; 2) найти реакцию основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе  $H$  и построить эпюру продольных сил для среднего стержня; 3) найти усилия и напряжения в крайних стержнях при заданной силе  $H$ ; 4) установить, насколько градусов на-

до охладить средний стержень, чтобы реакция основания в нижнем сечении среднего стержня при заданной силе  $H$  обратилась в нуль. Данные взять из табл. 1.5.

*Указания к решению задачи 1.10.*

При решении всех пунктов задачи следует учитывать, что ввиду симметрии системы усилия в крайних равны между собой.

Для ответа на первый вопрос надо приравнять перемещение нижнего сечения среднего стержня от сил  $H$  зазору  $\Delta$ . Это перемещение равно сумме деформаций участков среднего стержня от продольных сил, возникающих от сил  $H$ , и деформации любого из крайних стержней (для тех схем, в которых силы  $H$  взаимно уравновешены, усилия и деформации для крайних стержней равны нулю).

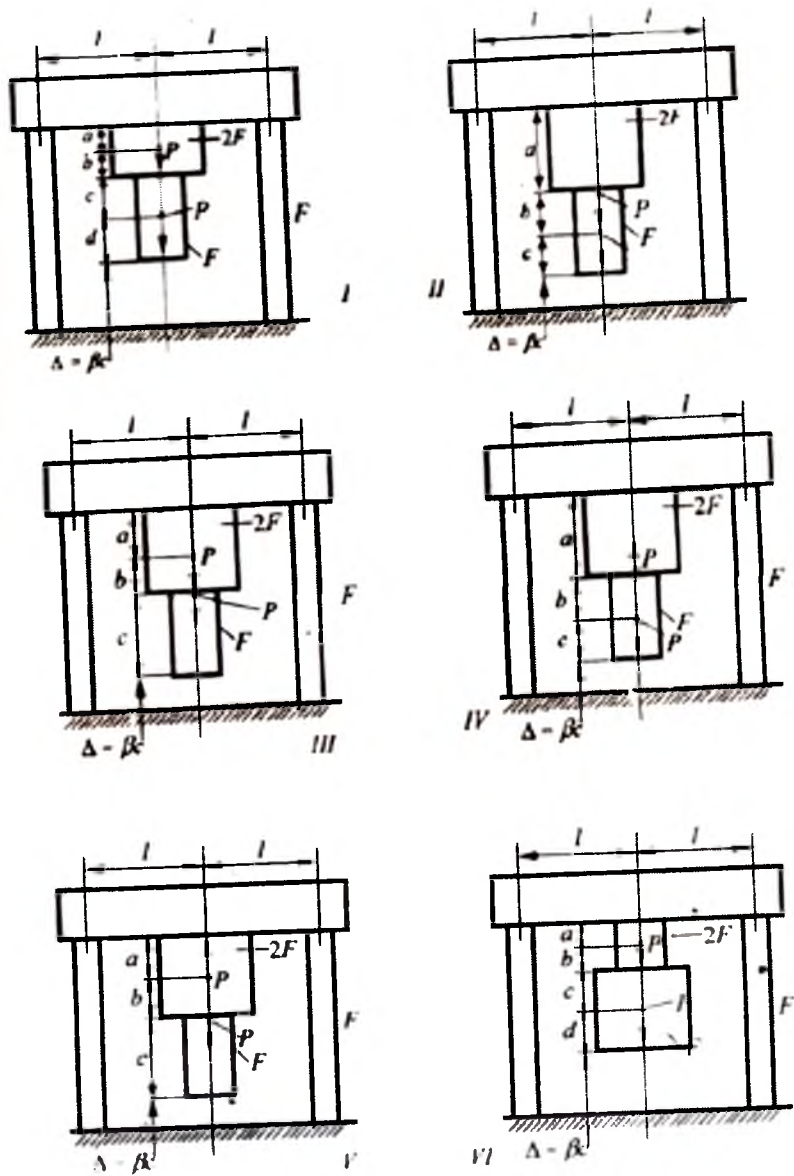
Для ответа на второй вопрос надо алгебраическую сумму перемещений нижнего сечения среднего стержня от сил  $H$  и от реакции основания на средний стержень  $R$  приравнять зазору  $\Delta$ . При вычислении этих перемещений надо также учитывать деформации участков среднего стержня от силы  $H$  и деформацию любого из крайних стержней (которая для некоторых схем равна нулю).

Для ответа на третий вопрос надо рассмотреть условия равновесия верхнего бруса, на который передаются силы  $H$  и  $R$  от среднего стержня и два усилия крайних стержней.

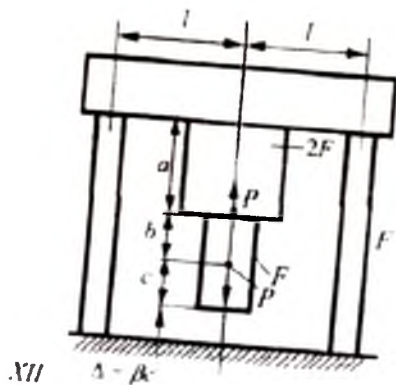
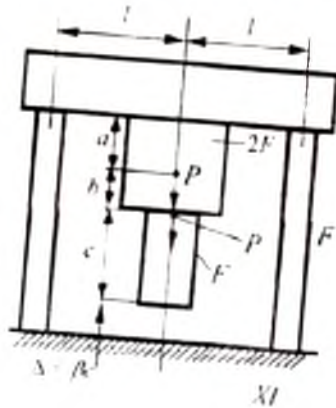
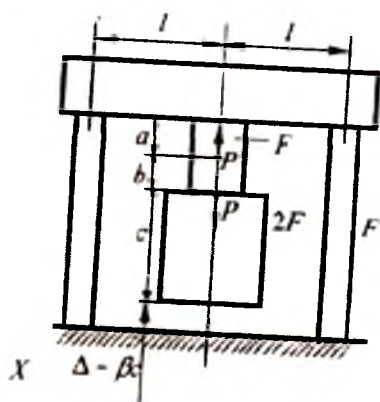
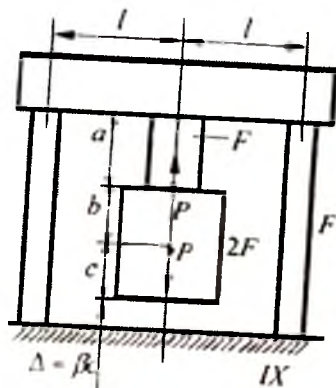
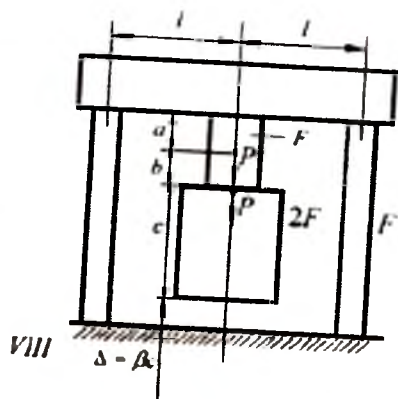
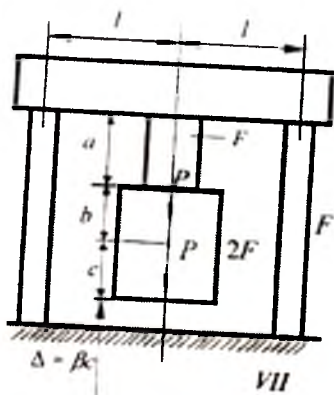
Для ответа на четвертый вопрос надо приравнять перемещение нижнего сечения сечения среднего стержня от сил  $H$  (и от деформации любого из крайних стержней, если силы  $H$  не уравновешены) сумме и температурного укорочения среднего стержня:

$$\Delta(H) = \Delta + \Delta_t = \beta c + \alpha t.$$

# Рисунки задачи 1.10







## Глава 2. Теория напряженного состояния

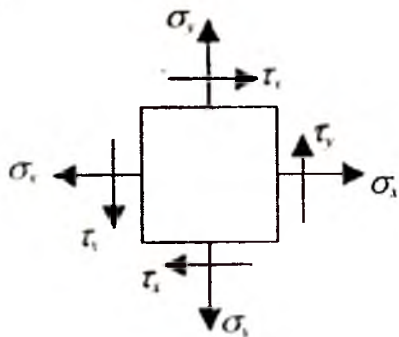


Рис. 2.1.

Задача 2.1. Для напряженного состояния, изображенного на рис. 2.1. определить экстремальные значения нормальных и касательных напряжений, а также направления главных площадок. Данные взять из табл. 2.1. Знаки напряжения для условия взять из таблицы 2.1.

Таблица 2.1.

№	Задача 2.1.			Задача 2.2.			Задача 2.3.		
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_x$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_x$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_x$
	$10^7 \frac{H}{M^2}$			$10^7 \frac{H}{M^2}$			$10^7 \frac{H}{M^2}$		
1	1.1	0.1	0.6	2.1	1.1	1.6	1.6	1.1	1.2
2	1.2	0.2	0.7	2.2	1.2	1.7	1.7	1.2	1.3
3	1.3	0.3	0.8	2.3	1.3	1.8	1.8	1.3	1.4
4	1.4	0.4	0.9	2.4	1.4	1.9	1.9	1.4	1.5
5	1.5	0.5	1.0	2.5	1.5	2.0	2.0	1.5	1.6
6	1.6	0.6	1.1	2.6	1.6	2.1	2.1	1.6	1.7
7	1.7	0.7	1.2	2.7	1.7	2.2	2.2	1.7	1.8
8	1.8	0.8	1.3	2.8	1.8	2.3	2.3	1.8	1.9

9	1.9	0.9	1.4	2.9	1.9	2.4	2.4	1.9	2.0
10	2.0	1.0	1.5	3.0	2.0	2.5	2.5	2.0	2.1
11	2.1	1.1	1.6	3.1	2.1	2.6	2.6	2.1	2.2
12	2.2	1.2	1.7	3.2	2.2	2.7	2.7	2.2	2.3
13	2.3	1.3	1.8	3.3	2.3	2.8	2.8	2.3	2.4
14	2.4	1.4	1.9	3.4	2.4	2.9	2.9	2.4	2.5
15	2.5	1.5	2.0	3.5	2.5	3.0	3.0	2.5	2.6
16	2.6	1.6	2.1	3.6	2.6	3.1	3.1	2.6	2.7
17	2.7	1.7	2.2	3.7	2.7	3.2	3.2	2.7	2.8
18	2.8	1.8	2.3	3.8	2.8	3.3	3.3	2.8	2.9
19	2.9	1.9	2.4	3.9	2.9	3.4	3.4	2.9	3.0
20	3.0	2.0	2.5	4.0	3.0	3.5	3.5	3.0	3.1
21	3.1	2.1	2.6	4.1	3.1	3.6	3.6	3.1	3.2
22	3.2	2.2	2.7	4.2	3.2	3.7	3.7	3.2	3.3
23	3.3	2.3	2.8	4.3	3.3	3.8	3.8	3.3	3.4
24	3.4	2.4	2.9	4.4	3.4	3.9	3.9	3.4	3.5
25	3.5	2.5	3.0	4.5	3.5	4.0	4.0	3.5	3.6
26	3.6	2.6	3.1	4.6	3.6	4.1	4.1	3.6	3.7
27	3.7	2.7	3.2	4.7	3.7	4.2	4.2	3.7	3.8
28	3.8	2.8	3.3	4.8	3.8	4.3	4.3	3.8	3.9
29	3.9	2.9	3.4	4.9	3.9	4.4	4.4	3.9	4.0
30	4.0	3.0	3.5	5.0	4.0	4.5	4.5	4.0	4.1

*Указания к решению задачи 2.1.*

Дано: рис. 2.1.

$$\sigma_x = -525 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}; \quad \sigma_y = -525 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}; \quad \tau_x = -\tau_x =$$

$$650 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}.$$

*Решение*

1) Вычисляем главные напряжения

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(525 \mp 225)^2 + 4650^2 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^7 \frac{H}{\text{м}^2}}$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{525 + 225}{2} \cdot 10^5 \mp$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(525 \mp 225)^2 + 4650^2 \cdot 10^5 \cdot 7,5 \cdot 10^7 \frac{H}{\text{м}^2}}$$

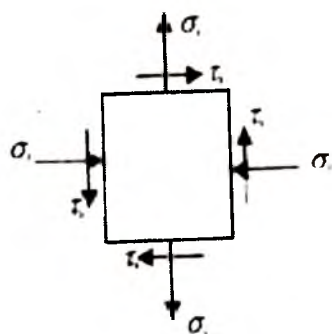


Рис. 2.2.

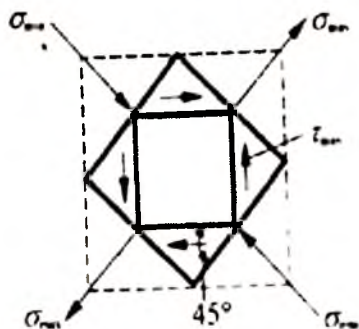


Рис. 2.3.

2) Вычисляем главные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(-525 - 225)^2 + 4650^2 \cdot 10^5} = 7,5 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

$$\tau_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{(-525 - 225)^2 + 4650^2 \cdot 10^5} = -7,5 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

3) Найдем направления главных напряжений:

$$\text{Tga}_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 650}{-525 - 225} = -1,75 = -\text{tg}60^\circ.$$

Следовательно,

$$2a_0 = -60^\circ, \quad a_0 = -30^\circ;$$

Направления главных напряжений указаны на рис. 2.3.

Задача 2.2. Для напряженного состояния, изображенного на рис. 2.4 определить касательные и нормальные напряжения, возникающие на площадке  $mn$ , образующие угол  $\alpha = 30^\circ$  с нормальным напряжением  $\sigma_x$ . Вычислить главные напряжения. Данные взять из табл. 2.1.

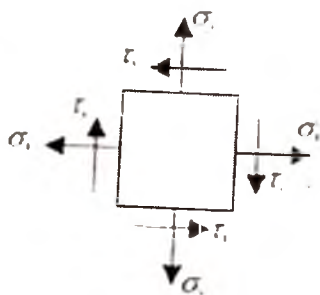


Рис. 2.4.

Указания к решению задачи 2.2.

Дано: Рис. 2.5;

$$\sigma_a = 5 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}; \sigma_b = 2.5 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}; \tau_a = -\tau_b = -1.25 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}$$

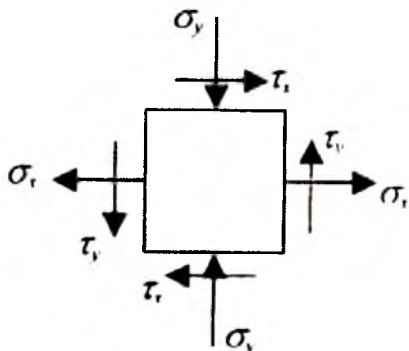


Рис. 2.5.

### Решение

1) Напряжения, возникающие на площадках, параллельных площадке  $m_1p$  принимают постоянные значения, так рассматриваемый параллелепипед имеет бесконечно малый объем. На грани треугольной призмы, образованного площадкой  $m_1p$  действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 2.6).

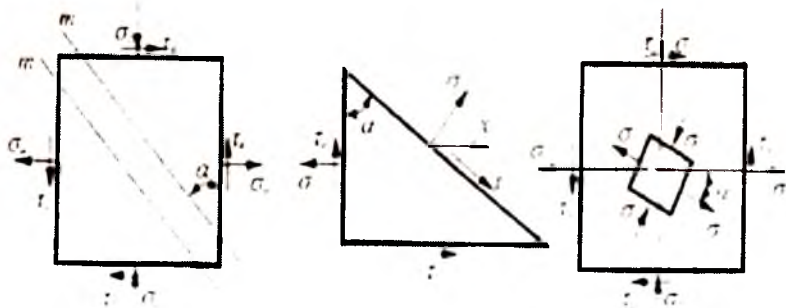


Рис. 2.6

Напишем уравнения равновесия сил, действующих на грани призмы (рис. 2.6.) Для этого сумму проекций всех сил на направления нормального  $\sigma_N$  и касательного  $\tau_N$  напряжения приравняем нулю. Обозначим площадку, соответствующую гипотенузе основания призмы, то есть площадку АВ через F. Напишем уравнения равновесия сил, действующих на грани призмы (рис.2.7).

$$\sigma_n F - \sigma_a F \cos^2 \alpha - \sigma_\beta \sin^2 \alpha + \tau_a F \sin \alpha \cos \alpha - \tau_\beta F \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$\tau_n F - \sigma_a F \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_\beta \sin \alpha \cos \alpha - \tau_a F \cos^2 \alpha - \tau_\beta F \sin^2 \alpha = 0,$$

Здесь учтено, что площадка СВ равна на  $F \cos \alpha$ , площадка СА = на  $F \sin \alpha$ .

$$\sigma_1 = 575 \cdot 10^5 - 10^5$$

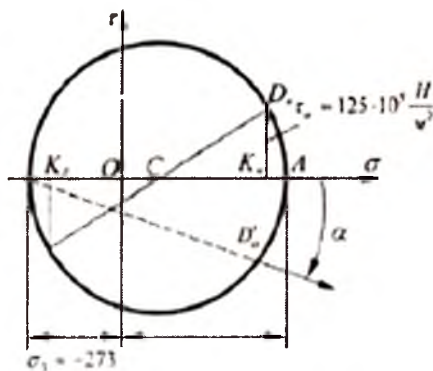


Рис. 2.7.

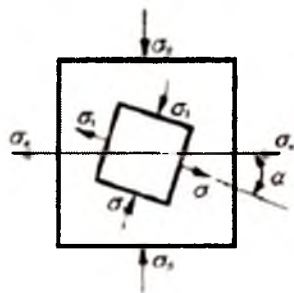


Рис. 2.8.

Отсюда

$$\sigma_n = \sigma_a \cos^2 \alpha + \sigma_\beta \sin^2 \alpha - 2\tau_a F \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau_n = (\sigma_a - \sigma_\beta) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_a (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Учитывая, что

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Последние уравнения приводим к виду

$$\sigma_{\Pi} = \cos 2\alpha \cdot \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} - \tau_a \sin 2\alpha, \tau_a = \sin 2\alpha \cdot \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} - \tau_a \cos 2\alpha$$

Напишем значения напряжений  $\sigma_{\Pi}$  и  $\tau_{\Pi}$  для рассматриваемого случая и производим вычисления

$$\begin{aligned} \sigma_{\Pi} &= \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} \cos 2\alpha - \tau_a \sin 2\alpha = \frac{5 \cdot 2,5}{2} \\ &+ \frac{51 \cdot 2,5}{2} \cdot 10^7 \sin 60^\circ = (125 + 375 \cdot 0,5 + 125 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 10^5 = \\ &420,7 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \sin 2\alpha - \tau_a \cos 2\alpha = \frac{51 \cdot 2,5}{2} \cdot 10^7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ &1,125 \cdot 0,5 \cdot 10^7 = 262,2 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2} \end{aligned}$$

Вычисляем главные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_a + \sigma_b}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_a - \sigma_b)^2 + 4\tau_a^2} = \frac{5 \cdot 2,5}{2} \cdot 10^7 \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(7,5)^2 + 4(\bar{n} \cdot 1,125)^2} \cdot 10^7 \end{aligned}$$



$$\sigma_1 = 523 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}, \quad \sigma_3 = -273 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}.$$

Найдем направления площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2125}{750} = -2.83.$$

Отсюда найдем  $2\alpha_1 = -18^\circ 15'$ ,  $\alpha_1 = -9^\circ 08'$ . Схема направления главных площадок и главных напряжений указаны на рис. 2.8.

*Проверка.* Если задача решена правильно, равенство  $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_3$  будет справедливо.

В нашем случае

$$500 - 250 = 523 - 273 = 250.$$

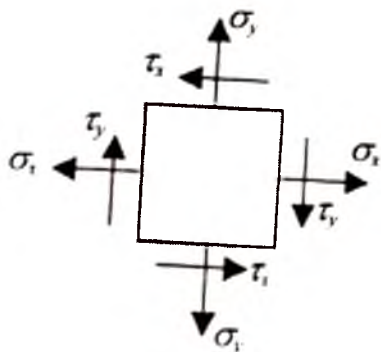


Рис. 2.9.

Задача 2.3. Построить круг Мора для напряженного состояния, изображенного на рис. 2.9, графическим методом определить нормальные и касательные напряжения на площадке, образующие угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением нормального напряжения  $\sigma$ . Установить направле-

ния главных напряжений. Данные взять из табл. 2.1.

*Указания к решению задачи 2.3.*

*Дано:* Рис. 2.10.

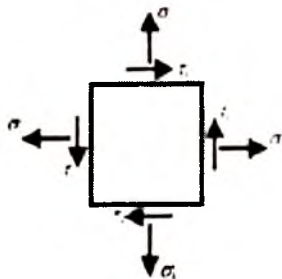


Рис. 2.10.

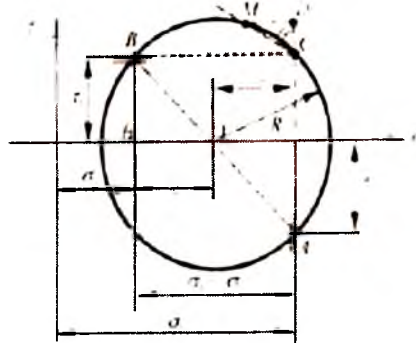


Рис. 2.11.

*Решение*

Круг Мора строится в следующей последовательности:

1) В плоскости  $(\sigma, \alpha)$  проводим горизонтальную  $\sigma$  и вертикальную  $\tau$  оси (рис. 2.11).

2) Выбираем масштаб чертежа, исходя из заданных значений напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

3) В плоскости  $(\sigma, \alpha)$  найдем точку  $A(\sigma_x, \tau_{xy})$  с абсциссой  $\sigma_x$  и ординатой  $\tau_{xy}$ . В заданном напряженном состоянии  $\sigma_x > 0$ ,  $\tau_{xy} < 0$  (рис. 2.10), поэтому абсцисса  $\sigma_x$  выбираем положительной, а ординату  $\tau_{xy}$  - отрицательной.

4) Аналогичным образом выбираем точку  $B(\sigma_y, \tau_{xy})$  с абсциссой  $\sigma_y$  и ординатой  $\tau_{xy}$ . При этом точка  $A$  соответствует напряжениям, возникающим в вертикальных площадках, а точка  $B$  - в горизонтальных площадках.

5) Соединив точки  $A$  и  $B$  найдем точку  $O$ , расположенной на горизонтальной оси. Площади, получающих

ся при этом прямоугольных треугольников  $OaA$  и  $OvB$  равны, так как углы  $BoB$  и  $AOa$ , а также стороны  $bB$  и  $aA$  этих треугольников равны между собой (согласно закону парности касательных напряжений  $\tau_x = -\tau_y$ ).

Сумма сторон  $bO$  и  $aO$  треугольников равно  $\sigma_x - \sigma_y$ . Поэтому каждое из этих сторон равно  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ . Следовательно, абсцисса точки  $O$  равно

$$\sigma_y + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

А ордината равно 0, то есть  $0 \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$  и данная точка будет центром круга Мора.

б) Построим круг с центром в точке  $O$  и радиусом, равным  $OA = OB$ . Данный круг с радиусом равным

$$R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$$

**называется кругом Мора.**

7) Из точки  $A$  и  $B$  проводим прямые, параллельные ординате. Точка с пересечения прямой, проведенной через точки  $A$  с кругом называется полярной точкой. Точка пересечения прямой, проходящей через точки с кругом называется **полярной точкой**.

8) На круге выбираем произвольную точку  $M$ , будут нормальные напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ , возникающие на перпендикулярной площадке  $\alpha$  ( $\alpha$  - площадка расположенная под углом  $\alpha$  к нормальному напряжению), то есть  $M = M(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ . Очевидно, что точка  $C$  имеет координаты  $\sigma_x$  и  $\tau_\alpha$ , то есть  $C = (\sigma_x, \tau_\alpha)$ .

9) Выразим координаты точек  $M$  и  $C$  через угол

$$\operatorname{tg} \beta \frac{MD}{DC} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\tau_a - \tau_1} \quad (a)$$

10) Выразим напряжения  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  через  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_x$   $\sigma_a$   
 $= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha$ ,

$$\tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha.$$

11) Подставляя выражения для напряжений  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  в выражение (a) получаем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_1 (1 - \cos^2 \alpha) - \sigma_2 \sin^2 \alpha - \tau_1 \sin^2 \alpha}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_1 (1 + \cos 2\alpha)}$$

Так как

$$1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha.$$

то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha - 2\tau_1 \cos \alpha \sin \alpha}{(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha - 2\tau_1 \cos \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Таким образом, произвольная прямая МС, соединяющая круг Мора с полярной точкой образует угол  $\alpha$  с нормальным напряжением  $\sigma_x$  и прямая МС проходит параллельно площадке действия напряжений  $\sigma_a$  и  $\tau_a$ .

Выводы:

- для определения направления элементарных площадок, на которых действует напряжения  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  необходимо провести прямые точек М( $\sigma_a$ ,  $\tau_a$ ) и полярных точек

С при этом площадки  $a$  располагаются параллельно к прямым МС;

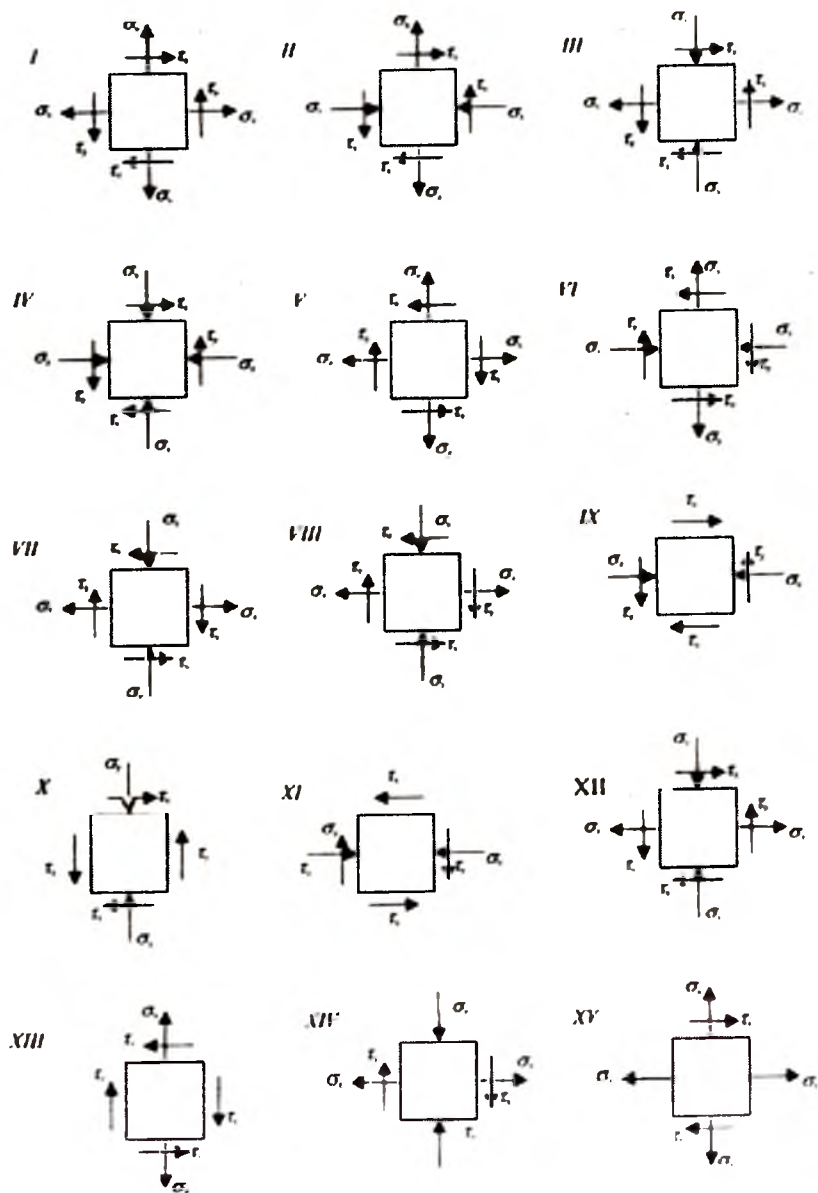
- для определения значения напряжения  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$ , возникающих в произвольной площадке  $a$  из полярной точки С проводят прямую параллельную данной площадке, абцисса точки пересечения прямой с кругом Мора соответствует напряжению  $\sigma_a$ , ордината – касательному напряжению в заданном заранее масштабе.

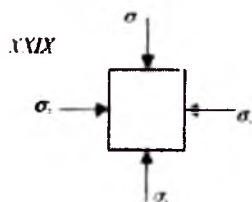
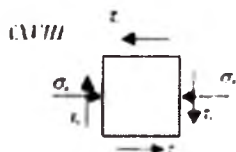
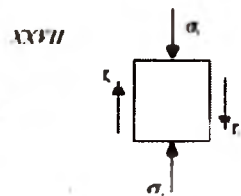
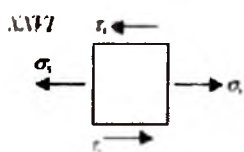
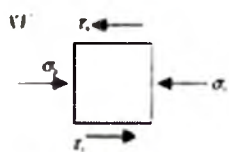
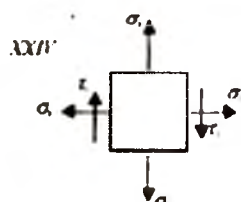
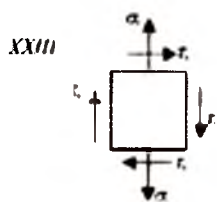
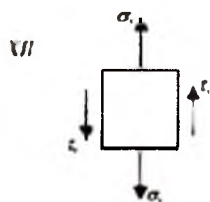
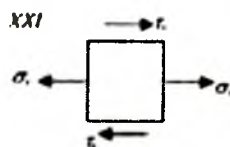
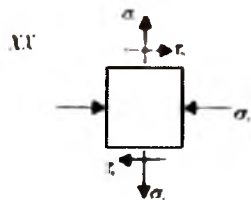
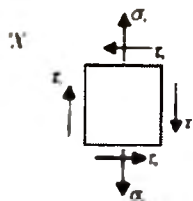
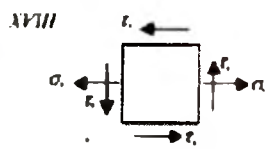
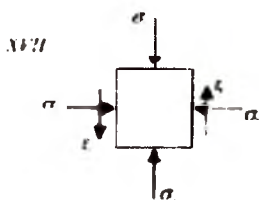
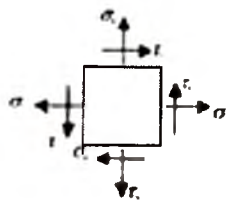
Задача 2.4. Стальной кубик (см. рис.) находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти: 1) главные напряжения и направление главных площадок; 2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений; 3) относительные деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ , и  $\epsilon_z$ ; 4) относительное изменение объема; 5) удельную потенциальную энергию деформаций. Данные взять из табл. 2.2.

Таблица 2.2.

№	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_x$	№	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_x$	№	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_x$
	МПа				МПа				МПа		
I	10	10	10	XI	10	10	10	XXI	10	10	10
II	20	20	20	XII	20	20	20	XXII	20	20	20
III	30	30	30	XIII	30	30	30	XXIII	30	30	30
IV	40	40	40	XIV	40	40	40	XXIV	40	40	40
V	50	50	50	XV	50	50	50	XXV	50	50	50
VI	60	60	60	XVI	60	60	60	XXVI	60	60	60
VII	70	70	70	XVII	70	70	70	XXVII	70	70	70
VIII	80	80	80	XVIII	80	80	80	XXVIII	80	80	80
IX	90	90	90	XIX	90	90	90	XXIX	90	90	90
X	100	100	100	XX	100	100	100	XXX	100	100	100

## Рисунки задачи 2.4.





Задача 2.5. Для заданного напряженного состояния (табл.2.3) определить следующее: относительные деформации в главных направлениях; относительные изменения объема; среднее значение относительного изменения объема; полную удельную потенциальную энергию деформации; удельную потенциальную энергию изменения объема; удельную потенциальную энергию деформации изменения формы;

- проверить выполнение условия теории прочности; вычислить напряжение  $\tau_{\text{ОКТ}}$ ; вычислить полное напряжение.

Указания к решению задачи 2.5.

1) Относительные деформации, возникающие в главных направлениях

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu k(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu k(\sigma_3 + \sigma_1)],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu k(\sigma_1 + \sigma_2)].$$

2) Относительное изменение объема

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

3) Октаэдральное нормальное напряжение

$$\sigma_{\text{ОКТ}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

4) Среднее значение относительного изменения объема



$$\theta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3K}$$

Здесь  $K$  — модуль изменения объемной деформации

$$K = \frac{E}{3(1 + 2k)}$$

5) Относительное изменение объема

$$\theta = \frac{1 + 2k}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

6) Полная потенциальная энергия

777.

7) Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$a_1 = \frac{1 + 2k}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

8) Удельная потенциальная энергия изменения объема

$$a_2 = \frac{1 + k}{6E} [(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_3)^2]$$

9) Первая теория прочности

$$\sigma_1 \leq [\sigma]$$

10) Вторая теория прочности

$$\sigma_1 - k(\sigma_1 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

11) Третья теория прочности

Таблица 2.3.

№	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
	МПа		
1	1	0.75	0.5
2	2	1.75	1.5
3	3	2.75	2.5
4	4	3.75	3.5
5	5	4.75	4.5
6	6	5.75	5.5
7	7	6.75	6.5
8	8	7.75	7.5
9	9	8.75	8.5
10	10	9.75	9.5
11	11	10.75	10.5
12	12	11.75	11.5
13	13	12.75	12.5
14	14	13.75	13.5
15	15	14.75	14.5
16	-14.5	-14.75	-15
17	-13.5	-13.75	-14
18	-12.5	-12.75	-13
19	-11.5	-11.75	-12
20	-10.5	-10.75	-11
21	-9.5	-9.75	-10
22	-8.5	-8.75	-9
23	-7.5	-7.75	-8
24	-6.	-6.75	-7
25	-5.5	-5.75	-6
26	-4.5	-4.75	-5
27	-3.5	-3.75	-4
28	-2.5	-2.75	-3
29	-1.5	-1.75	-2
30	-0.5	-0.75	-1

$$\sigma_1 + \sigma_3 \leq [\sigma].$$

12) Четвертая теория прочности

$$\frac{1}{2}[(\sigma_2 \mp \sigma_3)^2 + (\sigma_1 \mp \sigma_2)^2 + (\sigma_1 \mp \sigma_3)^2] \leq [\sigma]$$

13) Октаэдральное касательное напряжение

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_2 \mp \sigma_3)^2 + (\sigma_1 \mp \sigma_2)^2 + (\sigma_1 \mp \sigma_3)^2}$$

$$\sqrt{(\sigma_1 \mp \sigma_2)^2 + (\sigma_1 \mp \sigma_3)^2 + (\sigma_2 \mp \sigma_3)^2}$$

14) Полное напряжение

$$P_{\text{окт}} = \sqrt{P_{\text{окт}}^2 + \tau_{\text{окт}}^2}$$

**Глава 3. Сдвиг. Расчеты на срез и смятие.  
Расчет заклепочных соединений**

Таблица 2.3.

№	$[\sigma_n]$	$[\tau_{ср}]$	$[\sigma_{см}]$	Р
	МПа			
1	70	30	170	+10
2	75	35	175	+15
3	80	40	180	+20
4	85	45	185	+25
5	90	50	190	+30
6	95	55	195	+35
7	100	60	200	+40
8	105	65	205	+45
9	110	70	210	+50
10	115	75	215	+55
11	120	80	220	+60
12	125	85	225	+65
13	130	90	230	+70
14	135	95	235	+75
15	140	100	240	+80
16	145	105	240	-80
17	150	110	240	-75
18	145	100	235	-70
19	140	95	230	-65
20	135	90	225	-60
21	130	85	220	-55
22	125	80	215	-50
23	120	75	210	-45
24	115	70	205	-40
25	110	65	200	-35
26	100	60	195	-30
27	95	55	190	-25
28	90	50	185	-20
29	85	45	180	-15
30	80	40	175	-10

Задача 3.1.

Стержни I и II соединены штифтом III и нагружены растягивающими (+) или сжимающими (-) усилиями.

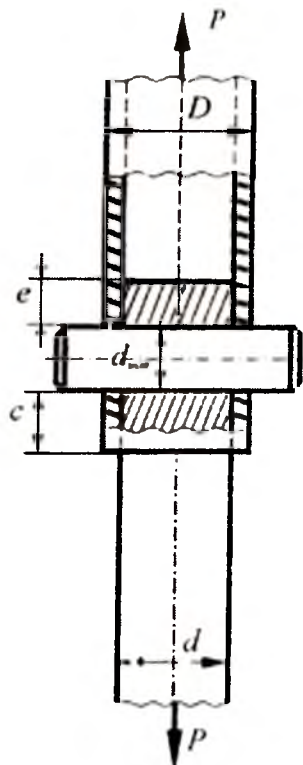


Рис. 31.

На рис. 31 указаны только растягивающие усилия. Знаки (+) или (-) усилия Р определяются по данным таблицы

3.1. определить размеры параметров  $D$ ,  $d$ ,  $c$ , с конструкции по заданным в табл. 3.1 значениям величин  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$ ,  $[\sigma_{см}]$ .

Указания к решению задачи 3.1.

Дано: Рис. 3.2;  $[\sigma_x] = 120 \frac{H}{м^2}$ ;  $[\sigma_y] = 240 \frac{H}{мм^2}$ ;  $[\tau_k] = 80$

$$\frac{H}{мм^2} \quad P = +30 \text{ кН.}$$

Решение. 1) Определяем диаметр штифта из условия прочности срез

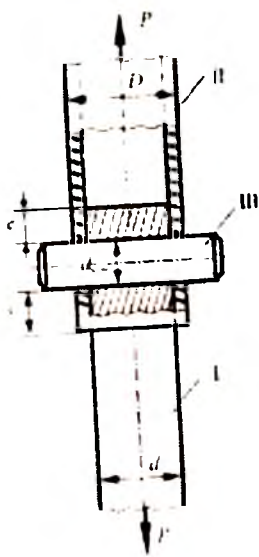


Рис. 3.2.

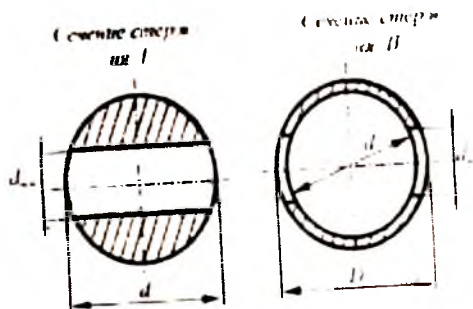


Рис. 3.3.

$$\tau_k = \frac{P}{2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_k],$$

Откуда

$$D_{\text{шт}} \geq \sqrt{\frac{2P}{\pi[\tau_x]}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80}} = 15,5 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_{\text{шт}} = 16 \text{ мм}$ .

2) Определяем диаметр стержня I из условия прочности на растяжение (сечение стержня, ослабленное отверстием для штифта показано на рис. 3.2)

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \eta} \leq [\sigma_x]$$

или

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{30 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot d^2}{4} \cdot \eta} \leq 120 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$$

Откуда

$$94,2d^2 - 1920d - 30 \cdot 10^3 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, получим  $d = 30,8 \text{ мм}$ . Основываясь действующим стандартом, принимаем  $d = 31 \text{ мм}$ .

3) Определяем наружный диаметр стержня из условия прочности на растяжение (сечение стержня II, ослабленное отверстием для штифта показано на рис. 3.3, а)

$$\sigma_{PH} = \frac{P}{\frac{\pi D^2}{4} \bar{n} \frac{\pi d^2}{4} \bar{n} d_{\text{шт}} (D \bar{n} d)} \leq [\sigma_1],$$

$$\sigma_{PH} = \frac{30 \cdot 10^3}{\frac{3,14 D^2}{4} \bar{n} \frac{3,14 \cdot 31^2}{4} \bar{n} 16 (D \bar{n} 31)} \leq 120 \frac{H}{\text{мм}^2},$$

Откуда

$$94,2D^2 - 192D - 61 \cdot 10^3 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, получим  $d = 37,7$  мм. Основываясь действующим стандартом, принимаем  $d = 38$  мм.

4) Определяем толщины стенок стержня II из условия прочности на смятие (рис. 3.3, б)

$$\sigma_{CM} = \frac{P}{d_{\text{шт}} (D \bar{n} d)} = \frac{30 \cdot 10^3}{16(38 \bar{n} 31)} = 268 \frac{H}{\text{мм}^2} \cdot [\sigma_{CM}].$$

Увеличим наружный диаметр стержня так, чтобы соблюдалось условие прочности на смятие:

$$\sigma_{CM} \leq [\sigma_{CM}]$$

Или в нашем случае  $268 > 248 \frac{H}{\text{мм}^2}$ .

Из условия прочности, найдем

$$\sigma_{CM} = \frac{P}{d_{\text{шт}} (D \bar{n} d)} \leq [\sigma_{CM}]$$

или

$$D \geq \frac{P + d \cdot d_{\min} [\sigma_s]}{d_{\min} [\sigma]} = \frac{30 \cdot 10^3 + 31 \cdot 16 \cdot 240}{16 \cdot 240} = 38,8 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем  $D=39$  мм.

5) Определяем размер  $c$  из условия прочности нижней части стержня II на срез

$$\tau_{ср} = \frac{P}{2c(D-d)} \leq [\tau_{ср}],$$

или

$$c \geq \frac{P}{2c(D-d)[\tau_{ср}]} = \frac{30 \cdot 10^3}{2(39-31) \cdot 80} = 23,4 \text{ мм.}$$

Принимаем  $c = 24$  мм.

6) Определяем размер  $e$  из условия прочности верхней части стержня I на срез

$$\tau_R = \frac{P}{2ed} \leq [\tau_k],$$

Откуда

$$e \geq \frac{P}{2d[\tau_k]} = \frac{30 \cdot 10^3}{2 \cdot 31 \cdot 80} = 6,05 \text{ мм.}$$

Принимаем  $e=6$  мм.

Задача 3.2. Два толстых листа соединены при помощи третьего листа и наклепок (рис. 3.4). Толстым листам приложены растягивающие (+) и сжимающие (-) силы  $P$ . Знаки внешней силы определяются по данным табл. 3.2. проверить прочность такого заклепочного соединения по заданным значениям величин  $[\sigma]$ ,  $\tau_{ср}$ ,

[ $\sigma_{CM}$ ]. Данные взять из табл. 3.2.

Таблица 3.2.

№	$[\sigma_n]$	$[\tau_{CP}]$	$[\sigma_{CM}]$	$\delta$	$\delta_{CP}$	I	II	III	р
	$\frac{H}{\text{мм}^2}$			мм		Количество на- клепок в сече- ниях стержня			
1	105	60	190	6	1	1	2	2	+280
2	110	65	195	7	2	1	2	2	-285
3	115	70	200	8	3	1	2	3	+290
4	120	75	205	9	4	1	2	4	-295
5	125	80	210	10	5	1	2	3	+300
6	130	85	215	11	6	1	2	3	-305
7	135	90	220	12	7	1	2	4	+310
8	140	95	225	13	8	1	2	2	-315
9	145	100	230	14	9	2	2	3	+320
10	150	105	235	15	10	2	2	4	-325
11	155	110	245	16	11	2	2	3	+330
12	160	105	250	17	12	2	2	3	-335
13	155	100	250	18	13	2	2	4	+340
14	150	95	250	19	14	2	2	3	-345
15	145	90	245	20	15	2	2	2	+350
16	140	85	240	20	15	2	2	3	-355
17	135	80	235	19	14	2	2	4	+360
18	130	75	230	18	13	2	2	3	-365
19	125	70	225	17	12	2	2	3	+370
20	120	65	220	16	11	2	2	3	-340
21	115	60	215	15	10	2	2	4	+335
22	110	65	210	14	9	2	2	3	-330
23	100	70	205	13	8	2	2	2	+325
24	105	75	200	12	7	1	2	2	-320
25	110	80	195	11	6	1	2	4	+315
26	115	85	190	10	5	1	2	3	-310
27	120	90	195	9	4	1	2	2	+305
28	125	95	200	8	3	1	2	3	-300
29	130	100	205	7	2	1	2	3	+395
30	135	105	210	6	1	1	2	3	-390



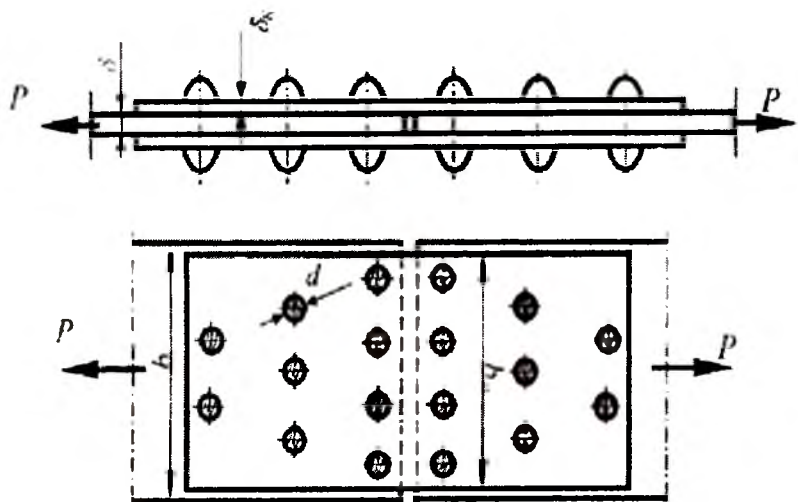


Рис. 3.4.

Указания к решению задачи 3.2.

Дано: рис. 3.4;  $[\sigma_p] = 140 \frac{H}{мм^2}$ ;  $[\tau_{CP}] = 100 \frac{H}{мм^2}$ ;  
 $[\sigma_{CM}] = 240 \frac{H}{мм^2}$ ;  $P = +550 кН$ ,  $\delta = 16 мм$ ,  $\delta_k = 10 мм$ ,  $b = 280 мм$ ,  $b_H = 270 мм$ ,  $20 мм$ .

*Решение*

Расчет включает проверку прочности заклепок на срез, стенок отверстий в листах и накладок на смятие, листов и накладок на растяжение.

1) Проверку прочности заклепок на срез выполняем по формуле

$$\tau_{CP} = \frac{P}{nkd} \leq [\tau_1],$$

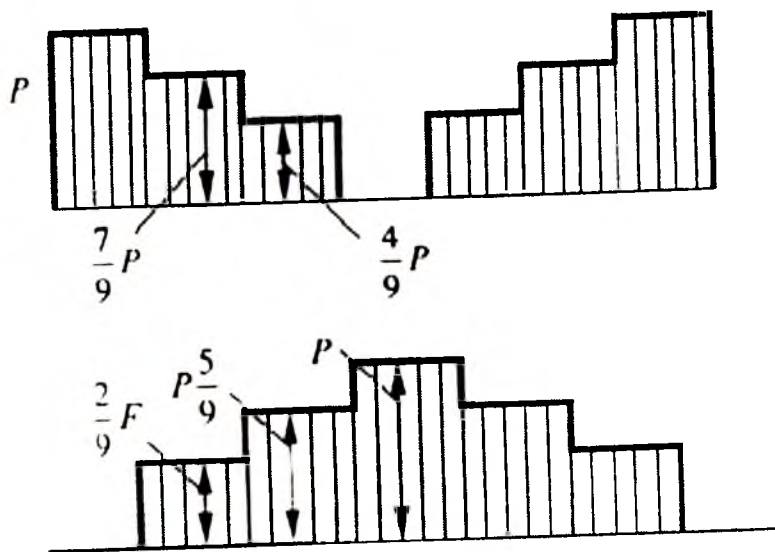
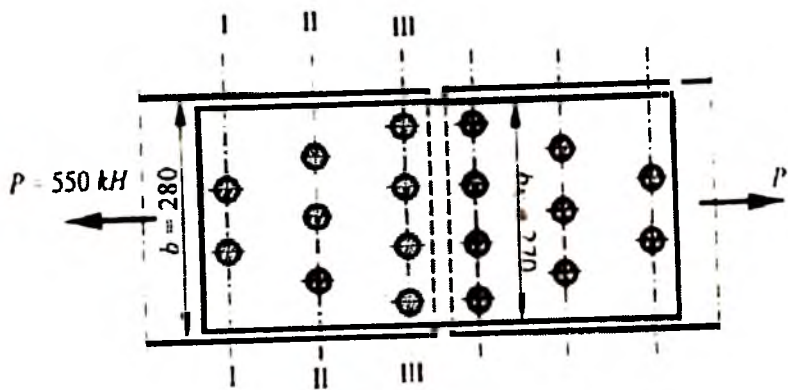


Рис. 3.5.

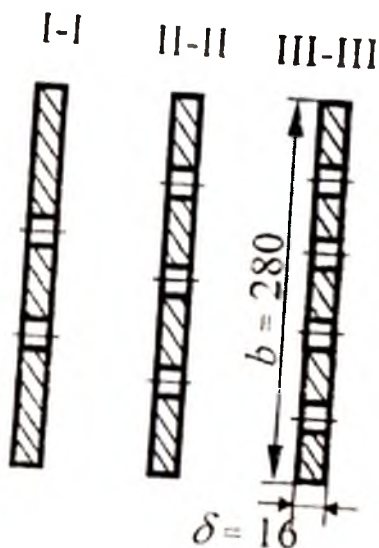


Рис. 3.6.



Рис. 3.7.

где  $n$  — число заклепок по одну сторону стыка (данном случае  $n = 9$ );  $k$  — число двухрезных заклепок (в рассматриваемом случае  $k=2$ ).

Подставляя числовые значения, получаем

$$\tau_{ср} = \frac{550 \cdot 10^3}{9 \cdot 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 20^2}{4}} \cdot 97,2 \frac{Н}{мм^2}$$

Условия прочности на срез заклепок выполняются.

2) Проверку прочности на смятие выполняем по формуле:

$$\sigma_{см} = \frac{P}{n \delta_{сж} d} \leq [\sigma_{см}]$$

В заданном соединении  $\delta < 2\delta_k$ , то есть расчетная площадь смятых стенок отверстий в соединяемых листах меньше, чем стенок отверстий в накладках. Следовательно, напряжения смятия для листов больше, чем накладок, и  $\delta_s = \delta = 16$  мм.

Подставляя числовые данные, получаем

$$\sigma_{см} = \frac{550 \cdot 10^3}{9 \cdot 16 \cdot 20} = 191 \frac{Н}{мм^2}$$

3) Проверяем прочности листов на растяжение по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F_{нетто}} \leq [\sigma_r];$$

где  $N$  — продольная сила в опасном сечении;  $F_{нетто}$  — площадь нетто, то есть площадь поперечного сечения листа за вычетом ее ослабления отверстиями для заклепок опасного сечения.

Для определения опасного сечения строим эпюру продольных сил для листов (рис. 3.5). при построении эпюры воспользуемся допущением о равномерности распределении силы между заклепками (данном случае каждая из заклепок передает силу, равную  $\frac{1}{9}P$ . Площади ослабленных сечений I-I, II-II, III-III различны, поэтому ясно, каждое из них опасное. Производим проверку прочности каждого из указанных сечений (на рис. 3.6-3.7 показаны ослабленные сечения листа).

Сечение I-I, II-II, III-III соответственно:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\delta(b-2d)} = \frac{550 \cdot 10^3}{16(280 - 2 \cdot 20)} = 143 \frac{Н}{мм^2};$$

$$\sigma_{II} = \frac{7P}{9 \delta(b \mp 3d)} = \frac{7 \cdot 550 \cdot 10^1}{9 \cdot 16(280 \mp 3 \cdot 20)} = 121 \frac{H}{\text{мм}^2};$$

$$\sigma_{III} = \frac{4P}{9 \delta(b \mp 4 \cdot d)} = \frac{4 \cdot 550 \cdot 10^1}{9 \cdot 16(280 \mp 4 \cdot 20)} = 76,5 \frac{H}{\text{мм}^2}$$

Опасным оказалось сечении I-I; напряжение в этом сечении выше допустимого примерно на 2%, то есть можно считать, что прочность соединяемых листов достаточна.

Проверка накладок аналогична проверке листов. Эпюры продольных сил для двух накладок приведены на рис. 3.5. Очевидно, что для накладки опасным является сечение III-III — это сечение имеет наименьшую площадь (рис. 3.6) и в нем возникает наибольшая продольная сила  $N_{\text{МАХ}} = 0,5P$ .

Напряжение в опасном сечении накладки

$$\sigma_{\text{МАХ}} = \frac{0,5P}{\sigma_x(b_x \mp 4d)} = \frac{0,5 \cdot 550 \cdot 10^1}{10(270 \mp 4 \cdot 20)} = 145 \frac{H}{\text{мм}^2}.$$

Напряжения выше допустимых примерно на 3,5%, то есть прочность накладок достаточна.

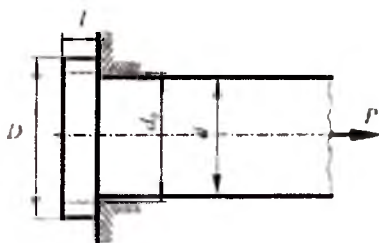


Рис. 3.8.

Задача 3.3. Используя заданные в табл. 3.3. значения величин  $d_0$ ,  $d$ ,  $[\sigma_p]$ ,  $[\sigma_{CM}]$  и  $[\tau_{CP}]$  определить диаметр  $D$  и высоту  $l$  головку стержня, нагруженного растягивающей силой  $P$  (рис. 3.8). Расчет выполнять, исходя из условия равно прочности стержня на растяжение, головки на срез, и ее опорной поверхности на смятие.

Табл. 3.3.

№	$[\sigma_p]$	$[\tau_{CP}]$	$[\sigma_{CM}]$	$d_0$	$d$	№	$[\sigma_p]$	$[\tau_{CP}]$	$[\sigma_{CM}]$	$d_0$	$d$
	$\frac{H}{\text{мм}^2}$						$\frac{H}{\text{мм}^2}$				
1	60	20	170	12	10	16	135	95	245	40	38
2	65	25	175	14	12	17	140	100	250	38	36
3	70	30	180	16	14	18	145	105	255	36	34
4	75	35	185	18	16	19	150	110	260	34	32
5	80	40	190	20	18	20	155	115	265	32	30
6	85	45	195	22	20	21	160	120	270	30	28
7	90	50	200	24	22	22	155	115	265	28	26
8	95	55	205	26	24	23	150	110	260	26	24
9	100	60	210	28	26	24	145	105	255	24	22
10	105	65	215	30	28	25	140	100	250	22	20
11	110	70	220	32	30	26	145	95	245	20	18
12	115	75	225	34	32	27	140	90	240	18	16
13	120	80	230	36	34	28	135	85	235	16	14
14	125	85	235	38	36	29	130	80	230	14	12
15	130	90	240	40	38	30	125	75	225	12	10

Указания к решению задачи 3.3.

Дано: Рис. 3.8,  $[\sigma_x]=140$  МПа,  $[\tau_k]=100$  МПа,  
 $[\sigma_0]=250$  МПа.

$$d_0 = 34 \text{ мм}, \delta = 32 \text{ мм}.$$

### Решение

1) Определяем допускаемую нагрузку из условия прочности стержня на растяжение

$$[P] = [\sigma_p] \frac{\pi d^2}{4} = 140 \cdot 10^6 \frac{3,14 \cdot 0,032^2}{4} = 112,6 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

2) Определяем диаметр опорной поверхности головки из условия ее прочности на смятие

$$\sigma_{сМ} = \frac{P}{F_s} \leq [\sigma_{сМ}].$$

Принимая,  $P = [P_p]$  получаем

$$\sigma_{сМ} = \frac{[P]}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d_0^2)} \leq [\sigma_{сМ}],$$

Откуда

$$D \geq \sqrt{\frac{4[P]}{\pi[\sigma_s]} + d_0^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 250 \cdot 10^6} + 0,034^2} = 0,0417 \text{ м} = 41,7 \text{ мм}.$$

Принимаем  $D = 42 \text{ мм}$ .

3) Определяем высоту головки из условия прочности на срез:

$$\tau_{ср} = \frac{P}{F_{ср}} \leq [\tau_{ср}].$$

Площадь среза равна боковой поверхности цилиндра высотой  $l$  и диаметром  $d_0$  (в место возможного среза условно показано на рис. 3.8 волнистыми линиями). Принимая  $[P] = [P_p]$ , получаем

$$\tau_{CP} = \frac{P}{F_{CP}} = \frac{[P_p]}{\pi d_0^2} \leq [\tau_{CP}].$$

Откуда

$$l \geq \frac{[P]}{\pi d_0 [\tau_k]} = \frac{112,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 34 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^6} = 0,01055 \text{ м} = 10,55 \text{ мм}$$

Приинимаем  $l = 11 \text{ мм}$ .

**Задача 3.4.** по заданным в табл. 3.4. значениям параметров  $[\sigma_p]$ ,  $[\sigma_{CM}]$  и  $[\tau_{CP}]$  проверить прочности заклепочного соединения изображенного на рис. 3.9. данные из табл. 3.4.

Таблица 3.4.

№	$[\sigma_1]$	$[\tau_k]$	$[\sigma_2]$	$\delta$	$\delta_k$	I	II	III	P	t	b	d	e
	$\frac{H}{\text{мм}}$			мм		Количества заклепок в сечениях			кН	мм			
1	105	60	190	6	1	1	2	2	280	50	120	14	20
2	110	65	195	7	2	1	2	2	285	51	122	15	21
3	115	70	200	8	3	1	2	3	290	52	124	16	22
4	120	75	205	9	4	1	2	4	295	53	126	17	23
5	125	80	210	10	5	1	2	3	300	54	128	18	24
6	130	85	215	11	6	1	2	3	305	55	130	19	25
7	135	90	220	12	7	1	2	4	310	56	132	20	26
8	140	95	225	13	8	1	2	2	315	57	134	21	27
9	145	100	230	14	9	2	2	3	320	58	136	22	28
10	150	105	235	15	10	2	2	4	325	59	138	23	29
11	155	110	245	16	11	2	2	3	330	60	140	24	30
12	160	105	250	17	12	2	2	3	335	61	142	25	31
13	155	100	250	18	13	2	2	4	340	62	144	26	32



14	150	95	250	19	14	2	2	3	345	63	146	27	33
15	145	90	245	20	15	2	2	2	350	64	148	28	34
16	140	85	240	20	15	2	2	3	355	65	150	29	35
17	135	80	235	19	14	2	2	4	360	66	152	30	36
18	130	75	230	18	13	2	2	3	365	67	154	31	37
19	125	70	225	17	12	2	2	3	370	68	156	32	38
20	120	65	220	16	11	2	2	3	340	67	154	31	37
21	115	60	215	15	10	2	2	4	335	66	152	30	36
22	110	65	210	14	9	2	2	3	330	65	150	29	35
23	100	70	205	13	8	2	2	2	325	64	148	28	34
24	105	75	200	12	7	1	2	2	320	63	146	27	33
25	110	80	195	11	6	1	2	4	315	62	144	26	34
26	115	85	190	10	5	1	2	3	310	61	142	25	33
27	120	90	195	9	4	1	2	2	305	60	140	24	32
28	125	95	200	8	3	1	2	3	300	59	138	23	31
29	130	100	205	7	2	1	2	3	295	58	136	22	30
30	135	105	210	6	1	1	2	3	290	57	134	21	29

*Указания к решению задачи 3.4.*

*Дано:* Рис. 3.9;  $[\sigma_p]=160$  МПа;  $[\tau_{cp}]=140$  МПа;  $[\sigma_{cm}]=320$  МПа;  $d = 23$  мм;  $l = 45$  мм;  $t = 60$  мм;  $\delta = 12$  мм;  $\delta_x = 14$  мм;  $P = 280$  кН.

*Решение*

1) Проверяем прочность полосы на растяжение. На рис. 3.10 показана эпюра продольных сил для полосы, построенная на основе допущения, что каждая заклепка

передает усилие равное  $\frac{P}{n}$ , где  $n$  — общее число закле-

пок. Расчет следует выполнить для сечения I — I, в котором возникает наибольшая продольная сила  $N_1 = P$ , и для сечения II — II, усилие в котором меньше, чем  $N_1$

( $N_2 = \frac{4P}{5}$ ), но и расчетная площадь также меньше.

Для сечения I — I.

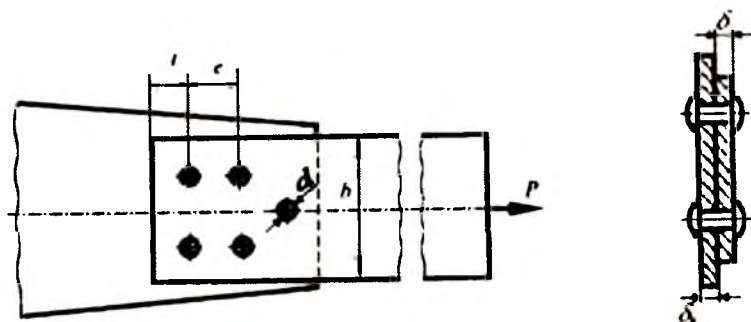


Рис. 3.9.

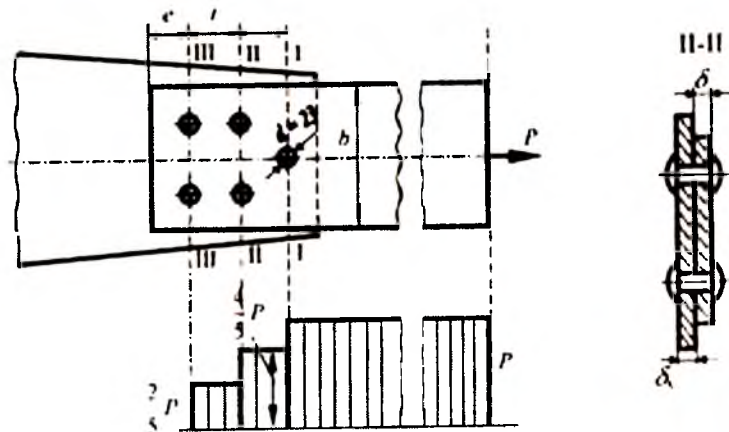


Рис. 3.10.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_{нрII}} = \frac{P}{\delta(h \mp d)} = \frac{280 \cdot 10^3}{0,012(0,18 \mp 0,023)} = 149 \cdot 10^6 \text{ Па} = 149 \text{ МПа} < [\sigma_p].$$

Где  $F_{\text{НЕТ}}$  – так называемая площадь нетто сечения I – I, то сеть расчетная площадь – полная площадь за вычетом площади отверстий для заклепок.

Для сечения II – II

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F_{\text{НЕТ}}} = \frac{\frac{4P}{5}}{\delta(b-2d)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot 280 \cdot 10^3}{0,012(0,18 - 2 \cdot 0,023)} = 139 \cdot 10^6$$

Па = 139 МПа .

2) Проверяем прочность заклепки на срез.

$$\tau_{ср} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{2}} = \frac{280 \cdot 10^3}{\frac{5 \cdot 3,14 \cdot 0,023^2}{4}} = 135 \cdot 10^6 \text{ Па} = 135 \text{ МПа.}$$

Условие прочности на срез выполняется, так как 135 < 140.

3) Проверяем прочность соединения на смятие, учитывая, что  $\delta < \delta_k$

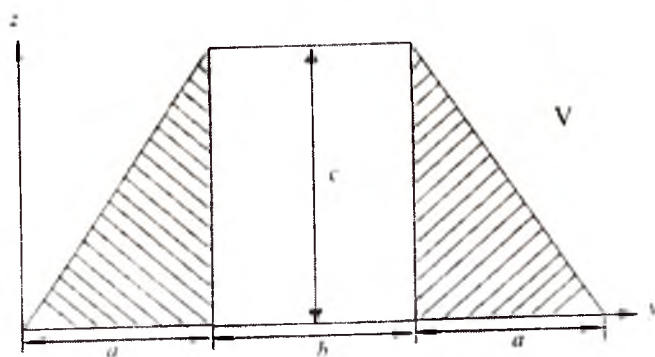
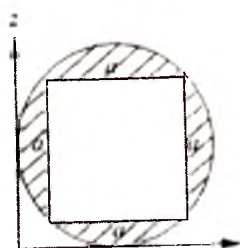
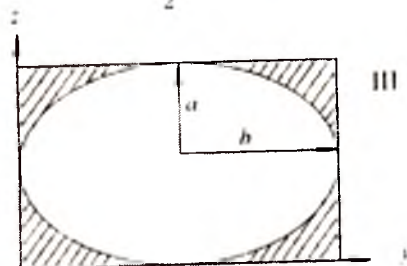
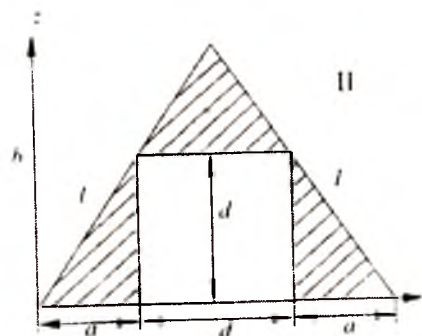
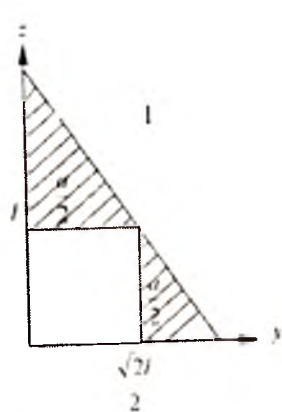
$$\sigma_{см} = \frac{P}{nd\delta} = \frac{280 \cdot 10^3}{5 \cdot 0,023 \cdot 0,012} = 203 \cdot 10^6 \text{ Па} = 203 \text{ МПа,}$$

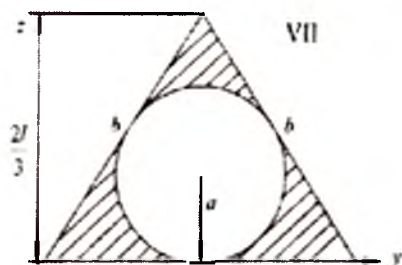
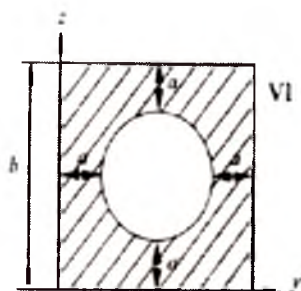
Расчет показывает, что прочность соединения обеспечена. Возможно даже небольшое уменьшение толщины полосы, так как расчеты на растяжения и смятие обнаруживают некоторые резервы прочности.

#### Глава 4. Геометрические характеристики плоских сечений

Задача 4.1. Задавая различные значения параметрам  $a, b, c, d, l$  вычислить осевые моменты инерции заштрихованных участков заданных на рисунках плоских сечений относительно центральных осей и осей  $Z, Y$ , параллельных центральным осям ( $l > b > a$ ).

Рисунки задачи 4.1.





Указания к решению задачи 4.1.

А. Провести сравнения главных моментов инерции и радиусов инерции труб, изображенных на рис. 4.1. и 4.2. вычислить наименьшие моменты сопротивления сечения относительно центральной оси.

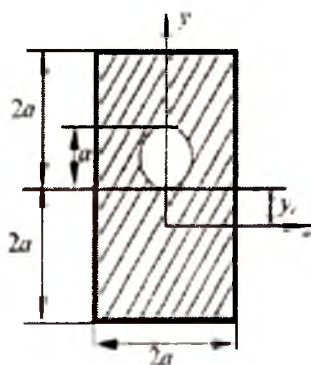


Рис. 4.1.

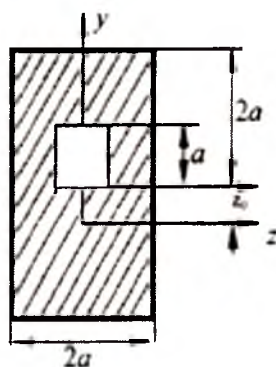


Рис. 4.2.

*Решение* а, б, с, д, л.

Рассмотрим первое сечение.

1) Площадь заштрихованного участка

$$F = 8a^2 \pi \frac{\pi a^2}{4} = 7,21a^2.$$

2) Расстояние от центральной оси  $Z_0$  до центра тяжести трубы равно

$$Y_c = \frac{S_{z_0}}{F},$$

Где

$$S_{z_0} = \pi \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \pi \frac{\pi a^2}{8}.$$

Следовательно,

$$Y_c = \pi \frac{\pi a^2}{8 \cdot 7,21a^2} = \pi 0,055a.$$

3) Используя правило параллельного переноса координатных осей, вычислим момент инерции сечения относительно центральной оси  $Z_0$ .

$$J_z = \sum (J_{z_0} + Fc^2) = \left[ \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} + 8a^2 \cdot (0,055a)^2 \right] \pi \left[ \frac{\pi^4}{64} + \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{a}{2} + 0,055a \right)^2 \right] = 10,33a^2.$$

4) Момент инерции относительно вертикальной оси

$$J_y = \frac{2a \cdot (2a)^3}{12} \pi \frac{\pi^2}{64} = 2,62a^4.$$

5) Главные радиусы инерции

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = \sqrt{\frac{10,33a^4}{7,215a^2}} = 1,2a, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{2,62a^4}{7,215a^2}} = 0,6a.$$

6) Сравнивая полученные значения радиусов инерции, видим, Э, что радиус инерции сечения относительно оси z в два раза больше, чем радиус инерции относительно оси Y.

Производя аналогичные вычисления для второго сечения, получаем

$$F = 7a^2, \quad Y_c = 0,07a, \quad J_z = 10,3a^4, \quad J_y = 2,59a^4, \quad i_z = 1,22a, \quad i_y = 0,61a.$$

7) Моменты сопротивления сечения относительно центральной оси Z:

$$W_z = \frac{J_z}{Y_{\text{мми}}} = \frac{10,33a^4}{2,055a} = 5,027a^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{Y_{\text{мми}}} = \frac{10,3a^4}{2,07a} = 4,97a^3;$$

8) Сравнения значения радиусов инерции двух сечений: - радиусы инерции двух сечений почти равны (их отношение приблизительно равно единице).

Б. Определить координаты центра тяжести для треугольного сечения и полуокружности, изображенного на рис. 4.3 и 4.4.

*Решение*

Треугольное сечение.

1) Так называемые произвольные оси Y.Z проводим так, как показано на рис. 4.3.

2) На расстояние Y от оси Z выделим элементарную

площадку со сторонами  $b_y$  и площадь данного элементарного сечения равна  $dF = b_y dy$ . Используя условия подобия треугольников с углами 1, 2, 3 и 1, 4, 5 получаем

$$b_y = \frac{b}{h}(h-y)dy.$$

Следовательно,

$$dF = \frac{b}{h}(h-y)dy.$$

3) Статические моменты сечения относительно осей  $Y$  и  $Z$

$$S_y = \int Y dF = \int_0^h y \frac{b}{h}(h-y) dF = \frac{b}{h} \int_0^h (yh - y^2) dF = \frac{b}{h} \int_0^h (yh - y^2) dy =$$

$$= \frac{b}{h} \left( \frac{y^2 h}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^h = \frac{b}{h} \left( \frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{bh^2}{6}.$$

$$S_z = \int Z dF = \int_0^h \frac{bh + y(2a-b)}{2h} \cdot \frac{b}{h}(h-y) dy = \frac{b}{2h^2} \int_0^h$$

$$\left[ bh^2 y + (a-b)hy^2 - \frac{2a-b}{3} y^3 \right]_0^h = \frac{bh}{2} \left( b + a - b - \frac{2a-b}{3} \right) = \frac{bh}{6}(a+b).$$

где

$$z = a_y + \frac{b_y}{2} = \frac{a}{h}y + \frac{b}{2h}(h-y) = \frac{bh + y(2a-b)}{2h}.$$



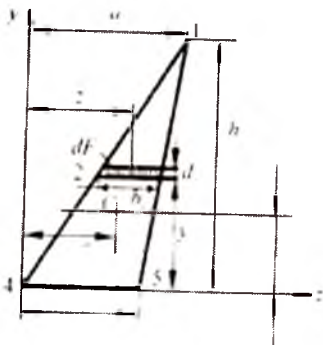


Рис. 4.3.

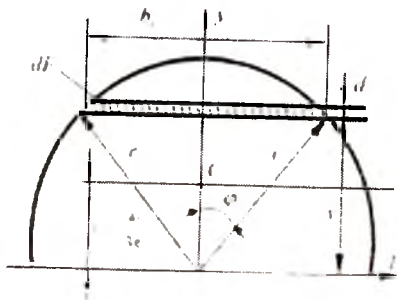


Рис. 4.4.

#### 4) Координаты центра тяжести

$$Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}, \quad Z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\frac{bh}{6}(a+b)}{\frac{bh}{2}} = \frac{a+b}{3}$$

Центр тяжести треугольного сечения показан на рис. 4.3.

Рассмотрим теперь полуокружность.

5) Положения произвольных осей  $Y$ ,  $Z$  показаны на рис. 4.4. Сечение имеет симметрию (ось  $Y$ ). Поэтому центр тяжести данного сечения будет расположен на оси  $Y$ , то есть  $Z_c = 0$ .

6) На расстояние  $Y$  от оси  $Z$  выделим элементарную площадку высотой  $dy$ , шириной  $b_y$  и площадью сечения  $dF = b_y dy$ . Очевидно, что  $b_y = 2r \sin \phi dy$ ,  $y = r \cos \phi$ ,  $dy = -r \sin \phi d\phi$ .

7) Статический момент инерции

$$S_z = \int y dF = \int_0^r 2yr \sin \varphi dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r \cos \varphi \cdot 2r \sin \varphi \cdot (-r \sin \varphi) d\varphi =$$

$$= -2r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = -2r^3 \left( \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right)_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2r^3}{3}.$$

8) Ордината центра тяжести

$$Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{\frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Центр тяжести полуокружности показан на рис. 4.4.

В. Вычислить центробежные моменты инерции относительно осей, параллельных катетам прямоугольного треугольника. Катеты треугольника равны  $b$  и  $h$ .

*Решение.* Проводим параллельные к катетам треугольника оси  $Y$ ,  $Z$  и  $Y_1$ . Вычислим осевые моменты инерции  $J_y$ ,  $J_z$ ,  $J_{y_1}$ .

$$J_z = \frac{bh^3}{36}, \quad J_y = \frac{hb^3}{36}, \quad J_{y_1} = \frac{lc^3}{36}.$$

Здесь  $c = \frac{bh}{l}$ , так как площадь треугольника равно  $F$

$$= \frac{bh}{2} = \frac{cl}{2}.$$

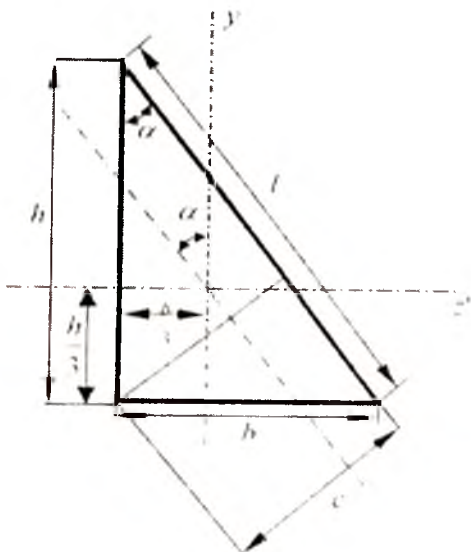


Рис. 4.5.

Исключая  $c$  получаем

$$J_{y_1} = \frac{b^3 h^3}{36l^2} \quad (\text{а})$$

Согласно правилу поворота координатных осей

$$J_{y1} = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha + 2J_{yz} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (\text{б})$$

Здесь

$$\sin \alpha = \frac{b}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{l}.$$

Приравнявая правые части выражения (а) и (б), получаем.

$$\frac{b^3 h^3}{36l^2} = \frac{hb^3}{36} \left(\frac{h}{l}\right)^2 + \frac{bh^3}{36} \left(\frac{b}{l}\right)^2 + 2J_{yz} \frac{b}{l} \cdot \frac{h}{l}$$

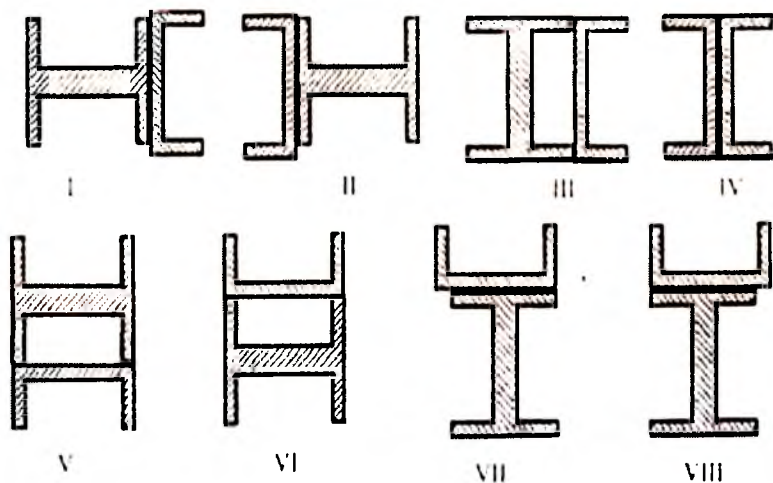
Сокращая последнее равенство на  $\frac{b^3 h^3}{36l^2}$  будем иметь

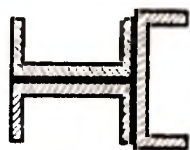
$$1 = 1 + 1 + 2J_{yz} \frac{36}{b^2 h^2}$$

Здесь

$$J_{yz} = \frac{b^2 h^2}{72}$$

Задача 4.2. Вычислить главные моменты инерции плоских сечений, изображенных на рис. Данные взять из табл. 4.1.





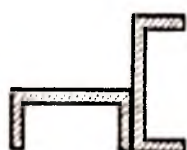
IX



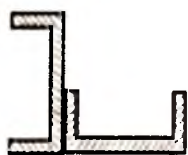
X



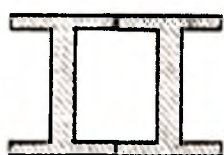
XI



XII



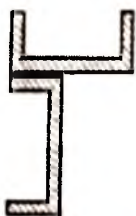
XIII



XIV



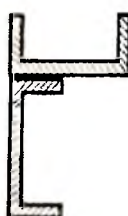
XV



XVI



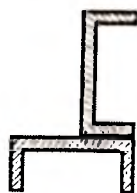
XVII



XVIII



XIX



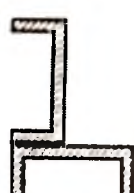
XX



XXI



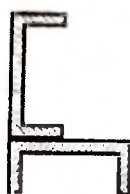
XXII



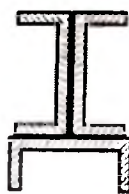
XXIII



XXIV



XXV



XXVI



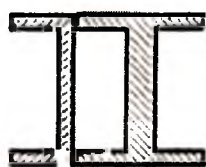
XXVII



XXVIII



XXIX



XXX

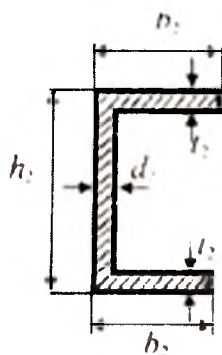
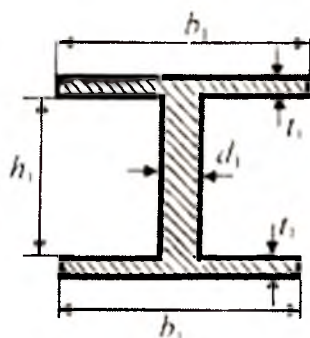


Таблица 4.1.

№	$\sigma_1$	$t_1$	$d_1$	$h_1$	$\sigma_2$	$t_2$	$d_2$	$h_2$
	мм							
1	10	4	2.0	20	12	5	3.0	22
2	11	5	2.5	22	13	6	3.5	24
3	12	6	3.0	24	14	7	4.0	26
4	13	7	3.5	26	15	8	4.5	28
5	14	8	4.0	28	16	9	5.0	30
6	15	9	4.5	30	17	10	5.5	32
7	16	10	5.0	32	18	11	6.0	34
8	17	11	5.5	34	19	12	6.5	36
9	18	12	6.0	36	20	13	7.0	38
10	19	13	6.5	38	21	14	7.5	40
11	20	14	7.0	40	22	15	8.0	42
12	21	15	7.5	42	23	16	8.5	44
13	22	16	8.0	44	24	17	9.0	46

14	23	17	8.5	46	24	18	8.5	48
15	24	18	9.0	48	23	3	8.0	46
16	24	3	8.5	46	22	4	7.5	44
17	23	4	8.0	44	21	5	7.0	42
18	22	5	7.5	42	20	6	6.5	40
19	21	6	7.0	40	19	7	6.0	38
20	20	7	6.5	38	18	8	5.5	36
21	19	8	6.0	36	17	9	5.0	34
22	18	9	5.5	34	16	10	4.5	32
23	17	10	5.0	32	15	11	4.0	30
24	16	11	4.5	30	14	12	3.5	28
25	15	12	4.0	28	13	13	3.0	26
26	14	13	3.5	26	12	14	2.5	24
27	13	14	3.0	24	11	15	2.0	22
28	12	15	2.5	22	10	16	1.5	20
29	11	16	2.0	20	9	17	1.0	18
30	10	17	1.5	18	8	18	0.5	16

Указания к решению задачи 4.2.

А. Вычислить главные моменты инерции таврового сечения, изображенного на рис. 4.6.

*Решение*

В плоскости  $ZY$  абсцисса центра тяжести равно нулю, так как в данной плоскости сечение имеет ось симметрии. Найдем ординату центра тяжести. Для таврового сечения условно разделим на два четырехугольника с площадью сечения  $F_I = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см}^2$  и  $F_{II} = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см}^2$ .

Тогда ордината центра тяжести таврового сечения будет

$$Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{F_I y_1 + F_{II} y_2}{F_I + F_{II}} = \frac{12 \cdot 2 + 24 \cdot 5}{12 + 24} = \frac{144}{36} = 4 \text{ см}.$$

Через центр тяжести (точка С) проводим главные

оси инерции  $Y$  и  $Z_0$ , и вычислим главные моменты инерции относительно этих осей

$$J_{Z_0} = J_{Z_0}^I + a_1^2 F_I + J_{Z_0}^{II} + a_2^2 F_{II},$$

где

$$J_{Z_0}^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16 \text{ см}^4, \quad J_{Z_0}^{II} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 3^3}{12} = 8 \text{ см}^4,$$

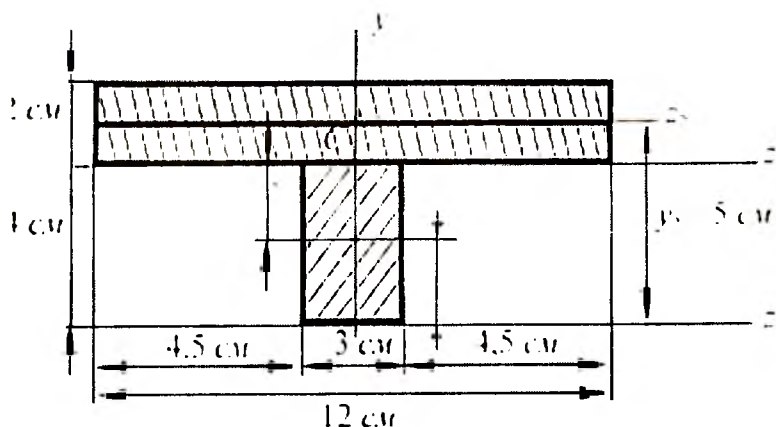


Рис. 4.6.

Подставляя полученные значения, будем иметь

$$J_{Z_0} = 16 + 2^2 \cdot 12 + 8 + 1^2 \cdot 24 = 96 \text{ см}^4.$$

Аналогично

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = \frac{4 \cdot 3^3}{12} + \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 297 \text{ см}^4.$$



Здесь  $J_y > J_{z_0}$ , поэтому оси  $Y$  и  $Z$  соответственно будут осями максимума и минимума.

**Задача 4.3** - Для заданного в табл. 4.2. поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра (рис. Задачи 4.3), требуется: 1) определить положение центра тяжести; 2) найти осевые (экваториальные)  $I_p$  центробежный моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести ( $z_c$  и  $y_c$ ); 3) определить направление главных центральных осей ( $u$  и  $v$ ); 4) найти моменты инерции относительно главных центральных осей; 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Рисунки задачи 4.3.

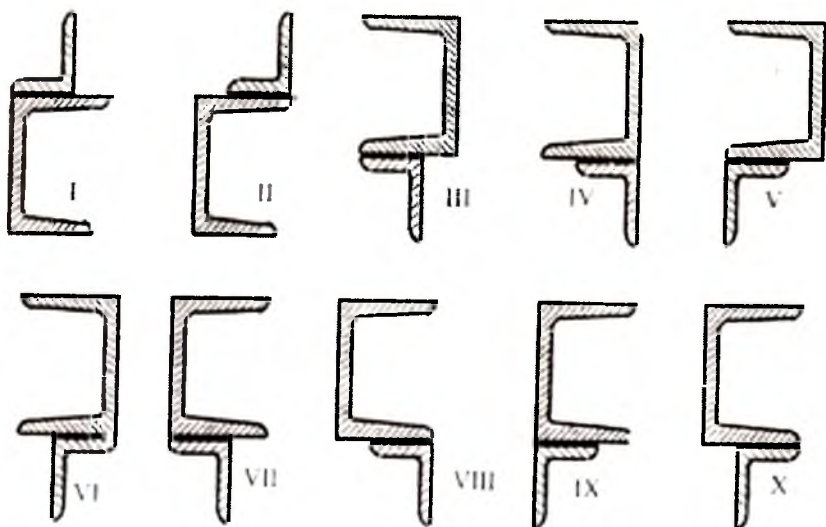






Таблица 4.2.

№	Схема	Швеллер	Равнобокий уголок	Дву- тавр
1	I	5	40x40x4	18
2	II	6.5	50x50x4	20
3	III	8	56x56x4	22
4	IV	10	70x70x6	24
5	V	12	70x70x8	27
6	VI	14	75x75x6	18
7	VII	14a	75x75x8	20
8	VIII	16	80x80x6	22
9	IX	16a	80x80x8	24
10	X	18	90x90x6	27
11	XI	18a	50x50x4	18
12	XII	5	100x100x8	20
13	XIII	6.5	100x100x10	22
14	XIV	8	250x250x20	24
15	XV	10	180x180x12	27
16	XVI	20	160x160x10	22
17	XVII	20a	70x70x6	18
18	XVII	22	70x70x8	20
19	XIX	22a	75x75x6	22
20	XX	24	75x75x8	24
21	XXI	24a	70x70x6	27
22	XXII	27	70x70x8	18
23	XXIII	30	75x75x6	20
24	XXIV	33	75x75x8	22
25	XXV	36	70x70x6	24
26	XXVI	40	70x70x8	27

27	XXVII	36	75x75x6	36
28	XXVIII	33	75x75x8	18
29	XXIX	30	125x125x10	20
30	XXX	27	140x140x12	22

Указания к решению задачи 4.3.

А. Вычислить осевые моменты инерции  $J_{y_0}$ ,  $J_{z_0}$  и  $J_{y_0 z_0}$  относительно осей  $Y_1$ ,  $Z_1$  для неравнобокого угольника 110•70•8 мм (рис. 4.7).

Дано: рис. 4.7;  $J_z = 54,6 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 172 \text{ см}^4$ ,  $J_U = J_{\min} = 32,3 \text{ см}^4$ ,  $F = 13,9 \text{ см}^2$ ,  $\text{tga} = 0,4000$ ,  $Y_0 = 1,64 \text{ см}$ ,  $Z_0 = 3,61 \text{ см}$  и  $\phi = 21^{\circ}48'$  (данные берутся из таблицы сортамента).

Решение. Согласно теореме

$$J_U + J_v = J_y + J_z,$$

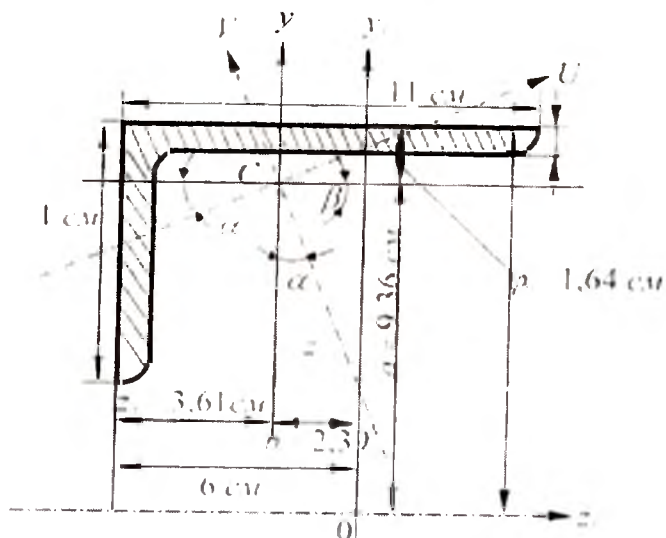


Рис. 4.7.

Получаем

$$J_y = J_{\max} = J_v + J_z - J_U = 172 + 54,6 - 32,3 = 194,3 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции

$$J_{yz} = \frac{J_v - J_u}{2} \sin 2\beta + J_{uv} \cos 2\beta,$$

$$\text{где } \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 21^\circ 48' = 68^\circ 12'.$$

Относительно главных осей U и V имеем  $J_{UV} = 0$ , поэтому

$$J_z = \frac{194,3 - 32,3}{2} \cdot 0,690 = 55,9 \text{ см}^4.$$

Если вместо осей U, V взять оси Y, Z, то

$$J_{yz} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin \alpha + J_{yz} \cos 2\alpha = 0.$$

Откуда

$$J_{yz} = \frac{J_z - J_y}{2} \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{54,6 - 172}{2} \operatorname{tg} 43^\circ 36' = 58,7 \cdot 0,952 = 55,9 \text{ см}^4$$

По правилу параллельного переноса осей

$$J_{y_1} = J_y + b^2 F = 172 + 2,39^2 \cdot 13,9 = 251 \text{ см}^4,$$

$$J_{z_1} = J_z + a^2 F = 54,6 + 9,36^2 \cdot 13,9 = 1272 \text{ см}^4,$$

$$J_{y_1 z_1} = J_{yz} + abF = 55,9 + (-9,36) \cdot 2,39 \cdot 13,9 = -256 \text{ см}^4.$$

Здесь точка O имеет отрицательную ординату, поэтому параметр  $\alpha$  имеет отрицательное значение  $\alpha = -9,36$  см.

Б. Определить геометрические характеристики составного сечения, состоящего из двух швеллеров № 10 и № 14 а (рис. 4.9).

Дано: швеллер № 14а:  $F_1 = 18,51 \text{ см}^2$ ;  $J_{y_1} = 563,7 \text{ см}^4$ ;  $J_{z_1} = 53,2 \text{ см}^4$ ;  $Y_0 = 1,71 \text{ см}$ .  $h_1 = 14 \text{ см}$ .  $b_1 = 5,8 \text{ см}$ .  $d_1 = 0,6 \text{ см}$ .  $t_1 = 0,95 \text{ см}$ .

Швеллер № 10 швеллер:  $F_2 = 12,74 \text{ см}^2$ ;  $J_{y_2} = 25,6 \text{ см}^4$ ;  $J_{z_2} = 198,3 \text{ см}^4$ .  $Z_0 = 1,52 \text{ см}$ .  $h_2 = 10 \text{ см}$ .  $b_2 = 5,8 \text{ см}$ .  $d_2 = 0,58 \text{ см}$ .  $t_2 = 0,85 \text{ см}$ .

### Решение

1) вычерчиваем в масштабе составного сечения и проводим центральные оси  $Y_1, Z_1$  и  $Y_2, Z_2$  (рис.4.8).

2) Проводим вспомогательные оси  $Z$  и  $Y$  параллельно сторонам контура составного сечения так, чтобы оно лежало в положительном квадранте.

3) Вычисляем площадь составного сечения

$$F = F_1 + F_2 = 18,51 + 12,74 = 31,25 \text{ см}^2.$$

4) Вычисляем статические моменты сечения относительно осей  $Z$  и  $Y$ :

$$S_y = F_1 \frac{h_1}{2} + F_2(h_1 + Z_0) = 18,51 + 12,74 \cdot 15,52 = 327,29 \text{ см}^3.$$

$$S_z = F_1 Y_0 + F_2 \frac{h_2}{2} = 18,51 + 1,71 \cdot 12,74 = 95,35 \text{ см}^3.$$

5) Определяем расстояния от вспомогательных осей  $Z$  и  $Y$  до центра тяжести составного сечения (точка  $C$ ):

$$Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{95,35}{31,25} = 3,05 \text{ см}; \quad Z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{327,29}{31,29} = 10,47 \text{ см};$$

Наносим на чертеже центр С и проводим центральные оси  $Z_0$  и  $Y_0$ .

б) Вычисляем осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей  $Z_0$  и  $Y_0$ :

$$J_y^0 = J_{y_1} + F_1 a_1^2 + J_{z_1} + F_2 a_2^2, \quad a_1 = Z_c - \frac{h_1}{2} = 3,47 \text{ см}, \quad a_2 = h_1 + Z_0 - Z_c = 5,05 \text{ см}.$$

Следовательно,

$$J_y^0 = 563,7 + 18,51 \cdot 3,47^2 + 25,6 + 12,74 \cdot 5,05^2 = 1136 \text{ см}^4;$$

$$J_z^0 = J_{z_1} + F_1 c_1^2 + J_{y_1} + F_2 c_2^2, \quad c_1 = Y_c - Y_0 = 1,34 \text{ см}, \quad c_2 = \frac{h_2}{2} - Y_c = 1,95 \text{ см}$$

Окончательно

$$J_z^0 = 53,2 + 18,51 \cdot 1,34^2 + 198,3 + 12,74 \cdot 1,95^2 = 333 \text{ см}^4;$$

$$J_{yz}^0 = J_{y_1 z_1} + F_1 a_1 c_1 + J_{z_1 y_1} + F_2 a_2 c_2 = F_1 a_1 c_1 + F_2 a_2 c_2 = 18,51 \cdot 3,47 \cdot 1,34 + 12,74 \cdot 5,05 \cdot 1,95 = 209 \text{ см}^4.$$

7) Определяем угол наклона главных осей к цен-

тральным осям оси  $Z_0$  и  $Y_0$ .

$$y g 2\alpha_0 = \frac{2J_{yz}^0}{J_z^0 - J_z^0} = \frac{2 \cdot 209}{333 - 1136} = -0,520$$

или  $2\alpha_0 = -27^{\circ}30'$ ,  $\alpha_0 = -13^{\circ}45'$ .

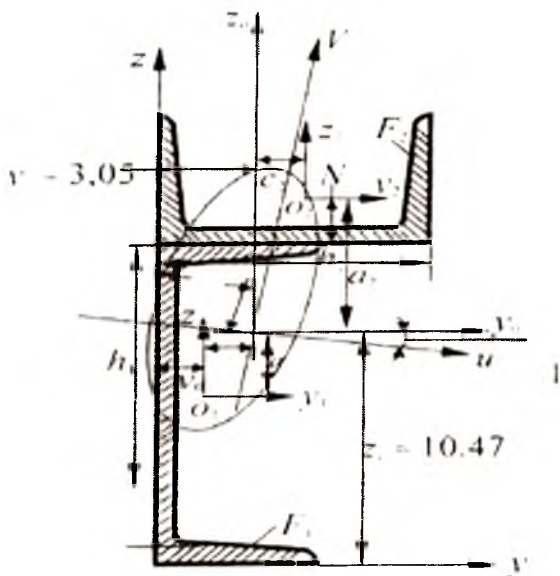


Рис. 4.9.

Так как угол  $\alpha_0$  отрицательный, то откладываем его от оси  $Y_0$  по часовой стрелке и проводим главную центральную ось  $U$ , а перпендикулярно к ней вторую главную ось  $V$ .

8) вычислим главные моменты инерции:

$$J_U = J_Y^0 \cos^2 \alpha_0 + J_Z^0 \sin^2 \alpha_0 - J_{yz}^0 \sin 2\alpha_0;$$

$$J_V = J_Y^0 \sin^2 \alpha_0 + J_Z^0 \cos^2 \alpha_0 + J_{yz}^0 \sin 2\alpha_0;$$

где



$$\sin\alpha_0 = -0,238, \sin 2\alpha_0 = -0,462, \cos\alpha_0 = 0,972, \cos 2\alpha_0 = 0,8872,$$

Следовательно,

$$J_U = 1136 \cdot 0,972^2 + 333 \cdot (-0,238)^2 - 209 \cdot (-0,462) = 1187 \text{ см}^4;$$

$$J_V = 1136 \cdot (-0,238)^2 + 333 \cdot 0,972^2 - 209 \cdot (-0,462) = 282 \text{ см}^4;$$

9) Проверка

$$J_U + J_V = J_Y^0 + J_Z^0,$$

$$J_{UV} = \frac{J_Y^0 - J_Z^0}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{YZ}^0 \cos 2\alpha_0 = 0,$$

в рассматриваемом случае

$$1187 + 282 = 1136 + 333 = 1469 \text{ см}^4,$$

$$\frac{1136 - 333}{2} (-0,462) + 209 \cdot 0,887 = -184 + 184.$$

10) Определяем главные радиусы инерции:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_U}{F}} = \sqrt{\frac{1187}{31,25}} = \sqrt{37,98} = 6,16 \text{ см},$$

$$i_v = \sqrt{\frac{J_V}{F}} = \sqrt{\frac{287}{31,25}} = \sqrt{9,02} = 3,0 \text{ см}.$$

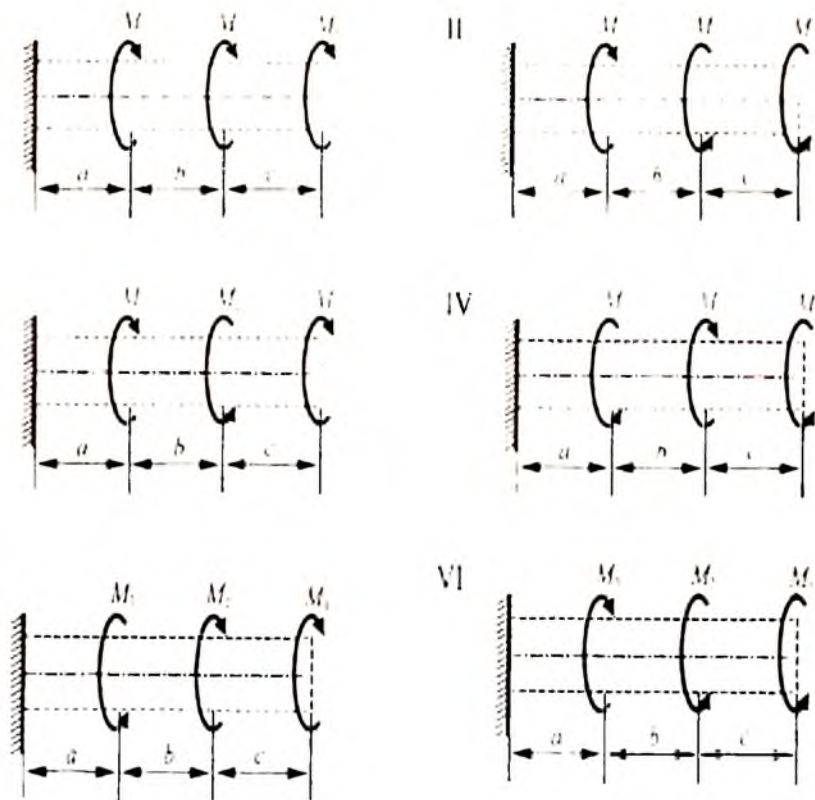
Откладываем на главных осях инерции  $U$  и  $V$  значения радиусов инерции и строим на них эллипс инерции (рис. 4.8).

## Глава 5. Расчет вала на прочность

**Задача 5.1.** Для цилиндрического вала из стального материала требуется:

1) Построить эпюры крутящих моментов.

Рисунки задачи 5.1.



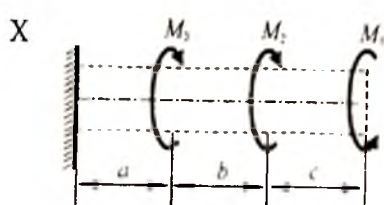
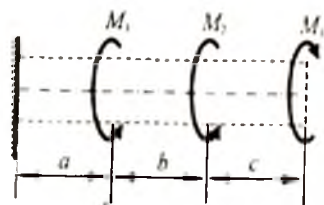
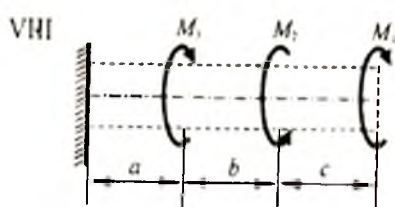
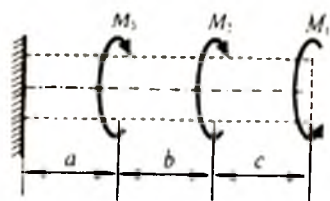


Таблица 5.1.

Схе- мы	Вари- ант	$M_1$	$M_2$	$M_3$	a	b	c
		Н м					
I	1	200	150	100	0.15	0.20	0.30
	2	190	160	110	0.16	0.21	0.31
	3	180	170	120	0.17	0.22	0.32
II	4	200	150	600	0.20	0.30	0.20
	5	210	160	610	0.21	0.31	0.21
	6	220	170	620	0.22	0.32	0.22
III	7	400	100	200	0.30	0.25	0.30
	8	410	110	210	0.31	0.26	0.31
	9	420	120	220	0.32	0.27	0.32
IV	10	100	300	150	0.40	0.11	0.15
	11	110	310	160	0.41	0.12	0.16
	12	120	320	170	0.42	0.13	0.17
V	13	200	100	700	0.15	0.20	0.10
	14	210	110	710	0.16	0.21	0.11
	15	220	120	720	0.17	0.22	0.12
VI	16	300	400	800	0.20	0.35	0.20
	17	310	410	810	0.21	0.36	0.21
	18	320	420	820	0.22	0.37	0.22

VII	19	400	210	300	0.30	0.15	0.20
	20	410	220	310	0.31	0.16	0.21
	21	420	230	320	0.32	0.17	0.22
VIII	22	300	800	150	0.25	0.26	0.27
	23	310	810	160	0.26	0.27	0.28
	24	320	820	170	0.27	0.28	0.29
IX	25	510	400	300	0.30	0.20	0.25
	26	520	410	310	0.31	0.21	0.26
	27	530	420	320	0.32	0.22	0.27
X	28	300	600	200	0.40	0.15	0.20
	29	310	610	200	0.41	0.16	0.21
	30	320	620	210	0.42	0.17	0.22

2) Из условия прочности материала определить допустимое значение диаметра вала ( $[\sigma] = 60 \frac{H}{MM^2}$ ) написать значение диаметра вала в виде целого числа согласно стандарту;

3) Используя принятое допустимое значение диаметра построить эпюру угла закручивания вала  $\varphi$ . Данные взять из таблицы 5.1.

*Указания к решению задачи 5.1.*

А. Построить эпюры крутящих моментов и наибольших касательных напряжений для вала изображенного на рис. 5.1.

*Дано:* рис. 5.1, а и 5.2

*Решение*

Принятые здесь правило знаков крутящих моментов и их энюра приведены на рис. 5.3 и рис. 5.1 соответственно.

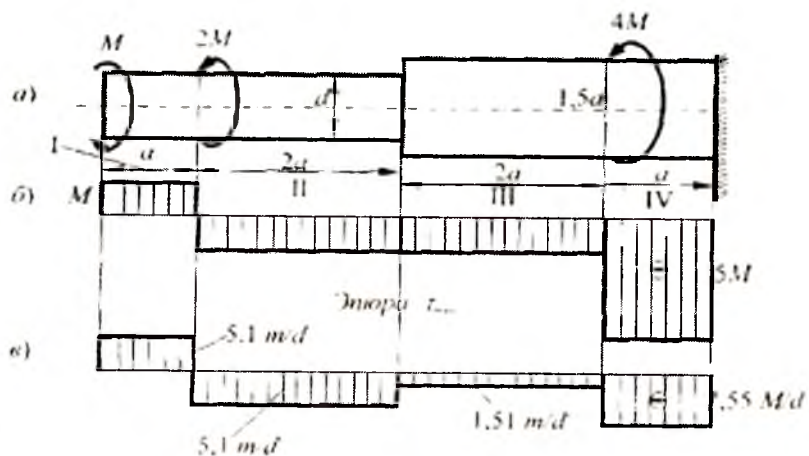


Рис. 5.1.

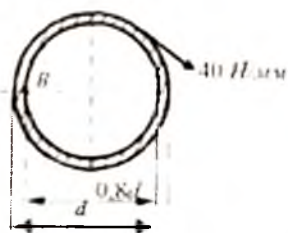


Рис. 5.2

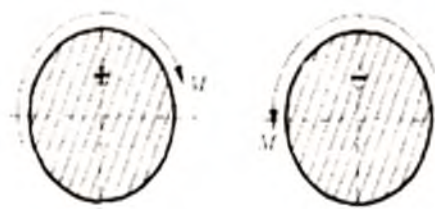


Рис. 5.3.

Вычисляем максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях каждого участка. Знак касательного напряжения обусловлен знаком крутящего момента:

- на первом участке

$$\tau_{\max}^I = \frac{M_{\phi}^I}{W_{\phi}^I} = \frac{M}{\frac{\pi d^3}{16}} = 5,1 \frac{M}{d^3};$$

- на втором участке

$$\tau_{\max}^{II} = \frac{M_{\phi}^{II}}{W_{\phi}^{II}} = \frac{M}{\frac{\pi d^3}{16}} = -5,1 \frac{M}{d^3};$$

- на третьем участке

$$\tau_{\max}^{III} = \frac{M_{\phi}^{III}}{W_{\phi}^{III}} = \frac{M}{\frac{\pi (1,5d)^3}{16}} = 1,51 \frac{M}{d^3};$$

- на четвертом участке

$$\tau_{\max}^{IV} = \frac{M_{\phi}^{IV}}{W_{\phi}^{IV}} = \frac{5M}{\frac{\pi (1,5d)^3}{16}} = 7,55 \frac{M}{d^3}.$$

Эпюра наибольших касательных напряжений представлена на рис. 5.1, в.

Б. Для заданного вала (рис. 5.4) угол поворота сечения А, если брус нагружен распределенным моментом интенсивностью  $m$ .

*Решение*

Крутящий момент в произвольном поперечном се-

чении  $x$  вала  $M_x = mx$ . Так как крутящий момент изменяется по длине вала, то угол закручивания определяем по формуле

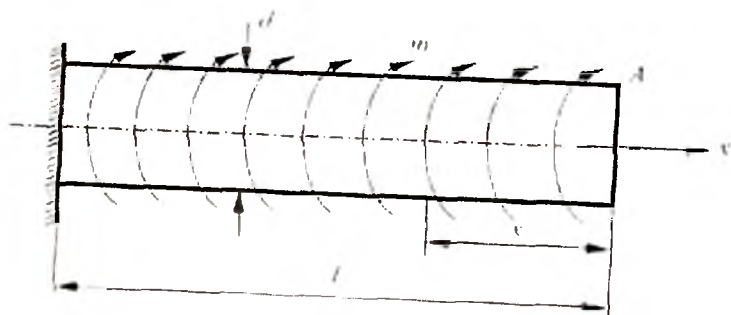


Рис. 5.4.

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x dx}{GJ_p}$$

В рассматриваемом примере  $m_x = mx$  и  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$ .

Поэтому

$$\varphi = \int_0^l \frac{mxdx}{G \frac{\pi D^4}{32}} = \frac{32m}{\pi G D^4} \int_0^l x dx = 5.1 \frac{ml^2}{G D^4}$$

**В.** Для заданного вала (рис. 5.5, а) построить эпюру углов поворота поперечных сечений (эпюру  $\varphi$ ).

*Решение*

На рис. 5.5, б представлена эпюра крутящих моментов (см. предыдущих примеров).

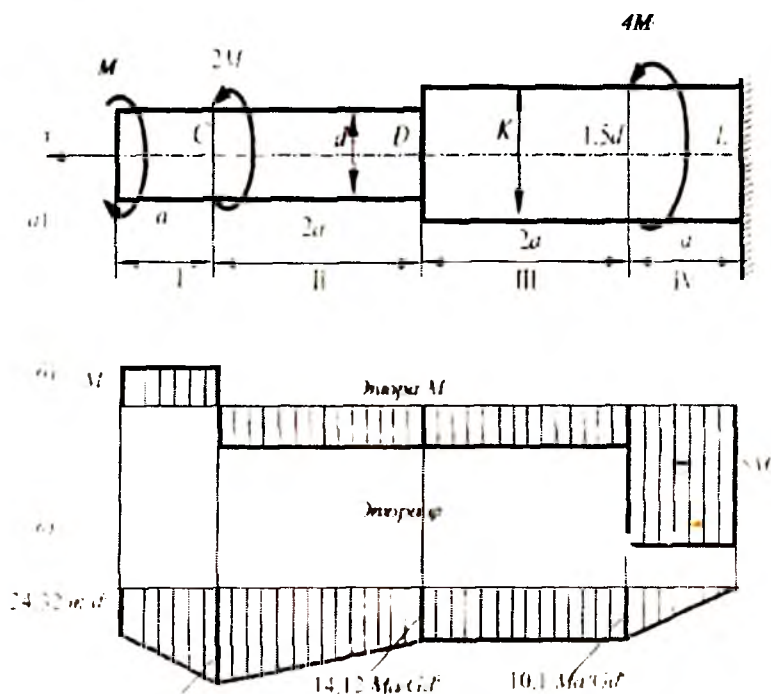


Рис. 5.5.

Угол поворота сечения вала с постоянным (в пределах каждого участка) поперечным сечением и крутящим моментом определяется по формуле:

$$\varphi = \sum \frac{M_{\rho} l_{\rho}}{GJ_{\rho}}$$

Эпюру углов поворота сечений строим, начиная от закрепленного конца. В пределах каждого из участков вала эпюра  $\varphi$  линейна, поэтому достаточно определить углы поворота только для граничных сечений участков.

Угол поворота сечения  $L$  равен нулю, так как это



сечение закреплено, то есть  $\varphi_L = 0$ .

Угол поворота сечения  $K$ , равный углу закручивания участка  $KL$ ,

$$\varphi_K = \varphi_{KL} = \frac{M_{II}^{IV} l_{II}}{GJ_{PII}} = \frac{5Ma}{\frac{G\pi(1.5d)^4}{32}} = 10.1 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Угол поворота сечения  $D$

$$\varphi_D = \varphi_K + \varphi_{DK} = \varphi_K + \frac{M_{II}^{III} l_{III}}{GJ_{PIII}} = 10.1 \frac{Ma}{Gd^4} \frac{M \cdot 2a}{\frac{G\pi(1.5d)^4}{32}} = 14.12 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Угол поворота сечения  $C$

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{DC} = \varphi_D + \frac{M_{II}^{II} l_{II}}{GJ_{PII}} = 14.12 \frac{Ma}{Gd^4} \frac{M \cdot 2a}{\frac{G\pi d^4}{32}} = 34.52 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Угол поворота сечения  $B$

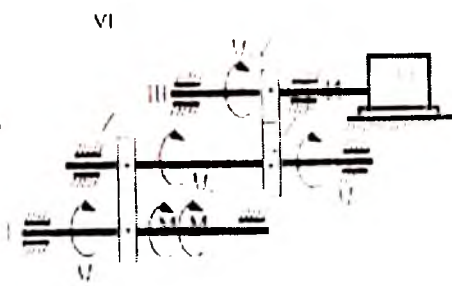
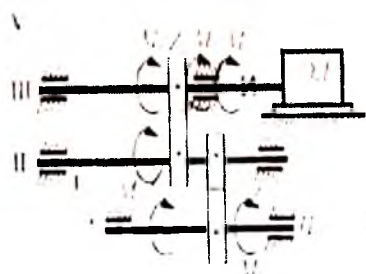
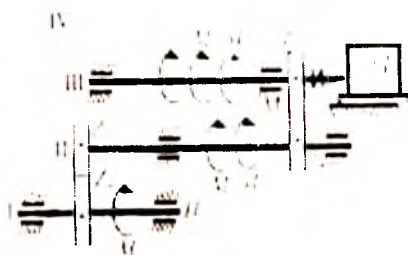
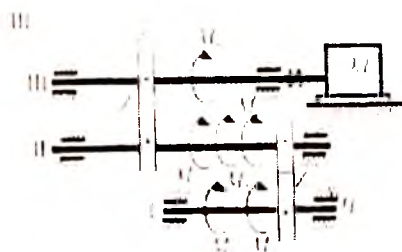
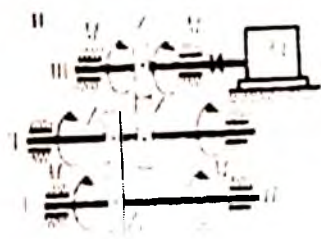
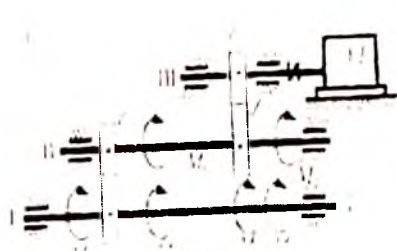
$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{CB} = \varphi_C + \frac{M_{II}^{I} l_{I}}{GJ_{PI}} = 34.52 \frac{Ma}{Gd^4} \frac{M \cdot 2a}{\frac{G\pi d^4}{32}} = 24.32 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Эпюра угла  $\varphi$  представлена на рис. 5.5, в..

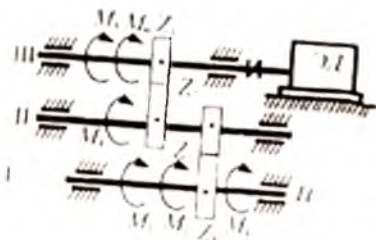
Задача 5.2. Для заданной схемы привода требуется: 1) построить эпюры крутящих моментов для валов  $I$ ,  $II$ ,  $III$ ; 2) используя заданные значения  $[\tau_A]$ ,  $[\varphi_A]$  и  $G$  определить из расчета на прочность и жесткость требуемые диаметры валов  $I$ ,  $II$ ,  $III$ , для каждого из валов значение диаметра, определенное расчетом, округлить до четного или, оканчиваю) десята на пять числа миллиметров; 3)

определить требуемую мощность электродвигателя.  
 Данные взять из таблицы 5.2.

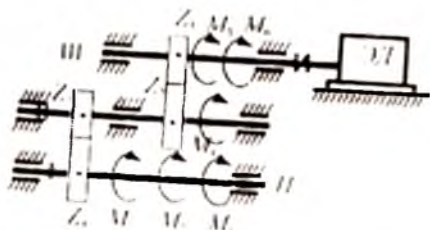
Рисунки задачи 5.2.



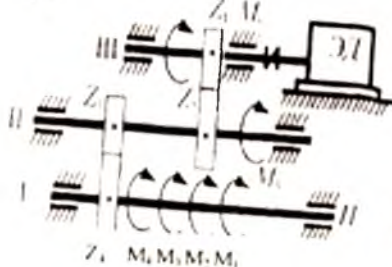
VII



VIII



IX



X

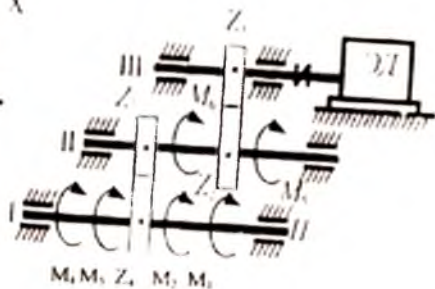


Таблица 5.2.

№	Вариант	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$	$n_{об}$ мин	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$
		$H_m$										
1	I	380	400	250	260	150	230	150	20	45	25	60
	II	390	260	380	240	160	210	160	21	46	26	61
	III	400	270	360	220	170	200	170	22	47	27	62
2	IV	420	270	440	180	170	210	120	22	60	28	80
	V	400	250	420	190	170	220	110	24	62	30	82
	VI	410	260	380	200	180	230	100	25	64	32	84
3	VII	390	300	150	230	120	180	210	21	54	23	90
	VIII	400	310	160	250	140	210	215	23	55	21	95
	IX	410	270	170	240	150	200	220	25	56	20	80
4	X	360	270	210	230	140	250	180	25	55	21	61
	XI	280	380	200	350	150	260	190	26	56	22	62
	XII	400	290	180	370	160	270	140	27	57	23	63

5	XIII	410	260	180	310	180	230	115	20	65	22	70
	XIV	400	280	190	320	190	240	120	21	66	23	71
	XV	390	250	200	340	200	250	130	22	67	24	72
6	XVI	390	500	180	240	200	200	145	26	58	20	65
	XVII	400	490	190	250	210	270	150	27	59	21	66
	XVIII	410	480	200	260	220	280	155	28	60	22	67
7	XIX	430	350	230	250	210	260	140	22	65	26	80
	XX	440	360	240	260	220	270	150	23	66	27	81
	XXI	450	360	250	260	230	280	160	24	67	28	82
8	XXII	500	210	280	200	230	160	115	21	75	22	90
	XXIII	490	220	270	210	240	170	120	23	74	23	95
	XXIV	480	230	290	220	250	180	125	25	73	24	90
9	XXV	340	250	300	250	270	180	105	23	59	28	84
	XXVI	350	260	290	260	270	190	100	24	60	29	85
	XXVII	360	270	280	260	280	200	115	25	61	30	85
10	XXVII	460	490	300	330	300	250	115	20	59	25	78
	I	470	480	310	320	310	240	110	21	60	26	79
	XXIX	480	470	320	330	320	230	115	22	61	27	80

### Указания к решению задачи 5.2.

А. От электродвигателя на вал 1 передается мощность  $N$  кВт. С вала 1 на вал 2 мощность  $N_1$  кВт и к рабочим машинам мощности  $N_2$  кВт и  $N_3$  кВт, с вала 2 к рабочим машинам поступают мощности  $N_4$ ,  $N_5$  и  $N_6$  кВт (рис. 5.6, а). Определить диаметры валов  $d_1$  и  $d_2$  из условия прочности и жесткости. Сечения валов 1 и 2 считать по всей длине постоянными.

Частота вращения электродвигателя  $n \frac{\text{об}}{\text{мин}}$ ; диаметры шкивов  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  и  $D_4$  мм заданы.

Дано: рис. 5.6., а;  $N=20$  кВт;  $N_1=15$  кВт;  $N_2=2$  кВт;  $N_3=3$  кВт;  $N_4=7$  кВт;  $N_5=4$  кВт;  $N_6=4$  кВт;

$$[\tau_c] = 25 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}; [\varphi] = 0.25 \frac{\text{град}}{\text{м}}; n = 970 \frac{\text{об/мин}}{\text{мин}}; D_1 = 200 \text{ мм};$$

$$D_2 = 400 \text{ мм}; D_3 = 200 \text{ мм}; D_4 = 600 \text{ мм};$$

### Решение

На рис. 5.6, изображен вал 1. На него поступает мощность  $N$ , и снимаются мощности  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ . Определим частоту вращения, угловую скорость и внешние скручивающие моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ .

$$n_1 = \frac{D_1}{D_2} = 970 \cdot \frac{200}{400} = 485 \frac{\text{об/мин}}{\text{мин}}, \quad \omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{3.14 \cdot 485}{30} = 50.8 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$M = \frac{N}{\omega_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{50.8} = 394 \text{ Нм}, \quad M_1 = \frac{N_1}{\omega_1} = \frac{15 \cdot 10^3}{50.8} = 295 \text{ Нм},$$

$$M_2 = \frac{N_2}{\omega_1} = \frac{2 \cdot 10^3}{50.8} = 295 \text{ Нм}, \quad M_3 = \frac{N_3}{\omega_1} = \frac{3 \cdot 10^3}{50.8} = 59.5 \text{ Нм}.$$

Строим эпюру крутящих моментов для вала и (рис. 5.6), *в*). При этом, двигаясь от левого конца вала, условно считаем моменты, соответствующие мощностям  $N_1$  и  $N_3$ , положительными, а  $N$  — отрицательным. Расчетный (максимальный) крутящий момент  $M_{16\text{MAX}} = 354.5 \text{ Нм}$ .

Из условия прочности

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_{16\text{MAX}}}{W_p} = \frac{M_{16\text{MAX}}}{\frac{\pi d_1^3}{16}} \leq [\tau_c],$$

диаметр вала 1

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{10MAX}}{\pi[\tau_6]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 354.5 \cdot 10^3}{314 \cdot 25}} = 42 \text{ мм.}$$

Из условия жесткости

$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{10MAX}}{GJ_p} = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_{10MAX}}{\frac{G\pi d_1^4}{32}} \leq [\varphi],$$

диаметр вала 1

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{M_{10MAX} \cdot 180 \cdot 32}{G\pi^2[\tau]}} = \sqrt[4]{\frac{354.5 \cdot 180 \cdot 32 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 314^2 \cdot 0.25}} = 56.8 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем с округлением до стандартного значения  $d_1 = 58$  мм.

Частота вращения вала 2

$$n_2 = n_1 \frac{D_3}{D_1} = 970 \cdot \frac{200}{600} = 162 \frac{\text{об}}{\text{мин}},$$

его угловая скорость

$$\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30} = \frac{3 \cdot 14 \cdot 162}{30} = 30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

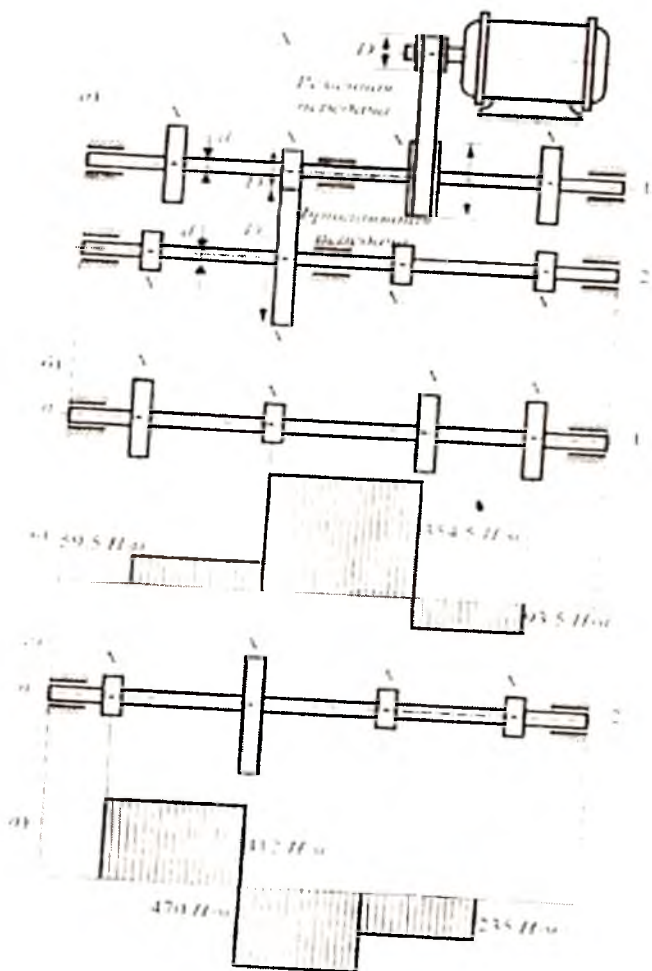


Рис. 5.6.

На рис. 5.6, *б* изображен вал 2; на вал поступает мощность  $N_1$ , а с вала снимаются мощности  $N_4$ ,  $N_5$ ,  $N_6$ . Вычислим внешние скручивающие моменты:

$$M_1 = \frac{N_1}{\omega_2} = \frac{15 \cdot 10^3}{17} = 882 H_m; \quad M_4 = \frac{N_4}{\omega_2} = \frac{7 \cdot 103}{17} = 412 H_m;$$

$$M_5 = M_6 = \frac{N_5}{\omega_2} = \frac{N_6}{\omega_1} = \frac{4 \cdot 10^3}{17} = 235 H_m$$

Эпюра крутящих моментов для вала 2 показана на рис. 5.6, д. Расчетный (максимальный) крутящий момент  $M_{26Max} = 470 H_m$ .

Диаметр вала 2 из условия прочности

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{26} Max}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 470 \cdot 10^3}{3 \cdot 14 \cdot 25}} = 46 mm$$

Диаметр вала 2 из условия жесткости

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{M_{26} Max \cdot 180 \cdot 32}{G \pi^2 [4]}} = \sqrt[4]{\frac{470 \cdot 180 \cdot 32 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 142 \cdot 0,25}} = 61 mm$$

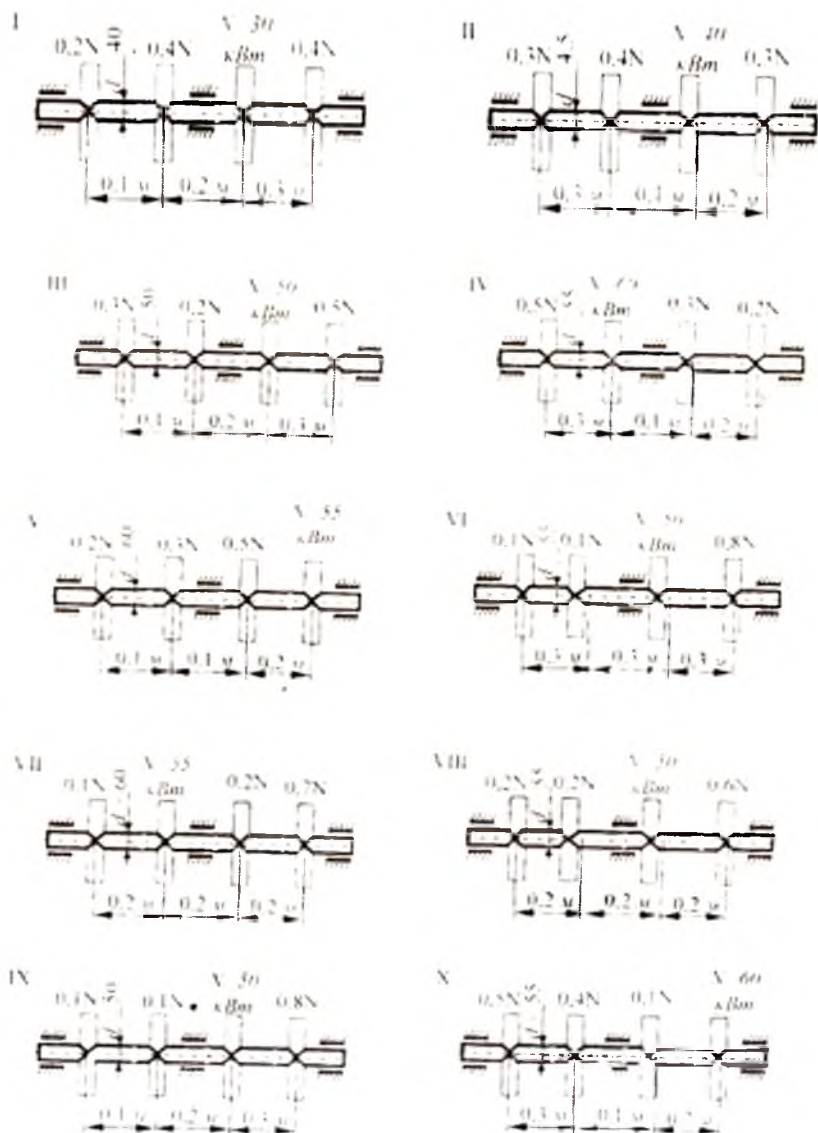
Окончательно принимаем  $d_2 = 62 mm$ .

Задача 5.3. Для заданного тарнсмиссионного вала постоянного сечения требуется: 1) построить эпюру крутящих моментов (ординату эпюры выразить через угловую скорость вала  $\omega$ ) 2) определить из условия прочности допускаемое значение угловой скорости вала  $\omega$ ; 3) при найденном значении  $\omega$  построить эпюру углов поворота сечений, считая левый шкив неподвижным

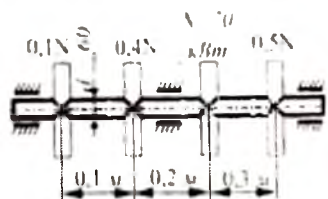
$$\left( \left[ r = 40 \frac{H}{mm^2} \right] \right)$$



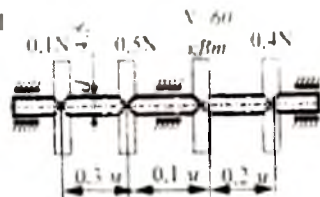
Рисунки задачи 5.3.



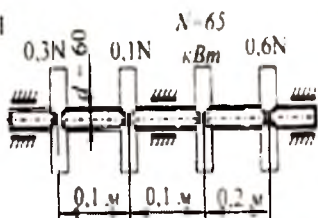
XI



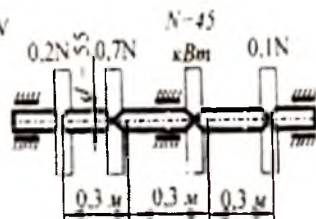
XII



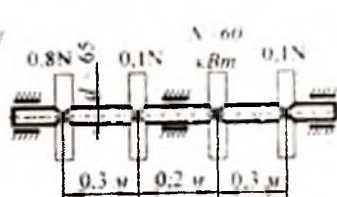
XIII



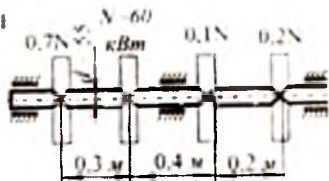
XIV



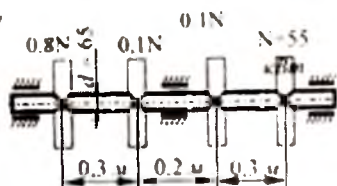
XV



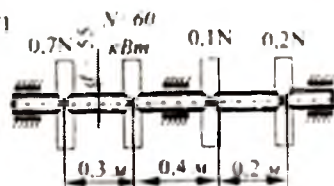
XVI



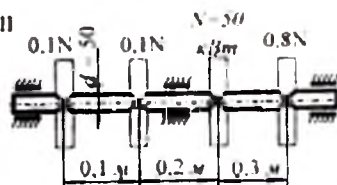
XV



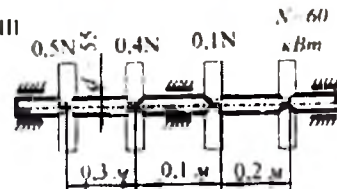
XVI

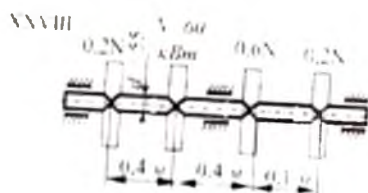
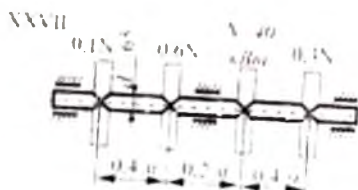
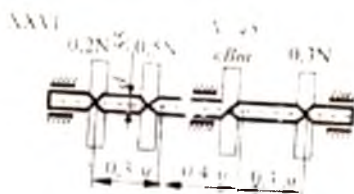
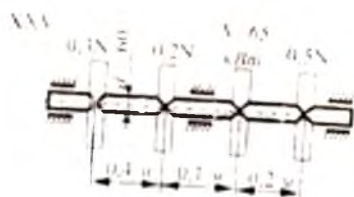
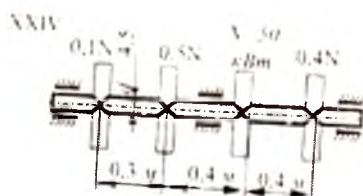
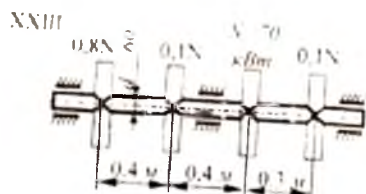
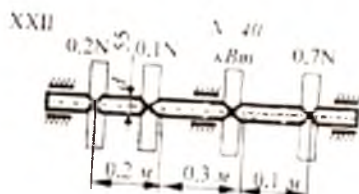
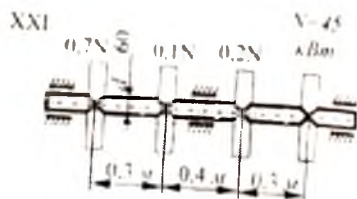
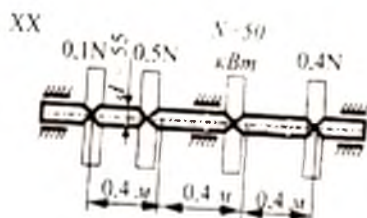
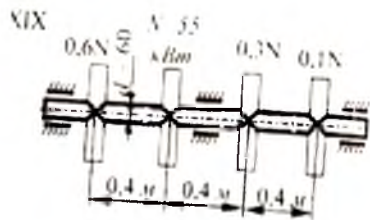


XVII



XVIII





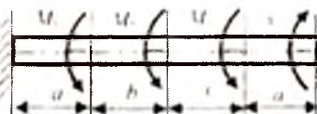
XXIX



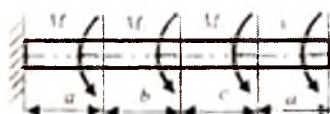
XXX



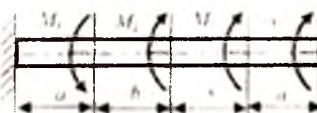
XIII



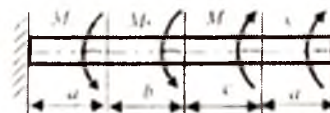
XII



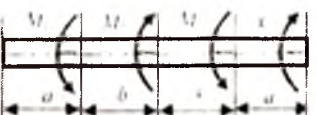
XV



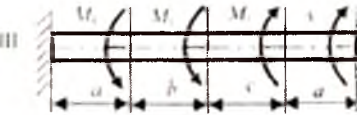
XVI



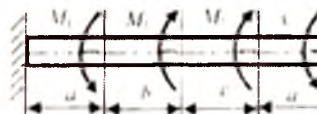
XVII



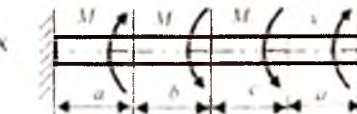
XVIII



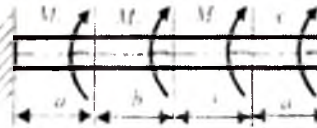
IX



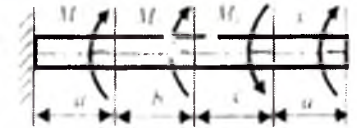
X



XI



XII



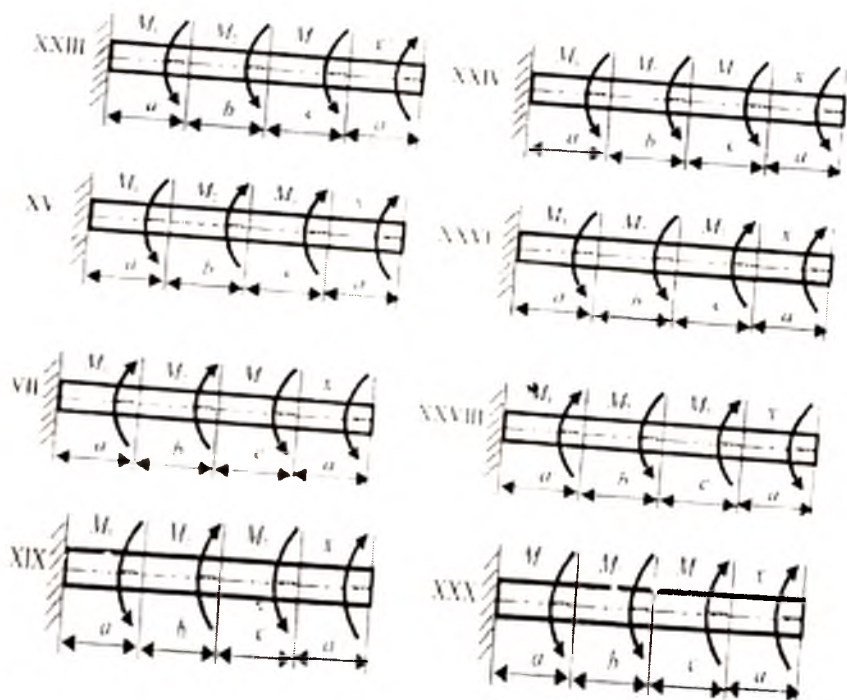


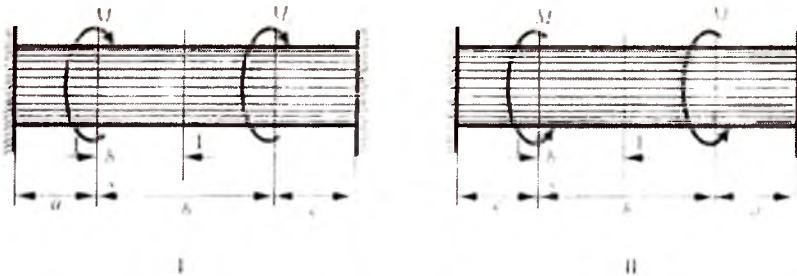
Таблица 5.3.

№	a	b	c	$M_1$	$M_2$	$M_3$	[ $\tau$ ] МПа
I	0.1	0.1	0.1	550	400	550	30
II	0.2	0.2	0.2	600	450	600	35
III	0.3	0.3	0.3	650	550	650	40
IV	0.4	0.4	0.4	700	600	700	45
V	0.5	0.5	0.5	750	650	750	50
VI	0.6	0.6	0.6	800	700	800	55
VII	0.7	0.7	0.7	850	750	850	60
VIII	0.8	0.8	0.8	900	800	900	65
IX	0.9	0.9	0.9	950	850	950	70
X	1.0	1.0	1.0	1000	900	1000	75
XI	1.1	1.1	1.1	1050	950	1050	80
XII	1.2	1.2	1.2	1100	1000	1100	85

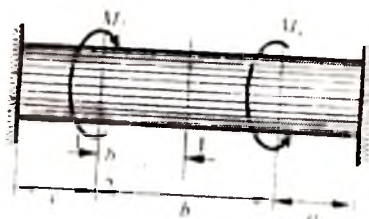
XIII	1.3	1.3	1.3	1150	1050	1150	90
XIV	1.4	1.4	1.4	1200	1100	1200	95
XV	1.5	1.5	1.5	1250	1150	1250	100
XVI	1.6	1.6	1.6	1300	1200	1300	30
XVII	1.7	1.7	1.7	1350	1250	1350	35
XVIII	1.8	1.8	1.8	1400	1300	1400	40
XIX	1.9	1.9	1.9	1450	1350	1450	45
XX	2.0	2.0	2.0	1500	1400	1500	50
XXI	2.1	2.1	2.1	1550	1450	1550	55
XXII	2.2	2.2	2.2	1600	1500	1600	60
XXIII	2.3	2.3	2.3	1650	1550	1650	65
XXIV	2.4	2.4	2.4	1700	1600	1700	70
XXV	2.5	2.5	2.5	1750	1650	1750	75
XXVI	2.6	2.6	2.6	1800	1700	1800	80
XXVII	2.7	2.7	2.7	1850	1750	1850	85
XXVIII	2.8	2.8	2.8	1900	1800	1900	90
XXIX	2.9	2.9	2.9	1950	1850	1950	95
XXX	3.0	3.0	3.0	2000	1900	2000	100

Задача 5.5. для валов, изображенных на рис. построить эпюры крутящих моментов, наибольших касательных напряжений, определить потенциальную энергию деформации и вычислить работу внешних скручивающих моментов. Данные взять из табл. 5.4.

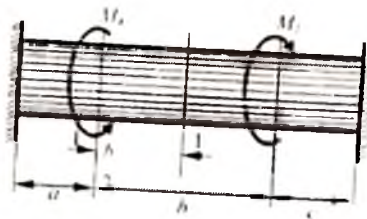
Рисунки задачи 5.5.



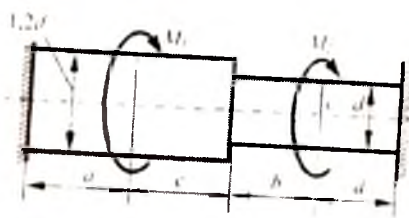




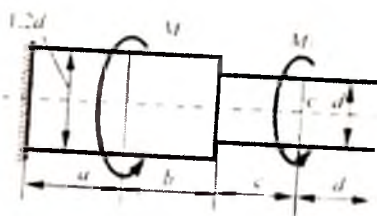
III



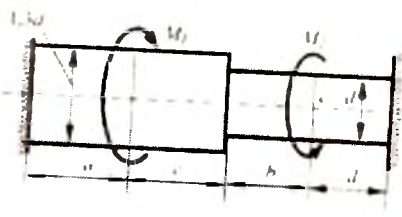
IV



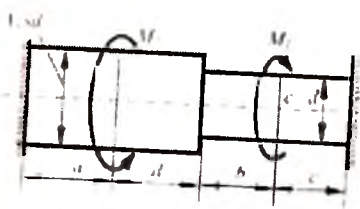
V



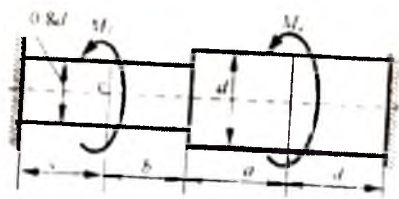
VI



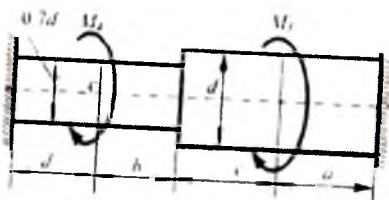
VII



VIII



IX



X

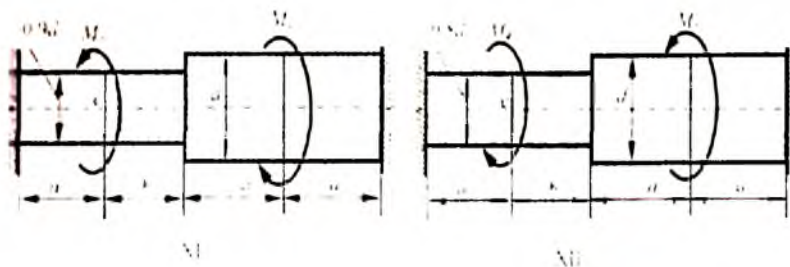
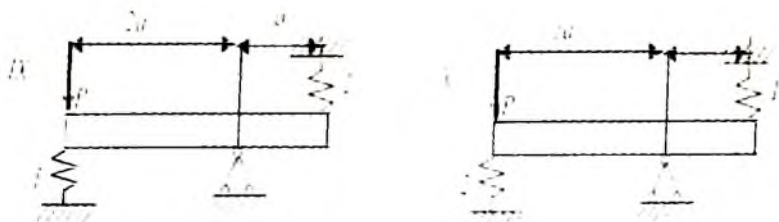


Таблица 5.4.

№	Схе- ма	$a$	$b$	$c$	$d$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$[\tau]$
		$m$				$H_m$				МПа
1	I	0.1	0.6	0.2	0.3	800	600	1000	1100	25
2	II	0.2	0.7	0.3	0.4	900	700	1100	1200	30
3	III	0.3	0.8	0.4	0.5	1000	800	1200	1300	35
4	IV	0.4	0.9	0.5	0.6	1100	900	1300	1400	40
5	V	0.5	1.0	0.6	0.7	1200	1000	1400	1500	45
6	VI	0.6	0.1	0.7	0.8	1300	1100	1500	1600	50
7	VII	0.7	0.2	0.8	0.9	1400	1200	1600	1700	25
8	VIII	0.8	0.3	0.9	1.0	1500	1300	1700	1800	30

### Работа момента $M$





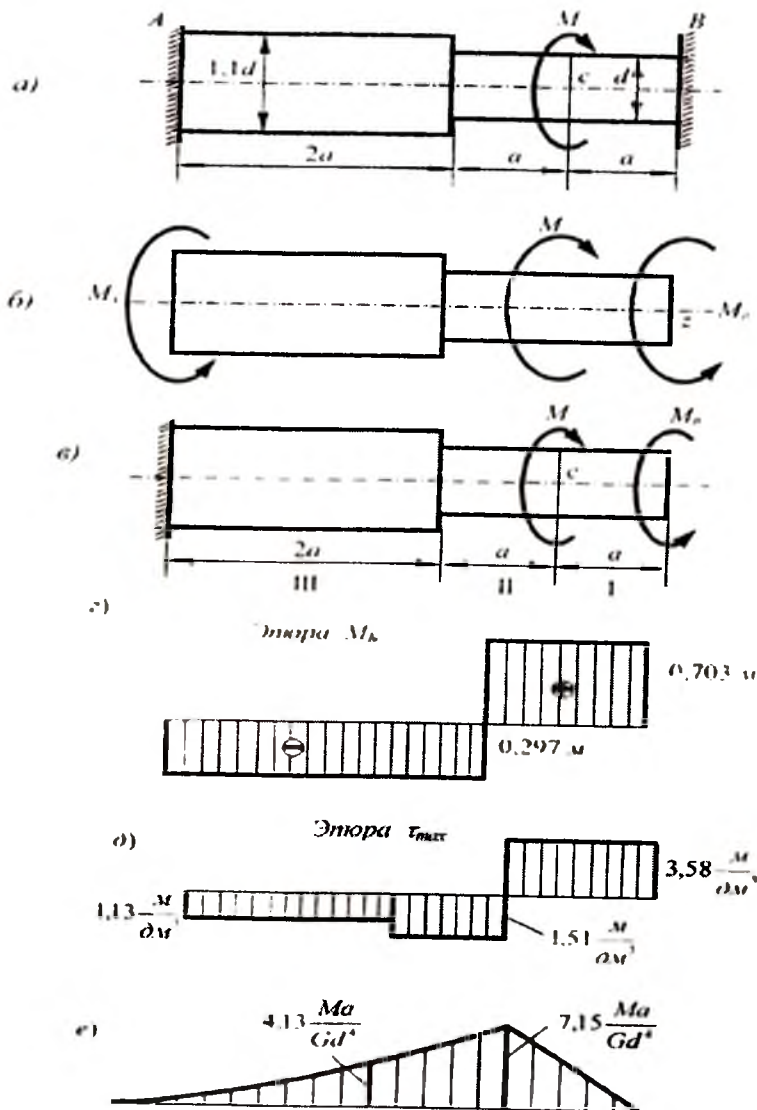


Рис. 5.7.

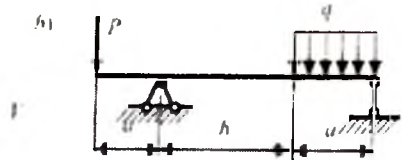
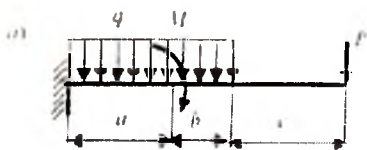
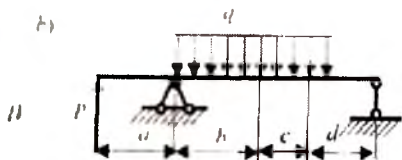
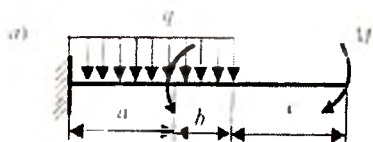
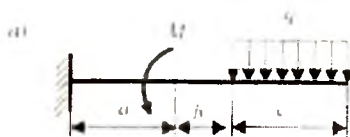
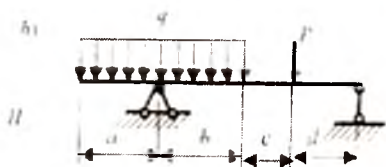
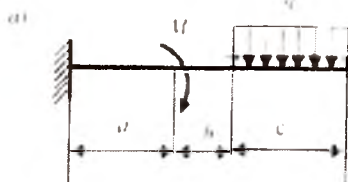
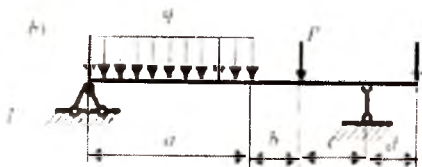
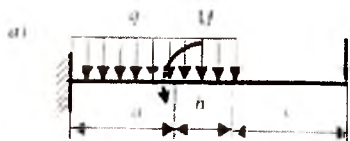
Таблица 5.5.

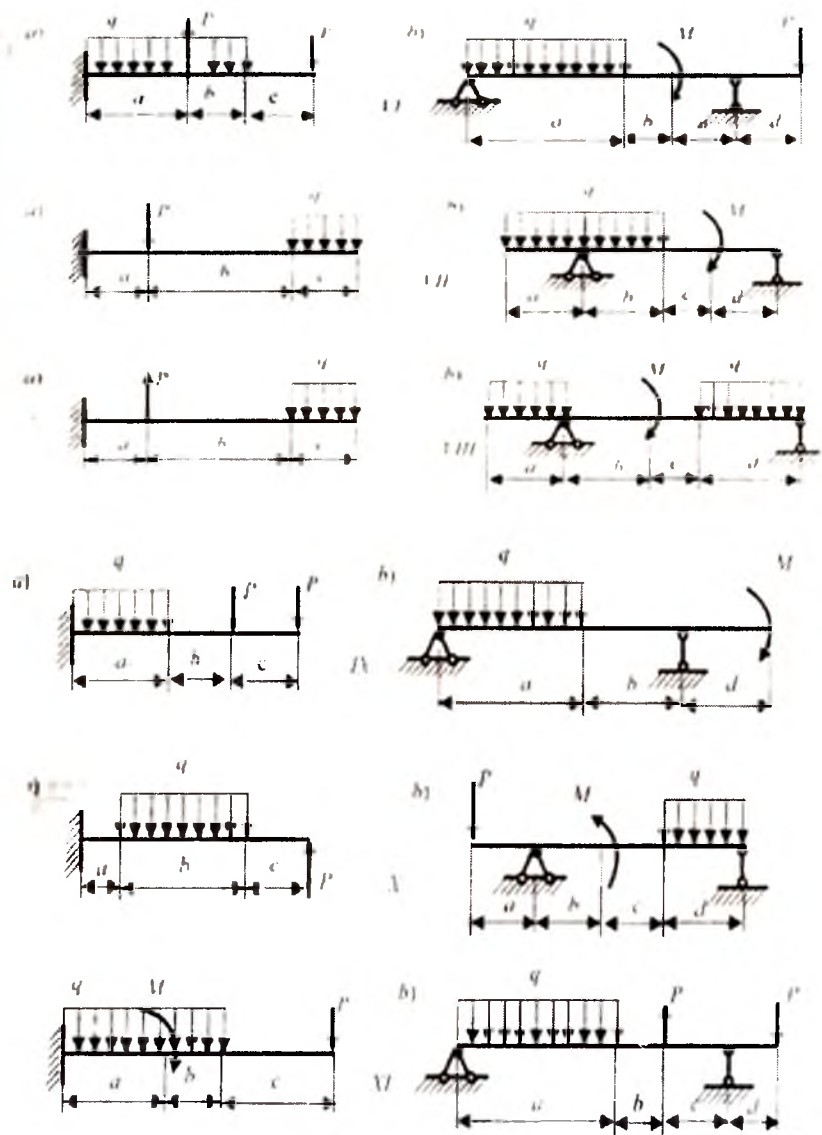
№	Схе- ма	D	d	m	n	P	№	Схе- ма	D	d	m	n	P
		см				H			см				H
1	I	6	0.6	6	6	30	16	VI	6	0.6	6	6	30
2	II	7	0.7	7	7	40	17	VII	7	0.7	7	7	40
3	III	8	0.8	8	8	50	18	VIII	8	0.8	8	8	50
4	IV	9	0.9	9	9	60	19	IX	9	0.9	9	9	60
5	V	10	1.0	10	10	70	20	X	10	1.0	10	10	70
6	VI	11	1.1	11	11	80	21	I	11	1.1	11	11	80
7	VII	12	1.2	12	12	90	22	II	12	1.2	12	12	90
8	VIII	13	1.3	13	13	30	23	III	13	1.3	13	13	30
9	IX	14	1.4	14	14	40	24	IV	14	1.4	14	14	40
10	X	15	1.5	15	15	50	25	V	15	1.5	15	15	50
11	I	16	1.6	16	16	60	26	VI	16	1.6	16	16	60
12	II	17	1.7	15	15	70	27	VII	17	1.7	15	15	70
13	III	18	1.8	14	14	80	28	VIII	18	1.8	14	14	80
14	IV	19	1.9	13	13	90	29	IX	19	1.9	13	13	90
15	V	20	2.0	12	12	50	30	X	20	2.0	12	12	50

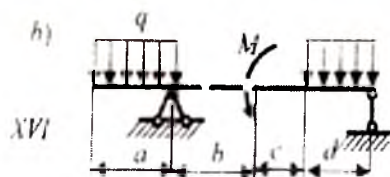
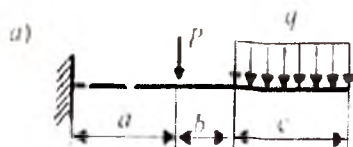
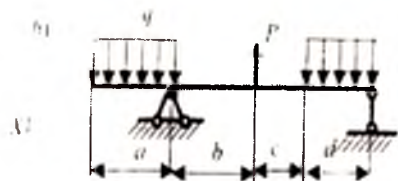
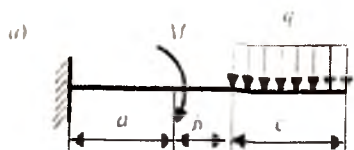
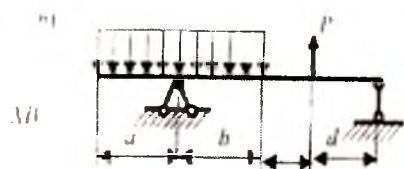
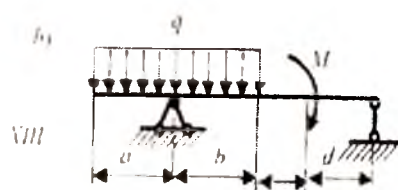
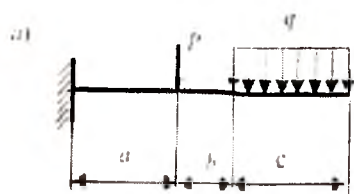
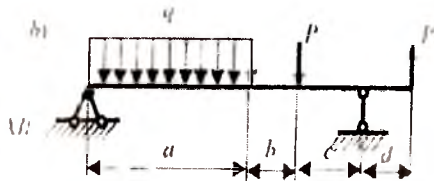
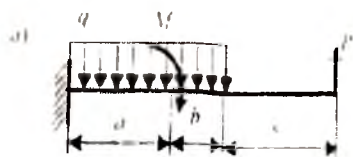
**Глава 6. Построение эпюры внутренних  
перезывающих сил  
изгибающих моментов при плоском изгибе.  
Подбор сечения балки**

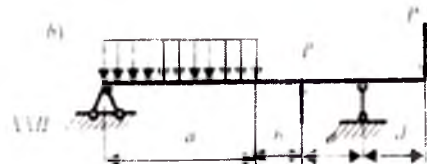
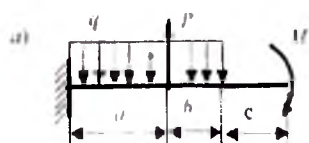
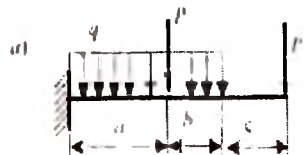
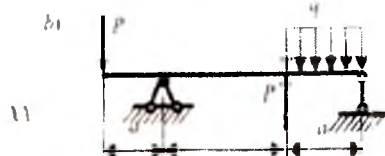
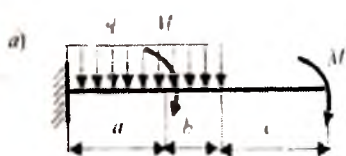
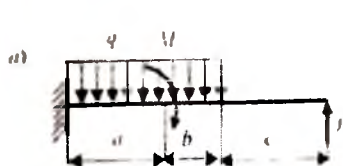
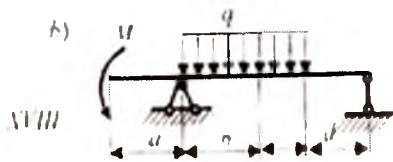
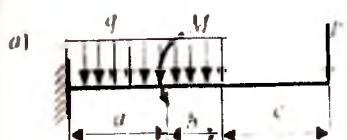
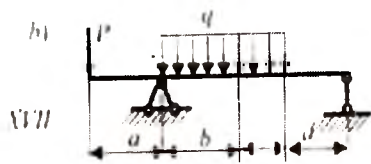
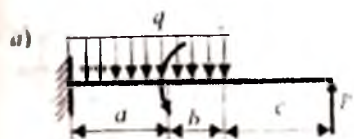
Задача 6.1. Написать выражения  $Q$  и  $M$  для каждого участка балки, построить эпюры внутренних сил и моментов, определить значение  $M_{\text{МАК}}$ . Данные взять из табл. 6.1.

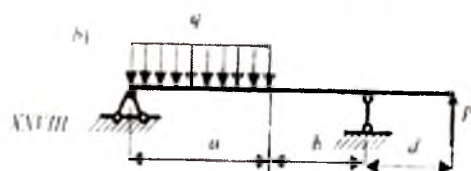
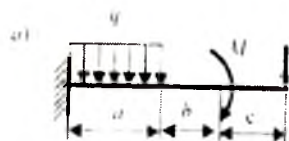
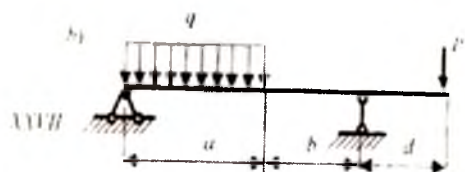
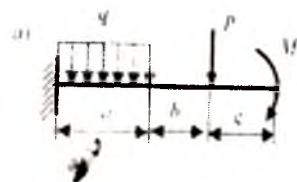
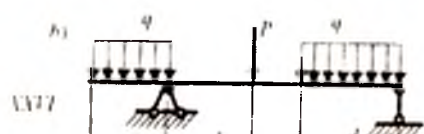
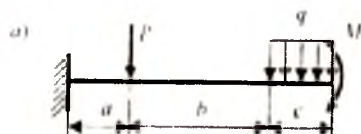
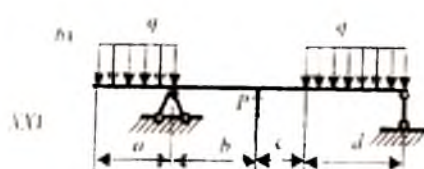
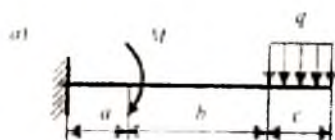
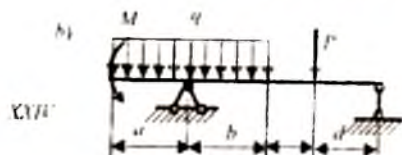
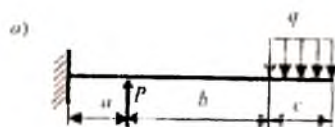
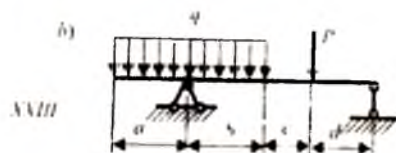
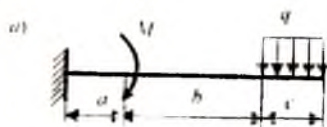
Рисунки задачи 6.1.











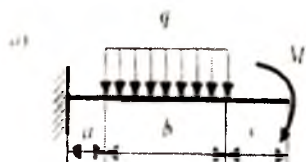
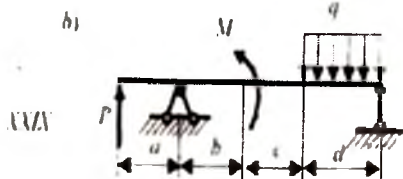
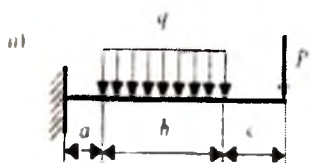


Таблица 6.1.

№	P кН	M к Hм	Q К H/M	a	b	c	d	№	P кН	M к Hм	Q К H/M	a	b	c	d
1	1	1	1	1	1	2	0.2	16	1	1	1	4	1	2	0.2
2	2	2	2	2	2	3	0.3	17	2	2	2	1	2	3	0.3
3	3	3	3	3	3	4	0.4	18	3	3	3	2	3	4	0.4
4	4	4	4	4	1	2	0.5	19	4	4	4	3	1	2	0.5
5	5	5	5	1	2	3	0.6	20	5	5	5	4	2	3	0.6
6	6	6	6	2	3	4	0.2	21	6	6	6	1	3	4	0.2
7	7	7	7	3	1	2	0.3	22	7	7	7	2	1	2	0.3
8	8	8	8	4	2	3	0.4	23	8	8	8	3	2	3	0.4
9	9	9	9	1	3	4	0.5	24	9	9	9	4	3	4	0.5
10	10	10	10	2	1	2	0.6	25	10	10	10	1	1	2	0.6
11	11	11	1	3	2	3	0.2	26	11	11	1	2	2	3	0.2
12	12	12	2	4	3	4	0.3	27	12	12	2	3	3	4	0.3
13	13	13	3	1	1	2	0.4	28	13	13	3	4	1	2	0.4
14	14	14	4	2	2	3	0.5	29	14	14	4	1	2	3	0.5
15	15	15	5	3	3	4	0.6	30	15	15	5	2	3	4	0.6



Указания к решению задачи 6.1.

А. На балку приложены равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью  $q \frac{H}{м}$  и внешний момент  $M$ .

Построить эпюры внутренних перерезывающих сил и изгибающих моментов, определить значения  $Q_{MAX}$  и  $M_{MAX}$ .

Дано: рис. 6.1,  $q = 2 \cdot 10^4 \frac{H}{м}$ ;  $a = 1 м$ ;  $M = 1.5 \cdot 10^4 Нм$ .

Решение

Балку разбиваем на отдельные участки. Участок от левого конца, то есть от сечения  $x=0$  до сечения  $x=4a$  назовем первым участком, участок от сечения  $x=4a$  до сечения  $x=4a+a$  вторым участком.

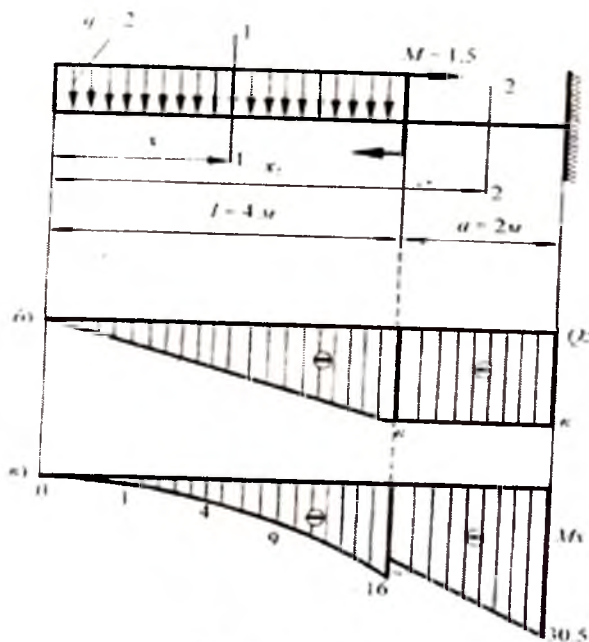


Рис. 6.1.

Для произвольного сечения 1-1 первого участка напишем выражения внутренней перерезывающей силы и изгибающего момента ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

-перерезывающая сила  $Q_x^I = -qx_1$ -прямая линия.

Подставляя выражения для реактивных сил, получаем

$$0.5lqa + 1.5qa + qa - 3qa = 0.$$

или

$$3qa - 3qa = 0$$

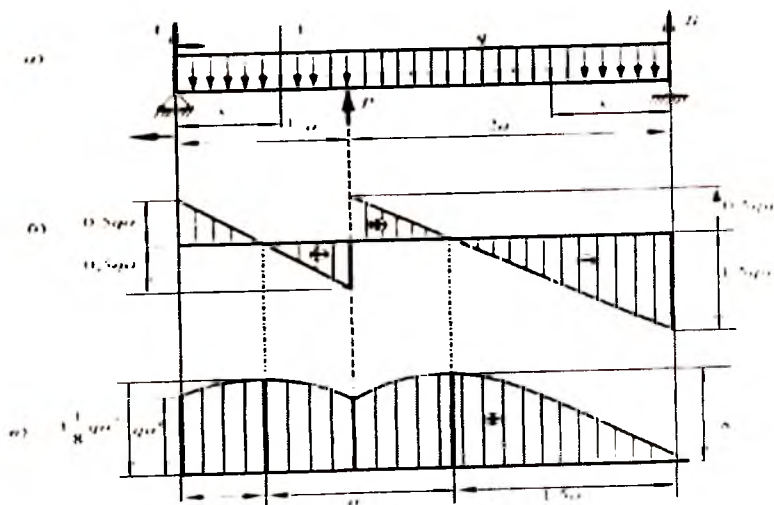


Рис. 6.2

Напишем выражения перерезывающей силы и изгибающего момента для произвольного сечения 1-1, расположенного на расстоянии  $x_1$  от левого конца балки ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

Перерезывающая сила

$$Q_1' = A - qx_1 = 0.5qa - qx_1 \quad - \text{прямая линия};$$

Изгибающий момент

$$M_1' = Ax_1 + \dot{M}_0 - \frac{qx_0^2}{2} = 0.5qa \cdot x_1 + qa^2 - q \frac{x_1^2}{2} -$$

парабола.

Значения перерезывающей силы на границах первого участка

$$Q(0) = 0.5qa, Q(a) = -1.5qa,$$

и значения изгибающего момента на трех точках

$$B = \frac{24}{5}qa = 48 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = A \cdot 5a - 4qa \cdot 3a - P_1a + M + P_2a = 0,$$

откуда

$$A = \frac{11}{5}qa = 4,4 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Проверка:

$$\sum z = A + B - 4qa - 2qa - qa = 0$$

или

$$\frac{11}{5}qa + \frac{24}{5}qa - 4qa - 2qa - qa = 0$$

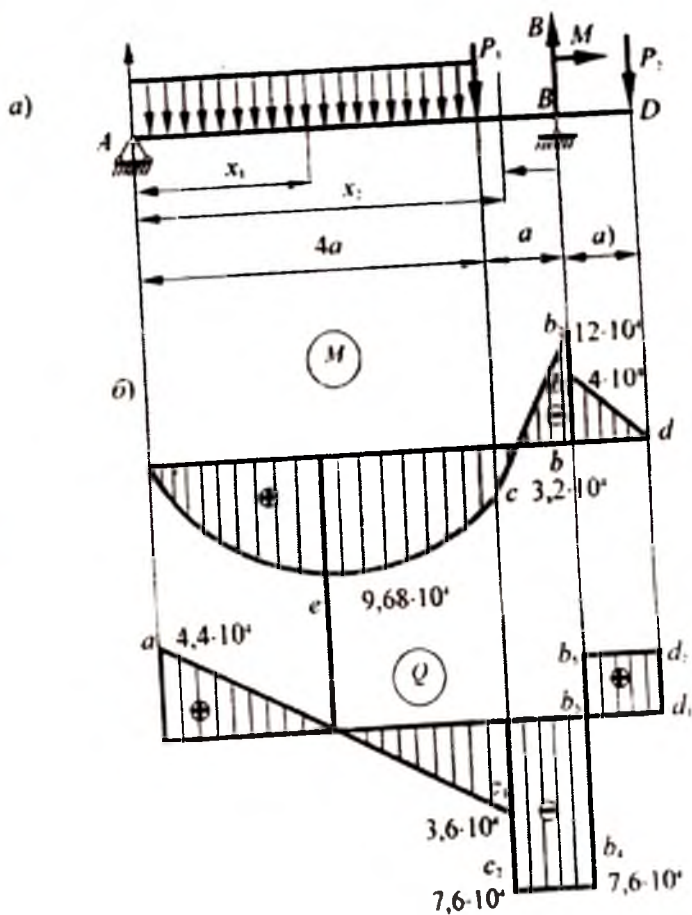


Рис.6.3.

Выражения перерезывающей силы  $Q_x^1$  и изгибающего момента  $M_x^1$  на первом участке принимают вид ( $0 \leq x_1 \leq 4a$ ):

$$Q_x^I = A - qx; \quad M_x^I = Ax - q \frac{x^2}{2}.$$

В левой границе первого участка  $Q_x^I(0) = A = 4.4 \cdot 10^4 \text{ Н}$  и  $M_x^I(0) = 0$  в правой границе, то есть в точке С

$$M_x^I(4a) = M_x^I(8) = 4.48 - \frac{64}{2} = 3.2 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$Q_x^I(4a) = M(8) = 4.4 - 8 = -3.6 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Найдем экстремальные значения параболы изгибающего момента. Приравнявая нулю, уравнение перерезывающей силы, получаем

$$Q_x^I = A - qx = 0$$

Откуда

$$x = \frac{A}{q} = \frac{4.4 \cdot 10^4}{10} = 4.4 \text{ м}.$$

Подставляя данное значение  $x$  в выражение изгибающего момента, будем иметь

$$M_x^I(4.4) = \left( Ax - q \frac{x^2}{2} \right)_{x=4.4} = 4.4 \cdot 10^4 \cdot 4.4 - 10^4 \cdot \frac{(4.4)^2}{2} = 9.36 \cdot 10^4 \text{ Нм}.$$

Таким образом, на первом участке эпюра изгибающего состоит из параболы  $aec$ , а перерывающей силы — из прямой  $ac_1$ . Изгибающий момент на данном участке имеет следующий максимум  $M_{\max} = 9.68 \cdot 10^4$

$M$ , а перерезывающая сила в данном сечении равна нулю (рис. 6.3, б и в).

Рассмотрим теперь второй участок ( $0 \leq x_2 \leq 10$ ). На этом участке

$$M_x'' = Ax - 4qa(x - 2a) - P_1(x - 4a)M_x'' = 4,4x - 8(x - 4) - 4(x - 8)$$

$$Q_x'' = A - 4qa - P_1 = 4,4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4,4 - 12 = -7,6 \text{ } 10^4 \text{ Н}$$

В граничных сечениях данного участка:

- в сечении С

$$x = 8 \text{ м}, \quad M_x'' = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Нм} \text{ и } Q_x'' = -7,6 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

- в сечении В

$$x = 10 \text{ м}, \quad M_x'' = -1,2 \cdot 10^4 \text{ Н} \text{ и } Q_x'' = -7,6 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

На втором участке эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента состоят из прямых линий.

На третьем участке ( $0 \leq x_3 \leq 2 \text{ м}$ )

$$M_x''' = -P_2x, \quad Q = P.$$

В граничных сечениях данного участка:

- в сечении D

$$M_x'''(0) = 0 \text{ и } Q_x'''(0) = P = 2 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

- в сечении В

$$M_x'''(2) = -4 \cdot 10^4 \text{ Нм} \text{ и } Q_x'''(2) = P = 2 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

Эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента приведены на рис. 6.3, а и б.

Максимальные значения перерезывающей силы и изгибающего момента  $Q_{MAX} = 7.6 \text{ Н}$  и  $M_{MAX} = 12 \cdot 10^4 \text{ Нм}$  соответственно.

Задача 6.2. Для заданных двух схем балок (рис. задачи 6.1) требуется написать выражения  $Q$  и  $M$  для каждого участка в общем виде, построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти  $M_{max}$  и подобрать: а) для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при  $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$ ; б) для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Данные взять из табл. 6.1.

## Глава 7. Главные напряжения и полная проверка прочности балки

Задача 7.1. Для заданной балки требуется (рис. 6.1, б задачи 6.1):

- определить опорные реакции;
- построить эпюры  $Q$  и  $M$ ;
- произвести подбор сечения двутавровой балки;
- проверить сечения балки по касательным напряжениям;
- построить эпюры нормальных  $\sigma$ , касательных  $\tau$ , главных  $\sigma_{1,3}$  и экстремальных касательных  $\tau_{MAX}$  и  $\sigma_{MIN}$  напряжений в неблагоприятном сечении балки и определить их направления;
- проверить прочности балки по главным напряжениям.

Данные взять из таблицы 6.1 ( $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ ).

*Пример решения задачи 7.1.*

Дано: рис. 7.1, а;  $P = 40 \text{ кН}$ ;  $q = 30 \text{ кН/м}$ ;  $a = 0.8 \text{ м}$ ;  $l = 4 \text{ м}$ ;

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; \quad [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

*Решение*

1. Определение опорных реакций:

$$A = \frac{P(a+l) + \frac{ql^2}{2}}{l} = \frac{40 \cdot 4,8 + 30 \cdot 8}{4} = 108 \text{ кН};$$

$$B = \frac{\frac{ql^2}{2} - Pa}{l} = \frac{30 \cdot 8 - 40 \cdot 0,8}{4} = 52 \text{ кН}.$$

2. Построение эпюр  $Q$  и  $M$ . На консоли ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):  
В пролете между опорами ( $0 \leq x_2 \leq l$ ):

$$Q_1^2 = -B + qx^2 = -52 + 30x_2; \quad Q_1^2(0) = -52 \text{ кН};$$

$$Q_1^2(l) = -52 + 30 \cdot 4 = 68 \text{ кН}; \quad M_1^2 = Bx^2 - \frac{qx_2^2}{2} = 52x^2 - \frac{30x_2^2}{2}$$

$$M_1^2(0) = 0; \quad M_1^2(l) = 52 \cdot 4 - \frac{30 \cdot 16}{2} = 32 \text{ кНм}.$$

Так

$$Q_1^2 = -B + qx^2 = -52 + 30x_2 = 0$$

При

$$x^2 = \frac{52}{30} = 1,73 \text{ м}$$



То

$$(M_x)_{MAX} = 52 \cdot 1.73 - \frac{30 \cdot 1.73^2}{2} = 45 \text{ кНм.}$$

При

$$x^2 = \frac{52 \cdot 2}{30} = 3.46 \text{ м}$$

Имеем

$$M_x^2(3.46) = 0.$$

По этим данным на рис. 7.1 построены эпюры  $Q$  и

2. Подбор сечения двутавровой балки. Так как  $M_{MAX} = 45 \text{ кНм}$ , то

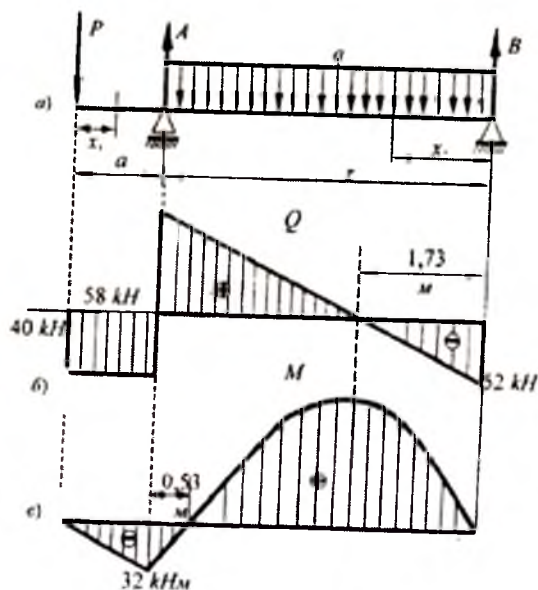


Рис. 7.1.

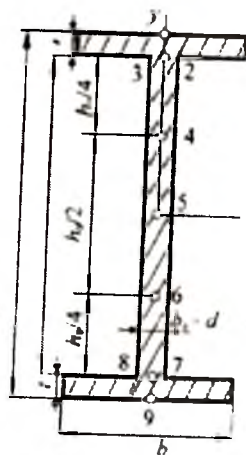


Рис. 7.2.

$$w_y = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^5}{16 \cdot 10^7} = 281 \text{ см}^3.$$

По сортаменту для двутавра № 22а имеем  $W_y = 281 \text{ см}^3$ ,

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{W - W_y'}{W_y'} \cdot 100 = \frac{281 - 254}{254} \cdot 100 = 10.6 > 5\%$$

(перенапряжение).

Для двутавра № 24 имеем  $W_y' = 289 \text{ см}^3$ ,

$$\frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 = \frac{W - W_y'}{W_y'} \cdot 100 = \frac{281 - 289}{289} \cdot 100 = 2.77\%$$

(недонапряжение).

Выбираем двутавр № 24, для которого  $W_y' = 289 \text{ см}^3$ ,  $J_y = 3460 \text{ см}^4$ ,  $S_o = 163 \text{ см}^3$ ,  $h = 24 \text{ см}$ ,  $b = 11.5 \text{ см}$ ,  $t = 0.95 \text{ см}$ ,  $d = b_0 = 0.56 \text{ см}$ ,  $h_o = h - 2t = 22.1 \text{ см}$  (рис. 7.2). Этот двутавр будет работать при максимальном нормальном напряжении в крайнем волокне опасного сечения.

Таблица 7.1.

№	z см	σ	τ	ετ	σ <sub>1</sub>	σ <sub>3</sub>	tg2α <sub>0</sub>	α <sub>1</sub>
1	12.00	111	0	±55.5	III	0	-0.00	90°0'
2	11.05	102	2	±51	102	0	-0.0392	-1°7'
3	11,05	102	44	±67	118	-16	-0.8630	-20°24'
4	5.52	51	53	±59	84	-34	-2.08	-32°10'
5	0.00	0	56	±56	56	-56	∞	45°0'
6	-5.52	-51	53	±59	34	-84	2.08	32°10'

7	-1105	-102	44	±67	16	-118	0.8630	20°24'
8	-11.05	-102	2	±51	0	-102	0.0392	1°7'
9	-12.00	-111	0	±55.5	0	-111	0.00	0°0'

$\tau_{\text{mm}}$ , Мпа  $\tau_{\text{max}}$

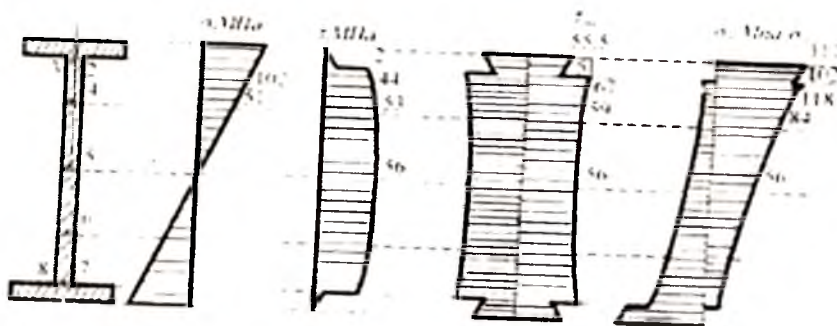


Рис. 7.3.

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{45 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 156 \cdot 10^6 \text{ Па} = 156 \text{ МПа}$$

4. Проверка сечения балки по касательным напряжениям. Так как  $Q_{\text{max}} = 68 \text{ кН}$ , то

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} \cdot S_0}{b_0 J_x} = \frac{68 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{0.56 \cdot 10^{-2} \cdot 3460 \cdot 10^{-6}} = 57 \cdot 10^6 \text{ Па} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

5. Построение эпюр нормальных  $\sigma$ , касательных  $\tau$ , главных  $\sigma_{1,3}$  и экстремальных напряжений  $\tau_{\text{max}}$  и  $\tau_{\text{min}}$  напряжений в неблагоприятном сечении балки и определение их направлений.

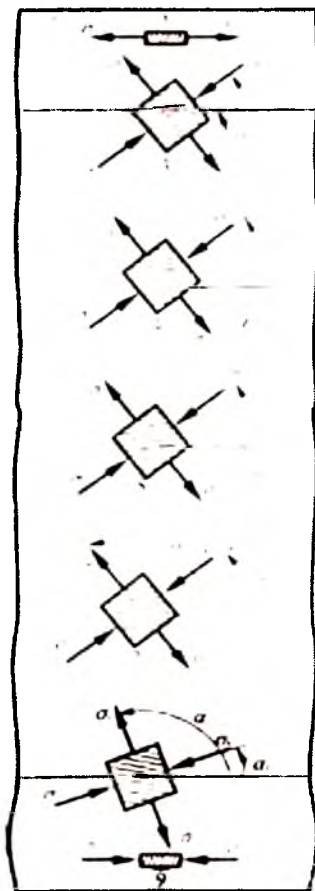


Рис. 7.4.

В отношении главных напряжений неблагоприятным является сечение над левой опорой (при подходе к ней справа), в котором  $Q = 68 \text{ кН}$  и  $M = -32 \text{ кНм}$ .

Нормальное напряжение в произвольной точке, находящейся на расстоянии  $y$  от нейтральной оси,

$$\sigma = -\frac{Mz}{J_x} = \frac{32 \cdot 10^3 z}{3460 \cdot 10^8} = 92,5 \cdot 10^{-6} z.$$

Статические моменты  $S^i$ , для девяти точек двутавра (рис. 7.2) вычисляются по формулам

$$S^1_x = -S^9_x = 0,$$

$$S^2_y = S^3_y = -S^7_y = -S^8_y = tb\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

$$S^4_y = -S^6_y = S^2_y + d \frac{h_0}{4} \left(\frac{h_0}{2} - \frac{h_0}{8}\right) = S^2_y + \frac{3dh_0^2}{32},$$

$$S^5_y = S^4_y + d \frac{h_0}{4} \frac{h_0}{8} = S^7_y = -S^8_y + \frac{dh_0^2}{32}.$$

Главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , экстремальные касательные напряжения  $\tau_{\text{MAX}}$  и  $\tau_{\text{MIN}}$  вычисляются по формулам

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left( \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right),$$

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\tau_{MIN} = -\frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Статический момент части площади стенки по одну сторону от ординаты

$$S_c = \frac{b_0}{2} \left( \frac{h^2_0}{4} - y^2 \right) = \frac{0,56}{2} \left( \frac{22,1^2}{4} - y^2 \right) = 0,28(122 - y^2)$$

Статический момент части сечения по одну сторону ординаты  $y$

$$S_c = 126 + 0,28(122 - y^2) \approx 160 - 0,28y^2.$$

Касательные напряжения для точек полки

$$\tau = \frac{Q \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2J_x}$$

а для точек стенки

$$\tau = \frac{QS}{2J_y}$$

Две взаимно перпендикулярные наклонные плоскости являются главными плоскостями напряжений в данной точке балки, когда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma}$$

В произвольной точке поперечного сечения балки, находящейся на расстоянии  $z$  от нейтральной оси  $y$ , нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения определяются по формулам

$$\sigma = \frac{Mz}{J_y}, \quad \tau = \frac{QS_0}{b_0 J_y}$$

Значения  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\sigma_{1,3}$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $\alpha_u$ ,  $\alpha_n$  для  $y$ , отвечающие девяти точкам сечения двутавра (рис. 7.2) приведены в таблице.

Таблица 7.2.

№	y, см	$\sigma$	$\tau$	$\tau_{\max}$	$\sigma_1$	$\sigma_3$	$\operatorname{tg} 2\alpha$	$\alpha_1$	$\alpha_3$
				min	МПа				
1	12,00	111	0	ë55,5	111	0	-0,00	°0'0"	90°0'
2	11,05	102	2	ë51	102	0	-	-0°7'	88°53'
3	11,05	102	44	ë67	118	-16	-0,863	- 20°24'	69°36'
4	5,52	51	53	ë59	84	-34	-2,08	- 32°10'	57°50'

5	0,00	0	56	ë56	56	-56	∞	45°0'	45°0'
6	-5,52	-51	53	ë59	34	-84	2,08	32°10'	122°10'
7	- 11,05	-102	44	ë67	16	-118	0,863	20°24'	110°24'
8	- 11,05	-102	2	ë51	0	-102	0,0392	1°7'	91°7'
9	- 12,00	-111	0	ë55,5	0	-111	0,00	0°0'	90°0'

Эпюры напряжений изображены на рис. 7.3. Направления главных напряжений в рассмотренных точках сечения показаны на рис. 7.4.

6. Проверка прочности балки по главным напряжениям. Наиболее опасной точкой в неблагоприятном сечении является точка 3. В этой точке  $\sigma_1 = 118 \text{ МПа}$  и  $\sigma_3 = -16 \text{ МПа}$ . Проверяем прочность в этой точке по третьей по третьей гипотезе прочности согласно неравенству  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ . Так как  $118 + 16 = 134 < 160$ , то выбранное сечение прочно и по главным напряжениям.

**Задача 7.2.** Стальная балка пролетом  $l$  (в метрах) имеет сечение, состоящее из двутавра и двух приваренных к нему горизонтальных листов (рис. 7.5). По двум таким балкам, уложенным параллельно, перемещается двухосная тележка крана, несущая полезную нагрузку и собственный вес, в сумме составляющих  $2P$ , причем на одну ось (на два колеса) передается давление  $\frac{n-1}{n} \cdot 2P$ , на другую  $\frac{1}{n} \cdot 2P$ , где коэффициент  $n$  характеризует распределение общей нагрузки между осями. Таким образом, нагрузки на каждую из балок равны:

$$P_1 = \frac{n-1}{n} \cdot P \text{ и } P_2 = \frac{1}{n} \cdot P,$$

где  $p$  — половина общей нагрузки на тележку (рис. 7.6, а).

Остальные данные взять из табл. 7.2. Требуется: 1) вычислить момент сопротивления сечения и наибольший изгибающий момент, который балка может безопасно выдержать при  $[\sigma] = 160 \text{ Мпа}$ ; 2) определить наиболее невыгодное положение тележки в пролете, при котором изгибающий момент получает наибольшее значение; 3) найти наибольшую силу  $P$  (половину общей нагрузки на тележку), которую балка может безопасно выдержать (собственный вес балки не учитывать); 4) рассчитать сварные швы, прикрепляющие листы к двутавру, по наибольшей поперечной силе (когда большой груз тележки стоит у опоры балки);  $[\tau] = 90 \text{ МПа}$ .

### Указания к решению задачи 7.2

Если первый (левый) груз больше второго (правого), то эпюра изгибающих моментов при опасном положении нагрузки будет иметь вид, указанный на рис. 7.6, б. Левая опорная реакция

$$A = \frac{P_1(l-x)}{l} + \frac{P_2(l-x-a)}{l} = \frac{P(n-1)(l-x)}{nl} + \frac{P(l-x-a)}{nl} = \frac{P}{l} \left( l-x-\frac{a}{n} \right)$$

Наибольший изгибающий момент под силой  $P_1$

$$M_1 = Ax = \frac{Px}{l} \left( l-x-\frac{a}{n} \right);$$



он изменяется по закону параболы.

Приравняв нулю первую производную от  $M_1$  по  $x$ , найдем положение сечения, в котором возникает максимальный изгибающий момент, и вычислим величину  $M_1$  в зависимости от силы  $P$ .

## Глава 8. Перемещения при изгибе. Метод начальных параметров

Указания к решению задачи 8.1.

А. Найти уравнения изогнутой оси и угла поворота поперечных сечений для консольной балки.

Решение.

Уравнение внутреннего изгибающего момента для произвольного сечения балки  $x$  принимает вид

$$M(x) = M_A + Ax - q \frac{x^2}{2}$$

Таким образом, уравнения изогнутой оси и угла поворота поперечных сечений рассматриваемой балки принимают вид соответственно:

$$z(x) = \frac{1}{EJ_y} \left( -\frac{ql^2 x^2}{4} - Pl \frac{x^2}{2} + ql \frac{x^3}{6} + P \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right);$$
$$\theta(x) = \frac{1}{EJ_y} \left( -\frac{ql^2 x}{2} - Plx + ql \frac{x^2}{2} + P \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} \right).$$

Эти деформации свои наибольшие значения принимают в свободной конце консоли, то есть на правой границе.

Если на балку действует только распределенная сила  $q$  ( $P = 0$ ), то

$$z(l) = -\frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{ql^4}{8} \quad \text{и} \quad \theta(l) = -\frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{ql^3}{6}.$$

Б. Для заданной балки определить максимальное значение деформации изгиба.

*Решение*

Уравнение внутреннего изгибающего момента для произвольного сечения балки имеет вид

$$M(x) = Ax - \frac{qx^2}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

Подставляя, данное выражение в дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, получаем

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right).$$

Проинтегрировав два раза, будем иметь

$$\frac{dz}{dy} = \theta = \frac{1}{EJ} \left( \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right) + C = \frac{qx^2}{EJ} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) + C;$$

$$z(x) = \frac{1}{EJ} \left( \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} \right) + Cx + D = \frac{qx^3}{12EJ} \left( l - \frac{x}{2} \right) + Cx + D.$$

Найдем постоянные  $C$  и  $D$ . В сечениях  $A$  и  $B$  балки имеем условия  $z(0) = 0$  и  $z(l) = 0$ . Подставляя эти условия в основные уравнения, получаем:

$$z(0) = \frac{q0^3}{12EJ} \left( l - \frac{0}{2} \right) + C \cdot 0 + D = 0;$$

$$z(l) = \frac{ql^3}{12EJ} \left( l - \frac{l}{2} \right) + Cl + D = 0.$$

Отсюда найдем

$$D = 0 \text{ и } C = -\frac{ql^3}{24EJ_y}$$

Таким образом, уравнения деформаций будут иметь следующий вид:

$$\theta(x) = \frac{qx^2}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) - \frac{ql^3}{24EJ_y};$$

$$z(x) = \frac{qx^3}{12EJ_y} \left( 1 - \frac{x}{2} \right) - \frac{ql^3x}{24EJ_y}$$

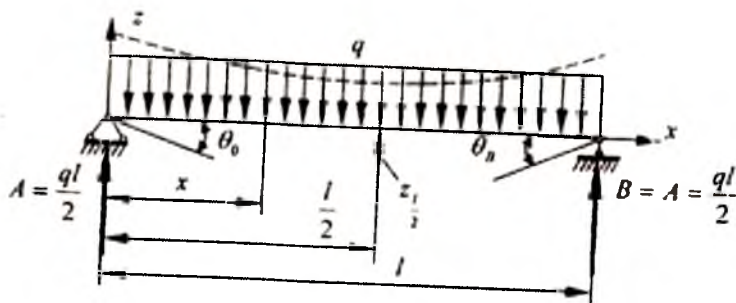


Рис. 8.4.

Чтобы найти максимальные значения изогнутой оси балки необходимо вести поиск экстремальных значений функции  $z(x)$ .

Приравняем нулю уравнение  $\theta(x) = \frac{dz}{dx}$

$$\theta(x) = \frac{qx^2}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \right) - \frac{ql^3}{24EJ_y} = 0.$$

Данное уравнение имеет решение  $x_1 = \frac{l}{2}$ .

Подставляя данное решение в уравнение  $z(x)$ , получаем

$$z(x)_{\text{max}} = z\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^4}{12EI_x} \left(l - \frac{l}{2}\right) - \frac{q l^3 \frac{l}{2}}{24EI_x} = -\frac{5ql^4}{384EI_x}$$

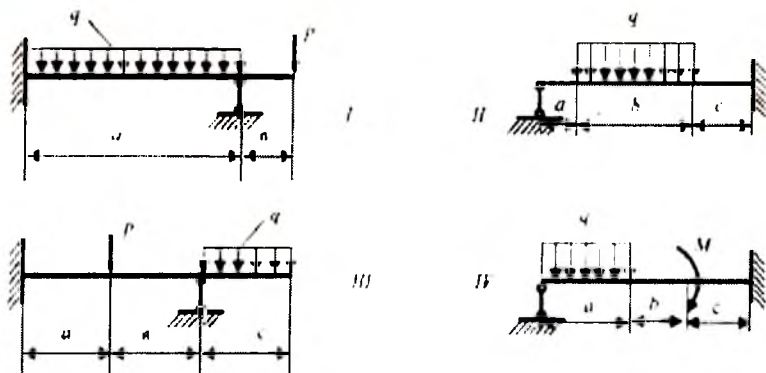
## Глава 9. Статически неопределимые задачи при плоском изгибе.

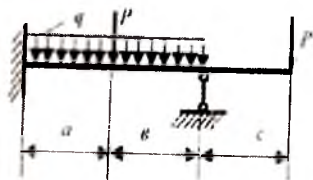
### Балки переменного сечения.

#### Температурные напряжения при изгибе

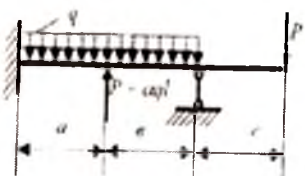
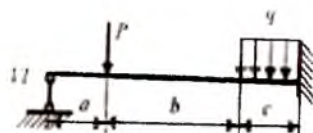
**Задача 9.1.** Для стальной балки прямоугольного четырёхугольного сечения ( $b = \frac{h}{2} = 10 \text{ см}$ ) требуется: 1) раскрыть статическую неопределимость; 2) построить эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента; 3) определить наибольшие прогибы каждого участка балки. Данные взять из табл. 9.1.

Рисунки задачи 9.1.

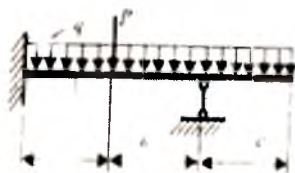
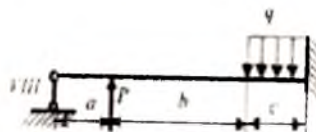




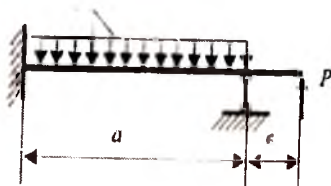
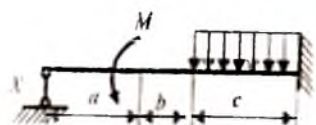
V



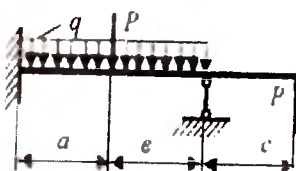
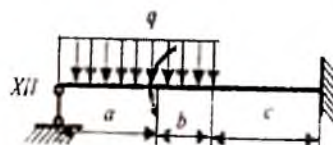
VII



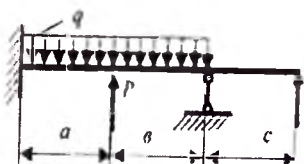
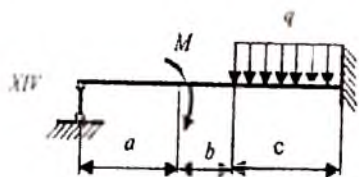
IX



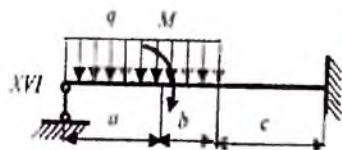
XI



XIII



XV



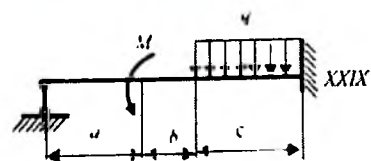
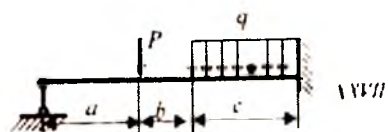
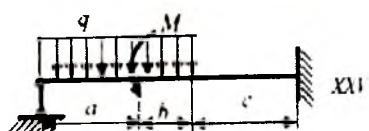
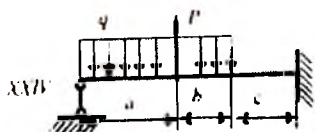
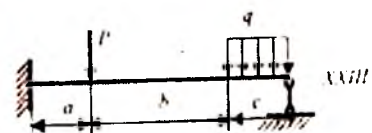
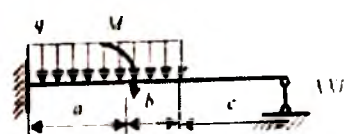
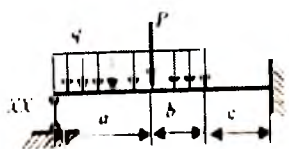
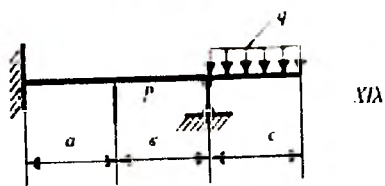
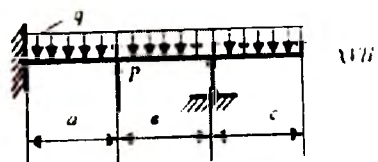


Таблица 9.1.

Л*	а	б	с	а	м	Р	№	а	б	с	а	м	Р
	м	кН/			кН	кН		м	кН/			кН	кН
1	0.5	1.9	0.5	5	10	11	16	2.0	1.9	0.5	5	10	11
2	0.6	1.8	0.6	6	11	12	17	2.1	1.8	0.6	6	11	12
3	0.7	1.7	0.7	7	12	13	18	2.2	1.7	0.7	/	12	13
4	0.8	1.6	0.8	8	13	14	19	2.3	1.6	0.8	8	13	14
5	0.9	1.5	0.9	9	14	15	20	2.4	1.5	0.9	9	14	15
6	1.0	1.4	0.5	5	10	11	21	2.5	1.4	0.5	5	10	11
7	1.1	1.3	0.6	6	11	12	22	2.6	1.3	0.6	6	11	12
8	1.2	1.2	0.7	7	12	13	23	2.7	1.2	0.7	7	12	13
9	1.3	1.1	0.8	8	13	14	24	2.8	1.1	0.8	8	13	14
10	1.4	1.0	0.9	9	14	15	25	2.9	1.0	0.9	9	14	15
11	1.5	0.9	0.5	5	10	И	26	3.0	0.9	0.5	5	10	11
12	1.6	0.8	0.6	6	11	12	27	3.1	0.8	0.6	6	11	12
13	1.7	0.7	0.7	7	12	13	28	3.2	0.7	0.7	7	12	13
14	1.8	0.6	0.8	8	13	14	29	3.3	0.6	0.8	8	13	14
15	1.9	0.5	0.9	9	14	15	30	3.4	0.5	0.9	9	14	15

Указания к решению задачи 9.1.

А. Раскрыть статическую неопределимость заданной балки (рис. 9.1).

Решение

Уравнение равновесия статики дает

$$\Sigma M_B = 0 \text{ или } M_A - \frac{qa^2}{2} + Al = 0 \quad (a)$$

Здесь, внутренний момент  $M_A$  и сила  $A$  являются неизвестными.

Напишем уравнение перемещения. Для этого рассмотрим уравнения начальных параметров:

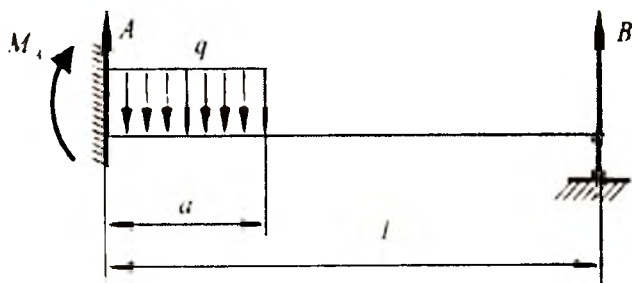


Рис. 9.1.

$$z(x) = z_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_v} \left[ \frac{M_A x^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \frac{q(x-a)^4}{24} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_v} \left[ M_A x + \frac{Ax^3}{2} - \frac{qx^3}{6} + \frac{q(x-a)^3}{6} \right];$$

Условия на опорах:

- 1)  $z(0) = 0$  и  $\theta(0) = 0$  в сечении  $x = 0$ ;
- 2)  $z(l) = 0$  в сечении  $x = l$ .

Используя первые условия, найдем  $z_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ .

Подставляем второе условие в основное уравнение:

$$\frac{M_A l^2}{2} + \frac{Al^3}{6} - \frac{ql^4}{24} + \frac{q(l-a)^4}{24} = 0 \quad (6)$$

Уравнения (с) и (5) служат для определения момента  $M_A$  и реактивной силы  $A$ .

**Б.** Раскрыть статическую неопределенность заданной балки (рис. 9.2).

*Решение*

Условие равновесия статики



$$\Sigma M_A = 0 \text{ или } M_B - \frac{qa^3}{2} + Bl = 0. \quad (в) \quad (6)$$

В данном уравнении изгибающий момент  $M_B$  и реактивная сила  $B$  являются неизвестными.

Напишем уравнение перемещения:

$$z(x) = z_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Ax^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \frac{q(x-a)^4}{24} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Ax^3}{2} - \frac{qx^3}{6} + \frac{q(x-a)^3}{6} \right].$$

Условия на опорах:

- 1)  $z(0) = 0$  в сечении  $x = 0$ ;
- 2)  $z(l) = 0$  и  $\theta(l) = 0$  в сечении  $x = l$ .

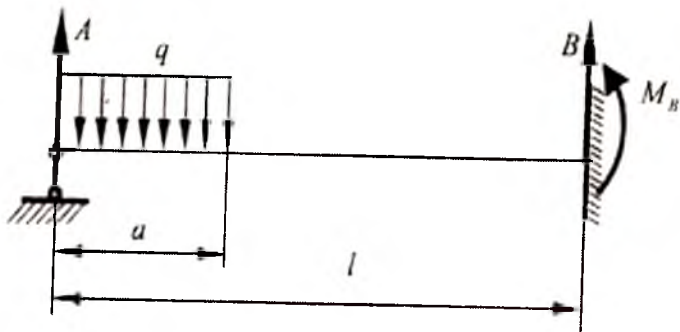


Рис. 9.2.

Подставляя первое условие в универсальное уравнение  $z(x)$ , найдем  $z_0 = 0$ . Подставляя второе условие в уравнения  $z(x)$  и  $\theta(x)$ , получаем:

$$\theta_0 l + \frac{1}{EJ_v} \left[ \frac{Al^2}{6} - \frac{ql^4}{24} + \frac{q(l-a)^4}{24} \right] = 0;$$

(1)

$$\theta_0 + \frac{1}{EJ_v} \left[ \frac{Al^2}{2} - \frac{ql^3}{6} + \frac{q(l-a)^3}{6} \right] = 0.$$

Уравнения (1), (2) и  $\Sigma M_i = 0$  служат для определения реактивных сил  $A$  и  $B$ , изгибающего момента  $M_B$  и угла  $\theta_0$ .

**В.** Раскрыть статическую неопределимость заданной балки (рис. 9.3).

### Решение

В данной задаче реактивные моменты  $M_A$ ,  $M_B$  и силы  $A$ ,  $B$  являются неизвестными, то есть задача два раза статически неопределимая.

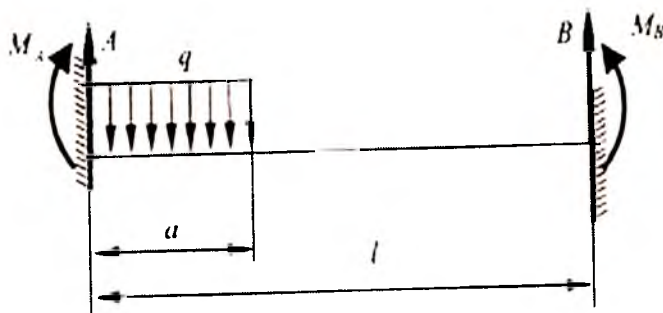


Рис. 9.3.

Напишем уравнения равновесия статики:

$$\Sigma M_A = 0 \text{ или } M_A + \frac{qa^2}{2} - Bl - M_B = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0 \text{ или } M_B - M_A + \frac{qa^2}{2} - Al = 0.$$

Универсальные уравнения:

$$z(x) = z_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{M_A x^2}{2} + \frac{Ax^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + \frac{q(x-a)^4}{24} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[ M_A x + \frac{Ax^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + \frac{q(x-a)^3}{6} \right].$$

Условия на опорах:

- 1) в сечении  $x = 0$  имеем  $z(0) = 0$  и  $\theta(0) = 0$ ;
- 2) в сечении  $x = l$  имеем  $z(l) = 0$  и  $\theta(l) = 0$ .

Из первых условий, найдем  $z_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ .

Вторые условия дают:

$$\frac{M_A l^2}{2} + \frac{Al^3}{6} - \frac{ql^4}{24} + \frac{q(l-a)^4}{24} = 0;$$

$$M_A l + \frac{Al^2}{2} - \frac{ql^3}{6} + \frac{q(l-a)^3}{6} = 0.$$

Данные уравнения совместно с двумя уравнениями статики образуют замкнутую систему для определения следующих четырех неизвестных  $M_A$ ,  $M_B$  и  $A$ ,  $B$ .

**Задача 9.2.** Для заданной балки (рис. задачи 9.1) требуется: 1) найти изгибающий момент на левой опоре

(в долях  $ql^2$ ); 2) построить эпюры  $Q$  и  $M$ ; 3) построить эпюру прогибов, вычислив три ординаты в пролете и две на консоли. Данные взять из табл. 9.1.

### *Указания к решению задачи 9.2.*

Для ответа на первый вопрос нужно выбрать основную систему в виде свободно лежащей на двух опорах балки и составить уравнение деформаций, выражающее мысль, что суммарный угол поворота на левой опоре от заданной нагрузки и от опорного момента равен нулю.

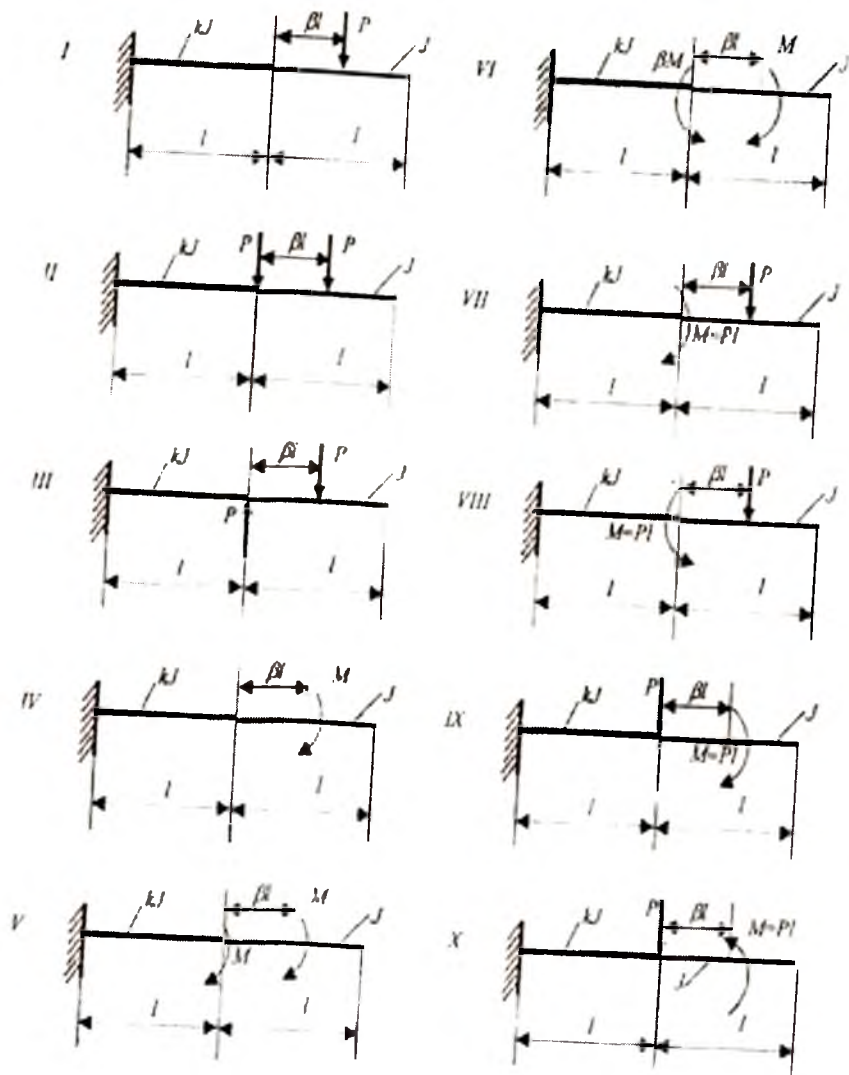
Можно также решить задачу иначе, составив два уравнения: 1) уравнение статики в виде суммы моментов всех сил относительно правой опоры; 2) уравнение метода начальных параметров, выражающее ту мысль, что прогиб на правой опоре равен нулю. Из этих двух уравнений можно найти изгибающий момент и реакцию на левой опоре.

Для ответа на третий вопрос целесообразнее всего использовать метод начальных параметров, так как два начальных параметра ( $z_0, \theta_0$ ) известны, а два других ( $M_0, A_0$ ) будут найдены в процессе выполнения первых двух пунктов задачи.

При построении эпюры прогибов надо учесть, что упругая линия балки обращена выпуклостью вниз там, где изгибающий момент положительный, и выпуклостью вверх там, где он отрицательный. Нулевым точкам эпюры  $M$  соответствуют точки перегиба упругой линии.

**Задача 9.3.** Определить прогиб свободного конца заданной балки переменного сечения. Данные взять из табл. 9.2.

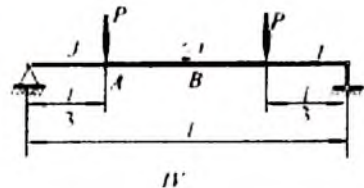
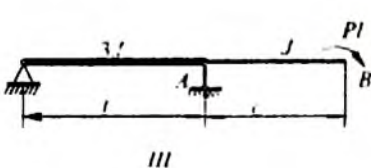
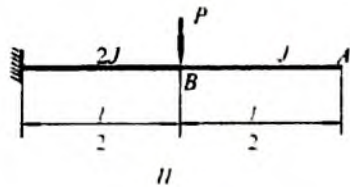
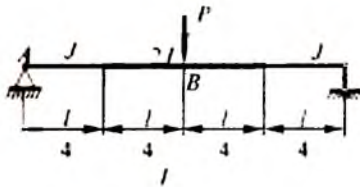
Рисунки задачи 9.3.

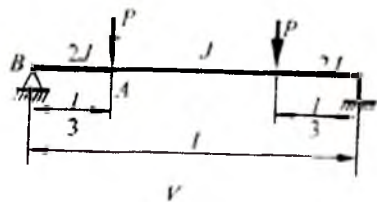


№	Схема	$\nu$	$\kappa$	№	Схема	$\nu$	$\kappa$
1	I	0.1	1.5	16	VI	1.0	6
2	II	0.2	2	17	VII	0.9	7
3	III	0.3	3	18	VIII	0.8	8
4	IV	0.4	4	19	IX	0.7	9
5	V	0.5	5	20	X	0.6	10
6	VI	0.6	6	21	I	0.1	1.5
7	VII	0.7	7	22	II	0.2	2
8	VIII	0.8	8	23	III	0.3	3
9	IX	0.9	9	24	IV	0.4	4
10	X	1.0	10	25	V	0.5	5
11	VI	1.0	6	26	VI	0.6	6
12	VII	0.9	7	27	VII	0.7	7
13	VIII	0.8	8	28	VIII	0.8	8
14	IX	0.7	9	29	IX	0.9	9
15	X	0.6	10	30	X	1.0	10

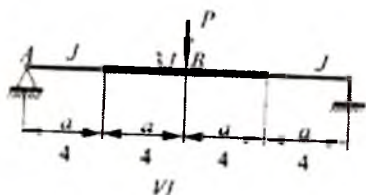
**Задача 9.4.** Для балок с участками, имеющими различные жесткости, определить углы поворота и прогибы в сечениях  $A$  и  $B$ .

Рисунки задачи 9.4

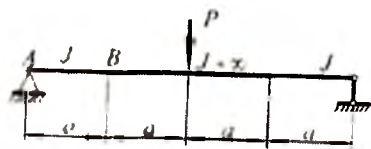




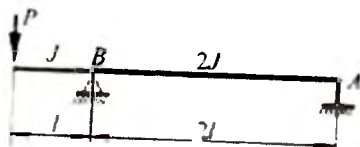
V



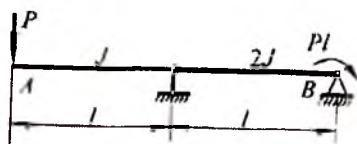
VI



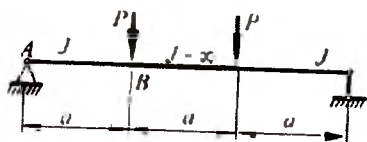
VII



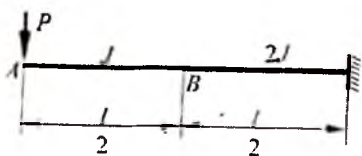
VIII



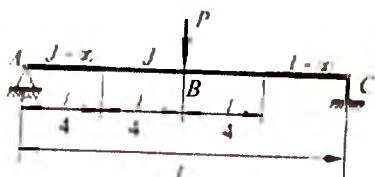
IX



X



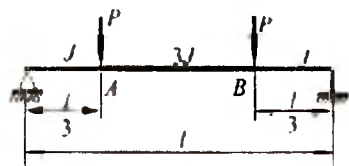
XI



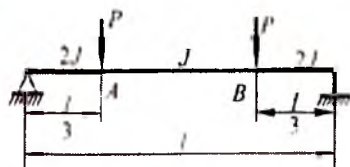
XII



XIII



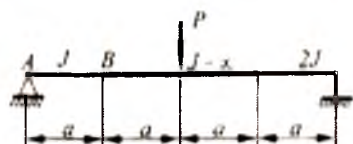
XIV



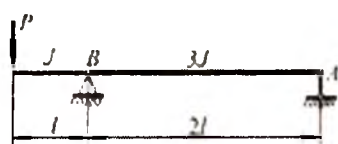
XV



XVI



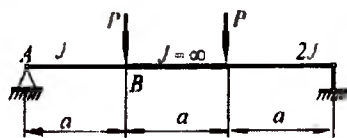
XVII



XVIII

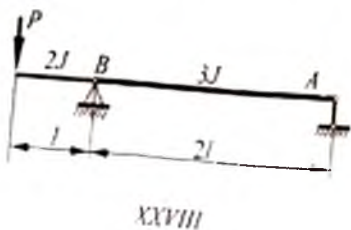
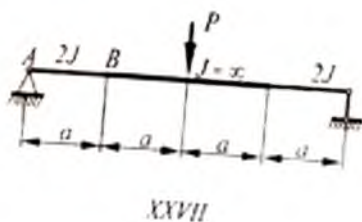
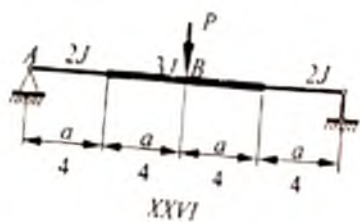
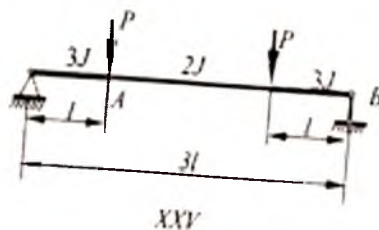
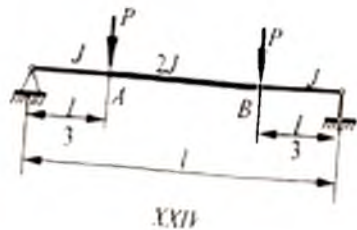
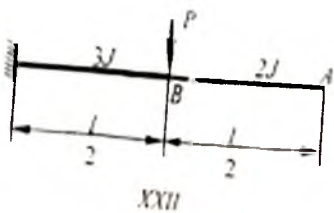
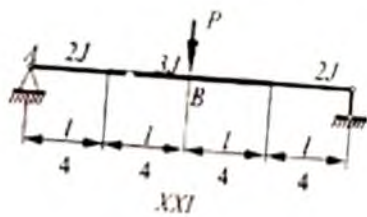


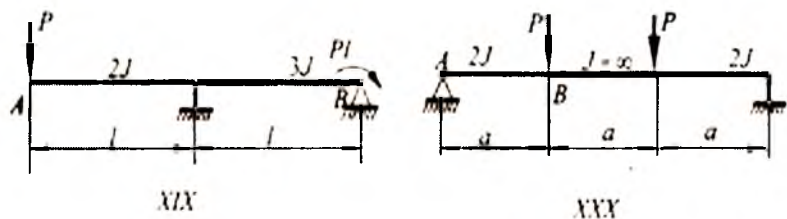
XIX



XX







Указания к решению задач 9.3-9.4.  
 А. Для заданной балки с участками, имеющими различные жесткости, определить углы поворота и прогибы в сечениях А и В (рис. 9.4).

*Решение*

Применяем графоаналитический метод. На рис. 9.4 показана эпюра  $\frac{M}{EJ}$ , принимаемая в качестве фиктивной нагрузки.

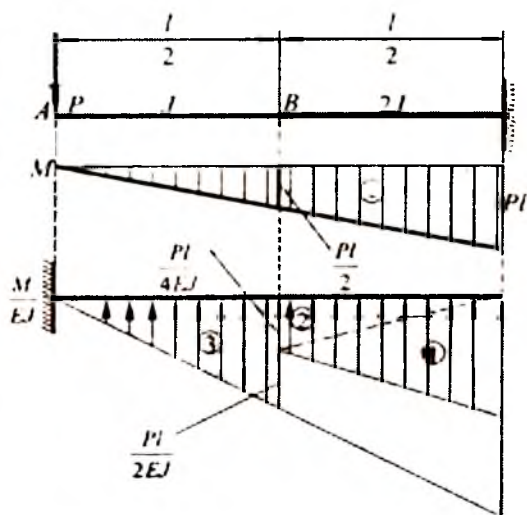


Рис. 9.4.

Из эпюры на рис. 9.4 получаем

$$\theta_A = Q_A^\varphi = -(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = -\frac{5Pl^2}{16EJ};$$

$$z_A = M_A^\varphi = \omega_1 \left( \frac{l}{2} + \frac{2l}{3} \right) + \omega_2 \left( \frac{l}{2} + \frac{11l}{3} \right) + \omega_3 \frac{2l}{3} = \frac{3Pl^2}{16EJ}.$$

Здесь  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  - площади треугольников 1, 2 и 3, составляющих эпюру  $\frac{M}{EJ}$ . Например,  $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2EJ}$ .

$$V^\varphi = \frac{3Pl^2}{64EJ}$$

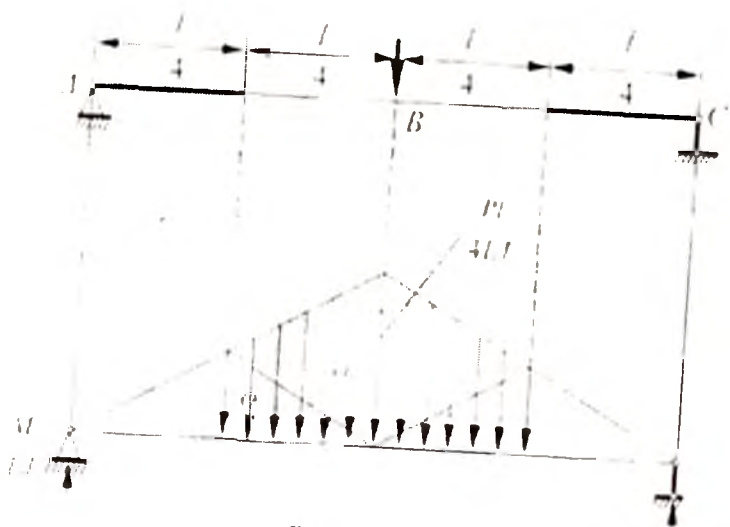


Рис. 9.5.

Построим эпюру  $\frac{M}{EJ}$  (рис. 9.5). Для абсолютно жестких участков балки ординаты ее равны нулю. Площадь эпюры

$$\omega = 2\omega_1 + 2\omega_2,$$

где

$$\omega_1 = \frac{Pl}{4EJ} \frac{1}{4} \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{32EJ}, \quad \omega_2 = \frac{Pl^2}{64EJ}.$$

Отсюда найдем

$$\omega = \frac{3Pl^2}{32EJ}.$$

Отсюда углы поворота у опор

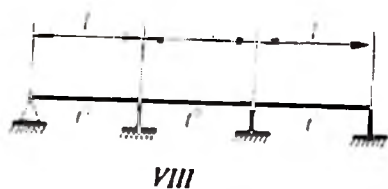
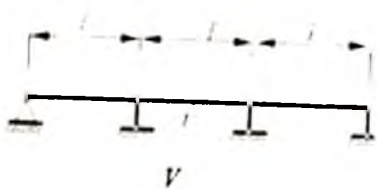
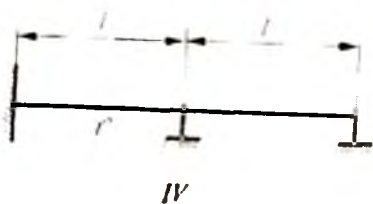
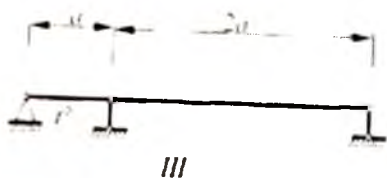
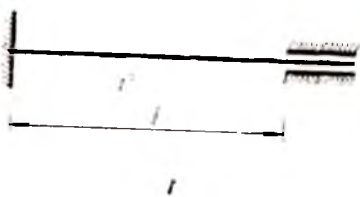
$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\omega}{2} = \frac{3Pl^2}{64EJ}$$

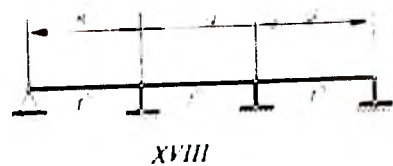
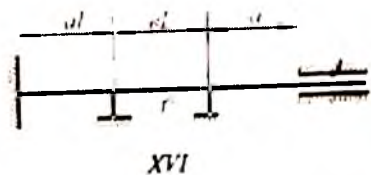
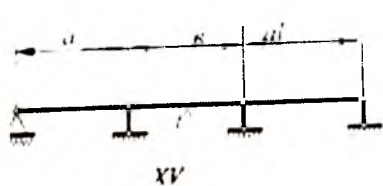
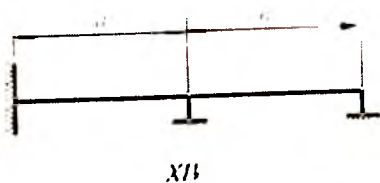
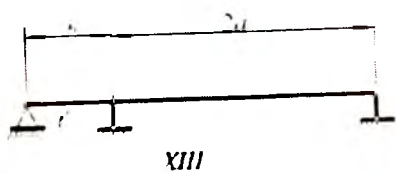
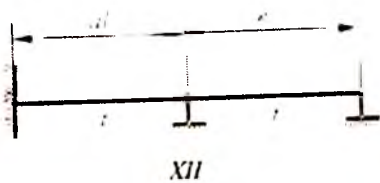
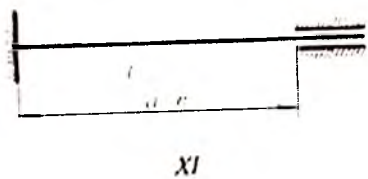
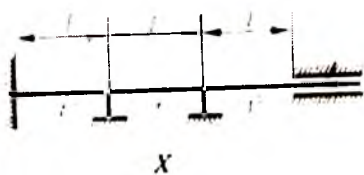
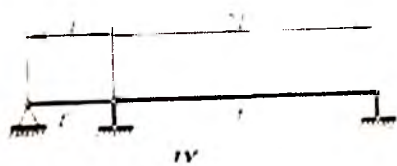
и прогиб в середине

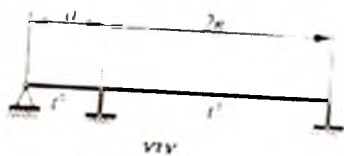
$$z_{cp} = \frac{\omega l}{2} \frac{1}{2} - \omega_2 \frac{2}{3} \omega_1 \frac{1}{3} \frac{1}{4} = \frac{7}{384} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

*Задача 9.5.* Построить эпюры прогибов для балок, равномерно нагреваемых снизу на всем протяжении балки или в отдельном пролете. Принять, что температура изменяется по высоте сечения балки по линейному закону.

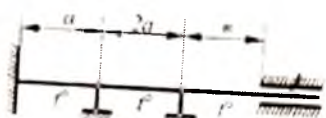
Рисунки задачи 9.5.



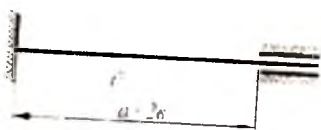




XVII



XX



XXII



XXIII



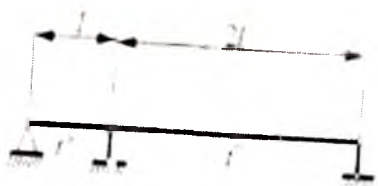
XXIV



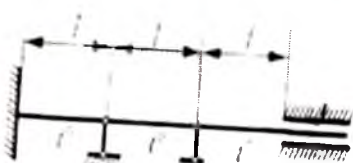
XXV



XXVI



XXVII



XXVIII

Указания к решению задачи 9.5.

А. Построить эпюр изгибающих моментов для балки, нагреваемой на  $t$  градусов: а), б) сверху по всей длине балки; в) снизу в левом пролете. Принять, что температура изменяется по высоте сечения балки по линейному закону.

Дано: рис. 9.б.

Решение

Если балка подвергается неодинаковому нагреву сверху и снизу, то уравнение трех моментов имеет вид:

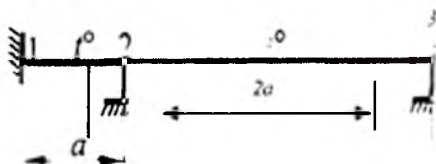
$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n-1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -3 \frac{EJ}{h} \alpha (t_n l_n + t_{n+1} l_{n+1}), \quad \text{а)}$$

где  $t_n$  – разность температур нижних и верхних волокон в  $n$ -м пролете,  $t_{n+1}$  – тоже в  $(n+1)$ -м пролете,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения материала,  $h$  – высота поперечного сечения балки.



а)

б)



в)

Рис. 9.б.



Б. Для балки двусимметричного сечения, нагреваемой снизу на  $t$  градусов, определить максимальное нормальное напряжение и построить эпюру прогибов. Принять, что температура изменяется по высоте сечения балки по линейному закону.

Дано: рис. 9.7.

Решение

а) По уравнению (а) получаем

$$2M_1 l = -\frac{3EJ\alpha t}{h}$$

Откуда

$$M_1 = -\frac{3EJ\alpha t}{2hl} \text{ и } \sigma_{\max} = \frac{M_1}{W} = \frac{3EJ\alpha t}{4}$$



а)



б)

Рис.9.7.

Определяем реакции опор:

$$R_1 = -R_2 = \frac{3EJ\alpha t}{2hl}$$

Записываем дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$z'' = -\frac{M}{EJ} - \frac{at}{h} = -\frac{M_1 + R_1 x}{EJ} - \frac{at}{h} = \frac{at}{2h} - \frac{3}{2} \frac{at}{2hl} x.$$

Интегрируя это уравнение дважды с учётом начальных условий

$$z = 0 \quad \text{и} \quad z' = \theta = 0,$$

получим

$$z = -\frac{atx^3}{4hl} + \frac{atx^2}{4h}.$$

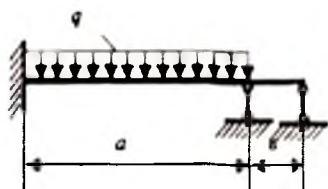
При  $x = \frac{2l}{3}$  имеем максимальный прогиб  $\frac{atl^2}{27h}$ .

б). Учитывая симметрию системы относительно средней опоры, сводим задачу к случаю, рассмотренному выше.

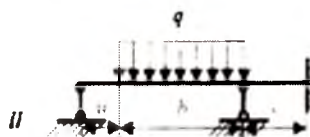
## Глава 10. Многопролетные балки

*Задача 10.1.* Раскрыть статическую неопределимость заданной многопролетной балки методом трех моментов и произвести подбор сечения двутавра (определить номер профиля). Данные взять из табл. 10.1 ( $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ).

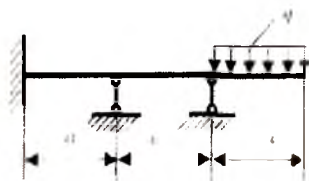
Рисунки задачи 10.1



I



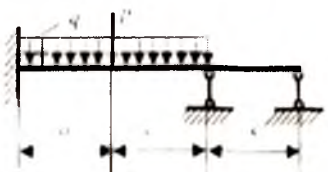
II



III



IV



V



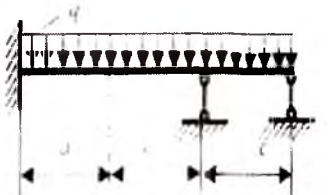
VI



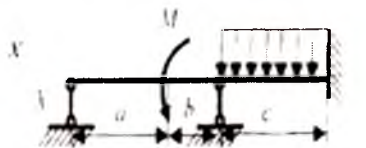
VII



VIII

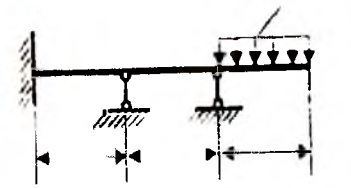
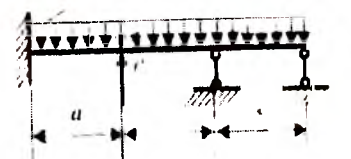
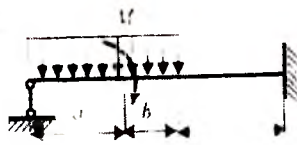
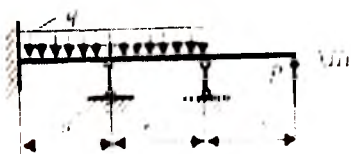
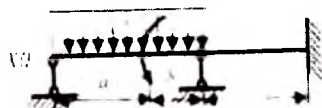
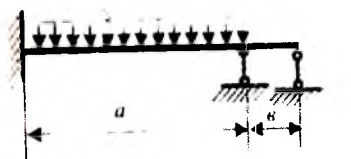


IX



X

XI



XXI



XXII



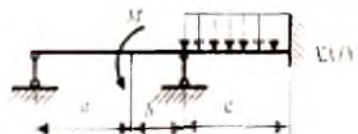


Таблица 10.1

№	a	b	c	M		№	a	b	c	q	P		
				кН/м	кДж						кН	кН	
1	1.0	0.5	1.9	5	10	11	16	2.0	0.5	1.9	5	10	11
2	1.1	0.6	1.8	6	11	12	17	2.1	0.6	1.8	6	11	12
3	1.2	0.7	1.7	7	12	13	18	2.2	0.7	1.7	7	12	13
4	1.3	0.8	1.6	8	13	14	19	2.3	0.8	1.6	8	13	14
5	1.4	0.9	1.5	9	14	15	20	2.4	0.9	1.5	9	14	15
6	1.0	0.5	1.4	5	15	16	21	2.5	0.5	1.4	5	15	16
7	1.1	0.6	1.3	6	10	12	22	2.6	0.6	1.3	6	10	12
8	1.2	0.7	1.2	7	11	13	23	2.7	0.7	1.2	7	11	13
9	1.3	0.8	1.1	8	12	14	24	2.8	0.8	1.1	8	12	14
10	1.4	0.9	1.0	9	13	15	25	2.9	0.9	1.0	9	13	15
11	1.5	0.5	0.9	5	14	11	26	3.0	0.5	0.9	5	14	11
12	1.6	0.6	0.8	6	15	12	27	3.1	0.6	0.8	6	15	12
13	1.7	0.7	0.7	7	10	13	28	3.2	0.7	0.7	7	10	13
14	1.8	0.8	0.6	8	11	14	29	3.3	0.8	0.6	8	11	14
15	1.9	0.9	0.5	9	12	15	30	3.4	0.9	0.5	9	12	15

Указания к решению задачи 10.1.

А. Для заданной балки построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 10.1).

*Решение*

Общий вид уравнения трех моментов

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6V_n^{\phi}.$$

Здесь,

$$V_n^{\phi} = \frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$$

- фиктивная сила, возникающая в сечении раздела балки две части.

Построим основную систему и напишем уравнения трех моментов (ри.10.2, а):

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EJ_B(\theta_B^1 + \theta_A^2); \quad (a)$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EJ_B(\theta_B^2 + \theta_A^3); \quad (б)$$

Здесь,

$$M_0 = M_3 = 0, \quad \theta_B^1 + \theta_A^1 = 0$$

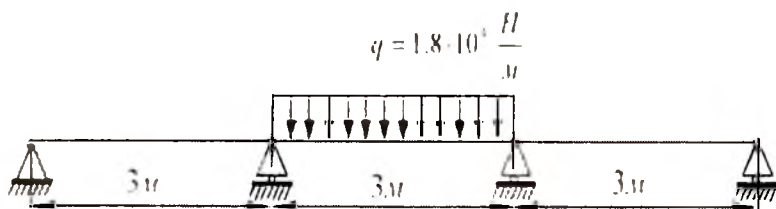


Рис. 10.1.

Значения углов в поворота в сечениях А и В берем из стандартных таблиц:

$$\theta_A^2 = - \frac{ql^3}{24EJ_y}; \quad \theta_B^2 = - \frac{ql^3}{24EJ_y};$$

Подставляя последние выражения в уравнения трех моментов (а) и (б) получаем:

$$12 M_1 + 3M_2 = -6EJ_y \left( 0 + \frac{1,8 \cdot 3^3}{24EJ_y} \right); \quad 3 M_1 +$$

$$12M_2 = - 6EJ_y \left( \frac{1,8 \cdot 3^3}{24EJ_y} + 0 \right);$$

Отсюда

$$4M_1 + M_2 = -4,05, \quad M_1 + 4M_2 = -4,05$$

или

$$M_1 = 0,81 \cdot 10^4 \text{ Нм}, \quad M_2 = 0,81 \cdot 10^4 \text{ Нм}.$$

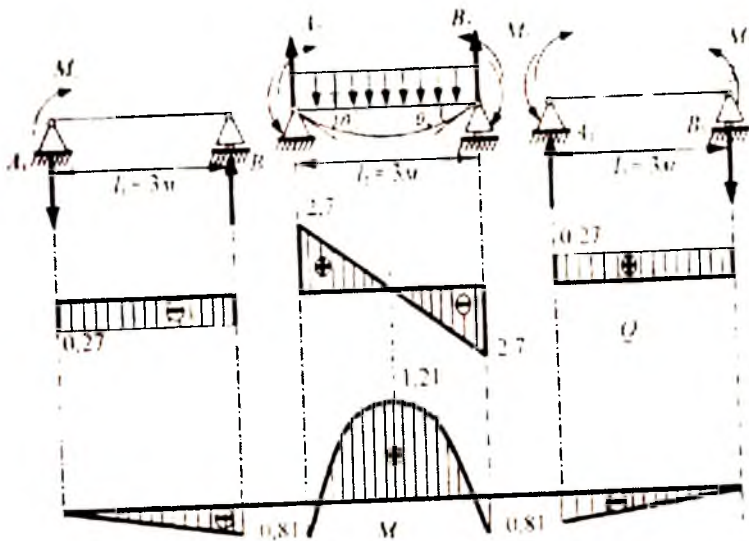


Рис. 10.2.

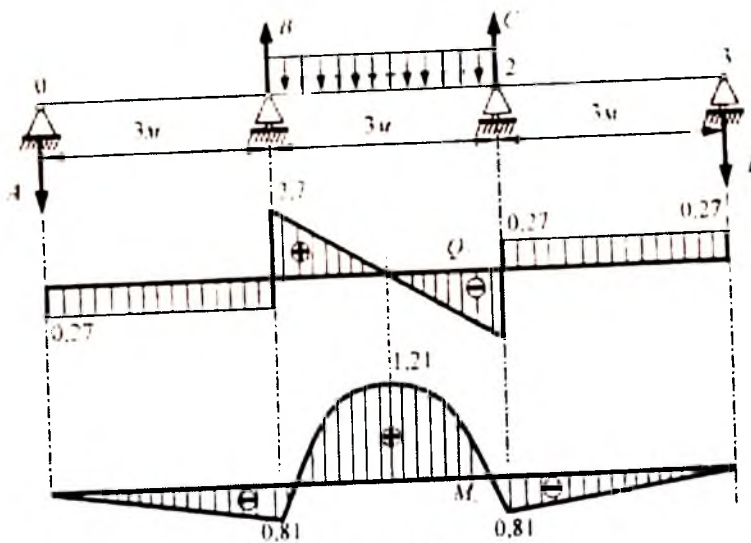


Рис. 10.3.



Учитывая влияния данных опорных моментов и внешних нагрузок, построим эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов для элементарных (простых) балок (рис. 10.2, б и в).

Далее совмещая полученные эпюры методом сложения эпюр фиктивных сил, получаем искомые эпюры перерезывающей силы и изгибающего момента (рис. 10.3, а и б).

Б. Для заданной балки построить эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 10.4).

### *Решение*

Разбивая заданную балку на элементарные балки, образуем основную схему расчета (рис. 10.5), жестко закрепленную границу заменим неподвижным шарниром и добавим элементарную балку длиной  $l_0 = 0$ , а жесткость материала — бесконечно большая величина. Действия правой консольной части заданной балки заменим моментом  $M_4 = -M$ .

Далее, напишем три уравнения трех моментов, так как задача является три раза статически неопределимой:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6EJ_y(\theta_B^1 + \theta_A^2); \quad (в)$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6EJ_y(\theta_B^2 + \theta_A^3), \quad (г)$$

$$M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -6EJ_y(\theta_B^3 + \theta_A^4), \quad (д)$$

где  $M_0 = 0$ ,  $l_1 = 0$ ,  $\theta_B^1 = 0$ ,  $M_4 = -M = -3 \cdot 10^4$  Нм.

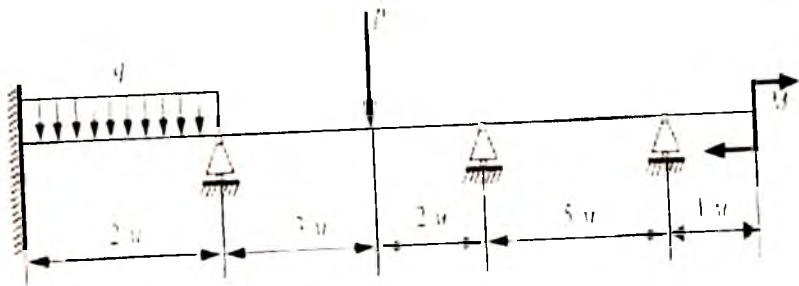


Рис. 10.4.

Углы поворота опорных сечений балки берем из специальной таблицы:

$$\theta_1^2 = -\frac{ql_2^2}{24EJ_x} = \frac{32 \cdot 10^4}{6EJ_x}; \quad \theta_2^3 = -\frac{Pab(l_1 + b)}{6EJ_x l_1} - \frac{33,6 \cdot 10^4}{6EJ_y}$$

$$\theta_B^2 = -\frac{ql_2^3}{24EJ_x} = \frac{32 \cdot 10^4}{6EJ_x}; \quad \theta_B^3 = -\frac{Pab(l_1 + a)}{6EJ_y} = \frac{38,4 \cdot 10^4}{6EJ_y}$$

где  $a = 3\text{ м}$ ,  $b = 2\text{ м}$ .

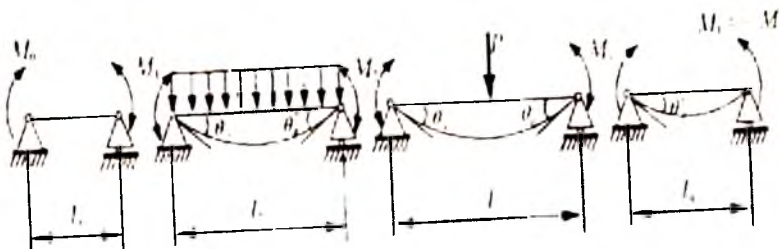


Рис. 10.5.

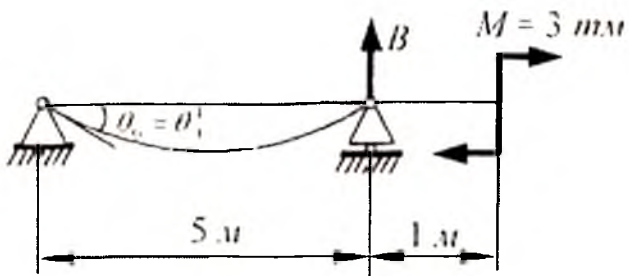


Рис. 10.6.

Если выражения для опорных сечений отсутствуют в специальных таблицах, то выражения таких углов требуется определять отдельно. В рассматриваемой задаче в специальных таблицах выражение для угла  $\theta_4$  отсутствует. Для определения выражения угла  $\theta_4$  правую элементарную балку будем рассматривать совместно с консольной частью (рис. 10.6) и напомним уравнение перемещения.

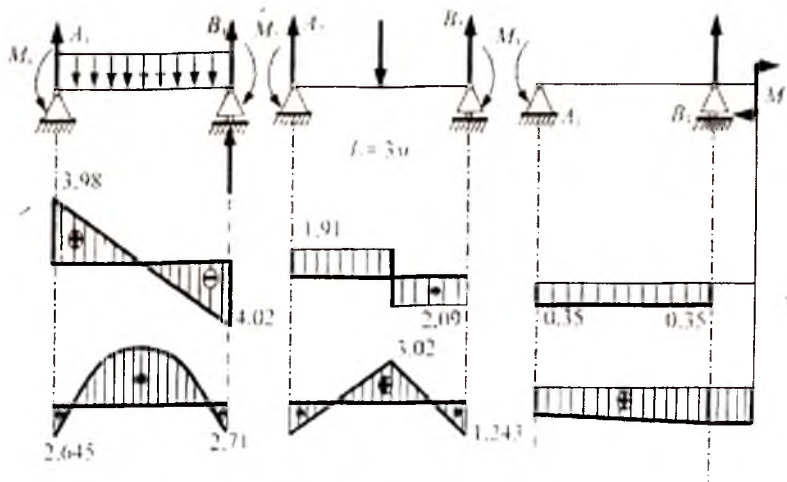


Рис. 10.7.

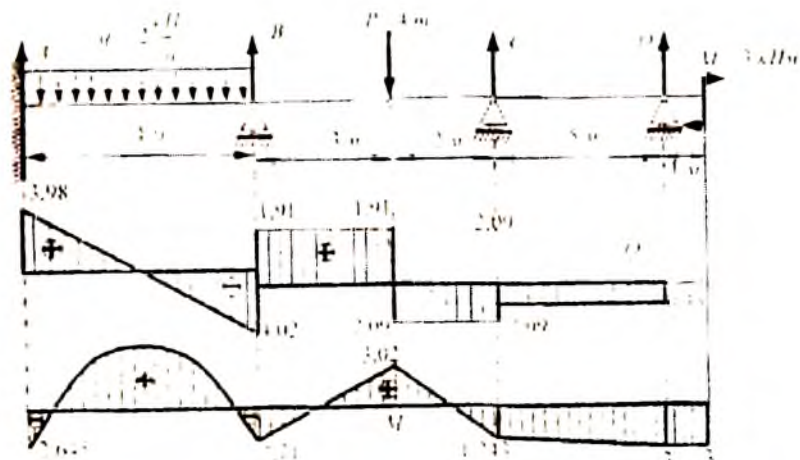


Рис. 10.8.

$$z(x) = z_0 + \theta_0 x \frac{1}{EJ_1} \left( -A \frac{x^3}{6} + B \frac{(x-5)^3}{6} \right).$$

Здесь,  $A = 0,6 \cdot 10^4$  Н — опорная сила на левой опоре.

Подставляя условия  $z(0) = 0$  и  $z(5) = 0$  в уравнение начальных параметров, получаем:

$$\theta_0 = \frac{2,5}{EJ_1} = \theta_A.$$

Далее, подставляем выражения для углов поворота (выражения (в), (г) и (д)) в уравнения трех моментов и совместно решаем, будем иметь  $M_1 = 2,65$  Нм,  $M_2 = 2,71 \cdot 10^4$  Нм и  $M_3 = 1,24$  Нм.

Подставляя значения опорных моментов  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , и учитывая действия внешних сил, построим эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 10.7).

Совмещая полученные эпюры методом сложения эпюр фиктивных сил, получаем искомые эпюры перерезывающие силы и изгибающего момента (рис. 10.8).

В. 10.9. Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданной многопролетной балки. Произвести подбор сечения двутавра.

Дано: рис. 10.9;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ МПа}$ .

*Решение*

Обозначим неизвестные реактивные изгибающие моменты, возникающие на опорах через  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  ( $M_0 = -40 \cdot 0,5 = -20 \text{ кНм}$ ).

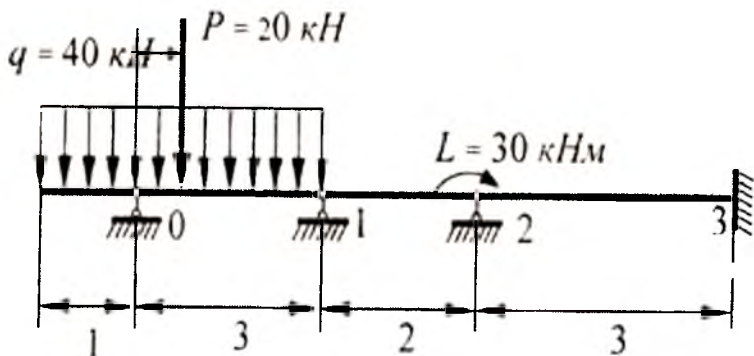
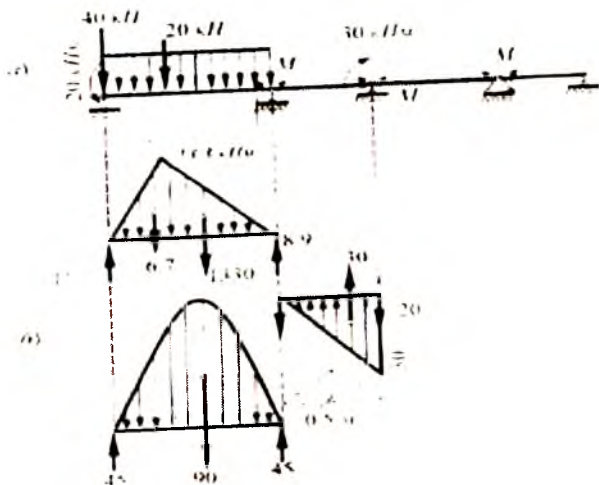


Рис. 10.9.



Уравнения трех моментов:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6V_1^\phi;$$

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6V_2^\phi;$$

$$M_2 l_3 + 2M_3 l_3 = -6V_3^\phi.$$

Определяем фиктивные реактивные силы:

$$V_1^\phi = 8.9 + 45 - 10 = 43.9 \text{ кНм}, \quad V_2^\phi = -20 \text{ кНм}, \quad V_3^\phi = 0.$$

Подставляя значения фиктивных сил в уравнения трех моментов, получаем  $M_1 = -24,4$  кНм,  $M_2 = -19,9$  кНм,  $M_3 = -9,9$  кНм.

Используя данные значения реактивных моментов, будем строить эпюры изгибающих моментов.

Реактивные силы на опорах:

$$V_0 = 111.9 \text{ кН}; V_1 = 75.2 \text{ кН};$$

$$V_2 = -17 \text{ кН}; V_3 = 19.9 \text{ кН}.$$

Максимальное значение изгибающего момента  $M_{\text{MAX}} = 33,4 \text{ кН}$  возникает в сечении  $x=1.3 \text{ м}$ .

Произведем подбор сечения балки:

$$W_y = \frac{M_{\text{MAX}}}{[\sigma]} = 240 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента выбираем номер профиля двутавра № 22а, для которой  $W_y = 254 \text{ см}^3$ .

Г. Построить эпюры изгибающих моментов для многопролетной балки переменного сечения (рис. 10.11).

### *Решение*

Неподвижную опору на левом конце балки заменяем неподвижным шарниром и вводим дополнительную часть длиной  $l_0 = 0$ . В результате, получаем расчетную схему, изображенную на рис. 10.11. б.

Построим эпюры изгибающих моментов для отдельных элементарных балок (рис. 10.11, в).

Изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$ , возникающие на первой и второй опорах известны, на третьей опоре

$$M_3 = -P \cdot l = -5 \cdot 10^4 \text{ Нм}.$$

Напишем уравнение трех моментов:

$$\frac{M_0 l_1}{J_1} + 2M_1 \left( \frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) + \frac{M_2 l_2}{J_2} = -\frac{6\alpha_1 a_1}{l_1 J_1} - \frac{6\alpha_2 b_2}{l_2 J_2};$$

$$\frac{M_2 l_{21}}{J_2} + 2M_2 \left( \frac{l_2}{J_2} + \frac{l_3}{J_3} \right) + \frac{M_3 l_3}{J_3} = -\frac{6\omega_2 a_2}{l_2 J_2} - \frac{6\omega_3 b_3}{l_3 J_3},$$

Здесь:

$$M_0 = 0; M_3 = -5 \cdot 10^4 \text{ Нм}; l_1 = 0; l_2 = 6 \text{ м}; l_3 = 4 \text{ м}; \\ J_2 = 2J; J_3 = J;$$

$$\omega_1 = 0; \omega_2 b_2 = -\frac{5 \cdot 3}{2} \cdot 4 + \frac{5 \cdot 3}{2} \cdot 2 = -15;$$

$$\omega_2 a_2 = -\frac{5 \cdot 3}{2} \cdot 2 + \frac{5 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 15;$$

$$\omega_2 b_3 = -\frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 18.$$

На втором участке эпюра состоит из параболы с ординатой:

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{3 \cdot 2^2}{8} \cdot 10^4 = \frac{2}{3} \cdot 10^4 \text{ Нм}.$$

Таким образом,

$$\frac{2M_1 \cdot 6}{2J} + M_2 \cdot \frac{6}{2J} = -\frac{6 \cdot (-15)}{6 \cdot 2J},$$

$$\frac{M_1 \cdot 6}{2J} + 2M_2 \left( \frac{4}{2J} + \frac{4}{J} \right) - \frac{5 \cdot 4}{J} = \frac{6 \cdot 15}{6 \cdot 2J} - \frac{6 \cdot 18}{4J}.$$



Отсюда

$$4M_1 + 2M_2 = 5, \quad 6M_1 + 28M_2 = -29$$

или

$$M_1 = 1,98 \cdot 10^4 \text{ Нм} \text{ и } M_2 = -1,46 \text{ Нм}.$$

Вычисляем изгибающие моменты для каждого участка балки:

- на участке, расположенной между первой и второй опорами ( $0 \leq x \leq 3\text{м}$ )

$$M = -\frac{5}{3}x + 1,98 = 1,98 - 2,24x, \quad M(0) = 1,98 \cdot 10^4 \text{ Нм},$$

$$M(3) = 1,98 - 2,24 \cdot 3 = 4,74 \cdot 10^4 \text{ Нм};$$

- на участке  $0 \leq x \leq 6 \text{ м}$ .

$$M = 10 - \frac{5}{3}x + 1,98 = 11,98 - 2,24x, \quad M(3) = 5,26 \cdot 10^4 \text{ Нм},$$

$$M(6) = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Нм};$$

- на участке между второй и третьей опорами ( $0 \leq x \leq 2\text{м}$ )

$$M = 4,5x - \frac{3x^2}{2} - 1,46 + \frac{-5 + 1,46}{4}x = 1,46 + 3,615x - 1,5x^2,$$

$$M(0) = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Нм}; \quad M(2) = -0,23 \cdot 10^4 \text{ Нм};$$

- на участке  $2 \leq x \leq 4 \text{ м}$ .

$$M = 4,5x - 3,2(x-1) - 1,46 + \frac{-5+1,46}{4}x = 4,54 + 2,385x.$$

$$M(2) = -0,23 \cdot 10^4 \text{ Нм}; \quad M(4) = 5 \cdot 10^4 \text{ Нм};$$

Окончательная эпюра изгибающего момента приведена на рис. 10.11, г.

Продифференцировав один раз по  $x$  из уравнения изгибающего момента, получаем уравнение перерезывающей силы:

- на участке между первой и второй опорами

$$- Q = -2,24 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

- на участке между второй и третьей опорами ( $0 \leq x \leq 2\text{ м}$ )

$$Q = 3,615 - 3x, \quad Q(0) = 3,615 \cdot 10^4 \text{ Н}, \quad Q(2) = 3,615 - 3 \cdot 2 = 2,385 \cdot 10^4 \text{ Н}; \quad Q = -2,385 \cdot 10^4 \text{ Н}, \quad (2 \leq x \leq 4 \text{ м}).$$

Найдем решение уравнение перерезывающей силы. Перерезывающая сила имеет решение на участке  $0 \leq x \leq 2\text{ м}$ :

$$Q = 3,615 - 3x_0 = 0,$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{3,615}{3} = 1,205 \text{ м}.$$

Изгибающий момент в данном сечении имеет значение  $M_{\text{MAX}} = 0,72 \cdot 10^4 \text{ Нм}$ . Эпюра перерезывающей силы приведена на рис. 10.11, д.

Определяем реактивные силы:

- на первой опоре  $R_1 = -2,24 \cdot 10^4 \text{ Н}$ ;

- на второй опоре  $R_2 = 3,615 - (-2,24) = 5,855 \cdot 10^4$  Н;

- на третьей опоре  $R_3 = 5 - (-2,385) = 7,385 \cdot 10^4$  Н.

Общий вид схемы расчета балки, находящейся под действием всех внешних нагрузок приведен на рис. 10.11, е.

*Проверка.* Если все реактивные силы и изгибающие моменты определены правильно, то должны выполняться следующие условия:

$$\Sigma Z = -2,24 + 5,855 + 7,385 - 3 \cdot 2 - 5 = 13,24 - 13,24 = 0;$$

$$\Sigma M_1 = 1,98 + 10 - 5,855 \cdot 6 - 7,385 \cdot 10 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 5 \cdot 11 =$$

$$108,98 - 108,98 = 0.$$

Кроме того, прогибы на опорах должны равняться нулю. Проверим выполнение данного условия на второй опоре. В данном случае  $\theta_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $M_0 = 1,98 \cdot 10^4$  Нм,  $Q_0 = 2,24 \cdot 10^4$  Н. Следовательно, прогиб по методу начальных параметров:

$$EJ_z = \frac{1,98 \cdot 6^2}{2} - \frac{2,24 \cdot 6^3}{6} + \frac{10 \cdot 3^2}{2} = \frac{3^2}{2} (7,92 - 7,92) = 0,$$

то есть, на второй опоре прогиб равен нулю.

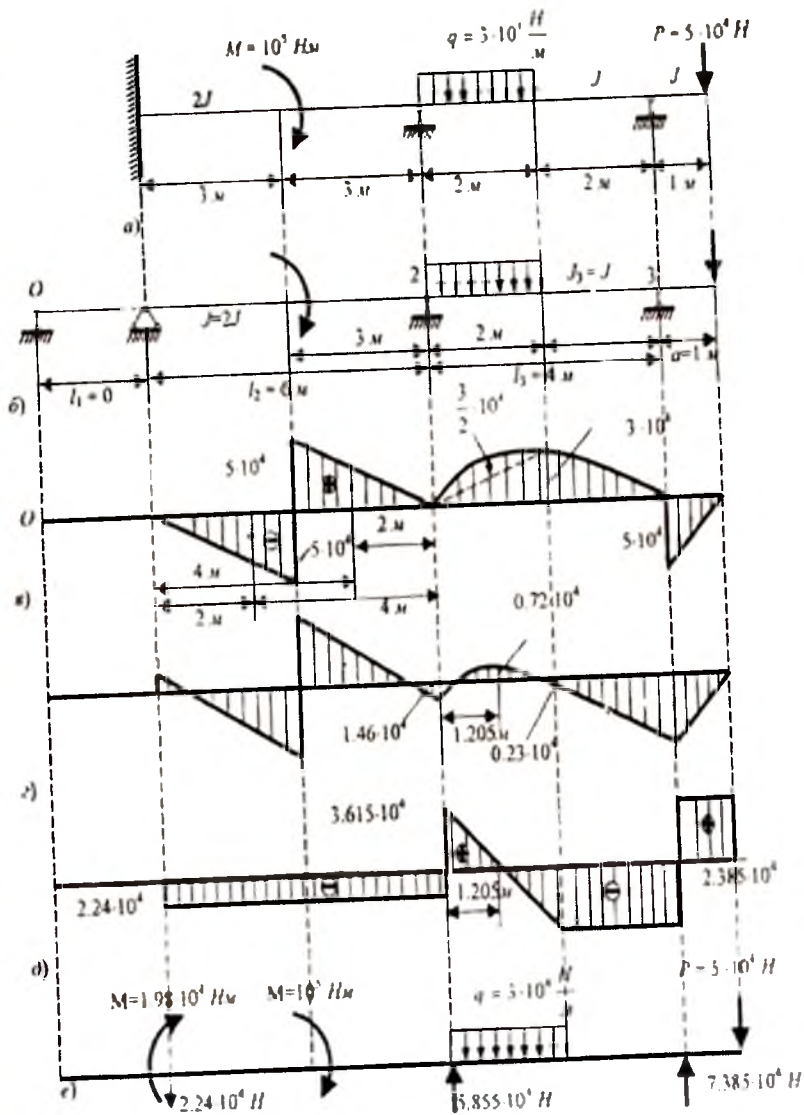


Рис. 10.11.

- на второй опоре  $R_2 = 3,615 - (-2,24) = 5,855 \cdot 10^4$  Н;

- на третьей опоре  $R_3 = 5 - (-2,385) = 7,385 \cdot 10^4$  Н

Общий вид схемы расчета балки, находящейся под действием всех внешних нагрузок приведен на рис. 10.11, е.

*Проверка.* Если все реактивные силы и изгибающие моменты определены правильно, то должны выполняться следующие условия:

$$\Sigma Z = -2,24 + 5,855 + 7,385 - 3 \cdot 2 - 5 = 13,24 - 13,24 = 0;$$

$$\Sigma M_1 = 1,98 + 10 - 5,855 \cdot 6 - 7,385 \cdot 10 + 3 \cdot 2 \cdot 7 + 5 \cdot 11 =$$

$$108,98 - 108,98 = 0.$$

Кроме того, прогибы на опорах должны равняться нулю. Проверим выполнение данного условия на второй опоре. В данном случае  $\theta_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ ,  $M_0 = 1,98 \cdot 10^4$  Нм,  $Q_0 = 2,24 \cdot 10^4$  Н. Следовательно, прогиб по методу начальных параметров:

$$EJ_{\nu} z = \frac{1,98 \cdot 6^3}{2} - \frac{2,24 \cdot 6^3}{6} + \frac{10 \cdot 3^2}{2} = \frac{3^3}{2} (7,92 - 7,92) = 0,$$

то есть, на второй опоре прогиб равен нулю.

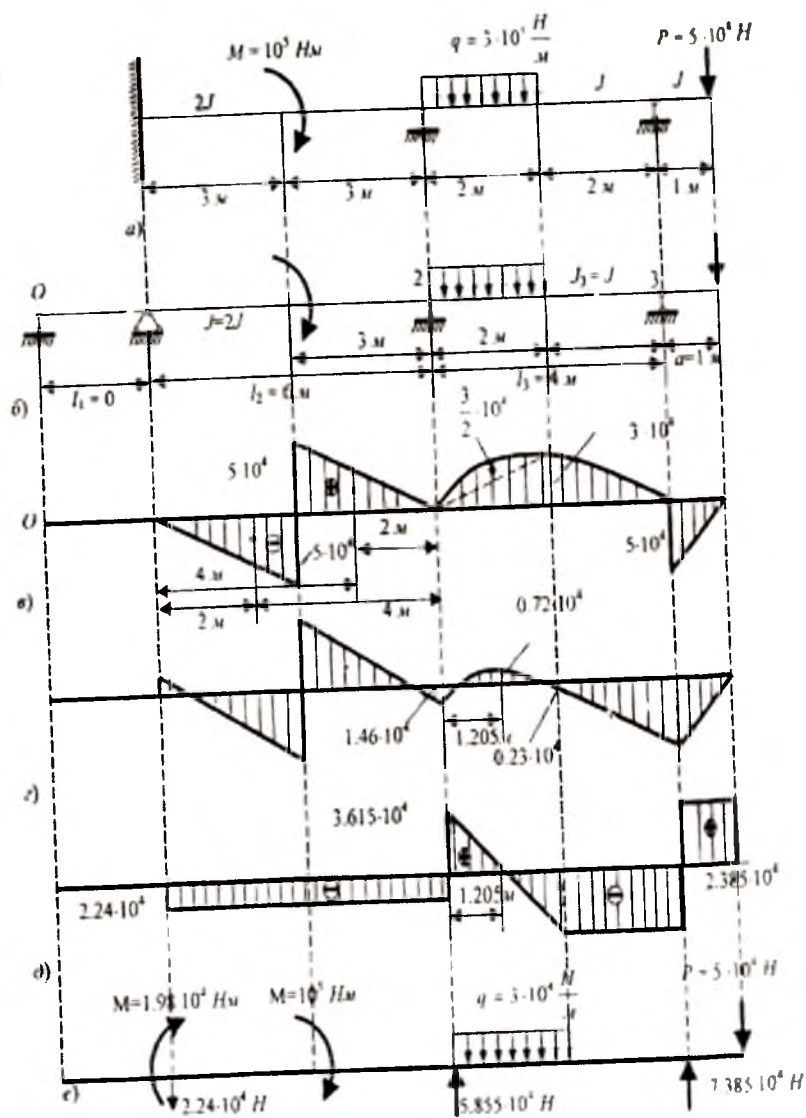


Рис. 10.11.

## Глава 11. Расчет прочности плоских рам

Задача 11.1. Построить эпюры внутренних силовых факторов, возникающих на участках заданной плоской рамы. Данные взять из табл. 11.1.

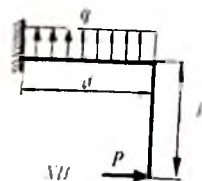
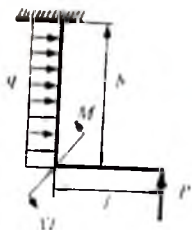
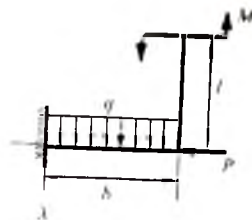
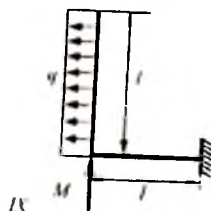
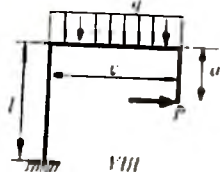
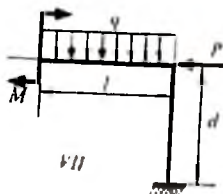
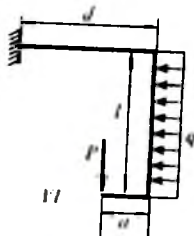
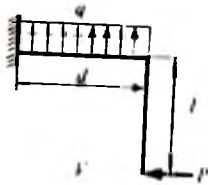
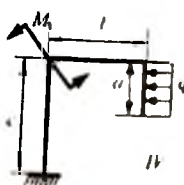
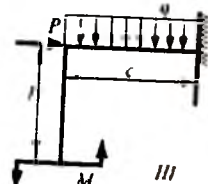
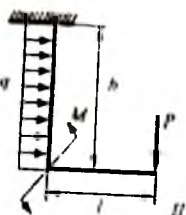
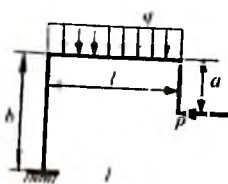


Таблица 11.1.

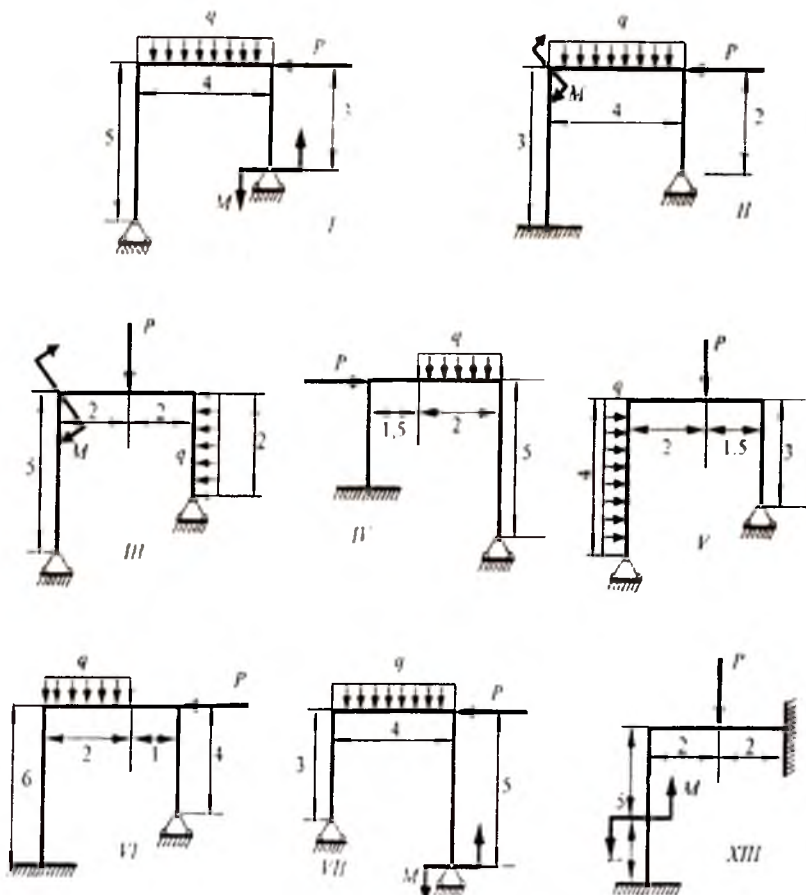
№	Схема	q	p	M	a	b	c	d	l
		$\frac{кН}{м}$	кН	кНМ					
1	I	1	2	3	0.2	1.2	1.1	1.3	1.1
2	II	2	3	4	0.3	1.3	1.2	1.4	1.2
3	III	3	4	5	0.4	1.4	1.3	1.5	1.3
4	IV	4	5	6	0.5	1.5	1.4	1.6	1.4
5	V	5	6	7	0.6	1.6	1.5	1.7	1.5
6	VI	6	7	3	0.7	1.7	1.6	1.8	1.1
7	VII	7	8	4	0.8	1.8	1.7	1.9	1.2
8	VIII	8	9	5	0.9	1.9	1.8	2.0	1.3
9	IX	9	10	6	0.2	2.0	1.9	2.1	1.4
10	X	10	11	7	0.3	2.1	2.0	1.3	1.5
11	XI	1	2	3	0.4	1.2	1.1	1.4	1.1
12	XII	2	3	4	0.5	1.3	1.2	1.5	1.2
13	I	3	4	5	0.6	1.4	1.3	1.6	1.3
14	II	4	5	6	0.7	1.5	1.4	1.7	1.4
15	III	5	6	7	0.8	1.6	1.5	1.8	1.5
16	IV	6	7	3	0.9	1.7	1.6	1.9	1.1
17	V	7	8	4	0.2	1.8	1.7	2.0	1.2
18	VI	8	9	5	0.3	1.9	1.8	2.1	1.3
19	VII	9	10	6	0.4	2.0	1.9	1.3	1.4
20	VIII	10	11	7	0.5	2.1	2.0	1.4	1.5
21	IX	1	2	3	0.6	1.2	1.1	1.5	1.1
22	X	2	3	4	0.7	1.3	1.2	1.6	1.2
23	XI	3	4	5	0.8	1.4	1.3	1.7	1.3
24	XII	4	5	6	0.9	1.5	1.4	1.8	1.4
25	I	5	6	7	0.2	1.6	1.5	1.9	1.5
26	II	6	7	3	0.3	1.7	1.6	2.0	1.1
27	III	7	8	4	0.4	1.8	1.7	2.1	1.2
28	IV	8	9	5	0.5	1.9	1.8	1.3	1.3
29	V	9	10	6	0.6	2.0	1.9	1.4	1.4
30	VI	10	11	7	0.7	2.1	2.0	1.5	1.5

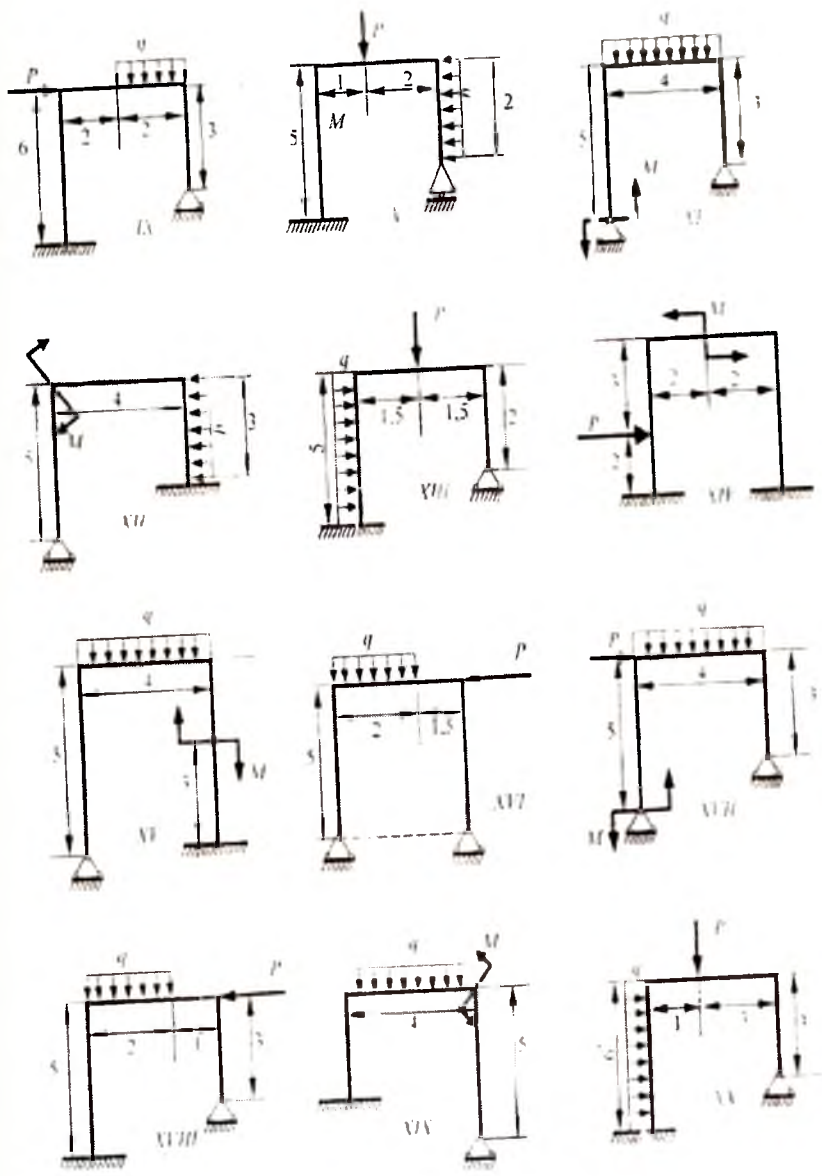


Задача 11.2. Для заданной требуется: 1) написать уравнения равновесия; 2) определить реактивные силы; 3) построить эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов; 4) произвести подбор сечения цилиндрического стержня ( $[\sigma] = 160$  МПа).

Данные взять из табл. 11.2.

Рисунки 11.2.





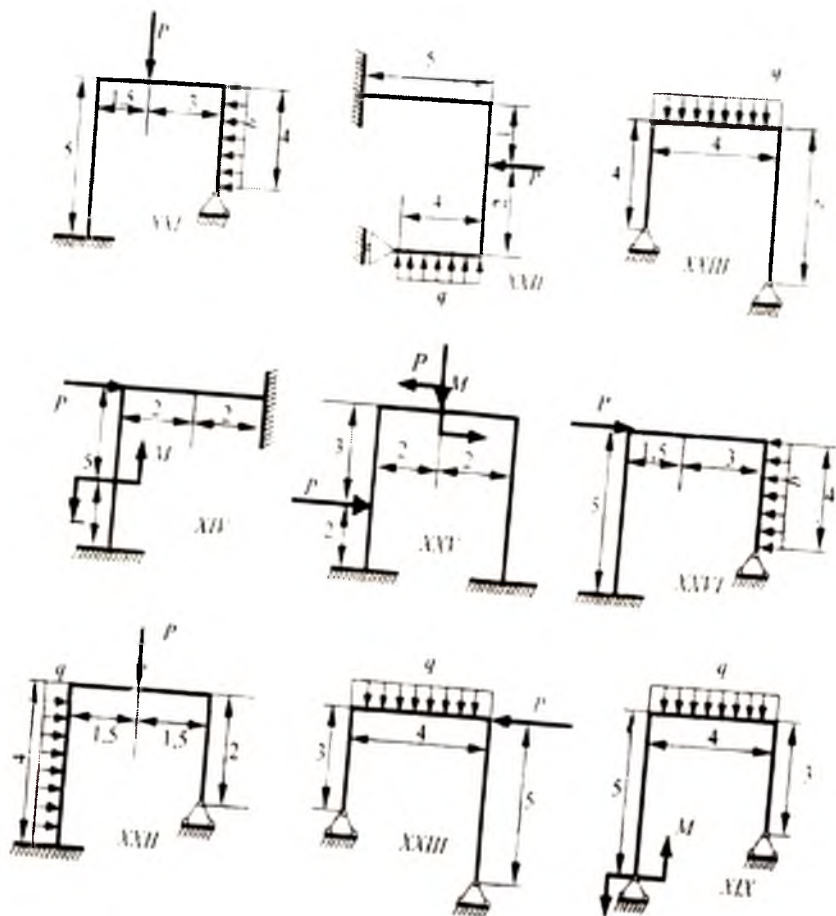


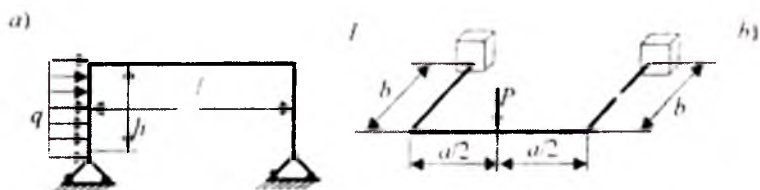
Таблица 11.2.

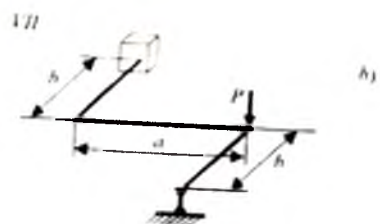
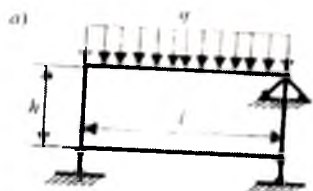
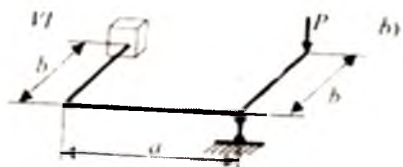
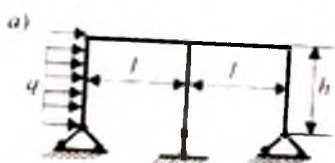
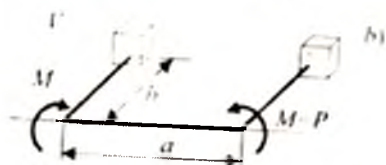
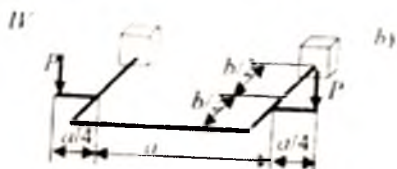
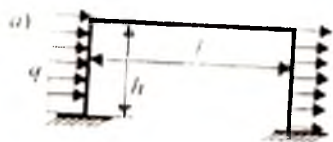
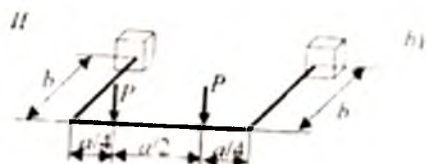
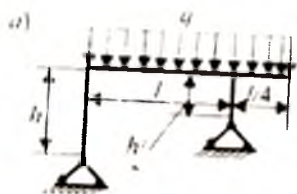
№	Схе- ма	q	p	M	№	Схема	q	p	M
		$\frac{\kappa H}{m}$	$\frac{\kappa}{H}$	$\frac{\kappa H}{m}$			$\frac{\kappa H}{m}$	$\frac{\kappa}{H}$	$\frac{\kappa H}{m}$
1	I	1	3	5	16	XVI	1	3	5
2	II	2	4	6	17	XVII	2	4	6
3	III	3	5	7	18	XVIII	3	5	7

4	IV	4	6	8	19	XIX	4	6	8
5	V	5	7	9	20	XX	5	7	9
6	VI	6	8	10	21	XXI	6	8	10
7	VII	7	9	5	22	XXII	7	9	5
8	VIII	8	10	6	23	XXIII	8	10	6
9	IX	9	1	7	24	XXIV	9	1	7
10	X	10	2	8	25	XXV	10	2	8
11	XI	1	3	9	26	XXVI	1	3	9
12	XII	2	4	10	27	XXVII	2	4	10
13	XIII	3	5	5	28	I	3	5	5
14	II	4	6	6	29	XXVIII	4	6	6
15	XIV	5	7	7	30	XXIX	5	7	7
	XV					XXX			

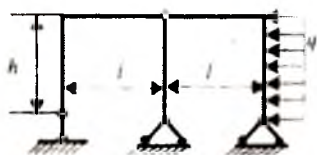
Задача 11.3. На рис. а. изображена нагруженная в своей плоскости рама, вертикальные элементы, которой имеют моменты инерции  $J$ , а горизонтальные элементы —  $kJ$ ; на рис. б. изображена нагруженная перпендикулярно своей плоскости рама, сделанная из стержня круглого сечения ( $G=0.4E$ ). Требуется для обеих рам: 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему; 2) написать канонические уравнения; 3) построить эпюры  $M$  от единичных сил и от заданной нагрузки; 4) найти перемещения; 5) найти величины лишних неизвестных; 6) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов  $M$ ,  $N$  и  $Q$  схемы на рис. а и  $M_{и}$ ,  $M_{к}$  и  $Q$  для схемы на рис. б. Данные взять из табл. 11.3.

Рисунки задачи 11.3.

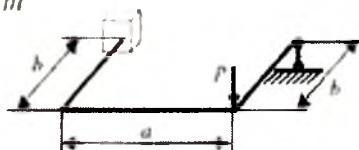




a)

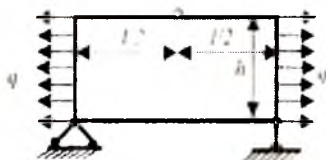


III

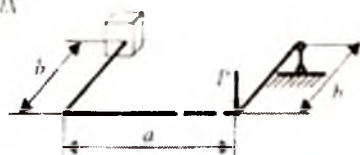


b)

a)



IV



b)

Таблица 11.3.

№	Схема	a	b	l	h	P	q	k
						H	$\frac{\kappa H}{m}$	
		M						
1	I	0.5	0.2	1.1	1	500	1	0.5
2	II	0.6	0.3	1.2	2	600	2	0.6
3	III	0.7	0.4	1.3	3	700	3	0.7
4	IV	0.8	0.5	1.4	4	800	4	0.8
5	V	0.9	0.6	1.5	5	900	5	0.9
6	VI	1.0	0.7	1.6	1	1000	6	1.0
7	VII	1.1	0.8	1.7	2	1100	7	1.1
8	VIII	1.2	0.9	1.8	3	1200	8	1.2
9	IX	1.3	1.0	1.9	4	1300	9	1.3
10	X	1.4	1.1	1.1	5	1400	10	1.4
11	I	1.5	1.2	1.2	1	1500	11	1.5
12	II	1.6	1.3	1.3	2	1600	12	1.6
13	III	1.7	1.4	1.4	3	1700	13	1.7
14	IV	1.8	1.5	1.5	4	1800	14	1.8
15	V	1.9	1.6	1.6	5	1900	15	1.9
16	VI	0.5	0.2	1.7	1	500	1	0.5

17	VII	0.6	0.3	1.8	2	600	2	0.6
18	VIII	0.7	0.4	1.9	3	700	3	0.7
19	IX	0.8	0.5	1.1	4	800	4	0.8
20	X	0.9	0.6	1.2	5	900	5	0.9
21	I	1.0	0.7	1.3	1	1000	6	1.0
22	II	1.1	0.8	1.4	2	1100	7	1.1
23	III	1.2	0.9	1.5	3	1200	8	1.2
24	IV	1.3	1.0	1.6	4	1300	9	1.3
25	V	1.4	1.1	1.7	5	1400	10	1.4
26	VI	1.5	1.2	1.8	1	1500	11	1.5
27	VII	1.6	1.3	1.9	2	1600	12	1.6
28	VIII	1.7	1.4	1.1	3	1700	13	1.7
29	IX	1.8	1.5	1.2	4	1800	14	1.8
30	X	1.9	1.6	1.3	5	1900	15	1.9

Указания к решению задач 11.1 – 11.3.

А. Построить эпюры изгибающих моментов для рамы заданной на рис. 11.1.

*Решение*

На неподвижном шарнире два и на неподвижной опоре три неизвестных. Следовательно, задача два раза статически неопределимая.

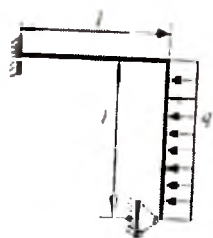


Рис. 11.1.



Рис. 11.2.

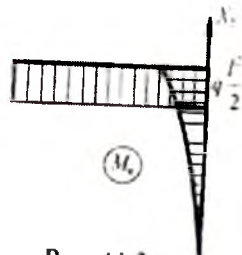


Рис. 11.3.

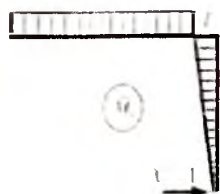


Рис. 11.4

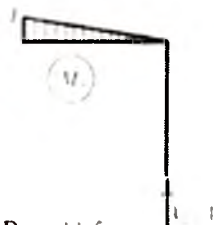


Рис. 11.5

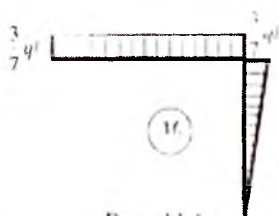


Рис. 11.6

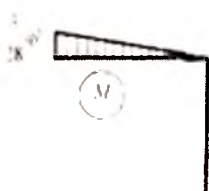


Рис. 11.7



Рис. 11.8

Освободим раму от неподвижно шарнирной опоры и построим основную систему (рис. 11.2). на основную систему действуют внешние силы и две неизвестные реактивные силы  $X_1$  и  $X_2$ .

Напишем две канонические уравнения, так задача является два раза статически неопределимой:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1q} = 0; \quad \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2q} = 0.$$

Перемещения  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\Delta_{1q}$ ,  $\Delta_{2q}$  определяем по формуле Верещагина. Для этого отдельно построим эпюры изгибающих моментов, возникающих на раме от действия внешних и единичных сил (рис. 11.3 - 11.5):

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i z_i}{EJ_i} = \frac{\frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l}{EJ_1} + \frac{l \cdot l \cdot l}{EJ_2} = \frac{4l^3}{3EJ_1};$$



$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l \cdot l \cdot \frac{1}{2}l}{EJ_y} = \frac{l^3}{2EJ_y}; \quad \Delta_{2q} = -\frac{ql^4}{4EL_y};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EL_y};$$

$$\Delta_{1q} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i z_i}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l = -\frac{5}{8} \frac{ql^4}{EJ_y}.$$

Подставляя эти перемещения в канонические уравнения, получаем:

$$\frac{4l^3}{3EJ_y} X_1 + \frac{l^3}{2EJ_y} - \frac{5}{8} \frac{ql^4}{EJ_y} = 0;$$

$$\frac{l^3}{2EJ_y} X_1 + \frac{l^3}{2EJ_y} - \frac{1}{4} \frac{ql^4}{EJ_y} = 0.$$

Отсюда  $X_1 = \frac{3}{4}ql$ ,  $X_2 = \frac{3}{28}ql$ .

Увеличивая  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  в эпюрах единичных сил в соответствии сил  $X_1$  и  $X_2$ , получаем эпюры изгибающих моментов  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 11.6-11.7). Суммируя, полученные эпюры  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_q$  получаем эпюры изгибающих моментов (рис. 11.8).

Б. Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданной на рис. 11.9 рамы.

### Решение

Данная задача является три раза статически неопределимой  $S = n - m = 6 - 3 = 3$ . Освободим раму

неподвижного шарнира и основную систему расчета (рис. 11.2). на основную систему приложим внешние силы и неизвестные реактивные силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ .

Напишем три канонические уравнения, так как задача является три раза статически неопределимой:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0.$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

По методу Верещагина построим отдельно эпюры изгибающих моментов, возникающих от действия на раму внешних сил и единичных сил (11.11 - 11.14):

$$\delta_{11} = \frac{4 \cdot 4}{2EJ_y} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{64}{3EJ_y};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_y} \left( 3 \cdot 4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{45}{EJ_y}; \quad \delta_{33} = \frac{7}{EJ_y};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 3 = \frac{24}{EJ_y}; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{8}{EJ_y};$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{EJ_y} \left( 3 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 1 \right) = \frac{16,5}{EJ_y};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{6,4 \cdot 4}{3} \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{41,6}{EJ_y};$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{6,4 \cdot 4}{3} \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \right) = \frac{49,6}{EJ_y};$$

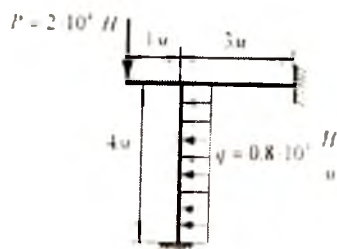


Рис. 11.9.

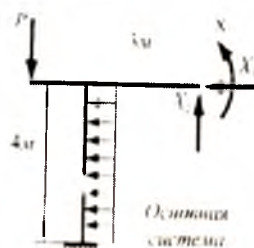


Рис. 11.10.



Рис. 11.11.

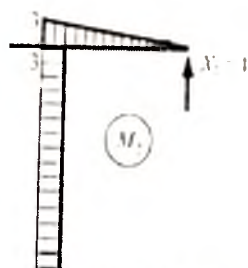


Рис. 11.12.



Рис. 11.13.

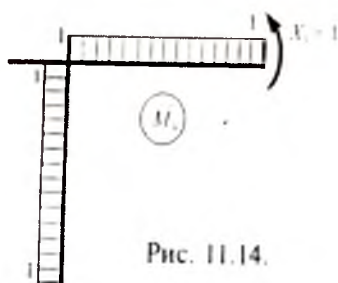


Рис. 11.14.

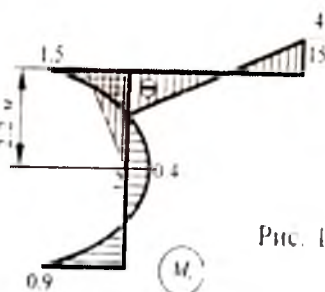


Рис. 11.15.

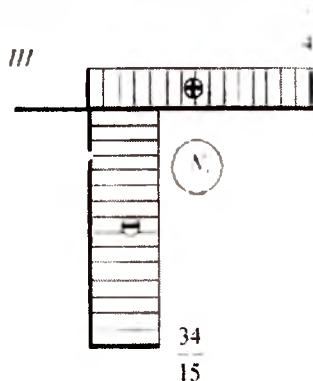


Рис. 11.16.

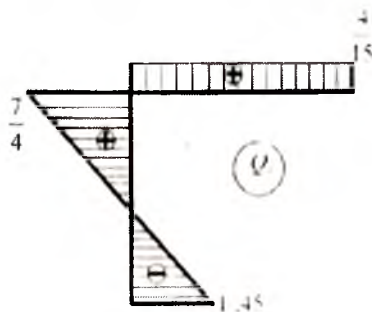


Рис. 11.17.

$$\Delta_{\nu p} = -\frac{1}{EJ_y} \left( \frac{6 \cdot 4 \cdot 4}{3} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{33,6}{3EJ_y}$$

Подставляя значения перемещения в канонические уравнения, получаем:

$$\frac{64}{3EJ_y} \cdot X_1 + \frac{24}{EJ_y} \cdot X_2 + \frac{8}{EJ_y} \cdot X_3 + \frac{41,6}{EJ_y} = 0;$$

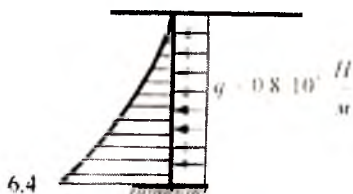
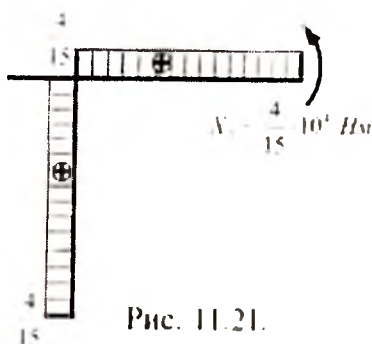
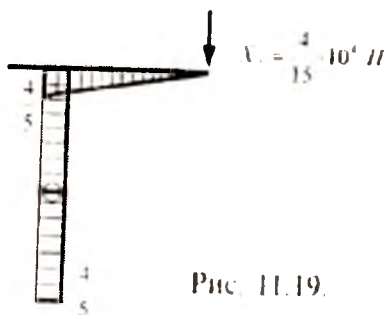
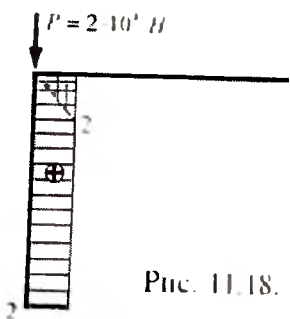
$$\frac{24}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{45}{EJ_y} \cdot X_2 + \frac{16,5}{EJ_y} \cdot X_3 + \frac{49,6}{EJ_y} = 0;$$

$$\frac{8}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{16,5}{EJ_y} \cdot X_2 + \frac{7}{EJ_y} \cdot X_3 + \frac{33,6}{3EJ_y} = 0.$$

Отсюда:

$$X_1 = -\frac{7}{4} \cdot 10^4 H; \quad X_2 = -\frac{4}{15} \cdot 10^4 H; \quad X_3 = -\frac{4}{15} \cdot 10^4 H.$$

Эпюры внутренних силовых факторов приведены на рис. 11.15-11.17.



Проверим правильности построенных эпюр. Разобьем эпюры изгибающих моментов на отдельные эпюры и перемножим их с эпюрами изгибающих

моментов единичных сил (рис. 11.18-11.22). Если при этом получается нулевые перемещения, то эпюры изгибающих моментов построены правильно. В рассматриваемой задаче:

$$2 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{4}{5} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{7 \cdot 4}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{15} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{6,4 \cdot 3}{3} \cdot 3 = 0.$$

В. Построить эпюры изгибающих моментов для рамы, заданной на рис. 11.23.

*Решение*

1) Рама три раза статически неопределимая  $S = n - m = 6 - 3 = 3$ .

2) Основную систему можно выбрать несколькими способами (рис. 11.24-11.25).

3) напомним три канонические уравнения:

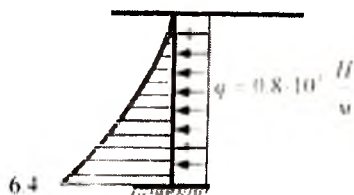
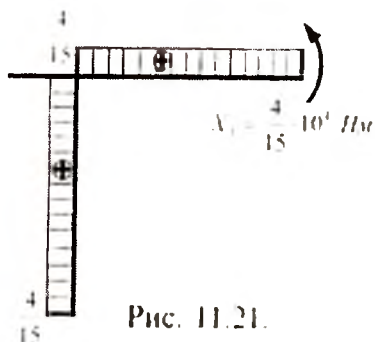
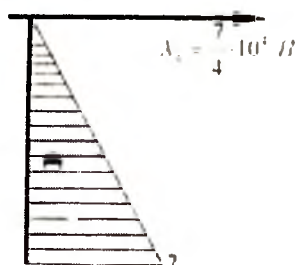
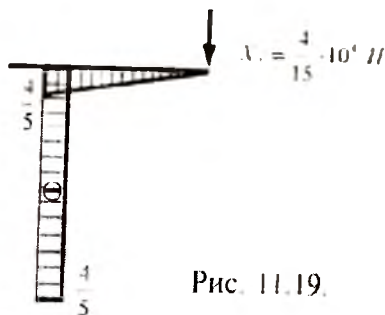
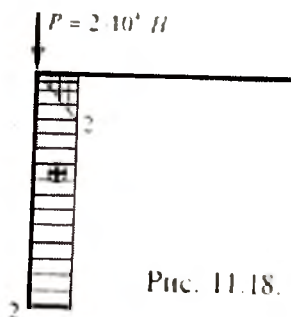
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2p} = 0.$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

В общем случае коэффициенты этих уравнений не равны нулю. Поэтому требуется решить данную систему с тремя неизвестными. Но если заменить схема расчета, изображенной на рис. 11.26, то объем работ по вычислению коэффициентов канонических уравнений несколько сокращается.

Эпюры внутренних силовых факторов приведены на рис. 11.15-11.17.



Проверим правильности построенных эпюр. Разобьем эпюры изгибающих моментов на отдельные эпюры и перемножим их с эпюрами изгибающих

моментов единичных сил (рис. 11.18-11.22). Если при этом получается нулевые перемещения, то эпюры изгибающих моментов построены правильно. В рассматриваемой задаче:

$$2 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{4}{5} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{7 \cdot 4}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{15} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{6,4 \cdot 3}{3} \cdot 3 = 0.$$

В. Построить эпюры изгибающих моментов для рамы, заданной на рис. 11.23.

*Решение*

1) Рама три раза статически неопределимая  $S = n - m = 6 - 3 = 3$ .

2) Основную систему можно выбрать несколькими способами (рис. 11.24-11.25).

3) напомним три канонические уравнения:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0.$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

В общем случае коэффициенты этих уравнений не равны нулю. Поэтому требуется решить данную систему с тремя неизвестными. Но если заменить схема расчета, изображенной на рис. 11.26, то объем работ по вычислению коэффициентов канонических уравнений несколько сокращается.



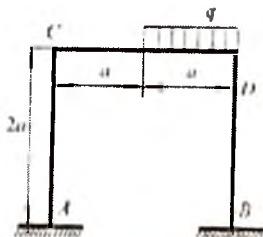


Рис. 11.23.

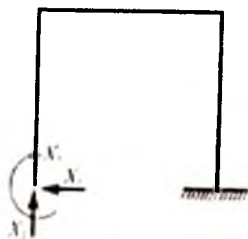


Рис. 11.24.

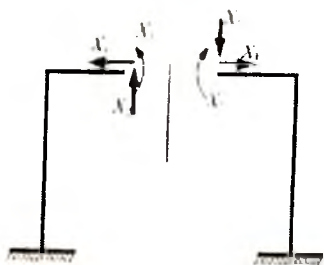


Рис. 11.25.

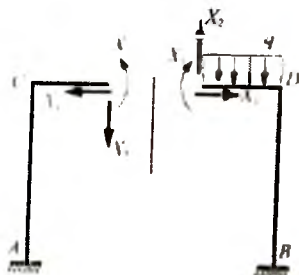


Рис. 11.26.

На основную систему приложим заданные силы и единичные силы. Направления единичных сил совпадают с выбранными направлениями неизвестных неактивных сил (рис. 11.27-11.28).

Для полученных рам, метод сечения построим эпюры внутренних моментов.

Канонических уравнения в этом случае сохраняются в общем виде, то есть:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2p} = 0.$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

Здесь  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  — лишние неизвестные соответствующие каноническим уравнениям эквивалентной системы (рис. 11.26). Коэффициенты  $\delta_{12} = \delta_{21}$  и  $\delta_{23} = \delta_{32}$  при вычислении перемещения превращаются нулю, так как умножение симметричных эпюр на антисимметричных эпюр всегда дает ноль. Поэтому последние канонические уравнения разделяют на два самостоятельные уравнения:

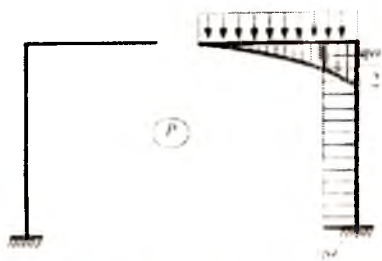


Рис. 11.27.

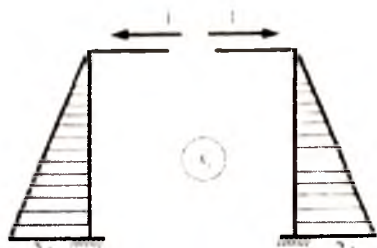


Рис. 11.28.

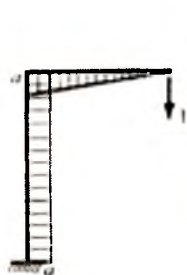


Рис. 11.29.

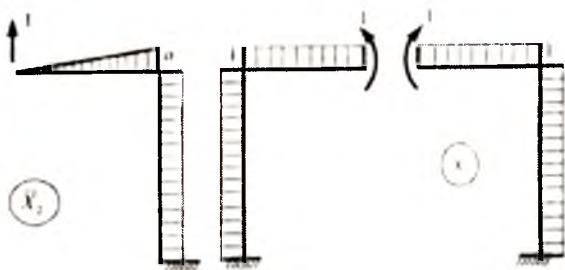


Рис. 11.30.

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0.$$

$$\delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p} = 0. \quad (\text{a})$$

Первые два уравнения последней системы содержат только  $X_1$  и  $X_3$ , а третье уравнение — только  $X_2$ .

Свободные члены и коэффициенты последних уравнений определяем по формуле Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} 2a \cdot 2 = \frac{16a^2}{3EJ_y} \quad (\text{рис. 11.28});$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \cdot 1 = \frac{4a^2}{EJ_y} \quad (\text{рис. 11.28 и 11.30});$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_y} (1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 2a \cdot 1) \cdot 2 = \frac{6a}{EJ_y} \quad (\text{рис. 11.30});$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \right) \cdot 2 = \frac{14}{3} \frac{a^3}{EJ_y} \quad (\text{рис. 11.29});$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_y} qa^2 \frac{a^2}{2} \cdot a = -\frac{qa^3}{EJ_y} \quad (\text{рис. 11.27 и 11.28});$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{3}{4} a + \frac{1}{2} qa^2 \cdot a \right) = -\frac{9qa^4}{8EJ_y} \quad (\text{рис. 11.27 и 11.29});$$

$$\Delta_{3p} = -\frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} a \cdot 1 + \frac{qa^2}{2} \cdot 2a \cdot 1 \right) = -\frac{7}{6} \frac{qa^3}{8EJ_y} \quad (\text{рис. 11.27 и 11.30});$$

4) Полученные выражения подставляем в уравнения (а) и сократим их на величину  $\frac{1}{EJ_y}$ :

$$\frac{16}{3}\alpha^3 \cdot X_1 + 4\alpha^2 \cdot X_3 - q\alpha^3 = 0;$$

$$4\alpha^2 \cdot X_1 - 6\alpha X_3 - \frac{7}{6}q\alpha^3 = 0;$$

$$\frac{14}{3}\alpha^3 \cdot X_2 - \frac{9}{8}q\alpha^4 = 0.$$

Отсюда найдем неизвестные  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ :

$$x_2 = \frac{27}{112}qa; x_{1,2} = \frac{1}{12}qa; x_3 = \frac{5}{36}qa^2;$$

Силы  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  имеют положительные знаки, следовательно, знаки неизвестных сил на схеме расчета указаны правильно.

Теперь увеличим все эпюры единичных сил в соответствии к силам  $X$ , и в результате получим эпюры изгибающих моментов, возникающих от действия сил  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  (рис. 11.31 - 11.33).

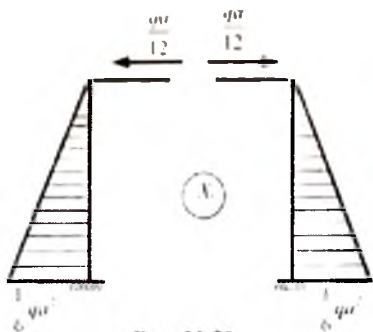


Рис. 11.31.

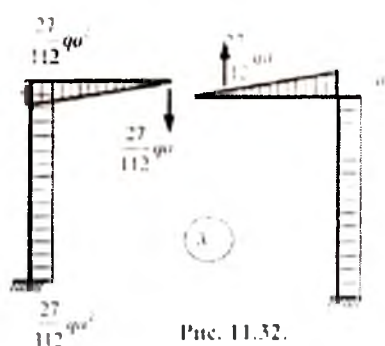


Рис. 11.32.

Эпюру действия внешней силы на основную систему (рис. 11.27) сложим на эпюру изгибающих моментов, возникающих от действия сил  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  (рис. 11.31-11.33). Таким образом, получаем эпюру изгибающих моментов, возникающих в заданной раме. Эпюру изгибающего момента, возникающего в первой части рамы от действия распределенной нагрузки построим методом сечения (рис.11.26). Изгибающий момент на данном участке изображается в следующем виде:

$$M_x = X_2x + X_3 - q \frac{x^2}{2} = \frac{27}{112} qax + \frac{5}{36} qa^2 - q \frac{x^2}{2}.$$

Отсюда:

$$M_x(0) = \frac{5}{36} qa^2 \approx 0,139qa^2$$

- растянутое волокно расположено в наружной части рамы:

$$M_x(a) = \frac{27}{112} qa^2 + \frac{5}{36} qa^2 - q \frac{a^2}{2} = -\frac{121}{1008} qa^2 - 0,112qa^2.$$

- растянутое волокно расположено во внутренней части рамы и имеют отрицательные значения.

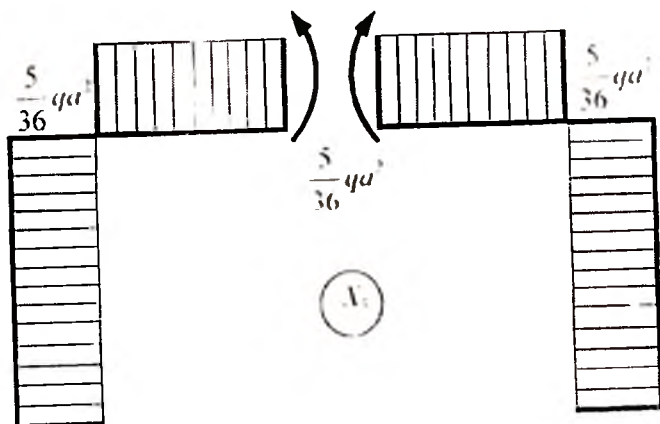


Рис. 11.33.

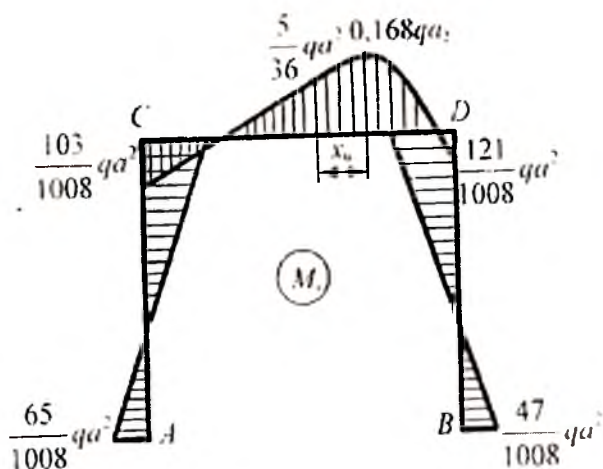


Рис. 11.34.

Найдем максимальное значение изгибающего момента в рассматриваемом участке:

$$\frac{dM_x}{dx} = 0$$

Отсюда

$$\frac{27}{112} qa - qx_0 = 0$$

или

$$x_0 = \frac{27}{112} a.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{\max} = M_x(x_0) &= \frac{27}{112} qa \cdot \frac{27}{112} a + \frac{5}{36} qa^2 - \frac{q \left( \frac{27}{112} a \right)^2}{2} = \\ &= \frac{729}{12544} qa^2 + \frac{5}{36} qa^2 - \frac{729}{25088} qa^2 = \frac{37921}{225792} qa^2 \approx 0.168 qa^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим участок BD рамы. Изгибающий момент, возникающий в сечении D данного участка равно  $\frac{121}{1008} qa^2$ , а в сечении B

$$M_x = \frac{qa}{2} - \frac{27}{112} qa^2 - \frac{qa^2}{6} - \frac{5}{36} qa^2 = -\frac{47}{1008}$$

- сжатое волокно расположено в наружной стороне рамы.

Рассмотрим участок CD рамы:

- в середине участка да

$$M = \frac{5}{36} qa^2;$$

В сечении С

$$M = \frac{27}{112} qa^2 - \frac{5}{36} qa^2 = \frac{103}{1008} qa^2;$$

В сечении А

$$M = \frac{1}{6} qa^2 - \frac{27}{112} qa^2 + \frac{5}{36} qa^2 + \frac{65}{1008} qa^2;$$

- сжатое волокно расположено в наружной части рамы.

Эпюра изгибающего момента приведена на рис. 11.34.

## Глава 12. Косой изгиб. Изгиб с растяжением

Задача 12.1. Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена вертикальной силой  $P$  в точке А и горизонтальной силой  $P$  в точке В (обе точки расположены на оси балки). На опорах балки могут возникнуть как вертикальные реакции, так и горизонтальные реакции, направленные перпендикулярно плоскости чертежа. Требуется:

1) построить эпюры  $M_{\text{перт}}$  и  $M_{\text{гор}}$  и установить положение опасного сечения;

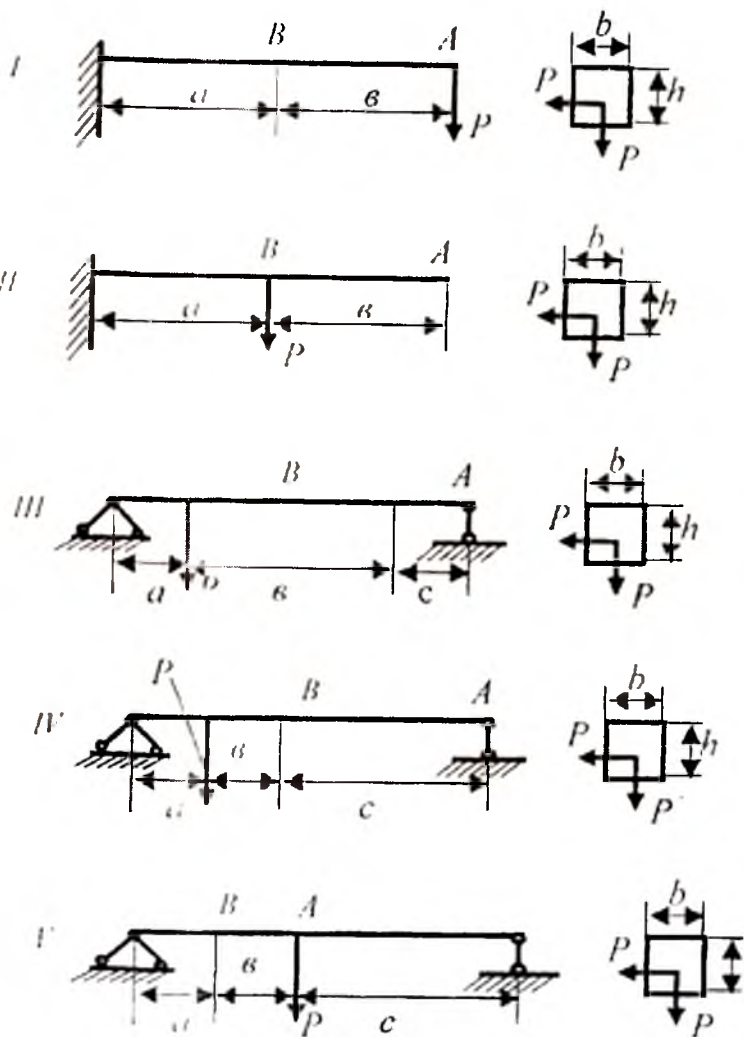
2) подобрать размеры поперечного сечения  $k$  и  $b$  при допуссаемом напряжении  $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$ ;

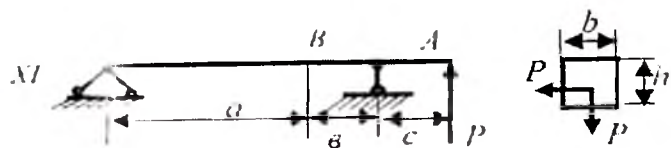
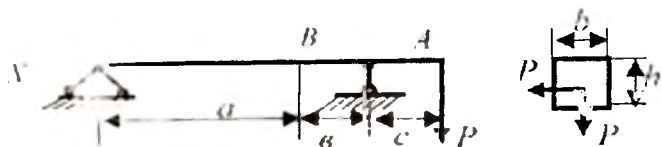
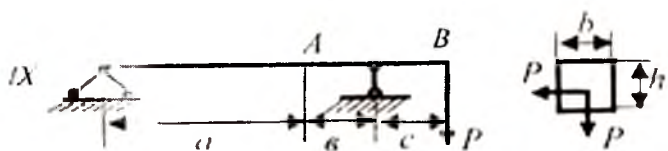
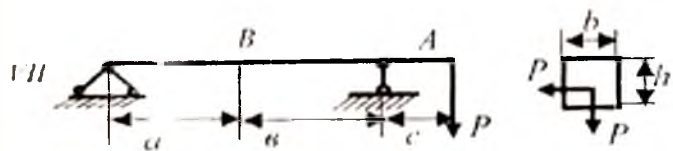
3) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для этого сечения



эпюру нормальных напряжений в аксонометрии.  
Данные взять из табл. 12.1.

Рисунки задачи 12.1.





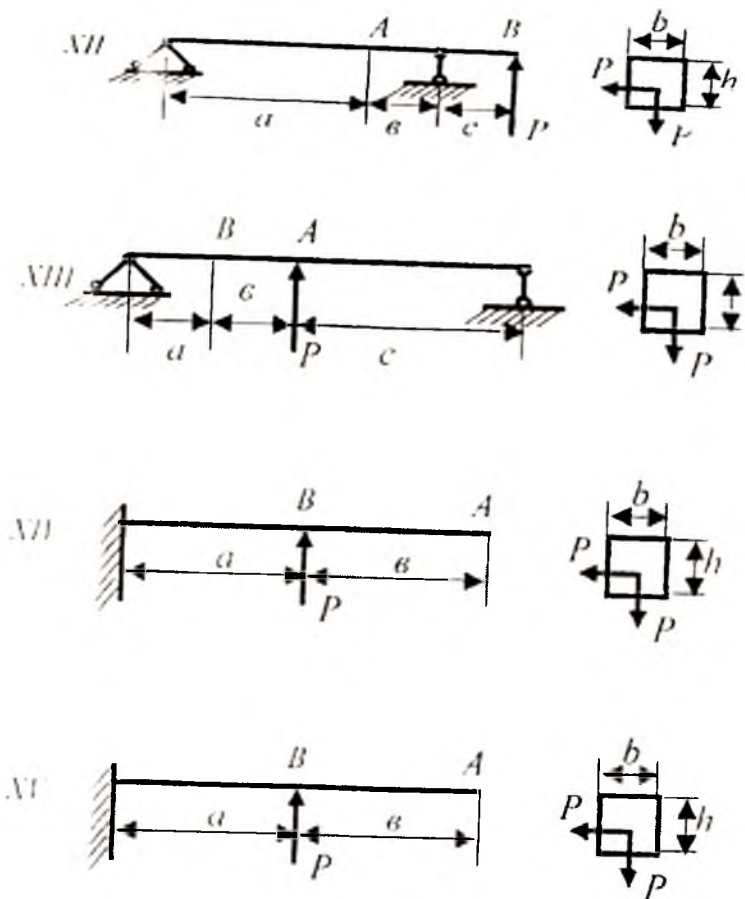


Таблица 12.1

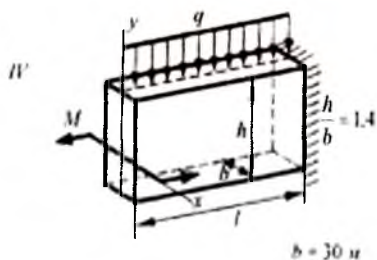
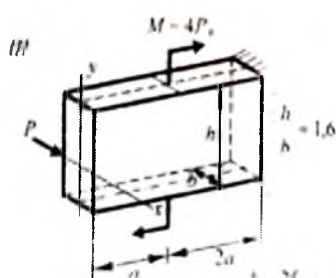
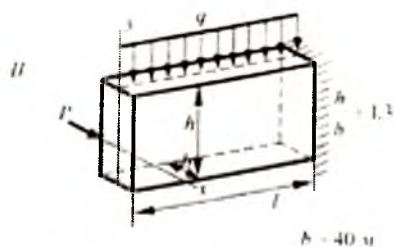
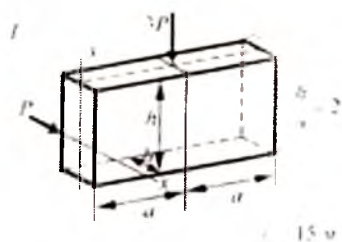
№	Схема	Р. кН	a	В	c	$\frac{h}{b}$
			М			
1	I	1	0.6	1.1	0.6	0.6
2	II	2	0.7	1.2	0.7	0.7
3	III	3	0.8	1.3	0.8	0.8
4	IV	4	0.9	1.4	0.9	0.9

5	V	5	1.0	1.5	1.0	1.0
6	VI	6	1.1	1.6	1.1	1.1
7	VII	7	1.2	1.7	1.2	1.2
8	VIII	8	1.3	1.8	1.3	1.3
9	IX	9	1.4	1.9	1.4	1.4
10	X	10	1.5	2.0	1.5	1.5
11	XI	1	1.6	1.1	1.6	1.6
12	XII	2	1.7	1.2	1.7	1.7
13	XIII	3	1.8	1.3	1.8	1.8
14	XIV	4	1.9	1.4	1.9	1.9
15	XV	5	2.0	1.5	2.0	2.0
16	IV	6	2.1	1.6	0.6	0.6
17	V	7	2.2	1.7	0.7	0.7
18	VI	8	2.3	1.8	0.8	0.8
19	VII	9	2.4	1.9	0.9	0.9
20	VIII	10	2.5	2.0	1.0	1.0
21	IX	1	2.6	1.1	1.1	1.1
22	X	2	2.7	1.2	1.2	1.2
23	XI	3	2.8	1.3	1.3	1.3
24	XII	4	2.9	1.4	1.4	1.4
25	I	5	3.0	1.5	1.5	1.5
26	II	6	2.6	1.6	1.6	1.6
27	III	7	2.7	1.7	1.7	1.7
28	XIII	8	2.8	1.8	1.8	1.8
29	XIV	9	2.9	1.9	1.9	1.9
30	XV	10	3.0	2.0	2.0	2.0

12.2-задача. Для заданного стального бруса требуются: 1) построить эпюры  $M_{Гор}$  и  $M_{Вер}$  (ординаты эпюр выразить через  $P$  или  $q$ ); 2) составить выражение полного прогиба свободного конца бруса; 3) определить допустимое значение нагрузки из условия, что полный прогиб свободного конца бруса равен 10мм; 4) при найденном значении допустимой нагрузки вычислить напряжение в опасной точке бруса. Данные взять из табл. 12.2.

Порядок выполнения решения: силу  $P$  следует разложить на два направления; вертикальное и горизонтальное. Далее, надо найти опорные реакции для произвольного сечения, определяемого полярными координатами  $r$  и  $\varphi$ , написать выражения  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  и давая различные значения  $\varphi$  (не реже чем через  $30^\circ$ ), построить эпюры по точкам. При определении радиуса кривизны нейтрального слоя  $r_0$  необходимо вычисления производить точно, так как величина  $r_0$  близка к величине  $r$ , при определении  $\epsilon$  придется иметь дело с малой разностью величин  $r$  и  $r_0$ . Для проверки вычислений рекомендуется воспользоваться приближенной формулой  $\epsilon = \frac{J}{rF}$ , где  $J$  — момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси;  $F$  — площадь поперечного сечения.

Рисунки задач 12.2.



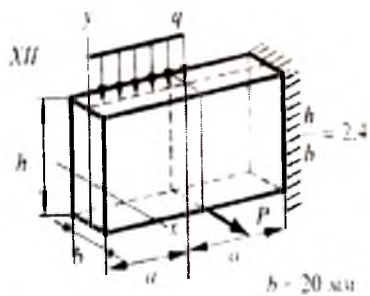
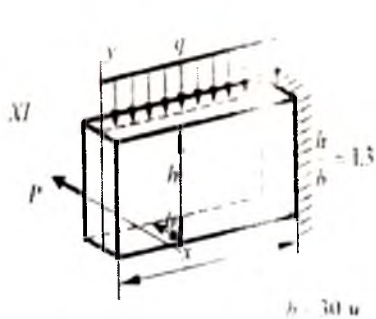
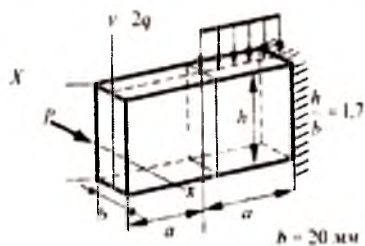
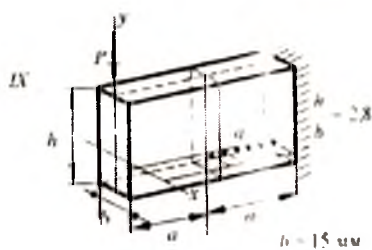
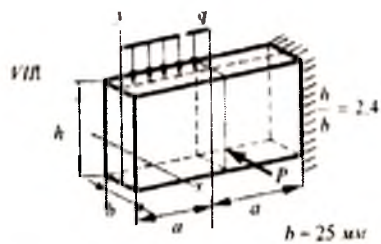
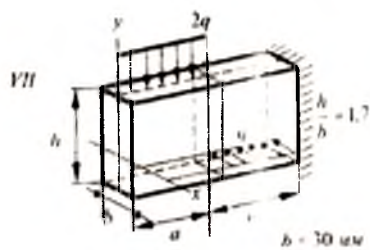
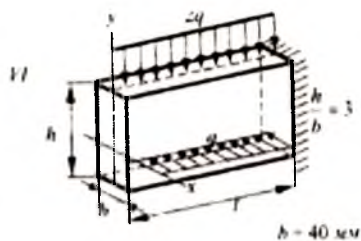
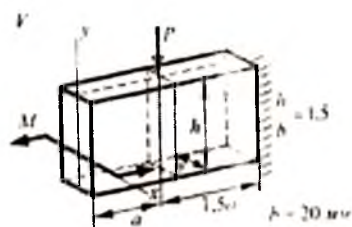


Таблица 12.2.

№	P	M	a, м	№	P	M	a, м
1	0.1qa	qa <sup>2</sup>	0.5	16	0.6qa	0.5qa <sup>2</sup>	0.5
2	0.2qa	0.9qa <sup>2</sup>	0.6	17	0.7qa	0.4qa <sup>2</sup>	0.6
3	0.3qa	0.8qa <sup>2</sup>	0.7	18	0.8qa	0.3qa <sup>2</sup>	0.7
4	0.4qa	0.7qa <sup>2</sup>	0.8	19	0.9qa	0.2qa <sup>2</sup>	0.8
5	0.5qa	0.6qa <sup>2</sup>	0.9	20	qa	0.1qa <sup>2</sup>	0.9
6	0.6qa	0.5qa <sup>2</sup>	1.0	21	0.1qa	qa <sup>2</sup>	1.0
7	0.7qa	0.4qa <sup>2</sup>	0.5	22	0.2qa	0.9qa <sup>2</sup>	0.5
8	0.8qa	0.3qa <sup>2</sup>	0.6	23	0.3qa	0.8qa <sup>2</sup>	0.6
9	0.9qa	0.2qa <sup>2</sup>	0.7	24	0.4qa	0.7qa <sup>2</sup>	0.7
10	qa	0.1qa <sup>2</sup>	0.8	25	0.5qa	0.6qa <sup>2</sup>	0.8
11	0.1qa	qa <sup>2</sup>	0.9	26	0.6qa	0.5qa <sup>2</sup>	0.9
12	0.2qa	0.9qa <sup>2</sup>	1.0	27	0.7qa	0.4qa <sup>2</sup>	1.0
13	0.3qa	0.8qa <sup>2</sup>	0.5	28	0.8qa	0.3qa <sup>2</sup>	0.8
14	0.4qa	0.7qa <sup>2</sup>	0.6	29	0.9qa	0.2qa <sup>2</sup>	0.9
15	0.5qa	0.6qa <sup>2</sup>	0.7	30	qa	0.1qa <sup>2</sup>	1.0

Указания к решению задач 12.1-12.2.

А. Вычислить нормальные напряжение в указанных на рис. 12.1 точках. Положение главных центральных осей инерции и геометрические характеристики поперечного сечения показаны на рисунке.

*Решение*

Брус работает на совместное действие растяжения и изгиба в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_z} y + \frac{M_z}{J_y} z.$$

Вычисляем нормальные напряжения в точках сечения 1-1. В нем  $N=18P$ ,  $M_x = 0$  и  $M_y = 0$ . Следовательно,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{F} = \frac{18P}{9\delta^2} = 2\frac{P}{\delta^2}.$$

Вычисляем нормальные напряжения в точках сечения 2-2 в рассматриваемом сечении.

$$N = 18P, M_x = 3\delta P \text{ и } M_y = 0.$$

Тогда нормальные напряжения в рассматриваемом сечении вычисляются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y.$$

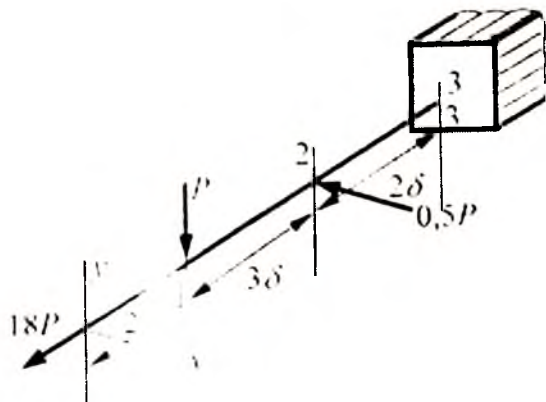


Рис 12.1



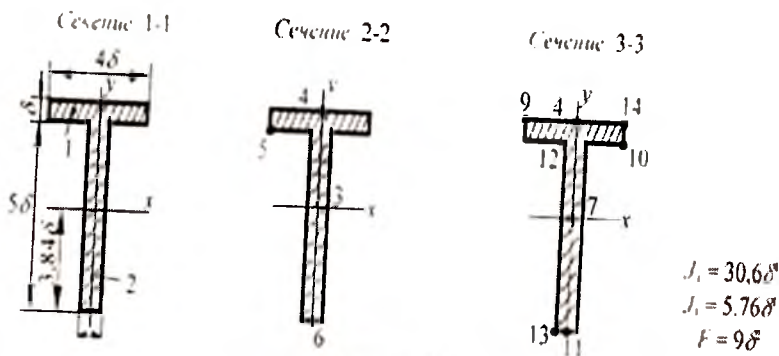


Рис. 12.2.

Точка 3 лежит на оси OZ, следовательно,  $OZ_3 = 0$  и

$$\sigma_3 = \frac{N}{F} + 0 = \frac{18P}{9\delta^2} = 2 \frac{P}{\delta^2}.$$

В точке 4

$$\sigma_4 = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_4 = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{3P\delta}{30,6\delta^4} \cdot 2,16\delta \approx 2,21 \frac{P}{\delta^2}.$$

В точке 5

$$\sigma_5 = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_5 = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{3P\delta}{30,6\delta^4} \cdot 1,16\delta \approx 2,11 \frac{P}{\delta^2}.$$

В точке 6

$$\sigma_6 = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_6 = \frac{18P}{9\delta^2} - \frac{3P\delta}{30,6\delta^4} \cdot 3,84\delta \approx 1,62 \frac{P}{\delta^2}.$$

Нормальные напряжения в точках сечения 3 – 3.

$$N = 18P. M_x = 5P\delta \quad 2\delta = P\delta.$$

Точка 7 совпадает с центром сечения, следовательно,  $Z_7 = 0, Y_7 = 0$  ва

$$\sigma_7 = \frac{N}{F} + 0 = 0 = \frac{18P}{9\delta^2} = 2 \frac{P}{\delta^2}.$$

Точка 8 ( $y_8 = 2.16\delta, x_8 = 0$ )

$$\sigma_8 = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_8 = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30.6\delta^4} \cdot 2.16\delta \approx 2.35 \frac{P}{\delta^2}.$$

Точка 9 ( $y_9 = 2.16\delta, x_9 = 2\delta$ )

$$\sigma_9 = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_9 + \frac{M_y}{J_x} Y_9 = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30.6\delta^4} \cdot 2.16\delta - \frac{P\delta}{5.75\delta^4} \cdot 2\delta \approx 2.01 \frac{P}{\delta^2}.$$

Точка 10 ( $x_{10} = 2\delta, y_{10} = 1.16\delta$ )

$$\sigma_{10} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_{10} + \frac{M_y}{J_x} Y_{10} = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30.6\delta^4} \cdot 1.16\delta - \frac{P\delta}{5.75\delta^4} \cdot 2\delta \approx 2.54 \frac{P}{\delta^2}.$$

Точка 11 ( $x_{11} = 0, y_{11} = 3.84\delta$ )

$$\sigma_{11} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_y} Z_{11} + \frac{M_y}{J_x} Y_{11} = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30.6\delta^4} \cdot 3.84\delta - 0 \approx 1.37 \frac{P}{\delta^2}.$$

Точка 12 ( $x_{12} = 0.5\delta, y_{12} = 1.16\delta$ )

$$\sigma_{12} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} Z_{12} + \frac{M_y}{J_y} Y_{12} = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30,6\delta^4} \cdot 1,16\delta - \frac{P\delta}{5,75\delta^4} \cdot 0,5\delta = 2,11 \frac{P}{\delta^2}$$

Точка 13 ( $x_{13} = 0,5\delta$ ,  $y_{13} = 3,84\delta$ )

$$\sigma_{13} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} Z_{13} + \frac{M_y}{J_y} Y_{13} = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30,6\delta^4} \cdot 3,84\delta - \frac{P\delta}{5,75\delta^4} \cdot 0,65\delta = 1,29 \frac{P}{\delta^2}$$

Точка 14 ( $x_{14} = 2\delta$ ,  $y_{14} = 1,16\delta$ )

$$\sigma_{14} = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} Z_{14} + \frac{M_y}{J_y} Y_{14} = \frac{18P}{9\delta^2} + \frac{5P\delta}{30,6\delta^4} \cdot 2,16\delta - \frac{P\delta}{5,75\delta^4} \cdot 2\delta = 2,7 \frac{P}{\delta^2}$$

Б. Консоль нагружена на свободном конце силой  $P = 3$  кН. Вычислить нормальные напряжения в угловых точках опасного сечения и определить прогиб на конце консоли. Материал – сталь,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Дано: рис. 12.3;  $b = 4$  см;  $h = 12$  см;  $l = 120$  см;

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ рад.}$$

*Решение*

Опасное сечение балки совпадает в сечении в заделке. Здесь изгибающие моменты

$$M_z = Pl \cos \alpha = 3,12 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_y = Pl \sin \alpha = 1,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нормальные напряжения в крайних волокнах от этих моментов:

$$\sigma_z = \pm \frac{M_z}{W_z} = \pm 32,5 \text{ МПа}, \quad \sigma_y = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm 56,2 \text{ МПа}.$$

Суммарные напряжения в угловых точках опасного сечения:

$$\sigma_1 = 88,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = -23,7 \text{ МПа},$$

$$\sigma_3 = -88,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_4 = 23,7 \text{ МПа},$$

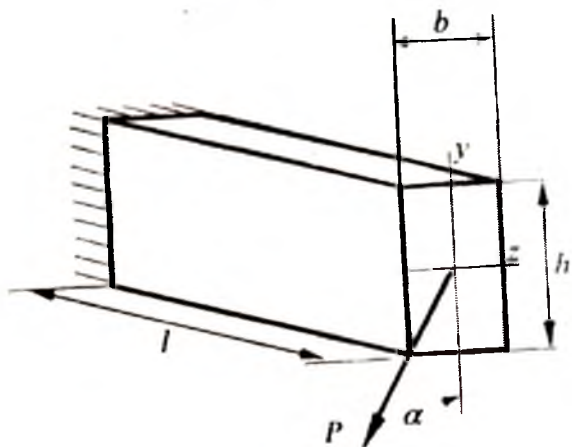


Рис. 12.3.

Прогиб в направлениях осей  $x$  и  $y$ :

$$f_z = -\frac{Pl^3 \sin \alpha}{3EJ_y} = -0,675 \text{ см},$$

$$f_y = -\frac{Pl^3 \cos \alpha}{3EJ_x} = -0,130 \text{ см},$$

Полный прогиб

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} = 0,687 \text{ см}.$$

В. Балка зетового сечения; 14 пролетом  $l = 2$  м шарнирно опёрта по концам и нагружена равномерно

распределенной нагрузкой интенсивности  $q=10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ .

Главные моменты инерции сечения  $J_z = 847 \text{ см}^4$ ,  $J_y = 61,4 \text{ см}^4$ . угол, составленной плоскостью наибольшей жесткости со стенкой балки,  $\varphi = 0,3816 \text{ рад}$   $\text{tg}\varphi = 0,4$ . Толщина стенки  $l = 8 \text{ мм}$ . Определить максимальные напряжения и максимальный прогиб (рис. 12.4).

*Решение*

Наибольший момент

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Положение нейтральной линии определяется отклонением ее от оси z на угол  $\alpha$ :

$$\text{tg}\alpha = \frac{J_z}{J_y} \text{tg}\varphi = 5,5, \quad \alpha = 1,39 \text{ рад}.$$

Построение нейтральной линии показывает, что опасными точками являются точки 1 и 2. Вычисляем координаты этих точек (рис. 12.5):

$$Z_1 = \frac{h}{2} \sin\varphi + \frac{l}{2} \cos\varphi = 3,0 \text{ см}$$

$$Y_1 = \frac{h}{2} \cos\varphi + \frac{l}{2} \sin\varphi = 3,0 \text{ см}$$

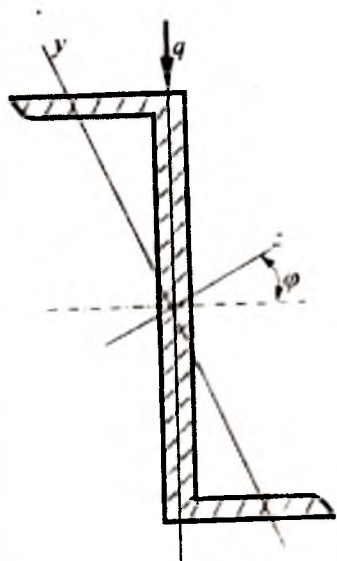


Рис. 12.4.

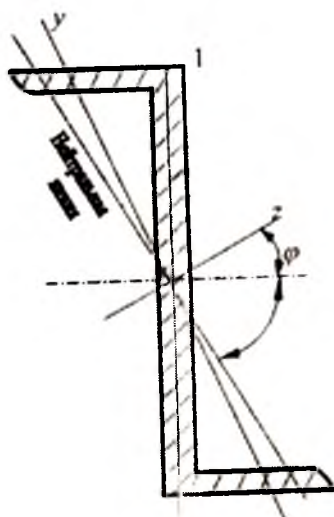


Рис. 12.5.

Наибольшее напряжение

$$\sigma_{\max} = M_{\max} \left( \frac{y \cos \varphi}{J_y} + \frac{z \sin \varphi}{J_z} \right) = 120 \text{ МПа.}$$

Прогиб в отрицательном направлении оси y

$$f = \frac{5ql^4 \cos \varphi}{384EJ_y} = 0,0114 \text{ см.}$$

Полный прогиб

$$f = \frac{f_y}{\cos \alpha} = 0,633 \text{ см.}$$

Г. Шарнирно опертый по концам швеллер нагружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q=500 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ . Швеллер расположен так, что его стенка

образует с вертикалью угол  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  рад. Пролет швеллера

$l=4\text{м}$ , линия действия нагрузки проходит через изгиба. Определить номер швеллера из условия, что допускаемое напряжения  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ .

Дано: рис. 12.6.

*Решение*

Максимальный изгибающий момент (в середине пролета)  $M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Максимальные изгибающие моменты в главных плоскостях балки

$$M_z = M_{\text{max}} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8,66 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_y = M_{\text{max}} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Моменты сопротивления определяем из условия

$$[\sigma] = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}.$$

При действии только  $M_y$  необходимый момент сопротивления

$$W_z = \frac{M_z}{[\sigma]} = 54 \text{ см}^3,$$

что соответствует швеллеру №12. при действии только  $M_y$  необходимый момент сопротивления

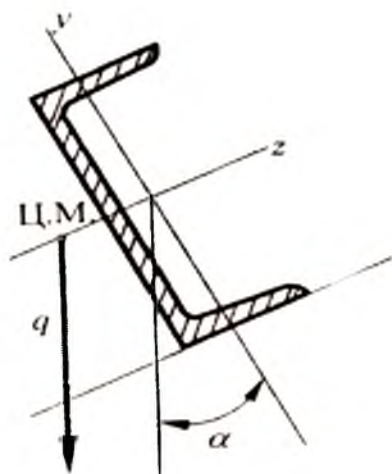


Рис. 12.6.

$$W_z = \frac{M_z}{[\sigma]} = 31,2 \text{ см}^3,$$

что соответствует швеллеру № 24. таким образом, номер швеллера должен быть болсе № 24.

Выбираем швеллер № 27, для которого

$$W_y = \frac{M_y}{[\sigma]} = 31,2 \text{ см}^3 \text{ и } W_z = 308 \text{ см}^3.$$

Проверяем:

$$\sigma = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = 160 \text{ МПа} = [\sigma].$$



Условные прочности выполняются.

Д. Брус прямоугольного  $b \times h$  подвергается кривоугому изгибу моментами  $M_z$  и  $M_y$ . Определить из условия прочности отношение сторон сечения  $k = \frac{h}{b}$ , при котором брус имеет минимальный вес.

Дано: рис. 12.7.

Решение

Из условия

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = [\sigma],$$

где

$$W_z = \frac{k^2 b^3}{6}, \quad W_y = \frac{kb^3}{6}$$

Следует

$$b = \sqrt[3]{\frac{6M_z + 6M_y k}{[\sigma] \cdot k^2}}.$$

Площадь сечения бруса

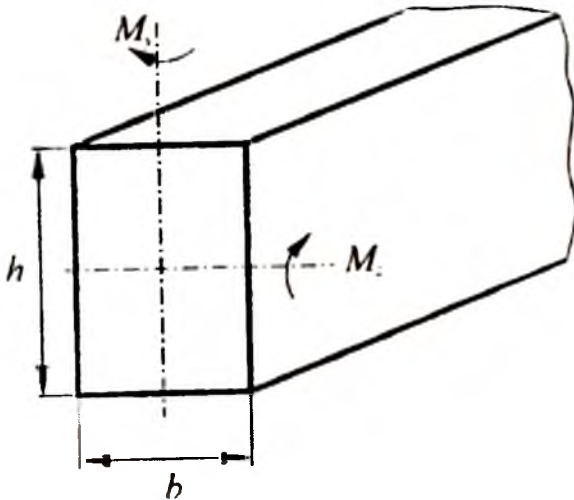


Рис. 12.7.

$$F = hb = \sqrt{\frac{36(M_z + kM_y)^2}{[\sigma]^2 k}}$$

Минимальный вес бруса при минимальном значении площади сечения  $F$ . Из условия минимума

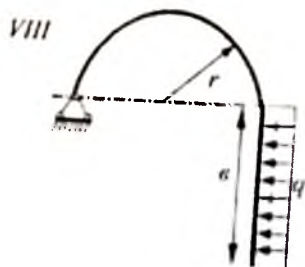
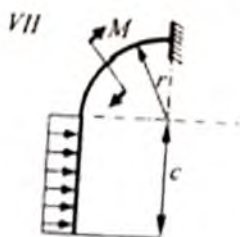
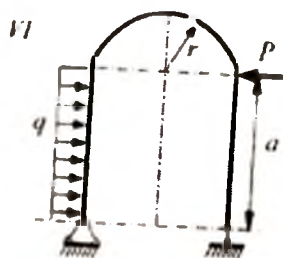
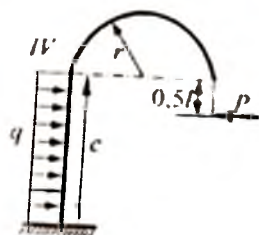
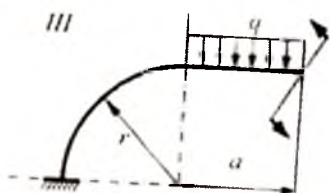
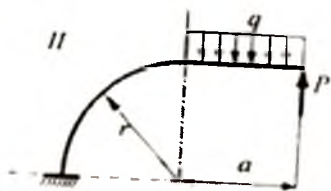
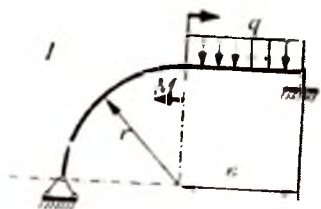
$$\frac{dF}{dk} = 0 \text{ получаем}$$

$$k \frac{h}{b} = \frac{M_z}{M_y}$$

### Глава 13. Криволинейные стержни

Задача 13.1. Для заданных криволинейных стержней требуется: 1) построить эпюры внутренних силовых

факторов; 2) произвести подбор сечения ( $[\sigma]=160$  МПа).  
 Данные взять из табл. 13.1.



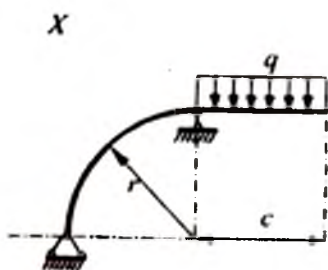
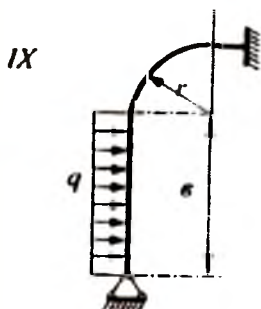


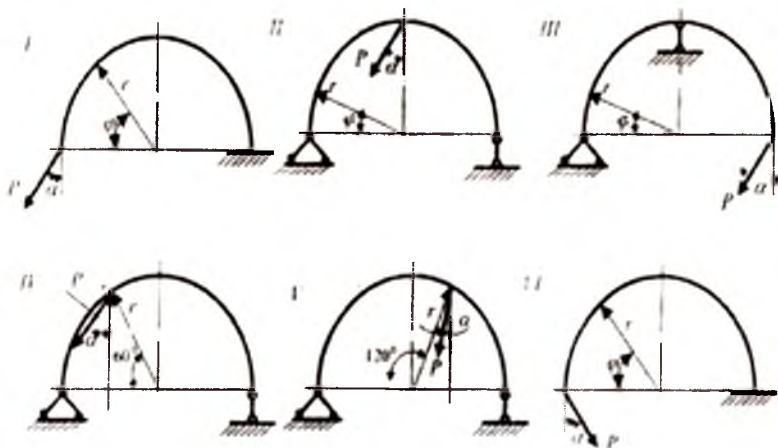
Таблица 13.1.

№	Схема	a	b	c	г	P кН	q	M кНм
		м					$\frac{кН}{м}$	
1	I	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	0.5	1
2	II	1.1	1.1	1.6	1.1	1.1	0.6	2
3	III	1.2	1.2	1.7	1.2	1.2	0.7	3
4	IV	1.3	1.3	1.8	1.3	1.3	0.8	1
5	V	1.4	1.4	1.9	1.4	1.4	0.9	2
6	VI	1.5	1.5	2.0	1.5	1.5	0.5	3
7	VII	1.6	1.6	2.1	1.6	1.6	0.6	1
8	VIII	1.7	1.7	2.2	1.7	1.7	0.7	2
9	IX	1.8	1.8	2.3	1.8	1.8	0.8	3
10	X	1.9	1.9	2.4	1.9	1.9	0.9	1
11	I	2.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	2
12	II	2.1	1.1	1.1	1.1	1.1	0.6	3
13	III	2.2	1.2	1.2	1.2	1.2	0.7	1
14	IV	2.3	1.3	1.3	1.3	1.3	0.8	2
15	V	2.4	1.4	1.4	1.4	1.4	0.9	3
16	VI	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5	0.5	1
17	VII	1.1	1.6	1.6	1.6	1.6	0.6	2
18	VIII	1.2	1.7	1.7	1.7	1.7	0.7	3
19	IX	1.3	1.8	1.8	1.8	1.8	0.8	1
20	X	1.4	1.9	1.9	1.9	1.9	0.9	2

21	I	1.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	3
22	II	1.6	1.1	1.1	1.1	1.1	0.6	1
23	III	1.7	1.2	1.2	1.2	1.2	0.7	2
24	IV	1.8	1.3	1.3	1.3	1.3	0.8	3
25	V	1.9	1.4	1.4	1.4	1.4	0.9	1
26	VI	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5	0.5	2
27	VII	2.1	1.6	1.6	1.6	1.6	0.6	3
28	VIII	2.2	1.7	1.7	1.7	1.7	0.7	1
29	IX	2.3	1.8	1.8	1.8	1.8	0.8	2
30	X	2.4	1.9	1.9	1.9	1.9	0.9	3

Задача 13.2. Построить эпюры  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  и найти значения нормальных напряжений в опасном сечении кривого стержня. Данные взять из табл. 13.2.

### Рисунки задач 13.2.



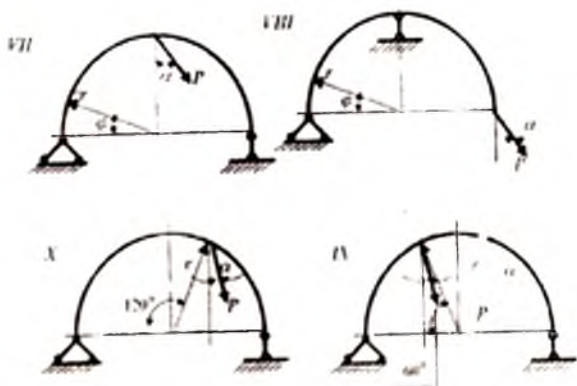


Таблица 13.2.

№	Схема	a	P	г	d	Сечения стержня
		Грац	Н	см		
1	I	5	1000	20	4.1	Круг с диаметром d.
2	II	15	1100	21	4.2	Прямоугольный четырехугольник со сторонами d и 2d.
3	III	20	1200	22	4.3	Прямоугольный четырехугольник с основанием d и вершиной 1.5d.
4	IV	25	1300	23	4.4	Равнобокий треугольник с основанием и вершиной d.
5	V	30	1400	24	4.5	Квадрат со сторонами d.
6	VI	35	1500	25	4.6	Кольцо с диаметрами 1,1d и d
7	VII	40	1600	26	4.7	Круг с диаметром d.
8	VIII	45	1700	27	4.8	Прямоугольный четырехугольник со сторонами d и 2d
9	IX	50	1800	28	4.9	Прямоугольный четырехугольник с основа-

						нием $d$ и вершиной $1,5d$ .
10	X	55	1900	29	5.0	Равнобокий треугольник с основанием и вершиной $d$ .
11	I	60	2000	30	5.1	Квадрат со сторонами $d$ .
12	II	65	2100	20	5.2	Кольцо с диаметрами $1,1d$ и $d$ .
13	III	70	2200	21	5.3	Круг с диаметром $d$ .
14	IV	75	2300	22	5.4	Прямоугольный четырехугольник со сторонами $d$ и $2d$ .
15	V	80	2400	23	5.5	Прямоугольный четырехугольник с основанием $d$ и вершиной $1,5d$ .
16	VI	85	1000	24	4.1	Равнобокий треугольник с основанием и вершиной $d$ .
17	VII	90	1100	25	4.2	Квадрат со сторонами $d$ .
18	VIII	0	1200	26	4.3	Кольцо с диаметрами $1,1d$ и $d$ .
19	IX	5	1300	27	4.4	Круг с диаметром $d$ .
20	X	15	1400	28	4.5	Прямоугольный четырехугольник со сторонами $d$ и $2d$ .
21	I	20	1500	29	4.6	Прямоугольный четырехугольник с основанием $d$ и вершиной $1,5d$ .
22	II	25	1600	30	4.7	Равнобокий треугольник с основанием и вершиной $d$ .
23	III	30	1700	20	4.8	Квадрат со сторонами $d$ .
24	IV	35	1800	21	4.9	Кольцо с диаметрами $1,1d$ и $d$ .

25	V	40	1900	22	5.0	Круг с диаметром $d$ .
26	VI	45	2000	23	5.1	Прямоугольный четырехугольник со сторонами $d$ и $2d$ .
27	VII	50	2100	24	5.2	Прямоугольный четырехугольник с основанием $d$ и вершиной $1,5d$ .
28	VIII	55	2200	25	5.3	Равнобокий треугольник с основанием и вершиной $d$ .
29	IX	60	2300	26	5.4	Квадрат со сторонами $d$ .
30	X	65	2400	27	5.5	Кольцо с диаметрами $1, 1d$ и $d$

Указания к решению задач 13.1-13.2.

А. Построить эпюры внутренних силовых факторов для заданного криволинейного стержня (рис. 13.1).

Примечания: 1. При расчете криволинейных стержней необходимо обратить внимание на следующее:

- сечения стержня имеют ось симметрии;
- стержень изгибается в плоскости и располагается в плоскости симметрии;
- внешние силы действуют на стержень в плоскости симметрии (рис. 13.2);
- продольная сила направлена вдоль оси  $N$   $x$ , перерезывающая сила  $Q$  — вдоль оси  $z$ , а изгибающий момент берется относительно оси  $y$  пространственной системы координат.

Внутренние силы связаны следующими дифференциальными соотношениями:

$$Q = \frac{dM}{ds} = \frac{dM}{\rho d\varphi}; \quad N = \rho \frac{dQ}{ds} = \frac{dQ}{\rho \varphi}; \quad Q = -\rho \frac{dN}{ds} = \frac{dN}{\rho \varphi};$$



Здесь:  $s$  — криволинейная координата;  $ds = \rho d\varphi$  — длина бесконечно малого участка стержня;  $\rho$  — радиус кривизны;  $\varphi$  — угол (рис. 13.3).

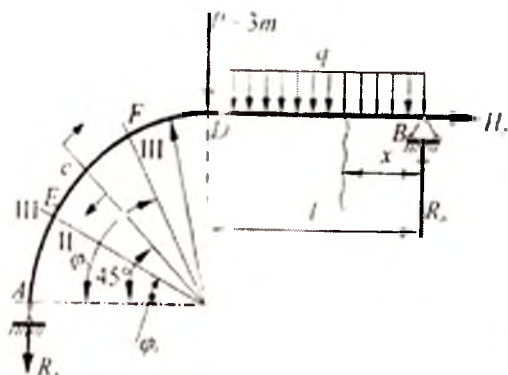


Рис. 13.1.



Рис. 13.2.

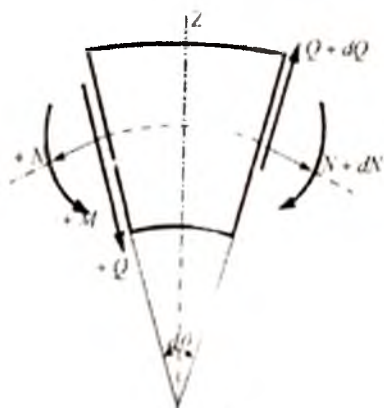


Рис. 13.3.

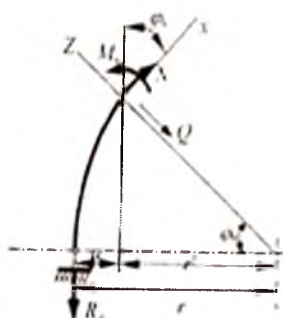


Рис. 13.4.

2. Внешнюю силу  $P$  необходимо разбить на горизонтальные и вертикальные составляющие. Затем опорные реакции выражают полярные координаты  $\gamma$  и  $\varphi$ . Далее, задавая значения  $\varphi = 0, 15^\circ, 30^\circ, 45$  и т. Д.

производят вычисления значения реактивных и внутренних сил.

При расчетах можно воспользоваться приближенной формулой  $c = \frac{J_y}{rF}$ , здесь  $J_y$  и  $F$  момент инерции относительно нейтральной оси и площадь поперечного сечения стержня.

### Решение

Определяем опорные реакции:

- из уравнения  $\sum X = 0$  найдем  $H_B = 0$ ;

- из уравнения  $\sum M_A = 5R_B + M - 3P - q \cdot \frac{3^2}{2} = 0$

найдем  $R_A = 2,4 \cdot 10^4$  Н;

из уравнения  $\sum M_D = 5R_B + M - 2P - q \cdot 3 \cdot 3,5 = 0$

найдем  $R_B = 3,6 \cdot 10^4$  Н;

определение внутренних сил, возникающих на участке BD стержня ( $0 \leq x_1 \leq 3$ ). На этом участке:

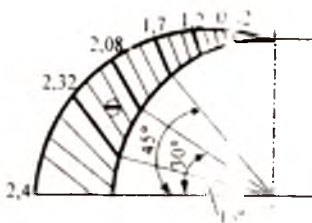


Рис. 13.5

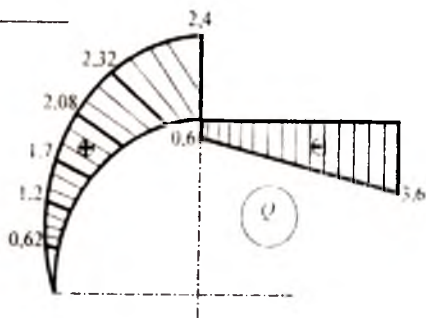


Рис. 13.6.

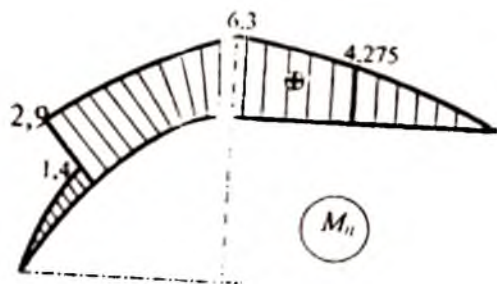


Рис. 13.7.

$$Q_1^I = -R_B - qx_1, \quad M_1^I = R_J x_1 - q \frac{x_1^2}{2}.$$

На криволинейном участке AC ( $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ):

$$\sum X = N_\phi^I + R_A \cos \varphi_1 = 0; \quad \sum Z = Q_\phi^I + R_A \sin \varphi_1;$$

$$\sum M_\phi = -M_\phi^I + R_A \sin \varphi_1;$$

здесь (рис. 13.4).

$$M_\phi^I = R_{AA} = R_A (r - r') = R_A r (1 - \cos \varphi_1).$$

На криволинейном участке CD ( $\frac{\pi}{4} \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$ ):

$$\sum X = N_\phi^2 + R_A \cos \varphi_2 = 0; \quad \sum Z = Q_\phi^2 + R_A \sin \varphi_2 = 0;$$

$$\sum M = R_A r (1 - \cos \varphi_2) + M - M_\phi^2 = 0.$$

Таблица 13.3.

X, $\varphi$	N	Q	M
$x_1 = 0$	0	$5,6 \cdot 10^4$ Н	0
$x_1 = 1,5$ м	-	-	$4,275 \cdot 10^4$ Нм
$x_1 = 3$ м	0	$-0,6 \cdot 10^4$ Н	$6,3 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_0 = 0$	$N_\varphi^1 = -2,4 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^1 = 0$	$M_\varphi^1 = 0$
$\varphi_1 = 15^\circ$	$N_\varphi^1 = -2,32 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^1 = 0,62 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^1 = 0,164 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_1 = 30^\circ$	$N_\varphi^1 = -2,08 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^1 = 1,2 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^1 = 0,163 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_1 = 45^\circ$	$N_\varphi^1 = -1,7 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^1 = 1,7 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^1 = 1,4 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_2 = 45^\circ$	$N_\varphi^2 = -1,7 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^2 = 1,7 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^2 = 2,9 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_2 = 60^\circ$	$N_\varphi^2 = -1,2 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^2 = 2,09 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^2 = 3,9 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_2 = 75^\circ$	$N_\varphi^2 = -0,6 \cdot 10^4$ Н	$Q_\varphi^2 = 2,32 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^2 = 5,06 \cdot 10^4$ Нм
$\varphi_2 = 90^\circ$	$N_\varphi^2 = 0$	$Q_\varphi^2 = 2,47 \cdot 10^4$ Н	$M_\varphi^2 = 6,3 \cdot 10^4$ Нм

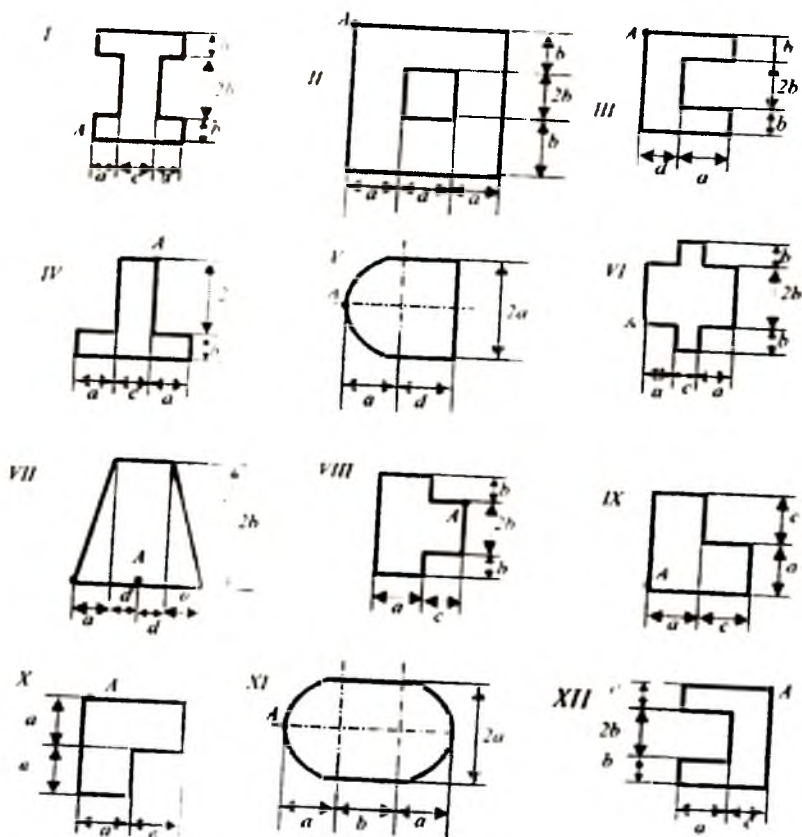
Значения внутренних сил, вычисленные по полученным выше формулам, приведены в табл. 13.3, а их эпюры — на рис. 13.5-13.7.

## Глава 14. Внецентренное сжатие и растяжение стержней. Растяжение или сжатие с изгибом

Задача 14.1. Чугунный короткий стержень, поперечное сечение, которого изображено на рисунках данной задачи, сжимается продольной силой  $P$ .

приложенной в точке А. Требуется: 1) вычислить наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжения в поперечном сечении, выразив эти напряжения через  $P$ , и размеры сечения; 2) найти допускаемую нагрузку  $P$  при заданных размерах сечения и допусках напряжений для чугуна на сжатие  $[\sigma_c]$  и на растяжение  $[\sigma_p]$ . Данные взять из табл. 14.1.

Рисунки задачи 14.1.



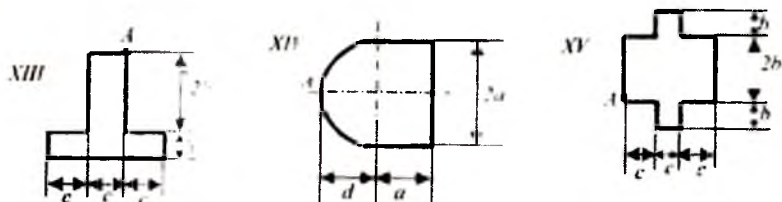


Таблица 14.1.

№	Схема	a	b	c	d	МПа	
						$[\sigma_c]$	$[\sigma_v]$
		м					
1	I	1.0	2.0	1.0	3.0	60	20
2	II	1.5	2.5	1.5	3.5	70	21
3	III	2.0	3.0	2.0	4.0	80	22
4	IV	2.5	3.5	2.5	4.5	90	23
5	V	3.0	4.0	3.0	5.0	100	24
6	VI	3.5	4.5	1.0	5.5	110	25
7	VII	4.0	5.0	1.5	6.0	120	26
8	VIII	4.5	5.5	2.0	3.0	130	27
9	IX	5.0	6.0	2.5	3.5	140	28
10	X	5.5	2.0	3.0	4.0	150	29
11	XI	6.0	2.5	1.0	4.5	60	30
12	XII	1.0	3.0	1.5	5.0	70	20
13	XIII	1.5	3.5	2.0	5.5	80	21
14	XIV	2.0	4.0	2.5	6.0	90	22
15	XV	2.5	4.5	3.0	3.0	100	23
16	I	3.0	5.0	1.0	3.5	110	24
17	II	3.5	5.5	1.5	4.0	120	25
18	III	4.0	6.0	2.0	4.5	130	26
19	IV	4.5	2.0	2.5	5.0	140	27
20	V	5.0	2.5	3.0	5.5	150	28
21	VI	5.5	3.0	1.0	6.0	60	29
22	VII	6.0	3.5	1.5	3.0	70	30
23	VIII	1.0	4.0	2.0	3.5	80	20
24	IX	1.5	4.5	2.5	4.0	90	21
25	X	2.0	5.0	3.0	4.5	100	22

26	XI	2.5	5.5	1.0	5.0	110	23
27	XII	3.0	6.0	1.5	5.5	120	24
28	XIII	3.5	2.0	2.0	6.0	130	25
29	XIV	4.0	2.5	2.5	3.0	140	26
30	XV	4.5	3.5	3.0	3.5	150	27

Указания к решению задачи 14.1.

А. Полоса толщины  $t = 10$  мм растягивается силой  $P = 50$  кН с эксцентриситетом  $e = \frac{b}{4}$  (рис. 14.1).

Определить ширину  $b$  при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 160$  МПа.

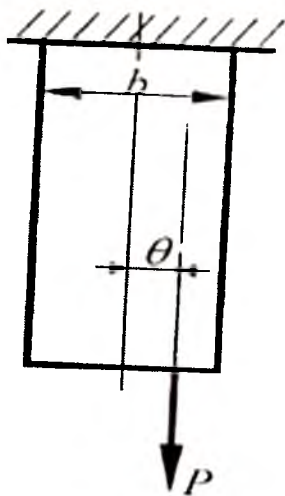


Рис. 14.1.

*Решение*

Условие прочности при внецентренном растяжении:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left[ 1 + \frac{y_p y}{i_y^2} + \frac{z_p z}{i_z^2} \right] \leq [\sigma].$$

В данном случае

$$y_p = 0, \quad z_p = \frac{b}{4}, \quad z = \frac{b}{2}, \quad z_v^2 = \frac{b^2}{12},$$

Получаем

$$\frac{5P}{2bt} \leq [\sigma].$$

Откуда

$$b \geq \frac{5}{2} \frac{P}{t[\sigma]} = 7,8 \text{ см}$$

Б. Определить допустимую глубину  $x$  выреза в полосе сечения  $60 \times 10$  мм, растягиваемой по оси силой  $Z = 15$  кН. Допускаемое напряжение принять равным  $[\sigma] = 120$  МПа. Концентрацией напряжений пренебречь (рис. 14.2).

*Решение*

Изгибающий момент в ослабленном сечении

$M = \frac{P x}{2}$ . Площадь и момент сопротивления в

ослабленном сечении  $F = (b - x)t$ ,  $W = \frac{(b - x)^2 t}{6}$ .



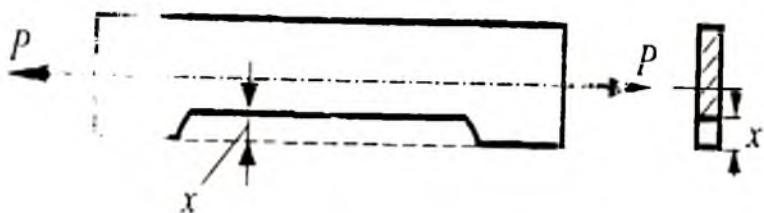


Рис. 14.2.

Наибольшие напряжения в ослабленном сечении приравняются допускаемому:

$$\frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{P}{(b-x)t} + \frac{P + \frac{x}{2}6}{(b-x)^2 t} = [\sigma], \quad x = 23,5 \text{ мм.}$$

В. На кормке стальной полосы, работающей на растяжение, появилась трещина (рис. 14.3). Чтобы трещина не распространялась, на ее место была выфрезерована галтель. Найти, насколько увеличилось от этого напряжение в полосе. Размеры сечения полосы:  $b = 100 \text{ мм}$ ,  $t = 8 \text{ мм}$ , глубина галтели  $a = 10 \text{ мм}$ , растягивающая сила  $P = 50 \text{ кН}$ . Концентрацией напряжений можно пренебречь.

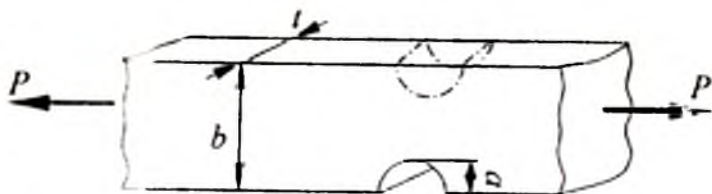


Рис. 14.3.

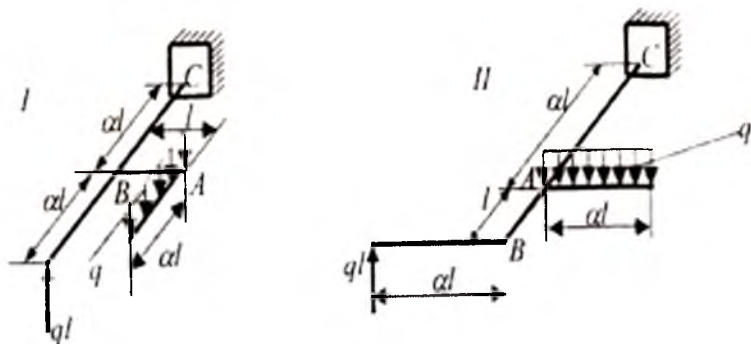
### Решение

Напряжение в неослабленном сечении  $\sigma = 75$  МПа. В ослабленном сечении полосы с галтелью нагрузка передается с эксцентриситетом  $e = \frac{a}{2} = 0,5$  см. Имеем растяжение с изгибом;  $\sigma = 111$  МПа, следовательно, напряжение увеличилось  $\frac{111-75}{75} \cdot 100 = 48\%$ .

## Глава 15. Изгиб с кручением

Задача 15.1. На рис. изображена в аксонометрии ось ломаного стержня круглого поперечного сечения, расположенная в горизонтальной плоскости и имеющая прямые углы в точках А и В. На стержень действует вертикальная нагрузка. Требуется: 1) построить отдельно (в аксонометрии) эпюры изгибающих и крутящих моментов; 2) установить опасное сечение и найти для него расчетный момент по четвертой теории прочности. Данные взять из табл. 15.1.

Рисунки задачи 15.1.



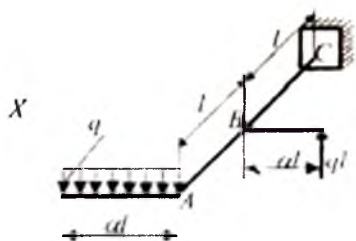
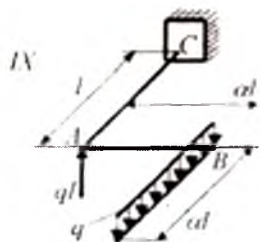
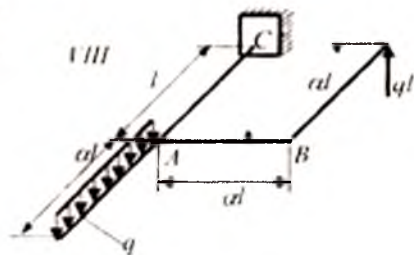
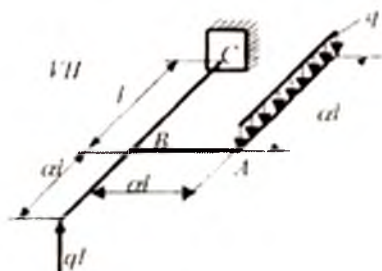
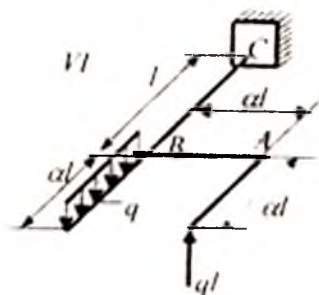
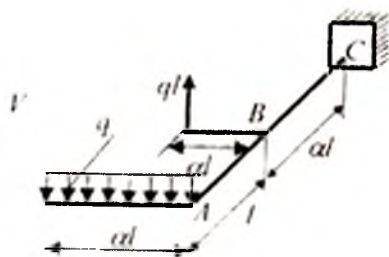
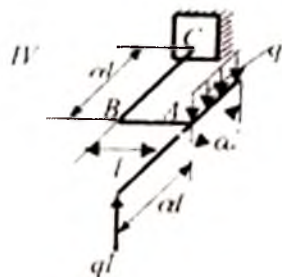
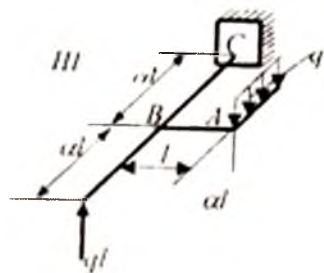


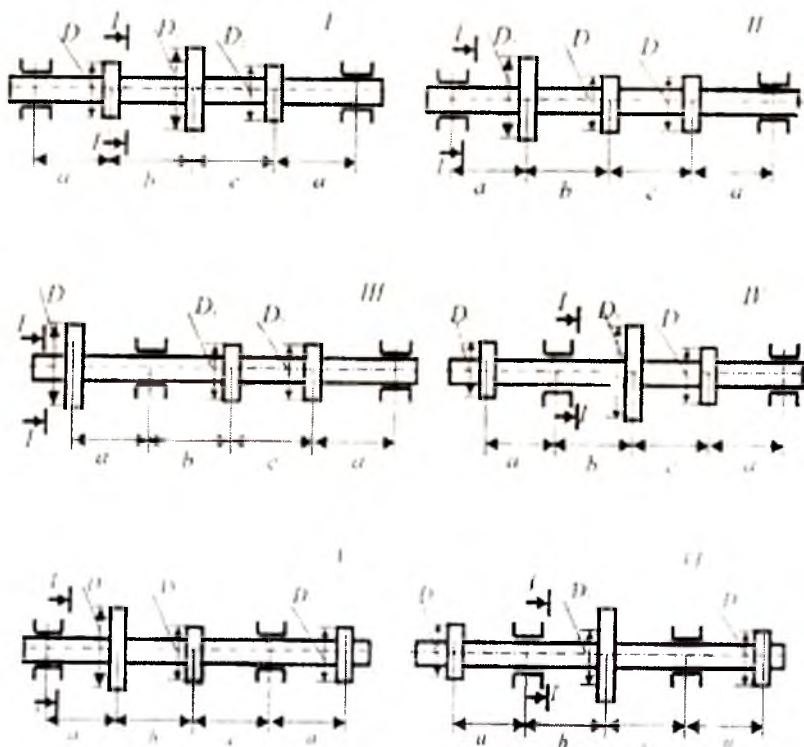
Таблица 15.1,

№	Схема	$\alpha$	№	Схема	$\alpha$	№	Схема	$\alpha$
1	I	0.6	11	I	1.1	21	I	1.2
2	II	0.7	12	II	1.2	22	II	1.3
3	III	0.8	13	III	1.3	23	III	1.4
4	IV	0.9	14	IV	1.4	24	IV	1.5
5	V	1.0	15	V	1.5	25	V	0.6
6	VI	1.1	16	VI	0.6	26	VI	0.7
7	VII	1.2	17	VII	0.7	27	VII	0.8
8	VIII	1.3	18	VIII	0.8	28	VIII	0.9
9	IX	1.4	19	IX	0.9	29	IX	1.0
10	X	1.5	20	X	1.0	30	X	1.1

Задача 15.2. шкив с диаметром  $D_1$  и с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_1$  делает  $n$  оборотов в минуту и передает мощность  $N$  кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр  $D_2$  и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2$  и каждый из них передает мощность  $\frac{N}{2}$ . Требуется: 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным  $N$  и  $n$ ; 2) построить эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$ ; 3) определить окружные усилия  $t_1$  и  $t_2$ , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов  $D_1$  и  $D_2$ ; 4) определить давления на вал принимая их равным трем окружным усилиям; 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать); 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил  $M_{гор}$  и от вертикальных сил  $M_{верт}$ ; 7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой  $M_{ср} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}$  (для каждого поперечного сечения вала имеется своя

плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскости  $M_{изг}$  для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа; при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной); 8) при помощи эпюр  $M_{кр}$  (см. п. 2) и  $M_{изг}$  (см.п. 7) найти опасное сечение и определить максимальный расчетный момент (по третьей теории прочности); 9) подобрать диаметр вала  $d$  при  $[\sigma] = 70$  МПа и округлить его значение. Данные взять из табл. 15.2.

Рисунки задачи 15.2.



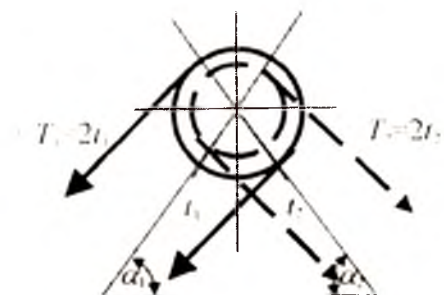
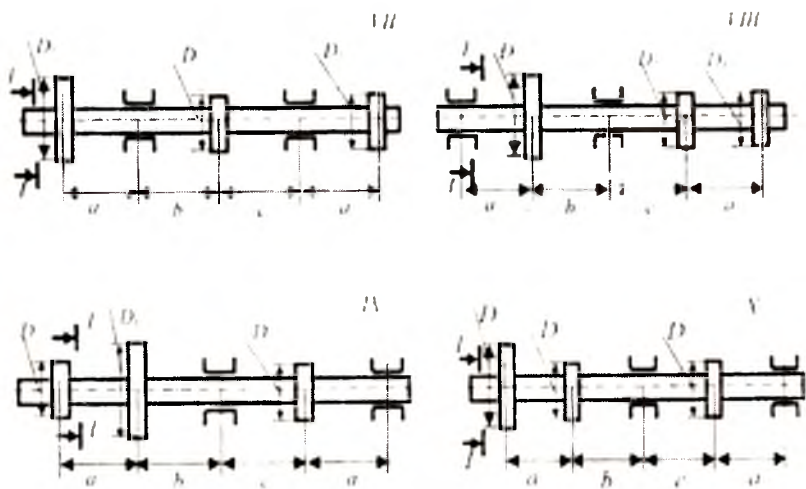


Таблица 15.2.

№	Схема	N, кВт	n, об/мин	a	b	c	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	$\alpha_1^0$	$\alpha_2^0$
				м	град					
1	I	10	100	0.5	0.6	0.7	1.1	1.1	0	0
2	II	15	200	0.6	0.7	0.8	1.2	1.2	10	10
3	III	20	300	0.7	0.8	0.9	1.3	1.3	20	20
4	IV	25	400	0.8	0.9	1.0	1.4	1.4	30	30
5	V	30	500	0.9	1.0	1.1	1.5	1.5	40	40

6	VI	35	600	1.0	1.1	1.2	1.6	1.6	50	50
7	VII	40	700	1.1	1.2	1.3	1.7	1.7	60	60
8	VIII	45	800	1.2	1.3	1.4	1.8	1.8	70	70
9	IX	50	900	1.3	1.4	1.5	1.9	1.9	80	80
10	X	55	100	1.4	1.5	1.6	1.1	1.1	90	90
11	I	60	200	1.5	1.6	1.7	1.2	1.2	0	0
12	II	65	300	1.6	1.7	1.8	1.3	1.3	10	10
13	III	70	400	1.7	1.8	1.9	1.4	1.4	20	20
14	IV	75	500	1.8	1.9	0.5	1.5	1.5	30	30
15	V	80	600	1.9	0.5	0.6	1.6	1.6	40	40
16	VI	85	700	0.5	0.6	0.7	1.7	1.7	50	50
17	VII	90	800	0.6	0.7	0.8	1.8	1.8	60	60
18	VIII	95	900	0.7	0.8	0.9	1.9	1.9	70	70
19	IX	100	100	0.8	0.9	1.0	1.1	1.1	80	80
20	X	10	200	0.9	1.0	1.1	1.2	1.2	90	90
21	I	15	300	1.0	1.1	1.2	1.3	1.3	0	0
22	II	20	400	1.1	1.2	1.3	1.4	1.4	10	10
23	III	25	500	1.2	1.3	1.4	1.5	1.5	20	20
24	IV	30	600	1.3	1.4	1.5	1.6	1.6	30	30
25	V	35	700	1.4	1.5	1.6	1.7	1.7	40	40
26	VI	40	800	1.5	1.6	1.7	1.8	1.8	50	50
27	VII	45	900	1.6	1.7	1.8	1.9	1.9	60	60
28	VIII	50	100	1.7	1.8	1.9	1.1	1.1	70	70
29	IX	55	200	1.8	1.9	0.5	1.2	1.2	80	80
30	X	60	300	1.9	0.5	0.6	1.3	1.3	90	90

Задача 15.3. На круглый сплошной вал, опирающийся на два подшипника и делающий  $n \frac{об}{мин}$ , посажены три шкива диаметром  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  см имеющий вес  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  кг. Ведущий шкив  $D_1$  и  $D_3$ , передающим мощность  $N_2$  и  $N_3$  к отдельным механизмам. Углы наклона ветвей ременных передач  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  отсчитываются от вертикальной оси  $Z$  против часовой стрелки. Расстояния между центрами шкивов и подшипников, соответственно равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$ ,

откладывается на схеме слева на право по оси вала. В схемах вала цифрами обозначены номера шкивов, а буквой «П» - подшипники (табл. 15.3.). определить диаметр вала по третьей теории прочности при допускаемом напряжении  $[\sigma]$  с модулем сдвига  $G = 8 \cdot 10^{10} \frac{H}{м^2}$ . Данные взять из табл. 15.3.

Указания к решению задач 15.1-15.3.

Дано: Схема - П21П3,  $n = 360 \frac{об}{м}$ ,  $N_2 = 30$  л. С.,  $N_3 = 40$  л. С.,  $D_1 = 45$  см,  $D_2 = 63$  см,  $D_3 = 90$  см,  $Q_1 = 420$  Н,  $Q_2 = 580$  Н,  $Q_3 = 880$  Н,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 315^\circ$ ,  $\alpha_3 = 150^\circ$ ,  $a = 24$  см,  $b = 70$  см,  $c = 84$  см,  $e = 38$  см,

$$[\sigma] = 10^8 \frac{H}{м^2} \text{ (рис. 15.1).}$$

*Решение*

1) Мощность на ведущем шкиве  $D_1$  равна

$$N_1 = N_2 + N_3 = 30 + 40 = 70 \text{ л.с.}$$

2) Вычерчиваем в заданном масштабе схему вала и отдельно шкивы  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  с ветвями ременных передач и силами натяжения, а также изгибающими силами и силами веса, приложенными к центру вала (рис. 15.2-15.4). на шкивах через центр вала проводятся оси координат  $Y$  и  $Z$ , соответственно направленные влево и вертикально вверх. Крутящий момент на ведущем шкиве  $D_1$  направляется против часовой стрелки, а на ведомых шкивах  $D_2$  и  $D_3$  - по часовой стрелке.



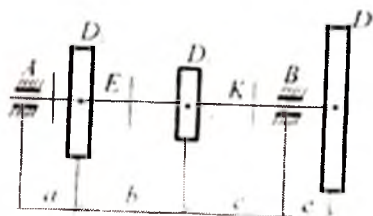


Рис. 15.1.

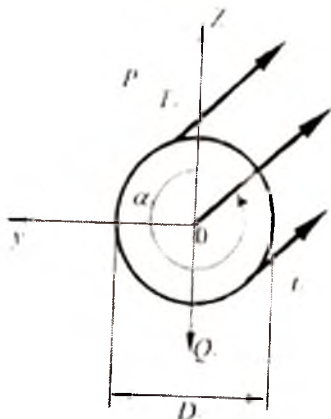


Рис. 15.3.

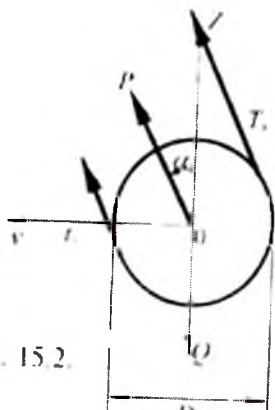


Рис. 15.2.

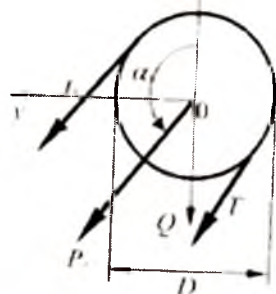


Рис. 15.4.

3) Определяем крутящие моменты  $M_k$ , приложенные к шкивам:

$$M_{k1} = 716,2 \frac{N_1}{n} = 716,2 \frac{70}{360} = 1393 \text{ Нм};$$

$$M_{k2} = 716,2 \frac{N_2}{n} = 716,2 \frac{70}{360} = 597 \text{ Нм};$$

$$M_{K3} = 716,2 \frac{N_3}{n} = 716,2 \frac{70}{360} = 796 \text{ Нм.}$$

При равномерном вращении вала крутящий момент  $M_{K1}$  на ведущем шкиве уравнивается крутящими моментами  $M_{K2}$  и  $M_{K3}$  на ведомых шкивах, то есть

$$M_{B1} = M_{B2} + M_{B3} = 597 + 796 = 1393 \text{ Нм.}$$

4) Строим эпюру крутящих моментов. Проводим сечения на участках  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$ , вала и составляем уравнения  $M_K$ :

- в сечении I  $M_a^I = 0$ ;

- в сечении II  $M_b^{II} = M_{B2} = 597 \text{ Нм}$ ;

- в сечении III  $M_c^{III} = -M_{B3} = M_{B2} - M_{B1} = -796 \text{ Нм}$ .

Построенная эпюра имеет форму двух прямоугольников (рис. 15.5).

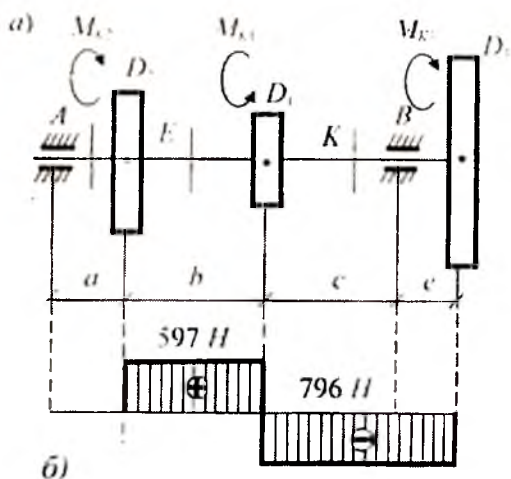


Рис. 15.5.

5) Определяем изгибающие силы  $P$ , действующие на вал в сечениях посадки шкивов:

$$P_1 = 3t_1 = \frac{6M_{в1}}{D_1} = \frac{6 \cdot 1396}{0,45} = 18560 \text{ Н};$$

$$P_2 = 3t_2 = \frac{6M_{в2}}{D_2} = \frac{6 \cdot 597}{0,63} = 5680 \text{ Н};$$

$$P_3 = 3t_3 = \frac{6M_{в3}}{D_3} = \frac{6 \cdot 796}{0,90} = 5300 \text{ Н}.$$

6) Определяем нагрузки, изгибающие вал в вертикальной плоскости:

$$V_1 = P_1 \cos \alpha_1 - Q_1 = 18560 \cdot 0,866 - 420 = 15650 \text{ Н};$$

$$V_2 = P_2 \cos \alpha_2 - Q_2 = 5680 \cdot 0,707 - 580 = 3430 \text{ Н};$$

$$V_3 = P_3 \cos \alpha_3 - Q_3 = 5300 \cdot (-0,866) - 880 = -5470 \text{ Н};$$

7) Определяем нагрузки, изгибающие вал в горизонтальной плоскости:

$$H_1 = P_1 \sin \alpha_1 = 18560 \cdot 0,5 = 9280 \text{ Н};$$

$$H_2 = P_2 \sin \alpha_2 = 5680 \cdot (-0,707) = -4010 \text{ Н};$$

$$H_3 = P_3 \sin \alpha_3 = 5300 \cdot 0,5 = 2650 \text{ Н};$$

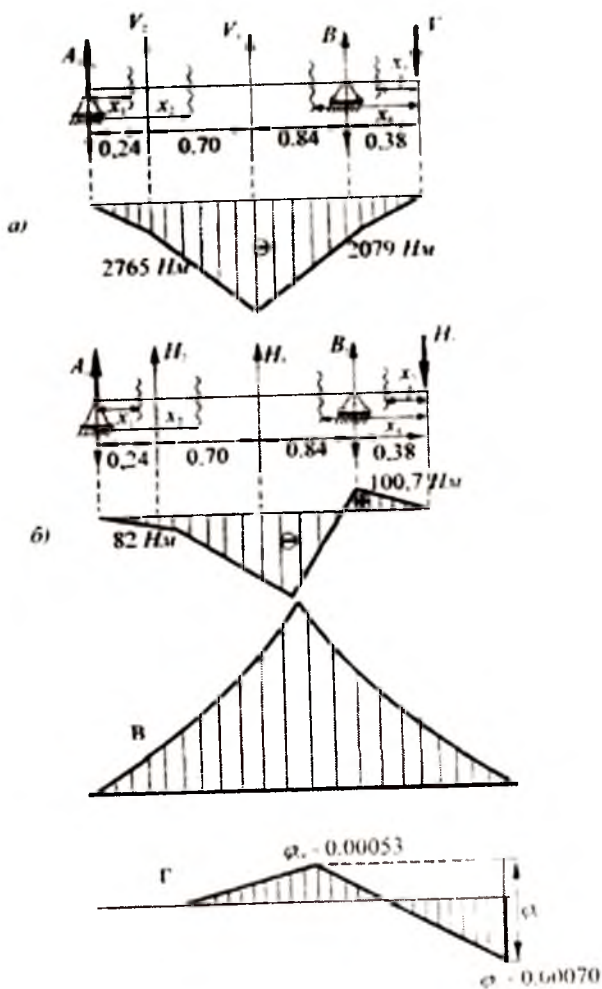


Рис. 15.6.

8) Строим эпюру изгибающих моментов  $M_y$  от нагрузки  $V$ , действующих в вертикальной плоскости. Вертикальные нагрузки вызывают в подшипниках

вертикальные реакции  $A_z$ ,  $B_z$ , величина которых определяется, как для простой балки, лежащей на двух шарнирных опорах. Положительные нагрузки  $V$ , изгибающие вал, направляются вверх, отрицательные – вниз. Используя уравнения статики, определяем опорные реакции:  $A_z = -11520$  Н,  $B_z = -2090$  Н,  $A_y = -340$  Н,  $B_y = -7580$  Н.

Эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$  приведены на рис. 15.6, а и б.

9) Определяем суммарные изгибающие моменты для отдельных сечений вала и строим эпюры суммарных изгибающих моментов по формуле  $M_{\Sigma} = \sqrt{M_{ГОР}^2 + M_{ВЕР}^2}$  :

- в сечении  $x = 0,24$  м

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_{ГОР}^2 + M_{ВЕР}^2} = \sqrt{27565^2 + 82^2} = 2766 \text{ Нм};$$

- в сечении  $x = 0,94$  м

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_{ГОР}^2 + M_{ВЕР}^2} = \sqrt{28428^2 + 3130^2} = 8990 \text{ Нм};$$

- в сечении  $x = 0,78$  м

$$M_{\Sigma} = \sqrt{M_{ГОР}^2 + M_{ВЕР}^2} = \sqrt{2074^2 + 1007^2} = 2310 \text{ Нм};$$

Эпюра суммарных изгибающих моментов (рис. 15.6, д) условно строится в плоскости чертежа и имеет в средней части криволинейное очертание.

Опасным сечением вала, установленным по эпюрам суммарных изгибающих и крутящих моментов, является сечение по середине шкива  $D_1$  в котором действует наибольший изгибающий момент  $M_1 = 8990$  Нм и крутящий момент  $M_K = 796$  Нм.

10) Вычисляем расчетный момент по третьей теории прочности

$$M_{rш} = \sqrt{M_H^2 + M_K^2} = \sqrt{8990^2 + 796^2} = 9025 \text{ Нм};$$

11) Определяем необходимый диаметр вала

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M_{rш}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 9025 \cdot 10^7}{3,14 \cdot 10^8}} = 9,72 \text{ см}$$

Округляя диаметр вала до ближайшего стандартного размера, принимаем  $d = 10$  см.

12) Вычисляем углы закручивания вала на участках а, б, с, е, и строим эпюру углов закручивания. Углы закручивания определяются по формуле:

$$\varphi = \frac{M_b l}{G J_p}$$

где  $l$  — длина участка,  $J_p$  — полярные инерции.

Для сплошного круглого сечения вала полярный момент инерции

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 10000}{32} = 981 \text{ см}^4.$$

На участке а крутящий момент  $M_K^I = 0$ , следовательно, угол закручивания  $\varphi_{AE} = 0$ .

На участке б крутящий момент  $M_K^{II} = 597 \text{ Нм}$ . Угол закручивания  $\varphi_{EK} = 0.00053$  рад.

На участках с и е крутящий момент  $M_K^{III} = -796 \text{ Нм}$ . Угол закручивания этих участков  $\varphi_{EK} = -0.00123$  рад.

В соответствии с эпюрой крутящих моментов угол закручивания отрицательный. Для построения эпюры  $\varphi$  крайнее левое сечение вала принимается за неподвижное, например, сечение А. На участке АЕ скручивание вала не происходит, так как угол  $\varphi_{ЕК} = 0$ . Сечение К поворачивается по отношению к сечению Е на угол ( $\varphi_{ЕК} = 0.00053$  рад). При положительном значении угла  $\varphi_{ЕК}$ , его ордината откладывается в сечении К вверх от оси эпюры. Угол поворота сечения L по отношению к сечению А равен алгебраической сумме углов закручивания на участке вала

$$\varphi_{AL} = \varphi_{ЕК} + \varphi_{KL} = 0.00053 - 0.00123 = -0.00070 \text{ рад.}$$

Учитывая отрицательное значение угла  $\varphi_{AL}$ , его ордината откладывается в сечении L вниз от оси эпюры. Соединяя полученные точки прямыми линиями, получают эпюру углов закручивания  $\varphi$  (рис. 15.6, д). Угол закручивания  $\varphi_{AL}$  в зависимости от знаков эпюры крутящих моментов, может быть положительным, отрицательным и, в частном случае равным нулю. При отсутствии крутящего момента, сечения вала на последнем участке поворачивается на угол, равный углу поворота поперечного сечения предыдущего участка.

13) Определяем наибольший относительный угол закручивания вала и проверяем его жесткость. Угол закручивания, приходящийся на длины вала, вычисляется по наибольшему крутящему моменту эпюры  $M_K$ . При допуске относительном угле закручивания в градусах на один метр длины вала условие жесткости имеет вид

$$\theta = \frac{180 M_{\text{max}} \cdot 100}{\pi G J_p} \leq [\theta],$$

Таблица 15.3.

№	Форма	а <sub>ш</sub> / лш	N, о.к.		D, см			Q, H			α, град			а, м	в, м	с, м	е, м	[σ] МПа
			N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>	α <sub>3</sub>					
1	П3112П	360	10	60	36	80	100	300	72	900	30	330	210	20	32	90	38	160
2	П21П3	400	15	50	40	50	90	360	480	880	150	60	315	22	40	84	36	70
3	П12П3	450	20	45	45	71	80	420	640	720	240	210	135	24	46	80	34	80
4	П123П	500	25	40	50	36	71	480	300	640	45	180	150	26	50	76	32	90
5	П231П	560	30	35	56	90	63	540	880	580	300	315	225	28	88	68	30	100
6	3П1П2	630	35	30	63	45	56	580	420	540	135	90	180	30	66	60	28	120
7	П23П1	710	40	25	71	63	50	640	580	480	90	120	240	32	70	54	26	130
8	2П31П	800	45	20	80	100	45	720	900	420	330	270	30	34	74	48	24	140
9	1П23П	900	50	15	90	56	40	880	540	360	225	45	270	36	80	42	22	150
10	2П13П	1000	60	10	100	40	36	900	360	300	120	300	60	38	86	36	20	160
11	П213П	360	10	60	36	80	100	300	720	900	30	330	210	20	32	90	38	160
12	П31П2	400	15	50	40	50	90	360	480	880	150	60	315	22	40	84	36	70
13	П13П2	450	20	45	45	71	80	420	640	720	240	210	135	24	46	80	34	80
14	П32П1	500	25	40	50	36	71	480	300	640	45	180	150	26	50	76	32	90
15	3П21П	560	30	35	56	90	63	540	880	580	300	315	225	28	88	68	30	100



Продолжение табл. 15.3.

16	2П3П1	630	35	30	63	45	56	580	420	540	135	90	180	30	66	60	28	120
17	2П1П3	710	40	25	71	63	50	640	580	480	90	120	240	32	70	54	26	130
18	3П1П2	800	45	20	80	100	45	720	900	420	330	270	30	34	74	48	24	140
19	1П3П2	900	50	15	90	56	40	880	540	360	225	45	270	36	80	42	22	150
20	12П3П	1000	60	10	100	40	36	900	360	300	120	300	60	38	86	36	20	160
21	2П3П	360	10	60	36	80	100	300	720	900	30	330	210	20	32	90	38	160
22	32П1П	400	15	50	40	50	90	360	480	880	150	60	315	22	40	84	36	70
23	23П1П1	450	20	45	45	71	80	420	640	720	240	210	135	24	46	80	34	80
24	П1П23	450	25	40	50	36	71	480	300	640	45	180	150	26	50	76	32	90
25	П1П32	500	30	35	56	90	63	540	880	580	300	315	225	28	88	68	30	100
26	П2П13	560	35	30	63	45	56	580	420	540	135	90	180	30	66	60	28	120
27	П2П31	630	40	25	71	63	50	640	580	480	90	120	240	32	70	54	26	130
28	П3П12	710	45	20	80	100	45	720	900	420	330	270	30	34	74	48	24	140
29	П3П21	800	50	15	90	56	40	880	540	360	225	45	270	36	80	42	22	150
30	П12П3	900	60	10	100	40	36	900	360	300	120	300	60	38	86	36	20	160

где  $[\theta]$  - допускаемый угол закручивания  $0.5^\circ$  на один метр длины вала.

Подставляя значения, получаем

$$\theta = \frac{180 M_{\text{БМАХ}} \cdot 100}{\pi G J_p} = \frac{180 \cdot 796 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^7 \cdot 981} = 0,058^\circ < 0,5$$



на один метр.

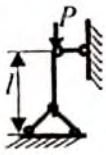
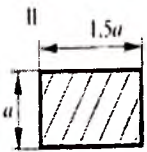
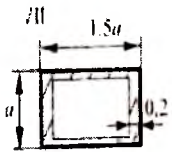
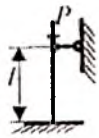

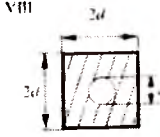

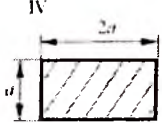
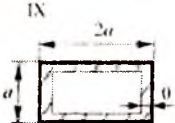
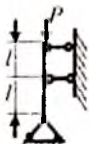


Следовательно, условие жесткости вала выполняется.

### Глава 16. Устойчивость сжатых стержней

Задача 161. Стальной стержень длиной  $l$  — сжимается силой  $P$ . Требуется: 1) найти размеры поперечного сечения при допускаемом напряжении на простое сжатие  $[\sigma] = 160$  МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом  $\varphi = 0,5$ ); 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости. Данные взять из табл. 16.1.

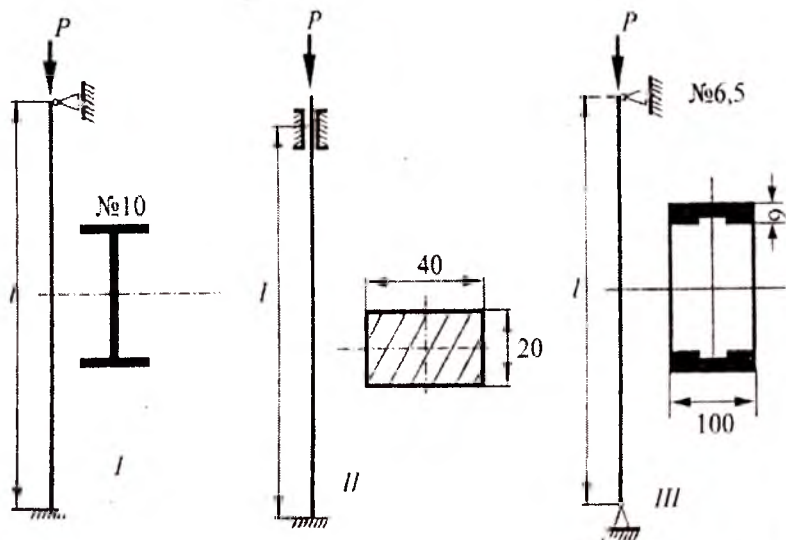
Таблица 16.1.

№	P, кН	L, м	Схема закрепления концов стержня	Форма сечения стержня
1	100	2.1		
2	150	2.2		
3	200	2.3		
4	250	2.4		
5	300	2.5		
6	350	2.6		

7	200	1.1							
8	250	1.2							
9	300	1.3							
10	350	1.4							
11	400	1.5					Г	Д	Д
12	450	1.6							
13	300	2.5							
14	350	2.6							
15	400	2.7							
16	450	2.8							
17	500	2.8							
18	550	3.0							
19	200	2.6							
20	250	2.7							
21	300	2.8							
22	350	2.8							
23	400	3.0							
24	450	3.1							
25	500	2.9							
26	550	3.0							
27	600	3.1							
28	650	3.2							
29	700	3.3							
30	750	3.4							

Задача 16.2. Проверить на устойчивость стойки, показанные на рисунке. Данные взять из табл. 16.2.

## Рисунки задачи 16.2.



Сталь Ст.5,  $[n]=3$

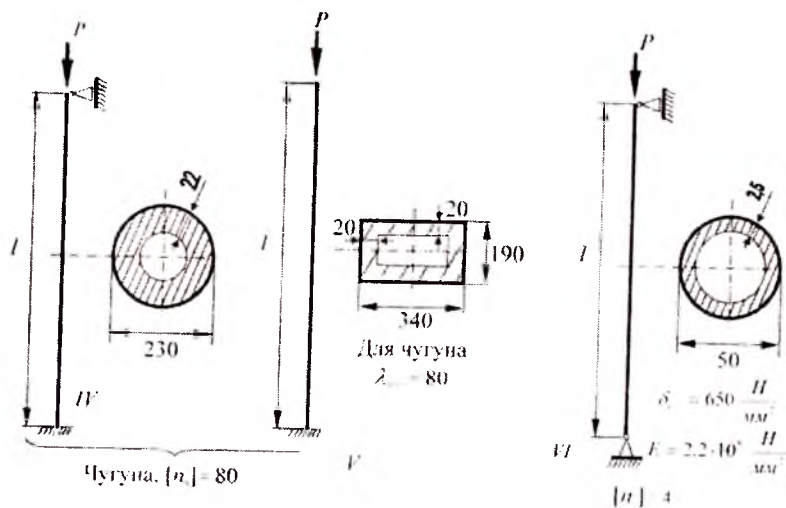


Таблица 16.2.

№	Схема	РкН	L, м	№	Схема	РкН	L, м
1	I	100	0.5	16	I	100	0.7
2	II	150	0.6	17	II	150	0.8
3	III	200	0.7	18	III	200	0.9
4	IV	250	0.8	19	IV	250	1.0
5	V	300	0.9	20	V	300	1.1
6	VI	350	1.0	21	VI	350	1.2
7	I	400	1.1	22	I	400	1.3
8	II	450	1.2	23	II	450	1.4
9	III	500	1.3	24	III	500	1.5
10	IV	550	1.4	25	IV	550	0.5
11	V	600	1.5	26	V	600	0.6
12	VI	650	0.5	27	VI	650	0.7
13	I	700	0.6	28	I	700	0.8
14	II	750	0.7	29	II	750	0.7
15	III	800	0.8	30	III	800	0.8

Указания к решению задач 16.1-16.2.

А. Для колонны, изображенной на рис. 16.1, определить допускаемое значение силы Р. Материал колонны сталь Ст3, требуемый коэффициент запаса устойчивости  $[n_y] = 3$ .

*Решение.* Допускаемое значение силы F найдем из расчета колонны на устойчивость.

Предельное значение гибкости для материала ко.лонны (для стали Ст3)  $\lambda_{\text{пред}} = 100$ .

Определим гибкость колонны

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

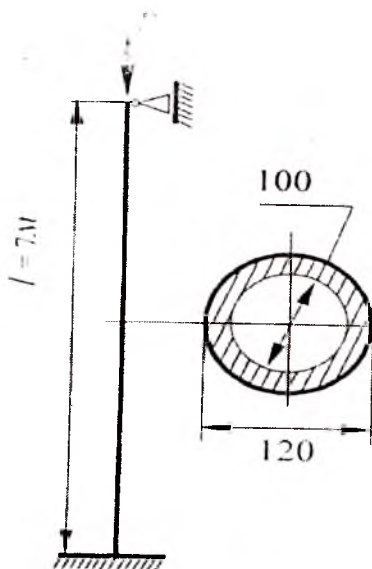


Рис. 16.1.

где

$$i_{\min} = i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64}(1-c^4) : \frac{\pi d^4}{4}(1-c^2)} =$$

$$= \frac{d}{4} \sqrt{1+c^2} = \frac{120}{4} \sqrt{1 + \left(\frac{100}{120}\right)^2} = 39,2 \text{ мм}$$

В данном случае любая центральная ось является главной и все центральные моменты инерции равны между собой.

Подставляя числовые значения, получаем

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 7000}{39,2} = 12,5.$$

Так как гибкость колонны оказалась больше предельной гибкости, критическую силу вычислим по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 530 \cdot 10^4}{(0,7 \cdot 70000)^2} = 4,36 \cdot 10^3 \text{ Н} = 436 \text{ кН},$$

где

$$J_{\min} = J = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 120^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{100}{120} \right)^4 \right] = 530 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Тогда

$$[P] = \frac{P_{кр}}{[n_y]} = \frac{436}{3} = 145,3 \text{ кН}.$$

Б. Определить допускаемое значение силы Р для кронштейна из хромомолибденовой стали (рис. 16.2, а).

Дано:  $\sigma_{пц} = 540 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ ;  $\sigma_T = 600 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}$ ;  
 $[n] = 2,5$  – для растянутого стержня;  $[n_y] = 4$  – для сжатого стержня.

*Решение*

Вырезая узел В и рассматривая его равновесие, определяем силы в стержнях АВ и ВС (рис. 16.3б):

$$\sum v = 0, - F \cdot N_{BC} \sin 30^\circ = 0, N_{BC} = 2P;$$

$$\sum u = 0, - N_{AB} + N_{BC} \cos 30^\circ = 0, N_{AB} = 1,73P.$$

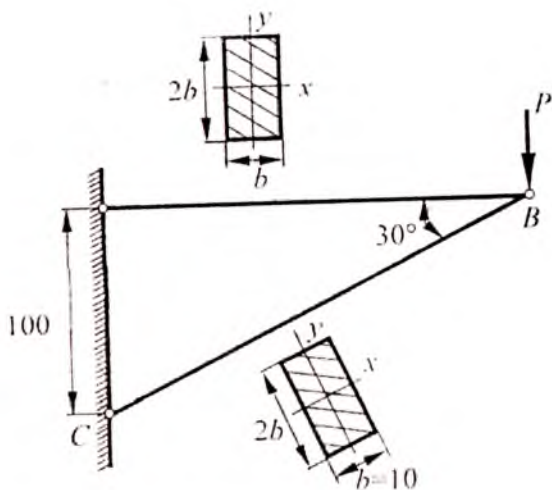


Рис. 16.2.

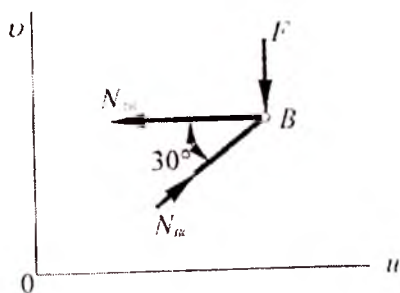


Рис. 16.3.

Определим  $[P]$  из условия прочности стержня АВ

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{1,73P}{2 \cdot 2b} = 0,865 \frac{P}{b^2} \leq [\sigma],$$



Откуда

$$P = \frac{b^2[\sigma]}{0,865}.$$

Допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]} = \frac{600}{2,5} = 240 \frac{H}{мм^2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$[P] = \frac{10^2 \cdot 240}{0,865} = 27,8 kH.$$

Определим допускаемое значение силы  $P$  из условия устойчивости стержня  $BC$ .

Предельная гибкость для заданного материала

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{тл}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{540}} = 62.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l_{BC}}{i_{min}}, \text{ где } \mu = 1, l_{BC} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ мм},$$

$$i_{min} = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{2b \cdot b^3}{12 \cdot 2b^2}} = 0,29b = 0,29 \times 10 = 2,9 \text{ мм}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\lambda = \frac{1 \cdot 200}{2,9} = 69.$$

Так как гибкость стержня больше предельной гибкости, то критическую силу вычисляем по формуле Эйлера:

$$[N_{уст.}] = \frac{(N_{BC})_{кр}}{[n_y]} = \frac{86,5}{4} = 21,6 \text{ кН}.$$

Но

$$[N_{BC}] = 2[P]_{уст.}$$

Откуда

$$2[P]_{уст.} = \frac{1}{2}[N_{BC}] = \frac{1}{2} \cdot 21,6 = 10,8 \text{ кН}.$$

Допускаемое значение силы  $F$  должно быть принято из условия устойчивости стержня  $BC$ , то есть  $10,8$  кН.

В. Проверить на устойчивость сжатую стойку трубчатого из хромомолибденной стали (рис. 16.4).

Дано:  $P = 150 \text{ кН}$ ;  $\sigma_{пл} = 540 \text{ МПа}$ ;  $E = 2,15 \cdot 10^5$ ;  $[n_y] = 3,5$ .

*Решение*

Определяем предельную гибкость для материала стойки:

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пл}}} = 3,14 \sqrt{\frac{2,15 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{540 \cdot 10^6}} = 63.$$

Для определения гибкости стойки вычисляем

момент инерции ее поперечного сечения (в данном случае любая центральная ось главная и все центральные моменты инерции равны между собой):

$$J_{\min} = J = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 76^2}{64} \left[ 1 - \left( \frac{64}{76} \right)^2 \right] = 81,4 \cdot 10^{-8} \cdot \text{м}^4$$

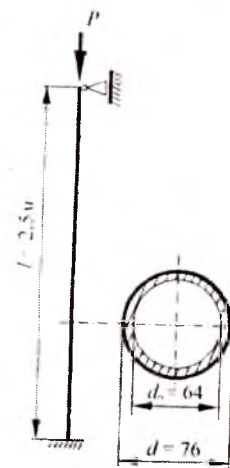


Рис.16.4.

Затем площадь сечения:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 76^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{64}{76} \right)^2 \right] = 1319 \text{ мм}^2,$$

И радиус его инерции

$$i_{\min} = i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{81,4 \cdot 10^4}{1319}} = 24,8 \text{ мм}.$$

Коэффициент приведения длины  $\mu \approx 0,7$ .

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{24,8} = 70,7.$$

Так как гибкость стойки больше предельной ( $\lambda > \lambda_{\text{ПРЕД}}$ ), то критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,15 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 81,4 \cdot 18^{-8}}{(0,7 \cdot 2,5)^2} =$$
$$= 564 \cdot 10^3 \text{ Н} = 564 \text{ кН}.$$

Определяем коэффициент запаса устойчивости и сравниваем с заданным:

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{564}{150} = 3,76 > [n_y].$$

В. Для заданной стойки двутаврного поперечного сечения (рис. 16.5) определить допускаемое значение сжимающей силы. Материалы стойки — сталь Ст3, коэффициент запаса устойчивости  $[n_y] = 2,0$ . Выяснить, как измениться допускаемая нагрузка, если длина стойки уменьшить вдвое.

*Решение.* Определяем гибкость стойки  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ .

Коэффициент приведения длины  $\mu = 0,5$ ;  $i_{\min} = i_y = 2,63$  см;

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 7,2 \cdot 10^3}{26,3} \approx 137.$$

Для стали Ст3  $\lambda_{\text{пред}} = 100$ , следовательно,  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$  и формула Эйлера применима.

Определяем допускаемое значение сжимающей силы:

$$[P] = \frac{P_{\text{кр}}}{[n_y]} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{мин}}}{[n_y](\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,0 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 260 \cdot 10^{-8}}{2(0,5 \cdot 7,2)^2} =$$

$$= 198 \cdot 10^3 \text{ Н} = 198 \text{ кН}$$

Где принято  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  
 $J_{\text{мин}} = J_y = 260 \text{ см}^4$ .

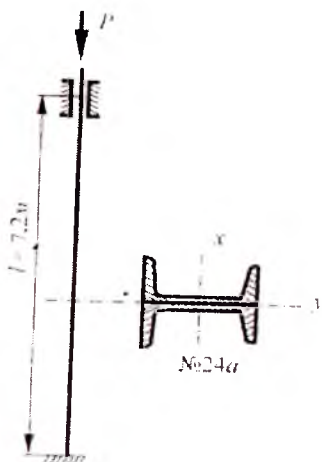


Рис. 16.5.

При уменьшении длины стойки вдвое критическая сила возрастает не в четыре раза, как можно было бы

ожидать, исходя из формулы Эйлера, а меньше.

Гибкость укороченной стойки  $\lambda_1 = 68,5$ , то есть меньше предельной, и формула Эйлера неприменима. Определяем допускаемую нагрузку

$$\begin{aligned} [P_1] &= \frac{\sigma_{кр} F}{[n_y]} = \frac{(1 - b\lambda_1) F}{[n_y]} = \\ &= \frac{(310 - 1,14 \cdot 68,5) \cdot 10^6 \cdot 37,5 \cdot 10^{-4}}{2} = 453 \cdot 10^3 \text{ Н} = 453 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Таким образом, критическая сила возросла лишь в 2,29 раза. Этот пример подтверждает, что использование формулы Эйлера в области ее неприменимости приводит к завышенному значению критическую, а значит, и допускаемой нагрузки.

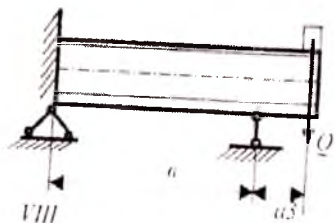
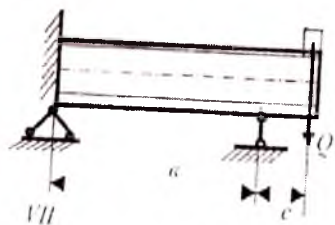
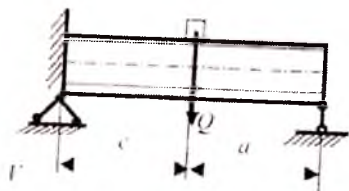
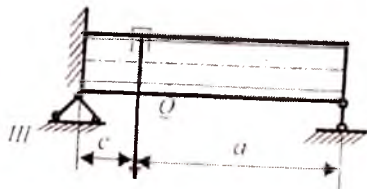
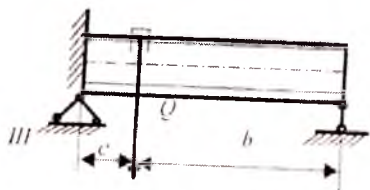
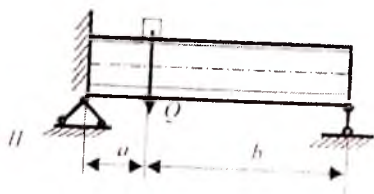
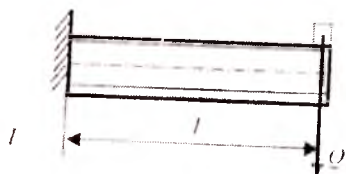
## Глава 17. Динамические силы. Упругие колебания

Задача 17.1. на двух балках двутаврового сечения установлен двигатель весом  $Q$ , делающий  $n$  оборотов в минуту. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна  $H$ . Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Требуется найти: 1) частоту собственных колебаний  $\omega_0$ ; 2) частоту изменения возмущающей силы  $\omega$ ; 3) коэффициент нарастания колебаний  $\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$  (если коэффициент  $\beta$ , определяе-

мы по этой формуле окажется отрицательным, то в дальнейшем расчете следует учитывать его абсолютную величину); 4) динамический коэффициент  $k_d = 1 +$

$\frac{f_H}{f_Q} \beta = 1 + \frac{H}{Q} \beta$ ; 5) наибольшее нормальное напряжение в балках  $\sigma_d = k_d \sigma_{ст}$ . Данные взять из табл. 17.1.

Рисунки задачи 17.1.



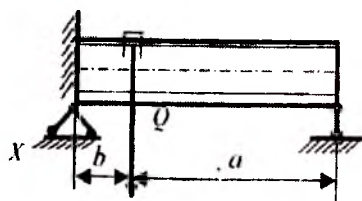
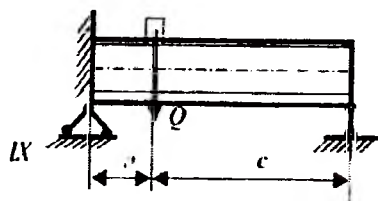


Таблица 17.1.

№	Схема	Дву- тавр	Q	H	n	a	b	c	l
			кН						
1	I	16	11	1.1	400	1.1	0.1	0.9	0.8
2	II	18	12	1.2	450	1.2	1.1	1.0	0.9
3	III	20a	13	1.3	500	1.3	1.2	1.1	1.0
4	IV	02	14	1.4	550	1.4	1.3	1.2	1.1
5	V	22a	15	1.5	600	1.5	1.4	1.3	1.2
6	VI	22	16	1.6	650	1.6	1.5	0.9	0.8
7	VII	24a	17	1.7	700	1.7	0.1	1.0	0.9
8	VIII	24	18	1.8	750	1.8	1.1	1.1	1.0
9	IX	27a	19	1.9	800	1.9	1.2	1.2	1.1
10	X	27	20	2.0	850	2.0	1.3	1.3	1.2
11	I	16	11	1.1	900	1.1	1.4	0.9	0.8
12	II	18	12	1.2	950	1.2	1.5	1.0	0.9
13	III	20a	13	1.3	1000	1.3	0.1	1.1	1.0
14	IV	02	14	1.4	400	1.4	1.1	1.2	1.1
15	V	22a	15	1.5	450	1.5	1.2	1.3	1.2
16	VI	22	16	1.6	500	1.6	1.3	0.9	0.8
17	VII	24a	17	1.7	550	1.7	1.4	1.0	0.9
18	VIII	24	18	1.8	600	1.8	1.5	1.1	1.0
19	IX	27a	19	1.9	650	1.9	0.1	1.2	1.1
20	X	27	20	2.0	700	2.0	1.1	1.3	1.2
21	I	16	11	1.1	750	1.1	1.2	0.9	0.8
22	II	18	12	1.2	800	1.2	1.3	1.0	0.9
23	III	20a	13	1.3	850	1.3	1.4	1.1	1.0
24	IV	20	14	1.4	900	1.4	1.5	1.2	1.1
25	V	22a	15	1.5	950	1.5	0.1	1.3	1.2

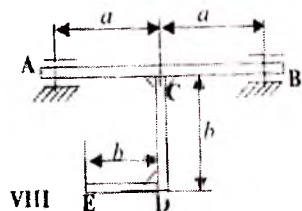
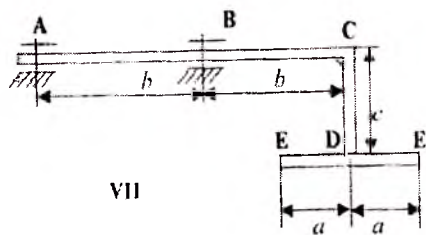
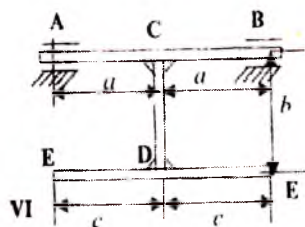
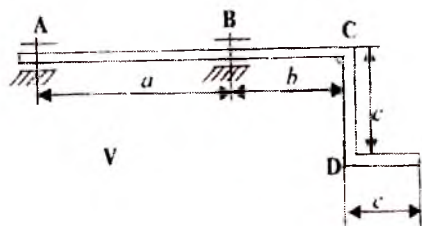
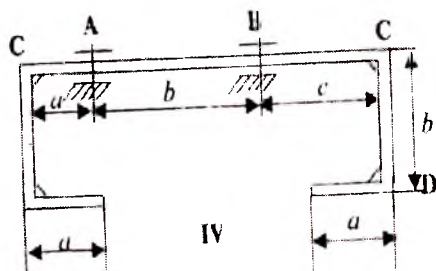
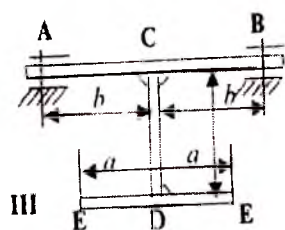
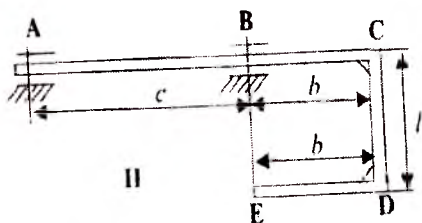
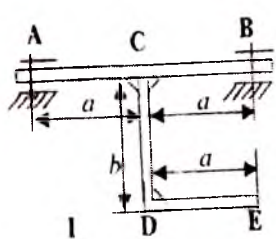


26	VI	22	16	1.6	1000	1.6	1.1	0.9	0.8
27	VII	24a	17	1.7	400	1.7	1.2	1.0	0.9
28	VIII	24	18	1.8	450	1.8	1.3	1.1	1.0
29	IX	27a	19	1.9	500	1.9	1.4	1.2	1.1
30	X	27	20	2.0	550	2.0	1.5	1.3	1.2

Задача 17.2. Валик и жестко соединенный с ним ломаный стержень того же поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси АВ. Требуется: 1) построить эпюру изгибающих моментов от сил инерции, возникающих на вертикальном CD и горизонтальном DE участках ломаного стержня; силы инерции самого валика можно не учитывать (при изображенном на рис. Положении ломаного стержня силы инерции складываются с силами собственного веса, но последними ввиду их незначительности при построении эпюры М можно пренебречь); 2) найти допускаемое число оборотов валика в минуту при допускаемом напряжении  $[\sigma] = 160$  МПа и  $\gamma = 78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ . Данные взять из табл. 17.2.

*Указания.* Для упрощения вычислений рекомендуется производить их сначала в общем виде, обозначив интенсивность сил инерции на горизонтальном участке через  $q$ . Равнодействующие силы инерции на горизонтальном и вертикальном участках, опорные реакции, ординаты эпюры М надо выразить через  $q$  и  $l$ .

## Рисунки задачи 17.2.



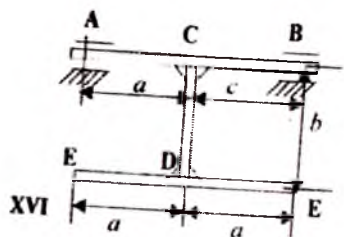
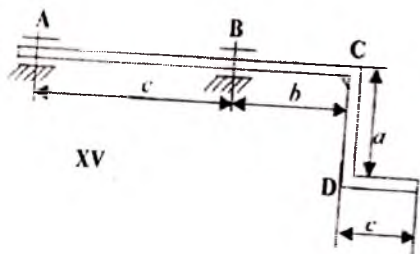
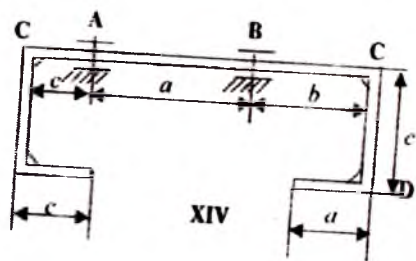
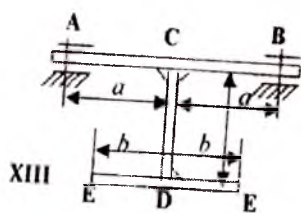
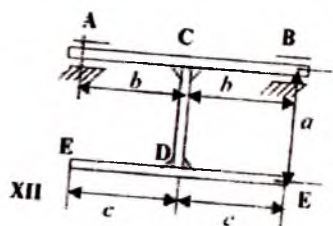
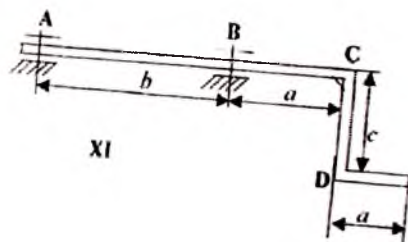
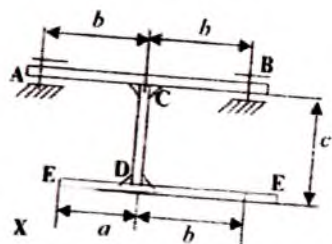
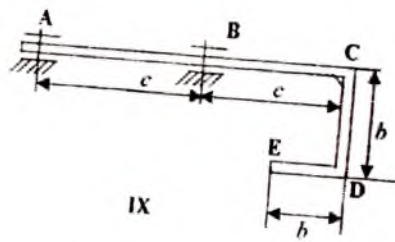


Таблица 17.2.

№	Схема	a	b	c	d	№	Схема	a	b	c	d
		M						M			
1	I	0.10	0.1	0.5	0.1	16	II	0.10	0.1	0.5	0.1
2	II	0.15	0.2	0.6	0.2	17	I	0.15	0.2	0.6	0.2
3	III	0.20	0.3	0.7	0.3	18	II	0.20	0.3	0.7	0.3
4	IV	0.25	0.4	0.8	0.4	19	III	0.25	0.4	0.8	0.4
5	V	0.30	0.5	0.9	0.5	20	IV	0.30	0.5	0.9	0.5
6	VI	0.35	0.6	1.0	0.6	21	V	0.35	0.6	1.0	0.6
7	VII	0.40	0.7	0.5	0.7	22	VI	0.40	0.7	0.5	0.7
8	VIII	0.45	0.8	0.6	0.8	23	VII	0.45	0.8	0.6	0.8
9	IX	0.50	0.9	0.7	0.9	24	VIII	0.50	0.9	0.7	0.9
10	X	0.55	1.0	0.8	1.0	25	IX	0.55	1.0	0.8	1.0
11	XI	0.60	0.6	0.9	0.6	26	X	0.60	0.6	0.9	0.6
12	XII	0.10	0.7	1.0	0.7	27	XI	0.10	0.7	1.0	0.7
13	XIII	0.15	0.8	0.8	0.8	28	XII	0.15	0.8	0.8	0.8
14	XIV	0.20	0.9	0.9	0.9	29	XIII	0.20	0.9	0.9	0.9
15	XV	0.25	1.0	1.0	1.0	30	XIV	0.25	1.0	1.0	1.0

Указания к решению задач 17.1-17.2.

А. Призматической стержень длиной  $l$  несет два груза весом  $Q_1$  и  $Q_2$  и движется равноускоренно вертикально вверх, проходя за первые  $t$  секунд путь  $S$  (рис. 17.1). Определить необходимую площадь  $F$  поперечного сечения стержня и его динамическое удлинение, если удельный вес материала стержня  $\gamma$ , модуль продольной упругости  $E$  и допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma]$ .

*Решение*

Наибольшая статическая продольная сила в верхнем сечении стержня

$$\text{Max } N = Q_1 + Q_2 + \gamma Fl.$$

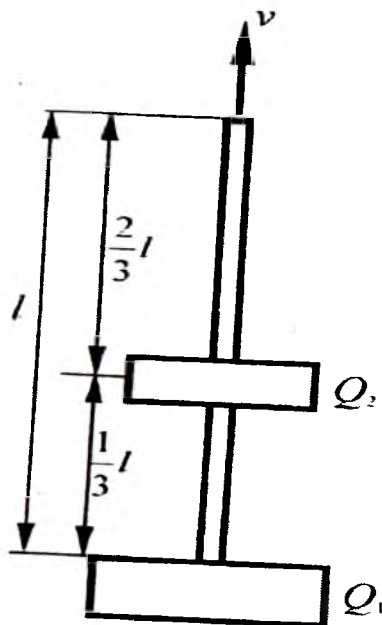


Рис. 17.1.

Наибольшее статическое нормальное напряжение

$$\max \sigma = \frac{\max N}{F} = \left( \frac{Q_1 + Q_2}{F} \right) + \gamma.$$

Так как ускорение заданного движения  $a = \frac{2S}{t^2}$  направлено вертикально вверх, то динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \frac{a}{g}.$$

Максимальное динамическое напряжение

$$\max \sigma_{д} = k_{д} \max \sigma = k_{д} \left[ \left( \frac{Q_1 + Q_2}{F} \right) + \gamma \right]$$

По условной прочности,

$$\max \sigma_{д} = k_{д} \max \sigma \leq [\sigma],$$

или

$$\max \sigma = \left( \frac{Q_1 + Q_2}{F} \right) + \gamma \leq \frac{[\sigma]}{k_{д}}.$$

Отсюда необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$F \geq \frac{Q_1 + Q_2}{\left( \frac{[\sigma]}{k_{д}} \right) - \gamma}.$$

Удлинение стержня площадью поперечного сечения  $F$  при статическом действии сил

$$\Delta l = \left[ Q_1 + \frac{2}{3} Q_2 + \frac{1}{2} \gamma F \right] \frac{l}{EF}.$$

Динамическое удлинение стержня  $\Delta l_{д} = k_{д} \Delta l$ .

Б. К грузу  $Q = 1$  кН, укрепленному на конце призматического стержня длиной  $l = 1$  м и площадью поперечного сечения  $F = 1$  см<sup>2</sup>, подвешен груз  $Q_1 = 20$  Н, который вращается на плече  $\rho = 8$  см, с частотой

$n=2400 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$  (рис. 17.2, а). модуль продольной упругости материала стержня  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Определить амплитуду вынужденных колебаний груза, не учитывая массу стержня и сил сопротивления.

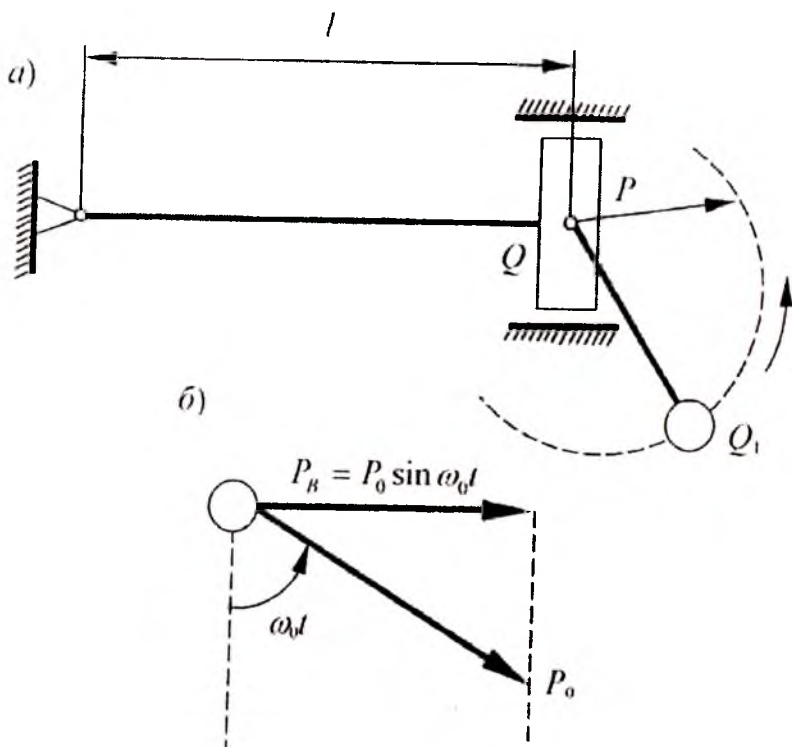


Рис. 17.2.

**Решение**

Так как линейное перемещение (удлинение) точки подвеса груза при статическом действии силы  $Q$  в направлении колебания

$$\delta = \frac{Ql}{EF} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2 \cdot 10^4} \text{ м} = 0,005 \text{ см.}$$

То круговая частота свободных продольных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{9,81 \cdot 2 \cdot 10^4} \approx 443 \frac{1}{\text{с}}.$$

При вращении неуравновешенного груза  $Q_1$  возникает центробежная сила  $P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho$ , составляющая которой в направлении колебаний будет гармонически возмущающей силой (рис. 17.2,б)  $P_B = P_0 \sin \omega t$ , вызывающей вынужденные колебания.

Угловая скорость вращения груза  $Q_1$  является круговой частотой вынужденных колебаний и равна

$$\omega_0 = \frac{\pi t}{30} = \frac{\pi \cdot 2400}{30} \approx 251 \frac{1}{\text{с}}$$

Возмущающая сила имеет максимальное значение

$$P_0 = \frac{Q_1}{g} \omega_0^2 \rho = \frac{20 \cdot 251^2 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{9,81} = 10300 \text{ Н} = 10,3 \text{ кН.}$$

От статического действия силы  $P_0$  в направлении колебания удлинение стержня

$$\delta_0 = \frac{P_1 l}{EF} = \frac{10300 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 52 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,52 \text{ см}$$

Так как коэффициент нарастания колебаний



$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{251^2}{443^2}} = 1,47,$$

То амплитуда вынужденных колебаний системы приобретает значение

$$A = \beta \delta_0 = 1,47 \cdot 0,052 = 0,08 \text{ см.}$$

В. Определить частоту и период колебаний груза массы  $m = 500$  кг, расположенного на балке двутаврового сечения; 20 а (рис. 17,3), без учета и с учетом массы балки. Длина балки  $l = 4$  м,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

*Решение*

Случай а):

- жесткость  $c = \frac{3EJ}{l^3}$ ,

- частота  $\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}} = 19,51 \frac{1}{\text{с}}$ ;

- период  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,322$ .

Приведенная масса балки

$$m_{np} = \frac{33}{140} m_0 l = 21,4 \text{ кг.}$$

Здесь  $m_0 = 22,7$  кг – масса одного метра балки. Частота с учетом массы балки

$$\omega' = \sqrt{\frac{3EJ}{(m + m_{np})^3}} = 19,10 \frac{1}{c}.$$

Период

$$T' = \frac{2\pi}{19,10} = 0,329c.$$

Случай б):

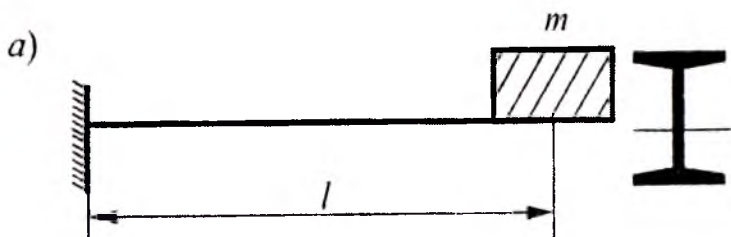
- жесткость  $c = \frac{48EJ}{l^3}$ ;

- частота  $\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}} = 78,04 \frac{1}{c}$ .

- период  $T = 0,0805 c$ .

Приведенная масса балки

$$m_{np} = \frac{17}{35} m_0 = 44,1 \text{ кг}, \quad \omega' = \sqrt{\frac{48EJ}{[(m + m_{np})l^3]}} = 74,81 \frac{1}{c}, \quad T' = 0,0840 c.$$



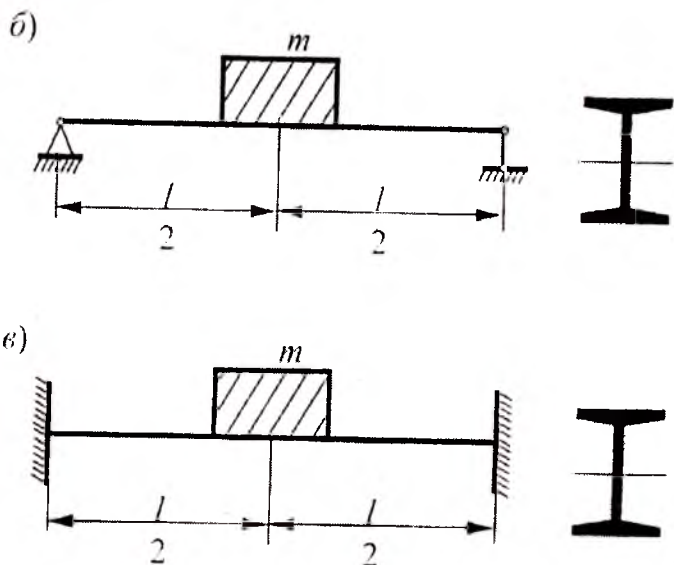


Рис. 17.3.

Случай в)

- жесткость  $c = \frac{192EJ}{l^3}$ ;

- частота  $\omega = \sqrt{\frac{192EJ}{ml^3}} = 156,1 \frac{1}{c}$ ;

- период  $T = 2/156,1 = 43 \text{ с}$ .

Приведенная масса балки  $m_{np} = \frac{13}{35} m_0 l = 33,7 \text{ кг}$ ,

$$\omega \sqrt{\frac{48EJ}{[(m + m_{np})l^3]}} = 151 \frac{1}{c}, \quad T' = 0,0416 \text{ с}.$$

Г. Определить частоты собственных линейных и угловых колебаний диска диаметра  $D = 0,36 \text{ м}$  и массы  $m = 15 \text{ кг}$ , приклеено к концу консоли длины  $l = 0,5 \text{ м}$ .

жесткость  $EJ = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ . массой консоли пренебречь (рис.17.4).

*Решение*

Уравнения движения системы

$$-\delta_{\varphi\varphi} J_m \varphi - \delta_{\varphi x} m x = \varphi, \quad -\delta_{x\varphi} - \delta_{x\varphi} J_m \varphi - \delta_{xx} m x = x,$$

Соответствующее уравнение частот

$$(\delta_{\varphi\varphi} \delta_{xx} - \delta_{\varphi x}^2) m J_m \omega^4 - \delta_{\varphi\varphi} J_{xx} + \delta_{xx} m \omega^2 + 1 = 0.$$

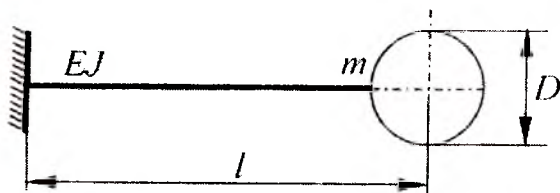


Рис. 17.4.

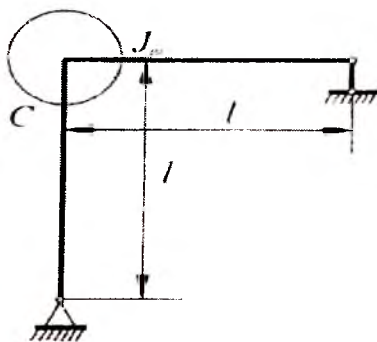


Рис. 17.5.

Учитывая, что

$$J_m = \frac{mD}{8},$$

И введя обозначения

$$z = \frac{m\omega^2 l^2}{EJ},$$

Получаем

$$0,00135z^2 - 0,2z + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$z_1 = 5,18, \quad z_2 = 142,9.$$

Частоты

$$\omega_1 \sqrt{\frac{EJz_1}{ml^2}} = 26,31 \frac{1}{c}, \quad \omega_2 \sqrt{\frac{EJz_2}{ml^2}}.$$

Д. Диск массы  $m = 5$  кг и с моментом инерции  $J_m = 0,1$  кг · м<sup>2</sup> жестко укреплен на стальной раме в узле С. Определить частоты свободных линейных и угловых колебаний диска. Стержни рамы круглого сечения диаметра  $d = 1$  см,  $l = 1$  м. Исследовать формы колебаний  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа (рис. 17.5).

*Решение*

Уравнения движения

$$-\delta_{\varphi\varphi} J_m \ddot{\varphi} - \delta_{\varphi x} m \ddot{x} = \varphi, \quad -\delta_{x\varphi} - \delta_{x\varphi} J_m \ddot{\varphi} - \delta_{xx} m \ddot{x} = x,$$

Решение ищем в виде

$$\varphi = A_1 \cos \omega t, \quad x = A_2 \cos \omega t.$$

После подстановки получаем

$$(-\delta_{\varphi\varphi} J_m \omega^2 - 1) A_1 + \delta_{\varphi x} m \omega A_2 = 0,$$

$$\delta_{x\varphi} J_m \omega^2 A_1 + (\delta_{xx} m \omega^2 - 1) A_2 = 0.$$

Уравнение частот

$$(\delta_{\varphi\varphi} \delta_{xx} - \delta_{\varphi x}^2) m J_m \omega^4 - (\delta_{\varphi\varphi} J_m - \delta_{xx} m) \omega^2 + 1 = 0.$$

В данном случае

$$\delta_{\varphi\varphi} = \frac{l}{3EJ}, \quad \delta_{\varphi x} = \delta_{x\varphi} = \frac{l^2}{3EJ}, \quad \delta_{xx} = \frac{2l^2}{3EJ},$$

Где

$$J = \frac{\pi d^4}{64}$$

- момент инерции сечения рамы.

Приняв обозначения

$$\frac{m \omega^2 l^2}{3EJ} = z,$$

Представим уравнение частот в виде

$$\frac{J_m}{m} z^2 - l \left( 1 + \frac{J_m}{ml^2} \right) z + 1 = 0,$$

или

$$0,2z^2 - 2,02z + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$z_1 = 0,4975, z_2 = 100.$$

Частоты

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EJz_1}{ml^2}}.$$

Первая частота

$$\omega_1 = 5,41 \frac{1}{c}.$$

Вторая частота

$$\omega_2 = 76,75 \frac{1}{c}.$$

Отношение амплитуд

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1 - \delta_{\varphi\varphi} O_m \omega^2}{\delta_{\varphi x} m \omega^2} = \frac{1 - \frac{lJ_m \omega^2}{3EJ}}{\frac{l^2 m \omega^2}{2EJ}} = \frac{1}{z} - \frac{J_m}{lm}$$

Отношение амплитуд

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1 - \delta_{\varphi\varphi} J_m \omega^2}{\delta_{\varphi x} m \omega^2} = \frac{1 - \frac{lJ_m \omega^2}{3EJ}}{\frac{l^2 m \omega^2}{3EJ}} = \frac{1}{z} - \frac{J_n}{lm}$$

Для первой части

$$\frac{A_2}{A_1} = 2 \frac{M}{\text{рад}}.$$

Для второй части

$$\frac{A_2}{A_1} = -0,01 \frac{M}{\text{рад}}.$$

Е. Определить частоты и формы колебаний системы, состоящей из трех дисков с моментами инерции  $J_1=0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $J_2=0,3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , укрепленных на стальном валу с жесткостями  $c_1 = 0,1 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $c_2 = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (рис. 17.6)

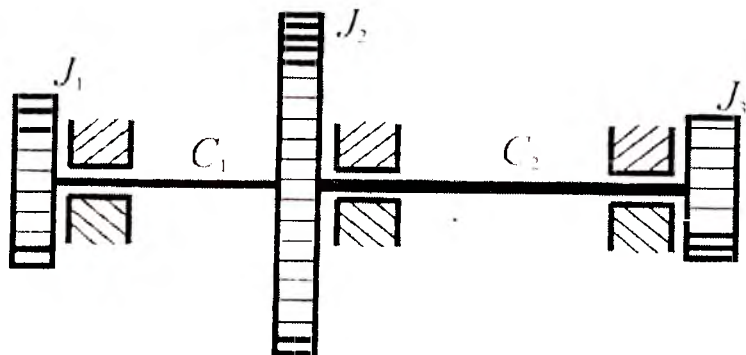


Рис.17.6.

*Решение*

Уравнения движения системы

$$\begin{aligned} -J_1\varphi_1 - m + c_1(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ -J_2\varphi_2 - c_1(\varphi_2 - \varphi_1) + c_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= 0, \end{aligned}$$



$$-J_3\varphi_3 - c_1(\varphi_3 - \varphi_2) = 0.$$

Решение ищем в виде

$$\varphi_1 = A_1 \cos \omega t.$$

После подстановки получаем

$$(J_1\omega^2 - c_1) A_1 + c_1 A_2 = 0,$$

$$c_1 A_1 + (J_2\omega^2 - c_1 - c_2) A_2 + c_2 A_3 = 0,$$

$$c_2 A_2 + (J_3\omega^2 - c_2) A_3 = 0.$$

Приравняв определитель системы нулю, получаем уравнение частот

$$\omega^6 - \left( \frac{c_1 + c_2}{J_2} + \frac{c_1}{J_1} + \frac{c_2}{J_3} \right) \omega^4 + c_1 c_2 \frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1 J_2 J_3} \omega^2 = 0.$$

Одна из частот равна нулю. Ненулевые частоты получаем из уравнения

$$\omega^4 - 3500\omega^2 + 2 \cdot 10^6 = 0,$$

$$\omega_1 = 26,8 \frac{1}{c}, \quad \omega_2 = 52,74 \frac{1}{c}.$$

Отношения амплитуды

$$A_1 : A_2 : A_3 = \frac{c_1}{c_1 - J_1\omega^2} : 1 : \frac{c_2}{c_2 - J_3\omega^2}.$$

Для первой частоты

$$A_1 : A_2 : A_3 = (-2,853) : 1 : 1,561.$$

Для второй частоты

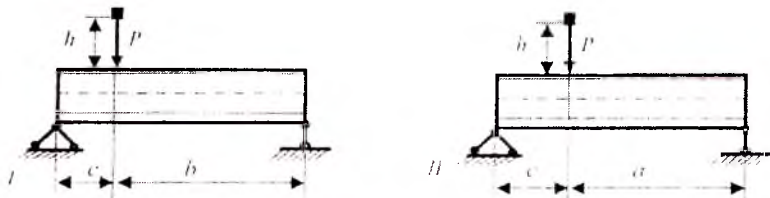
$$A_1 : A_2 : A_3 = 0.219 : 1 : (-2,561).$$

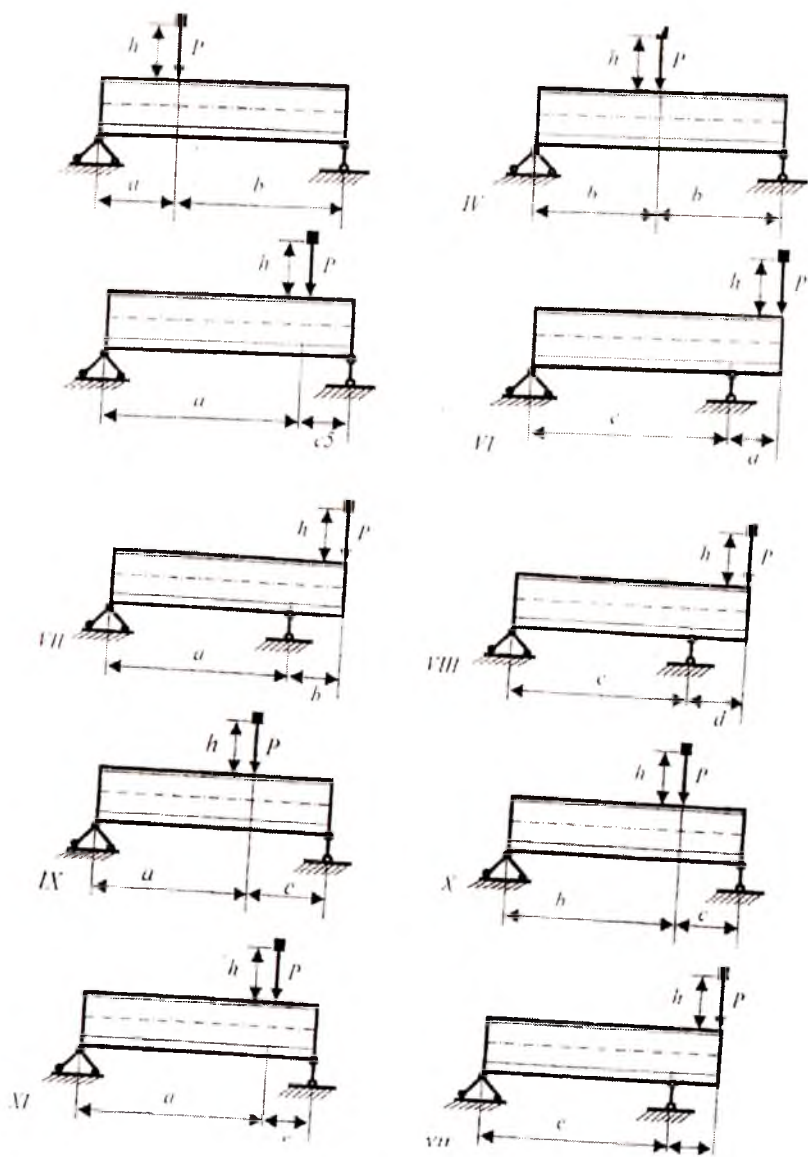
## Глава 18. Теория удара

Задача 18.1. На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах, с высоты  $h$  падает груз  $P$ . Требуется: 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке; 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т. е. осадка от груза весом 1 кН) равна  $\alpha$ ; 3) сравнить полученные результаты. Данные взять из табл. 18.1.

*Указание.* При наличии упомянутой в п. 2 пружины  $\Delta_{ст} = \Delta f + \beta \Delta_{ст}$ , где  $\Delta f$  — прогиб балки, лежащей на жестких опорах, в том сечении, где приложена сила  $P$  (при статическом действии от силы  $P$ ;  $\beta$  — коэффициент, устанавливающий зависимость между осадкой пружины и перемещением точки приложения силы  $P$ . Вызванным поворотом всей балки вокруг центра шарнира левой опоры как жесткого целого (коэффициент  $\beta$  находят из подобия треугольников).

Рисунки задачи 18.1.





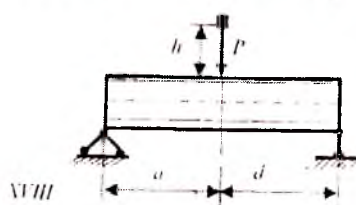
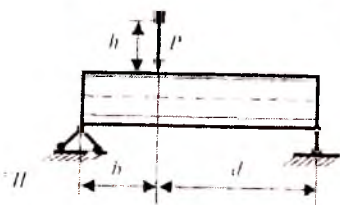
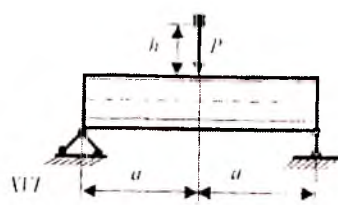
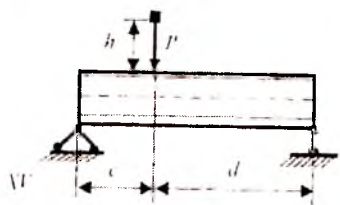
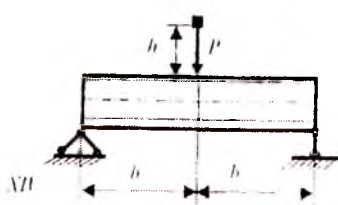
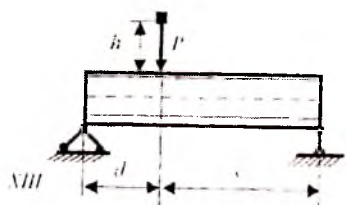


Таблица 18.1.

№	Схема	Дву- тавр	P	h	$10^3\alpha$	a	b	c	d
				см					
1	I	20	500	5	21	1.1	1.1	0.6	1.6
2	II	20a	600	6	22	1.2	1.2	0.7	1.7
3	III	24	700	7	23	1.3	1.3	0.8	1.8
4	IV	24a	800	8	24	1.4	1.4	0.9	1.9
5	V	27	900	9	25	1.5	1.5	1.0	2.0
6	VI	27a	1000	10	26	1.6	1.1	0.6	1.1
7	VII	30	1100	11	27	1.7	1.2	0.7	1.2
8	VIII	30a	1200	12	28	1.8	1.3	0.8	1.3
9	IX	33	1300	13	29	1.9	1.4	0.9	1.4
10	X	36	1400	14	30	2.0	1.5	1.0	1.5

11	XI	20	500	5	21	1.1	1.1	0.6	1.6
12	XII	20a	600	6	22	1.2	1.2	0.7	1.7
13	XIII	24	700	7	23	1.3	1.3	0.8	1.8
14	XIV	24a	800	8	24	1.4	1.4	0.9	1.9
15	XV	27	900	9	25	1.5	1.5	1.0	2.0
16	XVI	27a	1000	10	26	1.6	1.1	0.6	1.1
17	XVII	30	1100	11	27	1.7	1.2	0.7	1.2
18	XVIII	30a	1200	12	28	1.8	1.3	0.8	1.3
19	XIX	33	1300	13	29	1.9	1.4	0.9	1.4
20	XX	36	1400	14	30	2.0	1.5	1.0	1.5
21	XXI	20	500	5	21	1.1	1.1	0.6	1.6
22	XXII	20a	600	6	22	1.2	1.2	0.7	1.7
23	XXIII	24	700	7	23	1.3	1.3	0.8	1.8
24	XXIV	24a	800	8	24	1.4	1.4	0.9	1.9
25	XXV	27	900	9	25	1.5	1.5	1.0	2.0
26	XXVI	27a	1000	10	26	1.6	1.1	0.6	1.1
27	XXVII	30	1100	11	27	1.7	1.2	0.7	1.2
28	XXVIII	30a	1200	12	28	1.8	1.3	0.8	1.3
29	XXIX	33	1300	13	29	1.9	1.4	0.9	1.4
30	XXX	36	1400	14	30	2.0	1.5	1.0	1.5

*Указания к решению задачи 18.1.*

А. Явление удара возникает при резком изменении скоростей движения соприкасающихся тел, систем или их частей. Имеются в виду только простейшие случаи соударения движущегося тела (ударяющее телом) при следующих допущениях:

- 1) ударяющее тело абсолютно жесткое;
- 2) ударяемое тело имеет одну степень свободы, и его обобщенные перемещения пропорциональны соответствующим обобщенным силам при статическом и динамическом действиях;
- 3) удар неупругий, в процесс которого не происходит отделения ударяющего тела от ударяемого, но общие деформации последнего упругие;
- 4) вид деформации ударяемого тела такой же, как и при статическом нагружении соответствующей обоб-

шенной силой, приложенной вместе соударения в направлении удара;

5) скорость ударяющего тела мала, по сравнению со скоростью распространения ударных волн, а время соударения значительно больше времени распространения этих волн по всему объему ударяемого тела.

При указанных допущениях обобщенные динамические усилия  $P_d$  напряжения  $p_d$  и перемещения  $\delta_d$  в ударяемом теле приближенно могут быть найдены по формулам

$$P_d = k_d P, \quad p_d = k_d p, \quad \delta_d = k_d \delta. \quad (1)$$

Здесь  $P$ ,  $p$  и  $\delta$  взять при статическом действии на ударяемое тело обобщенной силы, приложенной вместе соударения в направлении удара, а  $k_d$  — безразмерный динамический коэффициент, большей единицы.

Если ударяющее тело весом  $Q$  при встрече со скоростью  $v_0$  и вызывает в элементах последнего поступательные перемещения, то динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g\delta} \frac{1}{1 + \frac{k_m Q_0}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{Q\delta} \frac{1}{1 + \frac{k_m Q_0}{Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U} \frac{1}{1 + \frac{k_m Q_0}{Q}}}. \quad (2)$$

Где  $\delta = \frac{Q}{C}$  — линейное перемещение точки соударения при статическом действии груза  $Q$  в направлении удара;  $C$  — жесткость ударяемого тела при данном виде

его деформации;  $k_b$  — коэффициент приведения массы ударяемого тела в точку соударения (определяется так же, как и колебаниях);  $T = \frac{Qv_0^2}{2g}$  — потенциальная энергия

движения груза  $Q$  к моменту соударения;  $U = \frac{Q\delta}{2}$  — потенциальная энергия упругой деформации ударяемого тела при статическом действии  $Q$ .

Из формулы (2) видно, что чем больше жесткость  $C$  ударяемого тела, тем больше динамический коэффициент  $k_d$  при внезапном приложении груза  $Q$ , когда  $v_0 = 0$ ,

$$K = 2. \quad (3)$$

При ударе без учета массы ударяемого тела когда  $Q_0 \leq Q$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{v_0^2}{g\delta} \right]} = 1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{v_0^2 C}{Qg} \right]} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U}}. \quad (4)$$

Если не учитывать массу ударяемого тела, то увеличивается динамический коэффициент, что дает увеличение запаса прочности.

Если

$$\frac{v_0^2}{g\delta} = \frac{v_0^2 C}{Qg} = \frac{T}{U} \geq 10,$$

То с погрешностью до 5 % динамический коэффициент можно подсчитывать по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}} = 1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{Qg}} = 1 + \sqrt{\frac{T}{U}}. \quad (5)$$

если же  $\frac{v_0^2}{g\delta} \geq 110$ , то с погрешностью до 10% можно принять

$$k_d = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg}} = \sqrt{\frac{T}{U}}. \quad (6)$$

следует иметь в виду, что пользование формулами (5) и (6) не дает увеличения запаса прочности.

В том случае, когда собственный вес ударяемого тела очень велик ( $Q_0 \rightarrow \infty$ ),  $k_d \rightarrow 2/$

При горизонтальном ударе выражение (2) должно быть заменено формулой

$$k_o = \sqrt{\frac{v_0^2}{g\delta} \frac{1}{1 + \frac{k_m Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{v_0^2 C}{Qg} \frac{1}{1 + \frac{k_m Q_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{T}{U} \frac{1}{1 + \frac{k_m Q_0}{Q}}} \quad (7)$$

В этом случае, пренебрегая массой ударяемого тела, получаем увеличение запаса прочности, хотя  $k_d$  будет определяться по формуле (1).

Если собственный вес ударяемого тела мал, а на нем расположен тяжелый груз  $Q_1$ , по которому производится удар грузом  $Q$ , то в формулах (2) или (7) значение  $k_m Q_0$  надо заменить значением  $Q_1$ .

При расчете ударяемых систем с параллельным, последовательным или смешенным соединением элементов жесткость системы  $C$  можно определять соответственно по формулам соответственно:



$$c = \sum c_1; \quad c = \frac{1}{\sum c_1}; \quad c = \frac{1}{\frac{1}{\sum c_1} + \frac{1}{c_i}}$$

Если ударающее тело совершает вращательное движение и создает в ударяемом теле деформации, определяющиеся угловыми перемещениями, то можно пользоваться формулами, приведенными выше, но в них следует заменить линейную скорость  $v_0$  на угловую  $\omega_0$ , а массы  $\frac{Q}{g}$  и  $\frac{Q_0}{g}$  - на моменты инерции  $I_m$  и  $I_{m0}$  относительно осей их вращения.

Расчет на прочность при ударе производят по формулам, которые установлены для статического нагружения. Условие прочности можно записать в следующем виде:

$$\max p_d = k_d p_{\max} \leq [p_d], \quad (8)$$

где  $\max p_d$  - наибольшее динамическое обобщенное расчетное напряжение;  $p_{\max}$  - наибольшее обобщенное напряжение при статическом действии груза  $Q$ , а  $[p_d]$  - соответствующее обобщенное динамическое допускаемое напряжение.

В практических расчетах следует учитывать, что при ударном нагружении тело приобретает склонность к хрупкому разрушению, в сильной степени зависящую от состава и структуры материала тела, скорости нагружения, температуры и концентрации напряжений.

Б. Поперечный удар. Дано:  $h=5$  см,  $l=m$ ,  $I=2000$  см<sup>4</sup>,  $W=200$  см<sup>3</sup>,  $Q_0=20$  Н,  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma_d]=120$  МПа (рис.18.1). Определить  $Q$  с учетом и без учета массы балки.

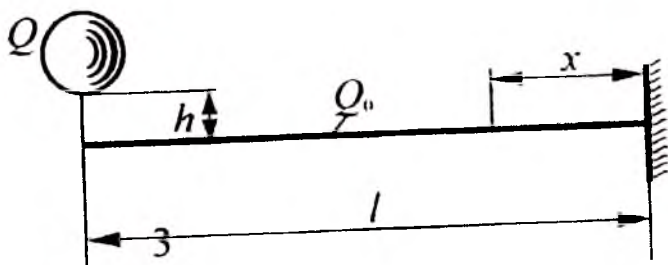


Рис. 18.1.

*Решение*

При статическом действии груза  $Q$  прогиб свободного конца  $\delta = \frac{Ql^3}{3EJ}$ ; прогиб произвольного сечения балки, находящегося на расстоянии  $x$  от заделки, по формуле метода начальных параметров,

$$\delta = \frac{1}{EI} \left( \frac{Qlx^2}{2} - \frac{Qx^3}{6} \right) = \frac{Ql}{3EJ} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right).$$

Поэтому коэффициент приведения массы балки в точку соударения

$$k_m = \frac{1}{l} \int_0^l \left( \frac{\delta_x}{\delta} \right)^2 dx = \frac{1}{l} \left( \frac{3}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right) dx = \frac{33}{140}.$$

Динамический коэффициент по формуле (2)

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot 3EJ}{Ql^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33 Q_0}{140 Q}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,05 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-5}}{Q \cdot 1}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 10^5}{Q + 60}}$$

С другой стороны, так как при статическом действии груза  $Q$  наибольшее нормальное напряжение балки

$$\sigma_{\max} = \frac{Ql}{W} = Q \cdot 1(200 \cdot 10^{-6}) = \frac{Q}{2} \cdot 10^4 \text{ Па,}$$

То по формуле (8) найдем динамический коэффициент

$$k_d = \frac{[\sigma]}{\sigma_{\max}} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 2}{Q \cdot 10^4} = \frac{24 \cdot 10^3}{Q}$$

Следовательно,

$$\frac{24 \cdot 10^3}{Q} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12 \cdot 10^5}{Q + 60}},$$

Откуда

$$Q \approx \frac{3 \pm 3,7}{13} \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Задаче удовлетворяет только один корень

$$Q = \frac{6,7 \cdot 10^3}{13} \approx 520 \text{ Н}.$$

Без учета массы

$$\frac{24 \cdot 10^3}{Q} = \sqrt{\frac{2h \cdot 3EJ}{Ql^3}}.$$

Поэтому

$$Q = \frac{24^2 \cdot 10^6 \cdot l^3}{2h \cdot 3EJ} = \frac{24^2 \cdot 10^6 \cdot 1}{2 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^5} \approx 480 \text{ Н}.$$

Таким образом, если не учесть массу балки, то безопасный вес падающего груза снижается на

$$\frac{520 - 480}{520} \cdot 100 \approx 8\%.$$

## Глава 19. Циклические напряжения. Расчет вала на выносливость

Задача 19.1. В опасном сечении вала с диаметром  $d$  действует крутящий момент  $M_k$  и изгибающий момент  $M_{из}$ . Вал сделан из углеродистой стали (предел прочности которой равен  $\sigma_{п}$ , а предел текучести  $\sigma_{т}$ ) и не имеет резких переходов, выточек, канавок; поверхность его чисто обработана резцом.

Определить коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимся по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения — по пульсирующему циклу (от нуля до максимального значения).

Коэффициенты концентрации напряжений и мас-

масштабные коэффициенты можно считать соответственно одинаковыми для нормальных и для касательных напряжений. Данные взять из табл. 19.1.

Порядок выполнения решения: 1) найти максимальные нормальные напряжения и максимальные касательные напряжения; 2) по эмпирическим формулам найти предел текучести при кручении и пределы выносливости при кручении и изгибе; 3) найти действительный коэффициент концентрации напряжений

по формуле  $K=1,2+0,2 \frac{\sigma_B - 40}{110}$ ;

Таблица 19.1.

№	D мм	M <sub>к</sub>	M <sub>и</sub>	σ <sub>п</sub>	σ <sub>т</sub>	№	D мм	M <sub>к</sub>	M <sub>и</sub>	σ <sub>п</sub>	σ <sub>т</sub>
		Нм		МПа				Нм		МПа	
1	25	200	200	510	240	16	40	350	200	510	240
2	26	210	210	520	24	17	41	340	210	520	24
3	27	220	220	530	250	18	42	330	220	530	250
4	28	230	230	540	250	19	43	320	230	540	250
5	29	240	240	550	260	20	44	310	240	550	260
6	30	250	250	560	260	21	45	300	250	560	260
7	31	260	260	570	270	22	25	200	260	570	270
8	32	270	270	580	270	23	26	210	270	580	270
9	33	280	280	590	280	24	27	220	280	590	280
10	34	290	290	600	280	25	28	230	290	600	280
11	35	300	300	510	240	26	29	240	300	510	240
12	36	310	310	520	24	27	30	250	310	520	24
13	37	320	320	530	250	28	31	260	320	530	250
14	38	330	330	340	250	29	32	270	330	340	250
15	39	340	340	350	260	30	33	280	340	350	260

4) найти масштабный коэффициент по формуле  $\beta_M = 1,2 + 0,1(d - 3)$ , где  $d$  — в сантиметрах, 5) найти коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям, 6) найти общие коэффициенты запаса прочности по усталостному разрушению и теку-

чести.

Задача 19.2 В опасном сечении круглого ступенчатого вала (рис.19.1) с диаметрами  $D$  и  $d$  и переходом по круговой галтели с радиусом  $r$ , действуют изгибающий момент  $M_H$  и крутящий момент.

Таблица 19.2.

№	D, мм	R — Ра-диус галтели, мм	$M_H$	$M_K$	$\sigma_b$	$\sigma_T$	Способ обработки поверхности вала
			кгм		$10^7 \frac{H}{m^2}$		
1	40	2.0	160	250	32	18	Полирование
2	42	2.0	170	300	35	20	Полирование
3	46	2.0	180	340	40	22	Тонкая шлифовка
4	50	2.5	190	380	43	24	Тонкая шлифовка
5	55	2.5	200	420	48	26	Тонкая обточка
6	58	2.5	210	460	52	28	Тонкая обточка
7	62	3.0	220	500	60	30	Грубая обточка
8	64	3.0	230	580	65	32	Грубая обточка
9	68	3.0	240	640	68	34	Полирование
10	70	4.0	250	700	70	36	Полирование
11	40	4.0	260	250	72	38	Тонкая шлифовка
12	42	4.0	270	300	32	40	Тонкая шлифовка
13	46	5.0	280	340	35	18	Тонкая обточка
14	50	5.0	290	380	40	20	Тонкая обточка
15	55	5.0	300	420	43	22	Грубая обточка
16	58	2.0	160	460	48	24	Грубая обточка
17	62	2.0	170	500	52	26	Полирование
18	64	2.0	180	580	60	28	Полирование
19	68	2.5	190	640	65	30	Тонкая шлифовка
20	70	2.5	200	700	68	32	Тонкая шлифовка
21	40	2.5	210	250	70	34	Тонкая обточка
22	42	3.0	220	300	72	36	Тонкая обточка
23	46	3.0	230	340	32	38	Грубая обточка
24	50	3.0	240	380	35	40	Грубая обточка
25	55	4.0	250	420	40	30	Полирование
26	58	4.0	260	460	43	32	Полирование

27	62	4.0	270	500	48	34	Тонкая шлифовка
28	64	5.0	280	580	52	36	Тонкая шлифовка
29	68	5.0	290	640	60	38	Тонкая обточка
30	70	5.0	300	700	65	40	Тонкая обточка

$M_k$  вал изготовлен из углеродистой стали с пределом прочности  $\sigma_b$  и пределом текучести  $\sigma_s$ ... Способ обработки поверхности вала указан в таблице. Необходимо определить полный коэффициент запаса прочности в опасном сечении, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения — по пульсирующему циклу от нуля до максимальной величины. Данные взять из табл. 19.2.

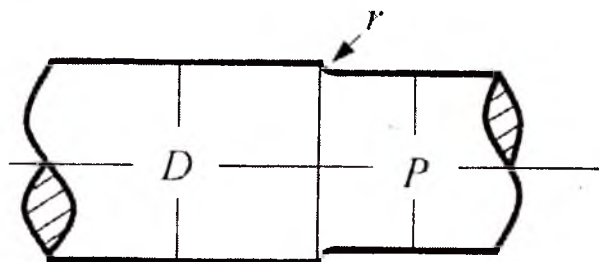


Рис. 19.1.

Указания к решению задач 19.1-19.2.

А. При действии нагрузок, изменяющихся по величине или по направлению, в элементах конструкций возникают переменные напряжения. Переменные напряжения испытывают валы и оси машин, кривошипно-шатунные механизмы, пружины и пр. Нагрузки, вызывающие переменные напряжения, называются циклическими или повторно-переменными нагрузками. Совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения носит название цикла напряжений. Число циклов в единицу времени определяет частота изменения напряжения.

Продолжительность цикла во времени характеризует период цикла  $T$ .

Разрушение материала от воздействия переменных напряжений происходит при напряжениях значительно меньших предельных значений. Характер разрушения материала в этом случае существенно отличается от характера разрушения при статических нагрузках. Процесс разрушения начинается с образования микротрещин, которые постепенно распространяются вглубь материала, уменьшая площадь поперечного сечения детали.

Трещины возникают в материале обычно в опасных сечениях и в очагах концентрации местных напряжений (галтели, выточки, надрезы и т.п.). Прогрессирующее развитие трещин и увеличивающееся ослабление сечения внезапно приводит к разрушению материала. На поверхности излома отчетливо видны две зоны. Зона постепенного разрушения от развития трещин с гладкой притертой поверхностью, и зона внезапного разрушения с зернистой структурой хрупкого излома.

Явление разрушения материала при переменных напряжениях называется усталостью. Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений, не разрушаясь, называют **выносливостью или усталостной прочностью**. Наибольшее переменное напряжение, при котором материал выдерживает без разрушения неограниченно большое число циклов нагружения, называются пределом выносливости. При изучении переменных напряжений предполагается изменение их во времени по синусоидальному закону.

Основными параметрами цикла переменных нормальных напряжений (рис. 19.2, а) являются:

1. Максимальное  $\sigma_{\max}$  и минимальное  $\sigma_{\min}$  по алгебраической величине напряжения цикла.

2. Коэффициент асимметрии цикла  $r = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$ .



$$3. \text{ Среднее напряжение } \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}.$$

$$4. \text{ Амплитуда цикла } \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Из приведенных выражений видно, что

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a \text{ и } \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a.$$

В зависимости от характера нагрузки циклы напряжений могут быть различного вида. Если экстремальные напряжения неодинаковы по величине, цикл называется асимметричным циклом (рис. 19.2, а). При этом

$$\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min}; \sigma_m > 0; \sigma_a \neq 0 \text{ и } r < 0.$$

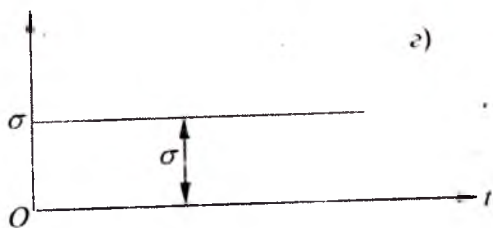
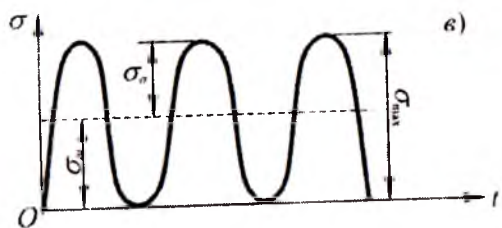
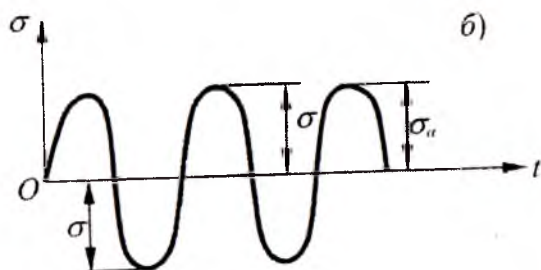
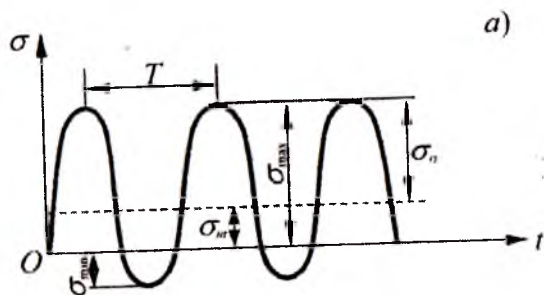
Различают знакопеременный и знакопостоянный асимметричные циклы. При одинаковых, но обратных по знаку экстремальных напряжениях имеет место симметричный цикл (рис. 19.2, б), у которого

$$\sigma_{\max} = \sigma; \sigma_{\min} = -\sigma; \sigma_m = 0; \sigma_a = \sigma \text{ и } r = -1.$$

Частным случаем асимметричного цикла является пульсирующий цикл, показанный на рис. 19.2, в. Для него постоянное статическое напряжение (рис. 19.2, г) представляет предельный случай асимметричного цикла с параметрами

$$\sigma_{\max} = \sigma; \sigma_{\min} = 0; \sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma}{2} \text{ и } r = 1.$$

Циклы, имеющие одинаковые коэффициенты асимметрии, называются **подобными циклами**. Наиболее опасным циклом является симметричный цикл, так как для него предел выносливости имеет наименьшее значение. При действии переменных касательных напряжений используются аналогичные термины и соотноше-



Предел выносливости устанавливается на основании испытаний материала на выносливость. Серия одинаковых образцов подвергается действию переменных нагрузок, последовательно снижаемых при испытании каждого образца.

В процессе испытаний определяется число циклов  $L$ , при котором разрушается каждый образец. По результатам испытаний в координатах  $\sigma$  и  $N$  строится кривая, называемая **кривой выносливости** (рис. 19.3). Наибольшее напряжение при испытании

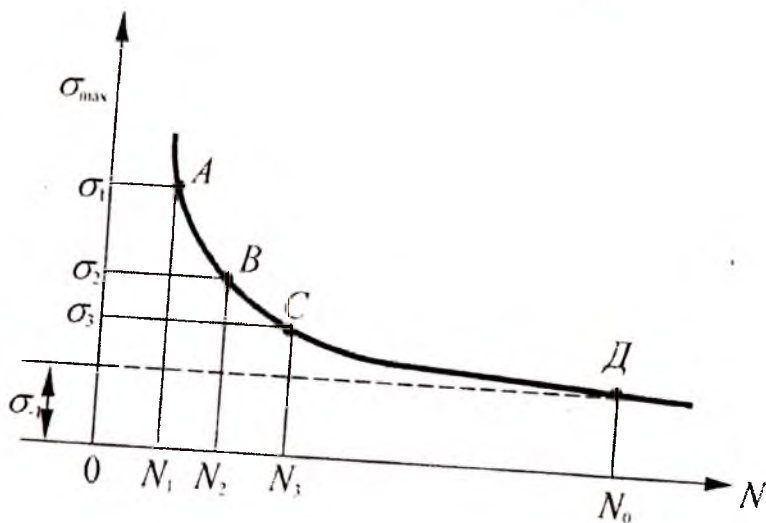


Рис. 19.3.

для стальных образцов составляет  $\sigma = 0,6\sigma_b$ . Число циклов ограничивается предельной величиной  $N_0$ , называемой базовым числом циклов. Для стали и чугуна  $N_0 = 10^7$  циклов. За предел выносливости материала принимается наибольшее напряжение, при котором образец выдерживает, не разрушаясь, базовое число циклов.

Долговечность материала определяет число циклов, выдерживаемых образцом до разрушения, при напряжениях, превышающих предел выносливости. Между пределами выносливости стали при изгибе  $\sigma_{-1}$ , кручении  $\tau_{-1}$ , и растяжении-сжатии  $\sigma_{-1P}$  в случае симметричных циклов существуют установленные опытами приближенные соотношения:

$$\sigma_{-1P} = 0.7\sigma_{-1}, \quad \text{и} \quad \tau_{-1} = 0.58\sigma_{-1}.$$

Для определения пределов выносливости сталей при симметричных циклах по пределу прочности  $\sigma_b$  используются следующие эмпирические зависимости

$$\sigma_{-1P} = 0,4\sigma_b; \quad \sigma_{-1P} = 0.28\sigma_b \quad \text{и} \quad \tau_{-1} = 0.22\sigma_b.$$

Усталостную прочность материала при различных циклах-напряжений характеризует диаграмма выносливости.

На выносливость элементов конструкций, находящихся в реальных условиях эксплуатации, оказывают влияние свойства материалов, вид деформации (растяжение-сжатие, изгиб и кручение), асимметрия цикла, местные напряжения, абсолютные размеры детали, чистота обработки поверхности и др. Основные факторы, влияющие на предел выносливости, учитываются специальными коэффициентами.

Влияние размеров детали учитывает масштабный коэффициент  $\epsilon_\sigma$ , представляющий отношение предела выносливости  $\sigma_{-1d_0}$  стандартного образца диаметром  $d_0 = 7\div 10$  мм к пределу выносливости  $\sigma_{-1d}$  детали заданных размеров диаметром  $d$  при симметричном цикле напряжений, т.е.

$$\epsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1d_0}}{\sigma_{-1d}}.$$

Опыты показывают, что с увеличением размеров детали, предел выносливости понижается. Величина масштабного коэффициента определяется по кривым графика (рис. 19.4) в зависимости от диаметра и материала детали или приближенно по формуле при отсутствии концентрации напряжений

$$\epsilon_{\sigma} = 1,2 + 0,1 (d - 3),$$

где:  $d$  — диаметр в см.

Масштабные коэффициенты принимают одинаковыми для нормальных и касательных напряжений, предполагая  $\epsilon_{\sigma} \approx \epsilon_{\tau}$ . Влияние концентрации напряжений, вызванной наличием на детали галтелей, выточек, резких переходов и т.д., учитывает эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_{\sigma}$ . Указанный коэффициент представляет отношение предела выносливости гладкого стандартного образца  $\sigma_{-1}$ , при симметричном цикле напряжений к пределу выносливости образца с концентратором напряжений  $\sigma_{-1K}$ . Применительно к нормальным напряжениям

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}$$

Эффективный коэффициент концентрации  $k_a$  понижен по сравнению с теоретическим коэффициентом концентрации напряжений  $K$ .

Зависимость между ними определяется выражением

$$K_{\sigma} = 1 + q(K-1),$$

где:  $q$  — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжения.

Величины теоретических коэффициентов концентрации напряжений  $K$  для круглых образцов с учетом вида деформации и концентратора приведены в таблице 19.3. Значения коэффициента чувствительности  $q$  в зависимости от теоретического коэффициента концентрации напряжений  $K$  и предела прочности материала  $\sigma_b$  устанавливаются приближенно по графику (рис. 19.5).

Аналогично определяется эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_\tau$  при кручении, с заменой в приведенных выражениях обозначения  $\sigma$  на  $\tau$ .

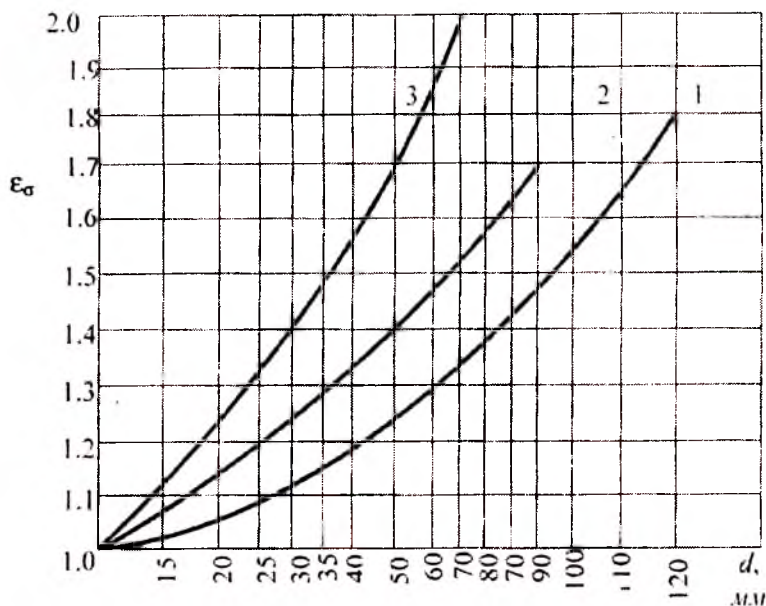


Рис. 19.4.

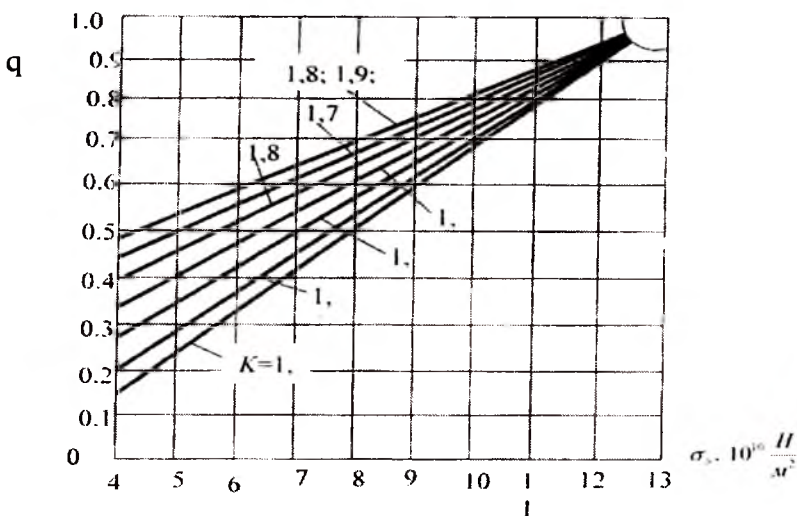


Рис. 19.5.

При практических расчетах для приближенного определения эффективного коэффициента концентрации сталей с пределом прочности

$$\sigma_b = 4 \cdot 10^{10} - 13 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}.$$

Используется эмпирические формулы:

Таблица 19.3.

Виды деформации и концентраторы				К
Изгиб и растяжение				
1. Полукруглая выточка на валу.				
Отношение радиуса выточки к диаметру вала — r/d				
0.1	-	“	-	2.0
0.5	-	“	-	1.6
1.0	-	“	-	1.2

2.0	-	"	-	1.1
2. Галтель				
Отношение радиуса галтели к диаметру вала — r/d				
0.0625	-	"	"	1.75
-	-	"	"	1.50
0.125	-	"	"	1.20
-	-	"	"	1.10
0.25	-	"	"	2.00
-	-	"	"	1.80
0.50	-	"	"	1.20
-	-	"	"	1.10
3. Переход под прямым углом				
Крученке				
1. Галтель				
Отношение радиуса галтели к диаметру вала — r/d				
0.02	-	"	-	
0.10	-	"	-	
0.20	-	"	-	
2. Шпоночные канавки				

а) для деталей с чисто обработанной поверхностью при отсутствии выточек, резких переходов и шпоночных канавок

$$K_{\sigma} = 1,2 + 0,2 \frac{\sigma_b \cdot 4 \cdot 10^8}{11 \cdot 10^8};$$

б) при наличии на деталях выточек, резких переходов и надрезов

$$K_{\sigma} = 1,5 + 1,5 \frac{\sigma_b \cdot 4 \cdot 10^8}{11 \cdot 10^8}.$$



Эффективные коэффициенты концентрации напряжений, вычисленные по этим формулам, принимаются одинаковыми для изгиба для кручения. Влияние состояния поверхности детали учитывает коэффициент качества поверхности  $\beta_{\Pi}$ , представляющий отношение предела выносливости  $\sigma_{-1\Pi}$  при симметричном цикле напряжений полированного образца к пределу выносливости  $\sigma_{-1\Pi}$  образца с заданной обработкой поверхности:

$$\beta_{\Pi} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\Pi}}.$$

Этот коэффициент одинаков для всех видов деформаций. В зависимости от способа обработки коэффициенты качества поверхности имеют следующие величины:  $\beta_{\Pi}$

полирование	1.0
тонкая шлифовка	1.07 ÷ 1.20
тонкая обточка	1.10 ÷ 1,28
грубая обточка	1,19 ÷ 1,66
наличие окалины	1,38 ÷ 3,00.

Минимальные величины  $\beta_{\Pi}$  относятся к сталям с пределом прочности  $\sigma_b = 4 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}$ , а максимальные —

к стали с  $\sigma_b = 4 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}$ . Для промежуточных значений

пределов прочности коэффициенты  $\beta_{\Pi}$  определяются путем линейной интерполяции. При определении эффективного коэффициента концентрации по эмпирическим формулам коэффициент качества поверхности обычно не учитывается.

На основании изложенного определяются коэффициенты снижения предела выносливости при симметричных циклах для нормальных и касательных напряжений

$$\beta_{\sigma} = k_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \beta_{\Pi} \quad \text{и} \quad \beta_{\tau} = k_{\tau} \varepsilon_{\tau} \beta_{\Pi}.$$

Действительный предел выносливости рассматриваемой детали для нормальных напряжений

$$\sigma_{-1/l} = \frac{\sigma_{-1}}{\beta_{\tau}} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau} \varepsilon_{\tau} \beta_{\Pi}}.$$

Аналогично вычисляется предел выносливости в случае касательных напряжений

$$\tau_{-1/l} = \frac{\tau_{-1}}{\beta_{\tau}} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau} \varepsilon_{\tau} \beta_{\Pi}}$$

Пределы выносливости при асимметричных циклах нормальных и касательных напряжений находят, используя следующие зависимости

$$\sigma_{r/l} = \frac{\sigma_{-1} \cdot \sigma_{MAX}}{K_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \beta_{\Pi} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m},$$

$$\tau_{r/l} = \frac{\tau_{-1} \cdot \tau_{MAX}}{K_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \beta_{\Pi} \tau_a + \psi_{\sigma} \tau_m}$$

Где:  $\psi_{\sigma}$  и  $\psi_{\tau}$  - коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла.

Значения этих коэффициентов в зависимости от предела прочности материала  $\sigma_b$ , приводятся в таблице 19.4.

Таблица 19.4.

Коэффициенты чувствительности материала	Пределы прочности $\sigma_b$ в $10^9 \frac{H}{M^2}$				
	35÷55	52÷75	70÷100	100÷120	120÷140
$\psi_\sigma$ - при растяжении и изгибе	0	0,05	0,10	0,20	0,25
$\psi_\tau$ - при кручении	0	0	0,05	0,10	0,15

Сущность расчета элемента на выносливость заключается в определении фактического коэффициента запаса прочности при заданных его размерах, предварительно установленных при статическом расчете на прочность.

Коэффициент запаса прочности при симметричном цикле нормальных напряжений представляет отношение действительного предела выносливости детали к максимальному напряжению цикла

$$\eta_\sigma = \frac{\sigma_{-1/L}}{\sigma_{MAX}}$$

Аналогично определяется коэффициент запаса прочности при кручении

$$\eta_\tau = \frac{\tau_{-1/L}}{\tau_{MAX}}$$

При асимметричных циклах и касательных напряжений коэффициентов запаса прочности соответственно равны

$$\eta_{\sigma} = \frac{\sigma_{zII}}{\sigma_{MAX}} \text{ и } \eta_{\tau} = \frac{\tau_{zII}}{\tau_{MAX}}.$$

В случае сложного напряженного состояния полный коэффициент запаса прочности вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{\eta_{\sigma}\eta_{\tau}}{\sqrt{\eta_{\sigma}^2 + \eta_{\tau}^2}}.$$

Дополнительно находятся коэффициенты запаса прочности по сопротивлению материала пластическим деформациям, т.е. по отношению к пределам текучести. Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям при этом определяются формулами:

$$\eta'_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{MAX}} \text{ и } \eta'_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{MAX}}.$$

После определения полного коэффициента запаса прочности по сопротивлению усталости для сравнения вычисляется полный коэффициент запаса прочности по сопротивлению пластическим деформациям. При расчете вала на изгиб с кручением прочность оценивает полный коэффициент запаса прочности, вычисленный по наименьшим значениям  $\eta_{\sigma}$  и  $\eta_{\tau}$ .

Ниже приводится проверочный расчет приводного вала, испытывающего изгиб с кручением на выносливости, и определение полных коэффициентов запаса прочности.

Б. В опасном сечении круглого ступенчатого вала (рис. 19.1) с диаметрами  $D$  и  $d$  и переходом по круговой галтели с радиусом  $r$ , действуют изгибающий момент  $M_{из}$  и крутящий момент  $M_{к}$ . Вал изготовлен из углеро-

дистой стали с пределом прочности  $\sigma_b$  и пределом текучести  $\sigma_{\tau}$ . Способ обработки поверхности вала указан в таблице. Необходимо определить полный коэффициент запаса прочности в опасном сечении, приняв нормальные напряжения изгиба изменяющимися по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения — по пульсирующему циклу от нуля до максимальной величины.

Дано:

$$D = 46 \text{ мм}; M_{И} = 200 \text{ Нм}; \sigma_b = 48 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$r = 3 \text{ мм}; M_{К} = 340 \text{ Нм}; \sigma_b = 24 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Способ обработки поверхности вала — тонкая обработка. Наименьший диаметр вала в опасном сечении

$$d = D - 2r = 46 - 6 = 40 \text{ мм}.$$

*Решение*

1. Определяем максимальные нормальные напряжения изгиба

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{M_{И}}{W} = \frac{32M_{И}}{\pi d^3} = 318 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

2. Вычисляем максимальные касательные напряжения кручения

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_{К}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{К}}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 34000}{3,14 \cdot 4^3} = 27 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

3. Устанавливаем основные характеристики циклов напряжений. Нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу от  $\sigma_{MAX} = 318 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}$  до  $\sigma_{MIN} = 318 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}$ . Коэффициент асимметрии, среднее напряжение и амплитуда цикла соответственно равны:

$$r = \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}} = \frac{-318 \cdot 10^5}{318 \cdot 10^5} = -1.$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{MAX} + \sigma_{MIN}}{2} = \frac{318 \cdot 10^5 + (-318 \cdot 10^5)}{2} = 0,$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2} = \frac{318 \cdot 10^5 - (-318 \cdot 10^5)}{2} = 318 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}.$$

Касательные напряжения изменяются по пульсирующему циклу  $\tau_{MIN}$  0 до  $\tau_{MAX} = 27 \cdot 10^6 \frac{H}{M^2}$ . Аналогично получаем:

$$r = \frac{\tau_{MIN}}{\tau_{MAX}} = 0 \text{ и } \tau_s = \tau_a \frac{\tau_{MAX}}{2} = \frac{270 \cdot 10^5}{2} = 135 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}.$$

4. Используя эмпирические зависимости, вычисляем предел текучести при кручении и пределы выносливости образца для симметричных циклов изгиба и кручения:

$$\tau_T = 0,58\sigma_T = 0,58 \cdot 26 \cdot 10^7 = 15,08 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2};$$

$$\sigma_{-1} = 0,40\sigma_b = 0,40 \cdot 48 \cdot 10^7 = 19,20 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2};$$

$$\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1} = 0,58 \cdot 19,20 \cdot 10^7 = 11,14 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}.$$

5. Определяем действительный предел выносливости вала при симметричном цикле изгиба по формуле:

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \varepsilon_\sigma \beta_\Pi}.$$

Предварительно находим коэффициенты снижения предела выносливости. Эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_\sigma$  вычисляется по формуле:

$$K_\sigma = 1 + q(K - 1).$$

Значения теоретического коэффициента концентрации напряжений при изгибе приводятся в таблице 19.3. Определим этот коэффициент при отношении радиуса галтели к диаметру вала

$$C = \frac{r}{d} = \frac{3}{40} = 0,075.$$

Из таблицы видно, что отношению  $C' = 0,0625$  соответствует коэффициент  $K' = 1,75$ , а отношению  $C'' = 0,125$  — коэффициент  $K'' = 1,50$ . путем линейной интерполяции находим величину теоретического коэффициента  $K$  для отношения  $C = 0,075$

$$K = K' - \frac{(K' - K'')(C - C')}{(C'' - C')} = 1,75 - \frac{(1,75 - 1,50)(0,075 - 0,0625)}{0,125 - 0,0625} = 1,70.$$

Коэффициент чувствительности материала  $q$  определяется по графику на рис. 19,5 с учетом величины теоретического коэффициента концентрации напряжений  $K$  и предела прочности  $\sigma_b$ . При  $K = 1,7$  и  $\sigma_b = 48$

$\cdot 10^7 \frac{H}{M^2}$  коэффициент чувствительности материала составляет  $q = 0,48$ , эффективный коэффициент концентрации напряжений в этом случае равен.

$$K_\sigma = 1 + 0,48(1,70 - 1) = 1,34.$$

Масштабный коэффициент  $\epsilon_\sigma$  устанавливают по кривой 2 графика, приведенного на рис. 19.4. для вала диаметром 400 мм, изготовленного из углеродистой стали, при умеренной концентрации напряжений  $\epsilon_\theta = 1,30$ . Коэффициент качества поверхности выбирают в зависимости от рассмотренных выше способов обработки поверхности. При тонкой обточке стали с пределом

прочности  $\sigma_b' = 4 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2}$  соответствует коэффициент

$\beta_{\Pi}' = 1,10$ , а с пределом прочности  $\sigma_b'' = 14 \cdot 10^8 \frac{H}{M^2}$  - ко-

эффициент  $\beta_{\Pi}'' = 1,28$ . Путем линейной интерполяциими определяем значение коэффициента качества поверхности

$\beta_{\Pi}$  для стали с пределом прочности  $\sigma_b = 48 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}$

$$\beta_{\Pi} = \beta_{\Pi}' + \frac{(\beta_{\Pi}'' - \beta_{\Pi}')(\sigma_b - \sigma_b')}{\sigma_b'' - \sigma_b'} = 1,10 + \frac{(1,28 - 1,10)(48 - 40) \cdot 10^8}{(14 - 4) \cdot 10^8} = 1,11.$$

Подставив в формулу действительного предела выносливости вала при изгибе коэффициенты  $K_\sigma = 1,34$ ,



$\varepsilon_{\sigma} = 1,30$  и  $\beta_{\Pi} = 1,11$ , вычисляем его значение

$$\sigma_{-1Л} = \frac{19,20 \cdot 10^7}{1,34 \cdot 1,30 \cdot 1,11} = 9,93 \cdot 10^7 \frac{Н}{М^2}.$$

6. Коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям равен

$$\eta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1Л}}{\sigma_{МАХ}} = \frac{9,93 \cdot 10^7}{3,18 \cdot 10^7} = 3,12.$$

Действительный предел выносливости вала при пульсирующим цикле кручения находим по формуле:

$$\tau_{rЛ} = \frac{\tau_{-1} \tau_{МАХ}}{K_{\tau} \varepsilon_{\sigma} \beta_{\Pi} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}.$$

Определение коэффициентов снижения предела выносливости при кручении аналогично определению этих коэффициентов при изгибе. Эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_{\tau}$  вычисляется по формуле:

$$K_{\tau} = 1 + q(K - 1).$$

Применяя линейную интерполяцию между значениями  $K_1 = 1,80$  при  $C_1 = 0,02$  и  $K_2 = 1,20$  при  $C_2 = 0,10$ , приведенными в таблице 19.3, находим теоретический коэффициент напряжений  $K$  для

$$C = \frac{r}{d} = \frac{3}{40} = 0,075$$

$$K = K_1 - \frac{(K_1 - K_2)(C - C_1)}{(C_2 - C_1)} = 1,80 - \frac{(1,80 - 1,20)(0,075 - 0,02)}{0,10 - 0,02} = 1,40$$

Согласно графику (рис. 19.5), при  $K = 1,40$  и  $\sigma_b = 48 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}$ , коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений  $q = 0,33$ .

Следовательно, эффективный коэффициент концентрации напряжений равен

$$K_\tau = 1 + 0,33(1,40 - 1) = 1,13.$$

Масштабные коэффициенты при кручении и изгиба принимаются одинаковыми, т.е.

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma = 1,30.$$

Коэффициент качества поверхности  $\beta_\Pi = 1,11$ .

По таблице 19.4 находим коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла  $\psi_\tau$  при кручении.

Для стали пределом прочности  $\sigma_b = 48 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}$  этот коэффициент равен  $\psi_\tau = 0$ . Подставив в формулу действительного предела выносливости вала при кручении коэффициенты  $K_\tau = 1,13$ ,  $\varepsilon_\tau = 1,30$ ,  $\beta_\Pi = 1,11$  и  $\psi_\tau = 0$  вычисляем его значение

$$\tau_{\text{вд}} = \frac{11,14 \cdot 10^7 \cdot 2,70 \cdot 10^7}{1,13 \cdot 1,30 \cdot 1,11 \cdot 1,35 \cdot 10^7} = 13,66 \cdot 10^7 \frac{H}{M^2}.$$

8. Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям составляет

$$\eta_\tau = \frac{\tau_{\text{вд}}}{\tau_{\text{МАХ}}} = \frac{13,66 \cdot 10^7}{2,70 \cdot 10^7} = 5,06.$$

9 Полный коэффициент запаса прочности по сопро-

тивлению усталости

$$\eta = \frac{\eta_{\sigma} \eta_{\tau}}{\sqrt{\eta_{\sigma}^2 + \eta_{\tau}^2}} = \frac{3,12 \cdot 5,06}{\sqrt{3,12^2 + 5,06^2}} = 2,65.$$

10. Коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям, определяемые по отношению к пределам текучести

$$\eta_{\sigma} = \frac{\sigma_T}{\sigma_{MAX}} = \frac{26 \cdot 10^7}{3,18 \cdot 10^7} = 8,17, \quad \eta_{\tau} = \frac{\tau_T}{\tau_{MAX}} = \frac{15,08 \cdot 10^7}{2,70 \cdot 10^7} = 5,58$$

11. Полный коэффициент запаса прочности по сопротивлению материала пластическим деформациям

$$\eta = \frac{\eta_{\sigma} \cdot \eta_{\tau}}{\sqrt{(\eta_{\sigma})^2 + (\eta_{\tau})^2}} = \frac{8,17 \cdot 5,58}{\sqrt{8,17^2 + 5,58^2}} = 4,61.$$

## Глава 20. ПРИЛОЖЕНИЕ

**Экспериментальные и теоретические данные, используемые при выполнении расчетно-проектировочных работ**

**Таблица 1.**

### Модуль упругости и коэффициент Пуассона некоторых материалов

Наименование материала	Модуль упругости $E$ , МПа	Модуль упругости $G$ , МПа	Коэффициент Пуассона $\mu$
Чугун серый, белый	$(1.15 \div 1.60) \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^4$	$0.23 \div 0.27$
Ковкий чугун	$1.55 \cdot 10^5$	—	—
Углеродистые стали	$(2.0 \div 2.1) \cdot 10^5$	$(8.0 \div 8.1) \cdot 10^4$	$0.24 \div 0.28$
Легированные стали	$(2.1 \div 2.2) \cdot 10^5$	$(8.0 \div 8.1) \cdot 10^4$	$0.25 \div 0.30$
Медь прокатанная	$1.1 \cdot 10^5$	$4.0 \cdot 10^4$	$0.31 \div 0.34$
Медь холодно-тянутая	$1.3 \cdot 10^5$	$4.9 \cdot 10^4$	—
Медь, литье	$0.84 \cdot 10^5$	—	—
Фосфористая бронза катаная	$1.15 \cdot 10^5$	$4.2 \cdot 10^4$	$0.32 \div 0.35$
Литунь холодно-тянутая	$(0.91 \div 0.99) \cdot 10^5$	$(3.5 \div 3.7) \cdot 10^4$	$0.32 \div 0.42$
Корабельная литунь катаная	$1.0 \cdot 10^5$	—	0.36
Мирганцовистая бронза катаная	$1.1 \cdot 10^5$	$4.0 \cdot 10^4$	0.35
Алюминий катаный	$0.69 \cdot 10^5$	$(2.6 \div 2.7) \cdot 10^4$	$0.32 \div 0.36$
Алюминиевая проволока тянутая	$0.7 \cdot 10^5$	—	—

Продолжение табл. 1.

Алюминиевая бронза, литье	$1.05 \cdot 10^5$	$4.2 \cdot 10^4$	—
Дюралюмин катаный	$0.71 \cdot 10^5$	$3.7 \cdot 10^4$	—
Цинк катаный	$0.84 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^4$	0.27
Свинец	$0.17 \cdot 10^5$	$0.70 \cdot 10^4$	0.42
Лед	$0.1 \cdot 10^5$	$(0.28 \div 0.3) \cdot 10^4$	—
Стекло	$0.56 \cdot 10^5$	$2.2 \cdot 10^4$	0.25
Гранит	$0.49 \cdot 10^5$	—	—
Наименование материала	Модуль упругости $E$ , МПа	Модуль упругости $G$ , МПа	Коэффициент Пуассона $\mu$
Известняк	$0.42 \cdot 10^5$	—	—
Мрамор	$0.56 \cdot 10^5$	—	—
Песчаник	$0.18 \cdot 10^5$	—	—
Каменная кладка: из гранита из известняка из кирпича	$(0.09 \div 0.1) \cdot 10^5$	—	—
	$0.06 \cdot 10^5$	—	—
	$(0.027 \div 0.030) \cdot 10^5$	—	—
Бетон при пределе прочности: 10 МПа 15 МПа 20 МПа	$(0.146 \div 0.196) \cdot 10^5$	—	$0.16 \div 0.18$
	$(0.164 \div 0.214) \cdot 10^5$	—	$0.16 \div 0.18$
	$(0.182 \div 0.232) \cdot 10^5$	—	$0.16 \div 0.18$
Дерево: вдоль волокна поперек волокон	$(0.10 \div 0.12) \cdot 10^5$	$0.55 \cdot 10^4$	—
	$(0.005 \div 0.01) \cdot 10^5$	—	—
Каучук	$0.00008 \cdot 10^5$	—	0.47
Текстолит	$(0.06 \div 0.1) \cdot 10^5$	—	—
Гетинакс	$(0.10 \div 0.17) \cdot 10^5$	—	—
Бакелит	$43 \cdot 10^2$	—	0.36

Вискомлит («ИМ-44»)	$(40 \div 42) \cdot 10^2$	—	0.37
Целлулоид	$(14.3 \div 27.5) \cdot 10^2$	—	$0.33 \div 0.38$

**Т а б л и ц а 2.**

**Ориентировочные величины основных допускаемых напряжений**

Наименование материала	Допускаемое напряжение, МПа	
	На растяжение	На сжатие
Чугун серый в отливках	28 ÷ 80	120 ÷ 150
Сталь Ос и Ст. 2	140	140
Сталь Ст. 3	160	160
Сталь Ст. 3 в мостах	140	140
Сталь углеродистая конструкционная в машиностроении	60 ÷ 250	60 ÷ 250
Сталь легированная конструкционная в машиностроении	100 ÷ 400 и выше	100 ÷ 400 и выше
Стали марок 30ХН, 40ХН, 30ХМА, 30ХНМА	500 ÷ 600 и выше	500 ÷ 600 и выше
Медь	30 ÷ 120	30 ÷ 120
Латунь	70 ÷ 140	70 ÷ 140
Бронза	60 ÷ 120	60 ÷ 120
Алюминий	30 ÷ 80	30 ÷ 80
Алюминиевая бронза	80 ÷ 120	80 ÷ 120
Дюралюмин	80 ÷ 150	80 ÷ 150
Текстолит	50 ÷ 70	50 ÷ 70
Гетинакс	50 ÷ 70	50 ÷ 70
Бакелизованная фанера	40 ÷ 50	40 ÷ 50
Сосна вдоль волокон	7 ÷ 10	10 ÷ 12
Сосна поперек волокон	—	1.5 ÷ 2

Дуб вдоль волокон	9 ÷ 13	13 ÷ 15
Дуб поперек волокон	—	2 ÷ 3.5
Каменная кладка	до 0.3	0.4 ÷ 4
Кирпичная кладка	до 0.2	0.6 ÷ 2.5
Бетон	0.1 ÷ 0.7	1 ÷ 9

Таблица 3.

**Коэффициенты  $\varphi$  уменьшения допускаемых напряжений при продольном изгибе**

Гибкость $\lambda = \frac{\mu l}{i}$	Значения $\varphi$ для				
	стали марок 4, 3, 2, ОС	стали марки 5	стали СПБ	чугуна	дерева
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10	0.99	0.98	0.97	0.97	0.99
20	0.96	0.95	0.95	0.91	0.97
30	0.94	0.92	0.91	0.81	0.93
40	0.92	0.89	0.87	0.69	0.87
50	0.89	0.86	0.83	0.57	0.80
60	0.85	0.82	0.79	0.44	0.71
70	0.81	0.76	0.72	0.34	0.60
80	0.75	0.70	0.65	0.26	0.48
90	0.69	0.62	0.55	0.20	0.38
100	0.60	0.51	0.43	0.16	0.31
110	0.52	0.43	0.35	—	0.25
120	0.45	0.36	0.30	—	0.22
130	0.40	0.33	0.26	—	0.18
140	0.36	0.29	0.23	—	0.16
150	0.32	0.26	0.21	—	0.14

160	0.29	0.24	0.19	—	0.12
170	0.26	0.21	0.17	—	0.11
180	0.23	0.19	0.15	—	0.10
190	0.21	0.17	0.14	—	0.09
200	0.19	0.16	0.13	—	0.08

**Т а б л и ц а 4.**

**Значения функций  $\eta = \exp(-\beta x)(\cos \beta x + \sin \beta x)$  и**

$$\eta_1 = \exp(-\beta x)(\cos \beta x + \sin \beta x)\beta = \sqrt{\frac{k}{4EJ}}$$

**для расчета балок на упругом основании**

$\beta x$	$\eta$	$\eta_1$	$\beta x$	$\eta$	$\eta_1$
0.0	1.0000	1.0000	3.6	-0.03659	-0.01241
0.1	0.9907	0.8100	3.7	-0.03407	-0.00787
0.2	0.9651	0.6398	3.8	-0.03138	-0.00401
0.3	0.9267	0.4888	3.9	-0.02862	-0.00077
0.4	0.8784	0.3564	$5/4\pi$	-0.02786	0.00000
0.5	0.8231	0.2415	4.0	-0.02583	+0.00189
0.6	0.7628	0.1431	4.1	-0.02309	0.00403
0.7	0.6997	0.0599	4.2	-0.02042	0.00572
$1/4\pi$	0.6448	0.0000	4.3	-0.01787	0.00699
0.8	0.6354	-0.0093	4.4	-0.01546	0.00791
0.9	0.5712	-0.0657	4.5	-0.01320	0.00852
1.0	0.5083	-0.1108	4.6	-0.01112	0.00786
1.1	0.4476	-0.1457	4.7	-0.00921	0.00898
1.2	0.3899	-0.1716	$6/4\pi$	-0.00898	0.00898
1.3	0.3355	-0.1897	4.8	-0.00748	0.00892



1.4	0.2849	-0.2011	4.9	-0.00593	0.00870
1.5	0.2384	-0.2068	5.0	-0.00455	0.00837
$\frac{1}{2}\pi$	0.2079	-0.2079	5.1	-0.00334	0.00795
1.6	0.1959	-0.2077	5.2	-0.00229	0.00746
1.7	0.1576	-0.2047	5.3	-0.00139	0.00692
1.8	0.1234	-0.1985	5.4	-0.00063	0.00636
1.9	0.0932	-0.1899	$\frac{7}{4}\pi$	0.00000	0.00579
2.0	0.0667	-0.1794	5.5	+0.00001	0.00578
2.1	0.0439	-0.1675	5.6	0.00053	0.00520
2.2	0.0244	-0.1548	5.7	0.00095	0.00464

Продолжение табл. 4.

2.3	0.0080	-0.1416	5.8	0.00127	0.00409
$\frac{3}{4}\pi$	0.0000	-0.1340	5.9	0.00152	0.00356
2.4	-0.0056	-0.1282	6.0	0.00169	0.00307
2.5	-0.0166	-0.1149	6.1	0.00180	0.00261
2.6	-0.0254	-0.1019	6.2	0.00185	0.00219
2.7	-0.0320	-0.0895	$\frac{8}{4}\pi$	0.00187	0.00187
2.8	-0.0369	-0.0777	6.3	0.00187	0.00181
2.9	-0.0403	-0.0666	6.4	0.00184	0.00146
3.0	-0.04226	-0.05632	6.5	0.00179	0.00115
3.1	-0.04314	-0.04688	6.6	0.00172	0.00087
$\pi$	-0.04321	-0.04321	6.7	0.00162	0.00063
3.2	-0.04307	-0.03831	6.8	0.00152	0.00042
3.3	-0.04224	-0.03060	6.9	0.00141	0.00024
3.4	-0.04079	-0.02374	7.0	0.00129	0.00009
3.5	-0.03887	-0.01769	$\frac{9}{4}\pi$	0.00120	0.00000

Таблица 5.

**Коэффициенты линейного расширения некоторых  
материалов  
 $\alpha$  (на  $1^\circ \text{C}$ )**

Наименование материала	$\alpha$
Алюминий	$255 \cdot 10^{-7}$
Магний	$255 \cdot 10^{-7}$
Медь	$167 \cdot 10^{-7}$
Бронза	$(170 + 230) \cdot 10^{-7}$
Латунь	$(170 + 230) \cdot 10^{-7}$
Бетон	$(100 + 140) \cdot 10^{-7}$
Лед	$507 \cdot 10^{-7}$
Сталь	$(100 + 130) \cdot 10^{-7}$
Каменная кладка	$(40 + 70) \cdot 10^{-7}$
Дерево	$(20 + 50) \cdot 10^{-7}$
Целлулоид	$(20 + 36) \cdot 10^{-7}$

Т а б л и ц а 6.

**Значения определенных интегралов, встречающихся при  
нахождении усилий и перемещений в стержнях и кольцах  
с круговой осью**

№	$f(\beta)$	$\int_0^\alpha f(\beta) d\beta$
1	$\sin \beta$	$1 - \cos \alpha$
2	$\cos \beta$	$\sin \alpha$
3	$\sin^2 \beta$	$-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha$
4	$\cos^2 \beta$	$\frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha$

5	$\sin^3 \beta$	$\frac{1}{12} \cos 3\alpha - \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{2}{3}$
6	$\cos^3 \beta$	$\frac{1}{12} \sin 3\alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha$
7	$\beta \sin \beta$	$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha$
8	$\beta \cos \beta$	$\cos \alpha + \alpha \sin \alpha - 1$
9	$\beta^2 \sin \beta$	$2\alpha \sin \alpha - (\alpha^2 - 2) \cos \alpha - 2$
10	$\beta^2 \cos \beta$	$2\alpha \cos \alpha + (\alpha^2 - 2) \sin \alpha$
11	$\beta \sin \beta^2$	$\frac{1}{4} \alpha^2 - \frac{1}{4} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{8} \cos 2\alpha + \frac{1}{8}$
12	$\beta \cos^2 \beta$	$\frac{1}{4} \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha \sin 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 2\alpha - \frac{1}{8}$
13	$\sin \beta \cos \beta$	$\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$
14	$\sin \beta \cos^2 \beta$	$\frac{1}{3} (1 - \cos^3 \alpha)$
15	$\sin^2 \beta \cos \beta$	$\frac{1}{3} \sin^3 \alpha$
16	$\sin^2 \beta \cos^2 \beta$	$\frac{1}{8} \alpha - \frac{1}{32} \sin 4\alpha$
17	$\sin 2\beta$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
18	$\cos 2\beta$	$\frac{1}{2} \sin 2\alpha$

19	$\beta \sin 2\beta$	$\frac{1}{4} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos 2\alpha$
20	$\beta \cos 2\beta$	$\frac{1}{4} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \alpha \sin 2\alpha - \frac{1}{4}$
21	$\sin(\alpha - \beta)$	$1 - \cos \alpha$
22	$\cos(\alpha - \beta)$	$\sin \alpha$
23	$\sin \beta \sin(\alpha - \beta)$	$\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha$
24	$\sin \beta \cos(\alpha - \beta)$	$\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha$
25	$\cos \beta \sin(\alpha - \beta)$	$\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha$
26	$\cos \beta \cos(\alpha - \beta)$	$\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha$

Таблица 7.

### Соотношения между единицами измерения некоторых величин

1. Длина..... 1 см =  $10^{-2}$  м
2. Масса..... 1 г =  $10^{-3}$  кг; 1 кГ · сек<sup>2</sup>/м = 9.81 кг
3. Площадь..... 1 см<sup>2</sup> =  $10^{-4}$  м<sup>2</sup>
4. Объем..... 1 см<sup>3</sup> =  $10^{-6}$  м<sup>3</sup>
5. Сила..... 1 дин =  $10^{-5}$  н; 1 кГ = 9.81 н
6. Плотность..... 1 г/см<sup>3</sup> =  $10^3$  кг/м<sup>3</sup>; 1 кГ · сек<sup>2</sup>/м<sup>3</sup> = 9.81 кг/м<sup>3</sup>
7. Удельный вес..... 1 дин/см<sup>3</sup> =  $10$  н/м<sup>3</sup>; 1 кГ/м<sup>3</sup> = 9.81 н/м<sup>3</sup>
8. Работа и энергия..... 1 эрг =  $10^{-7}$  дж; 1 кГ · м = 9.81 дж
9. Мощность..... 1 эрг/сек =  $10^{-7}$  вт; 1 кГ · м/сек = 9.81 вт
10. Давление..... 1 дин/см<sup>2</sup> =  $10^{-1}$  н/м<sup>2</sup>; 1 кГ/м<sup>2</sup> = 9.81 н/м<sup>2</sup>
11. Модуль линейного растяжения..... 1 дин/см<sup>2</sup> =  $10^{-1}$  н/м<sup>2</sup>;
12. Модуль сдвига..... 1 дин/см<sup>2</sup> =  $10^{-1}$  н/м<sup>2</sup>;

13. Модуль всестороннего сжатия.....  $1 \text{ дин/см}^2 = 10^{-1} \text{ н/м}^2$ ;  
 14. Динамическая вязкость.....  $1 \text{ пз} = 10^{-1} \text{ н} \cdot \text{сек/м}^2$ ;  
 $1 \text{ кг} \cdot \text{сек/м}^2 = 9.81 \text{ н} \cdot \text{сек/м}^2$ .

**Т а б л и ц а 8.**

**Расчетные (нижние) критические нагрузки (напряжения)  
в задачах устойчивости оболочек**

1°. *Круговая цилиндрическая оболочка при осевом сжатии.* Расчетное напряжение  $\sigma = k E \frac{h}{R}$ , где  $R$  — радиус оболочки,  $h$  — толщина оболочки, коэффициент  $k$  определяется из таблицы

$\frac{R}{h}$	$\leq 250$	500	750	1000	1500
$k$	0.18	0.14	0.12	0.10	0.09

2°. *Круговая цилиндрическая оболочка при внешнем давлении.* Расчетное напряжение  $p = 0.92 \nu \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}$ , где  $R$ ,  $h$ ,  $L$  — радиус, толщина и длина оболочки соответственно, коэффициент  $k$  определяется из таблицы

$\frac{R}{h}$	$\leq 250$	500	1000	1500
$\nu$	0.7	0.6	0.5	0.4

3°. *Круговая цилиндрическая оболочка при кручении.* Расчетное напряжение  $s = 0.7 k E \frac{h}{R} \sqrt[4]{\frac{Rh}{L^2}}$ , где коэффициент  $k$  определяется из таблицы

$\frac{R}{h}$	$\leq 250$	500	1000	1500
$K$	0.8	0.7	0.6	0.5

4°. Сферическая оболочка при внешнем давлении ( $R$ -радиус оболочки,  $h$ -толщина). Расчетное давление  $p = \nu E \frac{h^2}{R^2}$ , где коэффициент  $\nu$  определяется из таблицы

$\frac{R}{h}$	$\leq 250$	500	750	1000	1500
$\nu$	0.3	0.24	0.20	0.16	0.15

**Т а б л и ц а 9.**  
Некоторые таблицы единиц Международной системы (СИ)

**9.1. Основные единицы СИ**

Величина	Размерность	Единица		
		наименование	Обозначение	
			русское	международное
Длина	$L$	метр	м	$m$
Масса	$M$	килограмм	кг	$kg$
Время	$T$	секунда	с	$s$
Сила электрического тока	$I$	ампер	А	$A$
Термодинамическая температура	$\theta$	кельвин	К	$K$
Сила света	$J$	кандела	кд	$cd$
Количество веществ	—	моль	моль	$mol$

**9.2. Дополнительные единицы СИ**

Величина	Размерность	Единица		
		наименование	Обозначение	
			русское	международное
Плоский	—	радиан	рад	$rad$

угол				
Телесный угол	—	стерадиан	ср	<i>sr</i>
Площадь	$L^2$	квадратный метр		

### 9.3. Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	наименование	обозначение	через другие единицы СИ	через основные единицы СИ

Продолжение табл. 9.

Частота	герц	Гц	—	$c^{-1}$
Сила	ньютон	Н	—	$m \cdot kg \cdot c^{-2}$
Давление	паскаль	Па	$H/m^2$	$m^{-1} \cdot kg \cdot c^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж	$H \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-3}$
Электронный заряд	кулон	Кл	$A \cdot c$	$c \cdot A$
Электронный потенциал, напряжение, э.д.с.	вольт	В	Вт/А	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-1}$
Электрическая емкость	фарада	Ф	Кл/В	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot c^4 \cdot A^2$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	В/А	$m^2 \cdot kg \cdot c^{-2} \cdot A^{-2}$

Электрическая проводимость	сименс	См	А/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}^2$
Поток магнитной индукции	вебер	Вб	В · с	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитная индукция	тесла	Т	Вб/м <sup>2</sup>	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Индуктивность	генри	Г	Вб/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Световой поток	люмен	лм	—	кд · ср
Освещенность	люкс	лк	—	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$

Т а б л и ц а 10.

Внесистемные единицы и их связь с единицами системы СИ

Величина	Единица измерения		
	наименование	сокращенное обозначение	
Длина	микрон	<i>мкм</i>	$1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$
	ангстрем	<i>А</i>	$1 \text{ А} = 10^{-10} \text{ м}$
Масса	тонна	<i>т</i>	$1 \text{ т} = 10^3 \text{ кг}$
	центнер	<i>ц</i>	$1 \text{ ц} = 10^2 \text{ кг}$
	карат	—	$1 \text{ карат} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$
Время	час	<i>ч</i>	$1 \text{ ч} = 3600 \text{ сек}$
	минута	<i>мин</i>	$1 \text{ мин} = 60 \text{ сек}$
Плоский угол	градус	°	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$
	минута	'	$1' = \frac{\pi}{108} \cdot 10^{-2} \text{ рад}$
	секунда	"	$1'' = \frac{\pi}{648} \cdot 10^{-3} \text{ рад}$
Площадь	ар	<i>а</i>	$1 \text{ а} = 10^2 \text{ м}^2$
	гектар	<i>га</i>	$1 \text{ га} = 10^4 \text{ м}^2$
Объем	Литр	<i>л</i>	$1 \text{ л} = 1.000028 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$
Угол поворота	оборот	<i>об</i>	$1 \text{ об} = 2\pi \text{ рад}$



Продолжение табл.10.

Угловая скорость	—	об/мин об/сек	$1 \text{ об/мин} = \frac{\pi}{30} \text{ рад/сек}$ $1 \text{ об/сек} = 2\pi \text{ рад/сек}$
Сила	тонна-сила	тс	$1 \text{ тс} = 9.80665 \cdot 10^3 \text{ н}$
Работа	Ватт-час	вт-ч	$1 \text{ вт-ч} = 3.6 \cdot 10^3 \text{ дж}$
Мощность	лошадиная сила	л.с	$1 \text{ л.с.} = 735.499 \text{ вт}$ ( $\approx 75 \text{ кгм/сек}$ )
Давление	бар	бар	$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ н/м}^2$
	миллиметр ртутного столба	мм.рт.ст.	$1 \text{ мм.рт.ст.} = 133.322 \text{ н/м}^2$
	миллиметр водного столба	мм. вод. ст.	$1 \text{ мм. вод. ст.} = 9.80665 \text{ н/м}^2$
	техническая атмосфера	ат или кг/см <sup>2</sup>	$1 \text{ ат} = 9.80665 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2$
	физическая атмосфера	атм	$1 \text{ атм} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$

Размерности и единицы измерения некоторых геометрических  
и механических величин в различных системах единиц<sup>1)</sup>

Величина	Формула размерности в системе		Единицы измерения в системе							
	СГС, МКС и СИ	МКГСС	СГС		МКС и СИ		МКГСС		сокращенное обозначение	
			наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение		
Длина	L	L	см	м	метр	м	Метр	М	М	
Масса	M	L <sup>-1</sup> T <sup>2</sup>	г	кг	килограмм	кг			кг · сек <sup>2</sup> /м	
Время	T	T	сек	сек	секунда	сек	Секунда	сек	сек	
Площадь	L <sup>2</sup>	L <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	квадратный метр	м <sup>2</sup>	квадратный метр	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	
Объем	L <sup>3</sup>	L <sup>3</sup>	см <sup>3</sup>	м <sup>3</sup>	кубический сантиметр	м <sup>3</sup>	кубический сантиметр	м <sup>3</sup>	м <sup>3</sup>	
Частота	T <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>	гц	гц	герц	гц	Герц	гц	гц	
Угловая скорость	T <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>	рад/сек	рад/сек	—	рад/сек	—	рад/сек	рад/сек	
Угловое ускорение	T <sup>-2</sup>	T <sup>-2</sup>	см/сек <sup>2</sup>	рад/сек <sup>2</sup>	—	рад/сек <sup>2</sup>	—	рад/сек <sup>2</sup>	рад/сек <sup>2</sup>	
Скорость	LT <sup>-1</sup>	LT <sup>-1</sup>	см/сек	м/сек	—	м/сек	—	м/сек	м/сек	
Ускорение	LT <sup>-2</sup>	LT <sup>-2</sup>	см/сек <sup>2</sup>	м/сек <sup>2</sup>	—	м/сек <sup>2</sup>	—	м/сек <sup>2</sup>	м/сек <sup>2</sup>	

Продолжение табл. 11.

Величина	Формула размерности в системе		Единицы измерения в системе					
	СГС, МКС и СИ	МКГСС	СГС		МКС и СИ		МКГСС	
			наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение
Сила	$LMT^{-2}$	F	дина	дин	ньютон	н	килограммсила	кгс или кг
Количество движения	$LMT^{-1}$	FT	—	г · см/сек	—	кг · м/сек	—	кг · м/сек
Импульс силы	$LTM^{-1}$	FT	—	дин · сек	—	н · сек	—	кг · сек
Плотность	$L^{-3}M$	$L^{-3}FT^{-3}$	—	г/см <sup>3</sup>	—	кг/м <sup>3</sup>	—	кг · сек <sup>3</sup> /м <sup>4</sup>
Удельный вес	$L^{-2}MT^{-1}$	$L^{-2}F$	—	дин/см <sup>2</sup>	—	н/м <sup>2</sup>	—	кг/м <sup>2</sup>
Работа и энергия	$L^2MT^{-2}$	LF	эрг	Эрг	джоуль	Дж	—	кг · м
Мощность	$L^2MT^{-3}$	$LFT^{-1}$	—	эрг/сек	ватт	Вт	—	кг · м/сек
Момент силы	$L^2MT^{-2}$	LF	—	дин · см	—	н · м	—	кг · м
Момент инерции	$L^2M$	$LFT^2$	—	г · см <sup>2</sup>	—	кг · см <sup>2</sup>	—	кг · м · сек <sup>2</sup>

Продолжение табл. 11.

Величина	Формула размерности в системе		Единицы измерения в системе						
	СГС: МКС и СИ	МКС	СГС		МКС и СИ		МКС		
			наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение	
Момент количества движения	$L^2MT^{-1}$	LFT	—	$г \cdot см^2/сек$	—	—	$кг \cdot м^2/сек$	—	$кг \cdot м^2 \cdot сек$
Импульс момента силы	$L^2MT^{-1}$	LFT	—	$дин \cdot см \cdot сек$	—	—	$н \cdot м \cdot сек$	—	$кг \cdot м^2 \cdot сек$
Давление (напряжение)	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}M$	—	$дин/см^2$	—	—	$н/м^2$	—	$кг/м^2$
Напряжение (давление)	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}M$	—	$дин/см^2$	—	—	$н/м^2$	—	$кг/м^2$
Динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения)	$L^{-1}MT^{-1}$	$L^{-2}FT$	пуаз	$пз$	—	—	$н \cdot сек/м^2$	—	$кг \cdot сек/м^2$
Кинематическая вязкость	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$	стокс	$стп$	—	—	$м^2/сек$	—	$м^2/сек$

Продолжение табл. 11.

Величина	Формула размерности в системе		Единицы измерения в системе					
	СТС, МКС и СИ	МКГСС	СТС		МКС и СИ		МКГСС	
			наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение	наименование	сокращенное обозначение
Модуль линейного растяжения	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	–	дин/см <sup>2</sup>	–	н/м <sup>2</sup>	–	кг/м <sup>2</sup>
Модуль Юнга	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	–	дин/см <sup>2</sup>	–	н/м <sup>2</sup>	–	кг/м <sup>2</sup>
Модуль сдвига	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	–	дин/см <sup>2</sup>	–	н/м <sup>2</sup>	–	кг/м <sup>2</sup>
Модуль всестороннего сжатия	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	–	дин/см <sup>2</sup>	–	н/м <sup>2</sup>	–	кг/м <sup>2</sup>

<sup>1)</sup> Символы L и T означают единицы длины и времени, M – масса (в системах СГС, МКС и СИ), F – силы (в системе МКГСС).

Размерности и производные единицы измерения некоторых молекулярных и тепловых величин<sup>2)</sup>

Величина	Размерность в системах СИ и СГС	Единица измерения в системе		Внесистемные единицы	Связь между единицами в разных системах
		СИ	СГС		
Коэффициент диффузии	$L^2 T^{-1}$	$m^2/sec$	$cm^2/sec$	—	$1 \frac{cm^2}{сек} = 10^{-4} \frac{m^2}{сек}$
Коэффициент внутреннего трения	$L^{-1} M T^{-1}$	$кг/м \cdot сек$	$г/см \cdot сек$ (пуаз)	—	$1 \text{Пз} = 10^{-1} \frac{кг}{м \cdot сек}$
Коэффициент поверхностного натяжения	$M T^{-2}$	$кг/сек^2$ (Н/м, Дж/м <sup>2</sup> )	$г/сек^2$ (дин/см, эрг/см <sup>2</sup> )	—	$1 \frac{г}{сек^2} = 10^{-3} \frac{кг}{сек^2}$
Удельный объем	$L^3 M^{-1}$	$m^3/kg$	$см^3/g$	—	$1 \frac{см^3}{г} = 10^{-3} \frac{м^3}{кг}$
Молярная масса	$M \cdot моль^{-1}$	$кг/моль$	$г/моль$	—	$1 \frac{г}{моль} = 10^{-3} \frac{кг}{моль}$
Количества теплоты, внутренняя энергия, энтальпия, изохорно-изотермный, изобарноизотермный и химический потенциалы	$L^2 M T^{-2}$	дж	эрг	калория международная (кал), калория термохимическая (калтр)	$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ Дж}$ $1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ Дж}$ $1 \text{ ккал} = 10^3 \text{ кал}$ $1 \text{ калтр} = 4,1840 \text{ Дж}$

Продолжение табл. 12.

Величина	Размерность в системах СИ и СГС	Единица измерения в системе		Внесистемные единицы	Связь между единицами в разных системах
		СИ	СГС		
Теплоемкость, энтропия	$L^2 M T^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$	дж/град	эрг/град	кал/град	
Удельная теплоемкость, удельная энтропия	$L^2 T^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$	дж/кг · град	эрг/г · град	кал/г · град ккал/г · град	$1 \text{ эрг/г} \cdot \text{град} = 10^{-4} \text{ дж/кг} \cdot \text{град}$ $1 \text{ кал/г} \cdot \text{град} = 4,1868 \cdot 10^3 \text{ дж/кг} \cdot \text{град}$
Удельная теплота физического перехода	$L^2 T^{-2}$	дж/кг	эрг/г	кал/г ккал/кг	$1 \text{ эрг/г} = 10^{-4} \text{ дж/кг}$ $1 \text{ кал/г} = 1 \text{ ккал/кг} = 4,1868 \cdot 10^3 \text{ дж/кг}$
Коэффициент теплопроводности	$L M T^{-3} \cdot \text{град}^{-1}$	вт/м · град	эрг/см · сек · град	кал/см · сек · град  ккал/м · ч · град	$1 \text{ эрг/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град} = 10^{-5} \text{ вт/м} \cdot \text{град}$ $1 \text{ ккал/м} \cdot \text{ч} \cdot \text{град} = 1,1630 \text{ вт/м} \cdot \text{град}$

Продолжение табл. 12.

Величина	Размерность в системах СИ и СГС	Единица измерения в системе		Внесистемные единицы	Связь между единицами в разных системах
		СИ	СГС		
Коэффициент теплоотдачи и теплотедачи	$M T^{-3} \cdot \text{град}^{-1}$	$\text{вт/м}^2 \cdot \text{град}$	$\text{эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$	$\text{кал/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$	$1 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot$ $\cdot \text{град} = 10^{-2}$ $\text{вт/м}^2 \cdot \text{град}$
				$\text{ккал/м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{град}$	$1 \text{ ккал/см}^2 \cdot \text{сек} \cdot$ $\cdot \text{град} = 4,1868 \cdot 10^4$ $\text{вт/м}^2 \cdot \text{град}$
Коэффициент температурыпроводности	$L^2 T^{-1}$	$\text{м}^2/\text{сек}$	$\text{см}^2/\text{сек}$		$1 \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{ч} \cdot$ $\cdot \text{град} = 1,1630$ $\text{вт/м}^2 \cdot \text{град}$

2) Символы L, M и T означают единицы длины, массы и времени в соответствующих системах единиц.



Таблица 13.

Двутавры<sup>3)</sup>

№ профилей	Вес 1 пог. м, в кг	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						
		h	b	d	t		x-x			y-y			
							I <sub>x</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> см	S <sub>x</sub> см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54

№ профиля	Вес 1 пог. м. в кг	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		h	b	d	r		x-x				y-y			
							I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	I <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>
							см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см	см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>
27a	33.9	270	135	6.0	10.2	43.2	5500	407	11.3	229	337	50.0	2.80	
30	36.5	300	135	6.5	10.2	46.5	7080	472	12.3	268	337	49.9	2.69	
30a	39.2	300	145	6.5	10.7	49.9	7780	518	12.8	292	436	60.1	2.95	
33	42.2	330	140	7.0	11.2	53.8	9840	597	13.5	339	419	59.9	2.79	
36	48.6	360	145	7.5	12.3	61.9	13380	743	14.7	423	516	71.1	2.89	
40	56.1	400	155	8.0	13.0	71.4	18930	947	16.3	540	666	85.9	3.05	
45	65.2	450	160	8.6	14.2	83.0	27450	1220	18.2	699	807	101	3.12	
50	76.8	500	170	9.5	15.2	97.8	39290	1570	20.0	905	1040	122	3.26	
55	89.8	550	180	10.3	16.5	114	55150	2000	22.0	1150	1350	150	3.44	
60	104	600	190	11.1	17.8	132	75450	2510	23.9	1450	1720	181	3.60	
65	120	650	200	12.0	19.2	153	101400	3120	25.8	1800	2170	217	3.77	
70	138	700	210	13.0	20.8	176	134600	3840	27.7	2230	2730	260	3.94	
70a	158	700	210	15.0	24.0	202	152700	4360	27.5	2550	3240	309	4.01	
70б	184	700	210	17.5	28.2	234	175370	5010	27.4	2940	3910	373	4.09	

3) См. рис. 20.1.

Таблица 14.

Швеллеры<sup>4)</sup>

№ профиля	Вес 1 пог. кг	Размеры				Площадь сечения см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		h	b	d	t		x - x				y - y			
							I <sub>x</sub>	W <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	S <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	W <sub>y</sub>	i <sub>y</sub>	x <sub>0</sub>
5	4.84	50	32	4.4	7.0	6.16	22.8	9.10	1.92	5.59	5.61	2.75	0.954	1.16
6.5	5.90	65	36	4.4	7.2	7.51	48.6	15.0	2.54	9.00	8.70	3.68	1.08	1.24
8	7.05	80	40	4.5	7.4	8.98	89.4	22.4	3.16	13.3	12.8	4.75	1.19	1.31
10	8.59	100	46	4.5	7.6	10.9	174	34.8	3.99	20.4	20.4	6.46	1.37	1.44
12	10.4	120	52	4.8	7.8	13.3	304	50.6	4.78	29.6	31.2	8.52	1.53	1.54
14	12.3	140	58	4.9	8.1	15.6	491	70.2	5.60	40.8	45.4	11.0	1.70	1.67
14a	13.3	140	62	4.9	8.7	17.0	545	77.8	5.66	45.1	57.5	13.3	1.84	1.87
16	14.2	160	64	5.0	8.4	18.1	747	93.4	6.42	54.1	63.3	13.8	1.87	1.80
16a	15.3	160	68	5.0	9.0	19.5	823	103	6.49	59.4	78.8	16.4	2.01	2.00
18	16.3	180	70	5.1	8.7	20.7	1090	121	7.24	69.8	86.0	17.0	2.04	1.94
18a	17.4	180	74	5.1	9.3	22.2	1190	132	7.32	76.1	105	20.0	2.18	2.13

Продолжение табл. 14.

№ профиля	Вес $W$ , кг	Размеры				Площадь сечения $S_x$ , см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		$h$	$B$	$d$	$r$		$x-x$			$y-y$			$x_0$	
							$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$		$i_y$
мм	мм	мм	мм	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см			
20	18.4	200	76	5.2	9.0	23.4	1520	152	8.07	87.8	113	20.5	2.20	2.07
20а	19.8	200	80	5.2	9.7	25.2	1670	167	8.15	95.9	139	24.2	2.35	2.28
22	21.0	220	82	5.4	9.5	26.7	2110	192	8.89	110	151	25.1	2.47	2.21
22а	22.6	220	87	5.4	10.2	28.8	2330	212	8.99	121	187	30.0	2.55	2.46
24	24.0	240	90	5.6	10.0	30.6	2900	242	9.73	139	208	31.6	2.60	2.42
24а	25.8	240	95	5.6	10.7	32.9	3180	265	9.84	151	254	37.2	2.78	2.67
27	27.7	270	95	6.0	10.5	35.2	4160	308	10.9	178	262	37.3	2.73	2.47
30	31.8	300	100	6.5	11.0	40.5	5810	387	12.0	224	327	43.6	2.84	2.52
33	36.5	330	105	7.0	11.7	46.5	7980	484	13.1	281	410	51.8	2.97	2.59
36	41.9	360	110	7.5	12.6	53.4	10820	601	14.2	350	513	61.7	3.10	2.68
40	48.3	400	115	8.0	13.5	61.5	15220	761	15.7	444	642	73.4	3.23	2.75

4) См. рис. 20.2.

Таблица 15.

Уголки равнобокие<sup>5)</sup>

№ профилей	Размеры		Вес $I$ лог. м	Площадь профиля	Справочные величины для осей								
	b	d			$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$Z_0$	
					$I_x$	$i_x$	$I_{x_0}$ макс	$i_{x_0}$ макс	$I_{y_0}$ мин	$i_{y_0}$ мин			$I_{x_1}$
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	
													4
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	
													4
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	
													4
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99	
													4

Продолжение табл. 15.

№ профи-лей	Размеры		Площадь профиля	№	Справочные величины для осей							
	b	d			$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	$Z_0$
					$I_x$	$i_x$	$I_{x_0}$	$i_{x_0}$	$I_{y_0}$	$i_{y_0}$		
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
5	50	5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
		3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
5,6	56	4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
6,3	63	3,5	3,86	3,03	11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
		4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
7	70	5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
		4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
7	70	5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
7	70	6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
7	70	8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02

Продолжение табл. 15.

№ про- филей	Размеры		mm	mm <sup>2</sup>	kg	Справочные величины для осей										Z <sub>0</sub>
	b	d				x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>				
						I <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	I <sub>x<sub>0</sub></sub>	i <sub>x<sub>0</sub></sub>	I <sub>y<sub>0</sub></sub>	i <sub>y<sub>0</sub></sub>	I <sub>x<sub>1</sub></sub>				
		CM <sup>4</sup>	CM	CM <sup>4</sup>	CM	CM <sup>4</sup>	CM	CM <sup>4</sup>	CM	CM <sup>4</sup>	CM					
7,5		5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02				
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06				
	75	7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10				
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15				
8		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18				
		5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17				
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19				
	80	7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23				
8		12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27					
9		6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43				
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47				
	90	8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51				
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55				
10		6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68				
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71				
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75				
	100	10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83				
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91				
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99				
	16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06					

Продолжение табл. 15.

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	мм <sup>2</sup>	мм	Справочные величины для осей									
	b	d				$X - X$		$X_0 - X_0$		$Y_0 - Y_0$		$X_1 - X_1$		$Z_0$	
						$I_x$	$i_x$	$I_{x_0}$ макс	$i_{x_0}$ макс	$I_{y_0}$ мин	$i_{y_0}$ мин	$I_{x_1}$			
													см <sup>4</sup>		см
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96			
			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00			
12,5	125	8	19,2	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36			
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40			
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45			
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53			
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61			
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68			
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78			
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82			
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90			
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30			
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35			
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39			
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47			
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55			
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63			
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70			



Продолжение табл. 15.

№ профилей	Размеры		Площадь профиля	мм <sup>2</sup>	Справочные величины для осей										Z <sub>0</sub>
	b	d			x-x		X <sub>0</sub> -X <sub>0</sub>		Y <sub>0</sub> -Y <sub>0</sub>		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>		См		
					I <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	I <sub>X<sub>0</sub></sub>	i <sub>X<sub>0</sub></sub>	I <sub>Y<sub>0</sub></sub>	i <sub>Y<sub>0</sub></sub>	I <sub>X<sub>1</sub></sub>				
	мм	мм			СМ <sup>4</sup>	см	СМ <sup>4</sup>	см	СМ <sup>4</sup>	мин	СМ <sup>4</sup>	мин	СМ <sup>4</sup>	см	
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85			
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89			
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37			
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42			
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46			
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54			
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70			
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89			
22	220	14	60,4	47,4	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07			
		16	68,6	53,8	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93			
25	250	16	78,4	61,5	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02			
		18	87,7	68,9	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75			
		20	97,0	76,1	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83			
		22	106,1	83,3	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91			
		25	119,7	94,0	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00			
		28	133,1	104,5	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11			
	30	142,0	111,4	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23				
				8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31				

3) См. рис. 20.3.

Таблица 16.

Углы неравнобокие<sup>6)</sup>

№ профиля		Размеры		Справочные величины для осей											
				x-x		y-y		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>		Y <sub>1</sub> -Y <sub>1</sub>		и-и			
				$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{X1}$	$I_{Y1}$ Мин	Расстояние от центра тяжести X <sub>0</sub>	Расстояние от центра тяжести Y <sub>0</sub>	$I_{и-и}$	$I_{и-и}$	$ig\alpha$ Угол наклона оси	
Площадь профиля				Вес 1 пог. м											
		мм		см <sup>2</sup>		кг									
B	b	d													
2.5	16	3		1.16	0.91	0.70	0.78	0.22	0.44	1.56	0.43	0.42	0.13	0.34	0.392
1.6	25					1.52	1.01	0.46	0.55	3.26	0.82	0.49	0.28	0.43	0.382
3.2	20	4		1.94	1.52	1.93	1.00	0.57	0.54	4.38	1.12	0.53	0.35	0.43	0.374
2	32														
4	40	25	4	2.47	1.94	3.93	1.26	1.18	0.69	8.53	2.15	0.63	0.71	0.54	0.381
2.5	45					4.41	1.43	1.32	0.79	9.02	2.20	0.64	0.79	0.61	0.382
4.5	28	4		2.80	2.20	5.68	1.42	1.69	0.78	12.1	2.98	0.68	1.02	0.60	0.379
2.8	45														

Продолжение табл. 16.

№ профиля		Размеры			Площадь профиля		Вес 1 пог. м		Справочные величины для осей						
		B	b	d					x-x	y-y	$X_1 - X_1$	$Y_1 - Y_1$	u-u		
		мм			$I_x$	$I_y$	$i_x$	$i_y$	$I_{X1}$	Расстояние от центра тяжести $Y_0$	$I_{Y1}$ мм <sup>4</sup>	Расстояние от центра тяжести $X_0$	$I_{u-u}$	$I_{v-v}$	$tg \alpha$ Угол наклона оси
					см <sup>4</sup>	см <sup>4</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	
5					6.17	1.99	1.60	0.91	12.4	1.60	3.26	0.72	1.18	0.70	0.403
3.2		50	32	4	7.98	2.56	1.59	0.90	16.6	1.65	4.42	0.76	1.52	0.69	0.401
5.6					10.1	3.30	1.79	1.02	20.3	1.80	5.43	0.82	1.95	0.79	0.407
3.6		56	36	4	11.4	3.70	1.78	1.02	23.2	1.82	6.25	0.84	2.19	0.78	0.406
					13.8	4.48	1.77	1.01	29.2	1.86	7.91	0.88	2.66	0.78	0.404
6.3					16.3	5.16	2.01	1.13	33.0	2.03	8.51	0.91	3.0	0.87	0.397
4.0		63	40	5	19.9	6.26	2.00	1.12	41.4	2.08	10.8	0.95	3.73	0.86	0.396
					23.3	7.28	1.99	1.11	49.9	2.12	13.1	0.99	4.36	0.86	0.393
					29.6	9.15	1.96	1.09	66.9	2.20	17.9	1.07	5.58	0.85	0.386

Продолжение табл. 16.

Размеры		Справочные величины для осей										Угол наклона оси $ig\alpha$		
		$x-x$		$y-y$		$x_1-x_1$		$y_1-y_1$		$u-u$				
		$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{x1}$	$i_{x1}$	$I_{y1}$	$i_{y1}$	$I_{u1}$	$i_{u1}$			
7	4.5	70	3.98	25.3	2.23	8.25	1.28	51.0	2.25	13.6	1.03	4.88	0.98	0.407
7.5	5	75	4.79	34.8	2.39	12.5	1.43	69.7	2.39	20.8	1.17	7.24	1.09	0.436
8	5	80	7.43	52.4	2.35	18.5	1.40	112	2.52	34.2	1.29	10.9	1.07	0.430
9	5.6	90	5.92	49.0	2.55	14.8	1.40	102	2.65	25.2	1.17	8.88	1.08	0.386
5.6	6	56	6.60	70.6	2.88	21.2	1.58	145	2.95	35.2	1.28	12.7	1.22	0.384

Продолжение табл. 16.

№ профиля	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей								$I_{y_1}$	$I_{y_2}$	Угол наклона оси $I_{g\alpha}$		
	B	b	d			$x-x$		$y-y$		$x_1-x_1$		$y_1-y_1$					$i-i$	
						$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{x_1}$	Расстояние от центра тяжести $Y_{p.c}$	$I_{y_1}$	Расстояние от центра тяжести $X_{p.c}$				$I_{i_1}$	$I_{i_2}$
10 6,3	100	63	6	98,3	3,20	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393				
			7	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392				
			8	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391				
			10	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387				
11			6,5	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402				
7	110	70	7	152	3,52	48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402				
			8	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400				
12,5			7	227	4,01	73,7	2,29	452	4,01	119	1,80	43,4	1,76	0,407				
8	125	80	8	256	4,00	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406				
			10	312	3,98	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404				
			12	365	3,95	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	0,400				

Продолжение табл. 16.

№ профиля		Размеры		Справочные величины для осей												
				x - x		y - y		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> - y <sub>1</sub>		u - u				
				$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{x1}$	Расстояние от центра тяжести $Y_0$	$I_{y1}$	Расстояние от центра тяжести $X_0$	$I_{u1}$	$I_{u2}$	$lg \alpha$		
				Вес 1 пог. м		Площадь профиля										
		мм		см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см
14	9	140	90	364	4.49	120	2.58	727	4.49	194	2.03	70.3	1.98	0.411		
				444	4.47	146	2.56	911	4.58	245	2.12	85.5	1.96	0.409		
				606	5.15	186	2.8 <sup>±</sup>	1221	5.19	300	2.23	110	2.20	0.391		
16	10	160	100	667	5.13	204	2.8 <sup>±</sup>	1359	5.23	335	2.28	121	2.19	0.390		
				784	5.11	239	2.82	1634	5.32	405	2.36	142	2.18	0.388		
				897	5.08	272	2.80	1910	5.40	477	2.43	162	2.16	0.385		
18	11	180	110	952	5.80	276	3.12	1933	5.88	444	2.44	165	2.42	0.375		
				1123	5.77	324	3.10	2324	5.97	537	2.52	194	2.40	0.374		

Продолжение табл. 16.

№ профиля	Размеры			Площадь профиля	Вес 1 пог. м	Справочные величины для осей										
	B	b	p			x-x		y-y		X <sub>1</sub> -X <sub>1</sub>		Y <sub>1</sub> -Y <sub>1</sub>		u-u		
						I <sub>x</sub>	i <sub>x</sub>	I <sub>y</sub>	i <sub>y</sub>	I <sub>XI</sub>	Расстояние от центра тяжести Y <sub>0</sub>	I <sub>YI</sub> Min	Расстояние от центра тяжести X <sub>0</sub>	I <sub>u</sub>	I <sub>u</sub> <sup>min</sup>	Расстояние от центра тяжести X <sub>0</sub>
мм	мм	мм	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см	см <sup>4</sup>	см
20	200	125	1801	11	27,4	34,9	6,45	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392
				12	29,7	37,9	6,43	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392
				14	34,4	43,9	6,41	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390
				16	39,1	49,8	6,38	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388
25	250	160	4545	12	37,9	48,3	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410
				16	49,9	63,6	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408
				18	55,8	71,1	7,99	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407
				20	61,7	78,5	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405

6) См. рис. 20.4.

Таблица 17.

Профили прессованные типа Пр-104<sup>7)</sup>

№ профиля	H	B	d	h	a	R	R <sub>3</sub>	Расстояние от центра тяжести, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Моменты инерции, см <sup>4</sup>			Радиус инерции, см		Теоретический коэффициент $\frac{I_{x_{00}}}{I_{y_{00}}}$	
								x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>		J <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	i <sub>x</sub>	i <sub>y</sub>			
1	20	15	1,5	6	2,5	2,0	0,2	14,25	10,00	0,951	0,559	0,671	-0,39	0,767	0,840	0,271	0,261
2	25	20	1,5	7	2,5	2,0	0,2	19,25	12,50	1,226	1,190	1,609	-0,90	0,985	1,145	0,349	0,337
3	25	20	1,8	7	3,0	2,0	0,2	19,10	12,50	1,432	1,359	1,788	-1,03	0,974	1,117	0,408	0,394
4	25	20	2,0	7	3,0	2,5	0,2	19,00	12,50	1,554	1,460	1,842	-1,11	0,969	1,089	0,443	0,427
5	30	20	2,0	7	3,0	2,5	0,2	24,00	15,00	1,854	2,663	3,381	-2,09	1,198	1,350	0,528	0,510

7) См. рис. 20.5.



Таблица 18.

Профили прессованные типа Пр-105<sup>8)</sup>

№ профиля	H	B	d <sub>7</sub>	d <sub>1</sub>	r	r <sub>2</sub>	Расстояние от центра тяжести, мм		Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Моменты инерции, см <sup>4</sup>			Радиус инерции, см		Теоретический вес 1 пог. м в кг <sup>7</sup>	
							x <sub>0</sub>	y <sub>0</sub>		J <sub>x</sub>	J <sub>y</sub>	J <sub>xy</sub>	i <sub>x</sub>	i <sub>y</sub>	D <sub>н</sub> , D <sub>к</sub> , D <sub>16</sub>	AB, AMц
1	25	18	2.0	1.5	2.0	0.2	17.25	12.50	1.048	1.083	0.673	-0.66	1.016	0.801	0.299	0.288
2	25	18	2.5	2.0	2.5	0.2	17.00	12.50	1.320	1.294	0.802	-0.78	0.990	0.780	0.376	0.363
3	40	25	2.0	1.5	2.0	0.2	24.25	20.00	1.553	4.235	1.878	-2.18	1.661	1.100	0.442	0.427
4	40	25	3.0	2.0	3.0	0.5	24.00	20.00	2.209	5.874	2.714	-3.06	1.631	1.108	0.629	0.607
5	40	25	4.0	3.0	4.0	0.5	23.50	20.00	3.011	7.436	3.382	-3.78	1.571	1.060	0.858	0.823

8) См. рис. 20.б.

Секториальные геометрические характеристики прокатных швеллеров<sup>9)</sup>  
 (При вычислении  $\alpha$  приняты  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа и  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа)

№ профиля	Координата центра изгиба $X_a$ в см	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ в см <sup>6</sup>	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Моменты инерции при чистом кручении $J_K$ в см <sup>4</sup>	Угловая изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{G J_K}{E J_{\omega}}}$ в см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ в см <sup>2</sup>	$\omega_2$ в см <sup>2</sup>	$W_{\omega 1}$ и см <sup>3</sup>	$W_{\omega 2}$ и см <sup>3</sup>		
5	1.08	24.91	2.70	4.26	9.22	5.85	1.350	0.1437
6.5	1.15	64.88	3.86	6.36	16.80	10.21	1.497	0.09375
8	1.22	141.8	5.15	8.75	27.57	16.20	1.940	0.07219
10	1.34	354.8	7.19	12.71	49.35	27.92	2.727	0.05411
12	1.48	768.3	9.54	17.31	80.51	44.39	3.634	0.04245
14 $\frac{a}{b}$	1.58	1512	12.03	22.63	125.4	66.85	4.815	0.03483
	1.39	1711	11.46	23.85	149.32	71.75	6.245	0.03730
16 $\frac{a}{b}$	1.68	2.760	14.74	28.63	187.23	96.49	6.306	0.02950
	1.48	3.099	14.03	30.09	220.87	103.00	8.227	0.03180

Продолжение табл. 19.

№ про- филя	Координата центра изгиба $X_c$ в см	Сектори- альный момент инерции $J_{\omega_0}$ в см <sup>6</sup>	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Моменты при чистом кручении $J_K$ в см <sup>4</sup>	Упругая изгибно- крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_{\omega}}}$ в см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ в см <sup>3</sup>	$\omega_2$ в см <sup>3</sup>	$W_{\omega 1}$ и см <sup>4</sup>	$W_{\omega 2}$ и см <sup>4</sup>		
18 $\frac{a}{b}$	1.83	4745	17.68	35.32	268.41	134.34	8.128	0.02555
	1.57	5292	16.83	37.02	314.50	142.95	10.50	0.02749
20 $\frac{a}{b}$	1.94	7698	21.27	42.46	361.95	181.28	9.84	0.02207
	1.73	8560	20.24	44.45	422.87	192.57	12.50	0.02359
22 $\frac{a}{b}$	2.07	11593	24.84	49.60	466.69	233.73	11.66	0.01958
	1.86	12863	23.63	51.88	544.42	247.95	14.60	0.02079
24 $\frac{a}{b}$ $c$	2.10	15326	27.48	55.21	557.74	277.59	13.21	0.01812
	1.88	17007	26.10	57.76	651.56	294.60	16.47	0.01921
27 $\frac{a}{b}$ $c$	1.67	18640	24.91	60.09	748.35	310.21	21.31	0.02087
	2.14	24337	31.85	66.45	764.11	366.19	16.25	0.01595
	1.91	26883	30.23	69.29	889.34	387.42	20.34	0.01698
	1.70	29365	28.82	72.10	1018.6	407.14	26.34	0.01848

Продолжение табл. 19.

№ про- филя	Координата центра изгиба $X_d$ в см	Сектори- альный момент инерции $J_n$ в см <sup>6</sup>	Секториальные площади		Секториальные моменты сопротивления		Моменты инерции при чистом кручении $J_K$ в см <sup>4</sup>	Упругая изгибно- крутильная характерис- тика $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_n}}$ в см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ в см <sup>2</sup>	$\omega_2$ в см <sup>2</sup>	$W_{n1}$ и см <sup>4</sup>	$W_{n2}$ и см <sup>4</sup>		
30	2.26	36045	37.21	76.54	984.87	478.78	20.39	0.01456
	2.03	40436	35.23	79.98	1147.8	505.61	25.01	0.01535
	1.80	44104	33.59	83.06	1313.0	530.97	31.75	0.01656
33	2.25	52630	41.39	88.54	1271.7	594.43	24.29	0.01326
	2.02	57844	39.27	92.27	1473.2	626.93	29.92	0.01404
	1.80	62890	37.44	95.69	1679.8	657.23	38.04	0.01518
36	2.47	92189	49.50	104.55	1862.2	881.77	38.91	0.01268
	2.24	100430	47.30	108.51	2123.4	925.54	46.56	0.01329
	2.02	108420	45.36	112.18	2390.2	966.48	57.18	0.01417
40	2.43	148100	55.78	121.61	2655.1	1217.2	59.74	0.01240
	2.21	160100	53.51	125.86	2991.7	1272.1	70.78	0.01298
	2.00	171870	51.51	129.80	3336.4	1324.0	85.72	0.01378

9) См. 20.7.

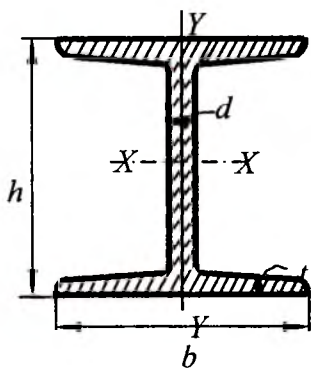


Рис. 20.1.

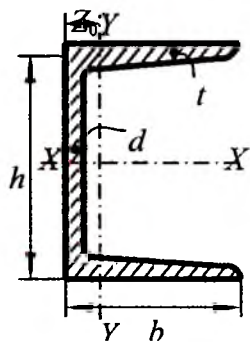


Рис. 20.2.

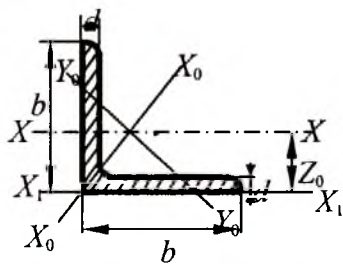


Рис. 20.3.

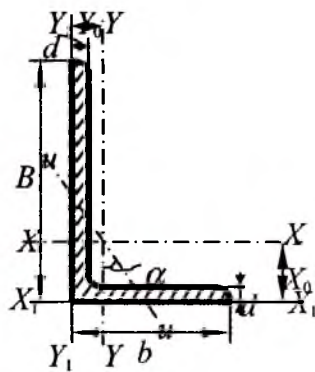


Рис. 20.4.

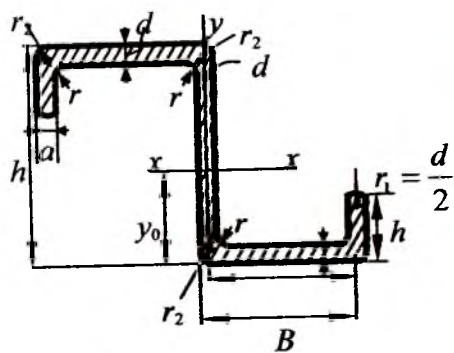


Рис. 20.5.

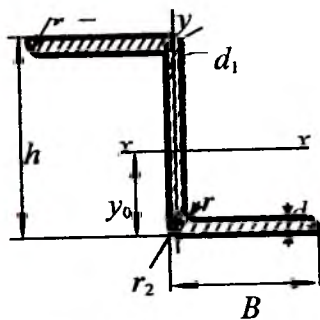


Рис. 20.6.

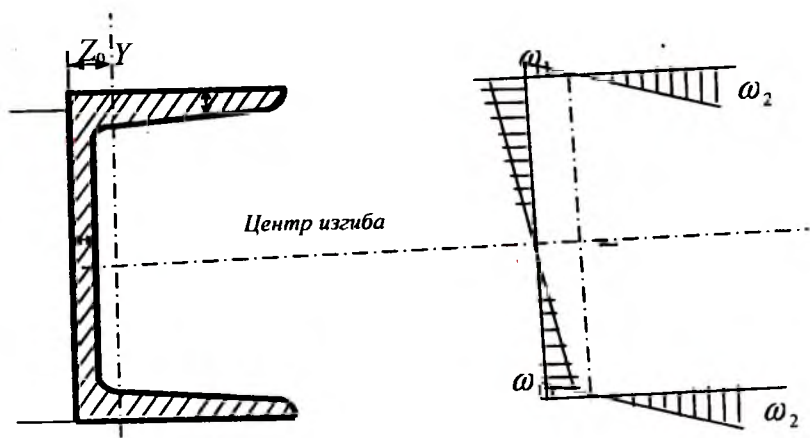


Рис. 20.7.

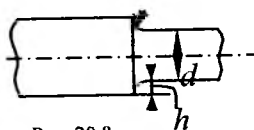


Рис. 20.8.

Таблица 20.

Эффективные коэффициенты концентрации для валов с галтельным переходом при изгибе ( $K_\sigma$ ) и при кручении ( $K_\tau$ )<sup>(10)</sup>

Коэффициенты концентрации	$\sigma_b$ , МПа	$\frac{h}{r}$										
		$\frac{r}{d}$		$\frac{r}{d}$		$\frac{r}{d}$		$\frac{r}{d}$		$\frac{r}{d}$		
		0.03	0.05	0.10	0.02	0.03	0.05	0.01	0.02	0.03	0.01	
$K_\sigma$	400	1.59	1.54	1.38	1.76	1.76	1.70	1.86	1.90	1.89	2.07	2.09
	500	1.63	1.59	1.44	1.81	1.82	1.76	1.90	1.96	1.96	2.12	2.16
	600	1.67	1.64	1.50	1.86	1.88	1.82	1.94	2.02	2.03	2.17	2.23
	700	1.71	1.69	1.55	1.91	1.94	1.88	1.99	2.08	2.10	2.23	2.30
	800	1.76	1.73	1.61	1.96	1.99	1.95	2.03	2.13	2.16	2.28	2.38
	900	1.80	1.78	1.66	2.01	2.05	2.01	2.08	2.19	2.23	2.34	2.45
	1000	1.84	1.83	1.72	2.06	2.11	2.07	2.12	2.25	2.30	2.39	2.52
	1200	1.92	1.93	1.83	2.16	2.23	2.19	2.21	2.37	2.44	2.50	2.66

Продолжение табл. 20.

Коэффициент концентрации	$\sigma_h$ , МПа	$\frac{h}{r}$														
		$\frac{r}{d}$				$\frac{r}{d}$				$\frac{r}{d}$						
		0.03	0.05	0.10	0.02	0.03	0.05	0.01	0.02	0.03	0.01	0.02	0.02			
	400	1.39	1.42	1.37	1.53	1.52	1.50	1.54	1.59	1.61	1.61	1.54	1.59	1.61	2.12	2.03
	500	1.40	1.43	1.38	1.55	1.54	1.53	1.57	1.62	1.65	1.65	1.57	1.62	1.65	2.18	2.08
	600	1.42	1.44	1.39	1.58	1.57	1.57	1.59	1.66	1.68	1.68	1.59	1.66	1.68	2.24	2.12
	700	1.44	1.46	1.42	1.59	1.59	1.59	1.61	1.69	1.72	1.72	1.61	1.69	1.72	2.30	2.17
$K_t$	800	1.45	1.47	1.43	1.61	1.61	1.62	1.64	1.72	1.74	1.74	1.64	1.72	1.74	2.37	2.22
	900	1.47	1.50	1.45	1.62	1.64	1.65	1.66	1.75	1.77	1.77	1.66	1.75	1.77	2.42	2.26
	1000	1.48	1.51	1.46	1.65	1.66	1.68	1.68	1.79	1.81	1.81	1.68	1.79	1.81	2.48	2.31
	1200	1.52	1.54	1.50	1.68	1.71	1.74	1.73	1.86	1.88	1.88	1.73	1.86	1.88	2.60	2.40

<sup>10)</sup> См. рис. 20.7.



Таблица 21.

Коэффициенты концентрации  $K_{сD}$  и  $K_{тD}$  для валов с посаженными деталями

Коэффициенты концентрации	Диаметр $d_{нD}$ , мм	Посадка	Класс	$\sigma_{нD}$ , МПа							
				400	500	600	700	800	900	1000	1200
$K_{сD}$	30	Пр	Н	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,25
				1,69	1,88	2,06	2,25	2,44	2,63	2,82	3,19
				1,46	1,63	1,79	1,95	2,11	2,28	2,44	2,76
	50	Пр	Н	2,75	3,05	3,36	3,66	3,96	4,28	4,60	5,20
				2,06	2,28	2,52	2,75	2,97	3,20	3,45	3,90
				1,80	1,98	2,18	2,38	2,57	2,78	3,00	3,40
100 и более	Пр	Н	2,95	3,28	3,60	3,94	4,25	4,60	4,90	5,60	
			2,22	2,46	2,70	2,96	3,20	3,46	3,98	4,20	
			1,92	2,13	2,34	2,56	2,76	3,00	3,18	3,64	
$K_{тD}$	30	Пр	Н	1,75	1,90	2,05	2,20	2,35	2,50	2,65	2,95
				1,41	1,53	1,64	1,75	1,86	1,98	2,09	2,31
				1,28	1,38	1,47	1,57	1,67	1,77	1,86	2,06
	50	Пр	Н	2,05	2,25	2,52	2,60	2,78	3,07	3,26	3,62
				1,64	1,87	2,03	2,15	2,28	2,42	2,57	2,74
				1,48	1,60	1,71	1,83	1,95	2,07	2,20	2,42
100 и более	Пр	Н	2,17	2,37	2,56	2,76	2,95	3,16	3,34	3,76	
			1,73	1,88	2,04	2,18	2,32	2,48	2,80	2,92	
			1,55	1,68	1,83	1,94	2,06	2,20	2,31	2,58	

Таблица 22.

## Секториальные геометрические характеристики прокатных двутавров

(При вычислении  $\alpha$  приняты  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа и  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа)

№ профиля	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ в см <sup>6</sup>	Секториальная площадь для крайней точки профиля $\omega_{MAX}$ в см <sup>2</sup>	Секториальный момент инерции $W_{\omega}$ в см <sup>4</sup>	Момент инерции при чистом кручении $J_K$ в см <sup>4</sup>	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{G J_K}{E J_{\omega}}}$ в см <sup>-1</sup>
10	644.3	15.25	42.26	2.873	0.04122
12	1353	20.10	67.33	4.243	0.03457
14	2560	25.54	100.23	5.911	0.02966
16	4879	32.25	151.30	8.406	0.02562
18	8219	38.90	211.28	11.37	0.02295
20	$\frac{a}{b}$ 13121	46.15	284.31	14.81	0.02074
	$\frac{a}{b}$ 13857	47.05	294.50	17.85	0.02215
22	$\frac{a}{b}$ 22773	55.91	407.33	20.32	0.01844
	$\frac{a}{b}$ 23930	56.90	420.55	24.06	0.01958
24	$\frac{a}{b}$ 33799	64.48	524.15	25.57	0.01698
	$\frac{a}{b}$ 35426	65.57	540.25	30.12	0.01800
27	$\frac{a}{b}$ 52987	76.08	690.99	31.93	0.01515
	$\frac{a}{b}$ 55414	77.92	711.21	37.60	0.01000
30	$\frac{a}{b}$ 76704	88.38	867.93	38.83	0.01289
	$\frac{b}{c}$ 80114	89.75	892.60	45.78	0.01475
	$\frac{a}{c}$ 83612	91.13	917.50	55.23	0.01587
33	$\frac{a}{b}$ 107106	100.69	1064.3	46.19	0.01281
	$\frac{b}{c}$ 111780	102.21	1093.6	54.49	0.01363
	$\frac{a}{c}$ 116520	103.73	1123.3	65.74	0.01466

№ профиля	Секториальный момент инерции $J_{\omega}$ в $\text{см}^6$	Секториальная площадь для крайней точки профиля $\omega_{MAX}$ в $\text{см}^2$	Секториальный момент инерции $W_{\omega}$ в $\text{см}^4$	Момент инерции при чистом кручении $J_K$ в $\text{см}^4$	Упругая изгибно-крутильная характеристика $\alpha = \sqrt{\frac{G J_K}{E J_{\omega}}}$ в $\text{см}^{-1}$	
36	$\frac{a}{b}$	154820	115.19	1344.0	56.85	0.01183
	$\frac{b}{c}$	161210	116.85	1379.6	66.72	0.01256
	$\frac{c}{a}$	167760	118.51	1415.6	79.99	0.01348
40	$\frac{a}{b}$	228900	134.13	1706.6	68.75	0.01070
	$\frac{b}{c}$	237950	136.00	1749.6	80.68	0.01137
	$\frac{c}{a}$	247210	137.85	1793.3	96.55	0.01220
45	$\frac{a}{b}$	376630	159.75	2357.6	95.31	0.00981
	$\frac{b}{c}$	390770	161.86	2414.4	111.3	0.01041
	$\frac{c}{a}$	405220	163.96	2471.5	131.8	0.01113
50	$\frac{a}{b}$	611990	187.10	3270.9	131.2	0.009038
	$\frac{b}{c}$	633900	189.44	3346.2	150.3	0.009504
	$\frac{c}{a}$	656270	191.79	3421.8	174.9	0.010070
55	$\frac{a}{b}$	906350	216.79	4180.8	159.9	0.008198
	$\frac{b}{c}$	937220	219.36	4272.5	182.7	0.008617
	$\frac{c}{a}$	968720	221.94	4364.8	211.5	0.009119
60	$\frac{a}{b}$	1349900	251.22	5373.4	195.5	0.007427
	$\frac{b}{c}$	1393200	254.04	5484.2	221.9	0.007790
	$\frac{c}{a}$	1437300	256.86	5595.7	255.3	0.008226

## ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Миролюбов И.Н., Енгаличев С.А., Сергиевский Н.Д. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1985.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под ред. Вольмира А.С. М.: Наука, 1984.
3. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1982.
4. Винокуров А.И. Сборник задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1990.
5. Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей технических высших учебных заведений, кроме строительных. М.: Высшая школа, 1984.
6. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под ред. Уманского А.А. М.: Наука, 1973.
7. Лексашев Ю.Ф. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов. Ташкент. ТИТЛП, 1976.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1960.
9. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1989.
10. Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1984.
11. Лексашев Ю.Ф. Расчетно-проектировочные работы по сопротивлению материалов. Ташкент. ТИТЛП, 1976.
12. Сборник задач по сопротивлению материалов. Под ред. Александрова А.В. М.: Высшая школа, 1977.
13. Афанасьев А.М., Мартин В.А. Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1975.
14. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М.: Высшая школа, 1973.
15. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1959.

16. Качурин В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1972.

17. Беляев Н.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1962.

18. Никифоров С.Н. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1966.

19. Эргашев М. Материаллар қаршилиги ҳисоблаш-лойиҳалаш ишлари. Тошкент: Молия, 2003.

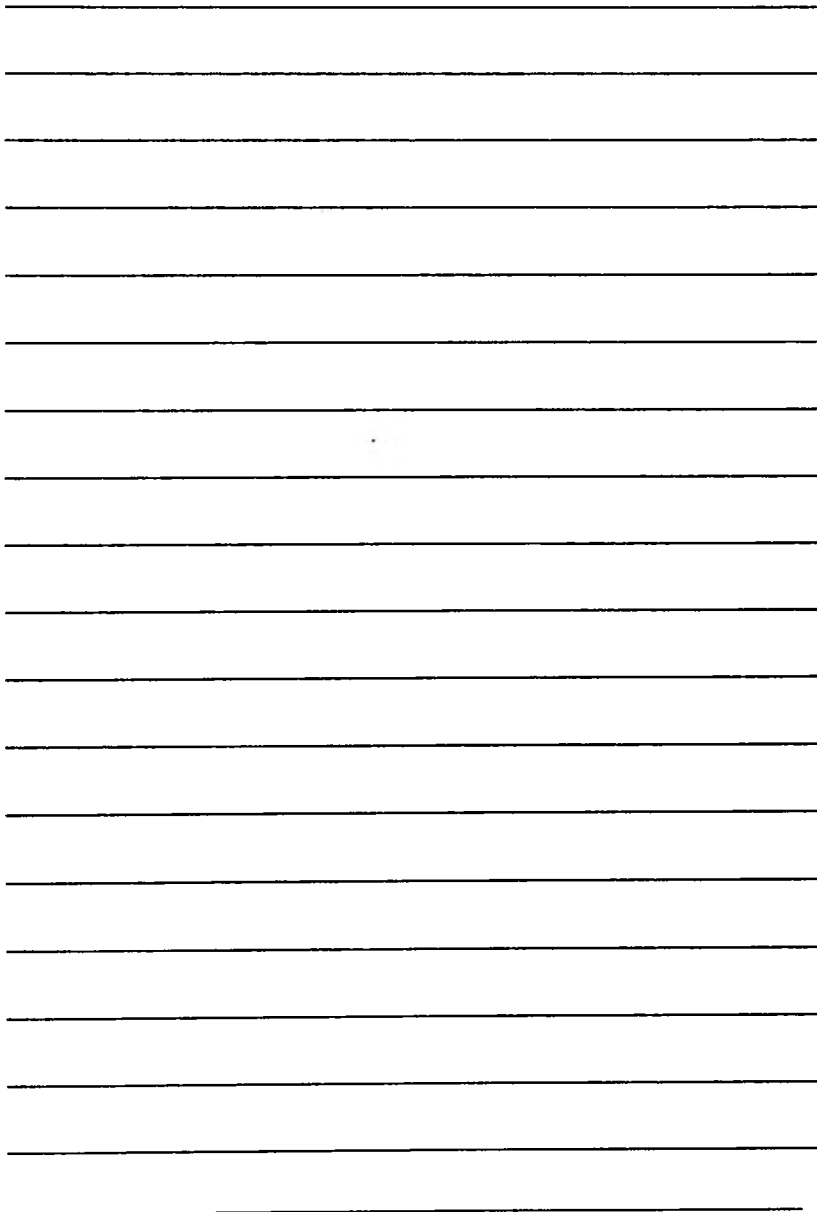
## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. Растяжение и сжатие .....	5
Глава 2. Теория напряженного состояния.....	59
Глава 3. Сдвиг. Расчеты на срез и смятие. Расчет заклепочных соединений.....	76
Глава 4. Геометрические характеристики плоских	92
Глава 5. Расчет вала на прочность.....	115
Глава 6. Построение эпюры внутренних перерезывающих сил и изгибающих моментов при плоском изгибе. Подбор сечение бал-	139
Глава 7. Главные напряжения и полная проверка прочности балки.....	152
Глава 8. Перемещения при изгибе. Метод начальных параметров	162
Глава 9. Статически неопределимые задачи при плоском изгибе. Балки переменного сечения.	

Температурные напряжения при изгибе.....	165
Глава 10. Многопролетные балки.....	187
Глава 11. Расчет прочности плоских рам.....	206
Глава 12. Косой изгиб. Изгиб с растяжением.....	229
Глава 13. Криволинейные стержни.....	247
Глава 14. Внецентренное сжатие и растяжение стержней. Растяжение или сжатие с изгибом.....	257
Глава 15. Изгиб с кручением .....	263
Глава 16. Устойчивость сжатых стержней.....	279
Глава 17. Динамические силы. Упругие колебания.....	291
Глава 18. Теория удара.....	311
Глава 19. Циклические напряжения. Расчет вала на выносливость.....	321
Глава 20. Приложение.....	345
Использованная литература.....	393







**МАХАМАТРАСУЛ ЭРГАШЕВ**

**РАСЧЕТНО – ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ  
РАБОТЫ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ  
МАТЕРИАЛОВ**

Ташкент – «Fan va texnologiya» – 2007

Редактор: А.Эшов  
Тех редактор: А.Мойдинов  
Корректор: К.Авесбаев  
Компьютерная  
верстка: Х.Гуломов

Разрешено в печать 27.08.07. Формат 60x80 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура  
«Timez Uz». Печать офсетная. Усл. печ.л. 25,0.  
Издат. печ.л. 28,0. Тираж 500. Заказ №62.

Отпечатано в типографии «Fan va texnologiyalar  
Markazining bosmaxonasi». 700003, г. Ташкент,  
ул. Алмазар, 171.

ISBN 978-9943-10-054-1



9 789943 100541