А. М. Половко
И. В. Ганичев

MATHCAD для студента

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2006

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
П52

Половко А. М., Ганичев И. В.

П52 Mathcad для студента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 336 с.: ил.

ISBN 5-94157-596-3

Рассмотрены компьютерные технологии решения математических задач в популярной математической системе Mathcad. Изложены основы алгоритмизации, аналитические и численные методы решения математических и прикладных задач с описанием их достоинств и недостатков, комплексные задачи компьютерной алгебры. Приводятся примеры на каждый из методов и варианты задач для индивидуального обучения.

Для студентов, аспирантов, преподавателей технических вузов и специалистов, применяющих математические вычисления в профессиональной деятельности

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Нина Седых*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Игоря Цырульникова*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 09.12.05.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-596-3

Оглавление

Введение

Наступила эра применения компьютера для решения математических задач — эра использования универсальных систем символьной математики, не требующих программирования и позволяющих выполнять символьные вычисления, существенно расширяющие возможности компьютерной алгебры. Сейчас стало возможно:

- получать решение задачи в виде формулы;
- доказывать теоремы;
- выполнять любые преобразования над математическими выражениями.

Появление систем компьютерной алгебры оказало существенное влияние на методику преподавания естественно-научных дисциплин вузов. Упражнения, лабораторные работы, домашние задания, курсовое и дипломное проектирование стали немыслимы без применения универсальных программных средств символьной математики.

Следует при этом иметь в виду, что эффективное использование систем компьютерной алгебры невозможно без хороших знаний компьютерных технологий решения математических задач.

Особенности решения математических задач с помощью универсальных программных средств символьной математики состоят в следующем:

- алгоритм и методы решения задачи пользователю неизвестны;
- проверка корректности постановки задачи системой не осуществляется;
- причина отсутствия решения пользователю в большинстве случаев неизвестна;
- проверка правильности решения задачи системой не осуществляется.

Эти особенности необходимо учитывать при разработке компьютерных технологий решения задач.

Существует много хороших книг, справочников и учебных пособий для преподавателей, аспирантов и студентов, в которых подробно излагаются универсальные математические системы, такие как Mathematica, Maple, Derive, Mathcad, Matlab и др.

Mathcad одна из наиболее популярных математических систем. Она содержит:

- математический процессор для численных и символьных вычислений;
- текстовый, формульный и графический редакторы;
- возможности интерактивной работы с документами;
- возможности диалога с другими математическими системами;
- уникальную графическую систему.

Mathcad имеет простой интерфейс и входной язык математических символов, а также отличается простотой технологий решения математических задач.

Описание Mathcad в полном объеме изложено в приведенном списке литературы. Однако компьютерные технологии решения математических задач в ряде случаев изложены поверхностно. Создается впечатление, что авторы считают компьютерными технологиями встроенные функции и команды. Это далеко не так.

Можно хорошо знать соответствующие функции и команды, свободно владеть компьютером и не решить даже простую задачу.

Компьютерные технологии решения математических задач начинаются с постановки задачи и включают в себя:

- ♦ выбор метода решения задачи;
- ♦ подбор функций и команд, реализующих выбранный метод;
- ♦ процедуры решения задачи;
- ♦ проверку достоверности откликов.

Данная книга посвящена изложению компьютерных технологий решения математических задач в среде Mathcad. Ее особенностями являются:

- ♦ полнота и одновременно лаконичность изложения компьютерных технологий решения математических задач;
- ♦ большое количество примеров, практически на каждый из методов;
- ♦ наличие задач, которые могут быть индивидуальными заданиями студентам для упражнений, при выполнении домашних заданий и лабораторных работ;
- ♦ ориентация на доступное освоение последних версий англоязычных пакетов Mathcad, независимо от стадии изучения комплекса вузовских дисциплин, включая информатику, иностранный язык, математику;
- ♦ практическая пригодность описанных компьютерных технологий решения математических задач для всех последних версий систем Mathcad.

Авторы проверили решение всех задач на версиях от 8/2000 и выше вплоть до 12.

Эти особенности выгодно отличают данную книгу от других объемных книг, посвященных изучению системы Mathcad и компьютерных технологий решения математических задач, и, безусловно, книга удовлетворит преподавателей, аспирантов и студентов вузов по содержанию и цене.

Не следует только думать, что содержание книги ограничено студенческими программами, а потому упрощено и примитивно. Это далеко не так.

Компьютерные технологии решения математических задач в среде Mathcad изложены в книге в большинстве случаев в том же объеме (а в ряде случаев и в большем), что и в книгах, в которых Mathcad описывается в полном объеме.

Она будет полезна всем, кто по роду своей деятельности должен решать математические задачи.

ГЛАВА 1

Основы диалога пользователя с системой Mathcad

В данной главе приводятся начальные сведения для быстрой подготовки начинающего пользователя к эффективной работе в англоязычной среде Mathcad 12.

Система Mathcad обладает понятным и графически развитым интерфейсом. При дальнейшем знакомстве с интерфейсом Mathcad путем перемещения указателя (курсора)  мыши над объектами рекомендуем:

- отмечать для себя все видимые сообщения и изменения рабочего пространства;
- активно ставить собственные эксперименты;
- щелчком левой и правой кнопок мыши выделять объекты для последующего самостоятельного систематического исследования их свойств;
- обращать внимание на переводы команд основного меню.

Но перевод не всегда дословный. Особенно когда одно обозначение в оригинале отражает разные понятия, принимается функциональная трактовка названия команды. Необходимость образно и кратко выразить возможности элементов интерфейса приводит к отступлению от буквального перевода, что часто проявляется и в авторских различных трактовках русификаций предыдущих версий пакета.

1.1. Главное окно системы

Главное окно системы показано на рис. 1.1. В результате настроек оно может приобрести вид, удобный для конкретной работы пользователя. Основные видимые элементы окна выделены цифрами от 1 до 11.

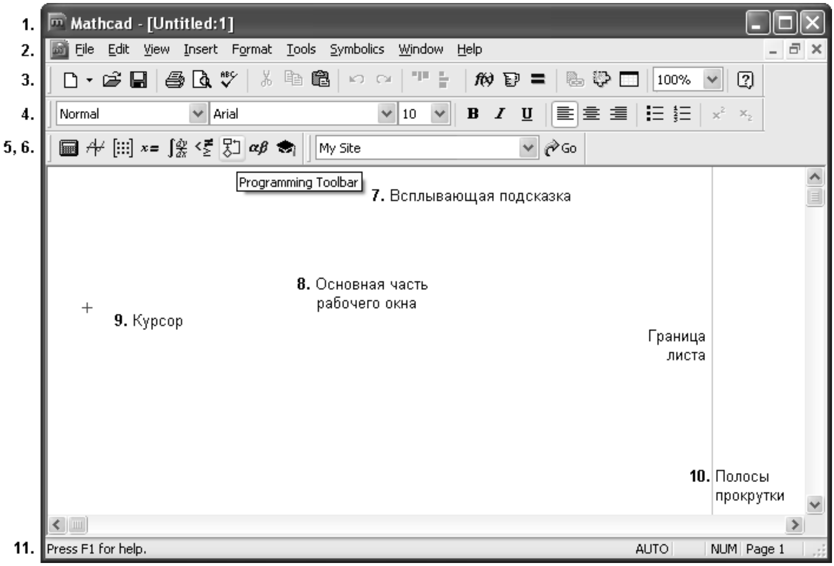


Рис. 1.1. Главное окно системы и элементы интерфейса

Верхняя строка (1) окна включает заголовок с именем открытого документа, кнопки  свертывания, развертывания и закрытия документа.

В строке (2) находится главное меню системы, предоставляющее доступ ко всем функциям и командам программы. В правом углу находятся кнопки управления  с открытым активным окном документа.

Далее располагаются следующие инструментальные панели (3—6):

- **Standard** — стандартная панель инструментов (3);
- **Formatting** — панель форматирования (4);
- **Math** — панель математики (5);
- **Resources** — панель ресурсов (6).

Самой используемой является панель **Math** с девятью кнопками вывода панелей (палитр) с командами соответствующей тематики.

Весь инструментарий подвижен и может быть размещен даже за рамками окна.

При открытии Mathcad в очередном сеансе инструментарий оказывается в том же месте, как он был позиционирован перед окончанием предшествующего сеанса работы.

Кнопки инструментов имеют систему всплывающих подсказок (7).

Основная часть рабочего окна (8) отводится под область ввода математических выражений, поясняющего текста, графиков и таблиц, наглядно представляющих результаты и исходные данные.

На экране постоянно располагается небольшой курсор (9) начала области ввода математического выражения или текста. Он имеет вид красного крестика (+).

Следует особо отметить наличие видимой тонкой вертикальной линии в правой части окна — границы листа, за которой начинается другой лист.

Внизу и справа окно окаймлено полосами или линейками горизонтальной и вертикальной прокрутки (10).

Предупредительная пунктирная линия нижней границы листа появляется при вертикальной прокрутке окна. Нижняя граница считается "мягкой" в отличие от боковой границы. При наложении на нее любого объекта Mathcad она может быть сдвинута по специальной команде.

Нижняя строка состояний (11) отображает важную информацию — оперативную справку о работе с объектами Mathcad в контексте складывающейся ситуации.

В окне могут быть размещены разные объекты Mathcad (рис. 1.2).

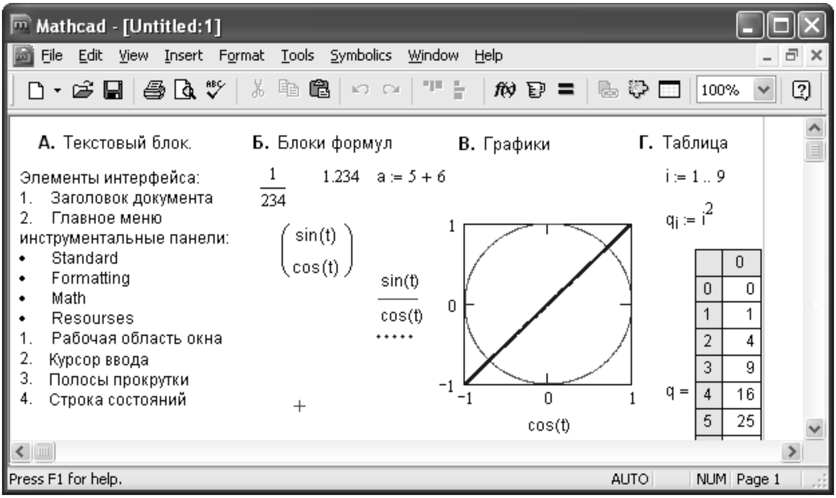


Рис. 1.2. Основные объекты Mathcad

Пользователь после приобретения даже небольшого опыта заметит способность интерфейса предлагать помощь и информацию о том, как надо действовать. Пониманию логики и динамики работы в среде Mathcad способствует систематическое изучение меню как ведущего элемента интерфейса.

Поставим довольно легкий в первой своей части эксперимент (реализуемый с помощью клавиатуры по заданию на рис. 1.3), но поручим читателю самостоятельно найти на панели **Math** и вывести в рабочее окно палитры **Evaluation** и **Calculator**, а также провести численные расчеты.

Шаблоны с черными прямоугольниками маркеров — первое, что бросается в глаза на левом поле рисунка (на рисунке они дополнительно выделены цветом). Шаблоны операций заполняются операндами — числами, переменными, составными выражениями. Вводятся операнды в позиционные указатели-маркеры.

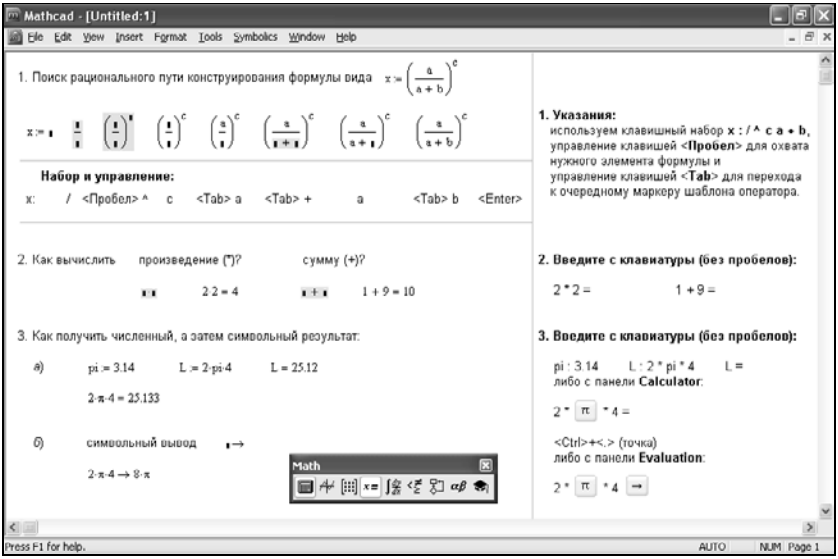


Рис. 1.3. Пример ввода формул и элементарных вычислений

При вводе и редактировании документа курсор состоит из двух элементов — вертикального и горизонтального отрезков синего цвета. Вертикальный отрезок показывает место ввода или редактирования, горизонтальный — протяженность вводимого элемента выражения. Показательно, что при вводе числа угловой курсор всегда охватывает его полностью как единый элемент, по мере ввода очередных разрядов увеличивается длина нижней черты курсора. Такой курсор можно назвать правым угловым указателем, при необходимости перейти к левому угловому указателю используется клавиша <Insert>.

При вводе очередной операции надо всегда творчески осмысливать ситуацию, учитывая естественный приоритет операций и скобки в заданном выражении, меняющие этот приоритет.

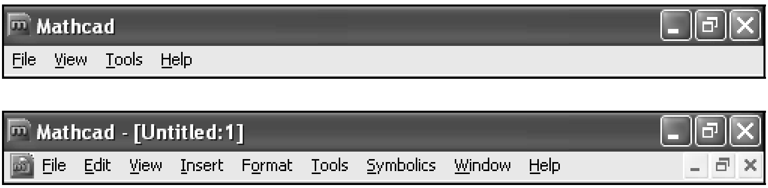
Особо отметим роль клавиши <Пробел> при конструировании сложных математических выражений. Действие операций в соответствии с исходной формулой часто распространяется на подвыражение: перед указанием самой операции его надо охватить курсором (распространить на него нижнюю черту-подчеркивание курсора), многократно используя клавишу <Пробел>. Характерно, что скобки в большинстве ситуаций расставляются автоматически, и к этому надо привыкнуть. Примером является фрагмент управления, представленный на рис. 1.3. При наборе в этом задании клавиш <Пробел> и <^> появляются скобки перед вводом следующего символа (в данном случае им является первая переменная).

Можно убедиться в том, что для уверенной работы, по крайней мере, надо знать, где расположены те или иные команды, как вводить математические операции, в какой форме показать результат.

Это особо важно для рационального использования интерфейса, управления режимами вычислений и способами представления результатов.

1.2. Главное меню системы

Главное меню системы представлено во второй строке под заголовком документа главного окна (рис. 1.4). При наведении указателя мыши и перемещении его вдоль меню от **File** (Файл) до **Help** (Справка) последовательно выделяются заголовки или пункты меню.



а

б

Рис. 1.4. Главное меню системы: при отсутствии открытых документов (*а*), при работе с документом (*б*)

Каждый пункт главного меню при нажатии на него открывает собственное меню следующего уровня (подменю). В последнем сосредоточены команды, сходные по общности действий или по направленности на тот или иной объект. Внутри каждого подменю команды Mathcad в зависимости от вида воздействия на управляемые объекты разбиты на подгруппы, что отмечено линиями-разделителями.

При отсутствии открытого документа в среде Mathcad список пунктов главного меню сокращается до четырех (рис. 1.4, *а*). Для приведения меню к такому виду закройте активный документ крайней правой кнопкой управления в строке главного меню. Рассмотрим список действующих команд в данном режиме. На рис. 1.5, *а—г* показаны поочередно раскрывающиеся подменю. На самом деле в системе одновременно все списки увидеть нельзя.

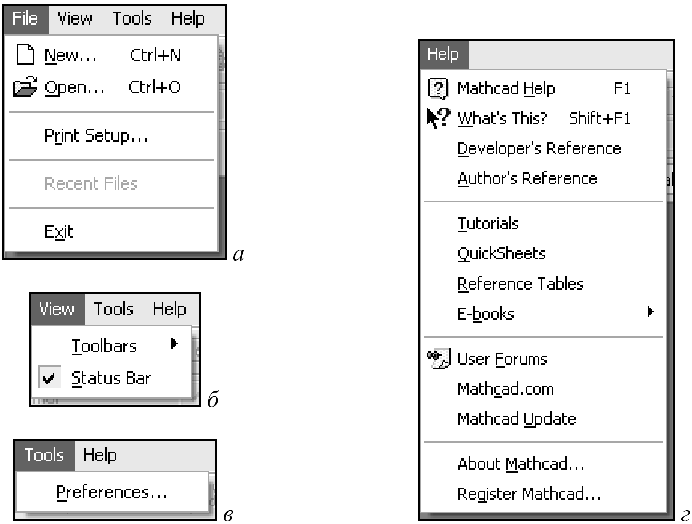
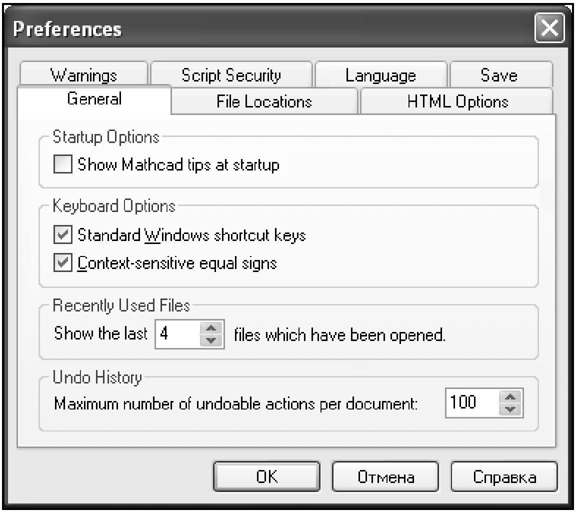


Рис. 1.5. Сокращенный состав меню при отсутствии открытого документа

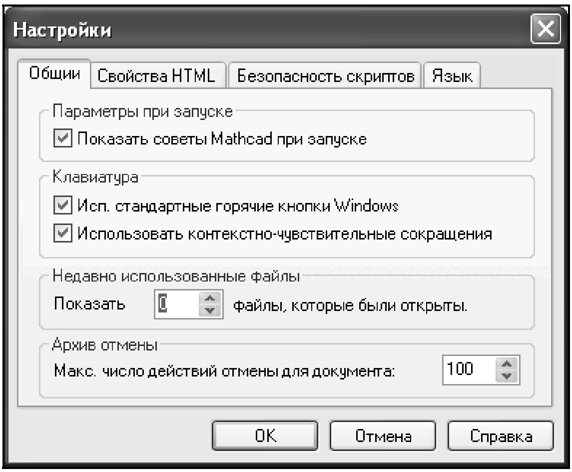
В дальнейшем при работе в конкретных ситуациях отдельные команды могут оказаться недоступными, их названия будут выделены серым цветом.

Проведем предварительную несложную настройку окружения среды.

Вместо пункта **Recent Files** (Недавние файлы) меню **File** (рис. 1.5, *а*) размещается список использованных файлов, задать длину которого от 0 до 9 можно по команде **Preferences** (Настройки) меню **Tools** (Инструменты). Окно **Preferences** с вкладкой **General** (Общие) продемонстрировано на рис. 1.6, *а*.



а



б

Рис. 1.6. Вид вкладки **General** окна **Preferences** в англоязычной (*а*) и в русифицированной (*б*) системах

Для более легкого понимания настроек на вкладке **General** параллельно на рис. 1.6, *б* приведен фрагмент аналогичной вкладки русифицированного пакета Mathcad 11. Обратите внимание на счетчик **Show the last files which have been opened** (Показать последние файлы, которые были открыты). Задание нуля в счетчике поможет очистить список **Recent Files**.

Общий вид и различия окон на рис. 1.6, *а* и *б* свидетельствуют о существенном прогрессе при переходе на новую версию Mathcad.

Практика показала, что эффективнее сразу изучать пакет на языке оригинала, чем дожидаться русификации, которая, как правило, запаздывает и не во всем удачна и точна, т. к. перевод часто носит механический характер.

Командную логику работы все же легче воспринимать на родном языке.

Для понимания того, как устроен и какие функциональные возможности имеет интерфейс, будем устанавливать логические и смысловые связи между его элементами. Лишний упор на точность перевода порой этому только вредит.

Не ограничиваясь принятой нормой представления перевода в разрозненных текстовых абзацах, сконцентрируем перевод в едином блоке, как основу восприятия функциональных отношений команд во время изучения вида, структуры и функций интерфейса.

В книге переводы расположены параллельно меню на стилизованных развернутых "свитках", которые символически едва намечены на рисунках. Их расположение с левой стороны не закрывает основную часть рисунка. Взгляд человека, как правило, автоматически скользит по меню и задерживается на том объекте, где сосредоточена новая, неизвестная и крайне необходимая информация. Переводы же остаются под прицелом периферийного зрения.

Сведение переводов в одно место призвано помочь пользователю как эффективное средство лингвистической поддержки.

Подменю всегда фиксирует некую реальную контекстную доступность команд. Если команда недоступна, то ее название в списке затенено.

Так как в любой иллюстрации интерфейса очень много определяющих (и неизвестных еще читателю) параметров, то их полное описание потребовало бы расстановки перекрестных ссылок, заняло бы много места, что уместно лишь в энциклопедиях. Мы думаем, что пользователь Mathcad после освоения вводных глав на компьютере сам по своей инициативе способен будет ставить интересные эксперименты и решать собственные задачи, делать для себя небольшие открытия.

При составлении директивы и в ее нотации команды отделены вертикальной чертой. Она отражает последовательность и характер действий.

Пример записи директивы — **File | New** (Файл | Новый).

Щелкнув на указанном заголовке главного меню, можно увидеть развернутое соответствующее подменю и, продвигая указатель мыши вниз до нужного пункта, щелкнуть мышью еще раз. В процессе перемещения можно удерживать кнопку мыши нажатой, но тогда при достижении нужного пункта надо ее отпустить.

Вид первых команд двух наиболее характерных пунктов основного меню показан на рис. 1.7.

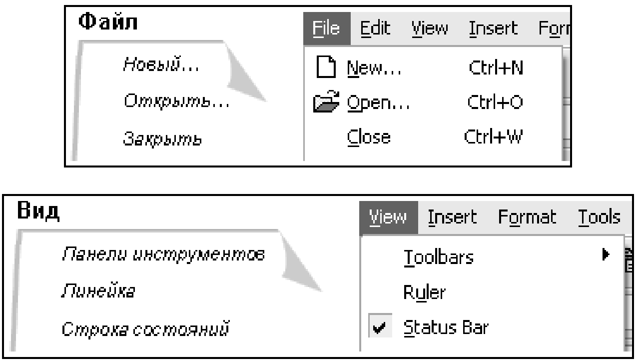


Рис. 1.7. Знакомство со структурой подменю

Восприятие структуры каждой записи меню облегчит в дальнейшем внимательному пользователю выбор собственного удобного для него варианта доступа к командам.

В табл. 1.1 раскрыта очередность указаний важнейших элементов интерфейса, примеры взяты из приведенных на рис. 1.7 первых строк меню **File** и **View**.

Таблица 1.1. Позиционный состав записи команды в меню

№ позиции Состав / Пример №	(1) Пиктограмма	(2) Имя команды	(3) Сопутствующий признак	(4) "Горячие" клавиши
1		**New**	**...**	Ctrl + N
2	(нет)	**Toolbars**	►	(нет)

В строчной записи каждой команды выделены основные фрагменты. Многим командам сопутствует их символический образ — пиктограмма.

Бросается в глаза подчеркивание одной из букв имени команды. По выделенной подчеркиванием букве команда легко инициируется в клавиатурном варианте вызова.

Другой вариант определяется набором особых "горячих" клавиш, которые указаны только для часто используемых команд.

Таким образом, можно выделить следующие четыре потенциально возможных варианта вызова команды, предоставляемые средой:

- ♦ с помощью кнопок-пиктограмм на панели инструментов — нажатием мышью на кнопке (например, );
- ♦ навигацией (передвижением) по пунктам меню — при помощи мыши;
- ♦ нажатием подчеркнутых букв-клавиш;
- ♦ нажатием "горячих" клавиш, предусмотренных, как и пиктограммы, только для отдельных часто используемых команд.

Схема набора по подчеркнутым буквам использует свойство клавиши <Alt> активизировать главное меню, известное по многим программным средам. При нажатии на нее появляется подчеркивание единственной уникальной буквы в каждом заголовке главного меню, а последующим нажатием на интересующую подчеркнутую букву-клавишу открывается подменю. Нажатие третьей клавиши с подчеркнутой буквой из названия нужной команды подменю инициирует ее исполнение (возможно, потребуется задание уточняющих опций или выход на еще одно дополнительное вертикальное меню).

Например, в пункте меню **File** выделена буква F. Именно она является ключом доступа к команде **Print**. Нажатие клавиши <P> открывает диалоговое окно задания опций печати. Общая директива записывается сокращенно в форме <Alt>+<F>, <P>. Причем набор клавиш по этой схеме сугубо последовательный. Таким образом, эффект управления достигается в основном всего за три нажатия упомянутых клавиш.

Этот метод удобнее всего реализовать при условии достаточно большой практики в скоростной работе на клавиатуре, когда переход к управлению мышью означает резкое снижение скорости.

Клавиатурное управление всегда самое оперативное, поэтому изучайте меню, непосредственно работая на компьютере.

Первый вариант вызова команды предусматривает действия с панелями инструментов, где сосредоточены кнопки-пиктограммы. Их применение совместно с получением навыков работы по функционально различным меню наиболее целесообразно.

Второй и третий варианты вызовов ориентированы больше всего непосредственно на систему меню, они самые универсальные, действуют почти для всех команд. Они реализуют соответственно альтернативные способы управления: мышью или клавиатурой.

Четвертый вариант также противостоит навигации по системе меню, используя быстрый клавиатурный вызов команды.

Сопутствующие признаки (знак многоточия **...** и знак стилизованной стрелки ▶) наглядно свидетельствуют о продолжении диалога с указанием опций команды или о концентрации терминальных команд на отдельных панелях. Доступ к последним проходит через дополнительное подменю.

Диалог наиболее характерен для завершения команд. Например, в перечне команд меню **File** только три из них (**Close**, **Save** и **Print Preview**) не имеют диалогового завершения.

Таким образом, строка заголовков главного меню — только видимая часть универсального средства доступа к командам Mathcad и кладезь информации о способах управления.

Директивная цепочка слов, которая может быть достаточно длинной, включает:

- пункт меню (заголовок);
- пункт подменю;
- опции команды, необходимые для завершения конкретного этапа работы (иногда с указанием вкладки диалогового окна и поля, в котором устанавливается опция).

Формально работа с клавиатурным вариантом управления <Alt>+<*буква*>, затем вторая <*буква*> может завершиться обращением к еще одной клавише при наличии символа ▶ в директивной цепочке. Так, например, складывается ситуация при открытии математической палитры команд — <Alt>+<V>, <T>, <M>. Данный вариант показывает всю архаичность этого способа, потребность в таком вызове на практике низка (но потенциально возможна).

Проведем общий обзор пунктов главного меню, ориентируясь на компоновку команд в границах разделителей и содержательные по своей сути переводы команд, что позволит осмыслить разностороннее назначение каждого компонента меню.

1.2.1. Меню *File* (*Файл*)

Команды меню **File** (Файл) выполняют обычные функции, известные для многих программных сред.

Меню включает команды, связанные со следующими действиями:

- создание, открытие и закрытие файлов с документами;
- сохранение файлов;
- пересылка по электронной почте;

- распечатка документов на принтере или в файл печати;
- указание наиболее общих свойств и данных о документе.

В списке меню разделителями отмечены 5 групп команд (рис. 1.8).

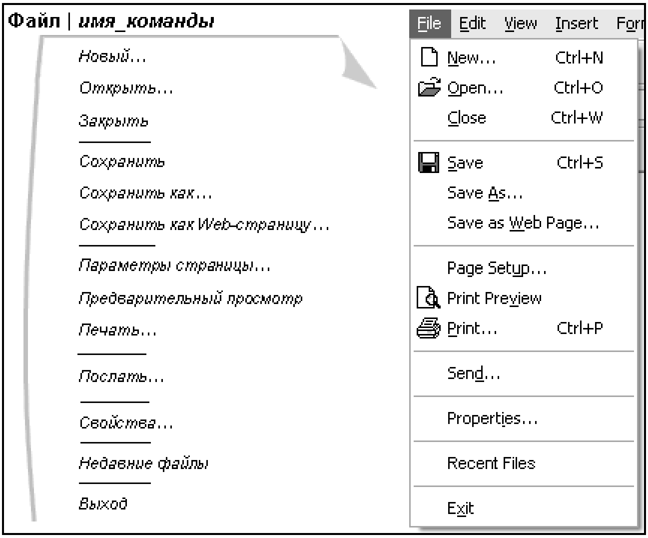


Рис. 1.8. Команды меню **File**

В *первой группе* сосредоточены команды:

- **New** (Новый) — создание нового документа;
- **Open** (Открыть) — открытие ранее созданного и сохраненного файла;
- **Close** (Закрыть) — закрытие файла.

В случаях закрытия редактируемого документа предусмотрено появление диалогового окна (рис. 1.9) с вопросом **Save changes to *имя_файла*?** (Сохранить изменения в файле?). Пользователю надо указать, сохранять или нет документ с введенными изменениями.

Команды *второй группы* позволяют:

- **Save** (Сохранить) — сохранить ранее созданный документ;

- **Save As** (Сохранить как) — сохранить документ в файле в заданном месте на диске;
- **Save as Web Page** (Сохранить как Web-страницу) — подготовить Web-страницу, задавая в диалоговом окне **Save as Web Page Options** (Настройки для сохранения как Web-страницу) опцию предварительного просмотра с помощью браузера (рис. 1.10).

Рис. 1.9. Продолжение в диалоговом окне команды **Close**

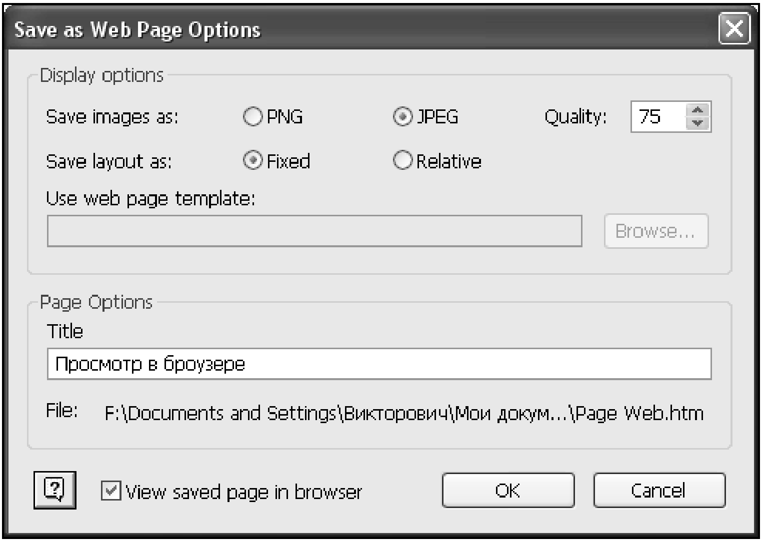


Рис. 1.10. Диалоговое окно **Save as Web Page Options** для сохранения документа как Web-страницы

Третья группа команд обеспечивает стандартные действия для большинства программных сред по подготовке и печати документа на бумаге с предварительной настройкой листа **Page Setup** (Параметры страницы), **Print Preview** (Предварительный просмотр), **Print** (Печать) или сохранения копии в файл (рис. 1.11).

Четвертая и *пятая группы* представлены единственными командами **Send** (Послать) и **Properties** (Свойства) соответственно. Они обеспечивают отправку активного документа по электронной почте и указание метаданных файла-документа соответственно.

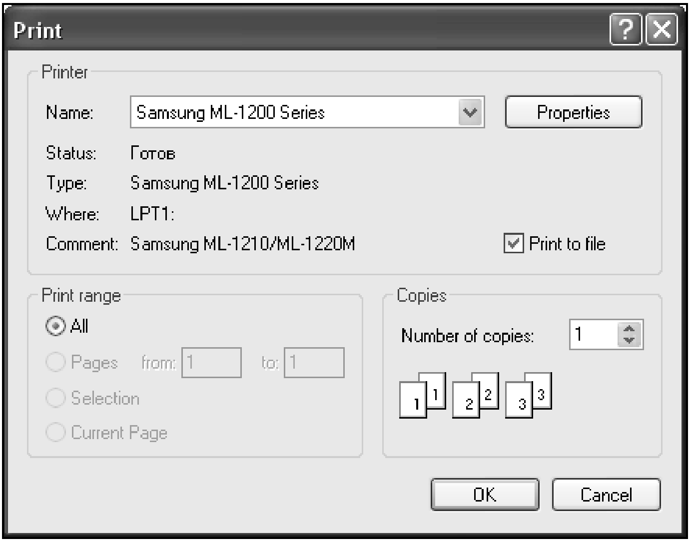


Рис. 1.11. Диалоговое окно **Print** для подготовки документа к печати с указанием печати в файл

Позиция **Recent Files** (Недавние файлы) служит не только для просмотра ограниченного списка файлов, с которыми работал пользователь последнее время, но и предоставляет возможность быстрого открытия документа (заменяя тем самым команду **Open**).

Последняя команда **Exit** (Выход) служит для завершения работы с Mathcad, но если перед этим были зафиксированы некие изменения в документах, то будет выдан запрос на сохранение их перед выходом (см. рис. 1.9).

1.2.2. Меню *Edit* (*Правка*)

Команды меню **Edit** (Правка) имеют вид:

Edit | ***имя_команды***

Меню **Edit** включает команды правки текста:

- ♦ отмена и возврат выполненных действий для рациональной организации редактирования;
- ♦ копирование, перемещение в буфер, вставка обычная и специальная;
- ♦ удаление фрагментов и выделение всех объектов;
- ♦ поиск, замена, переход на указанную страницу;
- ♦ редактирование связей (установленных по команде **Paste Special** (Вставка специальная)) с объектом и редактирование внедренного внешнего объекта (по команде меню **Insert** | **Object** (Вставка | Объект) в том приложении, в котором он создавался.

Структура меню и переводы команд показаны на рис. 1.12.

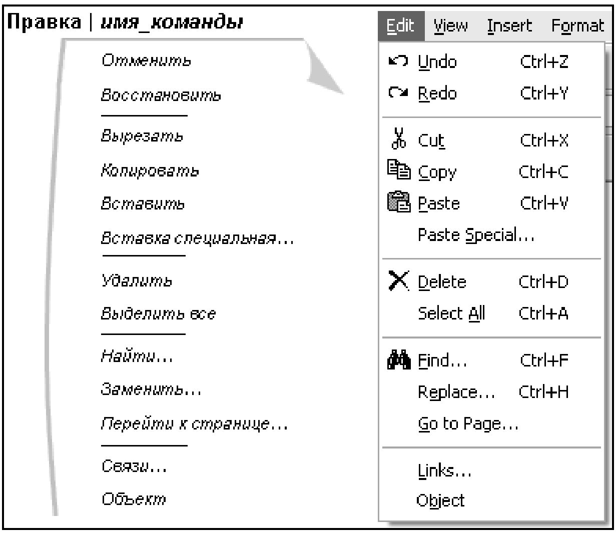


Рис. 1.12. Команды меню **Edit**

Список команд разбит на пять групп и включает шесть пиктограмм.

♦ *Первая группа* команд дает возможность:
  - **Undo** (Отменить) — отменить предшествующие действия по редактированию командами;
  - **Redo** (Восстановить) — возвратить отмененные действия.

♦ *Вторая группа* включает характерные команды любого редактора:
  - **Cut** (Вырезать) — группа выделенных и вырезанных фрагментов размещается в буфере, и содержимое буфера может быть использовано до тех пор, пока не будет обновлено;
  - **Copy** (Копировать) — скопированные фрагменты размещаются в буфере;
  - **Paste** (Вставить) — вставка фрагментов из буфера;
  - **Paste Special** (Вставка специальная) — специальная вставка.

♦ Команды *третьей группы* выглядят так:
  - **Delete** (Удалить) — удаляет отдельные предварительно выделенные объекты;
  - **Select All** (Выделить все) — осуществляет процедуру массового выделения всех объектов в рабочем листе или внутри области, в которой находится курсор. Каждый блок документа охватывается пунктирным контуром.

♦ Команды *четвертой группы* имеют следующее назначение:
  - **Find** (Найти) — позволяет найти заданный текстовый и/или математический фрагмент, в том числе и с указанием в открывшемся окне **Find** режимов **Math whole word only** (Слово целиком) и **Match case** (С учетом регистра) (рис. 1.13);
  - **Replace** (Заменить) — позволяет заменить найденный фрагмент нужными символами;
  - **Go to Page** (Перейти к странице) — служит для быстрого перехода к нужной странице (первой, последней или по указанному номеру).

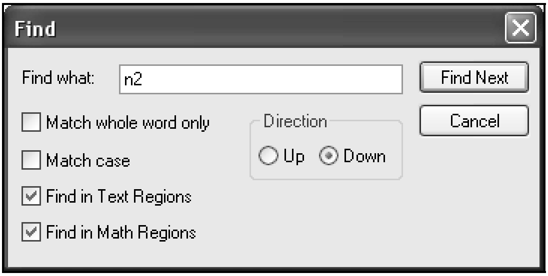


Рис. 1.13. Диалоговое окно **Find**

- Команды *пятой группы* следующие:
  - **Links** (Связи) — управляет связями OLE (Object Linking Embedding, технология связывания и внедрения объектов) с другими приложениями;
  - **Object** (Объект) — активизирует связанное приложение для редактирования внедренного объекта OLE.

1.2.3. Меню *View* (*Вид*)

Команды меню **View** (Вид) записываются следующим образом:

View | ***имя_команды***

Меню **View** служит для управления интерфейсом, внешним видом рабочего поля Mathcad и для выполнения следующих действий:

- установка панелей инструментов, линейки;
- задание вида и содержательного наполнения колонтитулов, обнаружение пересечений созданных областей, ввод и просмотр примечаний в математических выражениях;
- масштабирование и обновление вида экрана.

Набор команд меню **View** показан на рис. 1.14.

Меню содержит три группы команд.

Первая группа команд представляет и вводит в круг действующих (или выводит из него) следующие элементы интерфейса:

- инструментальные панели;
- мерную линейку;
- строку состояния.

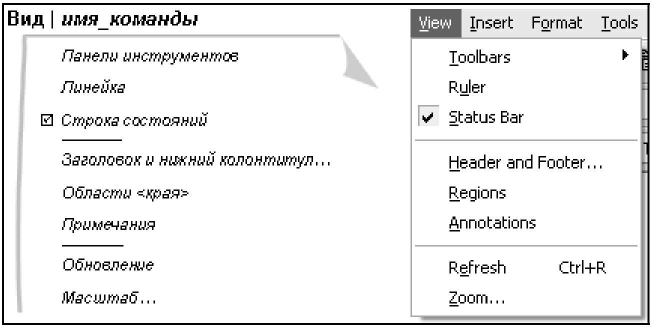


Рис. 1.14. Основные команды меню **View**

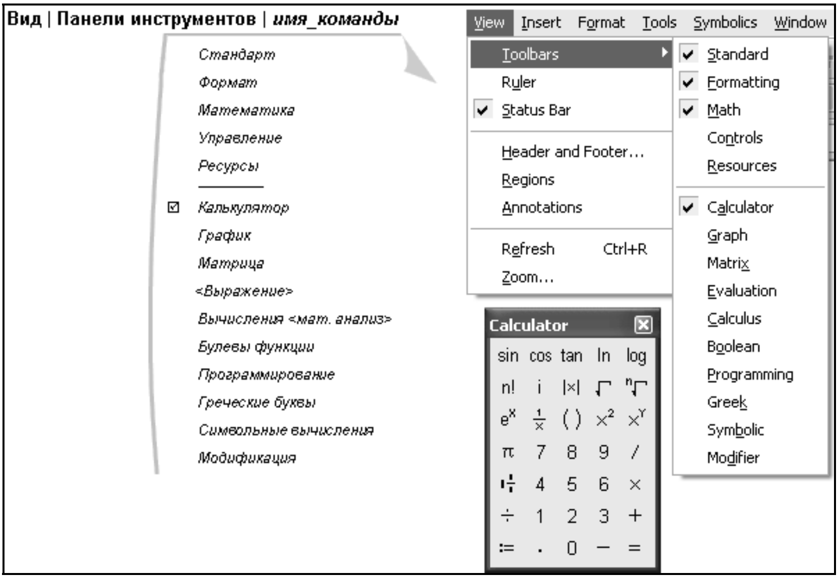


Рис. 1.15. Дополнительное меню команды **View | Toolbars**

Команда **Toolbars** (Панели инструментов) содержит дополнительное подменю (рис. 1.15) для установки пяти инструментальных панелей, а также для выборочного включения через систему меню и контроля установки всех инструментальных компонентов, в том числе и наиболее часто требуемых для работы инструментов панели **Math** (Математика).

Действия завершаются выбором нужного пункта в дополнительном меню. Напомним, что в тех пунктах, которые отмечены стилизованной стрелкой ▸ справа от названия команды, для завершения директивной цепочки надо продолжать движение указателя мыши в направлении списка дополнительного меню.

Пример директивы — **View | Toolbars | Calculator**. При установке инструмента слева от его названия появляется характерная отметка в виде флажка ✔. По этим отметкам и контролируется ранее проведенная установка инструментария.

На рис. 1.15 изображены также установленная палитра **Calculator** (Калькулятор) и отметка в виде флажка, по которой факт установки при необходимости может быть дополнительно проконтролирован.

Очередным щелчком на пункте меню, где имеется отметка, производится выключение ненужной в данный момент математической панели. При этом сопровождающая отметка также пропадает.

В дополнительном меню команды **Toolbars** выделены две группы команд:

- ♦ в верхней группе сосредоточены команды установки панелей инструментов **Standard** (Стандартная), **Formatting** (Форматирование), **Math** (Математика), **Resources** (Ресурсы) и **Controls** (Управление). Последняя содержит интерактивные элементы управления (флажок, переключатель, кнопку, текстовое поле, список и ползунок);
- ♦ в нижней группе расположены команды вывода девяти основных палитр панели **Math**. Дополняет список палитра специальных ключевых слов **Modifier** (Модификация), имеющаяся, в том числе, и на палитре **Symbolic**.

Расположить палитры можно в любом месте, вплоть до выноса за пределы поля, что особенно удобно, когда окно свернуто до небольших, но приемлемых для вашей работы размеров.

Вторая команда первой группы меню **Ruler** (Линейка) устанавливает над рабочей частью окна мерную линейку. Она позволяет оценить линейные размеры объектов и при необходимости изменить размеры зон табуляции, установленные по умолчанию. Табуляторы (ʟ) в поле линейки легко расставляются щелчком мыши. Подробно этот процесс рассмотрим в рамках обращения к контекстному меню в конце данного раздела.

Активизация команды **Ruler** и следующей за ней команды **Status Bar** (Строка состояний) также отмечается появлением флажка слева от позиции команды.

Повторным выбором тех же команд настройки можно исключить их из интерфейса, при этом флажки в данных позициях будут сняты.

Вторая группа в меню **View** содержит следующие команды: **Header and Footer** (Заголовок и нижний колонтитул), **Regions** (Области) и **Annotations** (Примечания).

Первая команда задает ставшие стандартом элементы в оформлении полей страницы вверху и внизу.

Команда **Regions** включает фоновую подсветку, чтобы четко обозначить границы или "края". Последнее приемлемое обозначение действия команды удачно по функциональному смыслу, но не соответствует формальному переводу. Взаимное расположение областей прямоугольной формы, в которых размещены формульные, текстовые и графические блоки, сразу визуально проясняется, видны наложения краев областей, которые нужно тем или иным способом устранить.

> ***Указание***
>
> При наползании областей друг на друга надо воспользоваться командой **Separate Regions** (Отделить области) меню **Format** (Формат).

Команда **Annotations** (Примечания) только включает режим видимости установленных примечаний. Непосредственно вставка достаточно произвольных примечаний к формулам осуществляется с помощью контекстного меню.

После установки синего углового курсора редактирования в комментируемый элемент математического выражения и щелчка правой кнопкой мыши открывается контекстное меню (рис. 1.16, *а*). По первой команде контекстного меню **Annotate Selection** (Комментировать выделенное) вызывается диалоговое окно **Selection Annotation** (Примечание к выделенному) (рис. 1.16, *в*). После закрытия диалогового окна нажатием кнопки **OK** элемент с комментарием выделяется скобками красного цвета.

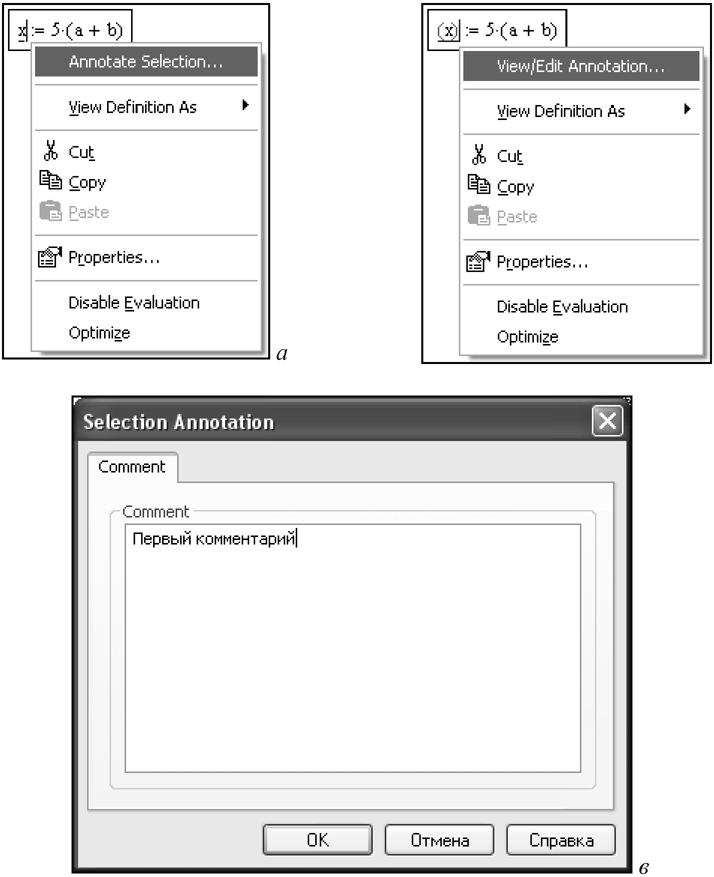


Рис. 1.16. Использование контекстного меню для создания примечаний

При необходимости прочитать примечание или отредактировать его можно также через контекстное меню. Нажав правую кнопку мыши, выбирают первый пункт контекстного меню **View/Edit Annotation** (Просмотр/Правка примечания) (рис. 1.16, *б*).

> ***Примечание***
> Команда **View | Annotations** высвечивает невидимые до этого цветные скобки как знаки комментария. Функционально установка и доступ к редактированию примечаний производится только через контекстное меню. Таким образом, аннотация формул оказывается таким же мощным инструментом документирования, как и комментарий в классическом программировании.

В *третьей группе* команды **Refresh** (Обновление) и **Zoom** (Масштаб) служат для обновления экрана компьютера с устранением накопленных графических дефектов и для изменения масштаба изображения соответственно.

1.2.4. Меню *Insert* (*Вставка*)

Команды меню **Insert** (Вставка) имеют вид:

Insert | ***имя_команды***

Меню **Insert** вводит в документы следующие объекты:

- графики заданных типов;
- шаблоны матриц, встроенные функции, физические единицы измерения величин, картинки, области, символы разрыва страниц;
- области ввода текста и области ввода математических выражений внутри текстового блока;
- внешние объекты, управляющие элементы, ссылки и гиперссылки.

Команды представлены на рис. 1.17.

Команды меню разбиты на четыре группы.

Первую группу представляет единственная команда **Graph** (График), имеющая указатель перехода ▶ на следующее подменю для выбора типа графика. Список доступных типов графиков представлен на рис. 1.18.

Варианты построения графиков будут рассмотрены в *гл. 7*.

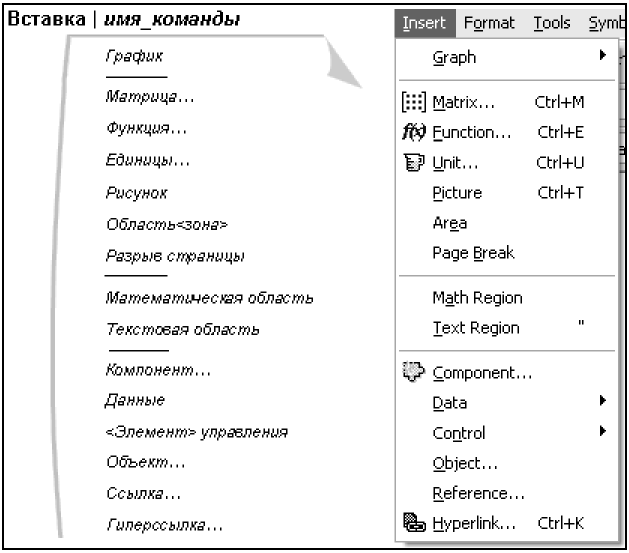


Рис. 1.17. Команды меню **Insert**

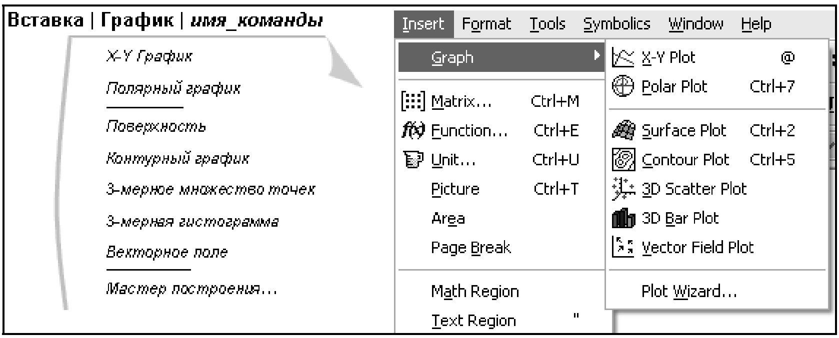


Рис. 1.18. Типы графиков 2D и 3D

Вторая группа состоит из шести команд. Первые команды этой группы связаны с математическими и физическими понятиями: **Matrix** (Матрица), **Function** (Функция), **Unit** (Единицы).

♦ Команда **Matrix** (Матрица)

По этой команде открывается диалоговое окно **Insert Matrix** (Вставить матрицу) для установки размерности матрицы. На рис. 1.19 показаны установки окна и последующий результат — появление шаблона для ввода элементов матрицы.

Позиционный маркер ▮ (черный прямоугольник, означающий позицию ввода) окаймлен синим угловым курсором ▮. Перемещение к очередному маркеру возможно с помощью клавиш <Tab> или <→>. В последнем варианте угловой курсор вначале меняется (вместо правого появляется левый курсор-ограничитель), но затем после ввода первого символа нового элемента знакомое очертание восстанавливается. Для прицельного перемещения по шаблону можно использовать и другие клавиши-стрелки или курсор мыши. Удобство использования клавиши <Tab> состоит в том, что после ввода какой-либо части матрицы обход ведется только по незаполненным маркерам.

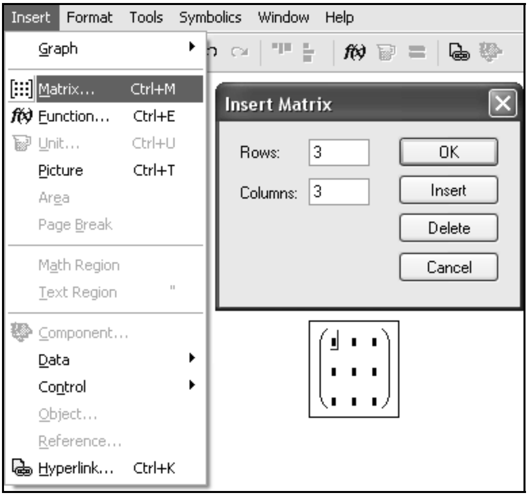


Рис. 1.19. Диалоговое окно **Insert Matrix** и результат установки размерности матрицы

♦ Команда **Function** (Функция)

Команда предназначена для того, чтобы вставить встроенную функцию из предлагаемого списка имен, разделенного по категориям. На рис. 1.20 показано окно **Insert Function** (Вставить функцию), открывающееся при вызове команды и предназначенное для выбора функции интерполяции с помощью задания опции "категория функции" и ее имени.

Проще всего известную встроенную функцию выбрать по алфавиту установкой группы **All** (Все) в списке категорий **Function Category** и последующим перемещением полосы прокрутки в области **Function Name** (Имя функции).

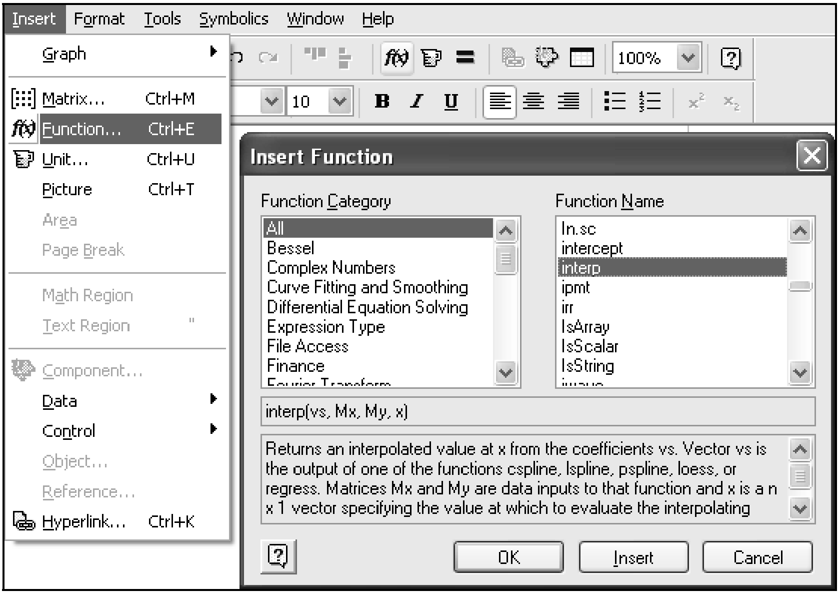


Рис. 1.20. Диалоговое окно **Insert Function** для вставки функции

При выборе функции в двух нижних текстовых полях диалогового окна появляются сообщения об используемых обозначениях переменных (для указанного примера — вектор искомых коэффициентов vs, исходные данные вектора vx, vy, переменная x) и о синтаксисе выражения, которое затем появится в рабочем окне в форме шаблона interp(■, ■, ■, ■), а после заполнения маркеров ввода примет вид interp(vs, vx, vy, x).

Примечание

Приведем дословный перевод описания функции ввиду важности ее для наших задач.

- *Returns an interpolated value at x from the coefficients in vector vs and the original data in vx and vy.* — Возвращает интерполированные значения по переменной x как набор коэффициентов в векторе vs в зависимости от первоначальных (оригинальных) данных векторов vx и vy.
- *Coefficient vector vs is the output of one of the following cspline, lspline, pspline, bspline, loess, or regress.* — Вектор коэффициентов формируется как результат одного из следующих способов cspline, lspline, pspline, bspline, loess или регресса.

♦ Команда **Unit** (Единицы)

Команда позволяет вставить единицы измерения размерной величины, что особенно удобно для физических и инженерных расчетов. Единица измерения вводится после знака умножения за объявленным значением переменной I := 10·▮ в позиции маркера: I := 10·A|, что достигается выполнением команды **Insert** | **Unit** (Вставка | Единицы). При этом открывается диалоговое окно **Insert Unit** (Вставить единицы) (рис. 1.21).

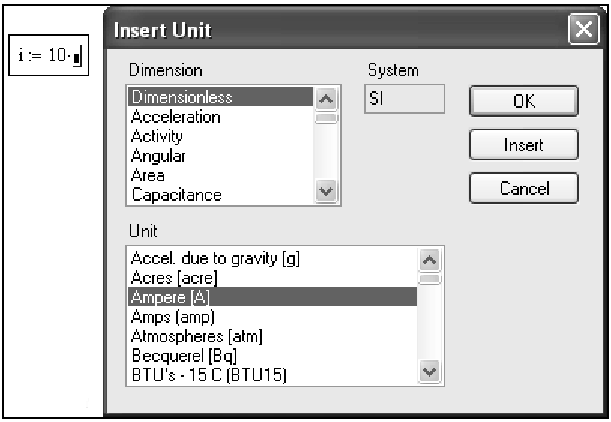


Рис. 1.21. Диалоговое окно **Insert Unit** для установки единиц измерения

Кроме того, в данной группе предоставляется возможность вставки по команде **Picture** (Рисунок), **Area** (Область "зона") или **Page Break** (Разрыв страницы).

♦ Команда **Picture** (Рисунок)

Команда кроме вставки рисунка наделяет Mathcad возможностями редактирования рисунков самых разных графических форматов. На рис. 1.22 показана композиция в рабочем поле Mathcad из действующей панели **Math**, ее изображения _Math.bmp и сопутствующей панели **Picture Toolbar** (Инструменты редактирования).

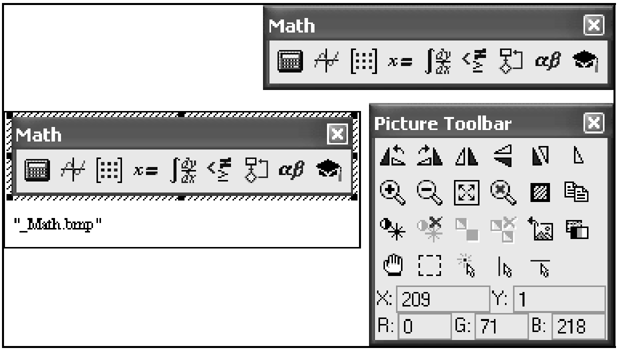


Рис. 1.22. Действующая панель **Math**, ее изображение и инструменты редактирования

Файл графического формата с рисунком должен быть предварительно сохранен в той же папке на диске, что и документ Mathcad.

Особенность вызова файла рисунка в том, что после выполнения команды **Insert** | **Picture** (Вставка | Рисунок) надо в маркер появившейся области рисунка вписать имя файла в кавычках (например, `"_Math.bmp"`, как показано на рис. 1.22).

Средства редактирования, расположенные на панели **Picture Toolbar**, имеют достаточные возможности для изменения рисунка.

♦ Команда **Area** (Область "зона")

Создание области (здесь, чтобы не пересекались названия нескольких команд, лучше говорить о зоне) сокрытия части документа проводится установкой курсора в нужное место и вызовом команды **Insert | Area** (Вставка | "Зона"). После этого появляется характерная пара линий, определяющих начальную границу зоны с метками-треугольниками, направленными внутрь области (рис. 1.23).

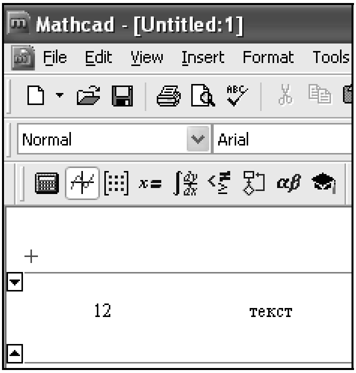


Рис. 1.23. Появление зоны в рабочем документе

Изменение положения верхней и нижней границ зоны проводится обычным способом, путем выделения щелчком мыши линии как любого объекта Mathcad. Выделенный объект отмечается пунктирной контуром-рамкой. Далее путем захвата своеобразным курсором вида ("ладошка") можно переместить линию в нужном направлении.

Дальнейшая работа с зоной будет рассмотрена далее в рамках команд меню **Format**.

- Команда **Page Break** (Разрыв страницы)

Команда вставляет новый объект "символ разрыва страницы". Это обеспечивает отказ от мягкого разделения (графически обознается пунктиром) и переход к жесткому разделению страницы. Разделитель страниц может быть установлен клавишами <Ctrl>+<Enter>, жесткая граница будет проходить в том месте, где размещен курсор.

Жесткая граница (обозначается сплошной горизонтальной линией) может быть передвинута по обычным правилам (курсором-ладошкой после выделения линии раздела, рис. 1.24) или удалена командой **Edit | Delete** (клавишный набор <Ctrl>+ +<D>).

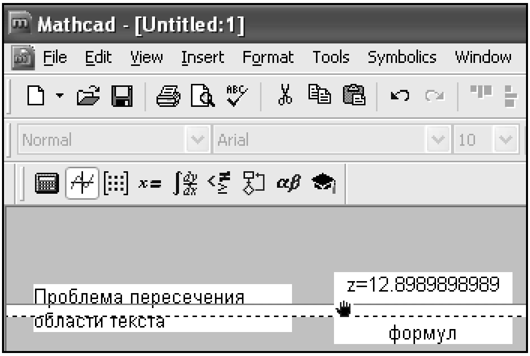


Рис. 1.24. Пересечение областей граничной линией

Третья группа состоит из двух команд создания математической области в тексте **Math Region** (Математическая область) и перехода от режима ввода математических выражений к режиму ввода текстовых блоков **Text Region** (Текстовая область).

♦ Команда **Math Region** (Математическая область)

Команда создает математическую область в тексте. Действие команды актуально, когда в пояснительной или вводной части документа требуется в самом тексте указывать математические фрагменты — начальные значения переменных, формулы, использующие указанные переменные, применять специальные формы-шаблоны. Особый стиль оформления сразу выделяет такие объекты от обычного текста.

Для создания фрагментов математических выражений внутри текста надо:

- предварительно переместить курсор в нужное место текста;
- выполнить команду **Insert | Math Region** (Вставка | Математическая область) с созданием пустого маркера с левым угловым указателем ввода;
- ввести математическое выражение по определенным правилам.

♦ Команда **Text Region** (Текстовая область)

Команда открывает текстовый блок преобразованием курсора математической области в вертикальный курсор редактирования текста.

Альтернативой навигации по системе меню является быстрое создание текстовой области вводом знака кавычек (") одноименной клавиши верхнего регистра клавиатуры.

В том и другом случае визуально наблюдается замена красного крестика курсора (+) на прямоугольник области ввода текста с вертикальным курсором красного цвета. Для ввода русского текста надо выбрать из предлагаемого Mathcad списка соответствующий шрифт с поддержкой кириллицы, содержащий слово "Cyr" в названии.

При последующем размещении очередного блока с русским текстом в новом месте рабочего поля для указания режима **Text Region** ввод символа двойной кавычки надо производить ее эквивалентным набором <Shift>+<2>, не меняя русской раскладки клавиатуры.

Рекомендуем также использовать следующую особенность задания режима работы. В Mathcad текстовый блок можно открыть путем ввода в области курсора-крестика какой-либо цифры (например, номера блока) с последующим пробелом. Пробел воспринимается как признак отказа от математической моды (или режима ввода). Вслед за этим можно начать экспериментировать со шрифтами, цифру по окончании ввода за ненадобностью легко удалить.

Каждую из введенных областей окружают невидимые белые прямоугольники, которые можно различить на сером фоне по команде **View | Regions**.

Четвертую группу команд меню **Insert** составляют **Component** (Компонент), **Data** (Данные), **Control** ("Элемент" управления), **Object** (Объект), **Reference** (Ссылка), **Hyperlink** (Гиперссылка).

Из данного списка команд для задач локальной обработки экспериментальных данных в среде Mathcad может заинтересовать команда **Data** (Данные).

Команда позволяет вставить данные различных распространенных форматов. Они могут быть взяты из внешних источников (файлов) различных приложений либо представлены в форме двумерной переменной-таблицы, состоящей из нескольких столбцов и имеющей необходимое количество строк.

1.2.5. Меню *Format* (*Формат*)

Команды меню форматирования **Format** (Формат) имеют вид:

Format | ***имя_команды***

Они служат для изменения набора характеристик или атрибутов основных объектов (рис. 1.25).

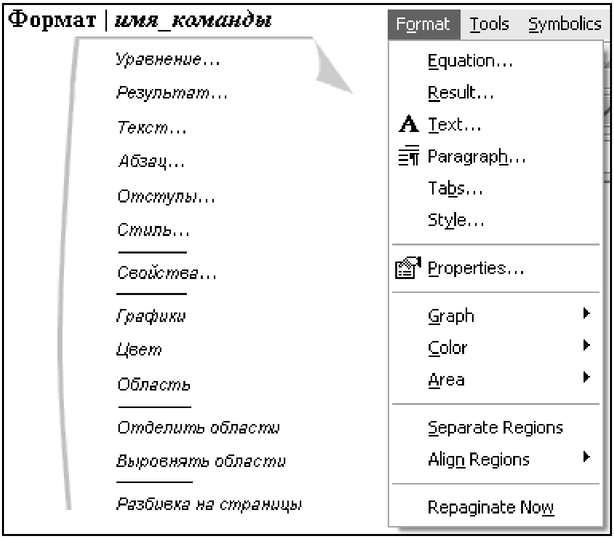


Рис. 1.25. Команды меню **Format**

Меню **Format** позволяет улучшить качество оформления рабочего документа: отформатировать текст, формулы и графики; разделить и выровнять области в двух направлениях; перенести линию разбивки с ликвидацией пересечения области (или разрезки при печати) внизу листа документа.

Команды меню **Format** разбиты на пять групп.

♦ *Первая группа* состоит из команд:

- **Equation** (Уравнение) — форматирование формул;
- **Result** (Результат) — форматирование вывода результатов вычислений;
- **Text** (Текст) — форматирование текста;
- **Paragraph** (Абзац) — изменение разметки абзаца;
- **Tabs** (Отступы) — установка табуляции, или отступов, для документа или выделенного участка текста;
- **Style** (Стиль) — определение и применение стиля, рассматриваемого как комбинация настроек текста.

♦ *Вторая группа* включает в себя одну команду **Properties** (Свойства) — изменение свойств области.

♦ Команды *третьей группы* следующие:

- **Graph** (График) — изменения в графиках;
- **Color** (Цвет) — настройка цвета;
- **Area** (Область "зона") — работа с зоной.

♦ *Четвертая группа* содержит команды:

- **Separate Regions** (Отделить области) — отделение перекрывающихся регионов (областей) в документе;
- **Align Regions** (Выровнять области) — выравнивание областей по горизонтали или вертикали.

♦ *Пятая группа* состоит из единственной команды **Repaginate Now** (Разбивка на страницы).

Слово *paginate* переводится с англ. как нумерация страниц, но функционально дело обстоит несколько иначе. Разбиение документа на страницы в горизонтальном направлении "жесткое" (исчисляется из ширины листа формата A4 за вычетом вертикальных полей), а в вертикальном направлении — мягкое. Поля документа в рабочем окне Mathcad не показаны. Границы "режут" на части текст и формулы, заползающие на разделительные линии. Отследить наложение текста и формул на правую границу страницы всегда визуально легче, чем на нижнюю. И то и другое имеет неприятные последствия при распечатке документа. Без применения данной команды разорванные части окажутся на разных страницах. Впрочем, в Mathcad 12 команда автоматически вызывается при предварительном просмотре страниц с помощью команды **File | Print Preview**.

При выполнении команды **Repaginate Now** "мягкие" нижние границы текущей и всех последующих мало заполненных страниц документа автоматически передвигаются вверх настолько, что наползающий блок оказывается ниже границы. Оформляя электронный документ для печати, надо иметь в виду, что фактически сокращается высота сразу всех листов, состыкованных горизонтально слева направо. Таким образом, наилучшее функциональное пояснение этого эффекта — "перенос границ", подгонка или перекомпоновка листа.

1.2.6. Меню *Tools* (*Инструменты*)

Команды меню **Tools** (Инструменты) имеют вид:

Tools | ***имя_команды***

Меню **Tools** организует управление вычислительным процессом и дополнительными возможностями, а также созданием анимации. Команды меню приведены на рис. 1.26.

В меню выделено четыре группы команд.

- ♦ *Первая группа* состоит из команд:
  - **Spelling** (Проверка орфографии) — проверка орфографии текстовых регионов;
  - **Animation** (Анимация) — создание или воспроизведение анимации. Подменю содержит команды **Record** (Запись) и **Playback** (Воспроизведение) с соответствующими этим режимам установками опций.
- ♦ *Вторая группа* представлена единственной командой **Protect Worksheet** (Защита документа) — защита документа от редактирования.

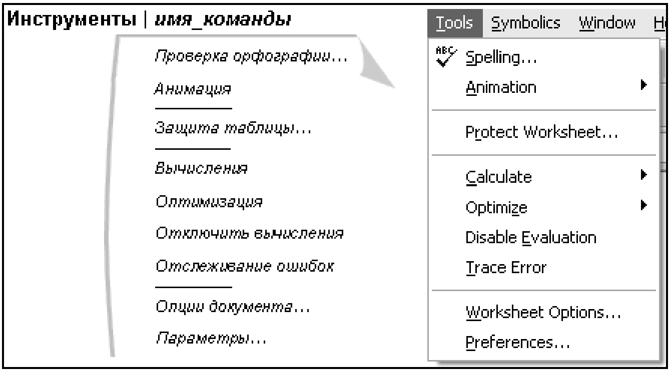


Рис. 1.26. Команды меню **Tools**

- Команды *третьей группы* следующие:
  - **Calculate** (Вычислить) — управление вычислением формул;
  - **Optimize** (Оптимизировать) — управление режимом оптимизации расчетов;
  - **Disable Evaluation** (Отключить вычисления) — включение/выключение вычисления формул;
  - **Trace Error** (Отслеживание ошибок) — трассировка источника сообщения об ошибке.
- *Четвертая группа* состоит из команд:
  - **Worksheet Options** (Опции документа) — установка опций математических вычислений (встроенных системных переменных, особых режимов вычислений, выбора системы единиц измерений, параметров отображения объектов и операторов, редактирование имен размерных величин);
  - **Preferences** (Параметры) — изменение основных параметров настройки.

1.2.7. Меню *Symbolics* (*Символика*)

Команды меню "символьных" вычислений **Symbolics** (Символика) имеют вид:

Symbolics | *имя_команды*

Меню **Symbolics** выполняет следующие действия:

- ♦ символьные вычисления над выражениями;
- ♦ операции с переменными и матрицами, реализация интегральных преобразований;
- ♦ обуславливает стиль представления символьных вычислений.

Команды меню показаны на рис. 1.27.

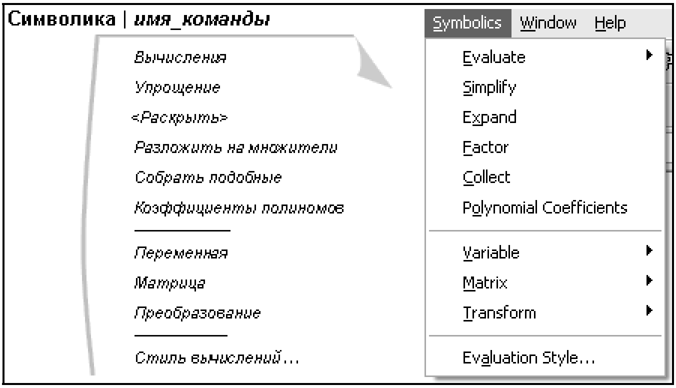


Рис. 1.27. Команды меню символьных преобразований **Symbolics**

В меню выделены три группы команд.

- ♦ Команды *первой группы* следующие:
  - **Evaluate** (Вычислить) — вычислить выражение, если это возможно;
  - **Simplify** (Упростить) — упростить выражение;
  - **Expand** (Разложить) — представить выражение в развернутом виде;
  - **Factor** (Разложить на множители) — разложить полином или целое число на простые множители;
  - **Collect** (Привести подобные) — привести подобные слагаемые;
  - **Polynomial Coefficients** (Коэффициенты полинома) — вычислить полиномиальные коэффициенты.

♦ *Вторая группа* образована командами:
   - **Variable** (Переменная) — символьные действия с выделенной переменной;
   - **Matrix** (Матрица) — символьные действия с матрицей;
   - **Transform** (Преобразование) — символьные интегральные преобразования.

♦ *Третья группа* содержит единственную команду **Evaluation Style** (Стиль вычислений) — изменение варианта показа символьных ответов.

1.2.8. Меню *Window* (*Окно*)

Команды меню управления окнами **Window** (Окно) имеют вид:

Window | ***имя_команды***

Mathcad работает в режиме многооконного интерфейса, управляя расположением окон с различными документами на экране компьютера. Команды меню показаны на рис. 1.28.

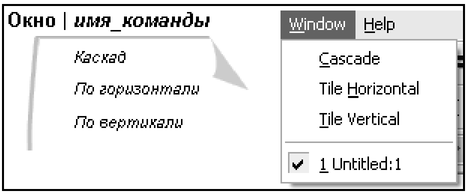


Рис. 1.28. Команды меню **Window**

Команды имеют следующие назначения:

♦ **Cascade** (Каскад) — расположить окна документов каскадом;

♦ **Tile Horizontal** (По горизонтали) — расположить окна документов по горизонтали;

♦ **Tile Vertical** (По вертикали) — расположить окна документов по вертикали.

Отдельную группу позиций образует список открытых в текущем сеансе рабочих документов, активизированный документ отмечен флажком .

1.2.9. Меню *Help* (*Справка*)

Меню **Help** (Справка) организует вызов справочной информации, сведений о версии программы, а также доступ к ресурсам и электронным книгам.

Команды меню имеют вид:

Help | ***имя_команды***

Команды меню **Help** представлены на рис. 1.29.

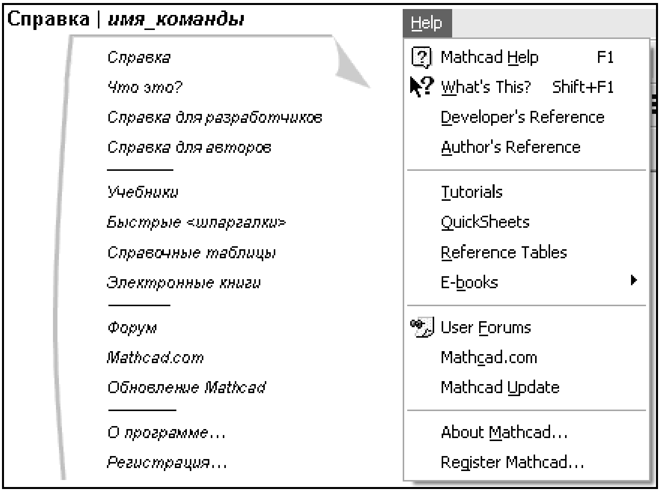


Рис. 1.29. Команды меню **Help**

Команды меню разбиты на четыре группы.

♦ В *первую группу* входят команды:

- **Mathcad Help** (Справка) — получение справочной информации по <F1>;
- **What's This?** (Что это?) — быстрая интерактивная справка об элементах интерфейса;
- **Developer's Reference** (Справка для разработчиков) — дополнительная справка для разработчиков;
- **Author's Reference** (Справка для авторов) — дополнительная справка для авторов электронных книг.

- *Вторую группу* образуют команды:
  - **Tutorials** (Учебники) — доступ к электронным книгам учебников;
  - **QuickSheets** (Быстрые "шпаргалки") — доступ к электронным книгам "быстрых шпаргалок";
  - **Reference Tables** (Справочные таблицы) — доступ к электронной книге со справочными таблицами;
  - **E-books** (Электронные книги) — открыть существующую в виде файла электронную книгу или пакет расширения.
- В *третью группу* входят команды:
  - **User Forums** (Форум) — перейти на форум пользователей Mathcad;
  - **Mathcad.com** — перейти на сайт Mathcad;
  - **Mathcad Update** (Обновление Mathcad) — обращение к сайту компании MathSoft за обновлением версии Mathcad 12.
- В *четвертой группе* представлена информация о программе:
  - **About Mathcad** (О программе) — информация о данной версии Mathcad;
  - **Register Mathcad** (Регистрация) — активация пакета с регистрацией на сайте фирмы.

На практике иногда полезно осведомляться, какие действия возможны с тем или иным объектом через контекстное меню. Контекстное меню представляет сводку команд (из различных пунктов главного меню), применяемых к выделенному объекту. В нем отмечены все команды, доступные в данный момент работы с объектом в конкретных условиях. Первый пример обращения к контекстному меню был приведен на рис. 1.16, *а—б*.

1.2.10. Контекстное меню

Почти любой объект Mathcad связан с контекстным меню — перечнем возможных действий с объектом. Для обращения к контекстному меню надо выделить объект и нажать правую кнопку мыши. В контекстном меню можно увидеть все связанные с конкретным объектом пункты основного меню, недоступные в текущей ситуации команды затенены.

На рис. 1.30 показана линейка (Ruler) с полем мерных делений.

Контекстное меню данного объекта в исходном состоянии содержит недоступную команду **Show Guideline** (Показывать направляющие линии). Как только на поле линейки щелчками мыши будут расставлены визуально различимые символы табуляции (˪), эта команда становится доступной.

Действие команды **Show Guideline** распространяется локально на отдельный символ табуляции. Нацелив указатель мыши в поле линейки на установленный символ табуляции и нажав правую кнопку мыши, получим возможность доступа к команде **Show Guideline**. Выбор данного пункта меню будет отмечен флажком ✔. Подсветка направляющих линий по краям зон табуляции с помощью контекстного меню может быть задана выборочно. Яркий эффект прорисовки под символами табуляции вертикальных цветных линий призван визуально облегчить дальнейшую позиционную привязку пользователем областей текста, формул и графиков в любой строке к отмеченной цветом границе зоны табуляции.

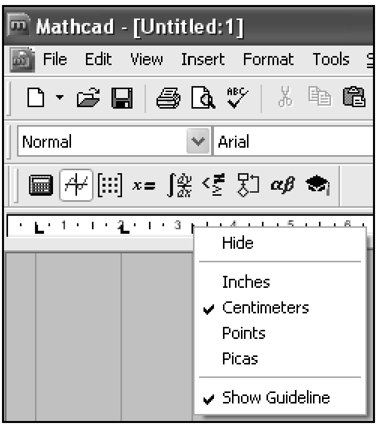


Рис. 1.30. Установка табуляции и визуализация направляющих линий с помощью контекстного меню

Команда **Format | Tabs** главного меню позволяет настроить табуляцию в окне **Tabs** с помощью поля ввода **Tab stop position** (Позиция остановки табулятора), задать общий показ всех линий, установив флажок **Show guide lines all tabs** (Демонстрация всех линий), либо очистить все установки, нажав кнопку **Clear All**.

На рис. 1.31 представлены формы контекстного меню по следующим объектам: текст, формула, график, таблица и элемент управления.

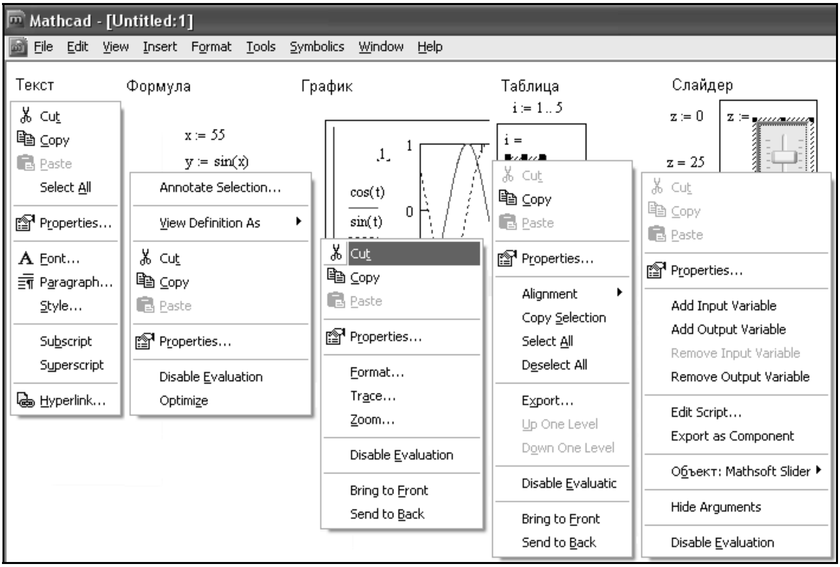


Рис. 1.31. Контекстное меню разных объектов Mathcad

1.3. Панели инструментов

Панели инструментов находятся непосредственно под строкой главного меню и содержат в основном кнопки-пиктограммы. Разбивка команд в списках подменю определенным образом диктует порядок расположения кнопок на панелях. Границы групп отмечены вертикальными разделителями.

Главная задача визуального инструментария состоит в ускоренном вызове команд. Изображения (пиктограммы) ярко отражают функциональное назначение инструментальных средств.

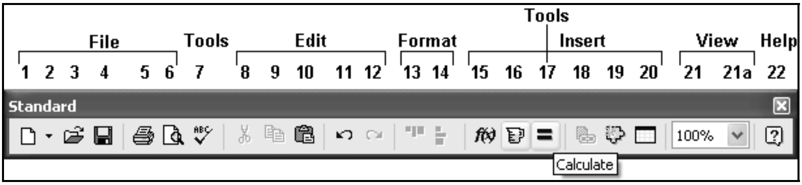
Открыть для себя и узнать возможности использования кнопок-пиктограмм можно, изучая общую логику разработки и исследуя практику создания математического документа. Авторы надеются, что концентрация внимания в предыдущем разделе на группировке команд и действиях с ними поможет в этом. Компактное расположение команд в списках меню и снабжение наиболее значимых из них пиктограммами предопределяют удобство работы. Многоуровневый характер разработки и отладки документа диктует следующую "технологию" действий.

Сначала создается чистый бланк документа по выбранному шаблону, ему присваивается имя в файловой системе хранения, затем он наполняется содержимым (текстовая постановка задачи, исходные данные и условия, метод решения и т. д.), по мере необходимости осуществляется редактирование созданного документа, устраняются опечатки в сопровождающем тексте. Работа над вычислительными блоками требует особого комментария — этому посвящена содержательная часть книги.

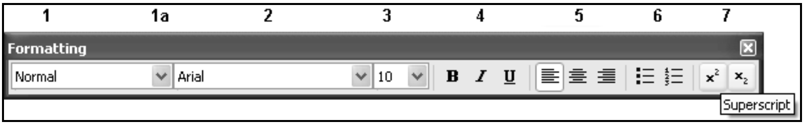
Блок кнопок-пиктограмм, визуально расположенный между вертикальными разделителями панелей инструментов, определим как компонент панели. Объединение компонентов, принятое разработчиками, по-видимому, связано с порядком и характером подготовительных и основных работ с процессорами Mathcad. Положение кнопок внутри компонента несколько отличается от последовательности размещения команд с пиктограммами в меню.

Проведем "компонентный" анализ состава инструментов, для чего используем порядковую нумерацию кнопок (аналогично [5]) и укажем принадлежность компонента тому или иному меню системы, как обозначено на рис. 1.32. В Mathcad выделяют три основные панели инструментов **Standard** (Стандартная) (рис. 1.32, *а*), **Formatting** (Форматирование) (рис. 1.32, *б*) и **Math** (Математика) (рис. 1.32, *в*).

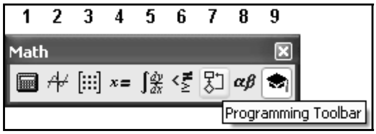
Основной и ведущей в инструментарии Mathcad является панель **Math** (рис. 1.32, *в*), которая нужна для вывода целого ряда специализированных палитр (панелей) математических команд.



а



б



в

Рис. 1.32. Триада инструментария Mathcad

Главная задача визуального инструментария состоит в ускоренном вызове команд, минуя процесс навигации в системе меню. Изображения (пиктограммы) ярко представляют функциональное назначение инструментальных средств. На каждой панели вначале выделим наиболее ярко характеризующие их пиктограммы. На панели **Standard** мерная кружка напоминает о возможности проведения вычислений с размерностями, символ отражает способность быстрого запуска вычислительного процесса, на панели **Formatting** символы , , позволяют стандартным образом форматировать текст, на третьей панели **Math** выделим значок палитры программирования и значок палитры символьных вычислений.

Любая панель инструментов с кнопками-пиктограммами может быть отображена, убрана за ненадобностью на данном этапе или перенастроена под конкретные сложившиеся у пользователя предпочтения по команде **Customize** (Настроить) контекстного меню, появляющегося после выделения объекта.

Опытный пользователь может быстро удалить с панели за ненадобностью какую-нибудь кнопку, перемещая ее за границы павающей панели при нажатой клавише <Alt>, и вернуть в режиме диалога настройки **Customize** с позиционированием в пределах разделителей выбранной группы кнопок.

Управлять процессом отображения или сокрытия интерфейсных панелей можно несколькими способами: из главного меню **View | Toolbars**, контекстного меню **Hide** (Скрыть) или кнопкой закрытия плавающей панели.

1.3.1. Панель *Standard* (*Стандартная*)

Инструменты панели предназначены для быстрого выполнения команд, признанных стандартными для Mathcad и широкого класса компьютерных систем, работающих с текстовыми документами-файлами. Безусловно, важным и центральным инструментом для Mathcad признан элемент управления вычислением выделенного выражения (кнопка **Calculate**  представляет команду меню **Tools**, подсвечена на рисунке).

На панели сосредоточены наиболее активно используемые команды следующих меню: **File**, **Edit**, **Insert**. Они обеспечивают работу с файлами, редактирование, вставку функций, единиц измерений и некоторых объектов (компоненты, подключаемые к системе, гиперссылки, таблицы).

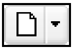
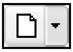
По две позиции **Check Spelling** (Проверка орфографии) и **Calculate** (Вычислить) представлено из меню **Tools**, а также **Align Across** (Выровнять горизонтально) и **Align Down** (Выровнять вертикально) — из меню **Format**.

Из меню **View** включено поле (со списком) масштабирования. Последняя кнопка панели — кнопка обращения за помощью меню **Help**.

Таким образом, на панели не представлены лишь позиции меню **Symbolics**, которые действительно не относятся к стандартным.

Рассмотрим далее технологические и функциональные возможности инструментария панели **Standard**.

Первые кнопки поддерживают общий порядок выполнения файловых операций по работе с документом (1—4) (нумерация соответствует рис. 1.32, *а*):

1.  — новый документ с изображением чистого бланка документа — открывает новый рабочий лист для создания очередного документа;
2.  — полоска со стрелкой вниз — открывает список возможных стилей создаваемого документа;
3.  — изображение открытой папки — вызывает диалоговое окно для выбора из списка и загрузки ранее созданного и сохраненного файла (документа);
4.  — изображение дискеты — сохраняет изменения в уже существующем открытом активном документе или вызывает диалоговое окно **Save As** (Сохранить как) при первом сохранении нового документа.

Печать и контроль документа предусматривает следующий компонент инструментария (5—7):

5.  — изображение принтера — открывает диалоговое окно **Print** (Печать) для распечатки созданного документа на бумажный носитель;
6.  — изображение листа и лупы — просмотр и поэтапная визуальная оценка качества подготовки документа перед печатью; возможен оперативный переход к выполнению печати;
7.  — изображение вставки букв ABC — проверка орфографии, как правило, завершает важный этап создания текстовой части документа.

Рациональная организация редактирования математических выражений и текстов предопределила следующие блоки действий (8—10 и 11, 12):

8.  — изображение ножниц — обеспечивает удаление выделенного фрагмента текста или формулы в буфер обмена данных;
9.  — изображение нескольких копий — обеспечивает копирование выделенного фрагмента текста или формулы в буфер обмена данных;

10.  — изображение портфеля — обеспечивает вставку выделенного фрагмента текста или формулы из буфера обмена данных;
11.  — изображение стрелки с поворотом влево — обеспечивает отмену последней команды;
12.  — изображение стрелки с поворотом вправо — восстанавливает последнюю отмененную команду.

Расположение формул и объектов документа может быть неточно позиционировано, поэтому включен компонент с двумя командами выравнивания меню **Format | Align Regions** (13, 14):

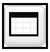
13.  — изображение символа выравнивания по верхней границе — обеспечивает выравнивание выделенной области вдоль горизонтальной линии;
14.  — изображение символа выравнивания по левой границе — обеспечивает выравнивание выделенной области вдоль вертикальной линии, расположенной между самой правой и самой левой из выделенных областей.

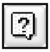
Основными объектами математического процессора являются формулы, создание которых обусловлено имеющимися встроенными функциями:

15.  — изображение знака функции — обеспечивает вызов диалогового окна **Insert Function** (Вставить функцию) для вставки нужной функции (см. рис. 1.20).

Возможна физическая трактовка результатов с использованием единиц измерений:

16.  — изображение мерной кружки — обеспечивает вызов диалогового окна **Insert Unit** (Вставить единицы) назначения нужной единицы измерения (см. рис. 1.21);
17.  — изображение знака равенства — обеспечивает вычисление всех формул (выражений), расположенных правее курсора и ниже;

18.  — изображение фрагмента цепи — обеспечивает вставку гипертекстовой ссылки;
19.  — изображение камеры — обеспечивает вставку компонента — объекта одного из стандартных приложений, например электронной таблицы Excel, так что работа с ним будет проходить в окружении интерфейса выбранного приложения;
20.  — изображение таблицы — вставляет шаблон таблицы в место установки курсора;
21. 

— раскрывающийся список — обеспечивает установку значений масштаба для уменьшения или увеличения изображения рабочего листа;
22.  — изображение знака вопроса — вызывает диалоговое окно **Mathcad Help** (Справка Mathcad) для предоставления справки.

1.3.2. Панель *Formatting* (*Форматирование*)

Панель содержит три раскрывающихся списка для изменения атрибутов (стиль, шрифт и его размер), а также распространенный в Windows-приложениях типовой набор кнопок-пиктограмм шрифтового оформления (полужирный, курсив, подчеркнутый), выравнивания текстов, нумерации и маркирования абзаца, включения текста в верхний или нижний индекс.

Вид и действие кнопок следующие (нумерация соответствует рис. 1.32, *б*):

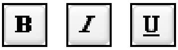
1. 

— раскрывающийся список с названием стиля — показывает имя того стиля, с которым работает пользователь. При необходимости можно раскрыть список имеющихся стилей и выбрать щелчком мыши нужный стиль;
2. 

— раскрывающийся список с названием используемого в настоящий момент шрифта. При необходимости можно раскрыть список имеющихся шрифтов и выбрать щелчком мыши нужный шрифт;

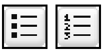
3. 

— раскрывающийся список с размером шрифта, используемого в настоящий момент. При необходимости можно раскрыть список и выбрать щелчком мыши нужный размер шрифта;

4. 

— изображения букв **B** (*bold*, полужирный), *I* (*italic*, курсив) и U (*underline*, подчеркнутый) — преобразуют выделенный текст, формулу, выражение соответственно в полужирное, курсивное начертания или с подчеркиванием выделенного фрагмента, возможно их последовательное наложение;

5.  — изображения текста, сдвинутого влево, выровненного по центру, сдвинутого вправо — выравнивают текст по левому краю, по центру или по правому краю соответственно;

6.  — изображения маркеров и нумерованных пунктов — устанавливают маркер в выделенном фрагменте текста либо нумерацию, далее осуществляется их автоматическая поддержка в последующих абзацах;

7.  — изображения переменной с надстрочным или подстрочным знаком — обеспечивают добавление надстрочных или подстрочных символов соответственно.

1.3.3. Панель *Math* (*Математика*)

На панели сосредоточены все кнопки вывода "палитр" для включения основных объектов рабочего документа формул, графиков, матриц (и, следовательно, таблиц), а также всех ключевых слов Mathcad.

Панели обычно перемещают в наиболее удобное для работы место. На рис. 1.33 показана панель, прижатая к боковой стороне рабочего окна. Данная панель позволяет открывать различные панельки математических инструментов, предоставляя доступ ко всей палитре команд вычислений и преобразований.

Рис. 1.33. Кнопки панели **Math** с всплывающими надписями

Вид и действие кнопок следующие:

1.  — изображение калькулятора — вызывает панель инструментов **Calculator** (Калькулятор) с кнопками для выполнения стандартных операций, свойственных калькуляторам;
2.  — изображение графика — вызывает панель инструментов **Graph** (График) с кнопками для построения различных типов графиков;
3.  — изображение заготовки матрицы — вызывает панель инструментов **Matrix** (Матрица) с кнопками для выполнения различных операций над матрицами и векторами;
4.  — изображение буквы *x* и знака равно — вызывает панель инструментов **Evaluation** (Выражение) с кнопками для выполнения различного вида равенств, выдачи результатов и разработки собственных форм операторов;
5.  — изображение знаков интеграла и дифференциала — вызывает панель инструментов **Calculus** (Математический анализ) с кнопками для выполнения операций дифференцирования, интегрирования, суммирования, умножения, взятия пределов и введения знака бесконечности;
6.  — изображение знаков неравенств — вызывает панель инструментов **Boolean** (Булевы функции) с различными зна-

ками равенства и неравенства численных и булевых выражений;

7.  — изображение блок-схемы — вызывает панель инструментов **Programming** (Программирование) со встроенными операторами программирования;
8.  — изображение букв греческого алфавита — вызывает панель инструментов **Greek** (Греческие буквы) со строчными и прописными буквами греческого алфавита;
9.  — изображение академической шляпы — вызывает панель инструментов **Symbolic** (Символьные вычисления) с ключевыми словами для аналитических преобразований.

На рис. 1.34 показана вся палитра математических команд. Панельки представлены в соответствии с компоновкой панели **Math**, рядом с каждой из них в композиции показана кнопка вывода. Каждая из панелек может быть закрыта при необходимости кнопкой закрытия (×), расположенной справа от заголовка.

На девяти палитрах математического назначения Mathcad расположены кнопки с арифметическими и тригонометрическими функциями, с основными арифметическими операторами и операторами математического анализа, с булевыми выражениями, кнопки конструирования операторов, наборная группа десятичных цифр, пиктограммы различных типов графиков, пиктограммы для задания атрибутов и обработки математических объектов, кнопки с ключевыми словами символьного процессора и встроенной системы программирования. С их помощью можно очень быстро составить алгоритм решения достаточно широкого круга задач.

Итак, нами были рассмотрены следующие способы вызова команд:

- навигация по командам меню с помощью мыши;
- использование кнопок панелей инструментов;
- нажатие комбинации клавиш <Alt>+<*буква*>+<*буква*> в последовательной схеме инициализации главного меню, затем заголовков меню и завершающей команды;

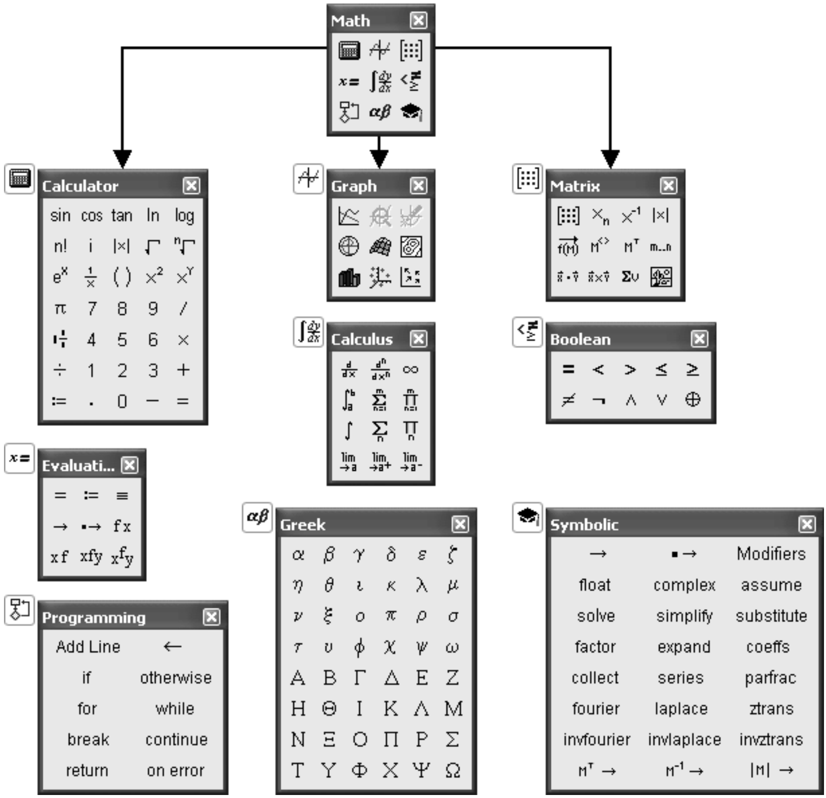


Рис. 1.34. Палитры команд **Math** в соответствии с кнопками вызова

- быстрый вызов по схеме одновременного нажатия <Ctrl> и соответствующей ключевой клавиши;
- через контекстное меню.

1.4. Основы диалога пользователя в Mathcad

Рекомендуем использовать для работы весь арсенал доступных элементов интерфейса системы.

Работа с системой Mathcad заключена в следующем объеме действий — ввод данных, ввод формул, ввод основных текстов, внедрение аннотаций непосредственно в формульные блоки, внедрение математических формул в текстовые блоки, проведение требуемых вычислений в ручном или автоматическом режиме, получение результатов, их визуальное отображение, сохранение рабочего документа в одном из предлагаемых системой форматов.

Для освоения *численных расчетов* необходимо:

1. Проводить элементарные вычисления и специальные вычисления математических функций *(см. гл. 2 и 3)*.
2. Применять компьютерные технологии решения задач в целом *(см. гл. 4)*.
3. Освоить алгебру матриц и векторов *(см. гл. 6)*.
4. Проводить визуализацию вычислений *(см. гл. 7)*.
5. Решать уравнения *(см. гл. 8)*.
6. Вычислять интегралы *(см. гл. 9)*.
7. Решать задачи интерполяции *(см. гл. 10)*.

Аналитические вычисления предполагают применение компьютерных технологий символьных вычислений *(см. гл. 5)*, позволяют отыскивать производную и неопределенный интеграл, выполнять символьные операции с математическими выражениями, а также дают возможность решать ряд алгебраических и дифференциальных уравнений в символьном виде.

Некоторые основные приемы работы с Mathcad отдельными фрагментами были указаны в предложенном тексте, их арсенал может быть дополнен в ходе работы по предложенному плану.

Полезным окажется самостоятельное выполнение предлагаемых задач, обращение в случае неудач за контекстной справкой, анализ аналогов решений в QuickSheets и фрагментарное использование этих предоставленных справочной системой математических текстов как основы для проверки хода и отладки собственного решения поставленных практикой задач.

Начнем освоение диалога с формирования текстуальных блоков, в которых важно сразу определить суть задачи, что дано и что надо сделать. Вход в текстовый редактор осуществляется нажатием клавиши знака двойных кавычек (") верхнего регистра клавиатуры.

На рис. 1.35 представлено своеобразное проектное задание, в котором перечислены в отдельных заголовках интересующие пользователя объекты Mathcad.

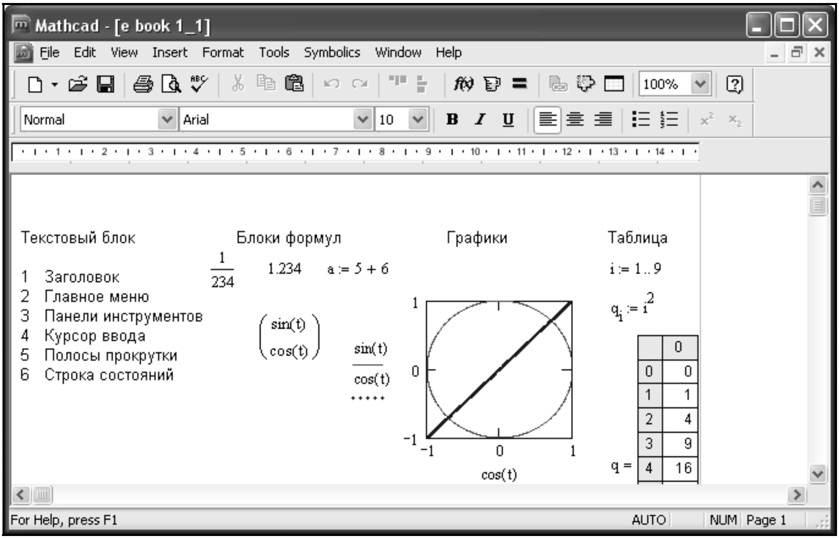
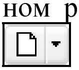


Рис. 1.35. Проект рабочего документа

Вначале поставим задачу создать новый документ и определить стиль его оформления.

Разберемся в шаблоне электронной книги E-book, предоставленном разработчиками Mathcad. Кнопка вызова нового документа  состоит из двух активных элементов. Раскрывающийся при нажатии на стрелку список ведет к выбору шаблона документа и определяет начало нашего общения со средой. При выборе **Electronic Book** в диалоге открывается инструкция в форме "шпаргалки" **QuickSheets**. Для быстрой ориентации в нюансах применения шаблона пропустим этот текст через электронный переводчик, сохранив перевод в формате RTF. Результат откорректированного перевода на фоне основного текста инструкции показан на рис. 1.36.

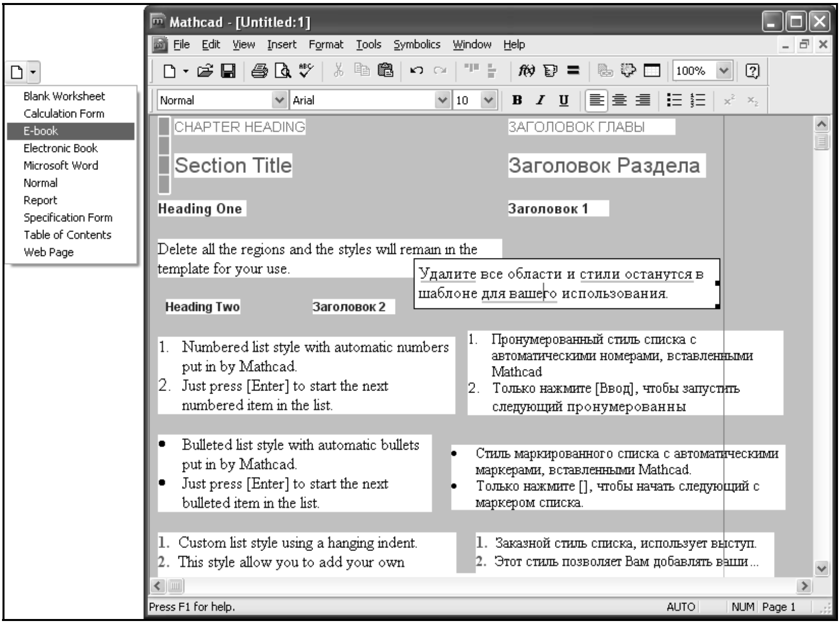


Рис. 1.36. Шаблон E-book

Теперь довольно легко понять предназначение данного форматирующего шаблона.

При желании можно модифицировать некоторые атрибуты шрифтов исходного шаблона по команде **Format | Style**. В диалоговом окне **Text Styles** (Стили текста) укажем, например, стиль **Heading 1** с дальнейшим заданием опций модификации шрифта **Modify**, **Font**.

Диалог со средой Mathcad и его анализ, несомненно, принесли нам пользу. Получены рекомендации и директива с указанием, что делать дальше. В центре рис. 1.36 в рамке размещена директива (подчеркивания в тексте наши), выполним ее. Теперь мы овладели всеми стилями шаблона E-book.

Итак, создав строку заголовка, в открытом документе теперь уже осознанно перейдем от стиля **Normal** к стилю **Heading 1**: щелчком на стрелке на пиктограмме стиля 

панели **Formatting** откроем список стилей и выберем нужный.

Будем контролировать распределение текста в строке заголовков по мерной линейке **Ruler**, открыв ее, например, набором <Alt>+<V>, <U>.

Все заголовки объединим в одну строку, тогда их легче одновременно форматировать и распределить по ширине листа. Для увеличения дистанции между словами внутри текста на шаг 1,25 см, установленный по умолчанию, следует использовать клавишу табуляции <Tab>.

Результатом освоения техники редактирования текста Mathcad будет отформатированная строка заголовков, показанная под мерной линейкой на рис. 1.37, и ряд интересных сведений, оказавшихся доступными для нас. Под линейкой заметны "рисочки", или метки табуляции с установленным шагом. Против "риски" на четвертом сантиметровом делении зафиксирован курсор, а сдвиг от нее вправо очередного заголовка "Блоки формул" обусловлен несколькими дополнительными нажатиями клавиши <Пробел>.

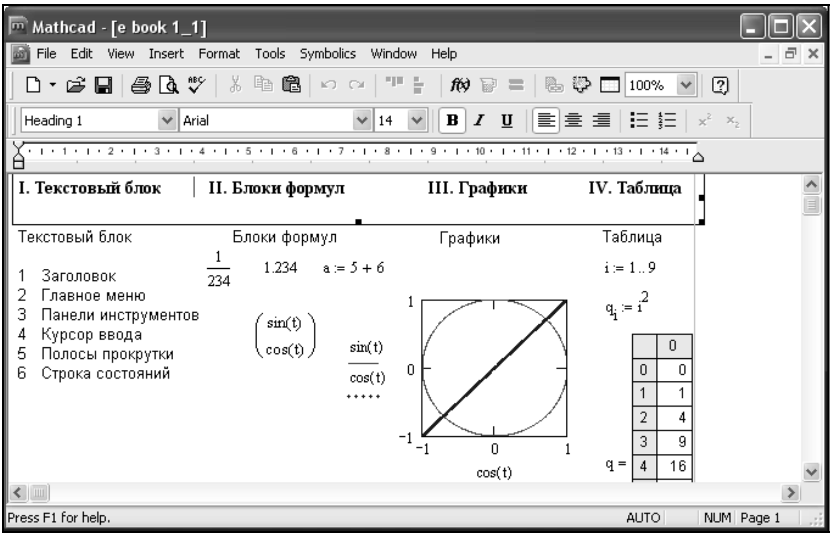


Рис. 1.37. Строка заголовков над объектами Mathcad

Внимание к технологическим моментам взаимодействия, безусловно, отражает диалог со средой: среда Mathcad буквально заявляет о предоставляемых возможностях интерфейса. Надо только научиться распознавать детали и понять символьный язык диалога.

Обращение к контекстному меню — это своеобразный диалог, несущий характер экспертизы. Пользователь, по сути, задает вопрос, что можно делать с объектом в сложившейся ситуации.

Когда диалог осуществляется визуальным способом, то надо быть внимательным ко всем (даже очень мелким и небольшим с точки зрения пользователя) признакам его проявления со стороны компьютера.

Ввод математического блока осуществляется последовательным набором шаблонов операторов и функций. Пока диалоговый режим не закончен, переход к незаполненным частям шаблона сложного математического выражения может быть сделан точным позиционированием (переносом) курсора мыши или, как альтернатива, оперативным нажатием клавиши <Tab>.

Наполнение операторных схем производится заданием аргументов, параметров, доопределением переменных, которые не были определены ранее и на которые система Mathcad указывает подсветкой (сразу по завершению набора всего выражения) красным цветом.

У пользователя должно быть ясное понимание и осознание того, что пока не выведен щелчком мыши курсор из области ввода, или как альтернатива не нажата клавиша <Enter>, набираемый математический блок не воспринимается персональным компьютером как директива к исполнению.

Таким образом, составным элементом диалога является фиксация окончания набора формулы. Во многих программных продуктах по этому действию осуществляется переход к новой строке, что в Mathcad явным образом фиксируется смещением вниз курсора в виде крестика красного цвета.

Диалог состоится, если пользователь не будет пренебрегать даже мельчайшими его проявлениями со стороны компьютера. По существу надо обращать внимание на все визуальные изменения рабочего окна, сопровождающие действия пользователя.

Не забудем сохранить выполненную работу (управляющая кнопка ).

ГЛАВА 2

Элементарные вычисления в Mathcad

Все математические записи на рабочем поле документа Mathcad визуально знакомы каждому человеку со школьной скамьи.

Вначале при вводе выражений несколько необычный вид имеют только некоторые специальные символы *n*-местных операторов (▮ = ▮▮, ▮ := ▮ и т. п.) и особые команды символьных преобразований (▮ → , ▮▮ →), но и они после заполнения черных маркеров ввода становятся директивами для ПК. При работе математического процессора каждая незаблокированная математическая формула в документе Mathcad принимается к исполнению.

Программная среда распознает символьные объекты входного языка Mathcad, интерпретирует их (адекватно смысловому восприятию человеком) и запускает связанные с ними встроенные программные комплексы, невидимые пользователю.

Если пользователь в среде Mathcad сам создает программу, то она отображается (открыта для чтения) на том же листе. Визуальное отличие программы пользователя от прочего текста рабочего документа придают следующие признаки:

♦ структурирование кода программы;

♦ специфика ключевых слов.

Несложный графический прием выделяет основные базовые конструкции разрабатываемого алгоритма вычислений — слева от каждой из них автоматически прорисовывается вертикальная линия. За счет этого ярко видны используемые ключевые слова, вложенность конструкций и легче воспринимается структура программы.

Таким образом, Mathcad как система полноценного визуального программирования со своим входным языком, близким к принятому математическому, с интерпретатором и интеллектуальной системой символьных и численных преобразований позволяет формировать более гибкие комплексы программ [12].

2.1. Типы данных

Расчеты в Mathcad проводятся над данными, представленными в типовой форме, в соответствии с характером операторов и используемых функций.

Система Mathcad поддерживает следующие типы данных:

- *Именованная константа*

  Число π — это числовая именованная константа. Наиболее важные константы имеют собственное обозначение (например, *e*, % и ∞). Если вы не помните значения некоторых констант — это не беда, в *разд. 2.3* будет показано, как их определить.

- *Именованные переменные*

  Именованные переменные делятся на обычные и системные. Определяющие их имена называются идентификаторами, которые состоят из латинских или греческих букв и цифр. Обычным переменным хотя бы раз должны быть присвоены пользователем числовые значения, которые по ходу работы могут меняться.

  Системные переменные получают заранее определенные системой начальные значения.

- *Ранжированные переменные*

  Ранжированные переменные, являясь вспомогательными, обеспечивают множественность значений в указываемых границах диапазона при заданном шаге изменения. Mathcad вычисляет выражения с такой переменной по всем ее значениям. Итерации осуществляются без явного задания цикла. Сохранение всей совокупности результатов достигается за счет индексации образуемого массива.

- *Матрицы и векторы*

  Матрицы и векторы — это двумерные или одномерные массивы данных. Перейти к ним в рамках многих задач удается, если использовать ранжированные переменные.

  Непосредственно ранжированная переменная не является вектором, но имитирует его.

- *Файловые данные*

  Данные могут быть отчуждены от документа, храниться в отдельных файлах, что определяет особые существенные отличия при работе с ними. Файлы полезны при хранении больших объемов табличных данных.

Переменной придают значение с помощью специального оператора присваивания (:=). Имя переменной в шаблоне ▮:=▮ записывается слева. Оператор присваивания предусматривает передачу конкретного значения или математического выражения справа налево. Если в какой-либо формуле численного расчета не определена та или иная переменная, то среда Mathcad высветит ее красным цветом. Когда курсор редактирования охватывает такую переменную, то выдается предупреждение (рис. 2.1).

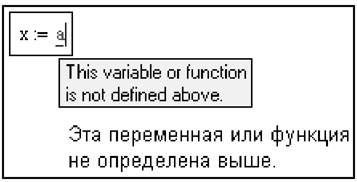


Рис. 2.1. Предупреждение об отсутствии определения переменной

Подобная реакция среды обязывает присваивать всем переменным некоторое начальное значение и также является примером диалога. Исключение из этого правила составляет только подготовка формул для символьных преобразований.

Для иллюстрации некоторых приемов работы приведем решение следующей простой задачи: определить длину окружности L, ориентируясь на приведенную классификацию данных.

Расчетная формула имеет вид:

$$L = 2\pi R.$$

Здесь 2 — числовая константа, π — именованная константа, R — именованная переменная.

> ***Примечание***
> Ввод латинской буквы с нажатием "вдогонку" за первым символом одновременно еще двух клавиш <Ctrl>+<G> дает переход к греческому алфавиту. Итак, для ввода символа π будем использовать следующий клавиатурный набор: <P> и <Ctrl>+<G>.

Так как число 2 и π определены, то для вычисления L необходимо иметь значение R.

Решение получается с помощью следующих действий:

- ввод значения переменной `R := 1`;
- ввод формулы `2 * π * R`;
- нажатие клавиши <=> (равно) для вычисления и вывода результата.

На экране появится ответ: `6.283`.

Приведенная технология имеет тот недостаток, что результату не присвоено имя длины окружности L.

Для присвоения результату данного имени используется следующая измененная технология:

- ввод значения переменной `R := 1`;
- ввод формулы с присвоением имени `L`:

  `L := 2 * π * R`;
- набор вначале символа `L`, а затем знака (=) (равно) для вывода искомого результата.

На экране отобразится ответ в виде: `L = 6.283`.

Решение задачи для обоих случаев показано на рис. 2.2.

$R := 1$	$R := 1$
$2 \cdot \pi \cdot R = 6.283$	$L := 2 \cdot \pi \cdot R$
	$L = 6.283$

Рис. 2.2. Определение длины окружности

2.2. Операторы и функции системы

Системообразующими элементами входного языка являются операторы и функции.

Оператор обозначается одним или последовательностью символов и инициирует в среде Mathcad определенное математическое действие или операцию.

Функция, в отличие от операторов, имеет собственное имя, вслед за которым открываются скобки, а в скобках приводится список аргументов. Функция возвращает вычисленное значение, соответствующее указанному набору аргументов. Если на символе оператора или на имени функции, введенных в рабочий документ Mathcad, установить курсор и нажать клавишу <F1>, то открывается соответствующая страница справки с пояснениями.

Оператор Mathcad вводится двумя способами: специальной клавишей или сочетанием клавиш либо кнопкой на одной из палитр панели **Math** (см. табл. 2.1).

Для облегчения восприятия структура таблицы упрощена. В одном поле представлены атрибуты:

- имя оператора;
- вид кнопки с отличительным символом оператора;
- шаблон, возникающий на экране монитора;
- клавиатурный набор оператора.

2.2.1. Общие операторы ввода-вывода

Операторы первой изучаемой группы в основном сосредоточены на панели **Evaluation**, некоторые из них продублированы и на других панелях. Клавиатурные варианты вызова приведены в табл. 2.1.

Операторы локального и глобального присваивания являются операторами ввода информации.

Операторы вывода информации в Mathcad называются по-особому, отражая этим в большой степени функциональное значение для организации вычислений: операторы численного и символьного вычислений.

- Для обозначения присваивания локального действия оператора (в пределах соседних справа и нижележащих областей, т. е. вправо и вниз) используется знак ($:=$). Он вводится нажатием клавиши <:> (двоеточие) верхнего регистра.
- Оператор глобального присваивания обозначается символом ($\equiv$) и является по сути оператором ввода констант [12]. Знак задается клавишей <~> (тильда) в верхнем регистре. Поскольку действие глобальное и распространяется на весь документ, то присвоение может быть проведено в любом месте документа, даже в самом его конце.
- Оператор численного вычисления и вывода результата ($=$) (равно) ставится после имени константы, переменной или функции. При первом его включении, если переменная или функция ранее не были объявлены, происходит его автоматическая замена на оператор присваивания ($:=$) для ввода соответственно ее численного значения или математического выражения. Рекомендуется контролировать завершенность процесса присвоения значений переменным, используя данное свойство оператора ($=$).
- Символьное вычисление (преобразование) и вывод соответствующего результата обозначается знаком стрелки, направленной вправо. Может быть простым ($\rightarrow$) или расширенным с дополнительным ключевым словом, что обозначается позиционной меткой в символе оператора, ▪ $\rightarrow$. Шаблон расширенного вывода ▪ ▪ $\rightarrow$ на экране монитора содержит два маркера ввода. В первый маркер вводится название или непосредственно формула преобразуемой функции, а во второй — дополни-

тельный оператор символьного преобразования. Операторы символьного вывода вызываются кнопками (четвертой и пятой) инструментальной панели **Evaluation** или, как вариант, аналогичными кнопками панели **Symbolic**. Клавиатурный набор представлен комбинациями клавиш: <Ctrl>+<.> (точка) в случае простого символьного вывода → и <Ctrl>+<Shift>+ +<.> в случае расширенного символьного вывода ▪→.

Операторы символьного преобразования приведены на панели **Symbolic** *(см. разд. 2.2.6)*.

Символьное преобразование иногда используется в численных вычислениях как в примере, который показан на рис. 2.3.

На рисунке в трех действиях Mathcad в сравнительной форме показано следующее:

- расчет с использованием округленного значения константы π (использован оператор численного вывода (=));
- расчет с точным результатом, но включающим символьную именованную константу π (использован оператор простого символьного вывода (→));

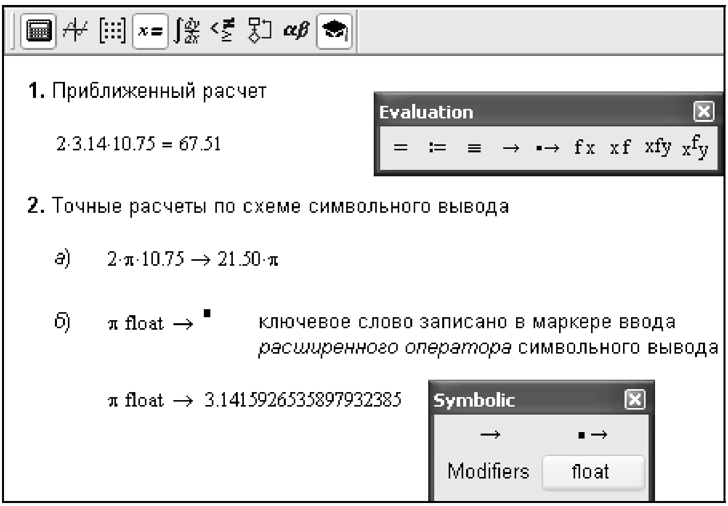


Рис. 2.3. Приближенные и точные численные расчеты

♦ получение точного численного результата с использованием расширенного символьного вывода и ключевого слова `float` (плавающая точка).

Последняя процедура выполнена следующим образом: после ввода <P> и <Ctrl>+<G> вызван оператор расширенного вывода (▮ →) и на месте маркера указано ключевое слово `float`. По умолчанию достигается численный вывод с двадцатью значащими цифрами.

На рис. 2.3 справа показаны панели, содержащие кнопки символьного вывода, причем панель **Symbolic** дает возможность без клавиатуры кнопкой ввести ключевое слово `float` (на рисунке эта кнопка высвечена).

> ***Примечание***
> В текстовом блоке рис. 2.3 (пункт 2, *б*) следует обратить внимание на черную метку ■, стоящую рядом с формулой, записанной в режиме вставки "математической моды". Метка играет роль блокировки вычисления, что необходимо, когда формула приводится для пояснений как фрагмент в тексте без отображения результата.

Детальные пояснения по блокировке и оператору `float` приведены на рис. 2.4. Переход внутри текстового блока в режим математической записи формулы производится по команде меню **Insert | Math Region**.

При обращении к кнопке **float** палитры **Symbolic** в дополнительном маркере обозначается необходимое количество значащих цифр.

Для блокировки вычислений по формуле в поясняющем тексте вызывается контекстное меню нажатием правой кнопки мыши сразу после выделения курсором редактирования элемента формулы. По команде **Properties** (Свойства) контекстного меню открывается одноименное диалоговое окно. Блокировка формулы задается в этом окне на вкладке **Calculation** установкой флажка **Disable Evaluation** (Отключить вычисления) (рис. 2.4). Также блокировку формулы можно выполнить через систему главного меню **Tools | Disable Evaluation**.

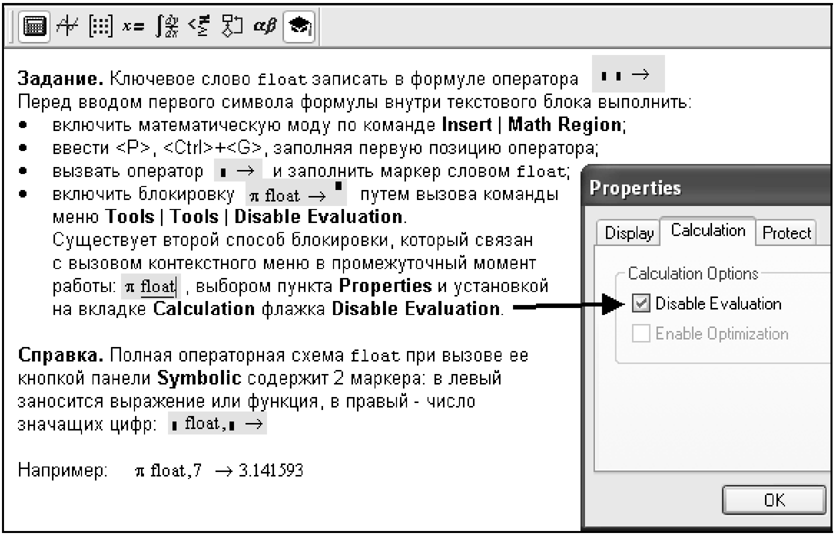


Рис. 2.4. Пример с установкой количества значащих цифр директивы `float`

2.2.2. Логические операторы

Из десятка логических операторов панели **Boolean** (Булевы функции) уделим внимание только оператору (=) логического равенства. Его называют часто "жирный" знак равенства и используют в записи систем уравнений в блоках решения:

♦ с помощью операции **Solve** (Решить);

♦ в конструкции `Given ... Find` *(см. гл. 8)*.

2.2.3. Арифметические операторы

Арифметические операторы вызывают арифметические операции, задаются соответствующими кнопками палитры **Calculator** *(см. разд. 2.3)* или с помощью клавиатуры.

Для набора некоторых операторов с клавиатуры используются:

♦ одна клавиша. Такие операторы текстуально обозначены на нижнем регистре клавиатуры, это три символа (–), (=) и (/);

- две клавиши. Основной символ операции текстуально обозначен в верхнем регистре клавиатуры, это символы (!), (*) и (+). Дополнительная клавиша <Shift> служит для смены регистра. Примерами записи операторов являются следующие комбинации клавиш: <Shift>+<1>, <Shift>+<8> и <Shift>+<=>.

Для упрощения обозначений при полном понимании процедуры перевода клавиатуры в верхний регистр часто оставляют одиночные обозначения (см. табл. 2.1).

2.2.4. Матричные операторы

Матричные операторы служат для проведения разнообразных матричных и векторных преобразований, в том числе и операций, не принятых в векторной алгебре, но позволяющих реализовать массовые вычисления. Операторы сосредоточены на палитре **Matrix**. Операторные схемы (шаблоны) представлены на рис. 2.5 в таком же порядке, как расположены выводящие их кнопки на палитре.

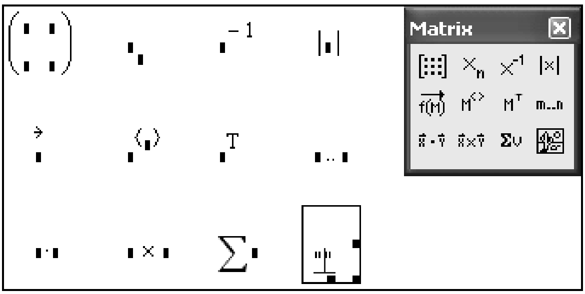


Рис. 2.5. Операторные шаблоны и кнопки панели **Matrix**

Особо обратим внимание на следующие кнопки. Кнопка с обозначением (**m..n**) служит для задания границ диапазона (и шага изменения) ранжированной переменной. Последняя двенадцатая кнопка **Picture** (Изображение) реализует вставку в рабочий документ файла с расширением bmp.

Клавиатурные варианты вызова приведены в табл. 2.1.

2.2.5. Вычислительные операторы

Вычислительные операторы панели **Calculus** представляют, как правило, сложные операторные конструкции. На панели расположены кнопки вычисления сумм, произведений, производных и интегралов, пределов трех видов (см. табл. 2.2).

На рис. 2.6 представлены шаблоны операторов с позиционными маркерами ввода. После расстановки операндов и прочих параметров в маркеры ввода блоки операторов в документе Mathcad становятся исполняемыми.

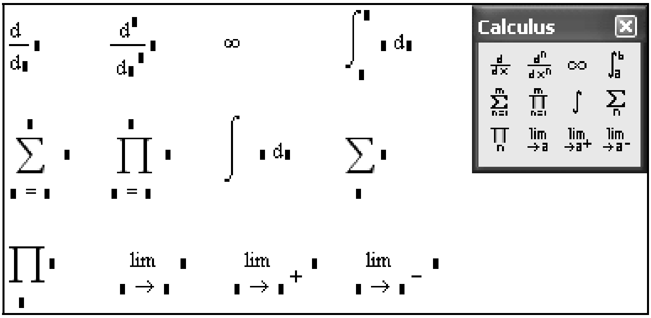


Рис. 2.6. Операторные шаблоны и кнопки панели **Calculus**

2.2.6. Символьные операторы

На рис. 2.7 и 2.8 показаны все ключевые слова, используемые для аналитических преобразований в интеллектуальном символьном процессоре.

Общее число кнопок 24, три из них дублируются на других панелях. Кнопкой **Modifiers**, в свою очередь, выводится дополнительная палитра с четырьмя ключевыми словами. На рис. 2.7 дан перевод всех ключевых слов, представленных слева в данной конфигурации панели; рис. 2.8 продолжает перечень ключевых слов, которые представлены справа, вместе с переводами.

В сводных табл. 2.1 и 2.2 основные операторы объединены в группы по близости действий над объектами.

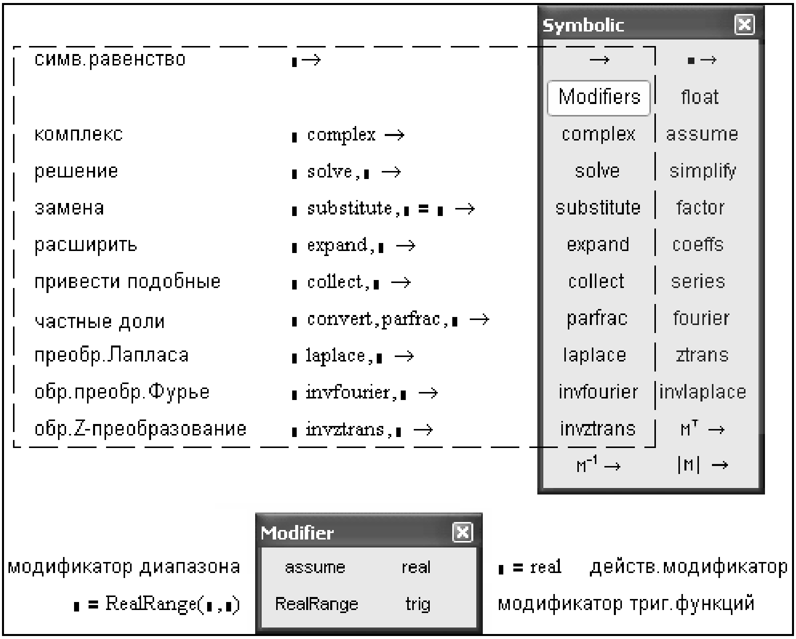


Рис. 2.7. Ключевые слова панели **Symbolic** и операторные шаблоны

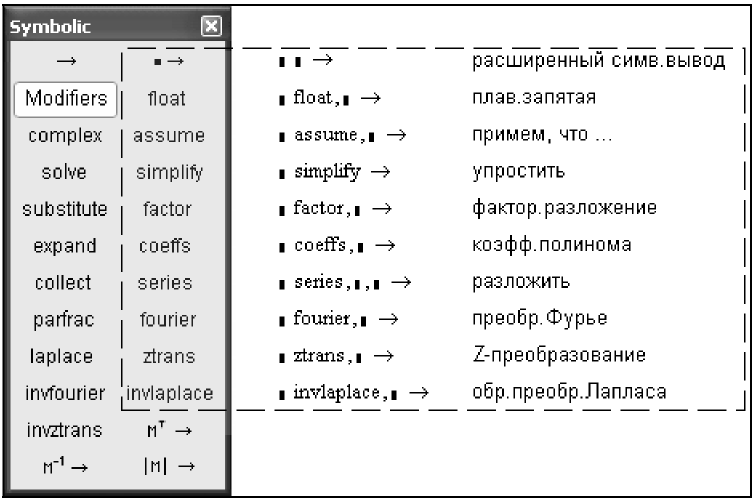


Рис. 2.8. Ключевые слова панели **Symbolic** и операторные шаблоны (окончание)

Таблица 2.1. Общие операторы ввода-вывода и арифметические операторы

Оператор	Кнопка	Вид	Клавиши
Присваивание	:=	■ := ■	<:>
Глобальное присваивание	≡	■ ≡ ■	<~>
Численный вывод	=	■ = ■ ■	<=>
Символьный вывод	→	■ →	<Ctrl>+<.>
Сложение	+	■ + ■	<+>
Отрицание или вычитание	−	− ■	<–>
Умножение	×	■ · ■	<*>
Квадратный корень	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{■}$	<\>
Корень *n*-й степени	$\sqrt[n]{\ }$	$\sqrt[■]{■}$	<Ctrl>+<\>
Скобки (изменение приоритета)	( )	(■)	<'>(апостроф)
Нижний индекс	x_n	$■_■$	<[>
Транспонирование	M^T	$■^T$	<Ctrl>+<1>
Модуль вектора (определитель матрицы)	$\|x\|$	$\|■\|$	<Shift>+<\>
Обратная величина (и обратная матрица)	$\frac{1}{x}$ и x^{-1}	$\frac{1}{■}$ и $■^{-1}$	<^>,<–>,<1>

Таблица 2.1 *(окончание)*

Умножение матричное		
	$\blacksquare \times \blacksquare$	<Ctrl>+<8>
Деление		
	$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$	</>
или	$\blacksquare \div \blacksquare$	<Ctrl>+</>
Факториал		
	$\blacksquare!$	<!>
Комплексное сопряжение		
—	$c := 3 - i$	<c>+<">
обозначение $\bar{c}$	$\bar{c} = 3 + i$	
Возведение в степень *n* (в т. ч. матрицы)		
	$\blacksquare^{\blacksquare}$	<^>,<*n*>
Векторизация		
	$\overrightarrow{\blacksquare}$	<Ctrl>+<–>
Выделение столбца		
	$\blacksquare^{\langle\blacksquare\rangle}$	<Ctrl>+<6>

Таблица 2.2. Расширенные вычислительные операторы

Определенный интеграл		
	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$	<Shift>+<7>
Произведение		
	$\prod_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$	<Ctrl>+<Shift>+<3>

Таблица 2.2 *(окончание)*

Неопределенный интеграл	$\int \blacksquare \, d\blacksquare$	<Ctrl>+<I>
Дифференцирование	$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$	<?>
Вычисление *n*-й производной	$\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$	<Ctrl>+<Shift>+</>
Сумма	$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$	<Ctrl>+<Shift>+<4>
Сумма ранжированной переменной	$\sum_{\blacksquare}\blacksquare$	<Shift>+<4>
Сумма элементов —	$\sum\blacksquare$	<Ctrl>+<4>
Произведение ранжированной переменной	$\prod_{\blacksquare}\blacksquare$	<Shift>+<3>
Предел	$\lim_{\blacksquare \to \blacksquare}\blacksquare$	<Ctrl>+<L>
Правый предел	$\lim_{\blacksquare \to \blacksquare^{+}}\blacksquare$	<Ctrl>+<A>
Левый предел	$\lim_{\blacksquare \to \blacksquare^{-}}\blacksquare$	<Ctrl>+<B>

2.3. Mathcad в роли калькулятора

В роли калькулятора Mathcad используется с помощью палитры **Calculator** (рис. 2.9). На рисунке слева показаны шаблоны функций в такой же последовательности, как расположены на панели их кнопки, пунктиром выделена числовая наборная часть панели.

За счет работы с кнопками достигается быстрое и безошибочное написание любого сложного математического выражения, основных функций (первая строчка панели) и задание основных операций арифметики.

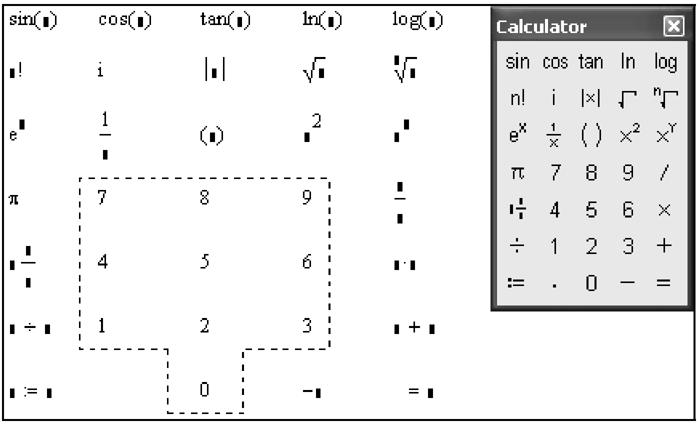


Рис. 2.9. Операторные шаблоны и функций панели **Calculator**

Приведем примеры вычислений.

Пример 2.1. Необходимо получить значения числовых констант Mathcad: π, e, %, ∞.

Процедуры определения констант имеют следующий вид:

- щелчок мыши на кнопке (π) и знаку (=), на экране появляется значение $\pi = 3.142$; <Enter>;
- щелчок мыши на кнопке (e^x);
- ввод числа 1 в позицию маркера ввода;
- нажатие клавиши <=>, на экране отобразится $e^1 = 2.718$;

♦ ввод в новую позицию курсора знака (%) нажатием клавиш <Shift>+<5>;

♦ щелчок по кнопке (=) (или нажатие клавиши <=>), на экране появится результат `0.01`;

♦ ввод в новую позицию курсора знака (∞) путем нажатия клавиш <Ctrl>+<Shift>+<Z>;

♦ щелчок по кнопке (=), на экране отобразится $\infty = 1 \times 10^{307}$.

Результаты определения констант показаны на рис. 2.10.

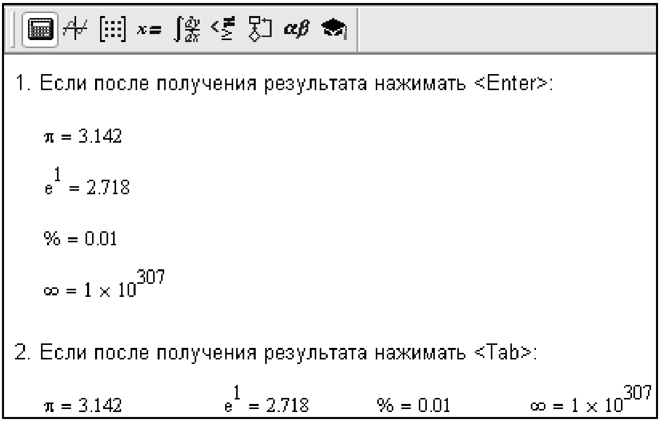


Рис. 2.10. Вычисление числовых констант Mathcad

На рисунке показаны два способа размещения результатов.

По умолчанию полученный результат представляется в трех разрядах после разделителя целой и дробной части.

Исследуем форматы представления чисел.

Особо отметим, что при вычислениях с символьным представлением констант сохраняется полная точность, но результаты по умолчанию представлены с тремя знаками после десятичной точки.

Для установки другого локального представления результата надо дважды щелкнуть на нем и в открывшемся диалоговом окне **Result Format** (Формат результата) в счетчике **Number of deci-**

mal places (Число десятичных мест) выставить требуемое количество знаков после точки. В примере 2.1 представления констант π и *e* можно сделать и такими, как показано на рис. 2.11.

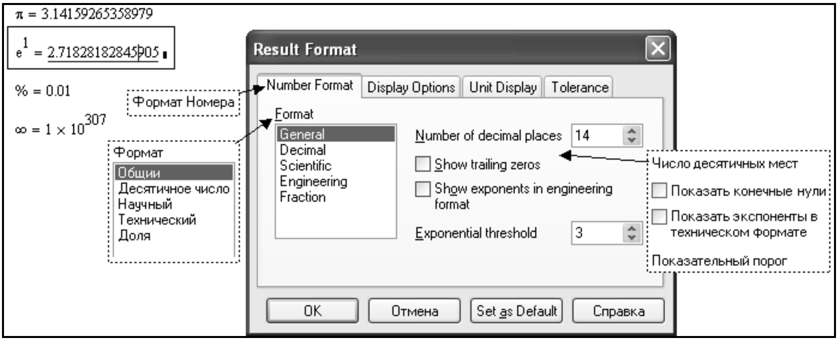


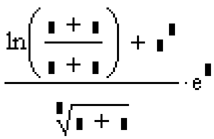
Рис. 2.11. Форматы представления чисел в окне **Result Format**

Пример 2.2. Построить операторную схему (сконструировать формулу) для выражения:

$$\frac{\ln\left(\dfrac{x+y}{5+y}\right)+y^2}{\sqrt[3]{x+y}}\cdot e^{-x}.$$

Найти результат при $x=\pi$, $y=e$ с точностью до четырех значащих разрядов.

Решение. Порядок конструирования выражения:



Структура заполняется обходом маркеров за 10 шагов (устанавливаются переменные в 7 позициях и вводятся 3 константы).

С помощью окна **Result Format** установим число знаков после десятичной точки равным пяти. Общее решение примера 2.2 представлено на рис. 2.12.

Рис. 2.12. Увеличение точности представления результата

2.4. Вычисление элементарных функций

Определив в *разд. 2.1* в общих чертах, что такое функция, каковы ее свойства и атрибуты, рассмотрим основную общепринятую классификацию.

По признакам доступности и сложности функции делят на элементарные и специальные. Первые всегда под рукой, определены в самой компьютерной системе математики, являются встроенными в нее. Большинство элементарных функций имеет один параметр.

Поскольку система постоянно совершенствуется, постоянно пополняется и список встроенных функций. Некоторые функции, которые ранее использовались только в специальных целях, попадают и в этот список. Граница между ними размывается.

Функция Mathcad вводится следующими способами: специальной клавишей либо кнопкой с пиктограммой f(x) на панели инструментов **Standard**, открывающей путь к выбору из списка встроенных (built-in) функций (см. рис. 1.20). Опытные пользователи могут позволить себе набирать имя функции на клавиатуре. Для этого надо знать правила написания (синтаксис) функции со списком аргументов, знать ее имя и параметры наизусть.

В нашем представлении список встроенных функций, готовых к немедленному использованию, открывают элементарные математические функции, доступные с панели **Calculator** (см. рис. 2.9). Они действительно всегда под рукой.

Встроенные функции разбиты на категории так, что их удобно вызывать, обращаясь к определенной части списка. В системе справки Mathcad перечислены все категории встроенных функций. Количество категорий достигло двух десятков, вначале указаны функции Бесселя (Bessel), завершает перечень векторно-матричные функции (Vector and Matrix).

2.5. Вычисление специальных функций

Напомним, что функции возвращают символьное или числовое значение, вектор или матрицу.

Специальные функции разбиты на несколько групп [8]:

- Bessel — функции Бесселя;
- Error function and complementary error function — интегралы ошибок;
- Special functions — остальные специальные функции.

Есть, однако, дополнительные специальные функции, которые относятся к классу "неактивных" — они носят только текстовый рекомендательный характер, не приводят к возвращению их значений.

Авторы, решая многочисленные задачи по проблемам, затронутым в настоящей книге, столкнулись с одной из таких функций. Это так называемая $Psi(x)$ — пси-функция, которая, в свою очередь, является производной от логарифма гамма-функции $\ln(\Gamma(x))$, и названа в справочной документации как дигамма-функция.

2.6. Образование и вычисление функций пользователя

В Mathcad возможно задание новых функций, которые образует сам пользователь. Делается это в целях удобства с учетом специфических задач пользователя.

Для оценки действия функции пользователя надо:

- ниже ее определения напечатать имя функции и открыть круглую скобку;
- напечатать список аргументов в появившемся маркере ввода, отделяя их запятыми. Завершить список правой круглой скобкой;
- ввести знак (=).

Пример 2.3. Задать функцию пользователя с переобозначением тригонометрической функции sin(x). Проверить правильность вычислений в характерных точках при $x = 0$ и $x = \pi$.

Решение получается следующей последовательностью действий:

- образование функции пользователя, `s(x) := sin(x)`;
- обращение к функции пользователя, `s(∎)`;
- печать списка аргументов и закрывающей круглой скобки, `s(x)`;
- нажать клавишу <=>.

Результат приведен на рис. 2.13.

Функции пользователя могут быть написаны на алгоритмических языках высокого уровня, рекомендации по этой части изложены в [12].

В заключение отметим некоторые выводы из всего сказанного ранее.

- Целесообразно использовать панель инструментов **Calculator** с наглядным отображением требуемых операторов, а не только клавиатуру для ввода выражений.

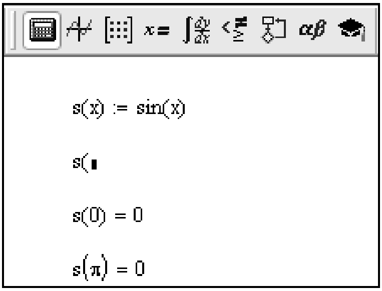


Рис. 2.13. Образование и вычисление функции пользователя в примере 2.3

- ♦ Рациональные способы действий связаны со структурным восприятием компонентов заданной формулы, или четким представлением операционной схемы математического выражения (см. рис. 1.3, пример 2.2). Подобная систематизация очень помогает исследователю, сразу виден баланс (соотношение) и тенденции, например влияние ошибок экспериментальных данных.
- ♦ При построении сложных формул рекомендуем активно использовать способ перемещения по маркерам ввода с помощью клавиши <Tab>.
- ♦ На первом этапе общения со средой рекомендуем вводить функции, используя кнопку  стандартной панели, списки категорий и функций. Доступна контекстная справка, которую можно получить при необходимости, выделяя имя функции и нажимая клавишу <F1>.

ГЛАВА 3

Специальные вычисления и преобразования математических функций

В настоящей главе описаны компьютерные технологии преобразования и вычисления математических функций. Рассмотрены случаи, наиболее часто встречающиеся на практике. Приведено большое количество примеров, позволяющих понять и усвоить компьютерные технологии вычислений и преобразований, а также уяснить возможности системы Mathcad.

В данной главе рассматриваются:

- ♦ вычисление производных;
- ♦ табулирование функций;
- ♦ вычисление суммы ряда чисел;
- ♦ вычисление произведения ряда чисел;
- ♦ вычисление пределов;
- ♦ разложение функции в степенной ряд.

3.1. Вычисление производных

Система Mathcad позволяет вычислять производные любого порядка при неограниченном числе символьных переменных. При этом могут использоваться два различных способа.

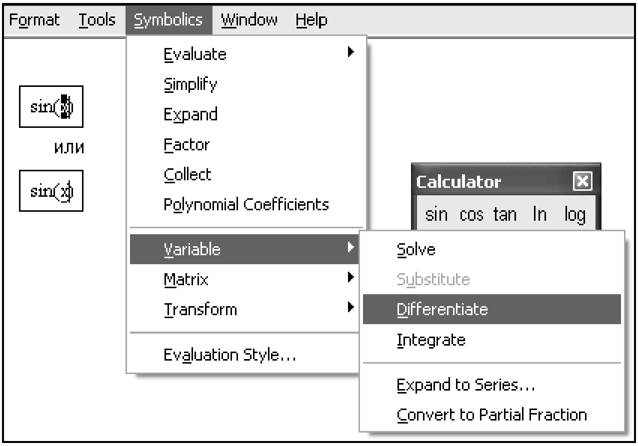


Рис. 3.1. Вычисление производной функции

Способ 1. *Использование символьных вычислений*

Этот способ не требует обращения к маркерам ввода производной. Вычисления выполняются с помощью команд меню **Symbolics**.

Технология реализации этого способа состоит в выполнении следующих действий:

- ввод выражения, производную которого необходимо найти;
- выделение с помощью двойного щелчка мыши переменной дифференцирования;
- обращение к командам меню **Symbolics | Variable | Differentiate** (рис. 3.1).

После выполнения команды **Differentiate** (Дифференцировать) на экране появляется значение производной.

Покажем на примерах возможности этого способа, его достоинства и недостатки.

Пример 3.1. Необходимо найти производную следующей функции:

$$y(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln 2x - xe^{-x}.$$

Решение приведено на рис. 3.2.

$$\frac{(x-1)}{x+1} + \ln(2\cdot x) - x\cdot \exp(-x)$$

$$\frac{1}{(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \exp(-x) + x\cdot \exp(-x)$$

Рис. 3.2. Результат вычисления производной функции из примера 3.1

Простота метода — основное его достоинство.

Однако ему присущи следующие недостатки:

- для получения *n*-й производной необходимо обращаться *n* раз к пункту меню **Symbolics**;
- выражение производной достаточно сложно, оно не упрощается системой, хотя в системе Mathcad имеются функции упрощения математических выражений (такие как **Simplify**, **Expand**, **Factor**).

Это особенно заметно при отыскании производной функции с большим количеством символьных переменных.

Способ 2. *Использование маркеров ввода*

Сущность этого способа состоит в следующем.

На экран выводится соответствующий шаблон ввода, в черные позиционные маркеры вводятся выражение для функции, переменная дифференцирования и порядок производной. Для получения решения достаточно нажать клавишу вывода решения. Откликом является *n*-я производная.

Технология этого способа состоит в выполнении следующих процедур:

- вызов на экран шаблона производной.

  Шаблон производной можно вызвать на экран с помощью клавиатуры или мыши. Нажав одновременно клавиши

<Shift>+<?> (знак вопроса) или <Shift>+<Ctrl>+<?>, получим на экране шаблоны соответственно первой и *n*-й производной. Тот же эффект будет, если щелкнуть мышью по соответствующему шаблону на панели инструментов **Calculus**;

- ввод функции, переменной и порядка дифференцирования. Ввод осуществляется с помощью клавиатуры в соответствии с маркерами ввода.

  Переход из одного позиционного маркера к другому осуществляется нажатием либо клавиш <Tab> или <→>, либо левой кнопкой мыши на черном прямоугольнике маркера;
- получение ответа путем нажатия клавиш <Shift>+<F9>. Можно также использовать кнопку символьных вычислений (изображение стрелки вправо) панели инструментов **Evaluation**.

Покажем процедуры вычисления производной на примерах.

Пример 3.2. Необходимо вычислить производную функции:

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{a+bx}{a-bx}+\sin 2x\cos 2x\,.$$

Решение приведено на рис. 3.3.

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{a+b\cdot x}{a-b\cdot x}+\sin(2\cdot x)\cdot\cos(2\cdot x)\right)$$

$$\frac{1}{(x+1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)^2}+\frac{b}{(a-b\cdot x)}+\frac{(a+b\cdot x)}{(a-b\cdot x)^2}\cdot b+2\cdot\cos(2\cdot x)^2-2\cdot\sin(2\cdot x)^2$$

Рис. 3.3. Определение производной функции из примера 3.2

Из рис. 3.3 видно, что решение слишком громоздкое. Попытки его упростить с помощью функций **Simplify**, **Expand**, **Factor** не привели к успеху. Между тем выражение производной может быть получено в более простом виде. Так, например, производная, полученная системой Derive 5, имеет вид:

$$2\cos 4x + \frac{2(a+b)(bx^2+a)}{(x+1)^2(bx-a)^2}.$$

В качестве примеров в табл. 3.1 приведены функции и значения их производных, полученные системой Mathcad и другими математическими системами, осуществляющими упрощение результатов дифференцирования.

Таблица 3.1. Функции и значения их производных

№	Функция	Производная, полученная Mathcad	Упрощенное выражение производной
1	$xe^x + \ln\sin x$	$\exp(x) + x\cdot\exp(x) + \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$e^x(x+1) + \cot(x)$
2	$\dfrac{x-1}{x+1} + \ln\dfrac{x}{x+1}$	$x - 2\ln(x+1) + \ln\dfrac{-1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\cdot x$	$\dfrac{3x+1}{x(x+1)^2}$
3	$\ln(2+x!)$	$Psi(x+1)\dfrac{x!}{2+x!}$	—
4	$\dfrac{d^7}{dx^7}\dfrac{x-1}{x+1}$	$\dfrac{5040}{(x+1)^7} - \dfrac{5040(x-1)}{(x+1)^8}$	$\dfrac{10080}{(x+1)^8}$
5	$\sinh x + \cosh x$	$\sinh(x) + \cosh(x)$	e^x

Из табл. 3.1 и приведенных ранее примеров видно, что система Mathcad в большинстве случаев позволяет получить *n*-ю производную функции. Однако выражение производной очень часто достаточно сложно. В редких случаях система не находит решения, хотя оно существует.

3.2. Табулирование функции

Табулированием будем называть представление функции в виде таблицы. Его можно осуществить путем вычисления функции для всех значений аргументов. Такой процесс долгий и утомительный для пользователя. Поэтому во многих системах компьютерной алгебры имеются встроенные функции, позволяющие, по известному вектору исходных данных, получать функцию в виде таблицы, состоящей из двух столбцов: x и $f(x)$.

В системе Mathcad такой встроенной функции нет. Однако задача может быть решена иными способами, описанными далее.

Способ 1. Технология этого способа предельно проста и состоит в выполнении следующих процедур:

- присвоение переменной (например, `x`) значений аргументов табулированной функции. При этом шаг таблицы должен быть постоянным. Переменная `x` представляется в следующем виде: `x0, x0 + h .. xk`, где `x0` — начальное значение аргумента, `h` — шаг таблицы, `xk` — конечное значение аргумента. Например, `x := 0, 0.2 .. 3`. При таком представлении переменная `x` называется ранжированной переменной.

  Знак присваивания (`:=`) образуется нажатием клавиши <:> (двоеточие), а знак (`..`) — нажатием клавиши <;> (точка с запятой);
- ввод табулируемой функции, которой может быть присвоено имя;
- получение решения нажатием клавиши <=> (равно). Если табулируемой функции было присвоено имя, например, `f :=`, то решение получают вводом символа `f` и нажатием клавиши <=>.

Покажем технологию табулирования по этому способу на примере.

Пример 3.3. Необходимо протабулировать функции xe^x, $\sin x$, $\frac{x-1}{x+1}$ в диапазоне изменения аргумента от 0 до 2 с шагом 0,2.

Решение имеет вид, показанный на рис. 3.4.

$x := 0, 0.2 .. 2$

$x =$	$x \cdot e^{x} =$	$\sin(x) =$	$\frac{x-1}{x+1} =$
0	0	0	-1
0.2	0.244	0.199	-0.667
0.4	0.597	0.389	-0.429
0.6	1.093	0.565	-0.25
0.8	1.78	0.717	-0.111
1	2.718	0.841	0
1.2	3.984	0.932	0.091
1.4	5.677	0.985	0.167
1.6	7.925	1	0.231
1.8	10.889	0.974	0.286
2	14.778	0.909	0.333

Рис. 3.4. Результаты табулирования функций из примера 3.3

Способ 2. Этот способ применяется в тех случаях, когда шаг таблицы переменный.

Технология табулирования состоит в выполнении следующих процедур:

♦ создается вектор аргумента *x* табулируемой функции. Вектор образуется в такой последовательности:

- ввод символа *x* вектора аргументов;
- нажатие клавиши <:>; на экране появится символ присвоения вектору имени (x :=);
- вызов диалогового окна **Insert Matrix** для установки размеров вектора аргументов (рис. 3.5) путем нажатия кнопки с изображением матрицы на панели инструментов **Matrix**;
- установка размеров вектора в полях **Rows** (Строки) и **Columns** (Столбцы) окна **Insert Matrix**; на экране после щелчка по кнопке **OK** образуется вектор с именем x и пустыми маркерами ввода;

- ввод в позициях вектора x численных значений аргументов табулируемой функции;

♦ ввод табулируемой функции с аргументом x;

♦ получение решения путем нажатия клавиши <=>; на экране появится ответ в виде вектора значений табулируемой функции.

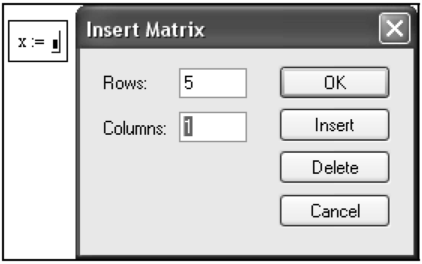


Рис. 3.5. Окно ввода размеров матрицы (вектора)

Процедуры табулирования функций x^2 и $\ln x$ показаны на рис. 3.6.

$$x := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \\ 15 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 25 \\ 49 \\ 144 \\ 225 \\ 676 \end{pmatrix} \qquad \ln(x) = \begin{pmatrix} 1.609 \\ 1.946 \\ 2.485 \\ 2.708 \\ 3.258 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.6. Примеры табулирования функций с переменным шагом табулирования

Недостатками табулирования функции $y = f(x)$ в системе Mathcad являются:

- невозможность табулирования одновременно нескольких функций;
- вектор решений не содержит аргументов, что затрудняет определение значения функций при данном значении аргумента (приходится считать число строк таблицы).

Для удобства определения значений функции при данных значениях аргументов можно дублировать вектор аргументов и путем перетаскивания полученных векторов решений расположить их рядом. Этот прием показан на рис. 3.4.

3.3. Вычисление суммы ряда чисел

Система Mathcad позволяет суммировать числа, заданные в виде вектора с постоянным или переменным шагом. При этом числа могут быть заданы в виде функций.

Суммирование осуществляется с использованием шаблона. Пользователь заполняет маркеры ввода, отмеченные черными прямоугольниками, и получает ответ нажатием клавиши <=> или <Shift>+<F9>.

На практике часто приходится суммировать числа, заданные в виде вектора, элементами которого могут быть числа с постоянным и переменным шагом *h*, а также представленные в виде функций.

В Mathcad имеются несколько технологий суммирования чисел. Рассмотрим основные из них и приведем примеры.

Случай 1. Числа заданы в виде вектора с постоянным шагом.

В этом случае вектор чисел представляется в виде ранжированной переменной. Если шаг `h` = 1, то Mathcad допускает представление чисел в следующем виде `x := 1 .. 10`. Такая запись означает, что вектор `x` состоит из чисел от 1 до 10 с шагом 1.

При таком способе представления ряда чисел технология суммирования состоит в выполнении пользователем следующих действий:

- образование вектора чисел с именем ранжированной переменной (например, `x`);

- ввод шаблона щелчком мыши на кнопке панели инструментов **Calculus**;
- ввод в оба маркера ввода имени вектора (ранжированной переменной);
- получение суммы чисел путем нажатия клавиши <=>.

Пример 3.4. Необходимо определить, на сколько сумма четных чисел в диапазоне от 1 до 1000 больше суммы нечетных чисел в этом же диапазоне.

В данном случае векторы нечетных и четных чисел могут быть представлены в следующем виде: `x1 := 1, 3 .. 999`, `x2 := 2, 4 .. 1000`. Разность `Σ x1 – Σ x2` и будет решением задачи.

Процедура решения задачи и результат показаны на рис. 3.7.

$$x1 := 1,3..999 \qquad x2 := 2,4..1000$$

$$\sum_{x1} x1 = 2.5 \times 10^{5}$$

$$\sum_{x2} x2 = 2.505 \times 10^{5}$$

$$\sum_{x2} x2 - \sum_{x1} x1 = 500$$

Рис. 3.7. Вычисление суммы ряда нечетных и четных чисел

Случай 2. Пусть задан вектор чисел с переменным шагом.

В данном случае технология суммирования состоит в выполнении следующих процедур:

- образование вектора чисел по технологии, описанной в *разд. 3.2*;
- ввод шаблона суммирования одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+<4>;

- заполнение маркера ввода символом имени вектора чисел;
- получение решения нажатием клавиши <=>.

Рассмотрим технологию на примере.

Пример 3.5. Необходимо вычислить сумму следующих чисел:

- 3; 5; 9; 11; 21;
- 1; $\sin(0,5)$; $e^{0,5}$; $\ln(2)$; 12;
- $3\ln(5)$; $\sin(1)+\cos(1)$; 7; $2\cdot 0,75^2$; 18.

Векторам чисел присвоить имена `x1`, `x2`, `x3`.

Решение примера приведено на рис. 3.8.

$$x1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix} \qquad x2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(0.5) \\ \exp(1.2) \\ \ln(2) \\ 12 \end{pmatrix} \qquad x3 := \begin{pmatrix} 3\cdot\ln(5) \\ \sin(1)+\cos(1) \\ 7 \\ 2\cdot 0.75^2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\sum x1 = 49 \qquad \sum x2 = 17.493 \qquad \sum x3 = 32.335$$

Рис. 3.8. Вычисление сумм чисел из примера 3.5

Mathcad позволяет вычислять сумму значений функции, заданной в аналитическом виде. В этом случае технология состоит в выполнении следующих процедур:

- вызов на экран операторного шаблона путем одновременного нажатия клавиш <Ctrl>+<Shift>+<4> или щелчка мыши на соответствующей кнопке панели инструментов **Calculus**;
- ввод в пустые маркеры функции и диапазона значений аргумента суммирования;
- нажатие кнопки символьных вычислений (→) (стрелка вправо) на панели **Symbolic**;
- получение ответа щелчком мыши вне выражения суммирования.

Покажем технологию суммирования значений функции на примерах.

Пример 3.6. Необходимо найти сумму следующих функций:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-x}\,; \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!}\,; \quad \sum_{n=1}^{100} n\,; \quad \sum_{n=1}^{100} n!\,; \quad \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}\,; \quad \sum_{n=1}^{n} n\,; \quad \sum_{n=1}^{n} n^2\,;$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^3\,.$$

Решение задачи приведено на рис. 3.9.

$$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \qquad \sum_{x=0}^{\infty} \exp(-x) \to \frac{\exp(1)}{(-1+\exp(1))} = 1.582$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{x^i}{i!} \to \exp(-x) \qquad \sum_{n=1}^{100} n = 5.05 \times 10^3$$

$$\sum_{n=1}^{100} n! = 9.427 \times 10^{157} \qquad \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} = 5.187$$

$$\sum_{n=1}^{n} n \to \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 - \frac{1}{2}\cdot n - \frac{1}{2} \qquad \sum_{n=1}^{n} n^2 \to \frac{1}{3}\cdot(n+1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^2 + \frac{1}{6}\cdot n + \frac{1}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 \to \frac{1}{4}\cdot(n+1)^4 - \frac{1}{2}\cdot(n+1)^3 + \frac{1}{4}\cdot(n+1)^2$$

Рис. 3.9. Значение сумм чисел из примера 3.6

Получены интересные результаты суммирования.

Система Mathcad проиллюстрировала свои интеллектуальные возможности: решения получены в аналитическом виде. Для получения численного значения суммы достаточно после получения решения в аналитическом виде нажать клавишу <=>.

К сожалению, так же как и при вычислении производных, аналитическое решение не упрощается. Например, значения сумм по переменной n можно упростить до следующих формул:

$$\sum_{n=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}\ ; \quad \sum_{n=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ; \quad \sum_{n=1}^{n} n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\ .$$

Основное достоинство Mathcad в суммировании чисел состоит в наличии маркеров ввода, существенно упрощающих решение задач суммирования чисел.

3.4. Вычисление произведения ряда чисел

Произведение чисел в Mathcad, так же как и суммирование, осуществляется с помощью шаблонов. При этом применяются два вида шаблонов — с двумя и четырьмя маркерами ввода.

Первый используется для вычисления произведения чисел с постоянным шагом, представленных в ранжированном виде.

Технология вычисления произведения чисел в этом случае состоит в выполнении следующих действий:

- ♦ образование вектора чисел с постоянным шагом типа ранжированной переменной: `x := x0, x0 + h .. xk`;
- ♦ ввод шаблона произведения нажатием клавиш <Shift>+<3> или щелчком мыши на кнопке произведения панели инструментов **Calculus**;
- ♦ заполнение маркеров ввода именем ранжированной переменной;
- ♦ получение ответа нажатием клавиши <=>.

При определении произведения чисел, представляющих собой значения функции $y = f(x)$ при заданных значениях аргумента x, используется шаблон произведения с четырьмя маркерами ввода.

В этом случае технология вычисления произведения чисел состоит в выполнении следующих действий:

- ввод шаблона одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+ +<Shift>+<3>;
- заполнение маркеров ввода выражением функции и значением изменения аргумента;
- получение ответа путем нажатия клавиши <=>.

Полезно знать, что при вычислении произведения чисел с произвольным шагом и представлении их в виде матрицы результатом вычисления суммы будет вектор, каждый элемент которого представляет собой гамма-функцию соответствующего элемента исходной матрицы.

Приведем примеры вычисления произведений.

Пример 3.7. Необходимо вычислить произведение ряда следующих чисел:

- x от 1 до 20 с шагом 0,2;
- 2,5; e^3; $\ln(5)$; 3; $\sin(0,5)$;
- e^x при x от 0 до 5;
- $x+\ln(x)+\sin(x)$ при x от 1 до 100;
- $1-\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ при k от 1 до ∞;
- $n!$ при n от 1 до 10.

Решение приведено на рис. 3.10.

3.5. Вычисление пределов

Пределы в системе Mathcad определяются с помощью функции `lim`.

Шаблоны вызываются щелчком мыши на кнопках панели инструментов **Calculus** или одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+<L>, <Ctrl>+<A> или <Ctrl>+<B>.

При нажатии клавиш <Ctrl>+<L> на экране появляется знак предела с пустыми маркерами ввода. При определении предела слева

$$x := 1, 1.2 .. 20 \qquad \prod_{x} x = 3.081 \times 10^{89}$$

$$x1 := \begin{pmatrix} 2.5 \\ \exp(3) \\ \ln(5) \\ 3 \\ \sin(0.5) \end{pmatrix} \qquad \prod_{i=0}^{4} x1_i = 116.236$$

$$\prod_{x=0}^{5} \exp(x) = 3.269 \times 10^{6}$$

$$\prod_{x=1}^{100} (x + \ln(x) + \sin(x)) = 3.385 \times 10^{162}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2 \cdot k + 1)^2} \right] \to \frac{1}{4} \cdot \pi$$

$$\prod_{n=1}^{10} n! = 6.659 \times 10^{27}$$

Рис. 3.10. Вычисление произведения значений функций из примера 3.7

или справа на экран выводятся шаблоны нажатием клавиш соответственно <Ctrl>+<A> или <Ctrl>+<B> или щелчком мыши на соответствующей кнопке панели инструментов **Calculus**.

Символ (∞) (бесконечность) при определении пределов вводится одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+<Z> или щелчком мыши по кнопке (∞) панели инструментов **Calculus**.

Технология вычисления предела состоит в выполнении следующих процедур:

- ввод знака `lim`;
- заполнение маркеров шаблона `lim` математическим выражением и предельным значением аргумента;

- ♦ получение решения одновременным нажатием клавиш <Shift>+<F9> или с помощью знака символьных вычислений ($\rightarrow$).

Процедуры и результаты решения покажем на примерах.

Пример 3.8. Необходимо найти предельные значения следующих функций:

- ♦ $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$;
- ♦ $\dfrac{e^x}{1-e^x}$ при $x \to \infty$;
- ♦ $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$;
- ♦ $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$.

Результаты решения приведены на рис. 3.11.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{1-\exp(x)} \to -1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \to \exp(1) = 2.718$$

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\left(a^x+b^x\right)}{2}\right]^{\frac{1}{x}} \to a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$

Рис. 3.11. Пределы функций из примера 3.8

3.6. Разложение функции в степенной ряд

Разложение функции $y = f(x)$ в степенной ряд в Mathcad осуществляется по формуле Тейлора, которая имеет вид:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \\ +(x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots \qquad (3.1)$$

В формуле a — значение аргумента x, вокруг которого происходит разложение функции в ряд.

Формула Тейлора справедлива при любом значении a, в том числе и при $a = 0$.

При $a = 0$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \ldots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots \qquad (3.2)$$

В Mathcad разложение функции в степенной ряд осуществляется с помощью функций меню **Symbolic | Variable | Expand to Series** (Символика | Переменная | Разложение в ряд).

Технология реализуется следующими процедурами:

- ввод математического выражения;
- выделение переменной двойным щелчком мыши;
- обращение к командам меню **Symbolic | Variable | Expand to Series**, на экране появится диалоговое окно **Expand to Series** для установки количества членов степенного ряда, по умолчанию $n = 6$ (рис. 3.12);
- ввод в поле **Order of Approximation** (Порядок аппроксимации) желаемого числа членов ряда;
- щелчок по кнопке **OK**, на экране появится ответ в виде степенного ряда.

Рис. 3.12. Окно установки размерности степенного ряда

В качестве примера на рис. 3.13 приведено разложение в степенной ряд функций cos(x), cosh(x), acos(x) при заданном числе членов ряда $n = 6$.

Из рис. 3.13 видно, что число членов разложения функции меньше, чем было задано. Это объясняется тем, что функция cos(x) является четной и нечетные ее члены равны нулю.

При разложении функции в степенной ряд не всегда можно получить решение. Решение нельзя получить в следующих случаях:

- функция $y = f(x)$ не имеет n производных;
- ряд Тейлора является расходящимся;
- функция или ее производные не могут быть вычислены при определенных значениях a.

$$\cos(x)$$

$$1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4$$

$$\cosh(x)$$

$$1 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4$$

$$\mathrm{acos}(x)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\pi - 1\cdot x - \frac{1}{6}\cdot x^3 - \frac{3}{40}\cdot x^5$$

Рис. 3.13. Разложение в ряд функций cos(x), cosh(x), acos(x)

Например, функция $x \ln(x)$ не может быть разложена в ряд вокруг $x = 0$, т. к. $\ln(0)$ не существует.

При вычислении функции с помощью степенного ряда возникают ошибки, связанные с тем, что бесконечный ряд представляется рядом с конечным числом членов. В связи с этим необходимо знать, сколько членов ряда должно быть, чтобы погрешность не превышала заданного значения ε.

В ряде случаев число членов ряда n можно определить аналитически, например в случае знакопеременного ряда с убывающими членами. Такой ряд имеет следующее свойство: сумма отброшенных членов ряда по абсолютной величине не превосходит значения последнего оставленного члена ряда.

Так как отброшенные члены ряда определяют погрешность вычисления значений функции, то ее легко определить по известному выражению последнего оставленного члена ряда. Приведем пример.

Пусть необходимо определить число членов ряда функции $y = e^{-x}$, обеспечивающих вычисление функции с погрешностью, не превышающей ε.

Ряд функции имеет вид:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Ряд знакопеременный с убывающими членами ряда, поэтому условием выбора числа членов может быть: $\frac{x^n}{n!} \le \varepsilon$.

Пусть $x = 1$, тогда $\frac{1}{n!} \le \varepsilon$ или $n! \ge \frac{1}{\varepsilon}$. Если, например, $\varepsilon = 0{,}01$, то $n! \ge 100$, а $n \ge 5$.

Если степенной ряд не знакопеременный, то общих правил выбора числа членов нет.

Как же вычислить погрешность степенного ряда? Помощь здесь могут оказать компьютерные технологии.

Можно предложить следующие три способа:

- табулирование функции;
- графическое представление решения;
- вычисление среднеквадратической погрешности аналитическим методом.

Способ 1. *Табулирование функции*

Этот способ основан на сравнении численных значений исходной функции и полученной в результате разложения в ряд Тейлора. Способ реализуется путем табулирования функций и сравнения их результатов. Приведем пример.

Пример 3.9. Оценить погрешность степенного ряда, полученного в результате разложения функции e^x с числом членов $n = 5$ в диапазоне x от 0 до 2.

Решение. При $n = 5$ степенной ряд имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Табулирование функций и его результаты приведены на рис. 3.14.

Из рис. 3.14 видно, что степенной ряд функции e^x с числом членов $n = 5$ хорошо описывает экспоненциальную функцию до значения $x \le 0{,}6$.

В этом диапазоне значения функций совпадают с точностью не менее трех знаков после запятой.

С ростом x погрешность степенного ряда возрастает, а при $x = 2$ совпадают только целые части числа.

Способ 2. *Графоаналитический метод*

Исходная функция и функция разложения представляются в виде графика. По виду графика можно определить допустимый диапазон значений аргумента x и величину погрешностей степенного ряда.

$x := 0, 0.2 .. 2$

$x =$	$\exp(x) =$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$
0	1	1
0.2	1.221	1.221
0.4	1.492	1.492
0.6	1.822	1.822
0.8	2.226	2.225
1	2.718	2.717
1.2	3.32	3.315
1.4	4.055	4.042
1.6	4.953	4.923
1.8	6.05	5.987
2	7.389	7.267

Рис. 3.14. Результаты табулирования функций

$$y(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

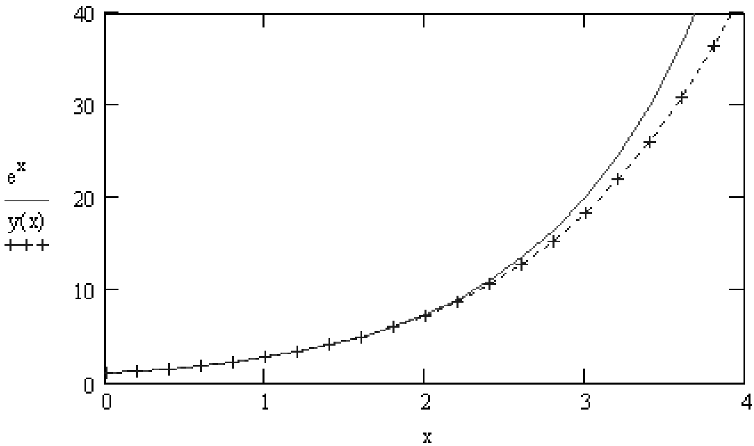


Рис. 3.15. Графики функций e^x и ее степенного ряда

Рост погрешности можно оценить, если построить график разности функций в заданном диапазоне аргумента x.

На рис. 3.15 приведены графики степенной и экспоненциальной функций. Они подтверждают результаты табулирования.

Способ 3. *Определение погрешностей степенного ряда аналитически*

Значения функции, полученные в результате табулирования, дают возможность определить абсолютную ε и относительную δ погрешности ряда Тейлора. Эти погрешности вычисляются по формулам:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}}, \tag{3.3}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{y_{\min}}. \tag{3.4}$$

В формулах обозначены:

- $\Delta_i = y(x_i) - \varphi(x_i)$;
- $y(x_i)$ — значение исходной функции при $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
- $\varphi(x_i)$ — значение функции ряда Тейлора при $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$;
- n — число членов табуляции;
- $y_{\min}$ — минимальное отличное от нуля значение исходной функции из диапазона разложения в ряд Тейлора.

Этот способ оценки адекватности разложения в степенной ряд наиболее объективен.

Пример 3.10. Вычислить абсолютную и относительную среднеквадратические погрешности степенного ряда экспоненциальной функции, полученного в примере 3.9.

Процедуры решения задачи и результаты приведены на рис. 3.16.

$$x := 0, 0.2 .. 2$$

$$Y(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{\sum_x (\exp(x) - Y(x))^2}{11}}$$

$$\varepsilon = 0.043$$

$$\delta := \frac{\varepsilon}{1} \cdot 100$$

$$\delta = 4.265$$

Рис. 3.16. Погрешности степенного ряда

Результаты расчета подтверждают выводы, сделанные ранее на основании анализа таблиц и графиков.

ГЛАВА 4

Компьютерные технологии решения математических задач

Компьютерная технология — это последовательность операций, приводящая к решению задачи с помощью компьютера.

Она определяется:

- ♦ алгоритмом решения задачи;
- ♦ набором функций и команд системы компьютерной алгебры;
- ♦ человеческим фактором (знаниями пользователя).

В главе рассматриваются общие вопросы компьютерных технологий решения математических задач. В последующих главах они уточняются в соответствии с решаемыми задачами.

4.1. Особенности компьютерных технологий решения задач

Основными особенностями компьютерных технологий решения математических задач являются:

- ♦ высокая производительность;
- ♦ возможность решения задач больших размерностей;
- ♦ высокая достоверность результатов;

- возможность представления результатов в любом необходимом пользователю виде.

Эти особенности дают возможность решать такие задачи, которые поражают воображение не только рядового пользователя, но и профессионального математика.

Не так давно считалось выдающимся достижением вычисление числа e с семьюстами значащими цифрами, пятизначных таблиц элементарных функций или шестизначных таблиц логарифмов натуральных чисел.

Многие математические методы невозможно было использовать из-за физических возможностей человека. Теория во многом опережала практику решения математических задач. Проклятие больших размерностей висело над исследователем.

Теперь мало кого можно удивить тем, что с помощью компьютера можно в доли секунды определить все 500 корней уравнения $x^{500} - 1 = 0$ или решить в течение 20 секунд методом Рунге—Кутты систему из 20 дифференциальных уравнений, для решения которой понадобилась бы вся человеческая жизнь.

В считанные минуты можно получить таблицу логарифмов или элементарных функций с точностью до нескольких десятков знаков.

Теперь эти таблицы не нужны, они содержатся в виде компьютерных программ.

Последние достижения компьютерной алгебры позволяют решать задачи в аналитическом виде. Теперь компьютер не высоко производительный калькулятор, а интеллектуальное техническое средство, позволяющее получать математические модели различных объектов и явлений, доказывать теоремы, принимать оптимальные решения.

Только не следует думать, что теперь всю интеллектуальную работу будет выполнять компьютер, а мы будем пользоваться его результатами. Нет, это далеко не так, а даже наоборот. Нужно много знать, чтобы заставить этот искусственный интеллект служить пользователю. И первое, что необходимо, — это изучить компьютерные технологии решения задач.

Приведем лишь один пример.

Пусть необходимо вычислить интеграл:

$$\int_0^\infty e^{-(a-b)x}dx .$$

Студенты, да и не только они, найдут решение в следующем виде:

$$\int_0^\infty e^{-(a-b)x}dx = -\frac{1}{a-b}e^{-(a-b)x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a-b} .$$

А теперь попытаемся вычислить этот интеграл с помощью универсальной математической системы компьютерной алгебры. К нашему удивлению, решения мы не получим. Это объясняется тем, что при условии $a-b<0$ интеграл является расходящимся, а система символьной математики настолько интеллектуальна, что для вычисления интеграла требует задания условия $a-b>0$, тогда решение будет иметь вид:

$$\int_0^\infty e^{-|a-b|x}dx = \frac{1}{|a-b|} .$$

Нам казалось, что условие $a-b>0$ очевидно, а может быть и забыли, что при условии $a-b<0$ интеграл является расходящимся.

Подобные случаи на практике встречаются очень часто. Программа не может сама принять решение. Она не знает значений a и b.

Этот пример говорит также о недостаточной интеллектуальности математической системы. Она должна выдать следующее решение:

$$\int_0^\infty e^{-(a-b)x}dx = \frac{1}{a-b}, \text{ если } a-b>0,$$

и не существует, если $a-b<0$.

Такой ответ был бы не только верным, но и являлся бы подсказкой пользователю.

Появление нового научного направления в информатике "Компьютерная алгебра" требует изучения универсальных математических программных средств символьной математики и компьютерных технологий решения математических задач.

4.2. Сущность компьютерных технологий решения задач

Основными этапами компьютерных технологий решения математических задач являются:

- ♦ постановка задачи;
- ♦ разработка алгоритма;
- ♦ выбор типа универсального программного средства для решения задачи;
- ♦ программирование на языке системы компьютерной алгебры (если это необходимо);
- ♦ решение задачи с помощью компьютера;
- ♦ проверка достоверности решения задачи;
- ♦ анализ полученных результатов.

4.2.1. Постановка задачи

Постановка задачи обычно состоит из следующих пунктов:

- ♦ дано;
- ♦ определить;
- ♦ форма выходного документа.

Формулировка задачи является наиболее трудным и ответственным пунктом постановки задачи. Недаром часто исследователи говорят: задача сформулирована, значит, задача решена.

Сформулировать задачу может только человек, хорошо знающий предметную область, владеющий математическими методами и компьютерными технологиями их реализации. Таких специалистов очень мало. Поэтому формулировки задач часто бывают некорректными. В результате чего задача либо не имеет решения, либо решения ошибочны, либо решается не та задача, которая должна быть сформирована.

Приведем примеры некорректных формулировок математических и технических задач.

Сначала приведем примеры некорректных формулировок математических задач:

- необходимо определить корни уравнения $(1+x)^{\frac{1}{x}}=0$;
- требуется решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 2x-y-2z=3; \\ 3x+y+z=7; \end{cases}$$

- вычислить интегралы:

$$\int_0^5 \frac{\ln(x-1)}{x}dx, \quad \int_0^5 \frac{\sin x}{x^2}dx.$$

Первая задача поставлена некорректно потому, что не указано, какие корни необходимо определить. Если вещественные, то это уравнение решения не имеет.

Вторая задача некорректна потому, что система уравнений несовместна (третье уравнение является суммой первых двух). Главный определитель этой системы равен нулю.

Интегралы не берутся потому, что отрицательные числа логарифма не имеют, а $\frac{\sin x}{x^2}$ при $x=0$ (нижний предел интегрирования) равен бесконечности.

На рис. 4.1 приведено решение системы уравнений.

Из рисунка видно, что система Mathcad решения не выдала, а только повторила выражение матричного решения уравнения, преобразовав его в $\frac{1}{\mathrm{M}}\cdot\mathrm{V}$.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot V$$

$$\frac{1}{M} \cdot V$$

Рис. 4.1. Решение несовместной системы уравнений

На рис. 4.2 показано вычисление интегралов из нашего примера.

Из решения видно, что Mathcad в обоих случаях выдала значение (∞) (бесконечность).

$$\int_0^5 \frac{\ln(x-1)}{x}\,dx \rightarrow i \cdot \infty = i \times 10^{307}$$

$$\int_0^5 \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx \rightarrow \infty = 1 \times 10^{307}$$

Рис. 4.2. Вычисление неберущихся интегралов

Приведенные примеры достаточно просты, и в процессе решения задачи ошибки из-за некорректности постановки могут быть легко устранены.

Однако в инженерной практике могут возникать такие задачи, в которых из-за некорректности постановки теряются результаты исследования, при этом ошибки проявляются уже в процессе эксплуатации системы.

Вот один из таких примеров.

Энергетическая система состоит из двух генераторов $Г_1$ и $Г_2$ и регулятора R (рис. 4.3).

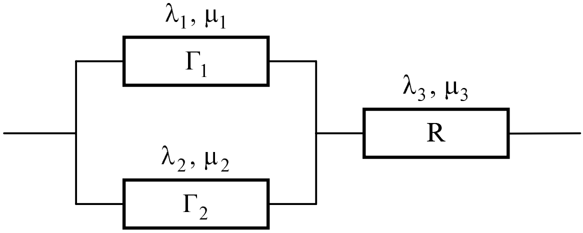


Рис. 4.3. Структурная схема энергетической системы

Интенсивности отказов λ_1, λ_2, λ_3 и восстановления μ_1, μ_2, μ_3 генераторов и регулятора известны. Систему обслуживает одна бригада.

Необходимо определить показатели надежности системы: вероятность и среднее время безотказной работы.

Задача достаточно сложная, требует решения системы дифференциальных уравнений восьмого порядка. А между тем решение, выполненное с помощью компьютерных технологий, может быть ошибочным. Задача поставлена некорректно, т. к. не указана дисциплина обслуживания элементов системы. Результаты проявятся не сразу, а лишь в процессе эксплуатации системы.

Приведем еще один пример некорректной постановки задачи.

При тестовом контроле знаний студентов их знания оцениваются следующим образом. В тесте содержится N вопросов, на каждый из них предлагается k ответов, один (или несколько) из которых верный. Знания оцениваются по проценту правильных ответов: $Z = \frac{n}{N} \cdot 100\%$, где n — число верных ответов.

Это типичный пример некорректно поставленной задачи. При таком контроле Z не будет объективной оценкой знаний, т. к. здесь не дано количество угаданных ответов. Завышенная оценка знаний — таков итог некорректно поставленной задачи.

Компьютерные технологии позволяют решать очень серьезные технические задачи. В связи с этим ошибки в решении дорого обходятся. Вот почему задачи должны быть корректно поставлены.

4.2.2. Разработка алгоритма решения задачи

Любой численный алгоритм представляет собой совокупность условий выбора начальных значений, расчетных соотношений, признака окончания вычислений.

При компьютерных технологиях решения математических задач алгоритм существенно определяется системой функций и команд программных средств символьной математики.

Вот один из примеров.

Необходимо решить систему линейных дифференциальных уравнений пятого порядка, представив решение в аналитическом виде для конкретных значений переменных.

Можно предложить следующие два алгоритма решения задачи:

Алгоритм 1:

- ♦ представление системы уравнений в преобразованиях Лапласа;
- ♦ решение системы уравнений;
- ♦ определение оригиналов путем обратного преобразования Лапласа;
- ♦ проверка правильности решения.

Алгоритм 2:

- ♦ решение системы уравнений численным методом Рунге—Кутты;
- ♦ интерполяция полученных решений в виде таблиц;
- ♦ проверка правильности решения задачи.

Оба алгоритма можно реализовать с помощью систем компьютерной алгебры.

Какой же из них выбрать?

Результаты решения задачи в аналитическом виде более предпочтительны, т. к. пригодны для любых значений переменных.

Второй алгоритм имеет два существенных недостатка:

- решение является частным случаем, соответствующим лишь одному набору численных значений параметров;
- требует доказательства адекватности решения, т. к. содержит два источника ошибок: ошибки численного метода и ошибки интерполяции.

Не зная компьютерных технологий, пользователь выберет первый метод.

Решая задачу по первому алгоритму, пользователь практически не получит ответа по следующим причинам:

- обратное преобразование Лапласа настолько сложно, что им воспользоваться невозможно: оно даже не помещается на экране монитора;
- возможны случаи, когда обратное преобразование Лапласа не существует.

Приходится выбирать второй худший алгоритм.

Пользователь, не владеющий компьютерной технологией решения дифференциальных уравнений, не может выбрать более рациональный алгоритм. Разработка алгоритма решения задачи требует знания возможностей универсальных программных средств символьной математики и компьютерных технологий решения математических задач.

4.2.3. Выбор универсального программного средства компьютерной алгебры

Выбор системы компьютерной алгебры при решении конкретной задачи зависит от многих факторов, основными из которых являются:

- содержание задачи;
- знания пользователя;
- форма выходного документа.

Каждая из существующих систем имеет свои достоинства и недостатки. Отдать предпочтение какой-либо одной из них мы не рискнем.

Дадим только несколько советов из нашего опыта.

1. Если задачу необходимо решить в аналитическом виде, то пользуйтесь одной из следующих систем компьютерной алгебры: Mathematica, Maple, Derive 5, как наиболее интеллектуальными системами.
2. Если задача требует широкого использования графических образов, то используйте систему Mathematica — лидер в этой области.
3. Если требуется решить специальную, а не общематематическую задачу, то поищите компьютерные технологии ее решения в библиотеке системы Matlab.
4. Если требуются значительные матричные вычисления, то также отдайте предпочтение Matlab.
5. Если нужно создать документ с большим количеством математических выражений, формул, символов, то отдайте предпочтение Mathcad.
6. Если отдается предпочтение простоте решения задач (в том числе и графики), то следует предпочесть систему Derive 5.
7. Если решаются математические задачи стандартного типа с численными результатами, то все системы практически равноценны.

Приведем пример.

Самым эффективным способом повышения надежности техники является структурное резервирование.

В отношении интенсивности отказа техники существует следующая теорема: интенсивность отказа резервированной системы при общем постоянном резервировании кратности m равна нулю при $t = 0$ и равна интенсивности отказа соответствующей нерезервированной системы при $t \to \infty$.

Необходимо доказать эту теорему, пользуясь компьютерной технологией.

Уточним постановку задачи.

Дана структурная схема резервированной системы (рис. 4.4). Все ее устройства равнонадежны и имеют интенсивность отказа λ час$^{-1}$. Число резервных устройств равно m.

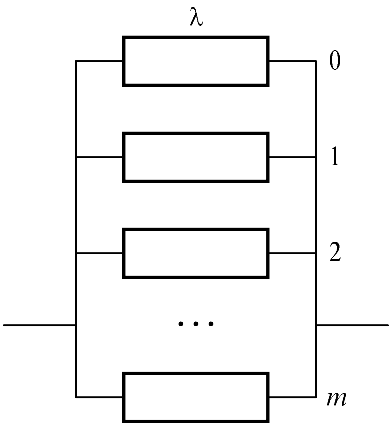


Рис. 4.4. Структурная схема резервированной системы

Необходимо доказать, что интенсивность отказа системы $\lambda_c = 0$ при $t = 0$ и $\lambda_c = \lambda$ при $t \to \infty$.

Алгоритм решения задачи:

$$\lambda_c(t) = -\frac{P_c'(t)}{P_c(t)};$$

$$\lambda_c(0) = \lim_{t \to 0} \lambda_c(t);$$

$$\lambda_c(\infty) = \lim_{t \to \infty} \lambda_c(t).$$

В выражениях приняты следующие обозначения:

- $P_c(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1}$ — вероятность безотказной работы системы в течение времени t;
- $P_c'(t)$ — производная от $P_c(t)$.

Решение задачи связано с символьными вычислениями, такими как вычисление производной, определение пределов. Численных решений в этом алгоритме нет. Поэтому наиболее целесообразно доказывать теорему с помощью одной из следующих систем компьютерной алгебры: Mathematica, Maple, Derive 5. Выберем Derive 5 как наиболее простую интеллектуальную систему [13].

Компьютерные технологии доказательства теоремы приведены на рис. 4.5—4.8. На рис. 4.5 приведен алгоритм доказательства теоремы.

#1: $\lambda :\in \text{Real}\ (0,\ \infty)$

#2: $m :\in \text{Real}\ (0,\ \infty)$

#3: $t :\in \text{Real}\ (0,\ \infty)$

#4: p

#5: $\dfrac{d}{dt}\ p$

#6: $-\dfrac{\frac{d}{dt}\ p}{p}$

#7: $\lim\limits_{t\to 0} -\dfrac{\frac{d}{dt}\ p}{p}$

#8: $\lim\limits_{t\to \infty} -\dfrac{\frac{d}{dt}\ p}{p}$

Рис. 4.5. Алгоритм доказательства теоремы

Опишем вкратце содержание рис. 4.5.

В строках #1, #2, #3 заданы диапазоны изменения переменных λ, m, t. В строке #4 находится символ вероятности безотказной работы резервированной системы, а в строке #5 — обозначение ее производной. В строке #6 находится формула вычисления интенсивности отказа системы, полученная в результате выполнения операции #5/#4. В строках #7 и #8 представлены выражения пределов $\lim\limits_{t\to 0}\lambda_c(t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda_c(t)$. Совокупность выражений #1—#8 и является алгоритмом доказательства теоремы.

На рис. 4.6 приведены процедуры табулирования функции $\lambda_c(t)$ в диапазоне m от 0 до 10.

$$\#9: \quad \text{VECTOR}\left(\left[m,\ \lim_{t \to 0} -\frac{\frac{d}{dt}\,p}{p}\right],\ m,\ 0,\ 10\right)$$

$$\#10: \quad \text{VECTOR}\left(\left[m,\ \lim_{t \to \infty} -\frac{\frac{d}{dt}\,p}{p}\right],\ m,\ 0,\ 10\right)$$

$$\#11: \quad \text{IF}\left(x = 0,\ \text{VECTOR}\left(\left[m,\ \lim_{t \to 0} -\frac{\frac{d}{dt}\,p}{p}\right],\ m,\ 0,\ 10\right),\ \text{VECTOR}\left(\left[m,\ \lim_{t \to \infty} -\frac{\frac{d}{dt}\,p}{p}\right],\ m,\ 0,\ 10\right)\right)$$

Рис. 4.6. Табулирование функции lim $\lambda_c(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$

Рис. 4.6 состоит из трех строк. В строках #9 и #10 представлены функции табуляции предельных значений интенсивностей отказов резервированной системы. В строке #11 расположен условный оператор `IF(x, y1, y2)`. При `x` = 0 система возвращает предельные значения интенсивностей отказов системы при $t = 0$, в противном случае при $t = \infty$.

На рис. 4.7 показана итоговая программа с введенной формулой вероятности безотказной работы резервированной системы и результат решения задачи.

$$\#12: \quad \text{IF}\left(x = 0,\ \text{VECTOR}\left(\left[m,\ \lim_{t \to 0} -\frac{\frac{d}{dt}\left(1 - \left(1 - \hat{e}^{-\lambda \cdot t}\right)^2\right)}{1 - \left(1 - \hat{e}^{-\lambda \cdot t}\right)^2}\right],\ m,\ 0,\ 10\right),\ \text{VECTOR}\left(\left[m,\ \lim_{t \to \infty} -\frac{\frac{d}{dt}\left(1 - \left(1 - \hat{e}^{-\lambda \cdot t}\right)^2\right)}{1 - \left(1 - \hat{e}^{-\lambda \cdot t}\right)^2}\right],\ m,\ 0,\ 10\right)\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 5 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 0 \\ 8 & 0 \\ 9 & 0 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & \lambda \\ 2 & \lambda \\ 3 & \lambda \\ 4 & \lambda \\ 5 & \lambda \\ 6 & \lambda \\ 7 & \lambda \\ 8 & \lambda \\ 9 & \lambda \\ 10 & \lambda \end{bmatrix}$$

Рис. 4.7. Результат решения задачи

Из решения видно, что при $t = 0$ $\lambda_c = 0$ при любом m, а при $t = \infty$ $\lambda_c = \lambda$. Теорема доказана.

4.2.4. Программирование

Программирование на языке системы Mathcad — это самостоятельный большой раздел компьютерной алгебры. В данной книге его нет. Ограничимся здесь только некоторыми замечаниями.

Программирование с помощью универсальных языков, таких как Паскаль, Бейсик, Фортран, Си и др., в техническом вузе большого смысла не имеет. Оно изучается лишь для повышения образования студента и на практике в большинстве случаев не используется. При необходимости программы составляют профессиональные программисты.

Глубокое изучение программирования в технических вузах отсутствует по следующим причинам:

- в учебных планах вузов такой предмет отсутствует, программирование изучается только в курсе "Информатика" с крайне ограниченным числом часов;
- в общеинженерных и технических дисциплинах вузов программирование не используется: в этом нет необходимости, особенно при внедрении в процесс обучения программных средств символьной математики;
- символьное программирование широко используется лишь для численных расчетов.

Другое дело — программирование на языке систем символьной математики.

Функциональное программирование имеет следующие особенности:

- простота программ;
- крайне ограниченное число специальных операторов (функции компьютерной алгебры сами по себе являются операторами программирования);
- большинство алгоритмов реализуется с помощью линейных программ;

- программы легко воспринимаются даже пользователем, не владеющим программированием;
- программа, написанная на языке Mathcad, во много раз проще, чем на универсальном языке программирования;
- язык системы Mathcad является функционально полным, поэтому позволяет создавать программы практически любых инженерных задач.

4.2.5. Проверка достоверности решения задачи

Результаты решения задачи могут быть представлены в виде числа, таблицы, графика или аналитического выражения. Например, результатом решения алгебраического или трансцендентного уравнения является число, решением системы дифференциальных уравнений — таблица, решение задачи в случае символьных переменных — формула.

Способы проверки правильности решения задачи зависят от вида ответа. Они могут быть осуществимы следующими способами:

- подстановкой;
- табулированием;
- построением графиков;
- вычислением погрешностей.

Рассмотрим эти методы, их достоинства и недостатки.

Метод подстановки

Сущность метода. Результаты полученного решения подставляются в исходное выражение (выражения). Если решение верное, то итогом подстановки будет тождество.

Пример 4.1. Решить и проверить методом подстановки правильность решения уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Решение, полученное с помощью функции `polyroots` *(см. гл. 8)*, приведено на рис. 4.8.

$$V := \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x := \mathrm{polyroots}(V)$$

$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^2 + 3\cdot x - 4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.8. Проверка правильности решения квадратного уравнения из примера 4.1

Из рис. 4.8 видно, что решение верное. При подстановке в исходное уравнение его корней получен нулевой вектор.

Пример 4.2. Необходимо решить и проверить правильность решения уравнения $x^4 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Решение приведено на рис. 4.9.

$$V := \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x := \mathrm{polyroots}(V) \qquad x = \begin{pmatrix} -0.763 - 1.795i \\ -0.763 + 1.795i \\ 0.526 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^4 + 2\cdot x^2 - 5\cdot x + 2 = \begin{pmatrix} -1.478 \times 10^{-9} - 2.06i \times 10^{-9} \\ -1.478 \times 10^{-9} + 2.06i \times 10^{-9} \\ 1.801 \times 10^{-12} \\ 5.46 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

Рис. 4.9. Проверка правильности решения уравнения из примера 4.2

Из рис. 4.9 видно, что проверка достоверности решения не дала желаемого результата: элементы вектора не являются нулями. Между тем можно утверждать, что решение верно, т. к. числа вектора близки к нулю. Их отличие от нуля можно объяснить погрешностями вычисления корней и функции.

Пример 4.3. Решить и проверить правильность решения уравнения $2^x - 2(a+b) = 0$.

Решение приведено на рис. 4.10.

$$2^x - 2\cdot(a+b) = 0$$

$$\frac{\ln(2\cdot a + 2\cdot b)}{\ln(2)}$$

$$2^{\frac{\ln(2\cdot a+2\cdot b)}{\ln(2)}} - 2\cdot(a+b) = 0$$

$$0 = 0$$

Рис. 4.10. Проверка правильности решения уравнения из примера 4.3

Из рис. 4.10 видно, что проверка правильности решения уравнения, после применения команды упрощения **Simplify**, дала желаемый результат.

Метод табулирования

Сущность метода состоит в следующем. Исходная функция, заданная в табличной форме, представлена в виде формулы. Табулируя формулу во всем диапазоне изменения аргумента, получим вновь функцию в табличной форме. Сравнивая данные двух таблиц, можно установить погрешность формулы.

Такие случаи встречаются при моделировании различных процессов и явлений, а также при планировании и статистической обработке результатов эксперимента.

Достоинство этого метода состоит в том, что погрешность функции видна при каждом значении ее аргумента. Его недостаток — отсутствие критерия определения суммарной погрешности.

Подробно этот метод рассмотрен в *гл. 3* и *10*.

Метод визуализации вычислений

Этот метод очевиден. Он находит применение при решении следующих задач:

- определение корней алгебраических и трансцендентных уравнений;
- решение задач интерполяции;
- определение экстремальных значений функции.

Метод приведен в *гл. 3*, *8*, *10*.

Достоинство метода — высокая наглядность результата.

Метод вычисления погрешностей

Этот способ наиболее объективен. Его результатом является величина погрешности в виде числа. При этом для оценки погрешности применяются различные критерии:

- величины минимальной и максимальной погрешностей;
- среднее значение погрешности;
- среднеквадратические абсолютная и относительная погрешности.

Вычисления погрешностей осуществляются по формулам и большой сложности не представляют.

Эти способы рассматриваются и реализуются в *гл. 3*, *10*.

ГЛАВА 5

Компьютерные технологии символьных вычислений

5.1. Символьные вычисления в Mathcad

Способность математической системы выполнять алгебраические операции является одним из основных признаков ее интеллектуальности. Эта способность определяется числом функций, предназначенных для решения задач с символьными переменными.

Система Mathcad не является самой интеллектуальной. Впереди ее находятся такие системы, как Mathematica, Maple, Derive 5.

В системе Mathcad используется в упрощенном виде ядро символьной математики системы Maple V. При этом прямого доступа к большому числу ее операций у пользователя нет. Это является причиной следующих недостатков системы Mathcad в области символьных вычислений:

- ответы, получаемые в результате символьных вычислений, сложны, система плохо их упрощает;
- имеют место случаи, когда задача в аналитическом виде не решается, хотя является достаточно простой;
- иногда система выдает решение только после нескольких попыток; при этом причина не ясна.

Эти недостатки увидим при решении задач.

В области символьных вычислений Mathcad позволяет решать большое число задач. Перечислим основные из них:

- ♦ производит символьные операции с математическими выражениями с целью их упрощения: раскрывает скобки, выполняет сокращения, приводит к общему знаменателю, выносит за скобки, выполняет разложение на множители и другие операции;
- ♦ выполняет символьные вычисления:
  - решает уравнения с символьными переменными;
  - вычисляет неопределенные и определенные интегралы;
  - находит производные;
  - вычисляет пределы функций;
  - раскладывает функции в ряд Тейлора;
  - выполняет интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Z-преобразование;
- ♦ выполняет символьные матричные вычисления: транспонирование, обращение матрицы, вычисление определителей;
- ♦ осуществляет подстановку символьных переменных в математическое выражение.

Символьные операции решения уравнений, вычисления производных, интегралов, пределов, разложение функции в степенной ряд обсуждаются в *гл. 3*, *8*, *9*. В настоящей главе рассматриваются символьные операции упрощения выражений, интегральных преобразований, вычисления функций и подстановки.

В Mathcad символьные вычисления могут выполняться в двух режимах: командном и операторном.

В командном режиме используются команды меню **Symbolics**, в операторном применяется оператор (→) (стрелка вправо).

Символьные вычисления в командном режиме имеют следующие особенности:

- ♦ вывод решения на экран ограничен местом: решение может выводиться только ниже исходного выражения, или справа от него, или вместо него.

Место вывода определяется командой **Evaluate Style** (Стиль вывода) меню **Symbolics**;

- выражения ответов бывают настолько сложны, что их анализ крайне затруднен или даже невозможен;
- решение в аналитическом виде не всегда получается даже в простых случаях, что объясняется невысокой интеллектуальностью системы Mathcad. Следует иметь в виду, что Mathcad — это, в основном, система численных решений математических задач;
- простота решения математических задач на символьные вычисления.

Символьные вычисления в операторном режиме выполняются с помощью операторов символьного вывода.

Оператор символьного вывода представляет собой стрелку (→), которая вызывается одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+<.> (точка). Имеется и второй оператор, называемый расширенным оператором символьного вывода, который вызывается одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+<Shift>+<.> (точка). Расширенный оператор имеет вид стрелки с двумя шаблонами и позволяет выполнять символьные операции с указанием вида преобразований получаемого решения.

5.2. Символьные вычисления в командном режиме

5.2.1. Упрощение символьных выражений

Упрощение символьных выражений в Mathcad осуществляется с помощью следующих команд меню **Symbolics**: **Evaluate** (Вычислить), **Simplify** (Упростить), **Expand** (Разложить), **Factor** (Разложить на множители), **Collect** (Привести подобные), **Polynomial Coefficients** (Коэффициенты полинома).

Технология упрощения символьных выражений исключительно проста и одинакова для всех команд. Она состоит в выполнении следующих действий:

- ввод выражения, требующего упрощения;
- выделение выражения;
- выполнение соответствующей команды меню **Symbolics**.

Если необходима операция с учетом отдельной переменной упрощаемого выражения, то переменная выделяется двойным щелчком мыши.

Команда *Evaluate* (*Вычислить*)

Команда **Evaluate** осуществляет преобразование с выбором следующих команд подменю: **Symbolically**, **Floating Point**, **Complex**.

- Команда **Symbolically** (Символьный ввод) обрабатывает математические выражения, стремясь упростить их путем возможных вычислений и преобразований.
- Команда **Floating Point** (Плавающая точка) выполняет арифметические операции в выражениях в форме чисел с плавающей точкой. Она позволяет установить число цифр результата до 4000 верных цифр.
- Команда **Complex** (Комплексный вид) выполняет вычисления в виде комплексных выражений.

Команда *Simplify* (*Упростить*)

Эта команда упрощает выделенное математическое выражение путем его преобразования с помощью операций приведения дробей к общему знаменателю, приведения подобных членов, использования тригонометрических формул и др. С помощью этой команды выполняются многие символьные операции (вычисление производных, интегралов, сумм и произведений ряда чисел).

Команда **Simplify** может также упрощать алгебраические выражения, представленные в символьном виде. Эта команда четко не определена. Ее действия иногда приводят к неожиданным результатам. Возможны даже случаи, когда выражение после выполнения этой команды усложняется.

Пример 5.1. Необходимо упростить с помощью команды **Simplify** следующие выражения:

$$\frac{a}{b}+\frac{3}{a+b}; \quad a+\frac{ab}{a-b}-\frac{a+1}{a-b}+1; \quad (\sin x+\cos x)^2 \sin x .$$

Решение приведено на рис. 5.1.

$$\frac{a}{b}+\frac{3}{a+b} \qquad a+\frac{a\cdot b}{a-b}-\frac{a+1}{a-b}+1$$

$$\frac{\left(a^2+a\cdot b+3\cdot b\right)}{b\cdot(a+b)} \qquad \frac{\left(a^2-1-b\right)}{(a-b)}$$

$$(\sin(x)+\cos(x))^2\cdot\sin(x)$$

$$\sin(x)+2\cdot\cos(x)-2\cdot\cos(x)^3$$

Рис. 5.1. Упрощение выражений с помощью команды **Simplify**

Из рис. 5.1 видно, что команда **Simplify** не нашла оптимального решения для последнего выражения: $(1+\sin 2x)\sin x$.

Команда *Expand* (*Разложить*)

Эта команда раскрывает скобки математических выражений, возводит аналитическое выражение в степень, выполняет преобразования тригонометрических выражений.

Пример 5.2. Необходимо преобразовать с помощью команды **Expand** следующие выражения:

$$(x-a)^5; \quad (x-1)(x^2+1)(x+1); \quad \sin 2x;$$

$$(x+2)^2+(\sin x+\cos x)^2-1 .$$

Решение, выполненное по описанной технологии, приведено на рис. 5.2.

Из рис. 5.2 видно, что команда успешно преобразовала первые три уравнения и плохо "упростила" последнее. Она "не знает", что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, хотя обратное ей "известно".

$$(x-a)^5$$

$$x^5 - 5\cdot x^4\cdot a + 10\cdot x^3\cdot a^2 - 10\cdot x^2\cdot a^3 + 5\cdot x\cdot a^4 - a^5$$

$$(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x+1)$$

$$x^4 - 1$$

$$\sin(2\cdot x)$$

$$2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$$

$$(x+2)^2 + (\sin(x)+\cos(x))^2 - 1$$

$$x^2 + 4\cdot x + 3 + \sin(x)^2 + 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + \cos(x)^2$$

Рис. 5.2. Упрощение выражений с помощью команды **Expand**

Команда *Factor* (*Разложить на множители*)

Команда **Factor** выполняет операции выноса за скобки, разложения на множители, приведения к общему знаменателю.

Пример 5.3. Необходимо с помощью команды **Factor** преобразовать следующие выражения:

$$x^5 - 1; \quad \frac{x^3 - a^3}{x - a}; \quad \frac{x^3 - a}{x - a}; \quad \frac{156}{16};$$
$$x^4 + 17x^3 - 13x^2 - 233x - 204.$$

Решение задачи приведено на рис. 5.3.

Из рис. 5.3 видно, что команда **Factor** превосходно решила четыре задачи, но не смогла преобразовать выражение $\dfrac{x^3 - a}{x - a}$.

$x^5 - 1$	$\dfrac{(x^3 - a^3)}{x - a}$
$(x-1)\cdot(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	$a^2 + x\cdot a + x^2$
$\dfrac{(x^3 - a)}{x - a}$	$\dfrac{156}{16}$
$\dfrac{(-x^3 + a)}{(-x + a)}$	$\dfrac{39}{4}$
$x^4 + 17\cdot x^3 - 13\cdot x^2 - 233\cdot x - 204$	
$(x-4)\cdot(x+17)\cdot(x+3)\cdot(x+1)$	

Рис. 5.3. Упрощение выражений с помощью команды **Factor**

Команда *Collect* (*Привести подобные*)

Команда **Collect** выполняет символьные операции и представляет результат в полиномиальном виде относительно переменных. При этом аналитическое выражение может быть функцией или выражением. Выбор переменной осуществляется пользователем (двойной щелчок мыши на переменной).

Пример 5.4. Необходимо преобразовать с помощью команды **Collect** следующие выражения:

$$(x + a - c)^2\,; \quad x + \frac{a}{x} + ab^2 + 2x^2.$$

Решение приведено на рис. 5.4.

Из рис. 5.4 видно, что первое выражение разложено относительно переменных x, a, c, второе — только относительно переменной a.

$$(x + a - c)^2$$

$$x^2 + (2 \cdot a - 2 \cdot c) \cdot x + (a - c)^2$$

$$a^2 + (2 \cdot x - 2 \cdot c) \cdot a + (x - c)^2$$

$$c^2 + (-2 \cdot x - 2 \cdot a) \cdot c + (x + a)^2$$

$$x + \frac{a}{x} + a \cdot b^2 + 2 \cdot x^2$$

$$\left(\frac{1}{x} + b^2\right) \cdot a + x + 2 \cdot x^2$$

Рис. 5.4. Преобразования выражений с помощью функции **Collect**

Команда *Polynomial Coefficients* (*Коэффициенты полинома*)

Команда выдает коэффициенты полинома, представленные в виде вектора. Эта команда полезна в том случае, когда выражение сложно и для определения коэффициентов полинома необходимо выполнять много вспомогательных операций.

Пример 5.5. Необходимо найти коэффициенты полинома следующих выражений:

$$(x-a)^2(2x-1)(x^2-1)+bx^3+c\,; \quad (x+a)(x-b)\,;$$

$$\frac{(x+1)^3}{3} - x\sin 1 + x^2 e^{-b} - \ln c\,.$$

Решение приведено на рис. 5.5.

Из рис. 5.5 видно, что задача успешно решена.

Из описания команд упрощения выражений и примеров видно, что действия команд слабо формализованы. Имеет место дублирование команд.

$$(x-a)^2\cdot(2\cdot x-1)\cdot\left(x^2-1\right)+b\cdot x^3+c \qquad (x+a)\cdot(x-b)$$

$$\begin{pmatrix} a^2+c \\ -2\cdot a-2\cdot a^2 \\ 1+4\cdot a-a^2 \\ -2+2\cdot a+2\cdot a^2+b \\ -1-4\cdot a \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -a\cdot b \\ -b+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(x+1)^3}{3}-x\cdot\sin(1)+x^2\cdot\exp(-b)-\ln(c)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\ln(c) \\ 1-\sin(1) \\ 1+\frac{1}{\exp(b)} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Рис. 5.5. Преобразование выражений с помощью функции **Polynomial Coefficients**

По этим причинам и ряду других технология упрощения выражений в Mathcad не очевидна.

Математической теории оптимизации выражений не существует. Это высоко интеллектуальная работа, и искусственный интеллект не может сравниться с естественным. Отсюда и решения, получаемые системой Mathcad, далеко не оптимальны.

Пользователь в большинстве случаев при решении практических задач затрудняется выбрать нужную команду упрощения. Как поступают в этом случае студенты, да и не только они? Используют все команды наугад, пытаясь упростить выражение до минимума. Так как команды выполняются мгновенно, то процесс упрощения математических выражений похож на компьютерную игру.

Вот один из примеров, показывающий несовершенство технологий упрощения выражений.

Необходимо упростить выражение $(\sin x + \cos x)^2 - 1$. После выполнения команды **Simplify** получаем выражение $2\sin x \cos x$. Получить более простое выражение $\sin 2x$ не удается: ни одна из команд упрощения не позволяет это сделать. Между тем, выражение $\sin 2x$ с помощью команды **Expand** можно упростить и получить $2\sin x \cos x$.

И подобных примеров сколько угодно.

Далее приводятся выражения для упрощения. Они позволяют пользователю усвоить команды упрощения, приобрести навыки, увидеть достоинства и недостатки Mathcad, как интеллектуальной системы.

$$\frac{2}{x+a} - \frac{3}{x+a} + \frac{1}{x^2 - a^2}; \quad \frac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c}; \quad x^5 - 2;$$

$$(x+1{,}2)(x-3{,}6)(x+7);$$

$$\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\cdot\cos x}{\sin 2x}; \quad x^4 - 3x^3 i + 3xi + 9x^2 - 10.$$

> ***Примечание***
>
> В процессе упрощения выражений используйте команды многократно, комбинируя последовательность их исполнения. Например, при упрощении пятого тригонометрического выражения воспользуйтесь командами **Simplify** и **Expand**.

5.2.2. Символьные операции с выражениями

Символьные операции дифференцирования, интегрирования, вычисления пределов, разложения в ряд, решения уравнений достаточно подробно описаны в *гл. 3*, *8*, *9*. Здесь рассматриваются символьные операции замены переменных и разложения на элементарные дроби.

Команда *Substitute* (*Замена переменной*)

Эта команда находит широкое применение при практических расчетах. Она позволяет: выполнять численные расчеты, производить замену переменных в математических выражениях, создавать из одного уравнения систему уравнений.

Технология замены переменных проста и состоит в выполнении перечисленных далее операций:

- ввод переменной, которая заменяет переменную исходного выражения. Переменная может быть числом, символьной переменной или выражением;
- сохранение переменной в буфер с помощью команды меню **Edit | Copy**;
- ввод выражения, требующего замены переменной;
- выделение переменной двойным щелчком мыши;
- выполнение команды меню **Symbolics | Variable | Substitute**; на экране появится решение.

Пример 5.6. Необходимо выполнить замену переменных в следующих функциях:

$$2x^3 - 3,2x^2 + 6x + 1 \quad \text{при} \quad x = 0,78\,, \quad x = a + b\,;$$

$$\frac{m}{a+m} + \frac{a}{a+m} e^{-(a+m)t} \quad \text{при} \quad a = 3,7\,, \quad m = 4,7\,, \quad t = 0\,.$$

> ***Примечание***
>
> Следует иметь в виду, что процедура замены переменной повторяется столько раз, сколько заменяется переменных. Одной командой заменить все переменные нельзя.

Решение приведено на рис. 5.6.

Команда *Convert to Partial Fraction* (*Разложение на правильные дроби*)

Разложение символьного выражения на правильные дроби иногда полезно для наглядности результата решения задачи. При этом конечное выражение в большинстве случаев является более длинным, чем исходное.

$$0.78$$

$$2\cdot x^{3}-3.2\cdot x^{2}+6\cdot x+1$$

$$4.682224$$

$$a+b$$

$$2\cdot(a+b)^{3}-3.2\cdot(a+b)^{2}+6\cdot a+6\cdot b+1$$

$$3.7$$

$$\frac{m}{a+m}+\frac{a}{a+m}\cdot\exp[-(a+m)\cdot t]$$

$$\frac{m}{(3.7+m)}+\frac{3.7}{(3.7+m)}\cdot\exp[(-3.7-m)\cdot t]$$

$$4.7$$

$$.5595238095238095238\,1+.4404761904761904761\,9\cdot\exp(-8.4\cdot t)$$

$$0$$

$$1.0000000000000000000$$

Рис. 5.6. Замена переменных с помощью команды **Substitute**

$$\frac{\left(x^{2}+a\right)}{x\cdot(x-b)^{3}}$$

$$\frac{-1}{b^{3}}\cdot\frac{a}{x}-\frac{a}{\left[b^{3}\cdot(-x+b)\right]}-\frac{\left(-b^{2}+a\right)}{\left[b^{2}\cdot(-x+b)^{2}\right]}-\frac{\left(a+b^{2}\right)}{\left[b\cdot(-x+b)^{3}\right]}$$

$$\frac{(x+1)}{2\cdot x^{2}-x-1}$$

$$\frac{-1}{[3\cdot(2\cdot x+1)]}+\frac{2}{[3\cdot(x-1)]}$$

$$\frac{\left(x^{3}-a^{3}\right)}{x+a}$$

$$a^{2}-x\cdot a+x^{2}-2\cdot\frac{a^{3}}{(x+a)}$$

Рис. 5.7. Разложение выражений на простые дроби
с помощью команды **Convert to Partial Fraction**

Технология этой процедуры проста и очевидна.

Покажем ее результаты на примере.

Пример 5.7. Необходимо разложить на простые дроби следующие выражения:

$$\frac{x^2+a}{x(x-b)^3};\quad \frac{x+1}{2x^2-x-1};\quad \frac{x^3-a^3}{x+a}.$$

Решения приведены на рис. 5.7.

5.2.3. Символьные интегральные преобразования

Система Mathcad имеет команды, позволяющие осуществлять прямое и обратное преобразования Фурье, Лапласа, Z-преобразование. Эти преобразования широко используются в научных и инженерных расчетах, особенно преобразование Лапласа.

Преобразования осуществляются с помощью следующих команд меню **Symbolics | Transform**:

- **Fourier** — прямое преобразование Фурье;
- **Inverse Fourier** — обратное преобразование Фурье;
- **Laplace** — прямое преобразование Лапласа;
- **Inverse Laplace** — обратное преобразование Лапласа;
- **Z** — прямое Z-преобразование;
- **Inverse Z** — обратное Z-преобразование.

Технология символьных преобразований состоит в выполнении следующих операций:

- ввод исходного выражения;
- выделение переменной, относительно которой осуществляется преобразование;
- выполнение необходимой команды из вышеперечисленных, после чего на экране появляется ответ.

Интегральные преобразования функций в системе Mathcad имеют ряд особенностей:

- ответами являются плохо упрощенные выражения, поэтому они во многих случаях не совпадают со справочными данными;
- интегральные преобразования могут быть получены не для всех функций, имеющих эти преобразования;
- вид преобразования существенно зависит от вида исходной функции, поэтому, прежде чем находить интегральное преобразование, целесообразно упростить исходную функцию.

Приведем примеры интегральных преобразований.

Пример 5.8. Требуется получить прямое и обратное преобразования Лапласа следующих функций:

$$5;\quad at;\quad \sin wt;\quad e^{-at};\quad te^{at};\quad \frac{5}{ks+1};\quad \frac{as}{ks+1};\quad \frac{k}{(3s+1)(5s+1)}.$$

Решение показано на рис. 5.8.

$$5 \qquad a \cdot t \qquad \sin(w \cdot t) \qquad \exp(-a \cdot t) \qquad t \cdot \exp(a \cdot t)$$

$$\frac{5}{s} \qquad \frac{a}{s^2} \qquad \frac{w}{\left(s^2 + w^2\right)} \qquad \frac{1}{(s + a)} \qquad \frac{1}{(s - a)^2}$$

$$\frac{5}{k \cdot s + 1} \qquad\qquad \frac{a \cdot s}{k \cdot s + 1}$$

$$5 \cdot \frac{\exp\left(\frac{-t}{k}\right)}{k} \qquad\qquad a \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot \mathrm{Dirac}(t) - \frac{1}{k^2} \cdot \exp\left(\frac{-t}{k}\right)\right)$$

$$\frac{k}{(3 \cdot s + 1) \cdot (5 \cdot s + 1)}$$

$$k \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{3} \cdot t\right) + \frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{5} \cdot t\right)\right)$$

Рис. 5.8. Прямое и обратное преобразования Лапласа функций из примера 5.8

Пример 5.9. Требуется получить прямое и обратное Z-преобразования следующих функций:

$$5\,;\qquad an\,;\qquad e^{-an}\,;\qquad \sin wn\,;\qquad \frac{az}{z+1}\,;\qquad \frac{az}{(z+1)^2}\,;\qquad \frac{az}{(1-z)^2}\,;$$

$$\frac{z}{(z+1)(z+3)(z+a)}\,.$$

Решение показано на рис. 5.9.

$$5 \qquad a\cdot n \qquad \exp(-a\cdot n) \qquad \sin(w\cdot n)$$

$$5\cdot\frac{z}{(z-1)} \qquad a\cdot\frac{z}{(z-1)^2} \qquad \frac{z}{(z-\exp(-a))} \qquad \sin(w)\cdot\frac{z}{\left(-2\cdot z\cdot\cos(w)+z^2+1\right)}$$

$$\frac{a\cdot z}{z+1} \qquad \frac{a\cdot z}{(z+1)^2} \qquad \frac{a\cdot z}{(1-z)^2}$$

$$a\cdot(-1)^n \qquad -a\cdot(-1)^n\cdot n \qquad a\cdot n$$

$$\frac{z}{(z+1)\cdot(z+3)\cdot(z+a)}$$

$$\frac{\left[a\cdot(-1)^n-(-3)^n\cdot a+(-3)^n+2\cdot(-1)^n\cdot a^n-3\cdot(-1)^n\right]}{\left(-8\cdot a+6+2\cdot a^2\right)}$$

Рис. 5.9. Z-преобразование функций из примера 5.9

Пример 5.10. Требуется получить прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций:

$$\frac{a}{t}\,;\quad \frac{t}{1+t}\,;\quad \sin aw\,;\quad (1+w)(1+5w)\,.$$

Решение приведено на рис. 5.10.

$$\frac{a}{t} \qquad \frac{t}{1+t}$$

$$i \cdot a \cdot \pi \cdot (\Phi(-\omega) - \Phi(\omega)) \qquad 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{Dirac}(\omega) - i \cdot \exp(i \cdot \omega) \cdot \pi \cdot (\Phi(-\omega) - \Phi(\omega))$$

$$\sin(a \cdot w) \qquad (1 + w) \cdot (1 + 5 \cdot w)$$

$$\frac{1}{2} \cdot i \cdot (-\mathrm{Dirac}(-t - a) + \mathrm{Dirac}(-t + a)) \qquad \mathrm{Dirac}(t) - 6 \cdot i \cdot \mathrm{Dirac}(1, t) - 5 \cdot \mathrm{Dirac}(2, t)$$

Рис. 5.10. Преобразование Фурье функций из примера 5.10

5.2.4. Символьные преобразования матриц

Mathcad осуществляет символьные преобразования матриц: транспонирование, обращение, вычисление детерминанта. Эти операции выполняются с помощью следующих команд меню **Symbolics | Matrix**:

- **Transpose** — транспонирование;
- **Invert** — обращение матрицы;
- **Determinant** — вычисление детерминанта.

Матричные операции будут подробно рассмотрены в *гл. 6*. Здесь мы приведем только один пример.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 5 & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{(a \cdot d - 5 \cdot c)} & \dfrac{-c}{(a \cdot d - 5 \cdot c)} \\ \dfrac{-5}{(a \cdot d - 5 \cdot c)} & \dfrac{a}{(a \cdot d - 5 \cdot c)} \end{bmatrix}$$

$$a \cdot d - 5 \cdot c$$

Рис. 5.11. Пример символьных преобразований матриц

Пример 5.11. Необходимо осуществить транспонирование и обращение матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ 5 & d \end{pmatrix}$ и вычислить ее детерминант.

Решение приведено на рис. 5.11.

5.2.5. Символьные вычисления при анализе функционирования сложной системы

Приведем пример использования символьных вычислений при анализе функционирования сложной системы.

Пусть дана многоканальная система массового обслуживания (СМО) с отказами. Эффективность такой системы определяется интенсивностью потока заявок λ, интенсивностью обслуживания заявки μ и числом обслуживающих бригад n. Необходимо определить показатели ее надежности — вероятность и среднее время безотказной работы.

Примерами таких систем являются: диспетчерский пункт системы управления воздушным движением, больница с ограниченным количеством мест, вычислительная система с ограниченным числом компьютеров, ремонтное предприятие с конечным числом обслуживающих бригад и множество других технических и информационных систем. Решение задачи нужно получить в аналитическом виде для того, чтобы результаты могли быть общими для любой СМО данного типа.

Решение этой задачи требует использования символьных вычислений при решении систем линейных алгебраических уравнений, преобразовании Лапласа и вычислении пределов.

Сначала опишем функционирование СМО.

Эффективным способом описания функционирования СМО в смысле ее надежности является граф состояний. Узлам графа приписываются состояния системы, а ветвям, их соединяющим, — интенсивности переходов из состояния в состояние. Функционирование многоканальной СМО с отказами описывается графом, приведенным на рис. 5.12.

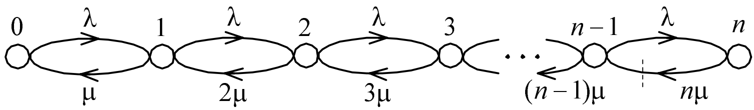


Рис. 5.12. Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания

Обозначения на рис. 5.12 имеют следующий смысл:

- ♦ λ — интенсивность потока заявок на обслуживание;
- ♦ μ — интенсивность обслуживания заявки;
- ♦ n — число обслуживающих органов;
- ♦ (0) — состояние системы, при котором заявок на обслуживание нет;
- ♦ (i) — состояние системы, при котором обслуживаются i заявок, $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
- ♦ (n) — состояние отказа системы, когда все каналы заняты и очередная заявка получит отказ в обслуживании.

Математическая модель функционирования системы массового обслуживания с отказами представляется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_i(t)}{dt} = \lambda P_{i-1}(t) - (\lambda + i\mu)P_i(t) + (i+1)\mu P_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n-2; \\ \dfrac{dP_{n-1}(t)}{dt} = \lambda P_{n-2}(t) - (\lambda + (n-1)\mu)P_{n-1}(t); \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t). \end{cases} \tag{5.1}$$

В уравнениях системы (5.1) приняты следующие обозначения:

- ♦ $P_0(t)$ — вероятность того, что в течение времени t система попадет в состояние отсутствия заявок;

- $P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ — вероятность того, что в течение времени t система попадет в состояние обслуживания i заявок;
- $P_n(t)$ — вероятность того, что в течение времени t система попадет в отказовое состояние, т. е. в такое состояние, когда на обслуживании находится предельное число заявок и очередной заявке будет отказано в обслуживании. $P_n(t)$ и является вероятностью отказа системы в течение времени t. Тогда вероятность безотказной работы системы $P_\text{c}(t)$ будет выражаться следующей зависимостью:

$$P_\text{c}(t) = 1 - P_n(t). \tag{5.2}$$

Вычисление вероятности безотказной работы системы требует решения системы дифференциальных уравнений (5.1). Возможны два способа решения: численный и аналитический.

Аналитический метод предпочтительнее, т. к. он дает решение в виде формулы. Сущность аналитического метода состоит в следующем:

- система (5.1) записывается в виде преобразования Лапласа;
- система алгебраических уравнений в преобразованиях Лапласа решается с помощью универсальных математических программных средств символьной математики;
- находится обратное преобразование Лапласа с помощью тех же систем символьной математики;
- по вероятности безотказной работы находится среднее время безотказной работы, используя следующее соотношение: $T = \lim\limits_{s \to 0} P_\text{c}(s)$.

Из описания метода видно, что для получения решения в аналитическом виде необходимо выполнить следующие символьные вычисления: решить систему линейных алгебраических уравнений, получить прямое и обратное преобразования Лапласа, вычислить предел. Выполним все эти действия в Mathcad.

Система (5.1) в преобразованиях Лапласа имеет вид:

$$\begin{cases}(s+\lambda)P_0(s)-\mu P_1(s)=1;\\ (s+\lambda+i\mu)P_i(s)-\lambda P_{i-1}(s)-(i+1)\mu P_{i+1}(s)=0,\quad i=1,2,\ldots,n-2;\\ (s+\lambda+(n-1)\mu)P_{n-1}(s)-\lambda P_{n-2}(s)=0;\\ sP_n(s)-\lambda P_{n-1}(s)=0.\end{cases}\tag{5.3}$$

Предполагается, что начальными условиями решения задачи являются: $P_0(0)=1$, $P_1(0)=P_2(0)=\ldots=P_n(0)=0$.

Решение этой системы уравнений получим с помощью функции `Find`.

Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}(s+\lambda)P_0(s)-\mu P_1(s)=1;\\ (s+\lambda+\mu)P_1(s)-\lambda P_0(s)=0;\\ sP_2(s)-\lambda P_1(s)=0.\end{cases}\tag{5.4}$$

На рис. 5.13 показано решение этой системы с помощью функции `Find` по технологии, изложенной в *гл. 8*.

Given

$$(s+\lambda)\cdot P0-\mu\cdot P1=1$$

$$(s+\lambda+\mu)\cdot P1-\lambda\cdot P0=0$$

$$s\cdot P2-\lambda\cdot P1=0$$

$$\mathrm{Find}(P0,P1,P2)\rightarrow\begin{bmatrix}\dfrac{(s+\lambda+\mu)}{\left(s^2+2\cdot s\cdot\lambda+s\cdot\mu+\lambda^2\right)}\\[2ex] \dfrac{\lambda}{\left(s^2+2\cdot s\cdot\lambda+s\cdot\mu+\lambda^2\right)}\\[2ex] \dfrac{\lambda^2}{\left(s^2+2\cdot s\cdot\lambda+s\cdot\mu+\lambda^2\right)\cdot s}\end{bmatrix}$$

Рис. 5.13. Вычисление вероятностей состояний системы при $n = 2$

Из рис. 5.13 видно, что система в процессе решения результат не упрощает (символ `s` не выносится за скобки). Упростить ответ не удается также с помощью команд меню **Symbolics**. Это большой недостаток системы Mathcad, свидетельствующий о ее недостаточной интеллектуальности.

Аналогично решаются системы уравнений при любом числе n.

Далее приводятся результаты вычисления с помощью функции `Find` вероятностей отказа $P_n(s)$ в диапазоне n = 1—5. Упрощение выражений выполнено нами с помощью системы Derive 5.

$n = 1$: $$P_1(s) = \frac{\lambda}{s(s+\lambda)};$$

$n = 2$: $$P_2(s) = \frac{\lambda^2}{s(s^2 + (2\lambda + \mu)s + \lambda^2)};$$

$n = 3$: $$P_3(s) = \frac{\lambda^3}{s(s^3 + (3\lambda + 3\mu)s^2 + (3\lambda^2 + 3\lambda\mu + 2\mu^2)s + \lambda^3)};$$

$n = 4$: $$P_4(s) = \frac{\lambda^4}{s(s^4 + (4\lambda + 6\mu)s^3 + (6\lambda^2 + 12\lambda\mu + 11\mu^2)s^2 + (4\lambda^3 + 6\lambda^2\mu + 6\lambda\mu^2 + 6\mu^3)s + \lambda^4)};$$

$n = 5$:

$$P_5(s) = \frac{\lambda^5}{s(s^5 + 5s^4(\lambda + 2\mu) + 5s^3(2\lambda^2 + 6\lambda\mu + 7\mu^2) + 5s^2(2\lambda^3 + 6\lambda^2\mu + 11\lambda\mu^2 + 10\mu^3) + s(5\lambda^4 + 10\lambda^3\mu + 20\lambda^2\mu^2 + 30\lambda\mu^3 + 24\mu^4) + \lambda^5)}.$$

Полученные выражения позволяют определить основные показатели надежности системы: вероятность и среднее время безотказной работы.

Определим вероятность отказа системы как функции времени, воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа.

Получение обратного преобразования Лапласа состоит в следующем:

- ввод выражения $P_n(s)$;
- выделение двойным щелчком мыши переменной s;
- выполнение команды меню **Symbolics | Transform | Inverse Laplace**, на экране отобразится оригинал функции $P_n(s)$.

Технология реализована на рис. 5.14 для случая $n = 1$ и $n = 2$.

$$n := 1$$

$$\frac{\lambda}{s\cdot(s+\lambda)}$$

$$\lambda\cdot\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\cdot\exp(-\lambda\cdot t)\right)$$

$$1 - \exp(-t\cdot\lambda)$$

$$n := 2 \qquad \lambda := 1 \qquad \mu := 1$$

$$\frac{1}{s\cdot(s^2 + 3\cdot s + 1)}$$

$$1 - \exp\left(\frac{-3}{2}\cdot t\right)\cdot\cosh\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot t\right) - \frac{3}{5}\cdot\exp\left(\frac{-3}{2}\cdot t\right)\cdot\sqrt{5}\cdot\sinh\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot t\right)$$

Рис. 5.14. Определение вероятностей отказа СМО при $n = 1$ и $n = 2$

Решение при $n = 1$ удалось упростить с помощью команд меню **Symbolics**. При $n = 2$ упростить выражение не получилось.

Далее приводятся оригиналы функций $P_1(s)$ и $P_2(s)$ в упрощенном символьном виде:

$$P_1(t) = 1 - e^{-t};$$

$$P_2(t) = 1 - e^{-\left(\lambda + \frac{1}{2}\mu\right)t} \times$$
$$\times \left(\frac{\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right)t}{\sqrt{4\lambda + \mu}} \left(\frac{2\lambda}{\sqrt{\mu}} - \mu \right) - \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda\mu + \mu^2}\right)t \right).$$

Оригиналы функций $P_n(s)$ с помощью системы Mathcad можно получить для всех значений n нашей задачи. Однако эти выражения настолько сложны, что не помещаются на экране монитора.

Расчетные соотношения при $n > 2$ легко получить для конкретной системы массового обслуживания, когда значения λ и μ известны. Далее приводится такой пример.

Расчетные формулы для $P_n(t)$ при $n > 2$ получены при $\lambda = 3{,}7$ час$^{-1}$, $\mu = 4{,}7$ час$^{-1}$.

Формулы имеют вид:

$n = 1$: $P_1(t) = 1 - e^{-3,7t}$;

$n = 2$: $P_2(t) = 1 - e^{-6,05t}\left(1,264\sinh(4,79t) + \cosh(4,79t)\right)$;

$n = 3$: $P_3(t) = 50,65(0,02 - 0,02e^{-0,21t} + 0,00043e^{-12,5t}\cos(9,33t) +$
$+ 0,000123e^{-12,5t}\sin(9,33t))$;

$n = 4$: $P_4(t) = 187,4(0,0053 + 0,000164e^{-3,82t} - 0,0055e^{-0,104t} +$
$+ 3,16 \cdot 10^{-6} e^{-7,54t}\cos(20,43t) +$
$+ 3,845 \cdot 10^{-6} e^{-7,54t}\sin(20,43t))$;

$n = 5$: $P_5(t) = 693,4(0,00144 - 2,06 \cdot 10^{-7} e^{-30,2t} + 2,2 \cdot 10^{-6} e^{-19,1t} -$
$- 8,72 \cdot 10^{-6} e^{-11,12t} + 0,0000184e^{-5,036t} -$
$- 0,00145e^{-0,214t})$.

Среднее время безотказной работы системы легко вычислить, воспользовавшись следующим предельным соотношением:

$$T_c = \lim_{s\to 0} P_c(s),$$

где:

$$P_c(s) = \frac{1}{s} - P_n(s). \qquad (5.5)$$

Определим среднее время безотказной работы системы путем символьных вычислений пределов.

Технология вычисления предела состоит в выполнении следующих действий:

- ввод шаблона предела щелчком мыши на соответствующей кнопке панели инструментов **Calculus**, на экране появится символ предела с пустыми маркерами ввода;
- заполнение маркеров ввода выражением, предел которого ищется, и значением переменной;
- вызов знака символьных вычислений путем нажатия клавиш <Ctrl>+<.> (точка);
- щелчок мыши вне выражения, на экране отобразится ответ в виде символьного выражения.

В результате этой технологии на экране получим решение в виде одной строки. Например, при $n = 1$ решение имеет вид:

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s} - \frac{\lambda}{s\cdot(s+\lambda)}\right] \to \frac{1}{\lambda}$$

Далее приведены результаты вычисления среднего времени безотказной работы системы по приведенной технологии при всех значения n нашей задачи:

$n = 1$: $\quad T_1 = \dfrac{1}{\lambda}$;

$n = 2$: $\quad T_2 = \dfrac{1}{\lambda}(2+\gamma)$;

$n = 3$: $T_3 = \dfrac{1}{\lambda}(3 + 3\gamma + 2\gamma^2)$;

$n = 4$: $T_4 = \dfrac{1}{\lambda}(4 + 6\gamma + 6\gamma^2 + 6\gamma^3)$;

$n = 5$: $T_5 = \dfrac{1}{\lambda}(5 + 10\gamma + 20\gamma^2 + 30\gamma^3 + 24\gamma^4)$.

В выражениях для среднего времени безотказной работы $\gamma = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Теперь анализ надежности системы по критериям вероятности и среднему времени безотказной работы можно выполнить путем построения графиков и табулирования функций $P_n(t)$ в широком диапазоне t.

Выполненный анализ показателей надежности СМО показал, насколько просто система Mathcad выполняет символьные вычисления. И в этом ее большое достоинство. К сожалению, система не упрощает выражения даже в очевидных случаях.

ГЛАВА 6

Алгебра векторов и матриц

6.1. Образование векторов и матриц

Технология образования векторов и матриц в Mathcad состоит в исполнении следующих действий:

- ввод имени вектора или матрицы и нажатие клавиши <:> (двоеточие), на экране появятся соответственно символы `V :=` или `M :=`;
- установка размеров вектора или матрицы. Нажимая набор клавиш <Ctrl>+<M> или щелкая мышью по кнопке матрицы панели инструментов **Matrix**, вызываем окно **Insert Matrix** (рис. 6.1).

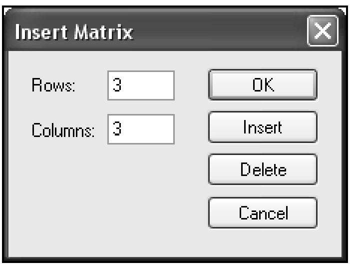


Рис. 6.1. Диалоговое окно **Insert Matrix** для ввода размеров вектора (матрицы)

Вводим число строк вектора или матрицы в поле **Rows** (Строки) и число столбцов в поле **Columns** (Столбцы). Если число столбцов равно единице, то образуется вектор.

После щелчка по кнопке **OK** на экране появится пустой шаблон вектора или матрицы;

- ♦ ввод элементов вектора или матрицы в пустые маркеры.

В качестве примера на рис. 6.2 приведены векторы и матрицы, образованные по изложенной ранее технологии. Обратиться к вектору или матрице можно по имени. Для этого необходимо ввести имя вектора или матрицы и нажать клавишу <=> (равно). На рис. 6.2 показано обращение к вектору `V2` и матрице `M1`.

$$V1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} \quad V2 := \begin{pmatrix} 2 + 3\cdot i \\ -2\cdot i \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad V3 := \begin{pmatrix} \ln(2) \\ \exp(-0.5) \\ \sin(1) \\ 2.4 \end{pmatrix} \quad V4 := \begin{bmatrix} 2 + 3\cdot i \\ \sin(1) + \cos(1) \\ (2 + \tanh(3))^2 \\ 2\cdot\ln(7) - \exp(2\cdot i) \end{bmatrix}$$

$$M1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad M2 := \begin{pmatrix} 1 + 2\cdot i & 3 & \sin(1) \\ \exp(2 - 3\cdot i) & 1 - \ln(5) & 3\cdot 2^3 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V2 = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ -2i \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad M1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.2. Образование векторов и матриц в Mathcad

Как видно из примеров, элементами векторов и матриц могут быть:

- ♦ вещественные и комплексные числа;
- ♦ функции с числовыми значениями аргументов;
- ♦ совокупность чисел, функций и арифметических операторов их вычисления.

6.2. Алгебра векторов

6.2.1. Преобразование векторов

Система Mathcad имеет ряд функций и операторов преобразования векторов. Они позволяют преобразовывать вектор и выполнять действия над его элементами.

Основные функции и операторы приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. Функции и операторы преобразования векторов

№	Назначение функции (оператора)	Обозначение	Ввод
1	Транспонирование вектора	V^T	<V>, <Ctrl>+<1>
2	Сортировка	VS	`sort(V)`
3	Обратная сортировка	VR	`reverse(V)`
4	Векторизация	$\vec{V}$ /	<V>, <Ctrl>+<–>
5	Норма вектора	$\lvert V \rvert$	<|>, <V>
6	Комплексно-сопряженный вектор	$\overline{V}$	<V>, <">
7	Определение числа элементов вектора	—	`length(V)`
8	Выделение *n*-го элемента вектора	V_n	<V>, <[>, <*n*>
9	Возвращение номера последнего элемента вектора	—	`last(V)`
10	Возвращение элемента вектора, максимального по значению	V_{max}	`max(V)`
11	Возвращение элемента вектора, минимального по значению	V_{min}	`min(V)`
12	Возвращение действительных частей элементов вектора	Re	`Re(V)`
13	Возвращение мнимых частей элементов вектора	Im	`Im(V)`

Большинство функций и операторов, приведенных в табл. 6.1, реализуются с помощью команд панели инструментов **Matrix**. Их дублирование возможно с клавиатуры путем нажатия соответствующих клавиш, указанных в табл. 6.1.

Действия большинства операторов и функций очевидны, поэтому нет необходимости подробно их описывать. Поясним только некоторые из них, имеющие особенности представления и использования.

Транспонирование вектора возвращает исходный вектор, представленный в виде столбца, в вектор в виде строки и наоборот. Образуется путем нажатия клавиш <Ctrl>+<1> после символа вектора V или щелчком мыши на соответствующей кнопке панели инструментов **Matrix**.

Операторы сортировки `sort` *и* `reverse` образуют из исходного вектора векторы, элементы которых расположены в порядке возрастания их значений (`sort`) или в обратном порядке (`reverse`).

Понятие *"векторизация"* означает возможность выполнения математических действий одновременно над всеми элементами вектора. Знаком векторизации является стрелка, которая располагается над выражением, например $\overrightarrow{A \cdot B}$, $\overrightarrow{\ln V}$. Векторизация реализуется одновременным нажатием клавиш <Ctrl>+<–> (минус) или щелчком мыши на соответствующей кнопке панели инструментов **Matrix**. Итак, векторизация позволяет осуществлять действия над элементами вектора. Если V1 и V2 — векторы, то $V1 \cdot V2$ является скалярным произведением двух векторов. Если же представить произведение в форме векторизации $\overrightarrow{V1 \cdot V2}$, то образуется новый вектор, элементами которого являются произведения соответствующих элементов векторов.

Под *нормой вектора* понимается модуль вектора, представляемый в виде $|V|$. Знаком нормы вектора является $|V|$, который реализуется либо щелчком мыши на соответствующей кнопке панели инструментов **Matrix**, либо клавишей <|> (вертикальная линия). Этот оператор вычисляет выражение $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i}$, где a_i — *i*-й элемент вектора, *n* — число элементов вектора.

При наличии в векторе комплексных чисел *комплексно-сопряженный вектор* $\overline{\mathrm{V}}$ образует новый вектор с сопряженными комплексными числами. Целые числа повторяются без изменения. При отсутствии в векторе комплексных чисел откликом является исходный вектор.

Приведем пример преобразования векторов.

Пример 6.1. Даны векторы:

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{V1} = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 0,5 \\ 1-2i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо выполнить транспонирование векторов, сортировку, векторизацию, найти нормы векторов и комплексно-сопряженный вектор.

Решение приведено на рис. 6.3 (вектор вещественных чисел `V`) и на рис. 6.4 (вектор комплексных чисел `V1`).

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V^{T} = (1 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 2) \qquad \mathrm{sort}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{reverse}(V) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |V| = 7.937 \qquad \overrightarrow{\ln(V)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.099 \\ 1.946 \\ 0.693 \end{pmatrix}$$

$$\ln(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.099 \\ 1.946 \\ 0.693 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.3. Преобразование векторов вещественных чисел

$$V1 := \begin{pmatrix} 2 + 3\cdot i \\ 0.5 \\ 1 - 2\cdot i \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overline{V1} = \begin{pmatrix} 2 - 3i \\ 0.5 \\ 1 + 2i \\ 3 \end{pmatrix} \qquad V1^{T} = (2 + 3i \;\; 0.5 \;\; 1 - 2i \;\; 3)$$

$$\mathrm{sort}(V1) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 - 2i \\ 2 + 3i \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{reverse}(V1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - 2i \\ 0.5 \\ 2 + 3i \end{pmatrix} \qquad |V1| = 5.22$$

$$\overrightarrow{(V\cdot V1)} = \begin{pmatrix} 2 + 3i \\ 1.5 \\ 7 - 14i \\ 6 \end{pmatrix} \qquad V\cdot V1 = 16.5 - 11i$$

Рис. 6.4. Преобразование векторов комплексных чисел

Из табл. 6.1 видно, что Mathcad имеет много функций и операторов, позволяющих выполнять действия над элементами вектора (возвращать элементы, определять их число, выделять элементы с максимальным и минимальным значениями). Приведем пример работы с элементами вектора.

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V1 := \begin{pmatrix} 2 + 3\cdot i \\ 0.5 \\ 1 - 2\cdot i \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{length}(V) = 4 \qquad V_2 = 7 \qquad \mathrm{last}(V1) = 3$$

$$\max(V) = 7 \qquad \min(V) = 1$$

$$\mathrm{Re}(V1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}(V1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.5. Операции с элементами векторов

Пример 6.2. Рассмотрим векторы V и V1 из примера 6.1. Необходимо выполнить действия с векторами, указанные в табл. 6.1 под номерами 7—13.

Решение приведено на рис. 6.5.

Обратим внимание на то, что Mathcad вычисляет номер элемента и их количество, считая, что первый элемент вектора V имеет номер ноль.

6.2.2. Математические операции над векторами

Mathcad выполняет над векторами операции сложения и вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня. Технология этих операций практически не отличается от технологии операций над числами.

Простота выполнения этих операций — одно из достоинств системы Mathcad.

Перечень операций над векторами и форма их ввода приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2. Операторы математических действий над векторами

№	Математические действия	Оператор	Ввод
1	Сложение элементов вектора с числом z	V + z	V + z
2	Вычитание из каждого элемента вектора V числа z	V – z	V – z
3	Умножение каждого элемента вектора V на число z	V * z	V * z
4	Деление каждого элемента вектора V на число z	$\frac{V}{z}$	V / z
5	Сложение векторов	V1 + V2	V1 + V2
6	Вычитание векторов	V1 – V2	V1 – V2
7	Скалярное умножение векторов	V1 * V2	V1 * V2

Таблица 6.2 *(окончание)*

№	Математические действия	Оператор	Ввод
8	Векторное умножение векторов	$V1 \times V2$	<V1>, <Ctrl>+<*>, <V2>
9	Умножение элементов векторов	$\overrightarrow{V1 \cdot V2}$	V1 * V2 <Ctrl>+<–>

Из табл. 6.2 видно, что только операции векторного умножения векторов и поэлементного умножения имеют особенности, отличающие их от операций над числами.

При векторном умножении векторов знак (×) (векторное умножение) образуется путем нажатия клавиш <Ctrl>+<*> (знак умножения) или щелчком мыши на кнопке векторного умножения панели инструментов **Matrix**.

Умножение элементов вектора осуществляется векторизацией произведения векторов путем совместного нажатия клавиш <Ctrl>+<–> (минус) или щелчком мыши на кнопке векторизации панели инструментов **Matrix**.

Приведем примеры выполнения векторных операций.

Пример 6.3. Дано число $z = 3$ и два вектора:

$$V1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad V2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Необходимо выполнить все операции, приведенные в табл. 6.2.

Решение приведено на рис. 6.6.

$$V1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad V2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$V1 + 3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad V1 - 3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad V1 \cdot 3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 21 \\ 33 \end{pmatrix} \qquad \frac{V1}{3} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 1.667 \\ 2.333 \\ 3.667 \end{pmatrix}$$

$$V1 + V2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad V1 - V2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad V1 \cdot V2 = 127$$

$$\overrightarrow{(V1 \cdot V2)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 35 \\ 66 \end{pmatrix} \qquad V1^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 25 \\ 49 \\ 121 \end{pmatrix} \qquad \sqrt{V1} = \begin{pmatrix} 1.414 \\ 2.236 \\ 2.646 \\ 3.317 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.6. Операции над векторами

6.3. Алгебра матриц

6.3.1. Математические операции над матрицами

Mathcad позволяет выполнять матричные операции аналогично векторным. Математические операции, выполняемые системой, приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3. Математические операции над матрицами

№	Наименование операции	Обозначение операции	Ввод
1	Сложение элементов матрицы с числом z	M + z	M + z
2	Вычитание из элементов матрицы числа z	M – z	M – z
3	Умножение элементов матрицы на число z	M * z	M * z

Таблица 6.3 *(окончание)*

№	Наименование операции	Обозначение операции	Ввод
4	Деление элементов матрицы на число z	$\frac{M}{z}$	M / z
5	Сложение матриц	M1 + M2	M1 + M2
6	Вычитание матриц	M1 – M2	M1 – M2
7	Умножение матриц	M1 * M2	M1*M2
8	Умножение элементов матриц	M1 × M2	$\overrightarrow{M1*M2}$
9	Возведение матрицы в степень	$M1^n$	<M1>, <^>, <*n*>

Пример 6.4. Дано число z = 3 и следующие две матрицы:

$$M1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix};\quad M2=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

$$M1 := \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

$$M1 + 3 = \begin{pmatrix}4 & 5 & 8\\ 6 & 4 & 5\\ 7 & 8 & 6\end{pmatrix} \qquad M1 - 3 = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \qquad M1 \cdot 3 = \begin{pmatrix}3 & 6 & 15\\ 9 & 3 & 6\\ 12 & 15 & 9\end{pmatrix}$$

$$\frac{M1}{3} = \begin{pmatrix}0.333 & 0.667 & 1.667\\ 1 & 0.333 & 0.667\\ 1.333 & 1.667 & 1\end{pmatrix} \qquad M1 + M2 = \begin{pmatrix}3 & 5 & 9\\ 6 & 2 & 4\\ 8 & 10 & 6\end{pmatrix} \qquad M1 - M2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$M1 \cdot M2 = \begin{pmatrix}28 & 30 & 23\\ 17 & 20 & 20\\ 35 & 32 & 35\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{(M1 \cdot M2)} = \begin{pmatrix}2 & 6 & 20\\ 9 & 1 & 4\\ 16 & 25 & 9\end{pmatrix} \qquad M1^2 = \begin{pmatrix}27 & 29 & 24\\ 14 & 17 & 23\\ 31 & 28 & 39\end{pmatrix}$$

Рис. 6.7. Операции над матрицами

Необходимо выполнить операции, приведенные в табл. 6.3.

Решение приведено на рис. 6.7.

6.3.2. Матричные функции и операторы

Mathcad имеет большое число встроенных функций и операторов, позволяющих вычислять характеристики матрицы, выполнять различные ее преобразования, создавать новые матрицы, возвращать элементы, строки и столбцы матрицы.

Основные функции и операторы преобразования матриц приведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4. Функции и операторы преобразования матриц

№	Наименование и назначение функции	Обозначение	Ввод
Матричные операторы			
1	Обращение матрицы M	M^{-1}	<M>, <^>, <–>, <1>
2	Вычисление определителя	$\|M\|$	<|>, <M>
3	Транспонирование матрицы	M^T	<M>, <Ctrl>+<1>
4	Векторизация матрицы	$\overrightarrow{M}$	<M>, <Ctrl>+<–>
5	Выделение *n*-го столбца матрицы	$M^{\langle n \rangle}$	<M>, <Ctrl>+<^>, <*n*>
6	Выделение элемента (*m*, *n*) матрицы	$M_{m,\,n}$	<M>, <[>, <*m*>, <,>, <*n*>
7	Выделение комплексно-сопряженной матрицы	$\overline{M}$	<M>, <">
Функции возвращения характеристик матрицы			
8	Возвращение числа столбцов матрицы	—	`cols(M)`
9	Возвращение числа строк матрицы	—	`rows(M)`
10	Возвращение ранга матрицы	—	`rank(M)`
11	Возвращение суммы диагональных элементов квадратной матрицы (след матрицы)	—	`tr(M)`

Таблица 6.4 *(окончание)*

№	Наименование и назначение функции	Обозначение	Ввод
12	Возвращение среднего значения массива элементов (чисел) матрицы	—	`mean(M)`
13	Возвращение медианы массива элементов (чисел) матрицы	—	`median(M)`
Матричные функции			
14	Объединение двух матриц с одинаковым числом строк в одну	—	`augment(M1,M2)`
15	Объединение двух матриц с одинаковым числом столбцов в одну	—	`stack(M1,M2)`
16	Создание единичной квадратной матрицы ($n \times n$)	—	`identity(n)`
17	Возвращение матрицы действительных чисел	—	`Re(M)`
18	Возвращение матрицы мнимых чисел	—	`Im(M)`

Некоторые из функций, приведенных в табл. 6.4, требуют объяснения.

Термин *"векторизация матрицы"* означает возможность математических операций над элементами матрицы. Например, операция $M1 \cdot M2$ является операцией умножения матриц, а операция векторизации $\overrightarrow{M1 \cdot M2}$ означает умножение соответствующих элементов матриц M1 и M2.

Оператор *транспонирования матрицы* M^T из матрицы M образует новую матрицу, у которой строки являются столбцами исходной матрицы.

Комплексно-сопряженной называется матрица, у которой элементами являются комплексно-сопряженные числа исходной матрицы.

Если элементами матрицы M являются комплексные числа, то функции `Re(M)` и `Im(M)` создают из исходной новые матрицы, элементами которых являются соответственно вещественные и мнимые числа элементов матрицы M.

Из матрицы размером $m \times n$ можно создать много определителей. Функция `rank(M)` выдает число, которое является наибольшим порядком определителя матрицы M *(ранг матрицы)*.

Функции `augment(M1,M2)` и `stack(M1,M2)` образуют *матрицу больших размеров* путем объединения матриц M1 и M2. Объединение происходит путем увеличения числа столбцов (`augment`) или числа строк (`stack`). Таким способом можно создать матрицу любого размера.

Кроме перечисленных в табл. 6.4, Mathcad имеет функцию `matrix(m,n,f)`, представляющую собой матрицу значений аналитической функции `f` двух переменных с числом строк `m` и числом столбцов `n`.

Действия матричных функций и операторов покажем на примерах.

Пример 6.5. Даны две следующие матрицы:

$$\mathrm{M1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{M2} = \begin{pmatrix} 2+3i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Необходимо выполнить все операции над матрицами, указанные в табл. 6.4 "Матричные операторы".

Решение приведено на рис. 6.8.

Пример 6.6. Дана матрица:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Необходимо выполнить все операции, приведенные в табл. 6.4 "Функции возвращения характеристик матрицы".

Решение приведено на рис. 6.9.

$$M1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} 2+3\cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4\cdot i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M1^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333 & -0.133 & 0.067 \\ -0.667 & -0.533 & 1.267 \\ 0.333 & 0.467 & -0.733 \end{pmatrix} \qquad |M1| = -15 \qquad M1^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M1^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad M2^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-4i \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$M1_{(1,1)} = 4 \qquad \overline{M2} = \begin{pmatrix} 2-3i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1+4i \\ 5-i & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.8. Решение задачи из примера 6.5

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{cols}(M) = 4 \qquad \mathrm{rows}(M) = 4 \qquad \mathrm{rank}(M) = 2$$

$$\mathrm{tr}(M) = 12 \qquad \mathrm{mean}(M) = 4 \qquad \mathrm{median}(M) = 4$$

Рис. 6.9. Решение задачи из примера 6.6

Пример 6.7. Даны три матрицы. Необходимо выполнить операции, приведенные в табл. 6.4 "Матричные функции".

Решение показано на рис. 6.10.

Mathcad обладает одним замечательным свойством: действия над векторами и матрицами осуществляются так же, как с числами. Вот один из примеров.

$$M1 := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad M2 := \begin{pmatrix} 2+3\cdot i & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1-4\cdot i \\ 5+i & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad M3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{augment}(M1, M3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{stack}(M1, M3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{identity}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Re}(M2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}(M2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.10. Решение задачи из примера 6.7

Пример 6.8. Даны два вектора:

$$V1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad V2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Необходимо выполнить операцию над ними:

$$\big((V1 + V2)\cdot 3 - 1 + \ln(V1)\big)/4 .$$

Решение задачи приведено на рис. 6.11.

$$V1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad V2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{[(V1 + V2)\cdot 3 - 1 + \ln(V1)]}{4} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.525 \\ 2.923 \end{pmatrix}$$

Рис. 6.11. Решение задачи из примера 6.8

ГЛАВА 7

Визуализация вычислений

С помощью визуальной демонстрации результатов возможно выявление их отношения с окружающими данными и проведение последующего более детального анализа. Каким станет результат при изменении исходных данных? Ответ на этот вопрос может быть получен в ходе анализа функциональных зависимостей, положенных в основу вычислений.

7.1. Способы представления функций

Известны три способа представления функций: в виде формулы, таблицы и графика.

Вместе они несут в себе большой объем информации. Выявление всех деталей исключительно по формуле доступно только специалистам. Так, математик непосредственно по виду уравнения может моментально сделать заключение о характере аналитической зависимости, отметить, где будут находиться нули функции, сколько "наблюдается" перегибов, каковы асимптоты функции и т. д.

Полновесная информация о процессах, описываемых аналитически, многими "неспециалистами" воспринимается только после исследования характеристик функций во всей полноте связей с численными значениями в характерных точках и графиком, которые предоставляет среда Mathcad.

Табличное представление связано с выполнением двух этапов:

- ввод значений аргументов и переменных;
- формирование столбцов связывающих воедино значения переменных и функций в ходе вычислений.

Пример 7.1. Сформировать таблицу значений тригонометрической функции $\sin(x)$ в диапазоне от 0 до $\pi/2$ радиан.

Формирование осуществим в диапазоне от 0 до 2 радиан с шагом 0,25.

Последовательность действий следующая:

- задание ранжированной переменной `x := 0, 0.25 .. 2`;
- вывод на экран визуального отображения `x =`, `sin(x) =`.

Результат действий представлен на рис. 7.1.

Обратим внимание на то, что в Mathcad появились два несвязанных напрямую отдельных столбца, если не принять специальные меры по дополнительному позиционированию. Разнесенные в рабочем поле столбцы можно выровнять друг против друга для визуального соответствия значений "аргумент-функция". Для этого их нужно выделить курсором мыши и применить команду меню **Format** | **Align Regions** | **Across** (Формат | Выровнять области | Горизонтально).

Процедура проведения данных операций также показана на рис. 7.1:

- выделены объекты, что отмечено пунктирными рамками;
- заявлена последовательность команд меню **Format**.

Для рассматриваемой команды характерно, что инструментальная кнопка **Align Across** панели **Standard** и ее изображение на развернутом меню расположены практически на одной вертикали и одновременно видны на рисунке.

Исходные данные могут быть представлены не только в виде таблиц ранжированной переменной и соответствующей таблицы функции, но и в виде векторов.

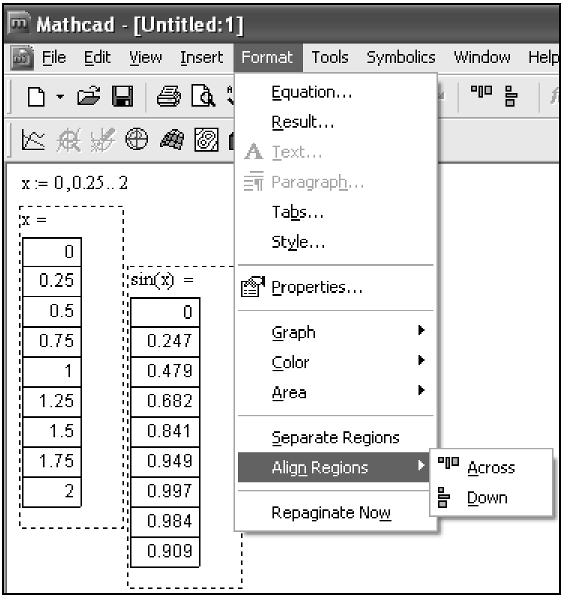


Рис. 7.1. Формирование и выравнивание несвязанных столбцов

Разрозненные столбцы легко собираются воедино матричной функцией `augment` *(см. разд. 6.3.2)*, которая открывает путь к созданию полноценной итоговой таблицы, но для этого требуется использовать векторное представление данных. В качестве параметров этой функции указываются последовательно один за другим имена присоединяемых векторов-столбцов.

Переход к векторному представлению в аналогичной задаче показан на рис. 7.2. По приведенным рис. 7.1 и 7.2 следует отметить отличительные особенности вывода значений аргумента и функции. Табулированные значения для ранжированной переменной выводятся ниже знака равно (рис. 7.1), для векторной переменной — справа (рис. 7.2). В случае, когда столбец имеет размерность 10 и более, он окаймляется нумерацией строк и столбца, причем начиная с нуля.

Завершение формирования итоговой таблицы вычислений связано с введением заголовка таблицы, что улучшает восприятие результатов (рис. 7.3). Дополнительную строку заголовков приме-

$i := 0..13 \qquad X_i := 0.15 \cdot i$

$V := \sin(X) \qquad M := \text{augment}(X, V)$

X =

	0
0	0
1	0.15
2	0.3
3	0.45
4	0.6
5	0.75
6	0.9
7	1.05
8	1.2
9	1.35
10	1.5
11	1.65
12	1.8
13	1.95

V =

	0
0	0
1	0.149
2	0.296
3	0.435
4	0.565
5	0.682
6	0.783
7	0.867
8	0.932
9	0.976
10	0.997
11	0.997
12	0.974
13	0.929

M =

	0	1
0	0	0
1	0.15	0.149
2	0.3	0.296
3	0.45	0.435
4	0.6	0.565
5	0.75	0.682
6	0.9	0.783
7	1.05	0.867
8	1.2	0.932
9	1.35	0.976
10	1.5	0.997
11	1.65	0.997
12	1.8	0.974
13	1.95	0.929

Рис. 7.2. Соединение столбцов таблиц с помощью функции `augment`

нительно к разобранной задаче конструируем и вставляем в итоговую таблицу вычислений следующим образом:

- предварительно формируем вектор-строку размерности 1×2 по известным правилам *(см. гл. 6)*, включая в нее имена столбцов итоговой матрицы в виде символьных обозначений: `Z = ("x"  "sin(x)")`;
- размещаем (или укладываем) ее над верхней строкой матрицы `M` с помощью функции `stack`: `MZ = stack(Z, M)` *(см. разд. 6.3.2)*;
- проверяем результат предпринятых усилий `MZ =`.

К сожалению, конструирование развернутых многостолбцовых таблиц требует применения ряда дополнительных функций или специальных приемов программирования [11].

Z := ("x" "sin(x)")   MZ := stack(Z,M)

M =

	0	1
0	0	0
1	0.15	0.149
2	0.3	0.296
3	0.45	0.435
4	0.6	0.565
5	0.75	0.682
6	0.9	0.783
7	1.05	0.867
8	1.2	0.932
9	1.35	0.976
10	1.5	0.997
11	1.65	0.997
12	1.8	0.974
13	1.95	0.929

MZ =

	0	1
0	"x"	"sin(x)"
1	0	0
2	0.15	0.149
3	0.3	0.296
4	0.45	0.435
5	0.6	0.565
6	0.75	0.682
7	0.9	0.783
8	1.05	0.867
9	1.2	0.932
10	1.35	0.976
11	1.5	0.997
12	1.65	0.997
13	1.8	0.974
14	1.95	0.929

Рис. 7.3. Процедура составления и ввода заголовка в таблицу

7.2. Случаи необходимости графического представления функции при компьютерных технологиях решения задач

В практических задачах часто возникает необходимость визуализации функций в следующих ситуациях:

- общий обзор характерных точек графической зависимости. Mathcad обладает свойством отображать графики функций с помощью технологии быстрого построения, что важно для экспресс-анализа результатов;
- исследование графика: точки пересечения функции с осью абсцисс дают информацию о корнях соответствующего уравнения. Вспомогательные средства трассировки позволяют визуально без расчета считывать числовые результаты;

- анализ исходных табличных данных. Небольшое число опорных точек графика при этом соединяются последовательно линейными отрезками;
- нахождение по табличным данным приемлемой формулы. Использование формулы в практике обработки данных характеризуется восстановлением большого числа промежуточных точек с построением соответствующего аппроксимирующего графика;
- оценка степени приближения и установление диапазона допустимой замены одной сложно вычисляемой функции на другую более простую;
- по графику при проведении дополнительных рассуждений можно получить качественную и количественную оценки погрешности вычисления функций по известным погрешностям аргументов.

Задание графика в выбранной позиции документа начинается с выбора его типа с помощью меню **Insert | Graph** (см. рис. 1.18) или палитры **Graph** с девятью инструментальными кнопками. Для этого раздела меню характерно, что все пункты сопровождаются соответствующими пиктограммами. Указания на набор "горячих" клавиш имеют первые четыре типа графика.

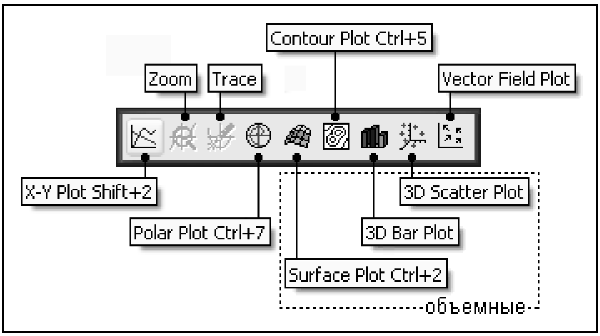


Рис. 7.4. Основные типы графиков

В Mathcad легко доступно задание семи основных типов графиков, вынесенных на инструментальную панель **Graph** (рис. 7.4). В документации Mathcad они разделены на две группы с обозначениями 2D или 3D, чтобы отразить основное деление на двумерные и пространственные графики.

В классе 3D (*xyz*) можно выделить особые (*xy**)-плоскостные графики: **Contour Plot** (Контурный график) и **Vector Field Plot** (График векторного поля). Они представляют соответственно проекции линий уровня и векторное поле направлений наискорейшего роста третьей координаты на плоскость *xy*. Эти графики вносят существенную дополнительную информацию и имеют свойство совмещаться в одном объеме с некоторыми другими 3D-графиками.

7.3. Двумерная графика

2D-графики представлены двумя типами — декартовыми "X-Y" и полярными графиками. В силу большей распространенности рассмотрим построение "X-Y" графика.

График строится после установки курсора в нужной области рабочего поля и последующего вызова команды меню **Insert | Graph | X-Y Plot**, либо щелчка мыши на кнопке  панели инструментов **Graph**, либо нажатия клавиши <@>.

В результате появляется графическая область (см. шаблон на рис. 7.5 слева) с основными маркерами ввода для функции и имени переменной по центру осей абсцисс и ординат. Построение графика без предварительного задания области изменения аргумента относят к быстрому способу.

Курсор ввода первоначально выставлен в области маркера аргумента, но достаточно перенести курсор в центральный маркер оси ординат, указать полное имя функции с характерными скобками и списком аргументов и далее щелкнуть мышью вне поля шаблона, как появляется полноценный график, что поддерживает репутацию быстрого построения.

При быстрой технологии вычисление точек графика осуществляется в основном диапазоне ±10, выбираемом автоматически. Достаточно большое число промежуточных расчетных точек графика соединяются линейными отрезками.

В маркере ординат через запятую можно ввести список до 16 функций, а в маркере абсцисс — список соответствующих переменных. При общем имени аргумента t, как представлено на рис. 7.5, моментально строятся соответствующие введенному списку графики.

Можно также приводить не только полное имя функции, но и выражения, непосредственно задающие определения функций.

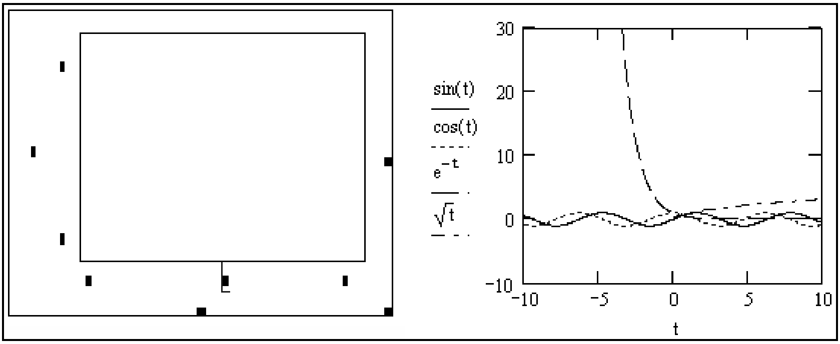


Рис. 7.5. Создание быстрых графиков

Требуемый диапазон изменений *x* и *y* может быть сразу внесен в дополнительные маркерные позиции (расположены вдоль границ осей внизу и слева).

В старых версиях среды Mathcad их не было в исходном шаблоне, и добраться до них было непросто. В окончательной форме графика эти позиции скрыты, но заняты дублирующими граничными значениями аргумента и расчетными значениями функции соответственно.

Для изменения размеров графической области используются маркеры на рамке вокруг графического объекта: нижним и правым раздельно регулируются размеры по вертикали и горизонтали соответственно, угловым маркером — пропорционально изменяются оба размера.

Различия в способах построения графиков рассмотрим на основе простейшей задачи вычисления значений одной из тригонометрических функций, например, $A \cdot \sin(x)$ (рис. 7.6). На первом шаге зададим определенное число значений переменной, вводя ограничение на диапазон изменения от 0 до 2 и приращение $\pi/8$.

После этого на втором шаге представим сформированные исходные данные в виде легко обозримой таблицы, применяя оператор вывода (=) сначала к ряду упорядоченных значений: `x=`, а затем к требуемой формуле, определяемой на заданном наборе аргументов: `A · sin(x)=`.

Третий шаг предназначен для выявления различий в построении графиков: по принятой исходной функции с быстрым ее построением и на основе расчетов по формуле. Используем эффект ускоренной заготовки парных графиков.

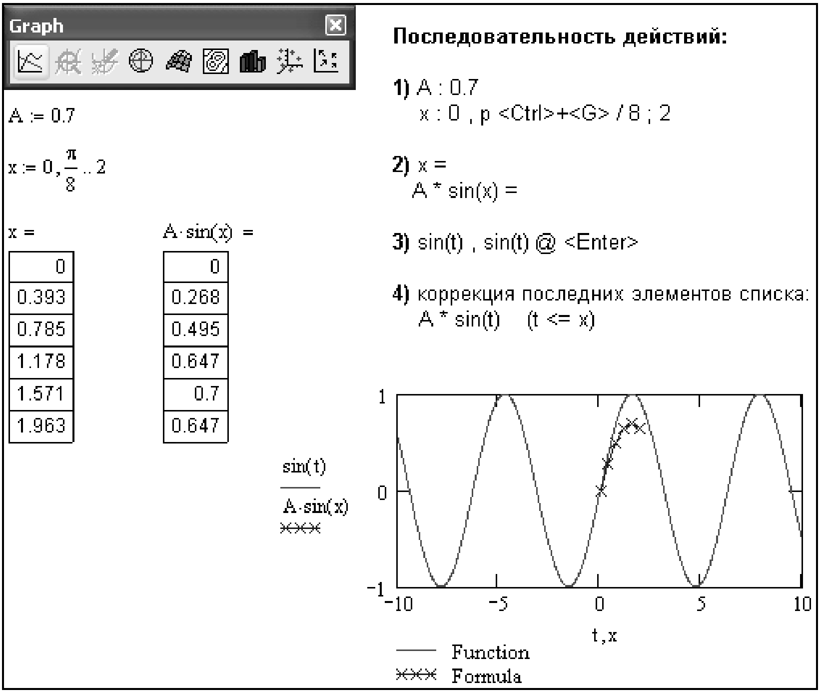


Рис. 7.6. Три способа представления функций: формула, таблица, график

Все действия комментируются на рис. 7.6. Убедительное свидетельство простоты и преимущества быстрого вывода графиков функций получим в результате двойной записи `sin(t),sin(t)`, выделения записи угловым курсором и нажатия клавиш <@> и <Enter>. Быстрому построению графика функции сопутствует:

- автоматическая установка имен двух переменных `t,t` около оси абсцисс;
- автоматическая установка диапазона их изменения от –10 до +10.

Первый график с выставленным автоматически интервалом оставляет за собой демонстрацию эффекта быстрого построения опорной функции `sin(t)`, второй график соответствует принятым ограничениям на вычисления по требуемой формуле.

Замена в списке аргументов имени второй переменной `t` на `x` вводит в действие принятые условия задания графика. Эта процедура отмечена в протоколе условной записью ($t \Leftarrow x$) и проводится в поле графика в двух согласованных позициях:

- вначале во втором элементе списка функций, вертикально размещенного около оси ординат, с целью обращения к формуле вычислений $A \cdot \sin(x)$;
- затем во втором элементе списка переменных, горизонтально расположенного около оси абсцисс.

Таким образом, изменения надо вносить в выбранные строго соответствующие друг другу элементы списков.

Для выделения всех различий в построении этих графиков проведено масштабирование с коэффициентом $A = 0{,}7$; форматирование типа линии второго графика и меток, выделяющих расчетные табличные значения; кроме того, внизу поля графиков добавлено их описание (легенда).

Совмещение графиков на одном поле, как правило, требует переопределения некоторых заранее установленных по умолчанию опций настройки графиков. Двойной щелчок в области графика открывает окно установок форматирования **Formatting Currently Selected X-Y Plot** (Форматирование выделенного X-Y графика). Оно имеет четыре вкладки (рис. 7.7): **X-Y Axes** (Оси X-Y), **Traces** (След), **Labels** (Метки), **Defaults** (По умолчанию).

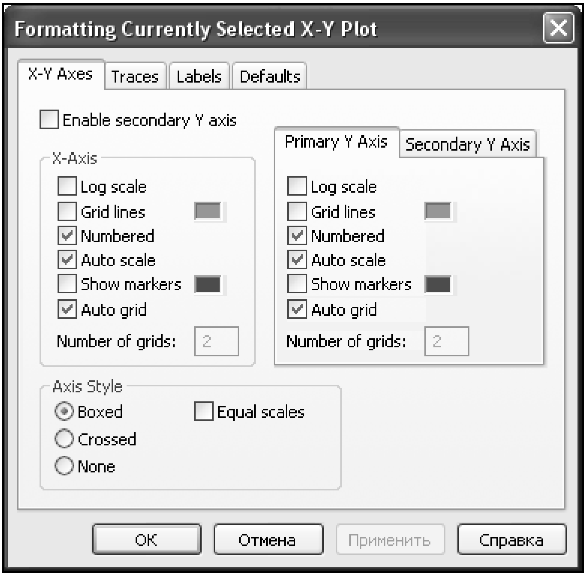


Рис. 7.7. Диалоговое окно для форматирования графика по осям абсцисс X и ординат Y

Следует обратить внимание на возможность работы со второй осью Y.

На вкладке **Traces** имеется столбец условных обозначений, или легенда, **Legend Label**. В поле редактирования под столбцом можно присвоить собственное имя каждому очередному следу совместных графиков вместо безликих "trace *i*" имен сообщений (рис. 7.8).

При снятии флажка **Hide legend** (Скрыть легенду) выбирается либо нижнее (**Below**) расположение легенды в поле графика, либо по желанию размещение в одной из четырех угловых позиций при фиксации переключателя в верхней (**Top**) или нижней (**Bottom**) строке соответственно слева (**-left**) или справа (**-right**).

На этой вкладке также имеется возможность задания символьного обозначения точек графика **Symbol** (none, ×, +, ... , о) и вариации вида линии **Line** (непрерывная, точка, черта, штрихпунктир). Каждый след графика имеет автоматически устанавливаемый цвет **Color**, который легко при необходимости переопределить. Можно также изменить тип графика **Type** (линия, точки и др.), толщину следа **Weight**.

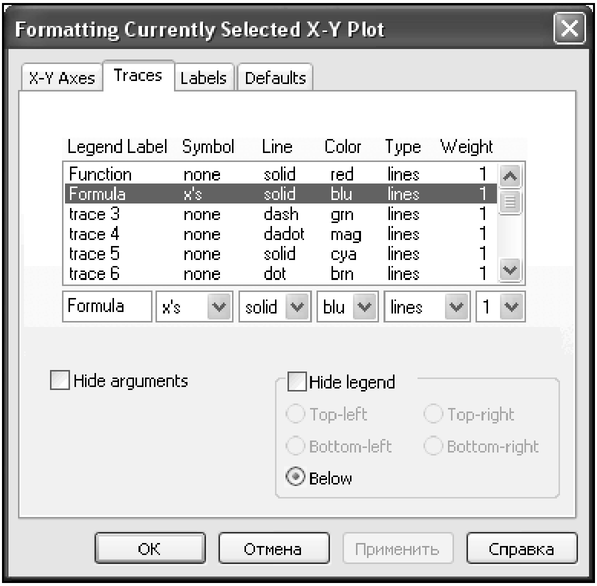


Рис. 7.8. Компоненты форматирования графика на вкладке **Traces**

Обратиться к средствам форматирования можно также с помощью контекстного меню по команде **Format**. В контекстном меню можно найти команды **Trace** и **Zoom**, дублирующие действия инструментальных кнопок палитры **Graph**. Эти команды указывают на выделенную пересечением линий трассировки точку графика или прямоугольную область на графике, которые требуют детального изучения. Команды доступны при выделении отдельного графика или графической области соответственно. Пример и результаты их действий будут рассмотрены в *гл. 10*.

Определим порядок действий при векторном задании аргумента и функции на примере.

Пример 7.2. Исследовать возможности графического представления тригонометрической функции $\sin(x)$ на интервале от 0 до 2 радиан с заданным шагом 0,3 и векторным описанием результатов. Результаты вычислений представить в табличной форме.

Решение. Вызов графика осуществляется нажатием на кнопке  **X-Y Plot** или набором клавиш <Shift>+<2>. Число компонентов вектора определяется индексом `i:=0..7`. Каждый компонент формируется непосредственно по значению шага 0,3 по простейшей формуле X_i`:=0.3 · i`.

Вектор значений исследуемой функции `V` определяется видом тригонометрической функции `V:=sin(X)`.

Так как значения вычисляемой функции передаются в вектор `V`, то построение графика может быть завершено указанием в маркерах ввода имен аргумента `X` и функции `V`, что и требуется по условиям задачи (рис. 7.9).

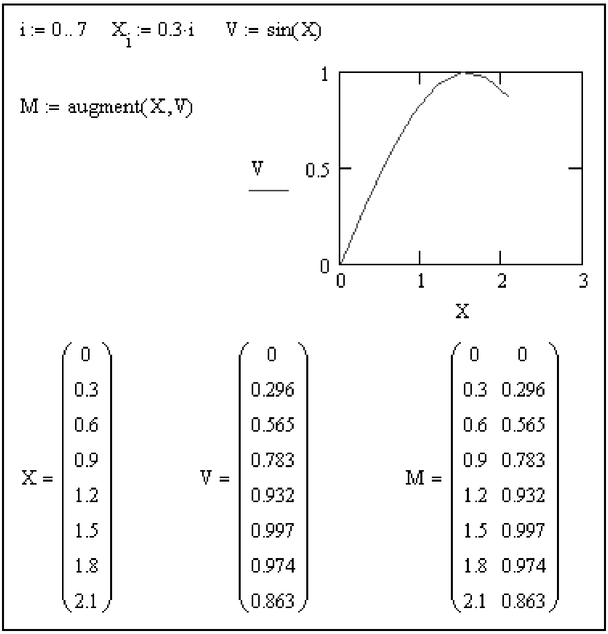


Рис. 7.9. Задание графика векторами

7.4. Трехмерная графика

Mathcad делает доступной работу с пространством. Построение объемного графика можно инициировать несколькими способами: через систему меню, кнопкой-пиктограммой панели инструментов и соответствующим набором клавиш. Так, для графика поверхности **Surface Plot** действует клавиатурный вызов <Ctrl>+<2>. При этом выводится шаблон, основные действия с которым достаточно просты.

Зрительное восприятие объемного результата во многом зависит от способа задания стиля форматирования осей графика. Они могут исходить из одной точки (или угла) — опция **Corner**, расположены по периметру — опция **Perimeter**, или отсутствовать — опция **None**. Эти опции легко могут быть заданы путем обращения к диалоговому окну **3-D Format** двойным щелчком на поле шаблона или готового графика.

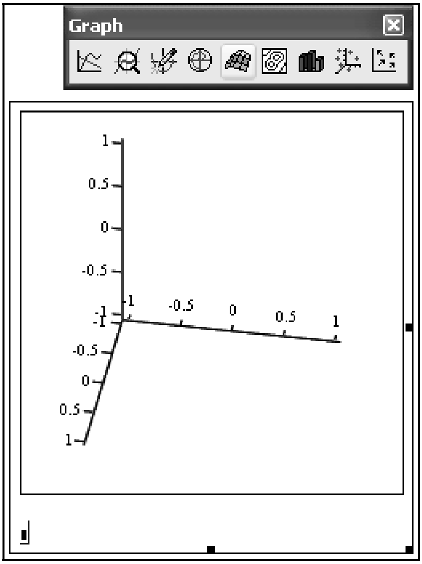
Первая опция задана по умолчанию, и ее проявление видно на шаблоне объемного графика (рис. 7.10, *а*), вторая более предпочтительна ввиду явного выделения не дальних, а ближних границ объема, третья опция снимает какое-либо обрамление (Border) объема.

Доступ к указанным опциям возможен и через контекстное меню, что часто оказывается более удобным. На рис. 7.10, *б* за контекстным меню показан фрагмент досрочного задания границ в шаблоне по периметру (пункт меню **Axes** | **Perimeter**). Такое расположение осей наиболее выгодно, т. к. оси нигде не пересекаются и не будут перекрывать объемный график.

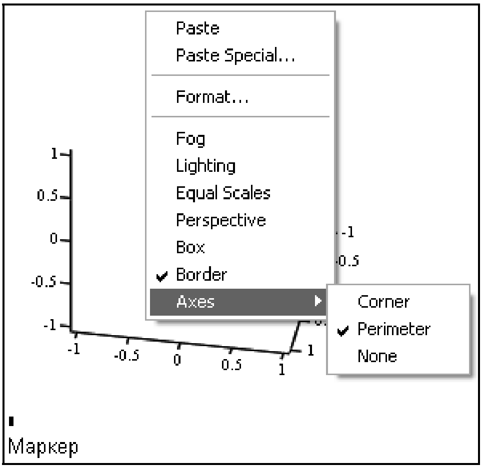
В области графика находится только один выделенный курсором маркер. В нем надо разместить либо сокращенный идентификатор функции (без скобок и упоминания переменных), либо идентификатор массива, содержащего координаты опорных точек, с помощью которых будет прорисован объемный объект. Это условие унифицирует процесс для быстрого построения графика.

Примечание

Непосредственная запись выражения в позицию маркера в отличии от двумерного графика недопустима.



а



б

Рис. 7.10. Исходный шаблон графика поверхности (*а*) и контекстное меню с установкой новых границ объема (*б*)

Массив может быть задан двумя ранжированными переменными и связывающим их функциональным отношением для определения третьей координаты.

Подведем итоги. Для быстрого построения графика поверхности нужно:

- ввести данные для построения массива или функцию 2-х переменных;
- вызвать шаблон графической области <Ctrl>+<2>;
- заполнить по указанным правилам маркер ввода.

Пример 7.3. Используя тригонометрические функции калькулятора:

$$F(x, y) = \sin(x)^2 + \cos(x)^2,$$

построить соответствующую поверхность и исследовать настройки графика Mathcad.

На рис. 7.11 показаны результаты указанных пошаговых действий.

На рис. 7.11, *а* показан пустой шаблон, на рис. 7.11, *б* в маркере размещено "усеченное" имя функции и собственно график, возникающий сразу после щелчка мыши вне этого поля, а на рис. 7.11, *в* отображено диалоговое окно форматирования **3-D Plot Format**.

Следует заметить, что автоматически задаваемая область по координатам в диапазоне (–5, +5) несколько избыточна для представления этой поверхности. Диалоговое окно форматирования вызывается стандартным образом — двойным щелчком мыши в области графика.

Установим одинаковые границы **Range** на вкладке быстрой установки графических данных **QuickPlot Data** по обеим переменным от –2 до +2 в соответствующих полях **start** и **end**. Окончательный вид исследуемой поверхности в объеме показан на рис. 7.12.

Два типа графиков **Contour Plot** и **Vector Field Plot** отображаются на плоскостях трехмерной системы координат. Пример сочетания плоского и объемного графиков показан на рис. 7.14. Изменения в поле графика очевидны — в маркер дописан еще один идентификатор функции (как правило, дублирующий исходный).

В окне форматирования **3-D Plot Format** переключатель **Plot 2** устанавливается в положение **Contour Plot** для изменения типа дополнительно объявленного графика.

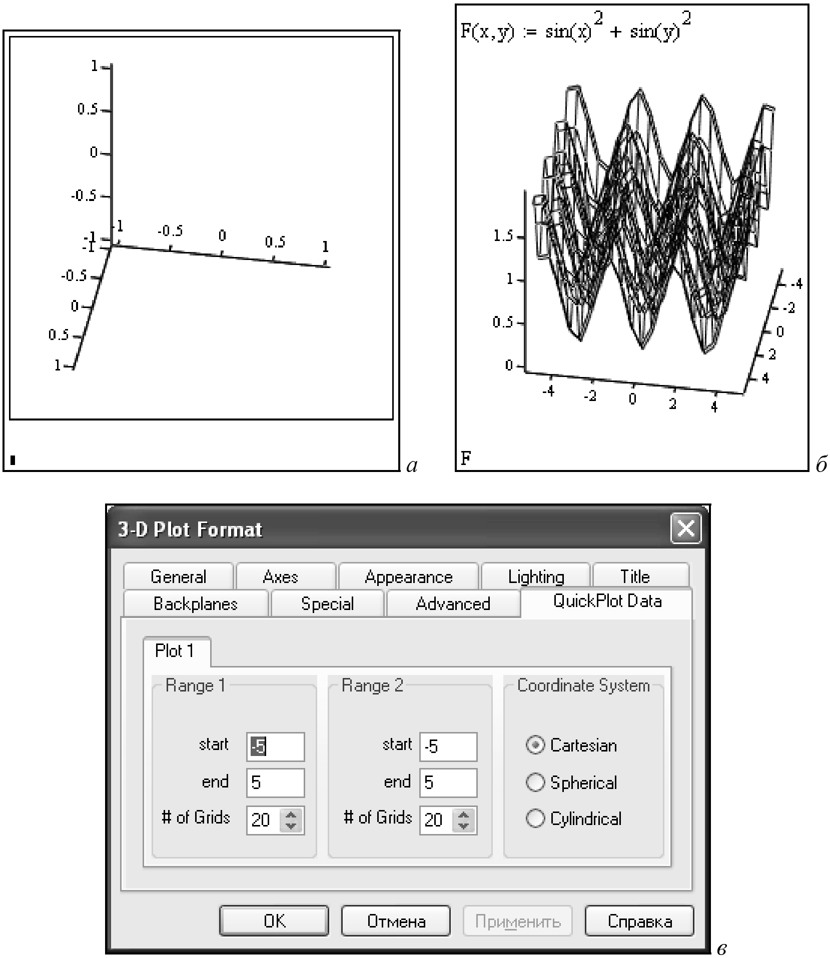


Рис. 7.11. Форматирование графика

Дополнительные настройки графиков обнаруживают большее количество их типов. На рис. 7.13 приведены два объемных графика, построенных по одной заданной функции, рядом со вторым

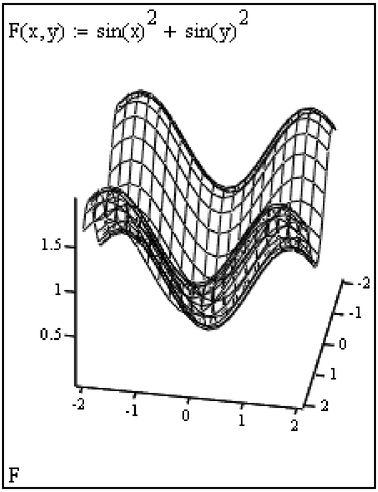


Рис. 7.12. Объемное изображение поверхности в сокращенном диапазоне

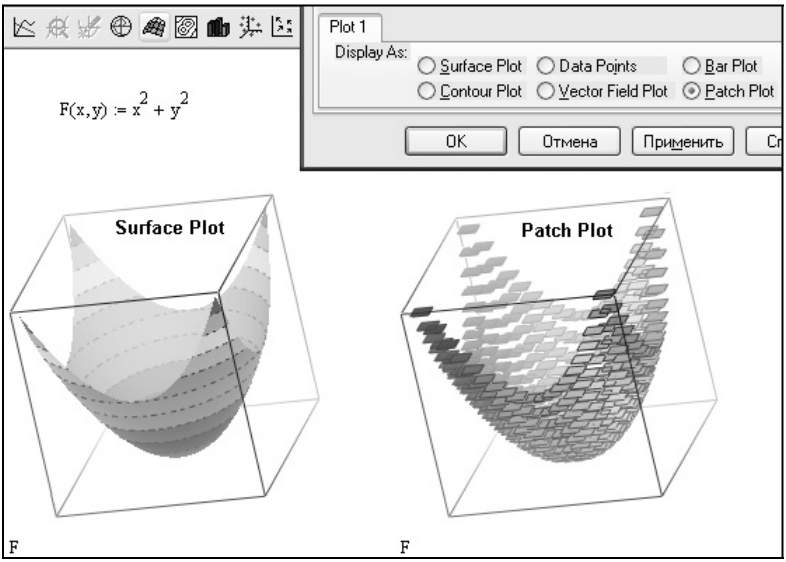


Рис. 7.13. Настройка **Patch Plot**

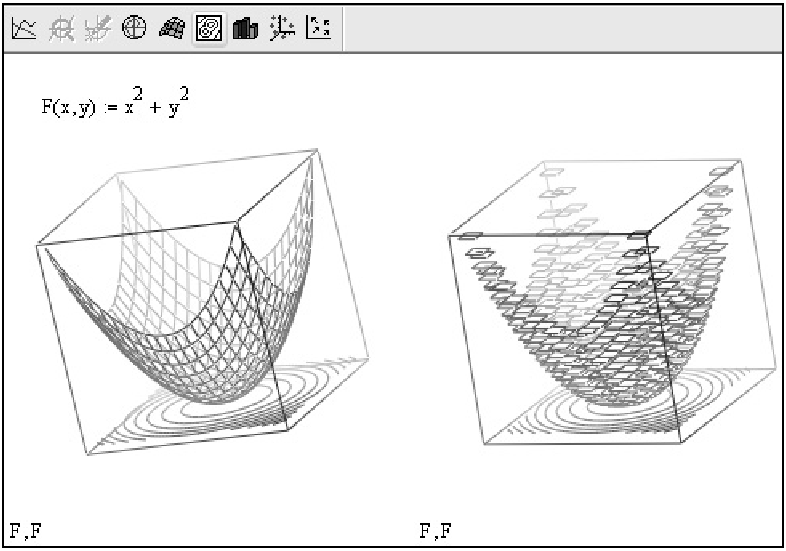


Рис. 7.14. Совмещение объемных и плоскостного графиков **Contour Plot**

графиком приведен фрагмент вкладки **General** окна форматирования **3-D Plot Format**. Переключатель **Plot 1** используется для настройки типа графика, в частности, на рисунке установлен тип **Patch Plot** (Лоскутный график).

Для построения объемных графиков поверхности можно использовать встроенную функцию Mathcad `CreateMesh(F,x0,x1,y0,y1,sgrid,tgrid,fmap)`. Эта функция возвращает массив из трех матриц, представляющих координаты `x`, `y`, `z` для функции `F`, определенной в качестве функции двух переменных `sgrid` и `tgrid`. Аргументы `x0`, `x1`, `y0`, `y1` задают пределы изменения этих переменных. Аргумент `fmap` — вектор значений, указывающий число линий в сетке изображаемой функции.

Эта функция призвана упростить процесс построения поверхностей в некоторых случаях. Поскольку все аргументы дополнительные, кроме `F`, то решение примера 7.3 может быть сведено к минимуму действий, что показано на рис. 7.15.

В системе Mathcad мастер построения трехмерных графиков, вызываемый с помощью меню **Insert | Graph | Plot Wizard**, представляет некоторый интерес, поэтапно в режиме диалога запрашивает основные установки, что не исключает дополнительного форматирования.

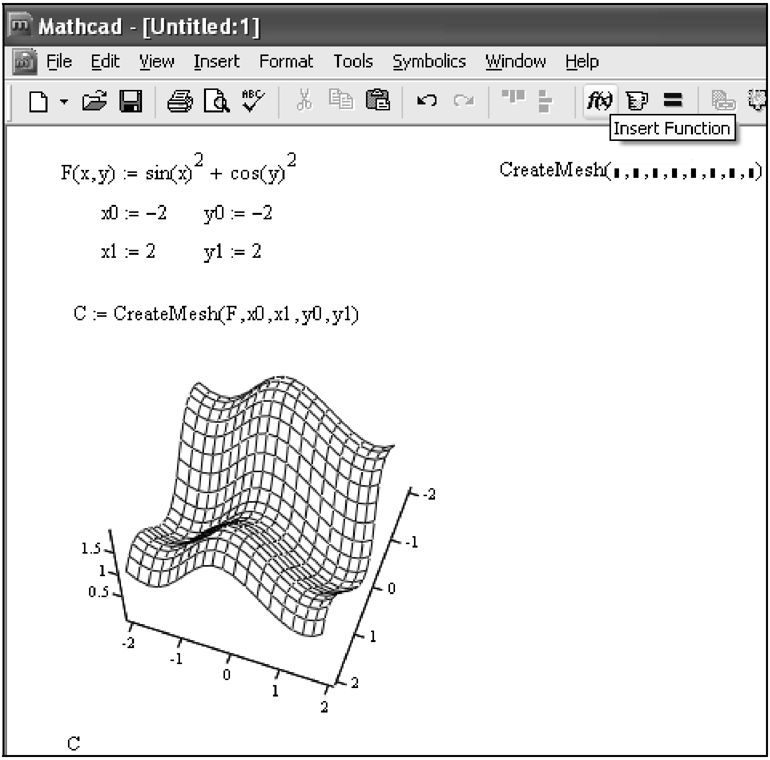


Рис. 7.15. Построение поверхности с помощью функции `CreateMesh`

Мы предлагаем читателю самому поэкспериментировать с мастером (для более полного восприятия возможностей системы) и решить, что ему удобнее использовать.

ГЛАВА 8

Компьютерные технологии решения уравнений

Алгебраические уравнения могут быть с одним или со многими неизвестными (системы уравнений), линейными или нелинейными, с постоянными или переменными коэффициентами. Решениями уравнений являются действительные или комплексные числа и выражения.

Большое разнообразие уравнений породило большое разнообразие алгоритмов их решения, которые реализуются в виде аналитических или численных методов.

Решение уравнений в аналитическом виде получают путем математических преобразований исходного уравнения. Пусть, например, задано уравнение $a - b\ln x = 0$. Необходимо найти значение x. Решение может быть таким:

$$a = b\ln x \quad \Rightarrow \quad \ln x = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{a}{b}},$$

или таким:

$$a = \ln x^b \quad \Rightarrow \quad x^b = e^a \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[b]{e^a}.$$

Аналитические решения ценны своей общностью. В нашем случае найдено решение, которое верно для любых значений переменных a и b. Если же использовать численные методы, то решение нужно получать всякий раз при изменении коэффициентов a и b.

Есть только одна большая проблема: в большинстве случаев трансцендентные уравнения не имеют точного аналитического решения. Чтобы получить решение в аналитическом виде, необходимо выполнить большую интеллектуальную работу, т. к. готовых алгоритмов для этого не существует.

Другое дело численные решения. Алгоритмы численных методов хорошо разработаны. Они представляют собой математические выражения, подставляя в которые многократно приближенные значения искомых неизвестных можно получить решение с заданной точностью.

И снова мы сталкиваемся со сложностями: объем вычислений настолько большой, что без компьютера корни уравнения не найти.

Итак, во многих случаях решение уравнения и тем более системы уравнений без компьютера не получить.

При этом возможности решения уравнений в аналитическом виде, требующего интеллектуальной работы, являются критерием интеллектуальности данной математической системы.

В настоящей главе излагаются компьютерные технологии решения уравнений системой Mathcad. На каждый из методов приводятся примеры, позволяющие не только усвоить технологии, но и оценить возможности системы.

Сначала рассмотрим алгоритмы решения уравнений. Это поможет нам понять компьютерные технологии решения уравнений.

8.1. Численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений

Существует большое количество методов решения алгоритмических и трансцендентных уравнений.

Алгоритм любого из этих методов является совокупностью условий выбора начального приближения, расчетных соотношений и признака окончания вычислительного процесса.

Рассмотрим алгоритмы некоторых наиболее популярных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

8.1.1. Метод дихотомии (половинного деления)

Сущность метода состоит в следующем. Предположим, что областью изоляции корня уравнения $f(x)=0$ является $[a, b]$. Тогда за первое приближение к искомому корню x принимается $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$. Затем вычисляются значения функции $f(x)$ в точках a и x_1 (или b и x_1). Если $f(a)\cdot f(x_1)<0$, то новой областью изоляции корня является $[a, x_1]$, в противном случае — $[x_1, b]$. Равносильным является условие $f(b)\cdot f(x_1)<0$. Если это условие выполняется, то новой областью изоляции будет $[x_1, b]$, в противном случае — $[a, x_1]$. Вторым приближением к искомому корню является: $x_2 = \dfrac{a+x_1}{2}$, если $f(a)\cdot f(x_1)<0$, или $x_2 = \dfrac{b+x_1}{2}$, если $f(b)\cdot f(x_1)<0$. Затем вычисляются значения функции $f(x)$ при $x = x_2$ и проверяется условие $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ и т. д.

Признаком окончания вычислительного процесса в этом методе является одно из следующих условий:

$$f(x_n) \le \varepsilon \quad \text{или} \quad \left| f(x_n) - f(x_{n-1}) \right| \le \varepsilon ,$$

где ε — допустимая погрешность вычисления корня.

Достоинством метода является простота алгоритма и высокая точность определения корня. Медленная сходимость итераций — основной недостаток метода.

8.1.2. Метод хорд

Алгоритмом метода хорд является совокупность следующих соотношений:

♦ условие выбора начального приближения:

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{если} \;\; f(a)f''(a) < 0 \;\; \text{или} \;\; f(b)f''(b) > 0; \\ b, & \text{если} \;\; f(a)f''(a) > 0 \;\; \text{или} \;\; f(b)f''(b) < 0; \end{cases}$$

♦ расчетные соотношения:

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(b - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, & \text{если} \;\; x_0 = a; \\ x_{n-1} - \dfrac{(a - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})}, & \text{если} \;\; x_0 = b; \end{cases}$$

♦ признак окончания вычислительного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \le \varepsilon .$$

В алгоритме метода хорд приняты следующие обозначения:

♦ $[a, b]$ — область изоляции корня;

♦ $f(a)$, $f(b)$ — значения функций уравнения $f(x) = 0$ в точках a и b;

♦ $f''(a)$, $f''(b)$ — значения вторых производных функции $f(x)$ в точках a и b;

♦ x_n — приближение корня уравнения $f(x) = 0$, n = 1, 2, ... ;

♦ ε — погрешность вычисления корня уравнения.

Как видно из описания алгоритма, он является итерационным. Для его реализации в виде компьютерной программы необходимо знать:

♦ область $[a, b]$ изоляции корня;

♦ вторую производную $f''(x)$;

♦ значение начального приближения, если не существует аналитическое выражение второй производной функции $f(x)$.

Получить эти данные можно с помощью универсальных программных средств символьной математики, существенно облегчив труд учащегося.

Метод хорд дает возможность получить решение с необходимой точностью при меньшем числе итераций по сравнению с методом половинного деления. Его недостатками являются:

- сложность метода в связи с необходимостью вычисления второй производной;
- неудовлетворительный признак окончания вычислительного процесса.

Последний недостаток объясняется тем, что уточнение корня на каждой из итераций происходит по признаку $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, в то время как сам корень $\bar{x}$ при этом не находится в области $[x_n, x_{n-1}]$, т. к. приближение к корню идет только от начального приближения — от a или b. Может оказаться, что абсолютная разность $|x_n - x_{n-1}|$ мала и удовлетворяет условию окончания вычислительного процесса, но при этом корень $\bar{x}$ далеко расположен от x_n.

Если признаком окончания вычислительного процесса считать условие $|f(x)| \le \varepsilon$, то при этом может оказаться, что значение функции $f(x)$ мало, а абсцисса x_n далеко находится от корня $\bar{x}$.

Отсутствие хорошего признака окончания вычислительного процесса может привести к вычислению корня уравнения $f(x) = 0$ с погрешностью, превышающей ε, хотя оба условия окончания вычислительного процесса были выполнены.

8.1.3. Метод касательных

Идея метода состоит в следующем. Выбирается произвольно значение x, принадлежащее функции $f(x)$ уравнения $f(x) = 0$. Проводится касательная к функции в этой точке до пересечения ее с осью абсцисс. Точка пересечения касательной с осью абсцисс (обозначим ее x_1) принимается за первое приближение корня.

Вычисляется значение функции $f(x_1)$ в точке x_1 и вновь проводится касательная в точке с координатами $(x_1, f(x_1))$. Точка x_2 пересечения касательной с осью абсцисс принимается за второе приближение корня уравнения $f(x)=0$ и т. д. Признаком окончания вычислительного процесса, как и в методе хорд, является выполнение одного из условий $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|f(x)| \le \varepsilon$.

Легко получить следующую рекуррентную формулу вычисления приближений:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

где $f'(x_{n-1})$ — производная функции $f(x)$ в точке x_{n-1}.

Начальное приближение x_0, как и в методе хорд, зависит от вида функции $f(x)$ и области изоляции корня $[a, b]$. При этом оказывается, что оно будет противоположным значению x_0 в методе хорд. Если в методе хорд $x_0 = a$, то в методе касательных $x_0 = b$ и наоборот.

Алгоритмом метода касательных является совокупность следующих соотношений:

- ♦ условие выбора начального приближения:

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{если } f(a)f''(a) > 0 \text{ или } f(b)f''(b) < 0; \\ b, & \text{если } f(a)f''(a) < 0 \text{ или } f(b)f''(b) > 0; \end{cases}$$

- ♦ расчетное соотношение:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})};$$

- ♦ признак окончания вычислительного процесса:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(x_n)| \le \varepsilon.$$

Из алгоритма видно, что для его реализации в виде компьютерной программы необходимо знать:

- ♦ область изоляции корня;
- ♦ аналитические выражения первой и второй производных;
- ♦ начальное приближение, если не существует аналитического выражения второй производной. Определение второй произ-

водной возможно с помощью компьютерных технологий, реализуемых в универсальных программных средствах символьной математики.

У метода касательных есть свое ограничение: метод нельзя реализовать на практике, если функция $f(x)$ уравнения $f(x)=0$ не имеет первой производной. Например, уравнение $2x!-e^{-x}+5=0$ не может быть решено, т. к. функция $x!$ не имеет производной.

Метод касательных имеет те же недостатки, что и метод хорд. По сравнению с методом хорд он более трудоемок, т. к. требует вычисления в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ не только значений функции $f(x)$, но и ее производной. Его достоинство в том, что во многих случаях дает высокую точность результата при малом числе итераций.

8.1.4. Комбинированный метод (метод хорд и касательных)

Существенным недостатком методов хорд и касательных является неудовлетворительный признак окончания вычислительного процесса. Условия $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$ не всегда обеспечивают необходимую точность определения корня уравнения $f(x)=0$.

Комбинированный способ позволяет устранить этот недостаток. Из описания методов хорд и касательных следует, что если один из способов определяет значение корня с недостатком, то другой обязательно с избытком. Эта особенность методов дает возможность выработать хороший признак окончания вычислений и обеспечить необходимую точность результата.

Обозначим $x_n^{(\text{х})}$ — *n*-е приближение корня, вычисленное по методу хорд, $x_n^{(\text{к})}$ — по методу касательных.

Тогда для оценки погрешности вычисления корня целесообразно воспользоваться условием $\left|x_n^{(\text{х})} - x_n^{(\text{к})}\right| \le \varepsilon$, т. к. достоверно известно, что в диапазоне $x_n^{(\text{х})} - x_n^{(\text{к})}$ обязательно находится искомый корень.

Алгоритмом вычисления корней комбинированным методом является совокупность следующих соотношений:

- условия выбора начального приближения:

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{если} \quad f(a) \cdot f''(a) > 0 \quad \text{или} \quad f(b) \cdot f''(b) < 0; \\ b, & \text{если} \quad f(a) \cdot f''(a) < 0 \quad \text{или} \quad f(b) \cdot f''(b) > 0; \end{cases}$$

- расчетные соотношения:

$$x_n^{(\text{к})} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})};$$

$$x_n^{(\text{х})} = \begin{cases} x_{n-1} - \dfrac{(b - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}, & \text{если} \quad x_0 = a; \\ x_{n-1} - \dfrac{(a - x_{n-1}) f(x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})}, & \text{если} \quad x_0 = b; \end{cases}$$

- признак окончания вычислительного процесса:

$$\left| x_n^{(\text{х})} - x_n^{(\text{к})} \right| \le \varepsilon .$$

Недостатком метода хорд и касательных является его большая трудоемкость. Однако при высокой производительности компьютера этот недостаток значения не имеет.

Существенным преимуществом метода является его способность обеспечить высокую точность определения корня при конечном числе итераций.

8.1.5. Метод итераций

Исходное уравнение $f(x) = 0$ преобразуется к виду $x = \varphi(x)$. Из области изоляции корня $[a, b]$ выбирается произвольное x_0, которое принимается за начальное приближение корня. Приближения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по соотношениям $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$.

Повторяя эти процедуры многократно, можно вычислить значение корня с заданной точностью.

При практическом использовании метода итераций возникают следующие вопросы:

- ♦ каковы условия сходимости итерационного процесса?
- ♦ если итерационный процесс расходится, то каким образом можно обеспечить его сходимость?
- ♦ как определить погрешность вычисления корня?

Существуют две теоремы, которые отвечают на первый вопрос. Приведем их без доказательства.

Теорема 1. Если в итерационном процессе $x_n = \varphi(x_{n-1})$ последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет предел, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, то значение $\overline{x}$ является корнем уравнения $f(x) = 0$.

Теорема 2. Итерационный процесс сходится, если на всем интервале области изоляции корня $[a, b]$ выполняется условие $|\varphi'(x)| < 1$. При этом за значение x_0 принимается любое число из области $[a, b]$.

Теперь ответим на второй вопрос. Известны несколько способов обеспечения сходимости итераций.

Способ 1. *Изменение вида уравнения*

Если итерационный процесс $x_n = \varphi(x_{n-1})$ не сходится, то следует представить исходное уравнение $f(x) = 0$ в иной возможной форме и выбрать такую из них, при которой обеспечивается сходимость итерационного процесса.

Способ 2. *Переход к обратной функции*

Представим исходное уравнение $x = \varphi(x)$ в виде $y = \varphi(x)$ и разрешим последнее относительно x. Получим $x = \Psi(y)$. Найдем производную по y функции $x = \Psi(y)$:

$$\frac{d\Psi(y)}{dy}=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\varphi'(x)}.$$

Так как при расходящемся итерационном процессе $|\varphi'(x)|>1$, то $\left|\frac{1}{\varphi'(x)}\right|<1$ и итерационный процесс $y_n = f(y_{n-1})$ сходится. Очевидно, что если x_k — корень уравнения $y=\Psi(y)$, то x_k также будет корнем уравнения $x=\varphi(x)$.

Способ 3. *Подбор множителя*

Предположим, что исходное уравнение $f(x)=0$ преобразовано к виду $x=\varphi(x)$ и $|\varphi'(x)|>1$, т. е. процесс расходится. Выберем произвольно функцию $g(x)\neq 0$ и умножим исходное уравнение на $g(x)$. Тогда получим: $f(x)\cdot g(x)=0$ или $x=x-f(x)\cdot g(x)$. Теперь $\varphi(x)=x-f(x)\cdot g(x)$. Функцию $g(x)$ подберем такую, чтобы удовлетворялось условие $|\varphi'(x)|<1$ во всей области изоляции корня $[a, b]$.

Признаком окончания вычислительного процесса во всех предыдущих методах было одно из условий $|x_n - x_{n-1}|\leq\varepsilon$ или $|f(x_n)|\leq\varepsilon$.

В методе итераций условием сходимости итерационного процесса и обеспечения необходимой точности определения корня является $|x_n - x_{n-1}|\leq\varepsilon$ при $|\varphi'(x)|<\frac{1}{2}$.

Из описания метода итераций можно сформулировать следующий алгоритм решения уравнения $f(x)=0$ методом итераций:

♦ условие выбора начального приближения:

  $a\leq x_0\leq b$;

♦ расчетное соотношение:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad \text{при условии} \quad \left|\varphi'(x)\right| < \frac{1}{2};$$

♦ признак окончания вычислений:

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon.$$

Из описания метода итераций видно, что основным его недостатком является сложность обеспечения сходимости итерационного процесса и точности определения корня.

8.2. Методы решения систем алгебраических уравнений

Системы уравнений могут быть линейные и нелинейные, с постоянными и переменными коэффициентами. Решение таких уравнений возможно аналитическими и численными методами.

8.2.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Систему m линейных уравнений с n неизвестными можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{8.1}$$

В этой системе $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неизвестные, a_{ij} — коэффициент в i-м уравнении при j-м неизвестном ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), b_i — свободный член i-го уравнения, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В системах уравнений возможны случаи, когда число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), меньше числа неизвестных ($m < n$), больше числа неизвестных ($m > n$). При этом решением системы (8.1) является любой набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые при подстановке в систему (8.1) обращают каждое из уравнений в числовое равенство.

Количество решений может быть равно, быть меньше или больше числа неизвестных. В зависимости от этого система уравнений классифицируется следующим образом. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае она называется *несовместной*. Совместная система может иметь единственное решение или бесконечное число решений. Если система имеет бесконечное число решений, ее называют *неопределенной*. Рассмотрим примеры таких систем.

Система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$$

имеет единственное решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, т. е. она является совместной и определенной.

Система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5; \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений, которые удовлетворяют следующим равенствам: $x_1 + 2x_3 = 2$, $2x_2 - 3x_3 = -1$, т. е. система является совместной и неопределенной. Определены лишь условия решения. В этой системе первое и второе уравнения идентичны.

Система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$$

не имеет ни одного решения и является несовместной. Действительно, в этой системе будет три одинаковых уравнения после деления второго уравнения на 2, а третьего на 3.

Существует большое число различных методов решения систем линейных уравнений. Все они могут быть разделены на две группы: точные методы и методы последовательных приближений. Следует при этом иметь в виду, что точными методами являются только аналитические методы. Если с помощью этих методов решать на компьютере систему уравнений с числовыми коэффициентами, то точных решений можно не получить за счет ошибок вычислений, связанных с конечной памятью компьютера.

Наиболее популярным из точных методов решения линейных алгебраических уравнений является метод Гаусса. Метод Гаусса изучается в математике, и нет надобности здесь его описывать. Напомним только теорему Крамера.

Теорема Крамера. Если определитель $|A|$ матрицы коэффициентов системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет решение, и притом единственное.

Метод Гаусса может привести к существенным ошибкам при определении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в случае плохо обусловленных систем. *Плохо обусловленной* называется такая система, у которой модуль определителя матрицы коэффициентов мал по сравнению с какой-либо из норм матрицы. Нормой матрицы может быть максимальная из сумм модулей коэффициентов строк или столбцов. Плохо обусловленные системы чувствительны к ошибкам округления, которые неизбежны при компьютерных методах реализации алгоритма Гаусса.

Рассмотрим решение линейных алгебраических уравнений методом простой итерации.

Разрешим исходную систему уравнений (8.1) относительно неизвестных:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \alpha_{1,n+1}; \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \alpha_{2,n+1}; \\ \qquad \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n,n+1}. \end{cases} \tag{8.2}$$

В системе приняты обозначения:

- $\alpha_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{ii}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$;
- $\alpha_{i,n+1} = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Запишем систему уравнений (8.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \quad\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{8.3}$$

Пусть $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ являются начальными приближениями. Тогда, подставляя их в систему уравнений (8.3), получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}); \\ x_2^{(1)} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}); \\ \quad\ldots \\ x_n^{(1)} = \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}). \end{cases} \tag{8.4}$$

Принимая $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, ..., $x_n^{(1)}$ в качестве первых приближений и подставляя их в исходное уравнение, получим вторые приближения. Повторяя вычисления, можно получить значения неизвестных на любой итерации.

При компьютерной реализации итерационного метода возникают следующие вопросы:

- Как выбрать начальные приближения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$?
- Каковы условия сходимости итерационного процесса?
- На какой итерации закончить вычисления?

Ответы на эти вопросы совместно с расчетными соотношениями и будут алгоритмом решения систем линейных уравнений методом итерации. В следующих разделах ответим на поставленные вопросы для случая линейных систем алгебраических уравнений.

Выбор начальных приближений

Если области, в которых находятся неизвестные x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, известны, то начальные значения выбираются произвольно из этой области. Если таковые неизвестны, то за начальные приближения можно взять свободные члены $\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{b_n}{a_{nn}}$.

Условия сходимости итерационного процесса

Условие сходимости итерационного процесса следующее: сумма абсолютных значений отношений недиагональных коэффициентов к диагональному в каждом уравнении системы должна быть меньше единицы.

Обеспечить сходимость итерационного процесса можно путем преобразования исходной системы к эквивалентной. Эти преобразования можно выполнить путем перестановки уравнений, операций сложения и вычитания уравнений, умножения на постоянный коэффициент.

Рассмотрим пример обеспечения сходимости итераций. Необходимо решить методом итераций следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ -7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6; \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 12. \end{cases}$$

Эта система имеет решение: $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{11}{2}$, $x_3 = \frac{15}{2}$.

Однако решать эту систему уравнений методом итераций опасно, т. к. здесь не обеспечены условия сходимости итераций. Действительно, в первом уравнении $\left|\frac{3}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| > 1$, во втором $\left|\frac{7}{2}\right| + \left|\frac{4}{2}\right| > 1$, в третьем $\left|\frac{8}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| > 1$.

Для обеспечения условий сходимости преобразуем исходную систему уравнений. Второе уравнение поставим на первую строку. Тогда $\left|\frac{2}{7}\right| + \left|\frac{4}{7}\right| < 1$. Заметим, что первое уравнение можно также заменить третьим.

Умножим первое уравнение на 4 и сложим его со вторым. Тогда получим $x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 10$. Это уравнение можно сделать вторым, т. к. $\left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{8}{10}\right| < 1$.

Для получения третьего уравнения выполним следующие преобразования: сложим все уравнения, полученное уравнение умножим на 2 и сложим со вторым. Тогда получим: $-x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 44$. Теперь $\left|\frac{1}{8}\right| + \left|\frac{2}{8}\right| < 1$, условие сходимости итераций выполнено. В результате всех этих операций получена следующая эквивалентная система уравнений:

$$\begin{cases} -7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6; \\ x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 10; \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 44. \end{cases}$$

Теперь условия сходимости итераций выполнены полностью. Решение системы уравнений итерационным методом возможно при начальных условиях:

$$x_1^{(0)} = -\frac{6}{7}; \quad x_2^{(0)} = 1; \quad x_3^{(0)} = \frac{44}{8} = 5,5.$$

Признак окончания вычислений

Признаком окончания итерационного процесса из условий точности можно считать в первом приближении условие: $\left|x_k^{(\upsilon+1)} - x_k^{(\upsilon)}\right| \le \varepsilon$, где $x_k^{(\upsilon+1)}$, $x_k^{(\upsilon)}$ — значение k-го неизвестного соответственно на $(\upsilon + 1)$ и (υ)-й итерациях, ε — допустимая погрешность вычисления неизвестных.

Существует два способа решения уравнений методом итераций: метод простой итерации и метод Зейделя. Пользователь не имеет возможности выбирать метод итераций, т. к. функции и команды системы Mathcad не различают этих методов. Метод решения уравнений в системах символьной математики для пользователя неизвестен, следовательно, выбора не существует.

8.2.2. Алгоритмы метода итерации

Алгоритм метода простой итерации состоит из совокупности условий выбора начальных приближений, расчетных соотношений и признака окончания вычислений:

- условие выбора начальных приближений:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}},\ x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}},\ \ldots,\ x_n^{(0)} = \frac{b_n}{a_{nn}};$$

- расчетные соотношения:

$$\begin{cases} x_1^{(\upsilon+1)} = \varphi_1(x_1^{(\upsilon)}, x_2^{(\upsilon)}, \ldots, x_n^{(\upsilon)}); \\ x_2^{(\upsilon+1)} = \varphi_2(x_1^{(\upsilon)}, x_2^{(\upsilon)}, \ldots, x_n^{(\upsilon)}); \\ \quad \ldots \\ x_n^{(\upsilon+1)} = \varphi_n(x_1^{(\upsilon)}, x_2^{(\upsilon)}, \ldots, x_n^{(\upsilon)}); \end{cases}$$

- признак окончания вычислений:

$$\left| x_k^{\upsilon+1} - x_k^{\upsilon} \right| \le \varepsilon .$$

В алгоритме простой итерации все значения неизвестных на $(\upsilon + 1)$-м шаге вычисляются по их значениям на предыдущем (υ)-м шаге. В алгоритме Зейделя результаты вычисления x_1 на шаге $(\upsilon + 1)$ используются для вычисления $x_2, x_3, \ldots, x_n$ на этом же шаге; результаты вычисления x_2 на шаге $(\upsilon + 1)$ используются для вычисления неизвестных $x_3, x_4, \ldots, x_n$ на этом же шаге и т. д. Расчетные соотношения имеют вид:

$$\begin{cases} x_1^{(\upsilon+1)} = \varphi_1(x_1^{(\upsilon)}, x_2^{(\upsilon)}, \dots, x_n^{(\upsilon)}); \\ x_2^{(\upsilon+1)} = \varphi_2(x_1^{(\upsilon+1)}, x_2^{(\upsilon)}, \dots, x_n^{(\upsilon)}); \\ \qquad \dots \\ x_n^{(\upsilon+1)} = \varphi_n(x_1^{(\upsilon+1)}, x_2^{(\upsilon+1)}, \dots, x_{n-1}^{(\upsilon+1)}, x_n^{(\upsilon)}). \end{cases}$$

Очевидно, что алгоритм Зейделя позволяет получить решение с большей точностью, чем алгоритм простой итерации при том же числе итераций.

8.2.3. Сравнительная оценка точных и итерационных методов

В методе простой итерации на одну итерацию необходимо выполнить приблизительно $2n^2$ арифметических операций типа сложения и умножения, в то время как по методу Гаусса для решения системы n уравнений необходимо выполнить $\frac{2}{3}n^3$ операций. Очевидно, что метод итераций более целесообразен для случая, когда можно получить решение задачи не более чем за $\frac{1}{3}n$ итераций, т. е. он выгоден при решении уравнений больших размерностей.

Логическая схема итерационных методов очень проста, поэтому компьютерные программы короче, чем в методе Гаусса.

Итерационные методы позволяют распараллеливать алгоритм, что дает возможность эффективно решать уравнения на многопроцессорных компьютерах.

Недостатки итерационных методов в том, что они требуют от пользователя проверки условий сходимости итераций и, если они не выполняются, преобразовывать исходные уравнения к виду, когда обеспечивается сходимость итерационного процесса. Кроме этого, итерационные методы требуют выбора начальных приближений. Все это существенно усложняет компьютерные технологии решения уравнений.

8.3. Компьютерные технологии решения алгебраических и трансцендентных уравнений

Анализ аналитических и численных методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений показывает, что не существует единого алгоритма определения корней уравнения. Только их совокупность позволяет найти корни уравнений, и то не всегда.

Компьютерные технологии решения уравнений требуют четкой постановки задачи. Недостаточно сформулировать задачу так: необходимо определить корни уравнения $2^x - 3{,}8x + 1 = 0$. Такая формулировка не корректна. Из нее не ясно, какие корни нас интересуют — вещественные или комплексные, сколько корней содержится в этом уравнении и какие из них необходимо найти, в какой области значений аргумента они находятся, с какой точностью необходимо получить решение.

Правильной в данном случае будет следующая формулировка задачи: необходимо найти вещественные корни уравнения $2^x - 3{,}8x + 1 = 0$, находящиеся в области изоляции $0{,}1 \le x_1 \le 1$ и $3 \le x_2 \le 5$. Решение получить с точностью не менее четырех значащих цифр после запятой.

Компьютерные технологии решения алгебраических и трансцендентных уравнений представляют собой выполнение следующих математических процедур:

- ♦ определение области изоляции каждого из вещественных корней уравнения;
- ♦ выбор встроенной функции решения уравнения;
- ♦ решение уравнения;
- ♦ проверка достоверности полученного решения.

Система Mathcad имеет несколько встроенных функций, предназначенных для решения уравнений и систем уравнений. Среди них определение корней алгебраических и трансцендентных уравнений осуществляют следующие три функции: `root`, `Find`, `polyroots`.

8.3.1. Решение уравнений с помощью функции *root*

Функция `root` осуществляет решение алгебраических и трансцендентных уравнений, определяя вещественные корни уравнения. Она имеет вид:

```
root(f(x),x),
```

где:

- `f(x)` — решаемое уравнение $f(x)=0$;
- `x` — аргумент функции $f(x)$ (искомое неизвестное уравнение).

Представляется в одной из следующих форм:

x := x0 root(f(x),x) =	x := x0 z = root(f(x),x) z =	x := x0 φ(x):= f(x) z := root(φ(x),x) z =

Приведем примеры использования функции `root`.

Пример 8.1. Необходимо определить корни уравнения $2^x - 4x = 0$, если известно, что уравнение имеет два корня и следующие области их изоляции: $0 < x_1 < 1$, $3 < x_2 < 5$.

Решение показано на рис. 8.1, *а*. Если необходимо присвоить имя функции, соответствующей уравнению $2^x - 4x = 0$, и результату решения, то программа будет иметь вид, изображенный на рис. 8.1, *б*.

Напоминаем, что знак присвоения (:=) образуется нажатием клавиши <:> (двоеточие), а знак (=) (равно) — клавишей <=>.

Функция `root` находит комплексные корни, однако не всегда верно и при том не ясна технология решения задачи.

$$x := 1$$
$$\mathrm{root}\left(2^x - 4\cdot x, x\right) = 0.31$$
$$x := 5$$
$$\mathrm{root}\left(2^x - 4\cdot x, x\right) = 4$$

а

$$x := 1$$
$$f(x) := 2^x - 4\cdot x$$
$$Z := \mathrm{root}(f(x), x)$$
$$Z = 0.31$$
$$x := 5$$
$$f(x) := 2^x - 4\cdot x$$
$$Z := \mathrm{root}(f(x), x)$$
$$Z = 4$$

б

Рис. 8.1. Решение уравнения $2^x - 4x = 0$

Рассмотрим примеры.

Пример 8.2. Пусть необходимо решить уравнение $2^x - x = 0$. Известно, что уравнение вещественных корней не имеет.

Попробуем найти комплексные корни. Вот только каким выбрать значение начального приближения?

Выберем наугад, например $x_0 = 1$. Тогда решение имеет вид, показанный на рис. 8.2.

$$x := 1$$
$$\mathrm{root}\left(2^x - x, x\right) = 0.825 - 1.567i$$

Рис. 8.2. Решение к примеру 8.2

Это же решение получим при $x = 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ -1;\ -2$.

Проверим правильность определения корня, подставив полученное решение в исходное уравнение.

В результате подстановки получим следующий ответ: $3{,}319 \cdot 10^{-4} - 5{,}343\, i \cdot 10^{-4}$.

Присваивая начальному приближению другие значения, получим новое решение. Например, при $x_0 = 10$ ответом является `3,515 - 10,88 i`.

Таким образом, решение уравнения с помощью функции `root` не получено.

Пример 8.3. Необходимо решить с помощью функции `root` уравнение $e^{-2x} - 2 = 0$.

Точное решение этого уравнения имеет вид:

$$x_1 = -\frac{\ln 2}{2}; \quad x_{2,3} = -\frac{\ln 2}{2} \pm \pi i; \quad x_{4,5} = -\frac{\ln 2}{2} \pm 2\pi i;$$

$$x_{6,7} = -\frac{\ln 2}{2} \pm 3\pi i, \ldots$$

Это решение получено с помощью систем Derive 5 и Matlab.

Mathcad выдает следующие значения корней (рис. 8.3).

При $x_0 = 3$ решения нет.

$x := 0$

$\mathrm{root}\left(e^{-2\cdot x} - 2, x\right) = -0.347$

$x := 1$

$\mathrm{root}\left(e^{-2\cdot x} - 2, x\right) = -0.347 + 3.69i \times 10^{-10}$

$x := 2$

$\mathrm{root}\left(e^{-2\cdot x} - 2, x\right) = -0.347 + 6.058i \times 10^{-7}$

$x := 3$

$\mathrm{root}\left(e^{-2\cdot x} - 2, x\right) = \blacksquare$

Рис. 8.3. Решение к примеру 8.3

Как видно из ответов, система Mathcad комплексные корни не нашла, найден лишь вещественный корень $-0,347=-\dfrac{\ln 2}{2}$.

Пример 8.4. Требуется решить уравнение $e^{-x}+e^{x}-1=0$.

Это уравнение имеет следующее точное решение:

$$x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{3}i;\quad x_{3,4}=\frac{5}{3}\pi i;\quad x_{5,6}=\frac{7}{3}\pi i.$$

Решение получено с помощью системы Derive 5.

Система Mathcad (функция `root`) дает следующие значения корней уравнения (рис. 8.4).

$$x := 1$$

$$\mathrm{root}(\exp(-x)+\exp(x)-1,x)=1.944\times 10^{-10}-1.047i \approx -\frac{\pi}{3}\cdot i$$

$$x := 5$$

$$\mathrm{root}(\exp(-x)+\exp(x)-1,x)=8.143\times 10^{-7}-5.236i \approx -\frac{5}{3}\cdot\pi\cdot i$$

Рис. 8.4. Решение к примеру 8.4

Задача решена правильно. Вещественная часть комплексного числа практически равна нулю, а мнимая верна с точностью три знака после запятой.

Из примеров можно заключить, что использование функции `root` для определения комплексных корней сомнительно. Для этих целей рекомендуется применять аналитические методы, рассмотренные далее в этом разделе.

8.3.2. Определение корней многочлена

Определение корней многочлена осуществляется в Mathcad с помощью функции `polyroots`, которая имеет вид:

```
polyroots(V),
```

где `V` — вектор коэффициентов многочлена, начиная с младшей степени.

Функция находит все вещественные и комплексные корни.

Технология решения задачи исключительно проста и состоит в следующем:

- ввод символа присвоения имени вектора, например `V:=`.
- нажатие комбинации клавиш <Ctrl>+<M>.

  На экране появляется окно **Insert Matrix**. В полях **Rows** и **Columns** устанавливается число строк и число столбцов матрицы. В данном случае число столбцов равно 1, а число строк — $(n + 1)$, где n — степень многочлена. После щелчка на кнопке **OK** на экране появляется пустой шаблон матрицы размером $(n + 1) \times 1$;
- заполнение маркеров ввода вектора коэффициентами полинома, в первой строке пишется коэффициент при нулевой степени полинома;
- ввод функции `polyroots`;
- нажатие клавиши <=>. На экране отобразится ответ в виде вектора.

Покажем технологию определения корней многочлена на примерах.

Пример 8.5. Пусть необходимо найти корни многочлена $y = x^4 + 3x^3 - 7x + 3{,}5 = 0$.

Решение будет иметь вид, показанный на рис. 8.5.

$$V := \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -2.257 - 1.089i \\ -2.257 + 1.089i \\ 0.629 \\ 0.886 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.5. Решение к примеру 8.5

Обратим внимание на то, что если какой-либо член в полиноме отсутствует, то на соответствующей позиции в векторе должен стоять ноль.

В следующем примере это особенно заметно.

Пример 8.6. Необходимо определить корни уравнения $x^5 - 1 = 0$. В данном случае $n = 5$, поэтому размер матрицы будет 6×1, при этом первый элемент равен -1, последний — 1, а остальные будут нулями.

Решение приведено на рис. 8.6.

$$V := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -0.809 - 0.588i \\ -0.809 + 0.588i \\ 0.309 - 0.951i \\ 0.309 + 0.951i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.6. Решение уравнения $x^5 - 1$

Функция `polyroots` позволяет найти корни многочлена, если коэффициенты полинома — комплексные числа.

Пример 8.7. Требуется найти корни уравнения $x^5 + 2ix^4 + (1 - 3i)x^2 - 1 = 0$.

Решение приведено на рис. 8.7.

$$V := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 - 3 \cdot i \\ 0 \\ 2 \cdot i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -1.13 + 0.218i \\ -0.431 - 0.371i \\ 0.133 - 2.499i \\ 0.433 + 0.411i \\ 0.994 + 0.241i \end{pmatrix}$$

Рис. 8.7. Решение к примеру 8.7

8.3.3. Определение корней алгебраических и трансцендентных уравнений с помощью функции *Find*

Функция `Find` предназначена для решения систем уравнений методом итераций. Как частный случай, функция может решать систему из одного уравнения, т. е. определять его корни.

В данном случае блок решения уравнения включает следующие процедуры:

- задание начального приближения корня из области его изоляции;
- ввод слова `Given`, указывающего на то, что далее следует уравнение, корни которого необходимо определить;
- ввод уравнения. Следует иметь в виду, что при вводе в уравнение знака равенства (так называемый "жирный" знак равенства) необходимо нажать клавиши <Ctrl>+<=>;
- ввод функции `Find(x)`, где `x` — искомое неизвестное;
- нажатие клавиши <=> для получения ответа.

Рассмотрим технологию решения уравнения на примерах.

Пример 8.8. Необходимо решить уравнение $3^x - 8x + 1 = 0$, если известно, что уравнение имеет два корня, области изоляции которых имеют значения: $0 < x_1 < 1$, $2 < x_2 < 3$.

Решение приведено на рис. 8.8, *а*.

Для получения второго корня достаточно отредактировать первую строку, присвоив переменной *x* значение 3 и щелкнув мышью вне блока решения задачи. Получим ответ: 2,782.

В целях сокращения решения функции `Find` можно значение `Z` не присваивать. Тогда решение получается путем нажатия клавиши <=> после функции `Find(x)`. Решение уравнения показано на рис. 8.8, *б*.

```
x := 0.5
Given
3^x − 8·x + 1 = 0
Z := Find(x)
Z = 0.299
```

а

```
x := 3
Given
3^x − 8·x + 1 = 0
Find(x) = 2.782
```

б

Рис. 8.8. Решение уравнения $3^x - 8x + 1 = 0$

Определим корень более сложного уравнения.

Пример 8.9. Пусть необходимо определить корень уравнения:

$$e^{-2x} + \sin(x^2) - \ln(2x - 1) + 3x^4 - \mathrm{arctg}(2x) - 7 = 0 .$$

Решение выглядит следующим образом (рис. 8.9).

```
x := 1
Given
e^(−2·x) + sin(x^2) − ln(2·x − 1) + 3·x^4 − atan(3·x) − 7 = 0
Z := Find(x)
Z = 1.264
```

Рис. 8.9. Решение к примеру 8.7

8.3.4. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений в символьном виде

Технология решения уравнений состоит из следующих процедур:

- ввод уравнения $f(x) = 0$, при этом (= 0) можно опустить;
- выделение искомого неизвестного двойным щелчком мыши;

- обращение к пункту главного меню **Symbolics** | **Variable** | **Solve**;
- на экране появится решение.

Этот метод часто выдает не все вещественные корни уравнения. Иногда он не выдает комплексные корни, если имеются вещественные, или выдает не все комплексные корни.

Приведем примеры, иллюстрирующие возможности аналитических решений уравнений.

Пример 8.10. Решить в аналитическом виде следующие уравнения:

$$x^3 - a = 0;$$

$$e^{-2x} - 2a = 0;$$

$$\sin ax + \cos ax = 0;$$

$$e^{ax} + e^{-ax} - 1 = 0;$$

$$e^{ax} + e^{-ax} = 0;$$

$$a \sin x + b \cos x = 0.$$

Следуя описанной ранее технологии, получим решения, приведенные в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Результаты решения уравнений системой Mathcad

Уравнение	Решение системой Mathcad	Комментарии
$x^3 - a = 0$	$\sqrt[3]{a}$; $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}(\sqrt{3}i+1)$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{a}(\sqrt{3}i-1)$	Все корни уравнения определены
$e^{-2x} - 2a = 0$	$-\frac{1}{2}\ln(2a)$	Система не нашла комплексных корней $x_{1,2} = -\frac{\ln(2a)}{2} \pm \pi i$

Таблица 8.1 *(окончание)*

Уравнение	Решение системой Mathcad	Комментарии
$\sin ax + \cos ax = 0$	$-\frac{1}{4}\frac{\pi}{a}$	Система не выдала других корней, например: $x_1 = \frac{3\pi}{4a}$; $x_2 = -\frac{5\pi}{4a}$
$e^{ax} + e^{-ax} - 1 = 0$	$\frac{\ln\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)}{a}$	Корней бесчисленное множество, например: $x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3}i$; $x_{3,4} = \pm\frac{5}{3}\pi i$; ...
$e^{ax} + e^{-ax} = 0$	$-\frac{\pi}{2a}i$	Система не выдала даже сопряженного корня. Корней много, например: $x_{1,2} = \pm\frac{3\pi}{2a}i$; $x_{3,4} = \pm\frac{5\pi}{2a}i$ и т. д.
$a\sin x + b\cos x = 0$	$-a\tan\frac{b}{a}$	Не определены корни: $x_1 = \pi - a\tan\left(\frac{b}{a}\right)$; $x_2 = a\tan\left(\frac{b}{a}\right)$; $x_3 = -a\tan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$

Из результатов решения уравнений видно, что Mathcad при решении уравнения аналитическими методами выдает далеко не полную информацию о его корнях. Полные решения, приведенные в комментариях, получены с помощью системы Derive 5, оказавшейся более интеллектуальной.

Вот еще один поучительный пример.

Пример 8.11. Необходимо определить корни уравнения:

$$(e^x - 1)(\ln x + x - 1)(x^3 - 1) = 0 .$$

Из уравнения видно, что его корнями должны быть: $x_1 = 0$ (результат решения уравнения $e^x - 1 = 0$), $x_2 = 1$ (результат решения уравнения $\ln x + x - 1 = 0$) и три корня уравнения $x^3 - 1 = 0$, один из которых $x_3 = 1$, а два других — комплексные. Кроме того, уравнение $e^x - 1 = 0$ имеет два комплексных корня. Таким образом, наше уравнение имеет 7 корней, из которых три вещественные и четыре комплексные.

Mathcad при решении аналитическим методом выдает только следующие три корня: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}i$. Система нашла решение уравнения $x^3 - 1 = 0$ и не нашла двух корней вещественных $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ и двух комплексных $x_{6,7} = \pm 2\pi i$.

Кстати, система Matlab также нашла только три корня. А вот более интеллектуальная система Derive 6 нашла все семь корней, которые нами и приведены.

Дело здесь в том, что систему Mathcad не "научили" исходное уравнение представлять в виде трех уравнений: $e^x - 1 = 0$, $\ln x + x - 1 = 0$, $x^3 - 1 = 0$, решая которые отдельно можно было бы найти все семь корней.

Из описания методов и примеров видно, что для определения корней уравнений далеко недостаточно знать соответствующие функции математической системы. Необходимо также знать компьютерные технологии решения уравнений.

Компьютерные технологии должны позволять:

- определять число вещественных корней уравнения;
- область изоляции каждого из корней;
- число комплексных корней;
- возможности встроенных функций.

Рассмотрим технологию решения алгебраических и трансцендентных уравнений на примере.

Пример 8.12. Необходимо определить все корни уравнения:

$$-x^5 + 8x^2 + (x^3 - 8)(x(e^x - 4) + 3(e^x - 1)) = 0\,.$$

Воспользуемся описанной ранее компьютерной технологией решения уравнений.

Определение числа вещественных корней и областей их изоляции

Эту задачу решим графоаналитическим методом. На рис. 8.10 приведен график функции

$$f(x) = -x^5 + 8x^2 + (x^3 - 8)(x(e^x - 4) + 3(e^x - 1)\,.$$

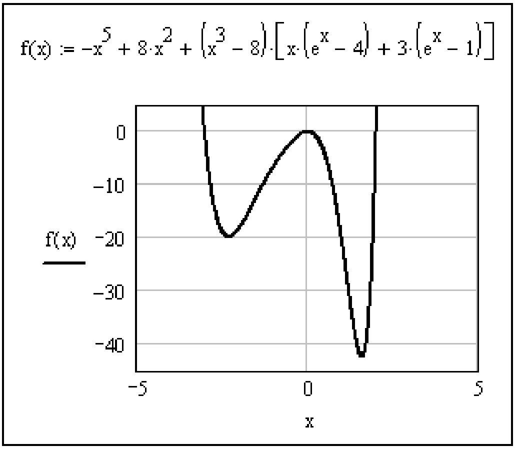


Рис. 8.10. График функции из примера 8.12

Из графика видно, что система имеет три вещественных корня (три точки пересечения с осью x), а их областями изоляции являются: $-4 < x_1 < -2$; $-0{,}5 < x_2 < 0{,}5$; $1 < x_4 < 3$.

Выбор функции Mathcad решения уравнения

Mathcad имеет три следующие функции определения корней уравнения $f(x) = 0$: `root`, `polyroots`, `Find`. Кроме того, имеется весьма удобный способ решения уравнений в аналитическом виде.

Так как наше уравнение не является многочленом и не содержит символьных переменных, то функции `polyroots` и аналитические методы применять на данном этапе не будем.

Функции `root` и `Find` в данном случае равноценны, т. к. практически невозможно установить, какой из методов хорд или итераций здесь предпочтительнее.

Выберем вначале функцию `root` и найдем все действительные корни уравнения.

Решение уравнения с помощью функции `root` приведено на рис. 8.11.

$$x := -2$$

$$y(x) := -x^5 + 8\cdot x^2 + \left(x^3 - 8\right)\cdot\left[x\cdot(\exp(x) - 4) + 3\cdot(\exp(x) - 1)\right]$$

$$Z := \mathrm{root}(y(x), x)$$

$$Z = -3$$

Рис. 8.11. Решение с помощью функции `root`

Редактируя `x` и щелкая мышью вне блока формул, получим следующие отклики (рис. 8.12).

$$x := 0.1 \qquad Z = 8.172 \times 10^{-3}$$

$$x := 2.5 \qquad Z = 2$$

Рис. 8.12. Поиск других корней уравнения

Из результатов решения видно, что система Mathcad нашла два вещественных корня: $x = 2$ и $x = -3$. Корень $x = 0$ система не нашла, т. к. при таких погрешностях вычисления корня результат можно только условно считать успешным.

Функция `Find` улучшила результат приближения на 4 порядка. Однако решения $x = 0$ не выдала.

Решение уравнения аналитическим методом

Решение нами получено аналитическим методом. Откликами явились следующие три вещественные и два комплексные корня:

$$x_1 = -3\,; \quad x_2 = 0\,; \quad x_3 = 2\,; \quad x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{3}i\,.$$

Решение уравнения приведено на рис. 8.13.

$$-x^5 + 8\cdot x^2 + \left(x^3 - 8\right)\cdot\left[x\cdot\left(e^x - 4\right) + 3\cdot\left(e^x - 1\right)\right]$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 + i\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ -1 - i\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.13. Решение уравнения из примера 8.12

Отклики являются точными значениями корней уравнения.

Проверка достоверности полученного решения

Проверка правильности полученного решения осуществляется следующими способами:

- подстановка корня в исходное уравнение и вычисление значения уравнения, которое должно быть равно нулю при всех значениях корней;
- вычисление корней несколькими методами.

Мы использовали оба метода. Убедились, что $x = 2$ и $x = -3$ являются корнями уравнения, т. к. получены двумя методами (с помощью функции `root` и аналитическим методом). Достоверность значений комплексных корней проверялась подстановкой. Кроме этого, решение выполнено с помощью системы Derive 5, которая выдала все корни уравнения.

8.4. Решение систем уравнений. Компьютерные технологии

В среде Mathcad системы уравнений решаются с помощью функций `lsolve`, `Find`, `Minerr`.

Функция `lsolve` позволяет решать системы линейных алгебраических уравнений матричным методом.

Функция `Find` решает линейные и нелинейные уравнения методом итераций.

Функция `Minerr`, так же как и функция `Find`, решает линейные и нелинейные алгебраические уравнения. Отличие состоит в том, что эта функция может выдать решение, не достигнув требуемой точности итераций. Это позволяет получить приближенное решение в случае, если функция `Find` не выдает решения. Следует иметь в виду, что при использовании функции `Minerr` необходимо обязательно проверять правильность решения системы уравнений.

Функции `lsolve` и `Find` позволяют получать решения символьным методом, результатом которого может быть численное решение или решение в аналитическом виде.

8.4.1. Функция *lsolve*

Функция `lsolve` имеет вид:

```
lsolve(M,V),
```

где:

- `M` — матрица коэффициентов системы линейных уравнений;
- `V` — вектор правых частей системы уравнений.

Технология решения уравнений следующая:

- образование матрицы `M` коэффициентов системы уравнений;
- образование вектора `V` правых частей системы уравнений;
- ввод функции `lsolve`;
- получение решения путем нажатия клавиши <=>.

Решение матричным методом можно получить, не используя функцию `lsolve`. Для этого достаточно ввести выражение $M^{-1} \cdot V$ и нажать клавишу <=>.

Решение системы уравнений посредством функции `lsolve` и с помощью матричного представления можно получить, используя символьные вычисления. Для этого служит знак (→) (стрелка вправо), образуемый нажатием клавиш <Ctrl>+<.> (точка). Решение получается после нажатия клавиши <Enter>.

Приведем примеры решения системы уравнений с помощью функции `lsolve`.

Пример 8.13. Пусть необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1{,}5; \\ -x + 1{,}5y + 3z = -3; \\ 7x + 5y - 1{,}6z = 7. \end{cases}$$

Решение системы уравнений двумя способами показано на рис. 8.14.

Из рис. 8.14 видно, что при символьных вычислениях результат получен с более высокой точностью.

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1.5 & 3 \\ 7 & 5 & -1.6 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 1.5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(M, V) = \begin{pmatrix} 0.924 \\ -0.099 \\ -0.643 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(M, V) \rightarrow \begin{pmatrix} .92350230414746543779 \\ -9.8617511520737327189 \cdot 10^{-2} \\ -.64285714285714285714 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.14. Решение системы уравнений из примера 8.13

Символьные вычисления позволяют решать алгебраические уравнения, когда коэффициенты уравнений представляют собой символьные переменные.

Пример 8.14. Необходимо решить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + y + az = 1; \\ bx + y + 3z = 2; \\ cx + 5y + z = 3. \end{cases}$$

Технология решения остается прежней. Решение приведено на рис. 8.15.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ b & 1 & 3 \\ c & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(M, V) \rightarrow \begin{bmatrix} 7 \cdot \dfrac{(a-1)}{(-14 - a \cdot c - b + 3 \cdot c + 5 \cdot a \cdot b)} \\ \dfrac{(3 \cdot a \cdot b - b - 2 \cdot a \cdot c + 3 \cdot c - 7)}{(-14 - a \cdot c - b + 3 \cdot c + 5 \cdot a \cdot b)} \\ \dfrac{(c + 2 \cdot b - 7)}{(-14 - a \cdot c - b + 3 \cdot c + 5 \cdot a \cdot b)} \end{bmatrix}$$

Рис. 8.15. Решение системы уравнений из примера 8.14

При решении системы уравнений матричным способом, выражение $M^{-1} \cdot V$ выдаст то же решение, но в ином виде.

Имеют место случаи, когда функция `lsolve` не выдает решения. Приведем один из них.

Пример 8.15. Необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3,2x_3 + 3,4x_4 = 1,2; \\ 2x_1 + x_2 - 0,2x_3 - 0,4x_4 = 1,8; \\ 3x_1 + 1,5x_2 - 0,3x_3 - 0,6x_4 = 2,7; \\ -5x_1 - 10x_2 + 16x_3 - 17x_4 = 6. \end{cases}$$

Решение приведено на рис. 8.16.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3.2 & 3.4 \\ 2 & 1 & -0.2 & -0.4 \\ 3 & 1.5 & -0.3 & -0.6 \\ -5 & -10 & 16 & -17 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.8 \\ 2.7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(M,V) = \begin{pmatrix} -2.825 \times 10^{16} \\ 5.649 \times 10^{16} \\ 1.729 \times 10^{16} \\ -8.647 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$

Рис. 8.16. Решение системы уравнений примера 8.15

Решение не получено потому, что главный определитель системы равен нулю. В этом легко убедиться, вычислив определитель с помощью команды главного меню **Symbolics** | **Matrix** | **Determinant**. К сожалению, Mathcad не отказалась от ответа, а выдала ответ явно неверный. Неопытный пользователь может принять его за решение системы уравнений.

8.4.2. Функция *Find*

Функция `Find` позволяет решать системы линейных и нелинейных уравнений методом итераций. Она имеет вид:

```
Find(x,y,z, ...),
```

где `x`, `y`, `z` — искомые неизвестные.

Технология решения систем уравнений выглядит так:

- задание начальных приближений для всех неизвестных: `x:=x0`, `y:=y0`, `z:=z0`, ...;
- ввод слова `Given`, указывающего на то, что далее следует система уравнений;
- ввод системы уравнений;
- ввод функции `Find(x, y, z, ... )`;
- получение решения нажатием клавиши <=>.

Покажем технологию решения систем уравнений на примерах.

Пример 8.16. Необходимо решить систему алгебраических уравнений из примера 8.13. За начальные приближения взять: $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = -0{,}5$.

Решение приведено на рис. 8.17.

$x := 1 \qquad y := 0 \qquad z := -0.5$

Given

$2 \cdot x - 3 \cdot y + z = 1.5$

$-x + 1.5 \cdot y + 3 \cdot z = -3$

$7 \cdot x + 5 \cdot y - 1.6 \cdot z = 7$

$$\mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0.924 \\ -0.099 \\ -0.643 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.17. Решение примера 8.16

Пример 8.17. Необходимо решить следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} xy + xz + yz = -19; \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 63; \\ \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{13}{12}. \end{cases}$$

Известно, что начальными приближениями могут быть: $x_0 = -2$, $y_0 = -1{,}5$, $z_0 = 3$.

Решение приведено на рис. 8.18.

$x := -2 \qquad y := -1.5 \qquad z := 3$

Given

$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z = -19$

$x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2 = 63$

$$\frac{x}{2 \cdot y} + \frac{y}{2 \cdot x} = \frac{13}{12}$$

$$\mathrm{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Рис. 8.18. Решение системы нелинейных уравнений из примера 8.17

8.5. Варианты уравнений для индивидуальных заданий

8.5.1. Варианты уравнений для решения аналитическими методами

В табл. 8.2 приведены уравнения для самостоятельного решения и ответы. Ответы даны для случая определения только вещественных корней (случай *а*) и для случая определения всех корней (случай *б*).

Таблица 8.2. Варианты уравнений для решения аналитическими методами

№	Уравнения	Ответы
1	$x^3 - a = 0$	*а*) $x = a^{1/3}$; *б*) $x_1 = a^{1/3}$; $x_{2,3} = a^{1/3}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$
2	$x^5 + (b-a)x^4 - abx^3 + ax^2 + ax(b-a) -$ $-a^2 b = 0$	*а*) $x_1 = a$; $x_2 = -a^{1/3}$; $x_3 = b$; *б*) $x_1 = a$; $x_2 = -a^{1/3}$; $x_3 = -b$; $x_{4,5} = a^{1/3}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$
3	$x^5 + bx^4 - a^4 x - a^4 b = 0$	*а*) $x_1 = a$; $x_2 = -a$; $x_3 = -b$ ($x = 0$, $a = 0$); *б*) $x_1 = a$; $x_2 = -a$; $x_3 = -b$; $x_{4,5} = \pm ai$
4	$x^4 + 2x^3(1+a) + x^2(4a-1) -$ $-2x(1+a) - 4a = 0$	$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = -2$; $x_4 = -2a$
5	$x^5 - 3x^4 + (a - b^3)x^3 + 3(b^3 - a)x^2 -$ $-ab^3 x + 3ab^3 = 0$	*а*) $x_1 = -\sqrt{-a}$; $x_2 = \sqrt{-a}$; $x_3 = 3$; *б*) $x_1 = -\sqrt{a}$; $x_2 = \sqrt{-a}$; $x_3 = 3$; $x_{4,5} = \pm i(-b)^{3/2}$;

Таблица 8.2 *(продолжение)*

№	Уравнения	Ответы
		при $a > 0$, $b > 0$ *а)* $x = 3$; *б)* $x_1 = 3$; $x_{2,3} = \pm i\sqrt{a}$; $x_{4,5} = i(-b)^{3/2}$
6	$x^5 - ax^3 + 2x^2 - 2a = 0$	*а)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = -2^{1/3}$; *б)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$; $x_3 = -2^{1/3}$; $x_{4,5} = \frac{2^{1/3}}{2} \pm \frac{108^{1/6}}{2} i$
7	$x^7 + ax^5 - x^2 - a = 0$	*а)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$; $x_3 = 1$; *б)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$; $x_3 = 1$; $x_{4,5} = -\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \pm i\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$; $x_{6,7} = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{5}{8}}$
8	$2^x - 2(a+b) = 0$	*а)* $x = \frac{\ln(a+b)}{\ln 2} + 1$; *б)* $x_1 = \frac{\ln(a+b)}{\ln 2} + 1$; $x_{2,3} = \frac{\ln(a+b)}{\ln 2} + 1 \pm \frac{2\pi}{\ln 2} i$
9	$\ln \sin x - 2a = 0$	$x_1 = a\sin e^{2a}$; $x_{2,3} = \pm\pi - a\sin e^{2a}$

Таблица 8.2 *(продолжение)*

№	Уравнения	Ответы
10	$e^{-2x} - 2a = 0$	*а*) $x = -\dfrac{\ln 2a}{2}$; *б*) $x_1 = -\dfrac{\ln 2a}{2}$; $x_{2,3} = -\dfrac{\ln 2a}{2} \pm \pi i$
11	$\sin ax + \cos ax = 0$	$x_1 = -\dfrac{5\pi}{4a}$; $x_2 = \dfrac{3\pi}{4a}$; $x_3 = -\dfrac{\pi}{4a}$
12	$\sin ax + \operatorname{tg} ax = 0$	$x_1 = -\dfrac{3\pi}{a}$; $x_{2,3} = \pm\dfrac{\pi}{a}$
13	$e^{-ax} + e^{ax} = 0$	*а*) нет решения; *б*) $x_{1,2} = \pm\dfrac{5\pi}{2a} i$; $x_{3,4} = \pm\dfrac{3\pi}{2a} i$; $x_{5,6} = \pm\dfrac{\pi}{2a} i$
14	$e^{-ax} + e^{ax} - 1 = 0$	*а*) нет решения; *б*) $x_{1,2} = \pm\dfrac{7\pi}{3a} i$; $x_{3,4} = \pm\dfrac{5\pi}{3a} i$; $x_{5,6} = \pm\dfrac{\pi}{3a} i$
15	$e^{-ax} + e^{ax} - \ln a = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln a}{2} \pm \dfrac{\sqrt{\ln^2 a - 4}}{2}\right)}{a}$

Таблица 8.2 *(окончание)*

№	Уравнения	Ответы
16	$ae^{-x} + be^{x} = 0$	*а*) $x = \dfrac{\ln\left(-\dfrac{a}{b}\right)}{2}$; *б*) $x_1 = \dfrac{\ln\left(-\dfrac{a}{b}\right)}{2}$; $x_{2,3} = \dfrac{\ln\left(-\dfrac{a}{b}\right)}{2} \pm \pi i$
17	$a\sin x + b\cos x = 0$	$x_{1,2} = -a\tan\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi$; $x_3 = -a\tan\left(\dfrac{b}{a}\right)$

8.5.2. Варианты алгебраических и трансцендентных уравнений для решения численными методами

В табл. 8.3 приведены варианты уравнений для самостоятельного решения численными методами, а также число корней трансцендентного уравнения. Метод решения и способ проверки достоверности ответов студент выбирает самостоятельно, стремясь найти все корни.

Таблица 8.3. Варианты алгебраических и трансцендентных уравнений для самостоятельного решения

№	Уравнения		
	Алгебраические	Трансцендентные	Число корней
1	$x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 3x - 4 = 0$	$2\sin(\ln\lvert x\rvert) = 0$	6

Таблица 8.3 *(продолжение)*

№	Уравнения		
	Алгебраические	Трансцендентные	Число корней
2	$x^5 - 5x^2 + 4,5 = 0$	$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = 0$	∞
3	$x^5 - x + 0,2 = 0$	$4\exp\left(-\dfrac{1}{\lvert x\rvert}\right) - 2$	3
4	$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,5 = 0$	$\sin(\sin(x))$	∞
5	$x^{10} - 1 = 0$	$2^x - 4x = 0$	2
6	$x^8 + 2x - 1,5 = 0$	$x! + 2x - 2 = 0$	4
7	$x^4 - 2x^2 + 8x + 1 = 0$	$\ln x + (x+1)^3 = 0$	1
8	$x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0$	$\operatorname{arctg}(x-2) + x = 0$	1
9	$6x^8 - 2x^2 + 3 = 0$	$x^2 + 4\sin x - 2 = 0$	2
10	$3,5x^5 - 2,8x^3 + 7,5x - 2,5 = 0$	$x - \ln(7 - 4x) = 0$	1
11	$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$	$e^{-2x} + \dfrac{3}{x} - 1 = 0$	2
12	$1,5x^5 + 17x - 21 = 0$	$e^{-6x} + 3x^2 - 18 = 0$	2
13	$2x^4 - 3,5x^2 + 3 = 0$	$\ln(4 - 2x) + x^2 - 2 = 0$	3
14	$17x^9 - 15x^7 + 13x^5 - 11x^3 + 9x - 7 = 0$	$3^x - 9x + 1 = 0$	2
15	$x^4 + 2x^3 - 1 = 0$	$2^x + \ln 2x - 5,6 = 0$	1
16	$x^5 - 21x^2 + 55 = 0$	$2^x + e^{-x} - 5x + 1 = 0$	2

Таблица 8.3 *(окончание)*

№	Уравнения		
	Алгебраические	Трансцендентные	Число корней
17	$x^7+2x^6+3x^5+4x^4+5x^3+6x^2+$ $+7x+8=0$	$3x=e^x+1,5=0$	2
18	$8x^7-7x^6+6x^5-5x^4+4x^3-3x^2+$ $+2x-1=0$	$\frac{e^x}{2}-(x-1)^2=0$	1
19	$x^{50}-1=0$	$x+\lg x-0,5=0$	1
20	$x^7+6x^6+x^5-4x^4+x^3-2x^2+$ $+x-1=0$	$2x!-e^{-x}+5=0$	4

8.5.3. Варианты систем линейных алгебраических уравнений

В табл. 8.4 приведены варианты систем уравнений, которые нужно решить матричными методами и методом итераций. Сравнить результаты этих методов, указав их достоинства и недостатки.

> ***Примечание***
> При решении системы уравнений методом итераций преобразуйте исходную систему к виду, когда итерационный процесс сходится. Объясните результаты решения.

8.5.4. Варианты систем нелинейных алгебраических уравнений

В табл. 8.5 приведены системы нелинейных алгебраических уравнений для самостоятельного решения. В некоторых из них указаны начальные значения неизвестных, что существенно облегчает их решение.

Таблица 8.4. Варианты систем уравнения для самостоятельного решения

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases}1,5x_1 - 0,8x_2 + 4,25x_3 = 5,1;\\ 1,2x_1 + 7,18x_2 - 3,2x_3 = 4,2;\\ 0,5x_1 - 1,5x_2 + 7,1x_3 = -1,2\end{cases}$	2	$\begin{cases}6,7x_1 - 0,6x_2 + 0,83x_3 = 6,8;\\ 0,8x_1 + 1,1x_2 + 7,2x_3 = 5,2;\\ 1,2x_1 + 5,4x_2 - 0,54x_3 = -3,2\end{cases}$
3	$\begin{cases}-1,32x_1 + 2,15x_2 + 7,6x_3 = -1,4;\\ 2,62x_1 + 6,1x_2 - 4,12x_3 = 5,6;\\ 8,3x_1 - 2,84x_2 - 1,5x_3 = -6,5\end{cases}$	4	$\begin{cases}0,51x_1 - 10,2x_2 - 3,62x_3 = -2,05;\\ 3,09x_1 + 1,23x_2 - 4,64x_3 = -5,6;\\ 3,2x_1 - 2,31x_2 - 8,4x_3 = 6,1\end{cases}$
5	$\begin{cases}7,12x_1 - 6,66x_2 + 2,6x_3 = -3,1;\\ -1,76x_1 + 6,5x_2 - 0,87x_3 = 2,85;\\ 0,65x_1 + 0,87x_2 - 8,7x_3 = 5,56\end{cases}$	6	$\begin{cases}6,4x_1 - 0,73x_2 + 2,1x_3 = 3,8;\\ -1,07x_1 + 3,8x_2 - 1,5x_3 = -1,2;\\ 2,7x_1 - 3,1x_2 + 4,2x_3 = -7,5\end{cases}$
7	$\begin{cases}9,21x_1 - 1,84x_2 + 0,7x_3 = -3,2;\\ -6,17x_1 + 8,5x_2 - 2,87x_3 = -3,75;\\ 0,7x_1 + 0,87x_2 - 8,7x_3 = 2,64\end{cases}$	8	$\begin{cases}4,3x_1 - 1,2x_2 + 10,3x_3 = 4,2;\\ 0,21x_1 + 6,2x_2 + 3,54x_3 = 5,1;\\ -0,31x_1 - 0,52x_2 + 3,6x_3 = -2,1\end{cases}$
9	$\begin{cases}6,9x_1 + 2,3x_2 + 1,21x_3 = 3,1;\\ x_1 + 2,3x_2 - 3,4x_3 = -2,3;\\ 0,21x_1 - 0,43x_2 + 6,3x_3 = 3,6\end{cases}$	10	$\begin{cases}12,4x_1 - 0,56x_2 + 4,2x_3 = 6,3;\\ -0,65x_1 + 4,4x_2 + 1,5x_3 = 1,5;\\ 1,5x_1 + 2,1x_2 - 2,8x_3 = 1,7\end{cases}$

Таблица 8.4 *(окончание)*

№	Система уравнений	№	Система уравнений
11	$\begin{cases} 1,2x_1 - 1,06x_2 - 6,7x_3 = 2,12; \\ 4,2x_1 - 6,3x_2 - 0,9x_3 = -1,1; \\ 0,6x_1 + 6,8x_2 + 0,82x_3 = 0,83 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 9,7x_1 + 0,35x_2 - 1,84x_3 = 2,15; \\ 4,64x_1 - 7,1x_2 - 4,37x_3 = 1,5; \\ 0,32x_1 + 0,48x_2 - 3,3x_3 = -3,1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6,5x_1 - 2,34x_2 + 1,4x_3 = 2,8; \\ 0,5x_1 + 7,3x_2 - 2,4x_3 = -3,8; \\ 8,6x_1 + 0,34x_2 - 6,4x_3 = 0,64 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2,8x_1 + 4,3x_2 - 3,7x_3 = 5,1; \\ -0,45x_1 - 8,24x_2 + 4,8x_3 = 5,4; \\ 0,54x_1 + 2,3x_2 + 3,7x_3 = 1,54 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x_1 + 0,13x_2 - 0,67x_3 = 1,9; \\ 3,8x_1 + 1,25x_2 - 4,3x_3 = 6,4; \\ 0,38x_1 - 0,64x_2 + 3,2x_3 = 5,4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1,5x_1 - 2,6x_2 + 7x_3 = -11,2; \\ 6,6x_1 + 1,3x_2 - 1,24x_3 = 5,3; \\ 0,85x_1 - 8,4x_2 + 4,7x_3 = 1,6 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 6,2x_1 - 0,52x_2 + 2,3x_3 = -1,8; \\ -4,2x_1 + 3,4x_2 - 0,5x_3 = 0,7; \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 3,6x_3 = 3,2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 0,63x_1 - 0,54x_2 + 1,7x_3 = 3,6; \\ 0,65x_1 + 4,4x_2 + 0,15x_3 = 2,3; \\ 1,5x_1 + 0,2x_2 + 4,1x_3 = 2,8 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 8,4x_1 - 0,25x_2 + 3,1x_3 = -5,7; \\ -0,3x_1 + 6,1x_2 - 1,54x_3 = 3,3; \\ -6,8x_1 + 1,2x_2 - 7x_3 = 4,5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 12x_1 + 4,2x_2 - 0,8x_3 = -5,4; \\ -4,1x_1 + 2,2x_2 - 0,16x_3 = 1,6; \\ -1,6x_1 - 4,3x_2 + 8,4x_3 = 12,2 \end{cases}$

Таблица 8.5. Варианты систем нелинейных алгебраических уравнений

№	Система уравнений	Начальные приближения	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} \sin(x_1 + x_2) - 1,2x_1 = 0,1; \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$	$x_1 = 0,74;$ $x_2 = 0,67$	2	$\begin{cases} \sin(x_2 + 1) - x_1 = 1,2; \\ 2x_2 + \cos x_1 = 2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \mathrm{tg}(x_1x_2 + 0,2) = x_1^2; \\ 0,6x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{cases}$	$x_1 = 0,88;$ $x_2 = 0,52$	4	$\begin{cases} \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0,5; \\ x_2 - \cos x_1 = 3 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin x_1 + 2\sin x_2 = 1; \\ 2\sin 3x_1 + 3\sin 3x_2 = 0,3 \end{cases}$	$x_1 = 1,08;$ $x_2 = 0,06$	6	$\begin{cases} x_1^2x_2 - x_2 - 9 = 0; \\ x_1x_2 - x_1^2 + 10 = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \mathrm{tg}(x_1 - x_2) - 4x_1 = 0; \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{cases}$	$x_1 = -0,5;$ $x_2 = 0,6$	8	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 0; \\ \sin(x_1 + x_2) - 2,4x + 3,2 = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1^4 + x_2^2 - 3 = 0; \\ x_1^3 + x_2^3 - 4 = 0 \end{cases}$	$x_1 = 0,95;$ $x_2 = 1,4$	10	$\begin{cases} 2x_1x_2^2 - 4x_2 - 7,5 = 0; \\ x_1^2 - 3x_1x_2 + 4,5 = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin x_1 - x_2 = 1,3; \\ \cos x_2 - x_1 = -0,82 \end{cases}$	$x_1 = 1,8;$ $x_2 = -0,35$	12	$\begin{cases} \sin x + 2\cos x - 0,8 = 0; \\ x_1x_2^2 + 3x_1 - 4,5 = 0 \end{cases}$

Таблица 8.5 *(окончание)*

№	Система уравнений	Начальные приближения	№	Система уравнений
13	$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 + 3 = 0; \\ x_1^3 - x_2^3 - 6x_2 = 2 \end{cases}$	$x_1 = 0,52;$ $x_2 = -0,37$	14	$\begin{cases} x_1^2 x_2^2 - x_2^2 - 18,75 = 0; \\ x_1 + x_2^2 - 8,25 = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_2 + e^{x_1 - x_2} = 0; \\ x_1 + e^{x_1 + x_2} = 0 \end{cases}$	$x_1 = -0,7;$ $x_2 = -0,35$	16	$\begin{cases} \operatorname{tg}(x_1 - x_2) - 4x_1 = 0; \\ x_1^2 + 3x_2^3 - 4 = 0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} x_1^2 x_2 - 8x_1 + 5,5 = 0; \\ x_1 x_2 + 3x_2 - 10 = 0 \end{cases}$	—	18	$\begin{cases} x_1^2 \sin x_2 + x_2^2 \sin x_1 + 1 = 0; \\ 2x_1 + e^{(x_1 + x_2)} - 4 = 0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} e^{x_1} + 2x_2 \ln x_1 - 3 = 0; \\ x_1^2 x_2 - 3x_1 + 5,4 = 0 \end{cases}$	—	20	$\begin{cases} \sin x_1 + 3,5 \sin x_2 - 1 = 0; \\ 2 \sin 3x + 3 \sin 2x_2 - 0,4 = 0 \end{cases}$

Примечание

В уравнениях с нечетными номерами указаны значения начальных приближений (кроме примеров 17 и 19). В уравнениях с четными номерами начальные приближения должны быть определены пользователем. Так как система уравнений второго порядка, то области начальных приближений легко найти графическим способом.

8.6. Решение дифференциальных уравнений

Существуют две группы методов решения дифференциальных уравнений: аналитические и численные. Аналитические методы могут быть точными и приближенными. Точные методы существуют для решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Нелинейные дифференциальные уравнения в большинстве случаев точных решений не имеют. Возможности точных аналитических методов ограничены даже в случае линейных дифференциальных уравнений.

В *гл. 5* был рассмотрен один из наиболее эффективных аналитических методов, основанный на использовании преобразования Лапласа.

В настоящем разделе приводятся приближенные аналитические и численные методы.

8.6.1. Приближенные аналитические методы решения дифференциальных уравнений

Формулировка задачи

Дано дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$f^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (8.5)$$

и начальные условия:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y_0'; \\ \quad \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8.6}$$

Необходимо найти функцию $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставленной в исходное уравнение, обратит его в тождество, и одновременно будут выполняться начальные условия. Эта задача в математике называется задачей Коши.

Рассмотрим некоторые приближенные аналитические методы решения задачи Коши.

Метод последовательного дифференцирования

Решение дифференциального уравнения n-го порядка в виде (8.5) при начальных условиях (8.6) можно разложить в ряд Тейлора, который и является приближенным решением исходного дифференциального уравнения.

Ряд Тейлора функции $y = \varphi(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} y(x) = y(x_0) &+ \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ &+ \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \ldots + \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots \end{aligned} \tag{8.7}$$

Из выражения (8.7) видно, что n его первых членов $y(x_0)$, $y'(x_0)$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)$ известны, т. к. они являются начальными условиями решения задачи. Это означает, что искомое приближенное решение дифференциального уравнения может быть записано в виде степенного ряда степени ($n - 1$) непосредственно (не решая уравнения) по известным начальным условиям.

Для определения остальных членов степенного ряда (8.7) необходимо знать производные $y^{(n)}(x_0)$, $y^{(n+1)}(x_0)$, ... , $y^{(k)}(x_0)$, ...

Производная $y^{(n)}(x_0)$ вычисляется из исходного дифференциального уравнения (8.5), если подставить в его правую часть значения $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ из начальных условий. Производные $y^{(n+1)}(x_0), \ldots, y^{(k)}(x_0), \ldots$ можно вычислить путем последовательного дифференцирования исходного уравнения (8.5) и вычисления правых частей производных в точках $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(n)} = y_0^{(n)}, \ldots, y^{(k)} = y_0^{(k)}, \ldots$ Число членов степенного ряда (8.7) определяется из условия требуемой точностью решения дифференциального уравнения.

Метод неопределенных коэффициентов

Сущность метода покажем на примере решения дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \tag{8.8}$$

при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Пусть следующий степенной ряд является решением дифференциального уравнения (8.5):

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \tag{8.9}$$

Тогда неизвестными являются коэффициенты c_n. Для их определения разложим в степенной ряд функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n; \\ Q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n; \\ R(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Продифференцируем дважды искомое решение (8.9):

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}; \tag{8.11}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}. \tag{8.12}$$

Подставим теперь (8.9), (8.10), (8.11), (8.12) в исходное уравнение (8.8). В результате получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \tag{8.13}$$

Для определения коэффициентов c_n достаточно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x и решить систему алгебраических уравнений. Коэффициенты c_0 и c_1 при этом определяются из начальных условий. В выражении (8.13) находятся бесконечные степенные ряды. При решении практических задач ограничиваются определенным числом членов рядов из условий точности результатов.

Метод последовательных приближений

Приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка можно найти по следующей рекуррентной формуле:

$$y_n(x) = y_0(x) + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx, \tag{8.14}$$

где:

- $y_0(x)$ — начальное приближение;
- $f(x, y_{n-1})$ — правая часть исходного дифференциального уравнения, полученная на $(n-1)$-м приближении.

В качестве начального приближения можно взять любую функцию, достаточно близкую к точному решению. В качестве начального приближения можно взять частичную сумму степенного ряда или начальное условие $y_0(x)$.

8.6.2. Численные методы решения дифференциальных уравнений

Метод Эйлера

Численное решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ при начальных условиях $y(x_0) = y_0$ по методу Эйлера находится в виде табл. 8.6.

Таблица 8.6. Таблица решения дифференциального уравнения

x_0	x_1	x_2	...	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_n

Значения x_0, y_0 являются начальными условиями решения уравнения. Первая строка таблицы при известном x_0 и шаге h вычисляется по соотношениям: $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ... , $x_n = x_{n-1} + h$. Значения функции y_1, y_2, ... , y_n вычисляются по рекуррентной формуле Эйлера.

Разложим функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением исходного уравнения, в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Вычислим значение функции в точке $x_1 = x_0 + h$:

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x_1 - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1 - x_0)^n.$$

Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим:

$$y(x_1) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x_1 - x_0).$$

Так как $x_1 - x_0 = h$, а $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, то $y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$. Принимая x_1, y_1 за начальные условия и приводя те же рассуждения, что при вычислении функции $y(x_1)$, получим:

$$y(x_2) = y(x_1) + hf(x_1, y_1);$$

$$y(x_3) = y(x_2) + hf(x_2, y_2);$$

$$\ldots$$

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Из этих выражений видно, что значения y_1, y_2, ..., y_n из табл. 8.6 могут быть вычислены по следующей рекуррентной формуле Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \tag{8.15}$$

Из вывода формулы (8.15) следует, что метод Эйлера основан на линейном разложении функции $f(x, y)$ на участке h с последующей экстраполяцией решения за пределы этого участка. Ошибка метода возникает за счет отбрасывания членов ряда Тейлора и имеет порядок h^2.

Метод Эйлера позволяет решать системы уравнений и дифференциальные уравнения высокого порядка.

Усовершенствованные методы Эйлера

Метод Эйлера дает большие погрешности, возрастающие от итерации к итерации. Усовершенствованные методы Эйлера дают решение с большей точностью. Все они относятся к так называемым методам прогноза и коррекции.

Метод Эйлера—Коши

По этому методу дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' = f(x, y)$ при начальных условиях $y(x_0) = y_0$ решается по следующей рекуррентной формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}, \tag{8.16}$$

где y_{i+1} вычисляется по методу Эйлера, т. е. $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$.

Погрешность метода порядка h^3.

Усовершенствованный метод Эйлера

По этому методу дифференциальное уравнение первого порядка решается по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right), \tag{8.17}$$

где $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$, $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i,\ y_i)$.

Погрешность этого метода такая же, как и усовершенствованного метода Эйлера—Коши.

Усовершенствованный метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой результатов

По этому методу дифференциальное уравнение первого порядка решается по формуле:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + h\frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8.18}$$

В формуле (8.18) $y_{i+1}^{(k-1)}$ является начальным приближением итерационного процесса и определяется по формуле Эйлера, т. е. $y_{i+1}^{0} = y_i + hf(x_i, y_i)$. Признаком окончания итерационного процесса является условие:

$$\left| y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)} \right| \le \varepsilon. \tag{8.19}$$

Из выражения (8.18) и условия (8.19) видно, что идея метода состоит в следующем. По формуле Эйлера (8.15) находится решение на (i + 1)-м шаге, которое является на этом шаге первым приближением. Это приближение используется для образования итерационного процесса на основе формулы усовершенствованного метода Эйлера-Коши. Признаком окончания итерационного процесса является условие (8.19). Погрешность метода порядка h^3 на каждом шаге итераций.

Метод Рунге—Кутты

Метод Рунге—Кутты обладает более высокой точностью, чем методы Эйлера за счет уменьшения методических ошибок. Идея метода состоит в следующем.

По методу Эйлера решение дифференциального уравнения первого порядка определяется из соотношения: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = hf(x_i, y_i) = hy'(x_i, y_i)$. Тогда приращение Δy_i может быть найдено путем интегрирования:

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x, y)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx,$$

или окончательно:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx.$$

Вычислим теперь интеграл по методу прямоугольников:

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)f(x_i, y_i) = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Из полученного выражения видно, что вычисление интеграла по методу прямоугольников приводит к формуле Эйлера.

Вычислим интеграл по формуле трапеций:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

Из выражения видно, что оно совпадает с расчетной формулой усовершенствованного метода Эйлера—Коши.

Для получения более точного решения дифференциального уравнения следует воспользоваться более точными методами вычисления интеграла.

В методе Рунге—Кутты искомый интеграл представляется в виде следующей конечной суммы:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx = y_i + \sum_{i=1}^{q} p_i K_i(h), \qquad (8.20)$$

где:

- p_i — некоторые числа, зависящие от q;
- $K_i(h)$ — функции, зависящие от вида подынтегральной функции $f(x,y)$ и шага интегрирования h; они вычисляются по следующим формулам:

$$K_1(h) = hf(x,y);$$

$$K_2(h) = hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_{21}K_1(h));$$

$$K_3(h) = hf(x+\alpha_3 h, y+\beta_{31}K_1(h)+\beta_{32}K_2(h));$$

$$\ldots$$

$$K_q(h) = hf(x+\alpha_q h, y+\beta_{q1}K_1(h)+\ldots+\beta_{q,q-1}K_{q-1}(h)).$$

Значения p_i, α, β получают из соображений высокой точности вычислений.

Формулы Рунге—Кутты третьего порядка ($q = 3$) имеют следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3);$$

$$K_1 = hf(x_i, y_i);$$

$$K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2});$$

$$K_3 = hf(x_i + h, y_i + K_1 + 2K_2).$$

Наиболее часто используется метод Рунге—Кутты четвертого порядка, для которого расчетные формулы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
& y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4); \\
& K_1 = hf(x_i, y_i); \\
& K_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}); \\
& K_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}); \\
& K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3).
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

Формулы Рунге—Кутты имеют погрешности порядка h^{q+1}. Погрешность метода Рунге—Кутты четвертого порядка имеет порядок h^5.

8.7. Компьютерные технологии решения дифференциальных уравнений

Система Mathcad позволяет решать дифференциальные уравнения двумя принципиально различными способами: с помощью встроенных функций и непосредственно по формулам численных методов (Эйлера и Рунге—Кутты). При этом откликами являются решения в табличной и графической формах. Рассмотрим эти методы.

8.7.1. Компьютерные технологии решения дифференциального уравнения *n*-го порядка

Постановка задачи

Дано дифференциальное уравнение n-го порядка и начальные условия его решения. Уравнение может быть линейным и нелинейным. Необходимо определить функцию $y = \varphi(x)$ и все ее производные, удовлетворяющие уравнению и начальным условиям. Решение нужно получить в виде таблиц и графиков функции и производных.

Выбор метода решения уравнения

С целью получения высокой точности решение уравнения выполним методом Рунге—Кутты такого порядка, который обеспечивается системой Mathcad.

Выбор встроенной функции решения дифференциального уравнения

Для решения линейного или нелинейного дифференциального уравнения *n*-го порядка в Mathcad имеется встроенная функция `odesolve`, имеющая вид:

```
odesolve(x,b,n),
```

где:

- `x` — аргумент искомой функции $y(x)$;
- `b` — конец интервала интегрирования;
- `n` — число шагов интегрирования с постоянным шагом.

Технология решения дифференциального уравнения выглядит следующим образом:

- ввод слова `Given`, указывающего на то, что далее следует решаемое дифференциальное уравнение и его начальные условия;
- ввод дифференциального уравнения в произвольном виде, например:

  $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2\cdot x\cdot\frac{dy(x)}{dx}+1,2\cdot y(x)=x\cdot e^{-x}$$ или

  $$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2\cdot x\cdot\frac{dy(x)}{dx}+1,2\cdot y(x)-x\cdot e^{-x}=0$$ или

  $$y''(x)+2\cdot x\cdot y'(x)+1,2\cdot y(x)=x\cdot e^{-x}$$ и т. д.

  (для вывода на экран знака (`'`) (штрих) используется комбинация клавиш <Ctrl>+<F7>, повторное нажатие приведет к отображению (`"`));
- ввод начальных условий: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$;

- ввод встроенной функции `odesolve(x,b,n)` с присвоением ей уникального имени и с численными значениями `b` и `n`;
- получение решения нажатием клавиши <Enter>.

Решение будет вычислено и находится в памяти компьютера. Теперь его можно вывести на экран в виде таблицы. Для этого необходимо:

- присвоить переменной `x` значения, соответствующие желаемому диапазону изменения функции $y(x)$;
- ввести имя, присвоенное функции `odesolve`;
- нажать клавишу <=> для получения решения в виде таблицы.

Получить график функции $y(x)$ и ее производных можно обычным для Mathcad способом *(см. гл. 7)*.

Покажем технологию решения дифференциальных уравнений на примере.

Пример 8.18. Необходимо решить дифференциальное уравнение:

$$y''(x) + x^2 y'(x) + xy(x) = x\,\mathrm{sh}(x)$$

при начальных условиях $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Решение представить в виде таблицы и графика функции $y(x)$.

Решение показано на рис. 8.19.

На рис. 8.20 показано решение уравнения из примера 8.18 при ином его представлении и графическом определении функции $y(x)$ и ее производных.

8.7.2. Решение систем дифференциальных уравнений

Решение систем дифференциальных уравнений в Mathcad возможно с помощью следующих встроенных функций: `rkfixed`, `Bulstoer`, `Rkadapt`, `rkadapt`.

Функция *rkfixed*

Функция `rkfixed` имеет вид:

```
rkfixed(y,x1,x2,n,F),
```

Given

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x^2\cdot\frac{d}{dx}y(x) + x\cdot y(x) = x\cdot\sinh(x)$$

$y(0) = 1$ $\qquad$ $y'(0) = 0$

y := odesolve(x,10,200)

x := 0,0.5..5

y(x) =

1
0.985
0.933
0.968
1.26
1.85
2.764
4.131
6.186
9.298
14.038

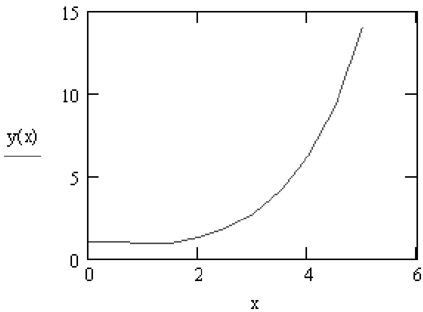


Рис. 8.19. Решение дифференциального уравнения из примера 8.18

Given

$$y''(x) + x^2\cdot y'(x) + x\cdot y(x) - x\cdot\sinh(x) = 0$$

$y(0) = 1$ $\qquad$ $y'(0) = 0$

y := odesolve(x,10,200)

x := 0,0.5..5

y(x) =

1
0.985
0.933
0.968
1.26
1.85
2.764
4.131
6.186
9.298
14.038

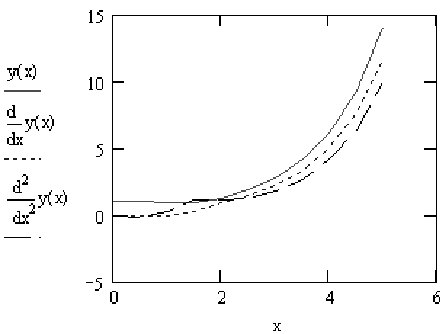


Рис. 8.20. Второй вариант решения дифференциального уравнения из примера 8.18

где:

- `y` — вектор начальных условий;
- `x1`, `x2` — интервал значений аргумента искомой функции $y(x)$;
- `n` — количество точек (шагов) решения уравнения;
- `F` — вектор правых частей системы дифференциальных уравнений, каждое из которых разрешено относительно производной.

Откликом этой функции является матрица решений системы дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутты с постоянным шагом.

Технология решения системы дифференциальных уравнений следующая:

- присвоение численных значений всем символьным переменным, если такие имеются;
- ввод вектора начальных условий с присвоением ему имени `y` (или любого другого);
- ввод вектора правых частей системы дифференциальных уравнений с присвоением ему имени `F` (или любого другого);
- ввод функции `rkfixed(y,x1,x2,n,F)` с присвоением ей уникального имени, например `Y`, и с численными значениями переменных `x1`, `x2`, `n`;
- получение решения путем нажатия клавиши <Enter>.

Решение вычислено и находится в памяти компьютера. Теперь его можно вывести на экран в виде таблицы или графика.

Для вывода решения в виде таблицы необходимо:

- присвоить переменной `n` значения, соответствующие числу точек решения дифференциального уравнения в интервале `x1, x2`;
- ввести имя, присвоенное функции `rkfixed(y,x1,x2,n,F)`;
- нажать клавишу <=> для получения решения в виде таблицы.

Получить решение в виде графика легко, если воспользоваться методикой, изложенной в *гл. 7*.

Приведем примеры решения системы дифференциальных уравнений с помощью функции `rkfixed` по описанной технологии.

Пример 8.19. Функционирование двухканальной системы массового обслуживания с отказами описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -a \cdot p_0 + m \cdot p_1(t); \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = a \cdot p_0 - (a+m) \cdot p_1(t) + 2 \cdot m \cdot p_2(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = a \cdot p_1(t) - 2 \cdot m \cdot p_2(t), \end{cases}$$

где:

- $p_0(t)$ — вероятность пребывания системы в момент времени t в состоянии, свободном от обслуживания заявок;
- $p_1(t)$ — вероятность того, что система в момент времени t обслуживает одну заявку;
- $p_2(t)$ — вероятность того, что в момент времени t система обслуживает две заявки и очередной заявке будет отказано в обслуживании;
- a — интенсивность потока заявок, час$^{-1}$;
- m — интенсивность обслуживания заявки, час$^{-1}$.

Необходимо определить вероятность того, что в произвольный момент времени t заявка будет принята на обслуживание, если $a = 2$, $m = 3$.

Начальными условиями решения задачи являются: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = 0$.

Решение выполним в соответствии с описанной ранее технологией. Его результаты приведены на рис. 8.21.

Из таблицы и графиков на рис. 8.21 видно, что длительность переходных процессов в системе массового обслуживания мала (примерно 1,5 часа), а вероятность того, что заявка будет принята на обслуживание в произвольный момент времени t, равна:

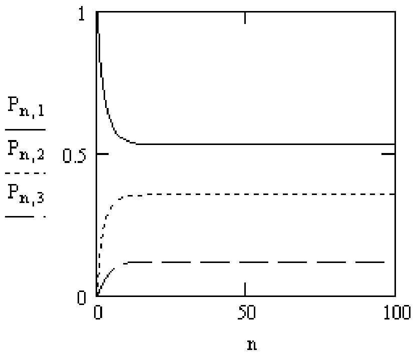
$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = 0{,}531 + 0{,}352 = 0{,}883\,.$$

$a := 2 \qquad m := 3 \qquad p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F(t,p) := \begin{bmatrix} -a \cdot p_0 + m \cdot p_1 \\ a \cdot p_0 - (a+m) \cdot p_1 + 2 \cdot m \cdot p_2 \\ a \cdot p_1 - 2 \cdot m \cdot p_2 \end{bmatrix}$$

$P := \mathrm{rkfixed}(p, 0, 100, 1000, F)$

$n := 0..100$



P =

	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	0.1	0.842	0.145	0.014
2	0.2	0.741	0.223	0.036
3	0.3	0.674	0.268	0.058
4	0.4	0.629	0.296	0.075
5	0.5	0.598	0.315	0.087
6	0.6	0.577	0.327	0.096
7	0.7	0.563	0.335	0.103
8	0.8	0.552	0.34	0.107
9	0.9	0.545	0.344	0.11
10	1	0.541	0.347	0.113
11	1.1	0.537	0.349	0.114
12	1.2	0.535	0.35	0.115
13	1.3	0.533	0.351	0.116
14	1.4	0.532	0.352	0.116
15	1.5	0.531	0.352	0.117

Рис. 8.21. Вероятности состояний системы массового обслуживания

Приведем теперь пример решения системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Пример 8.20. Необходимо решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0(t)}{dt} = -a \cdot y_0(t) + b \cdot y_1^2(t); \\ \dfrac{dy_1(t)}{dt} = c \cdot y_0^2(t) - d \cdot y_1(t). \end{cases}$$

Начальными условиями являются: $y_0(0) = 1$, $y_1(0) = 0$.

Переменные имеют значения: $a = 3$, $b = 2$, $c = 1{,}2$, $d = 0{,}6$.

Решение приведено на рис. 8.22.

$a := 3 \quad b := 2 \quad c := 1.2 \quad d := 0.6 \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} -a \cdot y_0 + b \cdot (y_1)^2 \\ c \cdot (y_0)^2 - d \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

Z := rkfixed(y,0,100,1000,D)

n := 0..10

Z =

	0	1	2
0	0	1	0
1	0.1	0.741	0.087
2	0.2	0.551	0.13
3	0.3	0.412	0.15
4	0.4	0.309	0.156
5	0.5	0.233	0.155
6	0.6	0.177	0.151
7	0.7	0.135	0.145
8	0.8	0.103	0.138
9	0.9	0.08	0.131
10	1	0.062	0.124
11	1.1	0.048	0.117
12	1.2	0.038	0.111
13	1.3	0.03	0.104
14	1.4	0.024	0.098
15	1.5	0.019	0.093

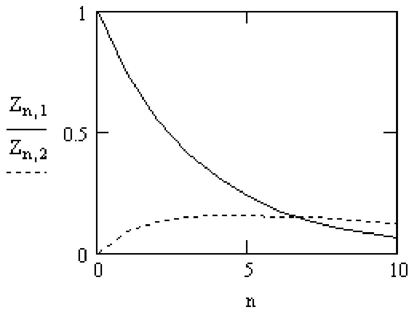


Рис. 8.22. Результаты решения примера 8.20

Функция *Bulstoer*

Функция `Bulstoer` имеет вид:

```
Bulstoer(y,x1,x2,n,F).
```

Аргументы имеют тот же смысл, что и в функции `rkfixed`. Систему дифференциальных уравнений она решает численным методом Булирша—Штера. Ее рекомендуется применять в случае, если решения дифференциальных уравнений имеют вид гладких функций [4].

Пример 8.21. Необходимо с помощью функции `Bulstoer` решить систему уравнений из примера 8.20. Сравнить результаты решения.

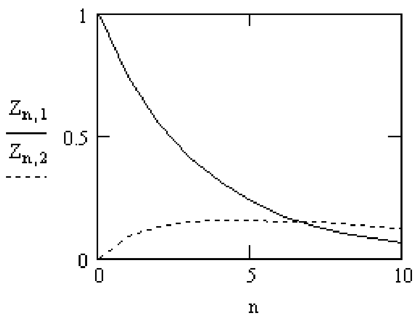
Решение задачи показано на рис. 8.23.

$a := 3 \quad b := 2 \quad c := 1.2 \quad d := 0.6 \quad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} -a \cdot y_0 + b \cdot (y_1)^2 \\ c \cdot (y_0)^2 - d \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

$Z := \mathrm{Bulstoer}(y, 0, 100, 1000, D)$

$n := 0..10$



Z =

	0	1	2
0	0	1	0
1	0.1	0.741	0.087
2	0.2	0.551	0.13
3	0.3	0.412	0.15
4	0.4	0.309	0.156
5	0.5	0.233	0.155
6	0.6	0.177	0.151
7	0.7	0.135	0.145
8	0.8	0.103	0.138
9	0.9	0.08	0.131
10	1	0.062	0.124
11	1.1	0.048	0.117
12	1.2	0.038	0.111
13	1.3	0.03	0.104
14	1.4	0.024	0.098
15	1.5	0.019	0.093

Рис. 8.23. Решение примера 8.20 с помощью функции `Bulstoer`

Из таблицы и графиков видно, что результаты решения совпадают с полученными в примере 8.20.

Функция *Rkadapt*

Функция `Rkadapt` имеет вид:

`Rkadapt(y,x1,x2,n,F).`

Переменные функции имеют тот же смысл, что и в функции `rkfixed`. Отличие состоит в том, что ее откликом является матрица решений системы дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутты с переменным шагом. Технология решения дифференциальных уравнений остается прежней.

На рис. 8.24 показано решение системы дифференциальных уравнений из примера 8.20 с помощью функции `Rkadapt`.

$a := 3 \qquad b := 2 \qquad c := 1.2 \qquad d := 0.6 \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} -a \cdot y_0 + b \cdot (y_1)^2 \\ c \cdot (y_0)^2 - d \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

$Z := \mathrm{Rkadapt}(y, 0, 100, 1000, D)$

$n := 0..10$

Z =

	0	1	2
0	0	1	0
1	0.1	0.741	0.087
2	0.2	0.551	0.13
3	0.3	0.412	0.15
4	0.4	0.309	0.156
5	0.5	0.233	0.155
6	0.6	0.177	0.151
7	0.7	0.135	0.145
8	0.8	0.103	0.138
9	0.9	0.08	0.131
10	1	0.062	0.124
11	1.1	0.048	0.117
12	1.2	0.038	0.111
13	1.3	0.03	0.104
14	1.4	0.024	0.098
15	1.5	0.019	0.093

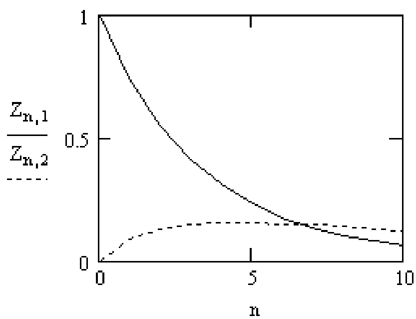


Рис. 8.24. Решение примера 8.20 с помощью функции `Rkadapt`

Из таблиц и графиков видно, что результаты решения совпадают с результатами, полученными в примере 8.20 при решении системы дифференциальных уравнений с помощью функции rkfixed.

Функция *rkadapt*

Функция rkadapt имеет вид:

rkadapt(y,x1,x2,Δ,n,F,k,s),

где:

- y — вектор начальных условий;
- x1, x2 — интервал значений аргумента искомой функции;
- Δ — погрешность решения задачи;
- n — число шагов на интервале x1, x2;
- F — вектор правых частей системы дифференциальных уравнений;
- k — максимальное число промежуточных точек решения;
- s — минимально допустимый интервал между точками.

Функция выдает решение системы дифференциальных уравнений с переменным шагом. Из описания ее аргументов видно, что функция позволяет пользователю задать точность вычислений, а также требует задания параметров промежуточных вычислений (k, s). При этом технология решения практически не отличается от предыдущих.

Система Mathcad позволяет решать специальные виды дифференциальных уравнений, такие как жесткие системы, системы Пуассона и Лапласа и некоторые другие. Эти случаи в студенческой практике встречаются достаточно редко. С ними можно ознакомиться по литературным источникам, например [4].

ГЛАВА 9

Вычисление интегралов

Операция интегрирования в научных исследованиях и на практике встречается очень часто. При этом приходится вычислять интегралы неопределенные, определенные, кратные и несобственные.

Система Mathcad успешно справляется с этой задачей при достаточно простой компьютерной технологии определения интеграла.

Пользователь, путем нажатия комбинации клавиш или щелкая на соответствующей кнопке панели инструментов **Calculus**, вызывает шаблон интеграла, заполняет пустые маркеры ввода подынтегральной функцией, постоянной и пределами интегрирования и получает решение, нажимая клавишу вывода решения или щелкая мышью вне области интеграла.

Система Mathcad может оказать существенную помощь студенту в следующих случаях:

- при изучении интегрирования в курсе "Высшая математика";
- при технических расчетах в процессе курсового и дипломного проектирования;
- при изучении программирования.

В настоящей главе описаны компьютерные технологии вычисления неопределенных, определенных, кратных и несобственных интегралов. Приведены примеры на каждый из методов.

В конце главы приведены задачи с ответами для индивидуальных заданий студентам в процессе изучения компьютерных технологий решения математических задач.

9.1. Вычисление неопределенного интеграла

Технология вычисления неопределенного интеграла в системе Mathcad состоит из последовательности выполнения описанных далее операций. При этом возможны три основные способа.

Способ 1. *Использование клавиш <Shift>+<F9>*

Последовательность операций следующая:

- вывод на экран шаблона интеграла путем одновременного нажатия клавиш <Ctrl>+<I> или щелчком мыши на кнопке со значком интеграла на панели инструментов **Calculus**, на экране появится шаблон интеграла с пустыми маркерами ввода для функции и переменной интегрирования;
- заполнение свободных маркеров подынтегральной функцией и переменной интегрирования, на экране отобразится выражение интеграла в общепринятом в математике виде;
- выделение всего выражения интеграла угловым курсором путем щелчка мыши в области интеграла;
- нажатие комбинации клавиш <Shift>+<F9>, на экране появится значение неопределенного интеграла.

Способ 2. *Использование знака символьных операций*

Последовательность операций следующая:

- выполнение первых двух пунктов способа 1;
- вызов знака символьных операций <→> (стрелка вправо) путем нажатия совокупности клавиш <Ctrl>+<.> (точка), на экране после выражения интеграла появится стрелка символьных операций;

- щелчок левой кнопкой мыши вне выражения интеграла, на экране отобразится значение неопределенного интеграла.

Способ 3. *Использование пункта меню* ***Symbolic***

Последовательность операций следующая:

- ввод подынтегрального выражения;
- выделение двойным щелчком мыши переменной интегрирования;
- вызов с помощью мыши пункта меню **Symbolic | Variable | Integrate**, на экране появится значение неопределенного интеграла.

Рассмотрим технологию вычисления неопределенного интеграла описанными способами на примерах.

Пример 9.1. Необходимо найти неопределенный интеграл $\int \frac{1}{(a+bx)^c} dx$ тремя способами.

Решение приведено на рис. 9.1.

Mathcad позволяет вычислять неопределенные интегралы достаточно сложных функций. Если же интеграл неберущийся, то программа повторяет исходное выражение интеграла.

Полученное системой выражение неопределенного интеграла во многих случаях не упрощается. В этом недостаток системы, который объясняется ее недостаточно высокой интеллектуальностью.

В табл. 9.1 приведены примеры вычисления неопределенных интегралов системой Mathcad и для сравнения даны их значения, указанные в [13].

Из примеров видно, что система Mathcad при вычислении неопределенных интегралов не производит упрощений конечных выражений, например: вынос за скобки (пример 2), сокращение дробей (пример 1), преобразование логарифмов (пример 3), упрощение тригонометрических функций (пример 4).

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare$$

$$\int \frac{1}{(a+b\cdot x)^{c}}\, dx$$

$$\left[\frac{-a}{b\cdot(c-1)} - \frac{1}{(c-1)}\cdot x\right]\cdot(a+b\cdot x)^{-c}$$

а

$$\int \blacksquare \, d\blacksquare$$

$$\int \frac{1}{(a+b\cdot x)^{c}}\, dx \to \left[\frac{-a}{b\cdot(c-1)} - \frac{1}{(c-1)}\cdot x\right]\cdot(a+b\cdot x)^{-c}$$

б

$$\frac{1}{(a+b\cdot x)^{c}}$$

$$\left[\frac{-a}{b\cdot(c-1)} - \frac{1}{(c-1)}\cdot x\right]\cdot(a+b\cdot x)^{-c}$$

в

Рис. 9.1. Вычисление интеграла способом 1 (*а*), способом 2 (*б*) и способом 3 (*в*)

К сожалению, многие неопределенные интегралы, даже не очень сложные, система не вычисляет (пример 5). Этот недостаток присущ и другим системам символьной математики.

Таблица 9.1. Значения неопределенных интегралов

№	Интеграл	Значение интеграла по справочникам	Значение интеграла, вычисленное Mathcad
1	$\int \frac{1}{\sqrt{(a+bx)^3}}dx$	$-\frac{2}{b\sqrt{a+bx}}$	$-2\frac{a+bx}{b\sqrt{(a+bx)^3}}$
2	$\int (\ln x + xe^{-x})dx$	$x\ln x - e^{-x}(x+1) - x$	$x\ln x - x - xe^{-x} - e^{-x}$
3	$\int \frac{x}{1-x^4}dx$	$-\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$	$-\frac{1}{4}\ln(-1+x) - \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{4}\ln(1+x^2)$
4	$\int \frac{\cos 3x}{\cos^2 x}dx$	$4\sin x - 3\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$	$4\sin x - 3\ln(\sec x + \tan x)$
5	$\int \frac{\sin 2x}{\sin^n x}dx$	$-\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2}(x)}$	Ответа нет

9.2. Вычисление определенных интегралов

9.2.1. Методы и алгоритмы вычисления интегралов

Численное интегрирование необходимо в следующих случаях:

- первообразная не выражается через элементарные функции;
- аналитическое выражение интеграла слишком сложное;
- подынтегральная функция задана в табличной форме или в форме матрицы.

При вычислениях интегралов численными методами подынтегральную функцию целесообразно представлять в наиболее простом виде. Это может ускорить вычисления. Упрощение подынтегральной функции можно выполнить, воспользовавшись функциями **Simplify** и **Factor**. Имеют место случаи, когда система до упрощения не может вычислить неопределенный интеграл, а после упрощения легко его определяет.

Существует много способов численного интегрирования. Во всех таких способах вычисление осуществляется по приближенным формулам, называемым квадратурными. Приведем некоторые из них.

- *Формулы прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\{ \begin{matrix} h\sum\limits_{k=0}^{n-1} y_k \\ h\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \end{matrix} \right\}, \qquad (9.1)$$

  где:

  - h — шаг интегрирования;
  - y_k — значение подынтегральной функции при аргументе x_k, $k = 0, 1, 2, \dots, n$;

- $n = \dfrac{b-a}{h}$ — число частей, на которые разбивается область интегрирования (a, b).

Одна из формул дает значение интеграла с избытком, другая — с недостатком. Какая из них выдает решение с избытком, зависит от вида подынтегральной функции.

♦ *Формула трапеций*:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right), \tag{9.2}$$

где y_0 — значение подынтегральной функции при $x = a$; y_n — значение подынтегральной функции при $x = b$.

♦ *Формула парабол (Симпсона)*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + ... + 4y_{n-1} + y_n). \tag{9.3}$$

В этой формуле ординаты с нечетными индексами умножаются на 4, с четными — на 2. Предполагается, что n — число четное. При нечетном n формула имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + ... + 2y_{n-1} + y_n).$$

Крайние ординаты имеют коэффициент, равный 1.

Существует много других квадратурных формул вычисления интегралов: Котеса, Чебышева, Гаусса и др.

Вычисление интеграла с помощью квадратурных формул требует знания числа n и области интегрирования (a, b). Значение n выбирается из условий требуемой точности вычисления интеграла. Зависимости погрешности ε от n в общем случае не существует.

Поэтому для обеспечения точности вычисления интеграла используется следующий алгоритм.

Определенный интеграл вычисляется дважды: с произвольным шагом h и $h/2$. Если при этом разность интегралов мала, то вычислительный процесс заканчивается, а значение интеграла считается то, которое вычислено с шагом $h/2$, в противном случае шаг уменьшается вдвое и сравниваются значения интеграла с шагом $h/2$ и $h/4$ и т. д.

9.2.2. Компьютерные технологии вычисления интегралов в системе Mathcad

Система Mathcad позволяет вычислять определенные интегралы в аналитическом и численном виде. Их технологии идентичны и отличаются лишь способом вывода результатов интегрирования.

Технология вычисления определенного интеграла состоит в выполнении следующих действий:

- вывод на экран шаблона определенного интеграла путем одновременного нажатия клавиш <Shift>+<&> или щелчка на кнопке определенного интеграла панели инструментов **Calculus**;
- ввод в пустые маркеры подынтегральной функции, переменной интегрирования и значений пределов интегрирования;
- исполнение команды вычисления интеграла. Система Mathcad допускает использование трех следующих способов вызова команды вычисления интеграла: клавиша <=> (равно), совокупность клавиш <Shift>+<F9> и вызов знака символьных вычислений <→> (стрелка вправо) путем нажатия <Ctrl>+<.>.

Покажем технологию вычисления определенного интеграла на примерах.

Пример 9.2. Необходимо вычислить $\int_1^{10} xe^{-2x}dx$.

Процедуры вычисления показаны на рис. 9.2.

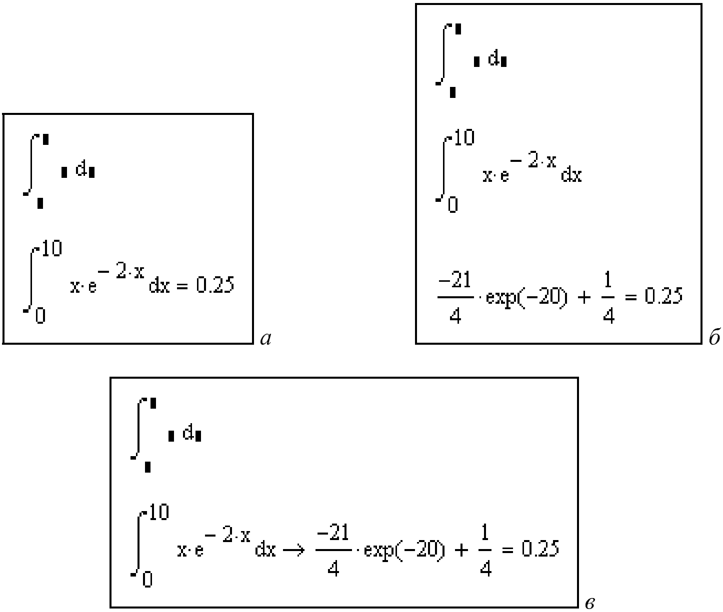


Рис. 9.2. Три способа вычисления определенного интеграла

В первом случае (клавиша <=>) ответ получен в виде числа, представленного в естественной форме. Во втором и третьем случаях ответ получен в виде точного выражения. Для получения ответа в численном виде необходимо дополнительно нажать клавишу <=>.

Во втором способе для получения ответа используются клавиши <Shift>+<F9>. При первом нажатии клавиши на экране появляется исходное выражение интеграла, при втором — выводится решение в виде точного ответа. Для получения решения в виде числа следует нажать клавишу <=>.

В третьем способе используется знак символьных вычислений <→>. После его ввода для получения решения необходимо щелкнуть левой кнопкой мыши вне выражения интеграла. Получаем точное значение интеграла. Для получения численного ответа необходимо нажать клавишу <=>.

Из сравнения способов видим, что первый является наиболее простым.

9.3. Вычисление кратных интегралов

Кратные интегралы в системе Mathcad можно вычислять следующими двумя способами.

Способ 1. *Последовательное вычисление n-кратного интеграла, используя результаты предыдущих решений*

Например, пусть необходимо вычислить двойной интеграл $\iint x dx dx$. Вычислим сначала интеграл $\int x dx$, получим: $\int x dx = \frac{x^2}{2}$.

Теперь вычислим $\int \frac{x^2}{2} dx$. Получим: $\int \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}$. Ответ получен двукратным вычислением интеграла.

Способ 2. *Вычисление n-кратного интеграла без вычисления промежуточных значений*

Технология этого способа состоит в выполнении следующих действий:

- щелкаем *n* раз по кнопке интеграла на панели инструментов или нажимаем *n* раз комбинацию клавиш <Ctrl>+<I> (при вычислении неопределенного интеграла) или <Shift>+<&> (при вычислении определенного интеграла), на экране отобразится шаблон *n*-кратного интеграла;
- заполняем пустые маркеры подынтегральной функцией, переменной и пределами интегрирования, на экране будет конечное выражение интеграла;
- получаем решение, нажимая клавишу <=> при вычислении определенного интеграла или клавиши <Ctrl>+<.> для вызова знака символьных вычислений с последующим щелчком левой кнопкой мыши вне выражения интеграла.

Процедуры вычисления тройного интеграла от различных функций показаны на рис. 9.3.

1. $$\int\int\int x\cdot\ln(x)\,dx\,dx\,dx \rightarrow \frac{1}{24}\cdot x^{4}\cdot\ln(x) - \frac{13}{288}\cdot x^{4}$$

2. $$\int\int\int (x + z - y)\,dx\,dy\,dz \rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^{2}\cdot y\cdot z + \frac{1}{2}\cdot z^{2}\cdot x\cdot y - \frac{1}{2}\cdot y^{2}\cdot x\cdot z$$

3. $$\int_{0}^{5}\int_{1}^{2}\int_{0}^{10} \frac{(x-1)}{x+1}\,dx\,dx\,dx = 26.021$$

4. $$\int_{0}^{12}\int_{1}^{7}\int_{1}^{5} \left(2\cdot\frac{x}{y} + \frac{y}{2\cdot x} + 2\cdot x\cdot y\cdot z\right)dx\,dy\,dz = 4.226\times 10^{4}$$

5. $$\int\int_{0}^{10} x\,dx\,dy \rightarrow 50\cdot y$$

Рис. 9.3. Примеры вычисления кратных интегралов

В первой строке вычисляется неопределенный трехкратный интеграл одной переменной x функции $w = x\ln x$. Получено точное значение интеграла.

Во второй строке вычисляется неопределенный трехкратный интеграл функции $w = x - y + z$ трех переменных.

В третьей строке вычисляется определенный трехкратный интеграл одной переменной функции $w = \dfrac{x-1}{x+1}$.

В четвертой строке вычисляется определенный трехкратный интеграл функции трех переменных $w = 2\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{2x} + 2xyz$.

В пятой строке приведен способ вычисления интеграла от функции $w = x$, когда интеграл является определенным по переменной x и неопределенным по переменной y.

9.4. Вычисление несобственных интегралов

Технология вычисления несобственных интегралов имеет ряд особенностей, связанных с тем, что такие интегралы могут не иметь конечных значений (быть расходящимися). При этом один и тот же несобственный интеграл может быть сходящимся и расходящимся в зависимости от значения его аргументов.

Например, $\int_0^\infty e^{-ax}dx$ будет расходящимся при $a < 0$ и сходящимся при $a > 0$. Mathcad, как и любая другая система символьной математики, не выдаст решения, если ей не указать, что $a > 0$. В данном случае это можно реализовать, если переменную a представить в виде $|a|$.

Технология определения несобственных интегралов состоит в выполнении следующих процедур:

- щелчок по кнопке интеграла панели инструментов **Calculus** или одновременное нажатие клавиш <Shift>+<&>, на экране появится шаблон определенного интеграла;
- ввод в пустые маркеры интеграла подынтегральной функции, переменной интегрирования и пределов;
- вызов знака <→> символьных вычислений;
- щелчок левой кнопкой мыши вне области интеграла, на экране отобразится ответ в виде точного решения;
- нажатие клавиши <=> для получения численного решения.

Знак (∞) (бесконечность) можно ввести либо щелкнув левой кнопкой мыши на кнопке со знаком (∞) панели инструментов **Calculus**, либо одновременным нажатием комбинации клавиш <Ctrl>+<Shift>+<Z>.

Примеры вычисления несобственных интегралов приведены на рис. 9.4.

$$\int_0^{\infty} x^3 \cdot \exp(-|n| \cdot x)\, dx \to \frac{6}{(|n|)^4}$$

$$\int_0^{\infty} x^5 \cdot \exp\left(-|n| \cdot x^2\right) dx \to \frac{1}{(|n|)^3}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(3 - 2 \cdot x) \cdot (x - 1)}\, dx \to \infty$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh(x)}\, dx \to \frac{1}{4} \cdot \pi^2$$

Рис. 9.4. Примеры вычисления несобственных интегралов

9.5. Примеры вычислений интегралов

Далее в табл. 9.2—9.4 приводятся задачи на интегрирование с помощью системы Mathcad. Эти задачи будут способствовать изучению компьютерных технологий вычисления интегралов. Кроме того, они весьма оригинальны и вызывают восхищение своими ответами. Не следует огорчаться, если Mathcad выдает иное решение, чем в ответе. Вероятнее всего, они идентичны. Попробуйте преобразовать полученный ответ с помощью команд **Expand** и **Factor** меню **Symbolics**.

Проверить идентичность ответов можно, если подставить одно из численных значений переменных в подынтегральное выражение и вычислить значение интеграла, сравнив его с численным значением ответа, приведенного в таблице интегралов.

Если ответом является аналитическое выражение, то его производная должна быть равна подынтегральному выражению. Это еще один способ проверки правильности вычисления интегралов.

Возможны случаи, когда система вообще не выдает решения, а оно существует. Это доказывает лишь то, что компьютер не может быть более интеллектуален, чем человек, его программа не совершенна.

Таблица 9.2. Таблица неопределенных интегралов

№	Интеграл	Ответ
1	$\int \frac{x}{1+x^2}dx$	$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
2	$\int \frac{x}{1+x^4}dx$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$
3	$\int \frac{1}{1+x^2}dx$	$\operatorname{arctg}(x)$
4	$\int \frac{x}{1-x^4}dx$	$-\frac{1}{4}\ln\frac{-1+x^2}{1+x^2}$
5	$\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$	$\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$	$-\frac{2}{b\sqrt{a+bx}}$
7	$\int \frac{xdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}$	$-\frac{2(2a+bx)}{(4ac-b^2)\sqrt{a+bx+cx^2}}$
8	$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$	$\frac{2(b^2x^2-4abx-8a^2)}{3b^2\sqrt{a+bx}}$
9	$\int \frac{x^4}{\left(\sqrt{a+cx^2}\right)^7}$	$\frac{1}{5}-\frac{x^5}{a\left(\sqrt{a+cx^2}\right)^5}$
10	$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+cx^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+cx^2}-\sqrt{a}}{x}$

Таблица 9.2 *(продолжение)*

№	Интеграл	Ответ
11	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}(x)\cdot\mathrm{ch}(x)}$	$\ln \mathrm{th}(x)$
12	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}^2 x}$	$\frac{4}{1-e^{4x}}$
13	$\int \frac{\mathrm{ch}(x)dx}{\mathrm{ch}(x)\cdot\mathrm{sh}(x)}$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}e^{-2x}$
14	$\int xe^{ax}\mathrm{sh}(ax)dx$	$\frac{e^{2ax}}{4a}\left(x-\frac{1}{2a}\right)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{8a^2}$
15	$\int \sin(x)\cos^2(x)$	$-\frac{\cos^3(x)}{3}$
16	$\int \sin^4(x)\cos(x)dx$	$\frac{\sin^5(x)}{5}$
17	$\int \frac{1}{\sin(x)}dx$	$\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
18	$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$	$x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$
19	$\int \frac{1}{x^2(x-1)}dx$	$\ln(x-1)-\ln(x)+\frac{1}{x}$
20	$\int \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$	$\frac{x}{\cos x}-\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$
21	$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}$	$-\frac{1}{2\sin^2 x}+\ln\left(\mathrm{tg}(x)\right)$
22	$\int x\cos(x^2)dx$	$\frac{\sin x^2}{2}$

Таблица 9.2 *(окончание)*

№	Интеграл	Ответ
23	$\int \frac{\sin^2(x)dx}{\cos^4(x)}$	$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3(x)$
24	$\int a^x e^{-x} dx$	$\frac{e^{-x}a^x}{\ln a - 1} - \frac{1}{\ln a - 1}$

Таблица 9.3. Таблица определенных интегралов

№	Интеграл	Ответ
1	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{4}{3}$
2	$\int_0^1 \frac{1}{(1-ax)^n} dx$	$\frac{(1-a)^{1-n} - 1}{a(n-1)}$
3	$\int_0^1 x^{n-1}(x+1)dx$	$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$
4	$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{x+1}\right) dx$	$\ln 2 - \frac{1}{2}$
5	$\int_0^1 \frac{x^5}{1+x} dx$	$\frac{47}{60} - \ln 2$
6	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pi}{4}$
7	$\int_0^1 x \sin x dx$	$\sin(1) - \cos(1) = 0.301$

Таблица 9.3 *(окончание)*

№	Интеграл	Ответ
8	$\int_0^1 x\cos x dx$	$\cos(1)-\sin(1)-1$
9	$\int_0^1 x^n \ln x dx$	$-\frac{1}{(n+1)^2}$
10	$\int_0^1 \frac{x^3 \ln x}{1+x} dx$	$-0{,}0386$

Таблица 9.4. Таблица несобственных интегралов

№	Интеграл	Ответ
1	$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$	$\frac{3\pi}{16a^5}$
2	$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2+b^2)^3}$	$\frac{3\pi}{16(a^2+b^2)^{5/2}}$
3	$\int_{-1}^\infty \frac{e^{-qx}dx}{\sqrt{1+x}}$	$e^q\sqrt{\frac{\pi}{q}}, \quad q>0$
4	$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+0{,}1)^2}$	$\frac{5\sqrt{10}\pi}{2}$
5	$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+x+0{,}1)^2}$	$7{,}787$
6	$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^2}$	$\frac{1}{a}$

Таблица 9.4 *(продолжение)*

№	Интеграл	Ответ
7	$\int\limits_0^\infty \frac{x}{(x+a)^3}dx$	$\frac{1}{2a}$
8	$\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^3}dx$	$\frac{\ln a - 1}{2a^2}$
9	$\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(x+a)^3}dx$	$\frac{\ln a + 1}{2a}$
10	$\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(x+a)^5}dx$	$\frac{2\ln a - 1}{24a^3}$
11	$\int\limits_0^\infty e^{-q^2x^2}dx$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2q}, \quad q > 0$
12	$\int\limits_0^\infty \frac{(1+x)^{p-1}}{(x+a)^{p+1}}dx$	$\frac{1-a^p}{p(a-1)}, \quad a > 0$
13	$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}}dx$	$\sqrt{\frac{\pi}{q}}, \quad q > 0$
14	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(\beta + e^x)^2}dx$	$\frac{1}{\beta}$
15	$\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1}dx$	$\frac{\pi^2}{6} - 1$
16	$\int\limits_0^\infty \frac{xe^{-3x}}{e^{-x}+1}dx$	$\frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4}$
17	$\int\limits_0^\infty \frac{x(1-e^{-x})}{1+e^{-x}}dx$	$\frac{\pi^2}{6} - 1$

Таблица 9.4 *(окончание)*

№	Интеграл	Ответ
\	$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{a^2e^x-b^2e^{-x}}$	$\frac{\pi^2}{4ab}$
19	$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^2}$	$\frac{2}{3a}$
20	$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{e^x-1}}$	$2\pi\ln 2$
21	$\int\limits_0^{\infty}\frac{xe^{-x}dx}{\sqrt{e^x-1}}$	$\frac{\pi}{2}(2\ln 2-1)$
22	$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{e^x+e^{-x}-1}$	1,17195
23	$\int\limits_0^{\infty}xe^{-x}\sqrt{1-e^{-x}}dx$	$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-\ln 2\right)$
24	$\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sinh(x)}$	$\frac{\pi^2}{4}$

ГЛАВА 10

Решение задач интерполяции

10.1. Виды и этапы компьютерных технологий интерполяции

Интерполяцией называется представление функции $y = f(x)$, заданной аналитически или в виде таблицы, функцией $y = \varphi(x)$, которая идентична исходной в некоторой области аргумента. Интерполяция совместно с теорией подобия и теорией размерностей является научной основой моделирования.

График и таблица сами по себе не могут быть моделью объекта или явления. Только математическая функция (формула) может быть моделью изучаемого объекта или явления.

Но не только в моделировании используется интерполяция. Она необходима при планировании и статистической обработке эксперимента, при замене сложной аналитической функции более простой в нужном диапазоне изменения аргумента.

Основными этапами компьютерных технологий интерполяции являются:

- выбор вида функции интерполяции;
- определение коэффициентов функции интерполяции;
- определение адекватности функции интерполяции.

Реализация этих этапов определяется выбранным методом интерполяции, типом применения встроенной функции и формой выходного документа.

Система Mathcad позволяет реализовать различные методы и технологии интерполяции. Все они рассматриваются далее в этой главе.

Существуют два основных вида интерполяции: точная в узлах и приближенная в узлах.

Интерполяцией, точной в узлах, называется такая интерполяция, результатом которой является функция $y = \varphi(x)$, которая в узлах интерполяции совпадает с функцией $y = f(x)$. Такая интерполяция показана на рис. 10.1.

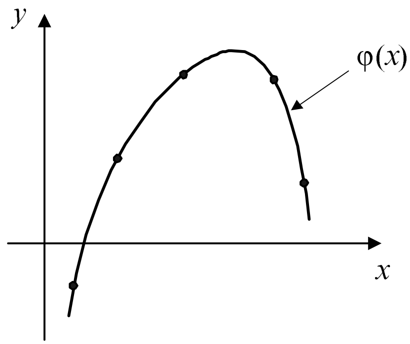


Рис. 10.1. Интерполяция, точная в узлах

Интерполяция, точная в узлах, применяется главным образом в тех случаях, когда требуется сложную математическую функцию заменить более простой в узком диапазоне значений аргумента.

Ее можно применить также в том случае, когда требуется найти математическую модель объекта, характеристики которого получены экспериментально с высокой точностью.

Интерполяцией, приближенной в узлах, называется такая интерполяция, при которой значения функции $y = \varphi(x)$ не совпадают в узлах интерполяции со значениями исходной функции $y = f(x)$.

Такая интерполяция применяется для сглаживания неточностей исходных данных. В математике она называется *аппроксимацией*. Ее геометрический смысл показан на рис. 10.2.

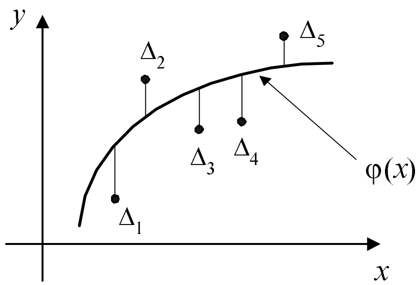


Рис. 10.2. Интерполяция, приближенная в узлах

На рис. 10.2 приняты следующие обозначения:

- $\varphi(x)$ — эмпирическая функция;
- значения функции, полученные экспериментально, обозначены жирными точками на графике;
- Δ_i — уклонение (невязка) — разность в i-м узле интерполяции между $\varphi(x_i)$ и y_i.

Функция интерполяции $y = \varphi(x)$ находится на основании критериев близости эмпирической функции $\varphi(x)$ и исходной, полученной экспериментальным или иным путем.

Такими критериями могут быть:

- алгебраическая сумма уклонений равна нулю:

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 0;$$

- сумма квадратов уклонений минимальна:

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \min;$$

♦ среднее значение уклонений минимально:

$$\Delta_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}{n} = \min .$$

Компьютерные технологии решения задач интерполяции определяются видом критерия близости эмпирической и исходной функций, в частности методикой оценки погрешностей.

10.1.1. Выбор вида функции интерполяции

Выбор вида функции интерполяции является наиболее важным этапом интерполяции, т. к. функция $\varphi(x)$ определяет математическую модель изучаемого объекта или явления.

Существуют следующие, применяемые в практических расчетах, способы выбора вида функции $\varphi(x)$:

♦ графо-аналитический метод;

♦ метод линеаризации нелинейных функций;

♦ метод табличных разностей;

♦ обращение к программам автоматизации выбора функции $\varphi(x)$.

Рассмотрим эти способы.

Способ 1. *Графоаналитический метод*

Функция $y = f(x)$ представляется в виде графика. График сравнивается с графиками типичных математических функций и на основании их сравнения выбирается подходящая. Далее приводятся часто используемые функции и их графики.

♦ *Степенная функция* $y = ax^b$.

  График функции показан на рис. 10.3.

♦ *Логарифмическая функция* $y = a + b\ln x$.

  График функции показан на рис. 10.4.

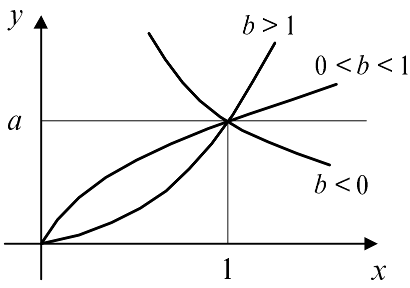


Рис. 10.3. Степенная функция $y = ax^b$

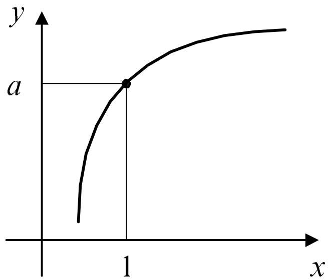


Рис. 10.4. Логарифмическая функция $y = a + b\ln x$

- *Дробно-линейная функция* $y = \dfrac{x}{a + bx}$.

  График функции показан на рис. 10.5.

- *Показательная функция* $y = ab^x$.

  График функции показан на рис. 10.6.

Способ 2. *Линеаризация нелинейных функций*

Линеаризация нелинейных функций осуществляется путем представления их в иной системе координат методом замены переменных x и y. Покажем способы линеаризации на примерах рассмотренных ранее функций.

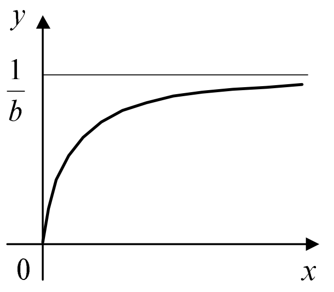


Рис. 10.5. Дробно-линейная функция $y = \dfrac{x}{a + bx}$

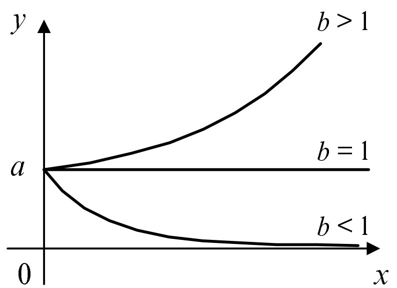


Рис. 10.6. Показательная функция $y = ab^x$

- *Степенная функция* $y = ax^b$.

  Представим функцию в виде: $\ln y = \ln a + b \ln x$. Тогда введением новых переменных $Y = \ln y$, $X = \ln x$ получим линейную функцию $Y = \ln a + bX$.

- *Логарифмическая функция* $y = a + b \ln x$.

  Выравнивание осуществляется заменой переменных $Y = y$, $X = \ln x$. После замены переменных получим: $Y = a + bX$.

- *Дробно-линейная функция* $y = \dfrac{x}{a + bx}$.

  Представим функцию в виде: $\dfrac{x}{y} = a + bx$. Введя новые переменные $Y = \dfrac{x}{y}$, $X = x$ получим линейную функцию $Y = a + bX$.

- *Показательная функция* $y = ab^x$.

  Прологарифмируем показательную функцию: $\ln y = \ln a + x \ln b$. Заменой переменных $Y = \ln y$, $X = x$ получим линейную функцию $Y = \ln a + X \ln b$.

Способ 3. *Анализ табличных разностей*

Этот способ позволяет выбрать степень многочлена при полиномиальной интерполяции. Если n-е табличные разности функции $y = f(x)$ одинаковы, то степень многочлена будет не выше n.

Рассмотрим этот способ на примере.

Пример 10.1. Предположим, что функция интерполяции является многочленом и представлена в виде табл. 10.1.

Таблица 10.1. Таблица функции $f(x)$

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2,2	6,5	12,8	21,1	31,4	43,7	58

В табл. 10.2 приведены значения табличных разностей.

Из табл. 10.2 видно, что вторые табличные разности постоянны. Это значит, что интерполяционный полином должен быть не выше второй степени, т. е. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

В результате решения задачи интерполяции получим $y = x^2 + 1{,}3x - 0{,}1$.

Таблица 10.2. Значения табличных разностей

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2,2	6,5	12,8	21,1	31,4	43,7	58
$\Delta^{(1)}$	4,3	6,3	8,3	10,3	12,3	14,3	
$\Delta^{(2)}$	2	2	2	2	2		

Способ 4. *Использование специальных программ автоматизации интерполяции*

Существуют универсальные программные средства, позволяющие выбрать функцию интерполяции, если исходная функция представлена в табличной форме. Такими программными средствами являются: SIMPLE FORMULA, TableCurve, Curve Expert. Эти программы выдают более тысячи различных функций с указанием их погрешностей. Их описания и примеры использования приведены в [14].

10.1.2. Определение коэффициентов функции интерполяции

Коэффициенты функции $\varphi(x)$ определяются многими способами. Выбор способа зависит от вида функции $\varphi(x)$ (линейная, нелинейная, полиномиальная), требуемой точности интерполяции, возможностей используемой универсальной математической системы.

Система Mathcad позволяет решать задачу интерполяции многими способами, которые изложены далее. При этом она имеет следующие особенности:

- при использовании некоторых методов откликом является не искомая функция, а ее численные значения для заданных значений аргументов;
- результатом решения задачи интерполяции является значение коэффициентов функции $\varphi(x)$, а не ее аналитическое выражение.

Эти особенности системы можно отнести к ее недостаткам.

10.1.3. Определение адекватности функции интерполяции

Адекватность полученного решения определяется величиной погрешности функции $\varphi(x)$. За критерий близости функций наиболее часто принимаются значения абсолютной ε и относительной δ среднеквадратических погрешностей, вычисляемых по формулам:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}}; \tag{10.1}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{y_{\min}} \cdot 100\% .$$

В формулах приняты обозначения:

- $\Delta_i = f(x_i) - \varphi(x_i)$ — разность между исходной функцией $f(x_i)$ и функцией интерполяции $\varphi(x_i)$;
- n — число аргументов функции $f(x)$;
- $y_{\min}$ — минимальное значение функции $f(x)$.

Решение адекватно, если $\delta \le \delta_{\text{доп}}$, где $\delta_{\text{доп}}$ — допустимая погрешность.

Следует иметь в виду, что не всегда полученная в результате моделирования функция $y = \varphi(x)$ является моделью исследуемого объекта или явления, если даже выполняется условие $\delta \le \delta_{\text{доп}}$. Это будет справедливо только в том случае, если функция $y = f(x)$ получена с высокой точностью.

10.2. Компьютерные технологии решения задач интерполяции в системе Mathcad

10.2.1. Интерполяция, точная в узлах. Универсальный метод

Сущность метода состоит в следующем. Выбирается вид функции $y = \varphi(x)$, как и при любом методе интерполяции. Составляется система алгебраических уравнений, число которых равно числу неизвестных функции $\varphi(x)$. Узлы интерполяции выбираются таким образом, чтобы охватить весь диапазон аргументов исходной функции $f(x)$.

Результатом решения системы уравнений в Mathcad является совокупность неизвестных функции $\varphi(x)$. Покажем методику интерполяции, точной в узлах, на примерах.

Пример 10.2. Зависимость температуры t кипения нитробензола от давления P приведена в табл. 10.3.

Таблица 10.3. Зависимость температуры кипения нитробензола от давления

P, мм рт. ст.	10	20	40	60	100	200	400	760
t, °C	84,6	99,3	115,4	125,8	139,9	161,2	185,8	210,6

Необходимо найти математическую модель кипения бензола. Воспользуемся описанной ранее технологией.

Выбор вида функции интерполяции

Воспользуемся графоаналитическим способом. Построим по данным таблицы функцию $t = f(P)$ и по ее виду подберем вид функции $y = \varphi(x)$.

Процедура построения графика и сам график приведены на рис. 10.7.

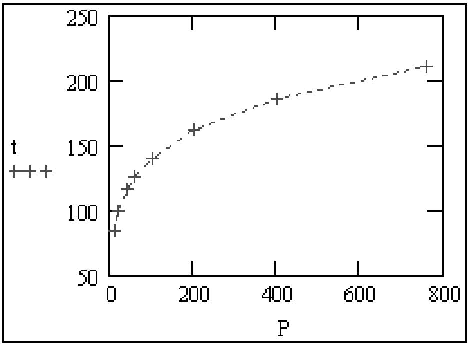


Рис. 10.7. График функции, соответствующий табл. 10.3

Из графика видно, что функция возрастающая, особенностей не имеет. Ее можно представить в виде полинома второй степени, т. е. $t = a + bP + cP^2$.

Определение коэффициентов функции интерполяции

Mathcad имеет две функции решения системы линейных уравнений: `lsolve` и `Find`. Воспользуемся функцией `lsolve` *(см. гл. 8)* и определим неизвестные *a*, *b* и *c* функции интерполяции $\varphi(P) = a + bP + cP^2$.

Выберем координаты следующих трех точек функции $t = f(P)$: (20; 99,3), (200; 161,2), (760; 210,6) и составим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a + b \cdot 20 + c \cdot 20^2 = 99,3; \\ a + b \cdot 200 + c \cdot 200^2 = 161,2; \\ a + b \cdot 760 + c \cdot 760^2 = 210,6. \end{cases}$$

Решение этой системы линейных уравнений с помощью функции `lsolve` имеет вид, показанный на рис. 10.8.

Коэффициенты *a*, *b*, *c* функции найдены.

Сама функция имеет вид:

$$t = 91,04 + 0,42P - 3,455 \cdot 10^{-4} P^2 .$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 20 & 20^2 \\ 1 & 200 & 200^2 \\ 1 & 760 & 760^2 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 99.3 \\ 161.2 \\ 210.6 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{lsolve}(M, V) = \begin{pmatrix} 91.04 \\ 0.42 \\ -3.455 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Рис. 10.8. Решение системы уравнений с помощью функции `lsolve`

Проверка адекватности решения задачи

Покажем методику, используя три следующих способа:

- *Табулирование функции*

  Технология табулирования функции достаточно подробно описана в *гл. 3*. Приведем лишь ее результаты. В табл. 10.4 приведены исходные данные и результаты табулирования.

  Из табл. 10.4 видно, что решение системы уравнений выполняется верно: функции $t = f(P)$ и $t_1 = f(P)$ в узлах интерполяции P = 20; 200; 760 совпадают. Однако при всех других значениях P имеются невязки. Для определения погрешностей интерполяции необходимо вычислить среднеквадратические ошибки — абсолютную ε и относительную δ.

Таблица 10.4. Результаты табулирования функции $t = f(P)$

P, мм рт. ст.	10	20	40	60	100	200	400	760
t, °C	84,6	99,3	115,4	125,8	139,9	161,2	185,8	210,6
t_1, °C	95,2	99,3	107,3	115	129,6	161,2	203,8	210,7

- *Визуализация вычислений*

  На рис. 10.9 приведены графики функций $t = f(P)$ и $t_1 = f(P)$.

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \\ 200 \\ 400 \\ 760 \end{pmatrix} \qquad t = \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix} \qquad t1 = \begin{pmatrix} 95.2 \\ 99.3 \\ 107.3 \\ 115 \\ 129.6 \\ 161.2 \\ 203.8 \\ 210.7 \end{pmatrix}$$

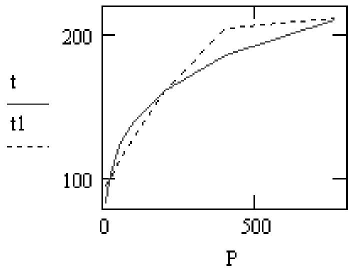


Рис. 10.9. Графики функций из примера 10.1

Из рис. 10.9 видно, что графики функций близки друг другу. Однако это не дает основания считать, что полученная функция является математической моделью кипения нитробензола.

♦ *Определение погрешностей*

Абсолютную ε и максимальную относительную погрешности вычислим по формулам:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}}; \quad \delta = \frac{\varepsilon}{t_{\min}} \cdot 100\% .$$

В нашем случае $\Delta_i = t_{1i} - t_i$. Тогда в Mathcad вычисление ε будет выглядеть так (рис. 10.10).

$D := t_1 - t$

$Z := D \cdot D$

$Z = 724.71$

$\varepsilon := \sqrt{\frac{Z}{8}} \qquad \varepsilon = 9.518$

$$D = \begin{pmatrix} 10.6 \\ 0 \\ -8.1 \\ -10.8 \\ -10.3 \\ 0 \\ 18 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Рис. 10.10. Определение абсолютной погрешности ε

Вычислим максимальную относительную погрешность (в процентах) (рис. 10.11).

$$\varepsilon := 9.518$$

$$\delta := \frac{\varepsilon}{95.2} \cdot 100 \qquad \delta = 9.998$$

Рис. 10.11. Определение относительной погрешности δ

Таким образом, максимальная относительная погрешность интерполяции составляет 10 %. Сравнительно большая относительная погрешность объясняется либо неточностью исходных данных, либо неудачно выбранной функцией интерполяции.

Пример 10.3. Данные эксперимента приведены в табл. 10.5.

Необходимо найти математическую модель исследуемого объекта путем интерполяции экспериментальных данных.

Таблица 10.5. Данные эксперимента

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,4	3,13	4,15	4,87	5,42	5,88	6,26	6,6	6,89	7,156

Выбор вида функции интерполяции

График функции $y = f(x)$, построенный по данным табл. 10.5, приведен на рис. 10.12.

Из рис. 10.12 видно, что функция похожа на логарифмическую: $y = a + b\ln x$ (см. рис. 10.4).

Определение коэффициентов функции интерполяции

Составим систему нелинейных уравнений. Выберем следующие два узла интерполяции: $x_1 = 3$, $x_2 = 8$. Тогда система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a + b\ln 3 = 4{,}15; \\ a + b\ln 8 = 6{,}6. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов a и b воспользуемся функцией `Find` *(см. гл. 8)*. За начальное приближение выберем $a = 1$, $b = 3$. Тогда решение будет иметь вид, показанный на рис. 10.13.

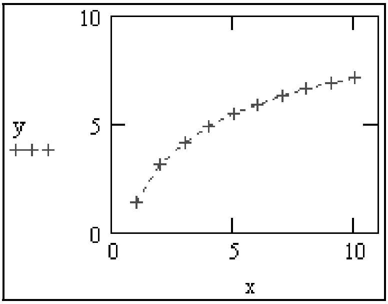


Рис. 10.12. График функции, соответствующий данным табл. 10.5

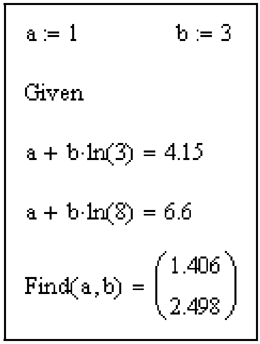


Рис. 10.13. Вычисление коэффициентов функции интерполяции

Округлим результаты до одной значащей цифры после запятой. Тогда функция интерполяции будет иметь вид:

$$\varphi(x) = 1{,}4 + 2{,}5\ln x.$$

Оценка адекватности модели

Выполним табулирование функции интерполяции для всего диапазона аргумента x. В результате получим значения функции, приведенные в табл. 10.6.

В таблице y — исходные данные функции $y = f(x)$, $\varphi(x)$ — функция интерполяции.

Таблица 10.6. Результаты табулирования функции $y = 1{,}4 + 2{,}5 \ln x$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,4	3,13	4,15	4,87	5,42	5,88	6,26	6,6	6,89	7,156
$\varphi(x)$	1,4	3,133	4,147	4,866	5,424	5,879	6,265	6,599	6,893	7,156

Из сравнения данных табл. 10.6 видно, что функция интерполяции $y = 1{,}4 + 2{,}5\ln x$ является математической моделью объекта.

10.2.2. Кусочно-линейная интерполяция

Кусочно-линейная интерполяция реализуется в Mathcad с помощью функции `linterp`, которая имеет вид:

```
linterp(Vx,Vy,x),
```

где:

- `Vx` — вектор значений аргумента функции (узлов интерполяции);
- `Vy` — вектор значений функции $y = f(x)$ в узлах интерполяции;
- `x` — значения аргумента, для которых вычисляются значения функции интерполяции.

Аргумент `x` может быть вектором.

Технология кусочно-линейной интерполяции состоит в выполнении следующих процедур:

- образование вектора аргумента `Vx`;
- образование вектора функции `Vy` при значениях вектора `Vx`;
- ввод значений аргументов `x`, для которых необходимо вычислить значения функции интерполяции;
- ввод функции `linterp(Vx,Vy,x)`;
- получение решения нажатием клавиши <=> (равно).

Покажем технологию интерполяции на примере.

Пример 10.4. В табл. 10.3 приведены данные зависимости температуры кипения нитробензола от давления. Необходимо найти значения температуры кипения нитробензола от давления при значении давления $P = 30;\ 50;\ 70;\ 300;\ 500$ мм рт. ст., отсутствующих в таблице.

Решение показано на рис. 10.14.

$$P := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \\ 200 \\ 400 \\ 760 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix} \quad t1 := \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 70 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{linterp}(P, t, t1) = \begin{pmatrix} 107.35 \\ 120.6 \\ 129.325 \\ 173.5 \\ 192.689 \end{pmatrix}$$

Рис. 10.14. Решение к примеру 10.4

Функция `linterp` не позволяет получить формулу. Такова особенность кусочно-линейной интерполяции.

10.2.3. Сплайн-интерполяция

Высокая точность интерполяции может быть достигнута путем интерполяции функции $y = f(x)$ множеством полиномов невысокого порядка. Такие полиномы называются сплайнами. Сплайны могут быть второго, третьего, четвертого порядков. В системе Mathcad реализована интерполяция кубическими сплайнами с помощью функции:

```
interp(Vs,Vx,Vy,x),
```

где:

- `Vx`, `Vy` — векторы значений аргумента и функции;
- `Vs := cspline(Vx,Vy)`;
- `x` — значение аргумента.

Функция `interp` может быть представлена в таком виде:

```
interp(cspline(Vx,Vy),Vx,Vy,x).
```

Технологию сплайн-интерполяции покажем на примере.

Пример 10.5. Необходимо решить задачу сплайн-интерполяции для данных из примера 10.2 и сравнить результаты интерполяции, полученные классическим методом, требующим решения системы уравнений, и методом сплайн-интерполяции.

Решение приведено на рис. 10.15.

$$P := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \\ 200 \\ 400 \\ 760 \end{pmatrix} \qquad t := \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix} \qquad Vs := \mathrm{cspline}(P,t)$$

$$t1 := P \qquad t2 := \mathrm{interp}(Vs,P,t,t1) \qquad t2 = \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix}$$

Рис. 10.15. Решение к примеру 10.5

Результаты решения приведены в табл. 10.7.

В табл. 10.7 обозначены:

- t — исходные данные;
- t_1 — данные интерполяции, полученные в примере 10.2;
- t_2 — данные сплайн-интерполяции.

Таблица 10.7. Результаты сплайн-интерполяции

P, мм рт. ст.	10	20	40	60	100	200	400	760
t, °C	84,6	99,3	115,4	125,8	139,9	161,2	185,8	210,6
t_1, °C	95,2	99,3	107,3	115	129,6	161,2	203,8	210,7
t_2, °C	84,6	99,3	115,4	125,8	139,9	161,2	185,8	210,6

Из таблицы видно, что данные сплайн-интерполяции полностью совпадают с исходными данными.

Однако не следует слишком восторгаться полученными результатами. Во-первых, математическая модель изучаемого объекта нами не получена, т. к. результатами сплайн-интерполяции в Mathcad является таблица. Во-вторых, если исходные данные получены с ошибками, то сплайн-интерполяция выдаст решение с теми же ошибками.

10.3. Компьютерные технологии решения задач интерполяции, приближенной в узлах (аппроксимации)

Интерполяция, приближенная в узлах, называемая также аппроксимацией, позволяет сгладить неточности исходных данных и, тем самым, повысить достоверность полученной модели.

Система Mathcad имеет ряд встроенных функций, позволяющих решить задачу аппроксимации. Такими функциями являются:

- совокупность функций `slope` и `intercept`, позволяющих решать задачи линейной аппроксимации;
- `interp` — полиномиальная аппроксимация;
- `linfit` — аппроксимация линейной комбинацией функций;
- `genfit` — аппроксимация нелинейными функциями.

Рассмотрим технологии решения задач аппроксимации с помощью перечисленных функций и приведем примеры.

10.3.1. Линейная аппроксимация

Функции `slope` и `intercept` решают задачу линейной аппроксимации, определяя коэффициенты a и b функции $y = a + bx$, представленной в виде таблицы.

Решение имеет следующий вид:

```
b := slope(Vx,Vy)
a := intercept(Vx,Vy),
```

где `Vx`, `Vy` — векторы аргумента и функции соответственно.

Пример 10.6. В результате эксперимента получены данные, приведенные в табл. 10.8.

Таблица 10.8. Данные эксперимента

x	1	2	3	4	5	6
y	0,29	0,44	0,55	0,62	0,67	0,7

Необходимо решить задачу линейной аппроксимации, используя функции Mathcad `slope` и `intercept`.

Выбор вида функции интерполяции

Убедимся, что функция интерполяции является линейной. Воспользуемся графоаналитическим методом. На рис. 10.16 приведена зависимость $y = f(x)$, построенная по данным табл. 10.10.

Из графика видно, что функция $y = f(x)$ нелинейна и задача сформулирована так, что требуются дополнительные усилия, чтобы привести ее к линейному виду.

Сравнивая полученный график с графиками типичных функций, видим, что функцией интерполяции может быть либо дробно-линейная $y = \dfrac{x}{a + bx}$, либо степенная $y = ax^d$. Обе они могут быть линеаризованы и представлены в виде следующих линейных функций:

$$Y_1 = a + bx\ ;$$

$$Y_2 = c + dX\ ,$$

где:

$$Y_1 = x/y\ ;$$

$$Y_2 = \ln y\ ;$$

$$X = \ln x\ ;$$

$$c = \ln a\ .$$

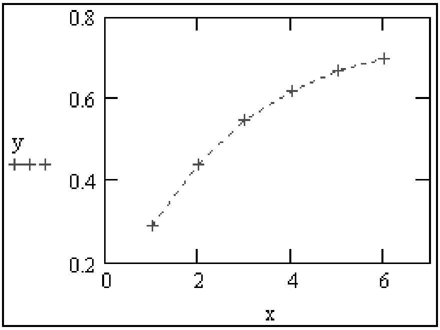


Рис. 10.16. График функции из примера 10.6

Значения линеаризованных аргументов и функций приведены в табл. 10.9.

Таблица 10.9. Таблица линеаризации дробно-линейной и степенной функций

x	1	2	3	4	5	6
y	0,29	0,44	0,55	0,62	0,67	0,7
X	0	0,69	1,1	1,39	1,61	1,79
Y_1	3,45	4,55	5,45	6,45	7,46	8,57
Y_2	–1,24	–0,82	–0,6	–0,48	–0,4	–0,36

Теперь можно решать задачу линейной аппроксимации с помощью функций `slope` и `intercept`.

Случай 1. *Дробно-линейная функция* $y = \dfrac{x}{a + bx}$

В этом случае линеаризованная функция имеет вид: $Y_1 = a + bx$. Тогда решение будет иметь вид, показанный на рис. 10.17.

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad Y1 := \begin{pmatrix} 3.45 \\ 4.55 \\ 5.45 \\ 6.45 \\ 7.46 \\ 8.57 \end{pmatrix}$$

$$b := \mathrm{slope}(x, Y1) \qquad b = 1.009$$

$$a := \mathrm{intercept}(x, Y1) \qquad a = 2.455$$

Рис. 10.17. Решение для дробно-линейной функции интерполяции

Таким образом, коэффициентами дробно-линейной функции будут: $a = 2{,}455$, $b = 1{,}009$, а функция интерполяции будет иметь вид: $y = \dfrac{x}{2{,}5 + x}$.

Случай 2. *Функция степенная* $y = ax^d$

В этом случае линеаризованная функция имеет вид: $Y_2 = c + dX$.

Тогда решение будет иметь вид, представленное на рис. 10.18.

Но т. к. $c = \ln a$, то $a = e^c = e^{-1{,}197} = 0{,}302$.

Таким образом коэффициентами степенной функции $y = ax^d$ будут: $a = 0{,}3$, $d = 0{,}5$, а функция примет вид: $y = 0{,}3x^{0{,}5}$ или $y = 0{,}3\sqrt{x}$.

$$X := \ln(x) \qquad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.693 \\ 1.099 \\ 1.386 \\ 1.609 \\ 1.792 \end{pmatrix} \qquad Y2 = \begin{pmatrix} -1.24 \\ -0.82 \\ -0.6 \\ -0.48 \\ -0.4 \\ -0.36 \end{pmatrix}$$

$$c := \mathrm{intercept}(X, Y2) \qquad c = -1.197$$

$$d := \mathrm{slope}(X, Y2) \qquad d = 0.499$$

Рис. 10.18. Решение для степенной функции интерполяции

Итак, получены две функции интерполяции. Какая же из них предпочтительнее?

Результаты табулирования функций приведены в табл. 10.10.

Таблица 10.10. Значения результатов линейной аппроксимации

x	1	2	3	4	5	6
y	0,29	0,44	0,55	0,62	0,67	0,7
φ_1	0,286	0,444	0,545	0,615	0,667	0,706
φ_2	0,3	0,424	0,52	0,6	0,671	0,735

В таблице обозначены:

- x, y — исходные значения аргумента и функции;
- φ_1 — значения дробно-линейной функции аппроксимации;
- φ_2 — значения степенной функции аппроксимации.

Из таблицы видно, что более предпочтительной является дробно-линейная функция. Погрешности обеих функций малы, поэтому нет надобности их вычислять.

10.3.2. Полиномиальная аппроксимация

Аппроксимация полиномами в Mathcad осуществляется с помощью функции `interp`, которая имеет вид:

```
interp(Vs,Vx,Vy,x),
```

где:

- `Vx`, `Vy` — векторы аргумента x и функции $y(x)$;
- `Vs` — функция, вычисляемая функциями `loess` или `regress`;
- `x` — аргумент вычисляемой функции интерполяции.

Функция `loess` имеет вид:

```
loess(Vx,Vy,span),
```

где `span` — параметр, выбирающий значения `x` для интерполяции полиномом второй степени в указанном диапазоне. По умолчанию `span` = 0,75.

Функция `regress` имеет вид:

```
regress(Vx,Vy,n),
```

где `n` — степень полинома; рекомендуется использовать `n` ≤ 4.

Пример 10.7. Данные эксперимента приведены в табл. 10.11.

Таблица 10.11. Данные эксперимента

x	0,5	2	3,5	5	6,5	8	9,5
y	0	3	15	36	66	105	153

Необходимо решить задачу полиномиальной аппроксимации.

Выбор степени полинома

Вычислим табличные разности:

y	0	3	15	36	66	105	153
$\Delta^{(1)}$	3	12	21	30	39	48	
$\Delta^{(2)}$		9	9	9	9	9	

Так как вторые табличные разности постоянны, то интерполяционный полином будет второго порядка (`n` = 2): $y = a + bx + cx^2$.

Решение приведено на рис. 10.19.

$$Vx := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 3.5 \\ 5 \\ 6.5 \\ 8 \\ 9.5 \end{pmatrix} \qquad Vy := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \\ 36 \\ 66 \\ 105 \\ 153 \end{pmatrix} \qquad x := 1..8$$

Vs := regress(Vx,Vy,2)

interp(Vs,Vx,Vy,x)

Рис. 10.19. Решение к примеру 10.7

После вызова функции `interp` нажатием клавиши <=> получим ответ в виде вектора (рис. 10.20).

interp(Vs,Vx,Vy,x)

0
3
10
21
36
55
78
105

Рис. 10.20. Ответ к примеру 10.7

Откликом функции `interp` не является полином или хотя бы его коэффициенты. В этом существенный недостаток функции. Она не позволяет получить математическую модель объекта, результаты эксперимента которого были приведены в табл. 10.11.

10.3.3. Аппроксимация линейной комбинацией функций

Аппроксимация линейной комбинацией функций может существенно повысить точность математической модели.

При таком способе аппроксимации функцией является многочлен вида:

$$y(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots,$$

где $f_i(x)$ — i-я функция аргумента x, которая должна быть определена.

Mathcad имеет встроенную функцию `linfit`, позволяющую реализовать такую аппроксимацию. Эта функция имеет вид:

```
linfit(Vx,Vy,F),
```

где:

- `Vx`, `Vy` — векторы аргумента и функции, заданной в виде таблицы;
- `F` — вектор функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...

Технологию аппроксимации покажем на примере.

Пример 10.8. Функция $y = f(x)$ представлена в виде табл. 10.12.

Таблица 10.12. Таблица функции $y = f(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4	5	9	20	33	52	73	96

Известно, что функцией интерполяции может быть функция вида:

$$y = ax^2 + be^{-x} + c\frac{x}{1+x} + d.$$

Необходимо найти коэффициенты этой функции, т. е. математическую модель объекта, функционирование которого представлено в табл. 10.12.

Решение будет выглядеть так, как показано на рис. 10.21.

$$Vx := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad Vy := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \\ 20 \\ 33 \\ 52 \\ 73 \\ 96 \end{pmatrix} \qquad F(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ \exp(-x) \\ \dfrac{x}{1+x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{linfit}(Vx, Vy, F)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1.729 \\ 73.913 \\ 93.51 \\ -70.113 \end{pmatrix}$$

Рис. 10.21. Решение к примеру 10.8

Коэффициенты a, b, c, d найдены, функция аппроксимации имеет вид:

$$y = 1,729x^2 + 73,913e^{-x} + 93,51\frac{x}{1+x} - 70,113\,.$$

Графическое представление решения задачи (на небольшом участке диапазона изменения аргумента функций для выявления различий) показано на рис. 10.22. Выбор части графика осуществлен с помощью команды **Zoom**, количественные оценки определим командой контекстного меню **Trace**.

Характеристики аппроксимации можно оценить с помощью данных окна **X-Y Trace** (Слежение). Перемещая визирную линию клавишей <→>, получим количественные значения функции в узлах интерполяции. Для удобства слежения надо включить опцию **Track data points** (Точки данных).

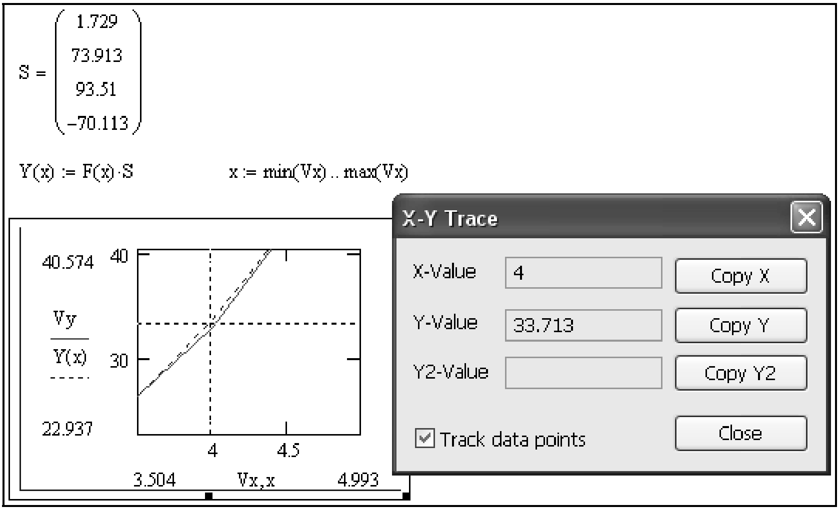


Рис. 10.22. Аппроксимация линейной комбинацией функций

Результаты табулирования функции аппроксимации приведены в табл. 10.13.

Таблица 10.13. Результаты табулирования функции аппроксимации

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4	5	9	20	33	52	73	96
y_1	3,8	5,562	9,146	19,26	33,713	51,535	72,466	96,497

Из табл. 10.13 видно, что функция аппроксимации $y_1(x)$ хорошо согласуется с исходной функцией $y(x)$. Расчеты показали, что абсолютная среднеквадратическая погрешность $\varepsilon = 0{,}522$.

Недостаток аппроксимации линейной комбинацией функций состоит в том, что при решении конкретной задачи очень трудно подобрать вектор функции `F(x)`. Этот процесс не формализован.

10.3.4. Аппроксимация нелинейными функциями

Аппроксимация нелинейными функциями осуществляется в Mathcad с помощью функции `genfit`, которая имеет вид:

```
genfit(Vx,Vy,Vg,F),
```

где:

- `Vx`, `Vy` — векторы значений аргумента и функции;
- `Vg` — вектор начальных приближений для всех неизвестных;
- `F` — вектор, образованный аппроксимирующей функцией и ее частными производными по всем неизвестным параметрам.

Откликом функции `genfit` является вектор неизвестных, позволяющий записать функцию аппроксимации.

Пример 10.9. Пример заимствован из [14].

Функция $y = f(x)$, полученная экспериментально, представлена в виде табл. 10.14.

Таблица 10.14. Данные функции $y = f(x)$

x	0	1	2	3	4	5
y	8	7	4	–1	–8	–17

Выберем в качестве аппроксимирующей функцию:

$$y = a_0 + a_1 x^{a_2}.$$

Пусть начальными значениями неизвестных будут: $a_0^{(0)} = 1$, $a_1^{(0)} = -0{,}5$, $a_2^{(0)} = 1$.

Определим производные функции по всем параметрам:

$$\frac{\partial y(x)}{\partial a_0} = 1;$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial a_1} = x^{a_2};$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial a_2} = a_1 x^{a_2} \ln(x).$$

Тогда процедуры решения задачи будут иметь вид, изображенный на рис. 10.23.

$$Vx := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Vy := \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ -8 \\ -17 \end{pmatrix} \qquad Vq := \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(x, a) := \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot x^{a_2} \\ 1 \\ x^{a_2} \\ a_1 \cdot x^{a_2} \cdot \ln(x) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{genfit}(Vx, Vy, Vq, F) = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 10.23. Решение к примеру 10.9

Неизвестные имеют значения $a_0 = 8$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, а функция аппроксимации имеет вид:

$$y = 8 - x^2.$$

Решение задачи является абсолютно точным, относительная погрешность аппроксимации равна нулю.

ГЛАВА 11

Комплексные задачи компьютерной алгебры

Эффективным способом изучения систем символьной математики является самостоятельное решение задач. При таком способе хорошо усваиваются компьютерные технологии. Чем сложнее задача, тем глубже понимается изучаемая система. Это объясняется тем, что пользователь вынужден обдумывать алгоритм решения задачи, способы его реализации, выбирать наиболее рациональные встроенные функции и команды изучаемой системы.

В этой главе приводятся задачи, рекомендуемые всем, кто желает самостоятельно изучить систему Mathcad. Они могут быть использованы также при контроле знаний студентов в процессе приема зачетов, выполнения домашних заданий и лабораторных работ.

В некоторых задачах даны неполные ответы. Это объясняется требованиями самостоятельного решения задачи без подсказок.

Следует иметь в виду, что в ряде случаев ответы и решения, полученные пользователем, могут не совпадать. Это вовсе не значит, что они ошибочны. Решения могут быть многовариантными, иметь разные алгоритмы и технологии решения.

Задача 11.1

Дана функция $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2,5$. Известно также, что корнями уравнений $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ являются соответственно $x_1 = 2$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 0,2$.

Определить:

- функцию $f(x)$, вычислив значения переменных a, b, c;
- корни уравнения $f(x) = 0$;
- представить функцию $f(x)$ в виде таблицы и графика.

Ответы:

- значения переменных функции $f(x)$:

  $$a = -\frac{25}{53}; \quad b = \frac{15}{53}; \quad c = \frac{15}{212};$$

- корни уравнения $f(x) = 0$:

  $$x_1 = 2; \quad x_{2,3} = -\frac{7}{10} \pm \frac{3\sqrt{6}}{5} i.$$

Задача 11.2

Даны следующие две функции $y_1(x) = e^{-2x} - 0,5$;

$y_2(x) = 2^x - 3x + 1$.

Определить:

- координаты x_1, x_2, x_3 точек пересечения функций;
- полином $f(x)$ третьей степени, корни которого равны x_1, x_2, x_3;
- значение интеграла $\int\limits_0^{10} f(x)dx$;
- представить функцию $f(x)$ в виде формулы, таблицы, графика.

Ответы:

- координаты точек пересечения функций: $x_1 = -0,7278$; $x_2 = 1,2896$; $x_3 = 2,7659$;
- полином третьей степени $f(x) = x^3 - 3,33x^2 + 0,61x + 2,6$;
- значение интеграла $\int_0^{10} f(x)dx = 1447,5$.

Задача 11.3

Корнями уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ являются: $x_1 = 1,5$; $x_{2,3} = -2 \pm 3i$.

Определить:

- значения коэффициентов *a*, *b*, *c*, *d* уравнения;
- представить полученную функцию $f(x)$ в виде формулы, таблицы, графика;
- корни уравнения $\frac{f(x)}{x} - \ln(2x) - 3 = 0$.

Ответы:

- $a = 1$; $b = 2,5$; $c = 7$; $d = -19,5$.
- корнем уравнения является $x = 1,83$.

Задача 11.4

Определенный интеграл имеет следующие значения:

$$\int_1^5 f(x)dx = 7; \quad \int_1^{10} f(x)dx = 35.$$

При этом первообразная имеет вид:

$$F(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + c.$$

Определить функцию $f(x)$, проверить правильность решения.

Ответ: $f(x)=\frac{77}{90}x-\frac{49}{60}$.

Задача 11.5

Дано:

- функция $f(x)=a^x+bx+c$;
- корни уравнения $f(x)=0$: $x_1=2,7$; $x_2=0,83$;
- координаты минимума функции $f(x)$: $x_{\min}=1,91$; $y_{\min}=-4,04$.

Определить:

- функцию $f(x)$, вычислив коэффициенты *a*, *b*, *c*;
- корни уравнения $f(x)=0$;
- достоверность решения задачи проверить путем построения графика функции $f(x)$ и определения по его виду значения корней x_1, x_2 и координат минимума функции.

Ответы:

- $f(x)=2,99^x-8,93x+4,93$;
- $x_1=2,69$; $x_2=0,83$.

Задача 11.6

Корнями уравнения $f(x)$ являются: $x_1=-2,5$; $x_2=-1,5$; $x_3=5$.

Определить:

- функцию $f(x)$, представляющую собой полином третьей степени, корнями которого являются x_1, x_2, x_3;
- значение производной в точках x_1, x_2, x_3;
- значение интеграла $\int_0^{10} f(x)dx$;
- координаты точек максимума и минимума функции $f(x)$.

Ответы:

- $f(x) = x^3 - x^2 - 16,25x - 18,75$;
- значения производных: $f'(-2,5) = 7,5$; $f'(-1,5) = -6,5$; $f'(5) = 48,75$;
- значение интеграла $\int_0^{10} f(x)dx = 1166,7$;
- координаты максимума и минимума функции $f(x)$:
  $x_{\max} = -2,02$; $y_{\max} = 1,75$; $x_{\min} = 2,68$; $y_{\min} = -50,2$.

Задача 11.7

Дано аналитическое выражение первообразной, полученное от интегрирования функции $f(x)$. Известными также являются численные значения интеграла при нескольких значениях пределов интегрирования.

Необходимо определить переменные первообразной и подынтегральную функцию.

Исходные данные и результаты решения приведены в табл. 11.1.

Задача 11.8

Даны две следующие функции: $y_1(x) = 2^x - 4x + 1$;
$y_2(x) = x^2 - 8,3x + 5.32$.

Определить:

- корни уравнений $y_1(x) = 0$; $y_2(x) = 0$;
- многочлен $f(x)$, корни которого равны корням исходных уравнений;
- вторую производную функции $f(x)$;
- интеграл $\int_0^{10} f(x)dx$;

Таблица 11.1. Варианты исходных данных и результаты решения задачи

№ задачи	Первообразная	Пределы интегрирования		Значение интеграла	Результат
		$x_{\min}$	$x_{\max}$		
1	$a\ln(1+bx^2)$	0 0	1 10	7 15	$a=1{,}744$; $b=54{,}35$; $f(x)=\dfrac{189{,}57\,x}{54{,}35\,x^2+1}$
2	$a\ln(x-1)-b\ln(x)+c/x$	2 2 2	10 15 25	1,2 1 0,5	$a=-17{,}28$; $b=-15{,}37$; $c=-36{,}1$; $f(x)=\dfrac{a}{x-1}-\dfrac{b}{x}-\dfrac{c}{x^2}$
3	$\dfrac{a\sin(bx)}{b}$	0 0	π 2π	3,2 5	$a=11{,}35$; $b=2{,}21$; $f(x)=11{,}35\cos(2{,}21x)$

- представить функцию $f(x)$ в виде формулы, таблицы, графика.

Ответы:

- корнями уравнений $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = 0$ являются соответственно: $x_1 = 0,64$; $x_2 = 3,85$; $x_1 = 0,7$; $x_2 = 7,6$;
- $f(x) = x^4 - 12,8x^3 + 45x^2 - 44,3x + 13,1$;
- $f''(x) = 12x^2 - 76,8x + 90$;
- $\int\limits_0^{10} f(x)dx = 956,2$.

Задача 11.9

Дана следующая система нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 x_2 - x_2 - 9 = 0; \\ x_1 x_2 - x_1^2 + 10 = 0. \end{cases}$$

Определить:

- неизвестные x_1, x_2;
- многочлен $f(x)$, корнями которого являются x_1, x_2;
- функцию $\varphi(x) = 2^x - 2ax + b$, корнями которой являются x_1, x_2;
- функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ графически с целью проверки достоверности их определения.

Ответы:

- варианты решения системы уравнений: $x_1 = -2$; $x_2 = 3$; $x_1 = 3,57$; $x_2 = 0,77$; $x_1 = -2,2$; $x_2 = 2,33$; $x_1 = 0,636$; $x_2 = -15,1$;

- $f(x) = x^8 + 9x^7 - 92{,}1x^6 + 55x^5 + 737{,}8x^4 - 968{,}5x^3 - 1368x^2 +$ $+2355{,}6x - 817$;
- $\varphi(x) = 2^x - 1{,}55x - 3{,}35$ для случая $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

Задача 11.10

Дана следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2; \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Определить:

- значение неизвестных x_1, x_2, x_3;
- многочлен $f(x)$, корнями которого являются x_1, x_2, x_3;
- представить функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ графически и убедиться в правильности полученных решений по значениям корней и точкам пересечения кривых.

Ответы:

- $x_1 = \dfrac{90}{7}$; $x_2 = 7$; $x_3 = \dfrac{60}{7}$;
- $f(x) = x^3 - \dfrac{199}{7}x^2 + \dfrac{12750}{49}x - \dfrac{5400}{7}$.

Задача 11.11

Даны следующие три функции: $y_1(x) = xe^{-ax} - 1$;

$y_2(x) = a + b\ln(cx)$; $y_3(x) = 3^x - ax + 1$.

Необходимо:

- табулировать каждую из функций, самостоятельно выбрав численные значения параметров a, b, c и параметров табулирования;

- выполнить по данным таблиц полиномиальную интерполяцию, получив функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$;
- выполнить суммирование функций:
  $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$, $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x)$;
- представить функции $y(x)$ и $\varphi(x)$ в виде таблиц и графиков;
- определить погрешность интерполяции.

Задача 11.12

Дана функция $f(x) = e^{-x} + e^{x}$.

Необходимо:

- разложить функцию в степенной ряд вокруг $x = 0$, ограничившись тремя, пятью и десятью членами;
- представить функции в виде графиков;
- определить максимальные погрешности функций в диапазоне от 0 до 2.

Ответы:

- $f(x) = x^2 + 2$ при $n = 3$;

  $$f(x) = \frac{x^4}{12} + x^2 + 2 \text{ при } n = 5;$$

  $$f(x) = \frac{x^{10}}{1814400} + \frac{x^8}{20160} + \frac{x^6}{360} + \frac{x^4}{12} + x^2 + 2 \text{ при } n = 10;$$

- максимальная погрешность функции при $x = 2$:

  1,52 при $n = 3$; 0,19 при $n = 5$; $1,75 \cdot 10^{-5}$ при $n = 10$.

Задача 11.13

Двукратный интеграл функции $f(x)$ имеет вид:

$$F(x) = -2(x+1)\ln(x+1) + x^2/2 + 2x.$$

Определить:

- функцию $f(x)$;
- значения однократного и двукратного определенных интегралов в диапазоне x от 0 до 5; вычисления выполнить путем интегрирования функции $f(x)$ и с помощью формулы Ньютона в случае функции $F(x)$.

Ответы:

- $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$;
- $\int\limits_0^5 f(x)dx = 1{,}416$;
- $\int\limits_0^5 \int f(x)dx = F(x)\Big|_0^5 = 0{,}999$.

Задача 11.14

Первообразная функция имеет вид: $F(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} + \dfrac{1}{x} + 1$.

Определить:

- подынтегральную функцию $f(x)$;
- пределы функций $f(x)$ и $F(x)$ при $x \to \infty$;
- значение интеграла функции $f(x)$ в пределах от 1 до 10.

Ответы:

- $f(x) = -\dfrac{e^{-x}(x+1)+1}{x^2}$;
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$;
- $\int\limits_1^{10} f(x)dx = F(x)\Big|_1^{10} = -1{,}268$.

Задача 11.15

Дана функция $f(x) = x\,e^{-2x} + \sin(x)$.

Необходимо:

- ♦ разложить $f(x)$ в ряд Тейлора вокруг $x = 1$, ограничившись тремя и пятью членами;
- ♦ определить производные функции $f(x)$ и ряда Тейлора;
- ♦ вычислить неопределенный интеграл функции $f(x)$ и ряда Тейлора;
- ♦ вычислить определенные интегралы функции $f(x)$ и функций разложения в пределах от 0 до 2 и от 0 до 5;
- ♦ проанализировать результаты расчетов и сделать выводы о целесообразности разложения функции в ряд Тейлора.

Ответы:

♦ $f_3(x) = 173\cdot 10^{-6} x^3 - 0{,}42x^2 + 1{,}25x + 0{,}15$;

$f_5(x) = 0{,}0586x^5 - 0{,}348x^4 + 0{,}81x^3 - 1{,}34x^2 + 1{,}76x + 0{,}037$;

♦ $f'(x) = e^{-2x}(1-2x) + \cos(x)$;

$f_3'(x) = 0{,}000519x^2 - 0{,}84x + 1{,}25$;

$f_5'(x) = 0{,}293x^4 - 1{,}39x^3 + 2{,}42x^2 - 2{,}677x + 1{,}76$;

♦ $\int f(x)dx = -\dfrac{e^{-2x}(2x+1)}{4} - \cos(x)$;

$\int f_3(x)dx = 4{,}32810^{-5} x^4 - 0{,}14x^3 + 0{,}625x^2 + 0{,}15x$;

$\int f_5(x)dx = 0{,}00977x^6 - 0{,}07x^5 + 0{,}2x^4 - 0{,}446x^3 + 0{,}88x^2 +$
$+0{,}037x$;

♦ $\int_0^2 f(x)dx = 1{,}036$; $\int_0^5 f(x)dx = 0{,}35$;

$\int_0^2 f_3(x)dx = 1,04$; $\int_0^5 f_3(x)dx = -1,81$;

$\int_0^2 f_5(x)dx = 1,038$; $\int_0^5 f_5(x)dx = 26,91$.

Задача 11.16

Функция $y = f(x)$ представлена в виде табл. 11.2.

Таблица 11.2. Табличное представление функции $y = f(x)$

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,336	1,05	1,9	2,9	4,09	5,5	7,17	9,158

Необходимо:

- решить задачу интерполяции, если известно, что функция интерполяции имеет вид: $f(x) = ab^{cx} - 3,2$;
- вычислить абсолютную и максимальную относительную среднеквадратические погрешности модели;
- найти значение интеграла $\int_1^8 f(x)dx$;
- найти корни уравнения $f(x) = 0$;
- представить производную $\frac{dy(x)}{dx}$ в аналитической, табличной и графической формах.

Ответы:

- $\int_1^8 f(x)dx = 12,28$;
- корни уравнения: $x_1 = 2,46$; $x_{2,3} = 2,46 \pm 36,84i$.

Задача 11.17

Функция $f(x)$ задана в виде табл. 11.3.

Таблица 11.3. Табличное представление функции $f(x)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	13,44	11,32	9,5	7,85	6,27	4,74	3,22	1,7

Известно, что функция интерполяции имеет вид:

$$y(x) = ae^{-bx} + cx + 3{,}7 .$$

Необходимо:

- найти функцию интерполяции, определив коэффициенты a, b, c; решение выполнить методом интерполяции, точным в узлах;
- вычислить погрешность интерполяции.

Задача 11.18

Функция $y = f(x)$ задана в виде табл. 11.4.

Таблица 11.4. Табличное представление функции $y = f(x)$

x	0,2	0,5	1	1,3	1,7	2	2,2	2,5
y	4,564	7,225	11,7	13,88	15,53	15,5	14,484	11,625

Найти:

- координаты максимума функции $y = f(x)$;
- значение интеграла $\int_1^2 f(x)dx$;
- функцию $y = \int f(x)dx$ в виде таблицы для значений x, приведенных в табл. 11.4.

Ответы: $x_{\max} = 1{,}8244$; $y_{\max} = 15{,}64$.

Задача 11.19

Функция $y = f''(x)$ задана в виде табл. 11.5.

Таблица 11.5. Табличное задание второй производной функции $f(x)$

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	2,3	11,35	28,85	55,9	93,4	142	202,5	275,3	361	460

Найти:

- функцию $y = f(x)$ и представить ее в виде формулы, таблицы и графика; функцию $y = f(x)$ выбрать лучшую из следующих:

  $y = a\ln x + b$; $y = ax^b$; $y = \dfrac{a}{b+cx}$;

- найти корни уравнения $f(x) - 1 = 0$;
- найти $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Ответы:

- корни уравнения $x_1 = 1{,}05$; $x_{2,3} = 0{,}115 \pm 1{,}047i$;

  $x_{4,5} = -1{,}028 \pm 0{,}229i$;

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0{,}8$.

Задача 11.20

Функция $y = f(x)$ задана в виде табл. 11.6.

Таблица 11.6. Табличное представление функции $y = f(x)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,4	3,13	4,15	4,87	5,42	5,88	6,26	6,6	6,89	7,156

Необходимо:

- представить в виде формулы, таблицы и графика вторую производную функции $f(x)$; функция $f(x)$ может принадлежать к одной из следующих:

$$y = \frac{a}{b+cx}; \quad y = ae^{bx}; \quad y = a\ln x + b.$$

- найти: $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$; $\int f(x)dx$; $\int\limits_1^5 f(x)dx$.

Ответы:

- $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = 2{,}5$;
- $\int f(x)dx = 2{,}5x\ln x - 1{,}1x$; $\int\limits_1^5 f(x)dx = 15{,}72$.

Задача 11.21

Функция $y = f(x)$ задана в виде табл. 11.7.

Таблица 11.7. Табличное задание функции $y = f(x)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	–5	12,5	2,78	1,56	1,09	0,83	0,68	0,57	0,49	0,43

Необходимо:

- найти оптимальную функцию интерполяции, которая может иметь вид одной из следующих:

$$y = a + bx; \quad y = ae^{bx}; \quad y = ax^b; \quad y = a\ln x + b;$$

$$y = a + \frac{b}{x}; \quad y = \frac{a}{b+cx}; \quad y = \frac{ax}{b+cx};$$

- вычислить погрешность функции интерполяции;
- найти корни уравнения $f(x)+x-1=0$.

Ответ: корни уравнения $x_{1,2}=1,357\pm 1,856j$.

Задача 11.22

Решить следующую систему дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутты:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_0(t)}{dt}=-ay_0(t)+my_1(t); \\ \dfrac{dy_1(t)}{dt}=ay_0(t)-(a+m)y_1(t)+2my_2(t); \\ \dfrac{dy_2(t)}{dt}=ay_1(t)-2my_2(t). \end{cases}$$

Начальные условия: $y_0(0)=1$; $y_1(0)=y_2(0)=0$.

По данным решения системы дифференциальных уравнений получить функцию $y_0(t)$ в аналитическом виде, решая задачу интерполяции. Использовать для получения функции $y_0(t)$ два метода интерполяции: точный в узлах и приближенный в узлах. Сравнить результаты, вычислив погрешности моделей.

Коэффициентами a и m системы дифференциальных уравнений являются числа: $a=0,5\cdot 10^{-2}$, $m=1$.

Рекомендации по решению задачи:

- функцией интерполяции является полином третьей степени $y_0(t)=a+bt+ct^2+dt^3$;
- диапазон изменения t взять по своему желанию.

Задача 11.23

Функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ представлены в виде табл. 11.8.

Таблица 11.8. Табличное представление функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	1,2	3,7	5,2	8	9,1	10,8	11,5	13,2	15,1	16,8
y_2	23,4	17,2	15	13,4	10,2	7,1	4,3	1,2	0,5	0,1

Необходимо:

- определить путем интерполяции функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$ математические модели $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$;
- представить в виде таблицы функцию $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ путем табулирования;
- найти $y_1 + y_2$ по данным таблицы и сравнить с данными табулирования; объяснить полученный результат.

Список литературы

1. Воробьева Г. Н., Данилова А. Н. Практикум по вычислительной математике. — М.: Высшая школа, 1990.
2. Гутер Р. С., Резниковский П. Т. Программирование и вычислительная математика, выпуск 2. — М.: Наука, 1971.
3. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.
4. Дьяконов В. Mathcad 8/2000. Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2000.
5. Дьяконов В. П. Mathcad 8—12 для студентов. Серия Библиотека студента. — М: СОЛОН-Пресс, 2005.
6. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. Mathcad 7.0. — М.: Нолидж, 1998.
7. Ивановский Р. И. Компьютерные технологии в науке. Практика применения систем MathCAD 7.0 Pro, MathCAD 8.0 Pro и MathCAD 2000 Pro: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.
8. Кирьянов Д. В. Mathcad 12. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
9. Компьютер для студентов, аспирантов и преподавателей. Самоучитель, под редакцией В. Б. Комягина. — Можайск: Триумф, 2002.
10. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972.

11. Морозов Б. И., Рыкин О. Р. Информационные технологии. Исследовательские расчеты в среде Маткад 2001: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003.
12. Очков В. Ф. Mathcad 12 для студентов и инженеров. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
13. Половко А. М. Derive для студента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
14. Половко А. М., Бутусов П. Н. Интерполяция. Методика и компьютерные технологии их реализации. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
15. Пулькин С. П. Вычислительная математика. — М.: Просвещение, 1972.
16. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.