ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

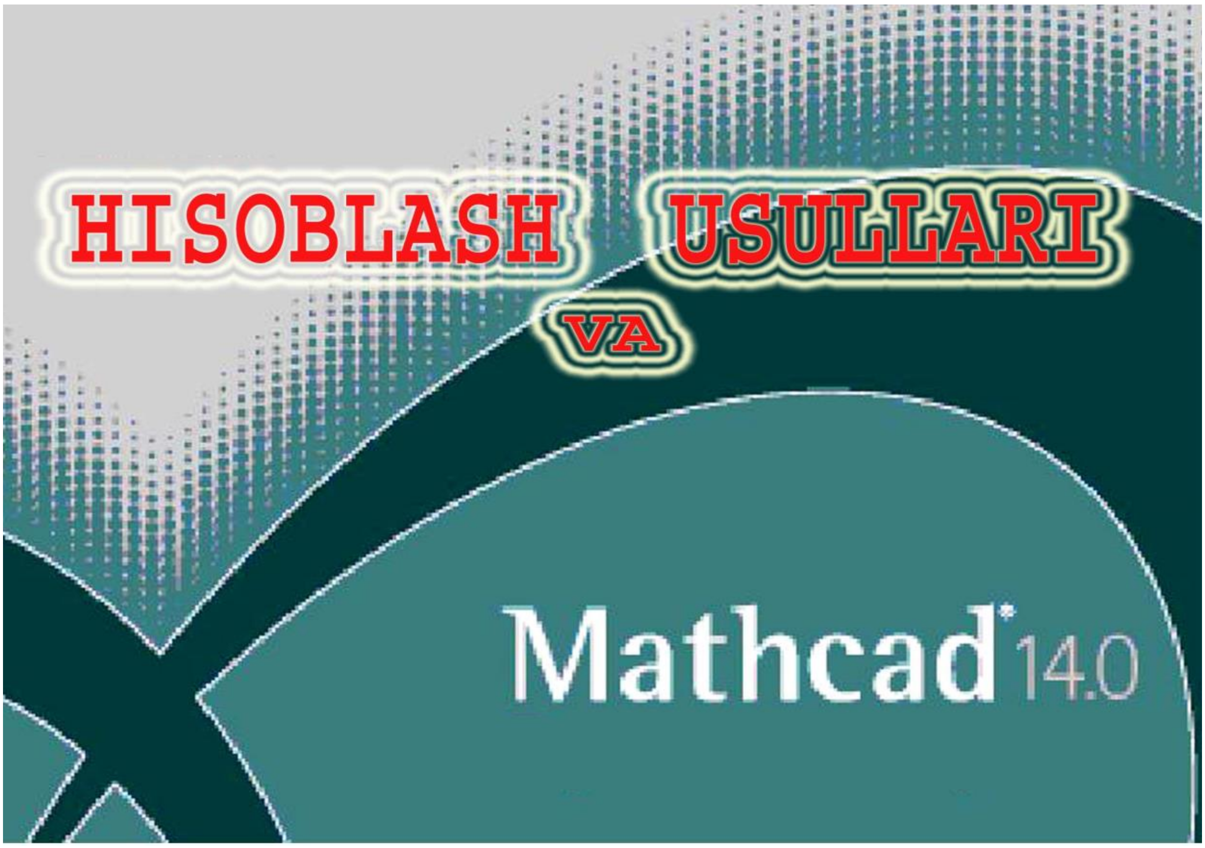
НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

А.Имомов

ҲИСОБЛАШ УСУЛЛАРИ ВА MATHCAD
1-қисм

Алгебра ва анализ масалаларини тақрибий ечиш
Ўқув услубий қўлланма

университетларнинг 5130100-математика, 5130200-амалий математика ва информатика йўналишлари учун тавсия этилган



http://www.ziyonet.uz/files/znuz_215446_20111025095315.rar
http://www.ziyonet.uz/files/znuz_215446_20111102151005.rar

Наманган-2014

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.19

А.Имомов. Ҳисоблаш усуллари ва MathCAD. Ўқув услубий қўлланма. Наманган, НамДУ, 2014.-100 б.

Ушбу ўқув услубий қўлланма университетларнинг 5130200-«Амалий математика ва информатика», 5130100 «Математика» йўналишлар учун «Ҳисоблаш усуллари» фанини ўрганувчилар учун мўлжалланган ва амалдаги ўқув режалар, ўқув дастурлари асосида тузилган. Ҳар бир мавзу асосий тушунчалар ва натижалар (формулалар), мавзунинг моҳиятини очиб берувчи мулоҳазалар саволлардан тузилган.

1-қисм алгебра ва анализ масалаларини тақрибий ечишга бағишланган. Бу ерда битта ночизиқ тенглама, уларнинг системалари, чизиқли тенгламалар системалари, интерполяция, тақрибий дифференциаллаш ва интеграллаш масалалари қаралган.

2-қасм дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишга қаратилган.

Биринчи марта, барча ҳисоблаш усуллари учун MathCAD программасида компьютерга киритилгач натижа берадиган, синаб кўрилган, кўриниши табиий –математик ёзув билан бир хил бўлган масала ечишнинг алгоритмлари келтирилган.

MathCAD MATHematica (математика) ва CAD (Computer Aided Design — системы автоматического проектирования, ёки Математик САПР-математик автоматлаштирилган лойиҳалаш тизимлари) сўзларидан олинган. Шундай қилиб, MathCAD-ҳисоблашларни автоматлаштирувчи математик ахборот тизими демакдир.

Тизим деб қўйилган мақсадларини амалга ошириш учун бир вақтнинг ўзида ҳам ягона, ҳам ҳар хил элементларнинг мажмуи деб қаралиши мумкин бўлган ҳар қандай объектга айтилади.

Ахборот тизими- қўйилган мақсадни амалга ошириш учун ахборотни йиғиш, сақлаш, қайта ишлаш, қидириш ва узатиш усуллари, воситалари ва ходимларнинг ўзаро боғлиқ мажмуидир.

Ахборот тизимга инсон савол билан мурожаат қилади, у жавоб қайтаради.Фойдаланувчи MathCADга масала билан мурожаат қилади, у жавоб қайтаради.

Ўқув услубий қўлланма учун масъул: т.ф.н.,доц.П.Каримов

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.19

М У Н Д А Р И Ж А

1-қисм. Маърузалар.

1 БОБ.АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ.

1.1. КИРИШ. ҲИСОБЛАШ МАТЕМАТИКАСИ НИМА?

Асосий тушунчалар: *Масала ечиш этаплари, ҳисоблаш усуллари, амалий математика тарихи, абсалют ва нисбий хато,муҳим ва ишончли рақамлар, хатоликлар назариясиниг асосий масаласи (функциянинг қийматини ҳисоблашдаги хатолик)*

Асосий натижалар:

1.Масала ечиш этаплари:

модель→алгоритм→дастур→компьютер→натижа.

2.Ҳисоблаш усуллари:масалани тақрибий ечиш усулларини яратади.

3.Амалий математика тарихи:I-давр эрамиздан аввал 3-4-минг йиллар олдин, II-давр Ньютондан кейин, III-давр 1920 й.дан кейин(мураккаб ҳисоблашлар ва компьютер).

4. Хатоликлар:

$\Delta a = |A - a| \le \Delta_a, \delta a = \Delta a / |A| \approx \Delta a / |a|, \delta a \le \delta_a, \delta_a = \Delta_a / |a|, \Delta_a = \delta_a |a|$.

5.Функция хатолигини ҳисоблаш:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} \Delta_{x_i}, \ \Delta_y = \max_{c \in G} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(c)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Delta_{x_i},$$

$$\delta_y = \frac{1}{|y|} \Delta_y = \max_{c \in G} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f(c)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f(x)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i},$$

6. Математик тизимлар (масалаларни ечувчи программалар):Mathcad, Maple, MatLab.

1. Математика бу ташқи дунёнинг геометрик формалари ва сонли муносабаатлари ҳақидаги фандир (Энциклиопедиядан).

Ҳисоблаш усуллари (ҳисоблаш математикаси) амалий масалаларнинг моделлари бўлмиш математик масалаларни тақрибий ечиш учун тақрибий (сонли) усуллар яратиш билан шуғулланади.

Ихтиёрий амалий масалани ечиш учун акад.А.А.Самарский ибораси билан айтганда ҳисоблаш эксперименти ўтказилади. Бу экспериментнинг асосий босқичларини қуйидагича тасвирлаш мумкин:

модель→алгоритм→дастур→компьютер→натижа.

Амалий масала бу бирор воқеа, жараёндир. Масаланинг математик модели бу амалий масалани математик муносабатлар билан баён этиб, типик математик масала синфига келтиришдир. Синфдан ечими аниқ масала танланиб, масалани ечиш учун алгоритм танланади. Алгоритм асосида компьютер учун дастур тузилади. Дастур компьютерда ишга туширилиб натижа олинади. Натижа мавжуд ечим ёки маълумотлар билан солиштирилади, улар мос бўлса алгоритм ҳам, модель ҳам қаноатланарли деб топилади.Акс ҳолда амалий масала яна текширилиб моделга тузатишлар киритилади ва ҳоказо. Бу жараён ечим етарли аниқлик билан топилгунча давом этади.

Ҳисоблаш эксперименти амалий масалани ечишда назарий математика, ҳисоблаш усуллари, алгоритмлар назарияси, дастурлаш, ЭҲМнинг ўрнини яққол тасвирлайди.

2. Математик масалани ечишда турли хил усуллар ишлатилиши мумкин. Агар мумкин бўлса аниқ усуллар, мумкин бўлмаса тақрибий усуллар ишлатилади. Сонли усуллар (ҳисоблаш усуллари) масала ечишнинг энг кучли воситаларидан бири ҳисобланади. Содда ҳисоблаш усулларидан биз кўп фойдаланамиз. Масалан, квадрат илдиз чиқариш. Шундай масалалар борки, мураккаб ҳисоблашларни талаб қилади: об-ҳавони башорат қилиш, космик кема ҳаракати, кўп йиллик режаларни яратиш . Кўп ҳолларда ҳисоблашларни тез бажаришга тўғри келади. Масалан, суткалик об-ҳаво башорати бир неча соатда ҳисобланиши керак, космик кема траекторияси бир неча минутда ҳисобланиши керак ва ҳоказо. Замонавий ҳисоблаш усуллари ва ЭҲМ лар бундай имкониятларга эга. Ҳисоблаш усуллари масалани ечиш учун алгоритм беради. Алгоритм асосида компьютер учун дастур тузилади.

Алгоритмни асослаш масалани тўғри ечиш учун асос ҳисобланади. Лекин алгоритмнинг баҳосини амалий ҳисоблашлар бажаргандан кейин берилади. Бир нарсага эътибор бериш керак. Компьютер билан ишлаётган фойдаланувчи ўз алгоритми, дастурини синчиклаб текшириб чиқиши керак. Акс ҳолда Питер айтгандек: “Компьютер ҳисобловчининг ночорлигини кўп мартага оширади”, деган ҳодиса рўй бериши мумкин.

3. Мураккаб масалаларни ечиш учун, алгоритмлар яратиш билан шуғулланувчи математиканинг бўлимини амалий математика дейилади. Амалий математиканинг асосий масаласи ечимни берилган аниқлик билан топишдир. Классик математика ечимнинг мавжудлиги, ягоналиги, хоссаларини аниқлаш билан шуғулланади.

Амалий математика тарихини уч даврга бўлиш мумкин. Биринчи давр эрамиздан 3-4 минг йил олдин бошланган. Бу даврда юза, ҳажмлар, содда механизмлар ҳисобланган. Иккинчи давр И.Ньютондан (1642-1723 й.й.) бошланган. Бу даврда астраномия масалалари, оддий дифференциал тенгламаларга, чизиқли тенгламалар системасига олиб келувчи масалалари ечила бошланди. Ҳарбий масалалар одам бажариши қийин бўлган масалаларни ечишга ундайди. Учинчи давр-компьютерлар даври-20 асрнинг 60 йиллларидан бошланади. Бу даврда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, ночизиқ тенгламалар ва уларнинг системаларини ечиш усуллари пайдо бўлди.

4. A-аниқ сон, a унинг тақрибий қиймати бўлса, $A-a$ айирма a - тақрибий сон хатоси, $\Delta a = |A\text{-}a|$ -тақрибий сон a нинг абсолют хатоси дейилади. Ҳар қандай $\Delta_a \geq \Delta a$ сон тақрибий a соннинг чегаравий абсолют хатоси дейилади. $\delta a = \Delta a / |A|$ миқдор эса a тақрибий соннинг нисбий хатоси дейилади. $A \approx a$ бўлгани учун амалда $\delta a = \Delta a / |a|$ деб олинади.Ҳар қандай $\delta_a \geq \delta a$ сон a тақрибий соннинг чегаравий нисбий хатоси дейилади. Демак, $\delta a = \Delta a / |a| \leq \delta_a = \Delta_a / |a|$ эканлигидан $\delta_a = \Delta_a / |a|, \Delta_a = a\delta_a$ Абсолют ва нисбий хато ёрдамида аниқ сон $A = a \pm \Delta_a = a(1 \pm \delta_a)$ кўринишида ёзилади.

A, a миқдорлар бирор нормаланган X фазонинг элементлари бўлса, у ҳолда юқоридаги таърифлар қуйидагича ўзгаради:

$$\Delta a = \|A - a\| \leq \Delta_a, \delta a = \Delta a / \|a\| \leq \delta_a, \delta_a = \Delta_a / \|a\|.$$

Мисол 1. $\sqrt{3} \approx 1{,}732050...$, A=$\sqrt{3}$, $a = 1{,}7321, \Delta_a = 0{,}0001, \delta_a = 0{,}00006.$

Агар $a < A$ бўлса ками билан, агар $a > A$ бўлса кўпи билан тақрибий сон олинади.Масалан, $A = \sqrt{3}$ учун, $a = 1{,}73$ ками билан, $a = 1{,}74$ кўпи билан олинмоқда.

Мисол 2. $A = \pi = 3.14159...$ сон *0.00010* аниқлик билан яхлитлансин.

Жавоб, $a = 3.1416$.чунки, $A - a \approx 0.00001 \leq 0.0001/2 = 0.00005$.

Мисол 3. $A = J(f) = \int_b^a f(x)dx$ интеграл $a = J_h^T(f)$ трапециялар формуласи билан алмаштирилсин:

$$J_h^T(f) = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) + f(x_n)], x_i = a + ih, i = 0, ..., n, h = \frac{b-a}{n}.$$

Кейинчалик кўрамизки, $\left|J(h) - J_h^T(f)\right| = \frac{h^2}{12}|f''(c)|, a < c < b.$

Мисол 4. $A = f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада $n+1$ та узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин ва $x_i \in [a,b], i = 0,...,n$ нуқталарда n- даражали Лагранж кўпхади $P_n(x)$ билан устма-уст тушсин:

$$P_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 0, ..., n, P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), l_i(x) = \prod_{j \neq i}^{n} (x - x_j)/(x_i - x_j)\ ,$$

У ҳолда | $\|f(x)\|_C = \max\{|f(x)|, x \in [a,b]\}$ нормада қуйидаги баҳони оламиз:

$$\|f - P_n\|_C \leq \frac{\max\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} |(x - x_0)...(x - x_n)|.$$

Мисол 5. Умумий кўринишда берилган $Lu = f$ дифференциал тенглама аниқ ечими $u = u(x)$ нинг жадвали $u_h = [u(x_0), ..., u(x_n)]$ ушбу $L_h u^h = f^h$ чекли айирмали схема ечими $u^h = [u_0, ..., u_n], u_i \approx u(x_i),$ билан алмаштирилади. Унда хатолик сифатида $\varepsilon^h = u_h - u^h = A - a$ миқдор олинади ва у $\|\varepsilon^h\| = \max\{|\varepsilon^0|, ..., |\varepsilon^n|\}, \quad \varepsilon^i = u_{h,i} - u^h{}_i$ нормада баҳоланади, $\|\varepsilon^h\| = O(h^r), h \to 0$.

Яхлитлаш хатоси. $a = a_m a_{m-1} ... a_0, a_{-1} a_{-2} ... a_{-n}$,бирор m+n+1 хонали ҳақиқий сон бўлсин. Соннинг ўнли ёзувидаги ҳар қандай 0 дан фарқли рақами муҳим рақам дейилади. Иккита муҳим рақамлар орасидаги ноллар ҳам муҳим дейилади, муҳим рақам кейинадаги ноль ҳам муҳим рақам дейилади. Нолга тенг бўлмаган рақамлар олдидаги ноллар муҳим бўлмайди. Агар шу ёзувда соннинг абсолют хатоси вергулдан кейинги n – рақамининг бир бирлигидан ошмаса, (n – рақамининг бир бирлигининг ярмидан ошмаса) кенг маънода m+n+1та ишончли рақамларга эга дейилади (тор маънода m+n+1та ишончли рақамларга эга дейилади).

Тақрибий сон шундай ёзиладики, унда ишончли рақамлар сақланади. Сонни бирор рақамининг 1 бирлигигача аниқлик билан яхлитлаш (кенг маънода ишончли рақамлар сақлаш) учун шу рақамни ўнг тамондаги барча рақамлар ўчирилади. Натижада вужудга келган сон ўчирилмай қолган рақамнинг 1 бирлигидан ошмайди.

Сонни бирор рақамининг 1 бирлигининг ярмигача аниқлик билан яхлитлаш (тор маънода ишончли рақамлар сақлаш) учун шу рақамдан ўнгда тўрган рақамлар ўчирилади ва а) ўчирилгаётган рақамларнинг биринчиси 5 дан катта бўлса, сақланаётган охирги рақамга 1 қўшилади, б) ўчирилгаётган рақамларнинг биринчиси 5 дан кичик бўлса ўзгартирилмайди , в) ўчирилаётган рақамнинг биринчиси 5 бўлиб, қолганларини ичида 0 дан фарқлилари бўлса , охирги рақамга 1 қўшилади, г) ўчирилгаётган рақамларнинг биринчиси 5 ва қолганлари 0 бўлса сақланаётган сон тоқ бўлса унга 1 қўшилади, жуфт бўлса қўшилмайди.

Тақрибий соннинг лимит абсолют хатоси билан ишончли рақамлари орасида муносабат мавжуд:

$\delta_a \le 10^{1-n}\, a_m^{-1}$ (кенг маънода), $\delta_a \le 0.5 * 10^{1-n}\, a_m^{-1}$ (тор маънода).

Аксинча, агар соннинг лимит абсолют нисбий хатоси ушбу

$$\delta_a \le 2(a_m + 1)^{-1} * 10^{1-n}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, a сон тор маънода n та ишончли рақамга эга.

5. $y = f(x_1,...,x_n)$ функциянинг қийматини $x=(x_1,,...,x_n)$ тақрибий нуқтада ҳисоблаш зарур, $x \in G \in R^n$.

Берилган: аргументларнинг хатоликлари: $\Delta_{x_j},\ \delta_{x_j},\ i = 1...n.$ Топиш керак функцциянинг хатоликларини: $\Delta_y, \delta_y = ?$ Бу хатоликлар назариясининг тўғри масаласи. Тескари масалада Δ_y, δ_y лар берилади, $\Delta_{x_j},\ \delta_{x_j},\ i = 1...n.$ ларни топиш керак.

Ечиш: $y = f(x)$ функцияни x нуқтанинг бирор атрофида узлуксиз дифференциалланувчи дейлик, X шу атрофга тегишли бўлсин, Лагранжнинг чекли орттирмалар формуласига асосан

$$\Delta y = Y - y = f(X_1,..,X_n) - f(x_1,..,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i}(X_i - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(c)}{\partial x_i}\Delta x_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Delta x_i$$

с-ўрта қиймат, яъни қуйидаги формулаларни ёзиш мумкин:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \Delta x_i,\ \Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i},\ \delta_y = \frac{1}{|y|}\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln f(x)}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i}.$$

Тескари масала ноаниқдир. Ечимлардан бири тенг таъсир принципидан топилади.Умумий хатоликка барча аргументлар бир хил ҳисса қўшади деб қабул қилинади,яъни

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right| \Delta_{x_i} = const, i = 1,...,n.$$

Бу бизга қуйидаги формулаларни беради:

$$\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_y}{n\left|\partial f(x)/\partial x_i\right|}, i = 1,...,n.$$

Мисол 6. Агар $r = 15 \pm 0,02, h = 19,1 \pm 0,05, \pi = 3,14$, бўлса конус ҳажми қандай абсалют ва нисбий хатоликлар билан ҳисобланишини аниқланг.

Ечиш.Маълумки,

$v = \pi r^2 h/3 = 4498,1,\ \partial v/\partial \pi = r^2 h/3 = 1432,5,\ \partial v/\partial r = 2\pi r h = 599,74,\ \partial v/\partial h = \pi r^2/3 = 235,5$

эканлиги учун лимит абсалют ва нисбий хатоликлар формуласига асосан:

$$\Delta_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right|\Delta_\pi + \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|\Delta_r + \left|\frac{\partial v}{\partial h}\right|\Delta_h = 26,06, \delta_v = \frac{26,1}{4498} = 0,006 \to v = 4498 \pm 26,1.$$

Мисол 7.Тўғри тўртбурчакнинг юзини 0,1 лимит абсалют хатолик билан ҳисоблаш учун унинг томонларини қандай лимит абсалют хатолик билан ҳисоблаш зарур?, $a \approx 4, b \approx 5$м.

Ечиш. Равшанки, $S = ab, \Delta_S = 0,1$.Хатоликлар назариясининг тескари масаласи формулаларидан топамиз:

$$\left|\frac{\partial S}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i} = \frac{\Delta_S}{n}, \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_S}{n\left|\frac{\partial S}{\partial x_i}\right|},$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = b = 5, \frac{\partial S}{\partial b} = a = 4,$$

$$\Delta_a = \frac{0,1}{2*5} = 0,01,\ \Delta_b = \frac{0,1}{2*4} = 0,0125.$$

6.Ҳозирги пайтда математик масалаларни ечишни дастур тузмасдан ечувчи математик программалар мавжуд: Matchad, Maple, Mathematica, MatLab, SWP, Derive, TK!Solver. Уларни математик тизимлар дейилади.

Бундай программалар химия, физика, механика, иқтисодиёт, чизмачилик ва бошқа соҳаларда ҳам мавжуд :QSP (операцияларни текшириш), GPSS (моделлаштириш), $\text{Lat}_{\text{e}}\text{X}$ (мақолалар тайёрлаш), Visio, AutoCad (қурилиш, техника, машинасозликда лойиҳалаш), Crocodile (математика, физика, химия...), Socrat (чет тилидан таржимон).

Ушбу курсда Matchad дастури математик масалаларни ечишда параллел ўргатилиб борилади.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Абсалют хато, чегаравий абсолют нима?
2. Нисбий хато, чегаравий нисбий хато нима?
3. Нисбий ва абсалют хато орасида қандай муносабат мавжуд?
4. Функциянинг хатолиги ва аргументлар хатоликлари орасида қандай муносбат мавжуд?
5. Ихтиёрий $y = f(x_1,...,x_n)$ функциянинг учун абсолют ва нисбий хатолик формулаларини ёзиб тўрт арифметик амаллар учун хатоликлар формуласининг чиқаринг.

6.Хатоликлар назариясининг тўғри ва тескари масаласига доир элементар геометриядан мисоллар келтиринг. Мундарижага

1.2. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Асосий тушунчалар: *Ночизиқ тенглама тўғрисида умумий тушунчалар, илдизларни ажратиш, битта тенглама учун итерация усули ва унинг хатолигини баҳолаш, тенгламани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтириш, усулнинг дастури, яқинлашиш шарти.*

АСОСИЙ НАТИЖАЛАР:

1.Ночизиқ тенглама тўғрисида умумий тушунчалар: $f(x)=0, f(\xi)=0$.

2.Илдизларни ажратиш масаласи $f(a)f(b)<0 \triangleright \exists c: f(c)=0$.

Кесмани 2 га бўлиш усули: $x^{(k)}=x^{(k-1)}+\mathrm{sign}(f(a)f(x^{(k-1)})(b-a)/2^k$, $k=1,2,...,x^{(0)}=a$.

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le (b-a)/2^k .$$

3.Итерация усули:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$, $g(x)=x-\lambda f(x), \lambda \ne 0$, $x^k = g(x^{k-1}), \xi = \lim_{k\to\infty} x^k$, $f(\xi)=0$.

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le q^k \left|\xi - x^{(0)}\right|, \left|\xi - x^{(k)}\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| .$$

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

1. Математикада тенгламалар чизиқли, алгебраик, тригонометрик, кўрсаткичли каби гуруҳларга бўлинади. Олий математикада яна дифференциал ва интеграл тенгламалар пайдо бўлади. Ночизиқ тенгламалар турли амалий масалаларни ечишда ўз-ўзидан пайдо бўлади. Масалан, классик бўлиб кетган берилган бурчакни учга тенг бўлиш масаласи ушбу формулага асосан кубик тенгламага олиб келади:

$$a = c\mathrm{os}(x) = 4\cos^3\left(\frac{x}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

Агар $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = y$ десак қуйидаги тенгламани оламиз:

$$4y^3 - 3y - a = 0.$$

у ерда $a = cos(x)$.

Иккинчи масала сифатида берилаган b ҳажмли кубдан ҳажми икки марта катта куб топилсин деган масалани қарайлик. Равшанки, кубнинг қиррасини х десак қуйидаги оддий кубик тенгламага келамиз: $x^3 = 2b$.

Учинчи масала сифатида $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ иррационал сонини нималигини билмоқчимиз. У ҳолда икки марта квадратга кўтариш ушбу тенгламага олиб келади:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Тўртинчи мисол сифатида, $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, X'(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0,$ чегаравий масалани қарайлик. Равшанки, ушбу функция $X = \cos(\lambda x)$ тенгламани ва биринчи чегара шартни қаноатлантиради.Иккинчи чегара шарт қаноатланиши учун $-\lambda \sin(\lambda l) + h\cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow tg(\lambda l) = h/\lambda$, бўлиши керак. Яна ночизиқ тенгламага келдик: $tg(\lambda l) = h/\lambda$.

Бундай мисолларни кўпдан кўп келтириш мумкин. Масалан, қурилиш механикасида ҳам чизиқли ихтиёрий ноъмалумли тенгламалар системасини ва ихтиёрий даражадаги алгебраик тенгламани ҳосил қилиш мумкин.

Абель, Галуа назариясидан маълумки 5 ва ундан юқори даражали тенгламаларнинг ечимларини формулалар ёрдамида аниқ топиш мумкин эмас. Бошқа ночизиқ тенгламалар ва уларнинг системалари ҳам тақрибий ечилади.

Баъзи бир таъриф ва теоремаларни келтирамиз. $y=f(x)$ функция $[a,b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $f(x)=0$ тенгликни қаноатлантирувчи $x\in[a,b]$ нуқта $f(x)=0$ тенгламани ечими ёки илдизи дейилади.

Теорема 1. Агар $f(x)\in C[a,b], f(a)f(b)<0$ бўлса, $[a,b]$ да $f(x)=0$ тенгламани ҳеч бўлмаганда битта ечими бор. Агар $f(x)$ $[a,b]$ да монотон бўлса (масалан, $signf(x)=const$) бу ечим ягона.

Теорема 2.(алгебранинг асосий теоремаси-Гаусс теоремаси**)** n-даражали алгебраик тенглама

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

нинг ҳеч бўлмаганда битта ечими бор. (Карралари, комплекс қўшмаларини қўшиб ҳисобланганда бу ечимлар сони n га тенг).

$f(x)=0$ тенглама ечимларини ечиш 2 та этапдан иборат бўлади.

1) илдизларни ажратиш, яъни илдизлар сони, улар жойлашган оралиқларни аниқлаш;

2) ажратилаган илдизларни олдиндан берилган аниқлик билан топиш.

Илдизларни ажратиш учун график ёки аналитик усул (теорама (1.2.1)) ишлатилиши мумкин. График усулда $y=f(x)$ функция графиги чизилиб илдиз жойлашган оралиқлар топилади. Аналитик усулда шундай $[a_k,b_k]$ кесмалар топиладики, $f(a_k)f(b_k)<0$ бўлсин.

Ажратилган илдизларни берилган аниқлик билан топиш учун кесмани иккига бўлиш, итерация, Ньютон усулларидан фойдаланилади.

2. Илдизларни ажратиш.

2.1. Геометрик усул.

Агар мумкин бўлса $y=f(x)$ функция графиги чизилади. Сўнг графикдан илдизлар сони ва улар ётган оралиқлар аниқланади.Агар $y=f(x)$функциянинг графигини чизиш мумкин бўлмаса $f(x)=0$ тенглама эквивалент $f_1(x)=f_2(x)$ (f= f_1 - f_2 ; f_1 ва f_2 -функциялар) кўринишга келтирилади ва $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ функциялар графиклари чизилади. Равшанки, бу графиклар кесишган нуқталарнинг абциссалари тенгламанинг ечимлари бўлади.

Мисол 1. $f(x)=x-\cos(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)$ тенгламанинг илдизлари ажратилсин.

Ечиш. **Т**енгламани $x=\cos(x)\ \ (f_1(x)=x,\ f_2(x)=\cos(x))$ кўринишга келтириб $y_1=x,\ y_2=\cos(x)$ функциялар графигини чизамиз. Чизмадан ягона илдиз $[0,\pi/2]$ кесмада ётганини кўриш мумкин.

Мисол 2. $x^4-4x+1=0, x\in(-\infty,+\infty)$ тенглама илдизлари ажратилсин.

Ечиш. Тенгламани $x^4=4x-1$ кўринишда ёзиб

$\begin{cases} y_1=x^4, \\ y_2=4x-1 \end{cases}$ функцияларнинг графигини чизамиз.

Тенгламанинг иккита ҳақиқий илдизи бор: $x_1\in[0,1], x_2\in[1,2]$, чунки

$$f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0,\ f(2)=9>0\,.$$

2.2. Аналитик усул. Илдизларни аналитик усулда ажратиш учун асосан, 1.2.1 теоремадан фойдаланамиз. Функциянинг аниқланиш соҳасини бўлакларга бўламиз. Бу бўлаклардан чеккаларида ишоралари ҳар хил бўлганларини ажратамиз. Агар бу кесмада функция монотон бўлса илдиз ягона. Масалан, $f(x)=x-\cos x=0$ тенглама учун $f(0)=-1<0,\ f(\pi/2)=\dfrac{\pi}{2}>0$ яъни $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ да илдиз бор; $f'(x)=1+sin>0$ лиги учун илдиз ягона.

$f(x)=x^4-4x+1$тенглама учун $f(0)=1>0,\ f(1)=-2<0,\ f(2)=9>0$,яъни $[0,1],[1,2]$ кесмаларда илдизлар бор.

$f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$ ҳосила $[0,1]$ да манфий, $[1,2]$ да мусбатлиги учун $[0,1],[1,2]$ кесмалардаги илдизлар ягона.

3. Итерация усули. $f(x)=0$ тенгламага итерация усулини қўллаш учун уни шу қулай кўринишга келтириш керак.

Фараз қилайлик $[a,b]$ да $f(x)=0$ тенгламанинг ягона илдизи бўлсин. Тенгламани бирор усул билан $x=g(x), x\in[a,b]$ эквивалент кўринишга келтирайлик.

Масалан: $x=\cos x,\ x=(x^4+1)/4,\ x=\sqrt[4]{1-4x}$. Одатда $g(x)$ қуйидагича танланади:

$$f(x)=x-g(x)=0 \tag{1}$$

$$q=\max_{x\in[a,b]}\{|g'(x)|\}<1. \tag{2}$$

(2) шарт итерация усулининг яқинлашиш шарти дейилади.

Итерация усулининг моҳияти қуйидагидан иборат: Ихтиёрий $x^{(0)}\in[a,b]$ бошланғич қиймат (итерация, яқинлашиш) олиниб қуйидаги кетма-кетлик ҳосил қилинади:

$$x^{(k)}=g(x^{(k-1)}),...\ k=1,2,... \tag{3}$$

(3) кетма-кетлик итерация кетма-кетлиги дейилади. Усулнинг моҳиятини ушбу фикр очиб беради

Теорема 3. $g(x) \in C[a,b]$ бўлиб, $\{x^{(k)}\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлсин, яъни $\xi = \lim_{k\to\infty}\{x^{(k)}\} \in [a,b]$ бўлсин. У ҳолда ξ нуқта $x = g(x)$ тенглама (яъни $f(x)=0$ ни ҳам) илдизи бўлади.

Исботи: $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$ тенгликда лимитга ўтамиз:

$$\xi = \lim_{k\to\infty}\{x^{(k)}\} = \lim_{k\to\infty} g(\{x^{(k-1)}\}) = g(\lim_{k\to\infty}\{x^{(k-1)}\}) = g(\xi).,$$

яъни $\xi = g(\xi)$ ёки $f(\xi)=0$.

Таъриф 1. Ушбу шартни қаноатлантирувчи функция

$$|g(x_1) - g(x_2)| < q|x_1 - x_2|, x_1, x_2 \in [a,b], 0 < q < 1, \tag{4}$$

$[a,b]$ да кесмани қисқартириб акс эттирувчи дейилади.

Таъриф 2. $\xi = g(\xi)$ нуқта $g(x)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

Масалан: $g(x) = 0.1\sin x$ функция R сонлар ўқини қисқартириб акс эттиради, чунки Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасига асосан ихтиёрий x_1, x_2 нуқталар учун

$$|0{,}1\sin x_1 - 0{,}1\sin x_2| = 0{,}1\cos c\, |x_1 - x_2| < 0{,}1|x_1 - x_2|$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда c - ўрта қиймат.

Қисқартириб акс эттирувчи функциялар учун одатда 1.1 теорема кўпинча ўринли бўлади.

Теорема 4. Фараз қилайлик $g(x)$ функция $G_r = \{x : |x - x_0| < r\}$ кесмани қисқартириб акс эттирувчи ва бошланғич итерация ушбу

$$|g(x_0) - x_0| < (1-q)r \tag{5}$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $\{x^{(k)} = g(x^{(k-1)})\}$ итерация кетма-кетлиги яқинлашувчан бўлиб қуйидаги фикрлар ўринли бўлади:

1). $\xi = \lim_{k\to\infty}\{x^{(k)}\}$ мавжуд, $\xi = g(\xi)$,

$$2). \left|\xi - x^{(k)}\right| \le q^k \left|\xi - x^{(0)}\right|, \tag{6}$$

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right| \le \frac{q^k}{1-q}\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| \tag{7}$$

Исбот. Кетма-кет ушбу фикрларни исботлаймиз.

1. $x^{(k)} = g(x^{(k-1)}) \in G_r$ $k = 1,2,...;$

Равшанки, $x^{(0)} \in G$ деб оламиз, шунинг учун, агар $\left|x^{(k-1)} - x^{(0)}\right| \le r$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизликлар бажарилади:

$$\left|x^{(k)} - x^{(0)}\right| = \left|g(x^{(k-1)}) - x^{(0)}\right| \le \left|g(x^{(k-1)}) - g(x^{(0)})\right| +$$

$$+\left|g(x^{(0)}) - x^{(0)}\right| \le q|x^{(k-1)} - x^{(0)}| + (1-q)r \le qr + (1-q)r \le r.$$

Демак, агар $x^{(0)} \in G_r$ бўлса $x^{(k)} \in G_r$ бўлар экан.

2. $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$ кетма-кетликни яқинлашувчан эканлигини кўрсатамиз.

Равшанки, $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| = |g(x^{(k)}) - g(x^{(k-1)})| \le q|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \le ... \le q^k |x^{(1)} - x^{(0)}|$

$$|x^{(k+p)}-x^{(k)}|\le|x^{(k+p)}-x^{(k+p-1)}|+|x^{(k+p-1)}-x^{(k+p-2)}|+...+|x^{(k+1)}-x^{(k)}|\le$$
$$\le q^k|x^{(1)}-x^{(0)}|+q^{k+1}|x^{(1)}-x^{(0)}|+...+q^{k+p-1}|x^{(1)}-x^{(0)}|\le$$
$$\le q^k(1+q+...+q^{p-1})\left|x^{(1)}-x^{(0)}\right|\le q^k|x^{(1)}-x^{(0)}|(1+q+...)\le\frac{q^k}{1-q}|x^{(1)}-x^{(0)}|.$$

яъни

$$|x^{(k+p)}-x^{(k)}|<\frac{q^k}{1-q}\ |x^{(1)}-x^{(0)}|.$$

Бу тенгсизликда $k\to\infty$ десак $|x^{(p+k)}-x^{(k)}|\to 0$ яъни $\{x^{(k)}\}$ни фундаментал кетма-кетлик эканлиги келиб чиқади. $\{x^{(k)}\}\in G_r$ лигидан ва G_rнинг ёпиқлигидан шундай ξ мавжуд бўладики $\xi=\lim\limits_{k\to\infty}\{x^{(k)}\}$,бўлади. У ҳолда $\xi=g(\xi)$ ёки $f(\xi)=0$ эканлиги равшан.

3.(6) тенгсизликни кўрсатамиз:

$$|\xi-x^{(k)}|=|g(\xi)-g(x^{(k-1)})|<q|\xi-x^{(k-1)}|\le q^2|\xi-x^{(k-2)}|\le...\le q^k|\xi-x^{(0)}|\ .$$

4.(7) тенгсизликни исботлаймиз:

Равшанки,

$$|\xi-x^{(k)}|\le q|\xi-x^{(k-1)}|\le q|\xi-x^{(k)}+x^{(k)}-x^{(k-1)}|\le q|\xi-x^{(k)}|+q|x^{(k)}-x^{(k-1)}|$$

Бу ердан

$$(1-q)|\xi-x^{(k)}|\le q|x^{(k)}-x^{(k-1)}|.$$

Бу тенгсизликдан (7) ни топамиз.

(7) нинг ўнг томони осонгина топилади. Уни **апостериор** баҳо дейилади, яъни қолдиқ ҳад баҳоси ечимнинг тақрибий қиймати топилгандан сўнг аниқланади.(6) баҳо **априор** баҳо дейилади. Уни биз тақрибий ечим топилмасдан баҳолашимиз мумкин.(6) ва (7) баҳолар итерацияларни қачонгача давом эттириб ҳисоблаш зарурлиги аниқланади. Масалан, $|\xi-x^{(k)}|<\varepsilon$ бўлиши учун

$$q^k|\xi-x^{(k)}|<\varepsilon, \tag{8}$$
$$q|x^{(k)}-x^{(k-1)}|/(1-q)<\varepsilon \tag{9}$$

бажарилиши зарур.(9) тенгсизлик амалда кенг қўлланилади.

Энди $f(x)=0$ тенгламани $x=g(x)$ кўринишга қандай қилиб келтириш мумкинлигини кўрайлик. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин. 1) Фараз қилайлик $f'(x)>0$ ҳосила мавжуд ва $m\le f'(x)\le M$ тенгсизлик $x\in[a,b]$да бажарилсин. У ҳолда

$$x=g(x)=x-lf(x)=x-f(x)/M, l=1/M\ ,$$

деб олишимиз мумкин, чунки

$$|g'(x)|=|1-f'(x)/M|\le|1-m/M|\le 1, x\in[a,b],$$

яъни $q=1-m/M$ дейиш мумкин. 2) Агар $f'(x)<0$ бўлса $f_1(x)=-f(x)=0$ тенгламани қараб яна юқоридаги ҳолга келиш мумкин.

Мисол 3. $f(x)=x^4-4x+1=0$ тенгламани қарайлик. Маълумки, илдизлар $[0,1]$, $[1,2]$оралиқларда ётади ва

$$f(x)=4(x^3-1)=\begin{cases}\le 0,\ x\in[0,1],\\ \ge 0, x\in[1,2],\end{cases}$$

$[0,1]$ даги ечим учун $f_1(x) = -f(x) = 0$ тенгламани қараймиз.
Бу ҳолда $g^/(x) = 4(1-x^3)$, $M = \max\{| f^/(x), x \in [0,1]\} = 4$.

Шунинг учун $g(x) = x-(4x-x^4-1)/4 = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

$[1,2]$ даги ечим учун

$$M = \max\{| f^/(x), x \in [1,2]\} = 28$$

$$g(x) = x-(x^4-4x+1)/28 = 32x/28 - x^4/28 - 1/28;$$

$[0,1]$ даги ечим учун $x^0 = 0$ деймиз ва қуйидагиларни топамиз:

$$x^{(1)} = 0,25; x^{(2)} = 0,2539062, x^{(3)} = 0,2541561;$$

$$x^{(4)} = 0.2541725; x^5 = 0,2541725; x^{(6)} = 0,2541736;$$

$$x^{(7)} = 0,2541737;$$

Равшанки, ечимни $0,2541737$деб олиш мумкин.
$[1,2]$ даги ечим учун $x^{(0)} = 1,2$ деб олиб қуйидаги ҳисоблашларни топамиз:

$$x^{(1)} = 1,2616571; x^{(2)} = 1,31156881; x^{(3)} = 1,360912;$$

$$x^{(4)} = 1,3971063; x^{(5)}1,3951456; x^{(6)} = 1,42343308;$$

$$x^{(7)} = 1,4444457;..., x^{(18)} = 1,4927254; x^{(19)} = 1,49236;$$

$$x^{(20)} = 1,492936;$$

Демак, ечим сифатида $1,492936$сонни олиш мумкин.

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм

MathCAD дастурида бир ноъмалумли ночизиқ тенгламаларни тақрибий ечиш учун стандарт ички функциялар мавжуд, улар

1) root(f(x),x)), given ..find, minimize(f(x),x) -ихтиёрий f(x)=0 тенглама учун,

2) polyroots(v) -кўпҳадли тенглама $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ учун, бу ерда $v=[a_0,a_1,...,a_n]^T$ -коэффицентлар.

Қуйидаги келишувни қабул қиламиз: Ҳар бир сатрда MathCAD командасини табиий- математик кўринишда ёзамиз, сатр аввал командани тушунтирувчи текст- изоҳдан ва сўнг командадан иборат бўлади.MathCAD ойнасида изоҳ майдончаси Shift+” тугмалар билан очилади.Биз текст- изоҳни курсив билан ажратиб кўрсатамиз.

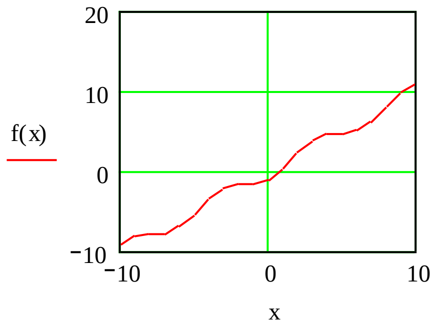
Мисол 1. f(x)=x-cos(x)=0 тенгламани тақрибий ечиш қуйидагича:

Бошланғич итерация ва тенглама x:=0 f(x):=x-cos(x)

Ички функцияга мурожаат $r:=root(f(x),x)^T$

Илдизни чиқариш r=0.7398

*Графикни келтирамиз (*f(x)=x-cos(x),-10 ≤ x ≤ 10*).*



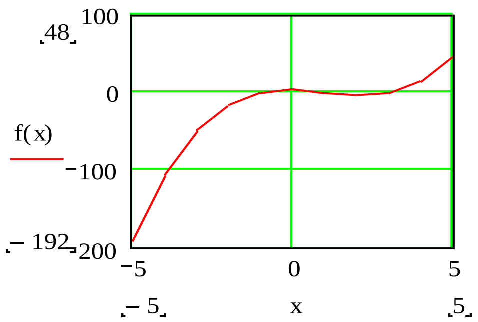
Мисол 2. $f(x)=x^3-3x^2-x+3=0$ тенгламанинг барча илдизларини топиш

Тенглама ва коэффицентлар $f(x):=x^3-3x^2-x+3=0$ v:=[3 -1 -3 1]^T

Ички функцияларга мурожаиитлар r:=polyroots(v) s:=root(f(x),x)

Илдизларни чиқариш r=(-1, 3, 1)^T s → (-1, 3, 1)^T

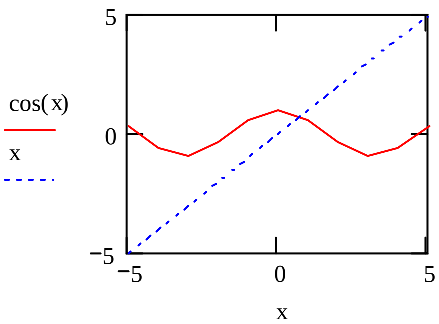
*Графикни келтирамиз (*f(x)=x^3-3x^2-x+3,-10 ≤ x ≤ 10*).*



Энди итерация ва Ньютон усулларини ташкил этувчи ҳисоблаш жараёнларини тузамиз, бу усулларни ўргатишда жуда муҳим.

Мисол 3. Итерация усули. $f(x)=x-\cos(x)=0$ тенгламани қараймиз.

[-5,5] кесмада график чизамиз *Graph>X-Y Plot (Shift+2)*



Бошланғич итерация ва итерациялар сонини бериш $x_0 := 0 \;\; k := 0..10$

f(x)=0 *ни* x=g(x) *кўринишга келтириш, итерациялар* $x_{k+1} := \cos(x_k)$

Натижани чиқариш x^T=(1, 0.5403, 0.8576,..., 0.7314)

Мисол 4. Кесмани 2 га бўлиш усули. $f(x) := \sqrt{x+2} + 0.7x = 0$.

Тенглама $f(x) := \sqrt{x+2} + 0.7x$

Параметрлар $x_0 := -1 \;\; k := 0..10 \;\; a := -1 \;\; b := -2$

Кесмани 2 га бўлиш усули $x_{k+1} := x_k + sign(f(x_0))sign(f(x_k))\dfrac{b-a}{2^{k+1}}$

Натижани чиқариш $x^T = \{-1\; -1.5\; -1.125\;\; -1.188\; -1.242\; -1.246\; -1.244\; -1.243\}$

Изоҳ. 1. $f(x)=0$ тенглама учун энг содда усул-бу кесмани тенг иккига бўлиш усулидир**.** Бу усулнинг ғояси қуйидагича: $\{x^{(k)} = g(x^{(k-1)})\}$ кетма-кетлик қуйидагича тузилади:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + sign(f(a)f(x^{(k-1)})(b-a)/2^k, \; k=1,2,...,x^{(0)}=a.$$

Равшанки, аниқ ечим билан тақрибий ечим орасидаги хатолик қуйидагича:

$$\left|\xi - x^{(k)}\right| \le (b-a)/2^k.$$

2. Графиклар MathCAD да жуда осон чизилади. Бунинг учун чизиладиган функция ва унга дастлабки маълумотлар берилади: масалан,

$$f(x) := x * \sin(x) \;\; a := 0 \;\; b := 6 * \pi \;\; n := 100 \;\; h := (b-a)/n \;\; x := a, a+h..b$$

Курсорни ишчи майдонга қўйиб, қуроллар панелидан ёки менюдан Graph>X-Y Plot (Shift+2) командаси берилади. Керакли маркерлар ўрнига функция ва аргумент белгиси қўйилади. Enter босилгач тасвир чиқади. Бир графикда 16 тагача график ясаш мумкин. График устида қўш чертки бажарилса графикни форматлаш имконияти туғилади. Унда ўқлар учун масштаблар, тасвир учун тўр, ранглар, чизиқ қалинлиги, турини кўрсатиш мумкин. Форматлаш яхши кўринмай қолган графиклар учун фойда беради.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Итерация усулининг моҳиятини айтиб беринг.
2. Тенглама итерация усулини қўллаш учун қандай қилиб кўринишга келитирилади.
3. Итерация усулининг яқинлашиш шартини маъносини айтиб беринг.
4. Итерация усулининг назарий ва амалий хатоликларининг маъносини айтиб беринг.
5. Қуйидаги тенгламалар итерация усули билан ечилсин $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, ax + c - b\sin(x) = 0, ax + c - b\cos(x) = 0$.

   Коэффецентлар танлаб олинсин. Паскаль тилида программа тузилиб жавоблар олинсин. Мундарижага

1.3. НЬЮТОН УСУЛИ

Асосий тушунчалар: *Ньютон усулнинг ғояси, усулнинг қолдиғи, итерация усули билан боғланиш, усулнинг дастури.*

Асосий натижалар:

1. Усулнинг ғояси: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})/f'(x^{(k)}), k = 1, 2, ...$, $f(x^{(0)})f''(x^{(0)})>0$,

$$\xi = \lim_{k\to\infty} x^{(k)},\ f(\xi) = 0.$$

2. Усулнинг қолдиғи $|\xi\text{-}x^{(k)}| \le q(|\xi\text{-}x^{(k-1)}|)^2, |\xi\text{-}x^{(k)}| \le (q|\xi\text{-}x^{(0)}|)^{2^k}/q, q = M_2/(2m_1)$.

3. Итерация усули билан алоқаси: $x^k = g(x^{k-1}), g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

1. Бу усул амалда энг кўп қўлланиладиган усуллардан бири ҳисобланади. Фараз қилайлик, $[a,b]$ да $y = f(x)$ узлуксиз дифференциаланувчи функция берилган, яъни $f(x) \in C^1[a,b]$. Фараз қилайлик $f(\xi) = 0$, $f(a)f(b) < 0$ ва $f'(x) \ne 0$ бўлсин $x \in [a,b], x^{(k)} \approx \xi$ деб $f(x)$ ни $x^{(k)}$ атрофида Тейлор формуласи бўйича ёзамиз:

$$0 = f(\xi) = f(x^{(k)} + \xi - x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f^{(1)}(x^{(k)})(\xi - x^{(k)}) + f^{(2)}(c)(\xi - x^{(k)})^2/2$$

Бу ерда c ноъмалум оралиқ миқдор. $x^{(k)} \cong \xi$ бўлганлиги учун $(\xi - x^{(k)})^2$ чексиз кичик миқдор. Уни ўз ичига олган ҳадни ташлаб юборамиз:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(\xi - x^{(k)}) \approx 0$$

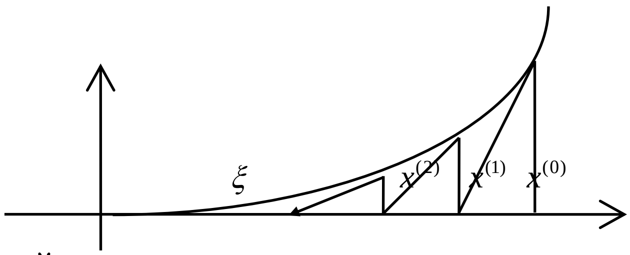
Бу формуланинг чап қисмини ξ эмас, бошқа бирор $x^{(k+1)}$ нолга айлантирсин:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0.$$

Бу ердан

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})/f'(x^{(k)}), k = 1, 2, ... \qquad (1)$$

(1) уринмалар ёки Ньютон усули дейилади. Чизмага мурожаат қилайлик.



$x^{(0)}$ нуқтада уринма ўтказамиз:

$$y = f(x^{(0)}) + (x - x^{(0)})f'(x^{(0)})$$

y=0 деб $x^{(1)}$ ни топамиз ва хоказо . $x^{(k-1)}$ нуқтада уринма

$$y = f(x^{(k-1)}) + (x - x^{(k-1)})f'(x^{(k-1)})$$

кўринишда бўлади. $x^{(k)}$ нуқтада $y = 0$ деб (1) формулани ҳосил қиламиз. Шунинг учун Ньютон усулини кўпинча уринмалар усули дейишади.

Чизмадан кўринадики, $x^{(k)} \to \xi$ бўлиши учун

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0 \ , \qquad (2).$$

бажарилиши керак. Бу шартни бошланғич шартни танлаб олиш шарти дейилади. $x^{(k+1)}$ ξ га $x^{(k)}$ нисбатан яқинроқ бўлиши керак.

2.Ньютон усулининг қолдиғи.

Фараз қилайлик $f \in C^2[a,b]$ дейлик ва

$$M_2 = \max\{ |f''(x)|, x \in [a,b]\},$$

$$m_1 = \min \{ |f'(x)|, x \in [a,b]\} \neq 0, \ q = M_2/2m_1.$$

Тейлор формуласига асосан

$$0 = f(\xi) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})(\xi - x^{(k-1)}) + f''(c)(\xi - x^{(k-1)})^2 /2.$$

Шунинг учун

$$\xi = x^{(k-1)} - f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)}) - f''(c)(\xi - x^{(k-1)})/(2f'(x^{(k-1)})).$$

Бу тенгликдан Ньютон усулининг формуласи бўлмиш формула

$$x^{(k)} = x^{(k-1)}) - f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)})$$

ни айириб ушбу баҳони ҳосил қиламиз:

$$\xi - x^{(k)} = f''(c)(\xi - x^{(k-1)})^2 /2f'(x^{(k-1)}) \qquad (3)$$

Демак,

$$|\xi - x^{(k)}| \leq q|\xi - x^{(k-1)}|^2, \quad q|\xi - x^{(k)}| \leq \{q|\xi - x^{(k-1)}|\}^2. \qquad (4)$$

Бу тенгсизликдан кўринадики, агар $q|\xi - x(^{k-1)}| < 1$ бўлса Ньютон методи жуда тез яқинлашади. Умуман олганда $a_k = q\left|\xi - x^{(k)}\right|$ десак, $a_k \leq a_{k-1}^2$, шунинг учун, $a_k \leq a_{k-1}^2 \leq a_{k-2}^4 \leq ... a_0^{2^k}$, ва олдинги белгилашларга қайтиб ушбу тенгсизликни оламиз

$$|\xi - x^{(k)}| \leq \frac{(q|\xi - x^{(0)}|)^{2^k}}{q} \qquad (5)$$

(1) ўрнига ушбу формулани олиш мумкин:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)}) - f(x^{(k-1)})/f'(x^{(0)}), \ k=1,2,.... \qquad (7)$$

Бу усулни соддалаштирилган Ньютон усули дейилади.

3.Итерация усули билан боғланиш.

Равшанки, $l \neq 0$ бўлса

$$f(x)=0 \leftrightarrow x = x + lf(x) \ x=g(x), \ g(x)=x+lf(x).$$

Итерация методида $|g'(x)|$ қанчалик кичик бўлса у шунчалик тез яқинлашади. Шунинг учун $g'(x^{(k-1)})=0$ деб қабул қиламиз:

$$g'(x^{(k-1)}) = 1 + l \cdot f'(x^{(k-1)}) = 0 \ \rightarrow l = -1/(f'(x^{(k-1)}))$$

ва яна

$$x^{(k)} = x^{(k-1)}) - f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)}), k=1,2,...$$

формулага келамиз.

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

Мисол 1. Ньютон усули. $f(x)=x-\cos(x)=0$ тенгламани қараймиз.

Бошланғич итерация ва итерациялар сони $x_0:=0\ \ k:=0..10$

Ньютон усули $x^{(k+1)}=x^{(k)}-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$ $x_{k+1}:=x_k-(x_k-\cos(x_k))/(1+\sin(x_k))$

Натижани чиқариш $x^T=(1,\ 0.75036,\ 0.73911,...,\ 0.73909)$

Натижа итерация усулига нисбатан тезроқ олинди ва аниқлик яхшироқ.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Ньютон усулининг ғоясининг айтиб беринг.
2. Ньютон усулининг геометрик маъносини айтиб беринг.
3. Ньютон усулининг яқинлашиш тартиби қандай?
4. Ньютон усулининг қолдиқ хадининг баҳоланг.
5. Қуйидаги тенгламалар Ньютон усули билан ечилсин. $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $ax-b\sin(x)=0$, $ax-b\cos(x)=0$.Коэффецентлар танлаб олинсин. Паскаль тилида программа тузилиб жавоблар олинсин.

Мундарижага

1.4. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА МАСАЛАЛАРИНИ ТАҚРИБИЙ ЕЧИШ

Асосий тушунчалар: *Чизиқли алгебра масалалари, уч диагоналли системани ечиш, прогонка (ҳайдаш) усули , усулнинг дастури,.*

Асосий натижалар::

1. Чизиқли алгебра масалалари:

$Ax=b, B=A^{-1}, x=A^{-1}b, \Delta=\det(A), Ax=\lambda x$.

2. Уч диагоналли системани ечиш:

$b_0x_0+c_0x_1=d_0, a_ix_{i-1}+b_ix_i+c_ix_{i+1}=d_i,\ i=l,...n-1, a_nx_{n-1}+b_nx_n=d_n$.

$$\begin{cases} u_{i+1}=\dfrac{-c_i}{a_iu_i+b_i}, v_{i+1}=\dfrac{d_i-a_iv_i}{a_iu_i+b_i}, i=0,..,n-1, u_0=v_0=0; \\ \quad x_n=\dfrac{d_n-a_nv_n}{a_nu_n+b_n},\ x_i=u_{i+1}x_{i+1}+v_{i+1}\ ,\ i=n-1,..,0 \end{cases}$$

3. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

1. Чизиқли алгебра масалалари

Ушбу чизиқли тенгламалар системасини қараймиз:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1=a_{1n+1} \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2=a_{2n+1} \\ &.. \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{2n}x_n=b_n=a_{nn+1} \end{aligned} \qquad (1)$$

Бу системани ушбу векторлар,матрица

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, x=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix}, b=\begin{vmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \dots \\ a_{nn+1} \end{vmatrix}$$

киритиб қисқа кўринишда езамиз:

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}\,. \tag{2}$$

Алгебрадан маълумки, бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\det(\mathrm{A}) \neq 0$, система ягона ечимга эга: $\mathrm{x=A^{-1}b}$ ёки Крамер формулаларига асосан $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, i=1,\dots,n$, бу $\Delta = \det(A), \Delta_i = \det(A_i), A_i$ -матрица A дан i-устун билан фарқ қилади, унда ўнг томон жойлашган, бу ерда $\mathrm{A^{-1}}$ - тескари матрица ;

2) $\det(\mathrm{A})=0$, бу ернинг ўзида иккита ҳол бўлиши мумкин:

a) $\Delta = \det(A) = 0, \Delta_i = \det(A_i) = 0, i=1,\dots,n,$

бўлса бу система биргаликда, акс ҳолда яъни

b) $\Delta = \det(A) = 0, \exists j : \Delta_j = \det(A_j) \neq 0, j \in [1,\dots,n]$

бўлса, бу система ечимга эга эмас. Бу фикрлар чизиқли алмаштиришлар ёрдамида ҳосил қилинадиган ва доимий тўғри бўлган ушбу айниятлардан келиб чиқади:

$$x_i \Delta = \Delta_i, i=1,\dots,n\,.$$

$\mathrm{Ax}=l\mathrm{x},\ \mathrm{x} \neq 0$ шартларни қаноатлантирувчи x-вектор хос вектор, l-сон хос сон дейилади. (1) системанинг ечимини топиш, $\det(\mathrm{A}),\mathrm{A^{-1}}$, хос сон, хос векторларни топиш масалалари чизиқли алгебра масалалари дейилади.

2. Уч диагоналли системани ечиш. Бу масалалар амалда жуда кўп учрайди, ҳатто шу курснинг ўзида бир неча бор ишлатилади. Қуйидаги

$$\begin{aligned} &\mathrm{b}_0 x_0 + c_0 x_1 = d_0, \\ &a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i,\ i = l,\dots n-1, \\ &\mathrm{a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

кўринишдаги ситема уч диагоналли система дейилади. Бу система ҳайдаш (прогонка) усули (И.М.Гельфанд, О.В.Локуциевский-1953й.) билан ечилади. Равшанки, ечимлар орасида

$$\mathrm{x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}}\ ,\ \mathrm{i=0,1,..,n-1}, \tag{4}$$

боғланиш бор(0- тенглама учун бу аниқ, $\mathrm{x_0}$ ни 1-сига қўямиз ва ҳоказо). Демак,

$$\mathrm{x_{i-1} = u_i x_i + v_i}\ ,\ \mathrm{i=1,..,n}.$$

Бу тенгликдан фойдаланиб (3) ни ўзгартирамиз:

$$a_i(u_i x_i + v_i) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i,\ i=1,...,n-1$$
$$(a_i u_i + b_i)x_i + c_i x_{i+1} = d_i - a_i v_i,\ i=1,..,n-1$$
$$x_i = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 1,...,n-1$$

Охирги тенгликни (4) билан солиштириб

$$u_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i}, v_{i+1} = \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 1,...,n-1 \qquad (5)$$

тенгликларни оламиз. Уларни $i=0, n$ учун кенгайтирамиз.

(3) нинг 0-чисидан

$$x_0 = -\frac{c_0}{d_0} x_1 + \frac{d_0}{b_0} \qquad (6)$$

(5), (6) дан $v_o=0$, $u_o=0$ бўлиши кераклигини топамиз. (4) дан ва (3) нинг охиргисидан

$$x_{n-1} = u_n x_n + v_n,$$
$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n,$$

x_{n-1} ни йўқотсак,

$$a_n(u_n x_n + v_n) + b_n x_n = b_n \triangleright\ x_n = \frac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n} = v_{n+1}.$$

ни топамиз. Демак,

$$\{u_{i+1} = -c_i/(a_i u_i + b_i), v_{i+1} = (d_i - a_i v_i)/(a_i u_i + b_i),\ i = 0,..,n-1, u_0 = v_0 = 0; \qquad (7)$$
$$x_n = (d_n - a_n v_n)/(a_n u_n + b_n), x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1},\ i=n-1,..,0 \qquad (8)$$

3. Прогонка усулининг дастури: Масалани Маткадда ечиш

а) $b_0 x_0 + c_0 x_1 = d_0, a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i,\ i = l,...n-1, a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n$.-ЧАТС,

б) $u_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i u_i + b_i}, v_{i+1} = \frac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}, i = 0,..,n-1, u_0 = v_0 = 0$-прогонка усулида ўнг юриш

в) $x_n = \frac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n}$, $x_i = u_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}$, $i=n-1,..,0$ - прогонка усулида чап юриш

Уч диогналли система коэффицентлари $n:=10$ $i:=0..n$ $a_0:=0$ $c_n:=0$

Уч диогналли матрица ва ўнг томонни бериш

0- тенглама коэффицентлари $m_{0,0}:=b_0$ $m_{0,1} := c_0$ $d_0 := \gamma_0$

i-тенглама коэффициентлари $i := 1..n-1$ $m_{i,i-1} := a_i$ $m_{i,i} := b_i$ $m_{i,i+1} := c_i$ $d_i := \gamma_i$

n- тенглама коэффицентлари. $m_{n,n-1} := a_n$ $m_{n,n} := b_n$ $d_n := \gamma_1$

Назорат учун ЧАТС матрицаси ва ўнг томонни экранга чиқарамиз:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.95	-1.999	1.05	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.95	-1.998	1.05	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.95	-1.997	1.05	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.95	-1.996	1.05	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.95	-1.995	1.05	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.95	-1.994	1.05	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.993	1.05	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.992	1.05
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.991
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

m =

	0
0	0
1	$6.301\cdot10^{-3}$
2	0.013
3	0.021
4	0.029
5	0.038
6	0.048
7	0.059
8	0.071
9	0.085
10	0.1

d =

Ечимнинг қийматларини чиқарамиз:

Прогонка коэффициентлари $u_0 = 0 \;\; v_0 = 0 \;\; i = 0..n-1 \;\; u_{i+1} = \dfrac{-c_i}{a_i u_i + b_i} \quad v_{i+1} = \dfrac{d_i - a_i v_i}{a_i u_i + b_i}$

Ечимни ҳисоблаш $x_n = \dfrac{d_n - a_n v_n}{a_n u_n + b_n}$ $\quad i=n-1..0 \quad x_i = u_{i+1}x_{i+1} + v_{i+1}$

Ечимни чиқариш $x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.526E-3	0.907E-3	0.028	0.065	0.126	0.217	0.344	0.513	0.729	1

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Чизиқли алгебра масалалари деб қандай масалаларга айтилади?
2. Чизиқли системанинг қачон ечими мавжуд ва ягона.
3. Прогонка усули неча этапдан иборат?
4. Прогонка усулининг турғунлик шартини топинг.
5. $b_0y_0+c_0y_1=d_0, y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}=d_0=-h^2 f_i$, $i=1..n-1$, $a_ny_{n-1}+b_ny_n=d_n$ уч диоганалли система прогонка усули билан ечилсин

Мундарижага

1.5. ЧАТСНИ ЕЧИШНИНГ АНИҚ УСУЛЛАРИ. ГАУСС ВА ГАУСС-ЖОРДАН УСУЛИ.

Асосий тушунчалар: *Гаусс усули ва Жордан - Гаусс усуллари, усулнинг дастури*

Асосий натижалар:

1. Гаусс усули: $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b, Ux = y, Ly = b, LU = A$, *L-қуйи ва U-юқори учбурчак матрицалар.*

2. Жордан - Гаусс усули:

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx = b, D = [d_1,...,d_n], x_i = b_i / d_i, i = 1,...,n.$$

3. Детерминант ва тескари матрицани ҳисоблаш:

$D_n = a_{11}D_{n-1} = a_{11}a^{(1)}_{22}D_{n-1} = ... = a_{11}a^{(1)}_{22}...a^{(n-1)}_{nn}$, $\quad [A|E]=[E|B], B=A^{-1}, \det(E) = 1$

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

1.Гаусс усули

(4.1) системани Гаусс усули билан ечиш ғояси қуйидагича:

1-қадам. $a_{11} \neq 0$ бўлсин. Акс ҳолда қолган тенгламалардан x_1 олдида нолга тенг бўлмаган тенглама (ёки модуль бўйича x_1 олдида энг катта коэффициентли тенглама) биринчи тенглама қилиб олинади. Биринчи тенгламадан x_1 ни топиб оламиз:

$$x_1 = (a_{1n+1} - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n)/a_{11} = = a^{(1)}_{1n+1} - (a^{(1)}_{12}x_2 + ... + a^{(1)}_{1n}x_n)$$

Бу тенгламани барча қолган тенгламаларга қўямиз:

$$\begin{aligned}
&x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1n+1}^{(1)}\\
&a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2n+1}^{(1)}\\
&.......................................\\
&a_{n2}^{(1)}x_2 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{nn+1}^{(1)}\\
&a_{ij}^{(1)} = a_{ij} / a_{11},\ j = 1, 2, ..., n+1\\
&a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1i},\ i = 2, ..., n;\ j = 2, .., n+1.
\end{aligned} \tag{1}$$

2-қадам. (1) системанинг иккинчисидан агар, $a_{22}^{(1)} \neq 0$, бўлса, (акс ҳолда тенгламаларни ўрнини ўзгартирамиз), x_2 ни топиб учинчи тенгламадан бошлаб x_2 ни йўқотамиз ва хоказо. n-1 - қадамда қуйидаги системага келамиз:

$$\begin{aligned}
x_1 + a^{(1)}_{12}x_2 + ... + a^{(1)}_{1n}x_n &= a^{(1)}_{1,n+1},\\
x_2 .. + a^{(2)}_{13}x_3 + ... + a^{(2)}_{n2}x_n &= a^{(2)}_{2,n+1},\\
....&.......................\\
x_n &= a^{(n)}_{n,n+1}
\end{aligned}$$

Бу ердан топамиз:

$$a_{ki}^{(k)} = \frac{a_{ki}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}};\quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} * a_{ki}^{(k)};$$
$$k = 1, 2, ..., n;\ j = k+1, ..., n+1;\ i = k+1, ..., n. \tag{3}$$

$$x_n = a_{nn+1}^{(n)},\qquad x_i = a_{in+1}^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}x_i,\quad i = n-1, ..., 1;\qquad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}. \tag{4}$$

Формулалар (3) билан Гаусс усулида ишлаш (4.2) системани (3) учбурчак системага келтиради (тўғри юриш), (4) формулалар билан номаълумлар топилади (тескари юриш). Гаусс усулини қуйидагича таҳлил қилиш мумкин: $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b, Ux = y, Ly = b, LU = A$, бу ерда L ,U-қуйи ва юқори учбурчак матрицалар, улардан бирининг диогнал элементлари, масалан, U-нинг диогнал элементлари 1 га тенг. Гаусс усулида A=LU ёйилма топилгач, аввал $Ly = b$ система, сўнг $Ux = y$ система осон ечилади.

Гаусс усулида бирор a_{kk}^{k-1} бош элемент нолга тенг бўлса системанинг детерминанти нолга тенг ва бу ҳолда система ё ечимга эга эмас, ё чексиз кўп ечимга эга.

Мисол 1. Ушбу система ечилсин: Ax=в,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 5\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}5\\ 0\\ 3\end{bmatrix}.$$

Системани кенгайтирилган матрица тузиб схематик равишда ечамиз:

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 5\\ 4 & -1 & 5 & 3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 5\\ 0 & -5 & 9 & 3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & -11 & -22\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & -11 & -22\end{bmatrix}$$

Бу ердан, z=2,y=4z-5=3,x=-y+z=-1. Жавоб:{-1,3,2}.

2. Жордан-Гаусс усули.

Энди Жордан-Гаусс усулини кўриб чиқамиз.

1-қадам. Гаусс методи билан бир хил.

2-қадамда x_2 ноъмалум 2-тенглама ёрдамида 1-,3-,..,n-тенгламалардан йўқотилади (Гаусс методида 1-тенгламадан йўқотилмас эди) ва хоказо n-1 - қадамда x_{n-1} -номаълум 1-,2-,..,n-2,n - тенгламалардан йўқотилади.

Натижада ушбу системага келинади:

$$x_1=a_1^{(n)}, x_2=a_2^{(n)},...,x_n=a_n^{(n)} \tag{5}$$

яъни ечим топилади. Жордан методида тескари юриш йўқ экан.

3.Детерминант ва тескари матрицани ҳисоблаш.

Гаусс усули ёрдамида детерминант ва тескари матрицани ҳисоблаш мумкин.

n-тартибли квадрат матрица $A=[a_{ij}]$ нинг детерминанти $D_n=\det(A)$ ни ҳисоблашни қарайлик. Равшанки, энг содда ҳол n=2 да бўлади:

$$D_2=\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$a_{11}\neq 0$ деб D_3 ни қарайлик. У ҳолда элементлар алмаштиришлар қуйидагини беради:

$$D_3=\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}/a_{11} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}/a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a_{21}/a_{11} & d_{22}^{(1)} & d_{23}^{(1)}\\ a_{31}/a_{11} & d_{32}^{(1)} & d_{33}^{(1)}\end{vmatrix}=a_{11}D_2.$$

Бу ерда

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)}\end{vmatrix}, a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-a_{i1}a_{1j}/a_{11}=\frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{1j}\\ a_{i1} & a_{ij}\end{vmatrix}.$$

Шунинг учун, $a_{ij}^{(1)}=a_{11}a_{ij}-a_{i1}a_{1j}$ десак,

$$D_3 = a_{11} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{vmatrix},$$

яъни

$$D_3 = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{vmatrix}, \quad a_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} \ .$$

Ҳудди шу каби, ихтиёрий n учун қуйидаги муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{22}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ & \dots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}} & \alpha_{n2}^{(1)} & \alpha_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11} D_{n-1}, \ \alpha_{ij}^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{ij} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{ij}^{(1)} / a_{11},$$

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{23}^{(1)} \dots \alpha_{2n}^{(1)} \\ \dots \\ \alpha_{n2}^{(1)} \dots \alpha_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-1}} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \dots a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \dots a_{3n}^{(1)} \\ & \dots \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} \dots a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}$$

$$D_n = a_{11} D_{n-1} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{2n-1} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

ёки

$$D_n = a_{11} D_{n-1} = a_{11} a^{(1)}_{22} D_{n-1} = \dots = a_{11} a^{(1)}_{22} \dots a^{(n-1)}_{nn}, \quad (6)$$

Мисоллар 2.

1. $$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -18.$$

2. $$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = -18.$$

Кўрсатилган мисоллар алгоритмни тўғрилигини билдиради.

A^{-1}=B тескари матрицани ҳисоблаш учун кенгайтирилган Ax=E матрицавий тенгламани қараймиз.Уни битта матрицали бир неча ўнг томонли чизиқли тенгламалар системаси деб қараш мумкин, ўнг томонлар бирлик векторлар.Унга Гаусс усулини қўллаб EX=X=B=A^{-1} муносабатни оламиз. Шундай қилиб,тескари матрицани ҳисоблаш учун A матрица ёнига бирлик матрицани ёзиб кенгайтирилган матрица тузиш керак экан,ҳосил бўлган кенгайтирилган матрицани Гаусс усулидаги элементар алмаштиришлар ёрдамида *A* матрица ўрнида бирлик матрица ҳосил қилингунча ўзгартириш керак экан.Шунда E матрица ўрнида A га тескари матрица ҳосил бўлар экан.

Мисол 3.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}, A^{-1}=?.$$

Тескари матрицани кенгайтирилган матрица орқали топамиз:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&3&1&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-5&-2&1&0\\0&-5&-7&-3&0&1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&5&2&-1&0\\0&-5&-7&-3&0&1\end{bmatrix}\approx$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-7&-3&2&0\\0&1&5&2&-1&0\\0&0&18&7&-5&1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&-7&-3&2&0\\0&1&5&2&-1&0\\0&0&1&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\0&1&0&\frac{1}{18}&\frac{-7}{18}&-\frac{5}{18}\\0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{-5}{18}&\frac{1}{18}\end{bmatrix}$$

Бу ердан, тескари матрицани топамиз:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\\frac{1}{18}&\frac{-7}{18}&-\frac{5}{18}\\\frac{7}{18}&\frac{-5}{18}&\frac{1}{18}\end{bmatrix}.$$

4. Mathcad да ички функциялар ва алгоритм.

MathCAD да жуда кўп чизиқли алгебра масалалари ечилиши мумкин ва бу жараён табиий математика тилида олиб борилади.У нақадар содда ва тушунарлики, биз айрим асосий командаларни санаб ўтиш билан чекланамиз.

4.1. Тескари матрица усули

Матрица ва ўнг томон $$A:=\begin{bmatrix}40&1&1&1\\2&40&2&1\\2&2&2&2\\1&1&2&40\end{bmatrix}\quad b:=\begin{bmatrix}43\\45\\46\\44\end{bmatrix}$$

Ечимни ҳисоблаш ва чиқариш $x:=A^{-1}b \quad x^T=[1\,1\,1\,1]$

4.2. Ички функция lsolve(A,b) ёрдамида ечиш

Матрица ва ўнг томон $A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$

Ички функцияга мурожаат қилиш $r := lsolve(A, b)$

Натижани чиқариш

$r^T = [1\,1\;1\;1]$

4.3. Гаусс усулининг ички функцияси rref(A) ёрдамида ечиш

Матрица ва ўнг томон $A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$

Кенгайтирилган матрица $B := augment(A, b) \quad B = \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 & 43 \\ 2 & 40 & 2 & 1 & 45 \\ 2 & 2 & 40 & 2 & 46 \\ 1 & 1 & 2 & 40 & 44 \end{bmatrix}$

Ички функция ва ечим $s := rref(B) \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4.4. Тескари матрица

Матрица $A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}$

Ички функция ва уни чиқариш, текшириш $C := A^{-1}$ $C =$

$$C = \begin{pmatrix} 0.0251 & -0.0006 & -0.0006 & -0.0006 \\ -0.0012 & 0.0251 & -0.0012 & -0.0005 \\ -0.0012 & -0.0012 & 0.0251 & -0.0012 \\ -0.0005 & -0.0006 & -0.0012 & 0.0251 \end{pmatrix} \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5. Детерминант, хос сонлар, хос векторлар

Матрица $A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}$

Детерминант, тескари матрица детерминанти, уларнинг кўпайтмаси

$d := |A| \quad d1 := |C| \quad$ d=2538588 d1=0.00000039 $\quad d * d1 = 1$

Хос сонлар $r := eigenvals(A) \qquad r^T = [44.49\ 38.866\ 39.37\ 37.644]$

Хос векторлар $s := eigenvals(A) \qquad s = \begin{bmatrix} 0.3582 & -0.1852 & -0 & 0.0958 \\ 0.5338 & 0.7658 & 0.7071 & -0.5129 \\ 0.606 & 0.5878 & 0 & 0.7295 \\ 0.4686 & -0.6132 & -0.7071 & -0.4423 \end{bmatrix}$

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Гаусс усулининг моҳиятини айтиб беринг.
2. Юқори тартибли детерминантларини ҳисоблашни қандай коидаларини биласиз?
3. Гаусс усули билан детерминантни ҳисоблашни 2 тартибли детерминантларга келтириш ғоясини айтиб беринг.
4. Тескари матрицани Гаусс усули билан ҳисоблаш ғоясини айтиб беринг.
5. Гаусс усулини доир масалалар тузиб беринг.

Мундарижага

1.6. ЧИЗИҚЛИ СИСТЕМА УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ

Асосий тушунчалар: *Матрица нормаси, ЧАТС учун итерация усули ва унинг хатолигини баҳолаш, яқинлашиш шарти, усулнинг дастури. Зейдель усули.*

Асосий натижалар:

1. Матрицанинг нормаси: $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

2.Итерация усулининг назарияси:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + d,\ x^k = Cx^{k-1} + d,\ \lim_{k\to\infty} x^k = \xi,\ A\xi = b,$$

$$\|\xi - x^{(k)}\| \le \|C\|^k \|\xi - x^{(k-1)}\|,\ \left\|\xi - x^{(k)}\right\| \le \frac{\|C\|}{1-\|C\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|.$$

3. Содда итерация усули:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\ne i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}{}_i\right),\ k=0,1,.... \ .$$

4.Зейдель усули:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right),\ k=0,1,....$$.

5. *Итерация усулининг Mathcad да дастури.*

1. Матрицанинг нормаси

$x=(x_1,...,x_n) \in R^n$, $y=(y_1,...,y_n) \in R^n$ бўлсин ва $y=Ax$ алмаштириш

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

матрица билан берилсин.

R^n да норма сифатида ушбу миқдорлар олинади:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|,\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,\ \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p},$$

Таъриф. $\|x\|$ $x \in R^n$ нинг бирор нормаси бўлсин. Ушбу

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\| \neq 1} \|Ax\|$$

миқдор A матрицанинг $\|x\|$ нормага мос нормаси дейилади.

<u>Лемма</u>. $\|x\|_\infty, \|x\|_1, \|x\|_2$ нормага A мос матрицанинг нормалари ушбулардир:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Исбот. $x \in R^n$, $y=Ax$ бўлсин. Равшанки,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1,...,n.$$

Шунинг учун

$$\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty = \max_i \left(\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| \right) \leq$$

$$\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \left(\max |x_i| \right) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty = \|A\|_\infty \|x\|_\infty .$$

Демак, ҳар қандай $x \in R^n$ учун

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty,\ x \neq 0.$$

Ҳудди шу каби

$$\|Ax\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_i| \leq$$

$$\le \sum_{i}^{n}\left(\max\left(\sum_{j}^{n}\left|a_{ij}\right|\right)\right)\left|x_j\right| = \left|A\right|_1 \left|x\right|_1,$$

$$\|Ax\|_1 \le \|A\|_1 \|x\|_1, x \ne 0 \text{ ҳар қандай } x \ne 0.$$

Коши - Буняковский (Шварц)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right|^2 \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^2 \sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right|^2$$

тенгсизлигидан фойдаланамиз. У ҳолда

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 \sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2 \sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2 = \|A\|_2^2 \|x\|_2^2.$$

Демак,

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2, x \ne 0 \text{ ҳар қандай } x \ne 0.$$

Биринчи ва иккинчи норма учун

$$\|Ax\|_l = \|A\|_l \|x\|_l, \ l = l, 2$$

векторлар топилади. (Мустақил топинг). Учинчи норма учун бундай вектор йўқ.

Матрицалар учун яна бир норма киритамиз:

$$\|A\|_4 = n \max_i \left|a_{ij}\right|.$$

Бу норма итерация усулида муҳим роль ўйнайди.Маълумки,чекли ўлчовли фазода барча нормалар эквивалент.

2. $Ax = b$ чизиқли тенгламалар системасини қараймиз. Уни итерация методини қўллаш учун қулай кўринишга келтирамиз:

$$x + l\,Ax = x + l\,b, \quad l = 0$$

$$x = (E - l\,A)x + l\,b, \quad Ex = x,$$

$$C = E - l\,A, \quad d = l\,b$$

$$x = Cx + d,$$

бу ерда B - матрица, d - вектор .

Содда итерация методи қуйидагича $x^0 \in R^n$ ихтиёрий бошланғич вектор олиниб ушбу векторлар кетма-кетлиги ҳосил қилинади.

$$x^{(x)} = Cx^{(k-1)} + d, \ k = 0,1,... \qquad (1)$$

Теорема. Агар $\|C\| < 1$ бўлса, у ҳолда $x = Cx + d\,(Ax = b)$ система ягона ечимга эга:

$$A\,\xi = b \quad (\xi = C\xi + d), \quad \xi = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

Ундан ташқари қуйидаги баҳолар ўринли:

$$\|\xi - x^{(k)}\| \le \|C\|^k \|\xi - x^{(k-1)}\| \qquad (2)$$

$$\left\|\xi - x^{(k)}\right\| \le \frac{\|C\|}{1 - \|C\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \qquad (3)$$

Исбот. Ечимнинг ягоналиги ва мавжудлиги. Фараз қилайлик

$\xi = C\xi + d$.

У ҳолда

$$\|\xi\| <= \|C\xi + d\| <= \|C\| \, \|\xi\| + \|d\|,$$

$$\|\xi\| \le \frac{\|d\|}{1-\|C\|}$$

Агар $d = 0$ бўлса $\xi = 0$ бўлмокда, яъни бир жинсли система фақат *0* ечимга эга экан. У ҳолда бир жинсли бўлмаган

$$x = Cx + d$$

система ҳар қандай d учун ягона ечимга эга.

Энди

$$r^{(k)} = \xi - x^{(k)} \text{ деб } \xi = C\xi + d, \quad x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d$$

тенгликларни бир-биридан айирсак

$$\xi - x^{(k)} = C(\xi - x^{(k-1)}) \rightarrow \quad r^{(k)} = Cr^{(k-1)}$$

тенгликни оламиз. У ҳолда

$$\|r^{(k)}\| = \|Cr^{(k-1)}\| \le \|C\| \|r^{(k-1)}\| =$$

$$\|C\| \|Cr^{(k-2)}\| \le \|C\|^2 \|r^{(k-2)}\| \le \|C\|^k \|r^{(0)}\|, \| \xi - x^{(k)} \| \le \|C\|^k \| \xi - x^{(0)} \|.$$

эканлигидан

$$\| \xi - x^{(k)} \| \; \|C\| \; \|\xi - x^{(k)}\| + \|C\| \; \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$(1-\|C\|) \; \| \xi - x^{(k)} \| \le \|C\| \; \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\| \xi - x^{(k-1)} \| \le \frac{\|C\|}{1-\|C\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Теоремадаги биринчи баҳо (2) априор баҳони беради, яъни тақрибий ечим хатолигини системани ечмасдан олдинги (назарий) баҳони беради. Теоремадаги иккинчи баҳо апостериор (амалий) баҳони беради. Апостериор баҳо ҳар бир тақрибий ечим топилгач, бу тақрибий ечим аник ечимга яқинлашяптими деган саволга жавоб беради.

Мисол. $B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ матрица учун $|\|B\|_\infty = 6/5 > 1, \|B\|_1 = 1, \|B\|_2 = \sqrt{23}/5 < 1$

Теоремадан кўринадики, итерация усули яқинлашиши учун C матрицанинг қандайдир нормаси бирдан кичик бўлиши керак экан, яъни $\|C\| < 1, C = E - lA$ бўлганлиги учун параметр l ни шундай танлаш керак эканки, $\|E - lA\| < 1$ бўлсин. Масалан:4-нормани олсак $\|C\| < \max\{|a_{ij}|/n, i, j = 1..n\}$ деб олиш мумкин. Бундай ҳолда итерация усулини системага тўғридан тўғри қўллаш мумкин.

3.Содда итерация ёки Якоби усули қуйидагича қурилади: ҳар бир тенгламадан $a_{ii} \ne 0$ деб x_i лар топиб олинади:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \ne i}^{n} a_{ij} x_j), \; k=0,1,....$$

Сўнг итерациялар қуйидагича қурилади:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right), \ k=0,1,....$$

4. Зейдель усули.

$Ax = b$ системада $a_{ii} \neq 0$ деб i-тенгламадан x_i ни топиб оламиз

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j + d_i$$

$$x_i = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j - \frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \ i = 1,....n\ .$$

Натижада $x = Cx + d$ кўринишга келамиз, бу ерда

$$C = c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j = i \\ 0\ , & j = i \end{cases}$$

Зейдель методида итерациялар қуйидагича кўрилади:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + d_i, \ k=0,1,....$$

x^0- ихтиёрий .

Теорема. Агар A матрицада диагонал элементлар салмоқли бўлса, яъни

$$\sum_{j\neq 1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\ , \ i=1,..,n$$

$Ax = b$ система ягона ечимга эга ва Зейдель методи яқинлашади:

$$\xi = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

Исбот. Олдинги теоремага асосан

$$\|C\|_l = \max \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}| \quad < 1$$

бўлиши керак, ёки

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \sum_{j\neq i}^{n} |c_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{a_{ii}} < 1$$

бўлиши керак. Демак,

$$\sum_{j\neq 1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\ , \ i=1,..,n$$

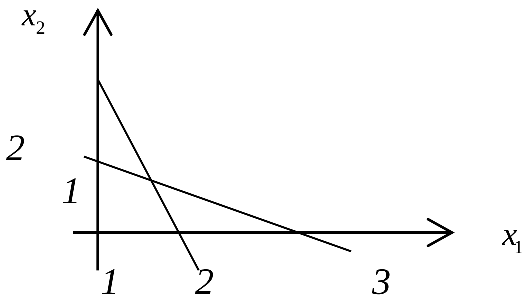
Мисол.

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 = 3$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{x_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{x_1}{2}$$



яқинлашишларни топамиз.

$x_1^{(0)} = (0,0)$,

$x_1^{(1)} = 3/2 = 1.5$, $x_2^{(1)} = 1.5$

$x_1^{(2)} = 3/2 - (1*3)/(2*2) = 3/2 - 3/4 = 3/4 = 0.75$

$x_2^{(2)} = 0.75$

$x_1^{(3)} = 3/2-(1*3)/(2*4)=3/2-3/8=9/8=1.25$

$x_2^{(3)} = 1.25$

$x_1^{(4)} = 0.9375$ $x_1^{(5)} = 1.03125$ $x_1^{(6)} = 0.982375$

$x_2^{(4)} = 0.9375$ $x_2^{(5)} = 1.03125$ $x_2^{(6)} = 0.982375$

5. Итерация усулини Mathcad да ташкил этиш.

Тенгламалар системасини бериш $A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 40 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ $b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix}$

Бирлик матрица ва 0- итерация $E := identity(4)$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $x := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Итерация параметри $\tau := 0.005$

ЧАТС ни итерация учун қулай кўринишга келтириш

$C := E - \tau A$ $d := \tau b$ $x := d + Cx$

Итерацияларни қуриш $k := 0..30$ $x^{<k+1>} := d + Cx^{<k>}$

Натижани чиқариш

x =

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.989	0.992	0.993	0.995	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
1	0.992	0.994	0.995	0.996	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1
2	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1	1	1
3	0.991	0.993	0.994	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Матрицанинг нормаси нима?
2. Чизиқли тенгламалар системаси учун содда итерация усулининг яқинлашиш шарти қандай ?
3. Зейдел усулининг яқинлашиш шарти қандай ?
4. Чизиқли система итерация усулини қўллаш учун қандай кўринишга келтирилади?
5. x+2y=3,2x+y=3 система учун итерация усулини кўринг.

Мундарижага

1.7.МАТРИЦАНИНГ ХОС СОНЛАРИНИ ТОПИШ

Асосий тушунчалар: *Матрицанинг хос сонлари, хос векторлари, Гамильтон-Келли теоремаси, симметрик матрицалар учун хос сонларнинг хоссалари, энг катта хос сони топиш учун итерация усули.*

Асосий натижалар:

1.Хос сонлар ва хос векторлар: $Ax=\lambda x,\ \ x\neq 0,$.

2.Симметрик матрицанинг хос сонлари: $1)\lambda\in R, 2)Ax=\lambda x, Ay=\mu y, \lambda\neq\mu\rightarrow(x,y)=0$.

3.Энг катта энг кичик хос сонлар учун итерация усули:

$$1)\ x^k=\lambda_k Ax^{k-1}, x^0\in R^n, \left\|x^k\right\|=1, \lambda_k\rightarrow\lambda_{\max}, k\rightarrow\infty.$$

$$2)\ y^k=\mu_k A^{-1}y^{k-1}, y^0\in R^n, \left\|y^k\right\|=1, \mu_k\rightarrow\mu_{\min}, k\rightarrow\infty.$$

4.Характеристик тенглама қуришнинг Леверье-Фадеев усули.

5. MathCAD да дастурлар.

1. $A=[a_{ij}],\ i,j=1,...,n$ квадрат, ҳақиқий элементли матрица берилган бўлсин, $A:R^n\rightarrow R^n$, E- бирлик матрица бўлсин.

Ушбу

$$Ax=\lambda x,\ \ x\neq 0, \qquad (1)$$

тенгликни қаноатлантирувчи λ сон A матрицанинг хос сони, $x\neq 0$ вектор эса хос вектори дейилади.

A матрицанинг барча хос сонлари топиш хос сонлар проблемаси дейилади. Кўрайликчи, бу масала нимага олиб келар экан. (1) ни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$Ax-\lambda Ex=(A-\lambda E)x=0. \qquad (2)$$

(2) бир жинсли система, у ноль бўлмаган ечимга эга бўлиши учун, унинг детерминанти 0 га тенг бўлиши керак: $\det(A-\lambda E)=|A-\lambda E|=0.$
Лекин,

$$A-\lambda E=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda \ \ a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} \ \ a_{22}-\lambda...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} \ \ a_{n2}....a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Шунинг учун,

$$\det(A-\lambda E)=(-1)^n(\lambda^n+\rho_1\lambda^{n-1}+\rho_2\lambda^{n-2}+...+\rho_n)=0. \quad (3)$$

(3) тенглама A матрицанинг ҳарактеристик (асрий) тенгламаси дейилади. У n –даражали алгебраик тенглама. Шундай қилиб, хос сонларни топиш учун алгебраик n-даражали характеристик тенгламани барча ечимларини топиш керак экан.

Алгебранинг асосий теоремасига асосан, характеристик тенглама алгебраик n-даражали тенглама бўлганлиги учун, ҳар қандай A-матрица карралари, комплекс илдизларини ҳисобга олганда n-та хос сонларга эга.

Гамильтон-Келли теоремаси. Ҳар қандай матрица ўз характеристик тенглмасини қаноатлантиради: $\det(A\text{-}\lambda E)=\det(A\text{-}AE)=0.$

Амалиётда, кўпинча матрицанинг бир неча хос сонларини топиш талаб этилади, масалан, энг кичик ва энг катта хос сонларни. Уларни топиш, хос сонларнинг хусусий проблемаси дейилади. Барча хос сонларни топиш хос сонларнинг тўлиқ проблемаси дейилади. Энг кичик хос сони топиш бошқа матрицанинг энг катта хос сони топиш масаласига келтирилади. Хақиқатан ҳам, $Ax=\lambda x \leftrightarrow A^{-1}x=x/\lambda$ эканлигидан. A-матрица учун энг катта хос сон, $B=A^{-1}$ матрица учун энг кичик хос сон экан.

Хос сонларни топишнинг бир қанча усуллари мавжуд:Энг катта (энг кичик) хос сонни топишнинг итерация усули.
1)Аввал характеристик тенгламани, сўнг хос сонларни топиш усуллари (Крылов, Леверье, Фадеев, интерполяция, ноъмалум коэффицентлар...);
2)Хос сонларни характеристик тенглама тузмасдан топувчи, яъни матрицаларни алмаштиришга асосланган итерация усуллари (Якоби,…).

2. Матрица ўзининг транспортирланганнига (комплекс қўшмасига) тенг бўлса, ёки R^n да скаляр кўпайтма маъносида

$$(Ax,y)=(x,A^*y)=(x,Ay),\ x,y\in R^n \quad (4)$$

тенгликни қаноатлантирса симметрик дейилади.

Симметрик матрица учун хос сонлар ҳақида қуйидаги фикрлар ўринли:

Теорема 1. Симметрик матрицанинг хос сонлари ҳақиқий, ҳар хил хос сонларга мос векторлар ўзаро ортогонал.

Исбот. $Ax=\lambda x, Ay=\mu y$ бўлсин. Фараз килайлик, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2,\ \bar{\lambda}=\lambda_1-i\lambda_2$ бўлсин. Таърифга асосан,

$$(Ax,x)=(\lambda x,x)=\lambda(x,x)=(x,Ax)=(x,\lambda x)=\bar{\lambda}(x,x)$$

Шунинг учун, $(\lambda-\bar{\lambda})(x,x)=0.$ $x\neq 0$ эканлигидан $\lambda=\bar{\lambda}=\lambda_1\in R.$ Иккинчидан,

$$(Ax,y)=\lambda(x,y)=(x,Ay)=(x,\mu y)=\mu(x,y).$$

Шунинг учун, $(\lambda-\mu)(x,y)=0,$ $\lambda\neq\mu$ эканлигидан, $(x,y)=0\Rightarrow x\perp y$.

$T*T=E$ шартни қаноатлантирувчи матрицалар ортогонал матрицалар дейилади, равшанки, улар учун $T*T^{-1}=E$. $A=T*BT$ шарти қаноатлантирувчи матрицалар ўхшаш дейилади.

Теорема 2. Ўхшаш матрицалар бир хил сон сонларга эга, хос векторлар ўзаро чизиқли боғланган.

Исбот. $Ax=\lambda x$, бўлсин, у ҳолда $Ax=T*BTx=\lambda x$, ва $Tx=y$ десак

$$T*By=\lambda x=\lambda T^{-1}y\Rightarrow By=(T*)^{-1}\lambda T^{-1}y=\lambda(T*T)^{-1}y=\lambda Ey=\lambda y$$

Яъни, $By=\lambda y$ *ва* $y=Tx$ экан.

3. $Ax=\lambda x$ масалада энг катта хос сони топишга киришамиз, Бирор $x^{(0)}\in R^n$ вектор олиб $x^{(k)}=Ax^{(k-1)}$,k=1,2,..., векторлар кетма-кетлиги қурамиз.

Теорема 3. $x^{(0)}\in R^n$ ихтиёрий бошланғич вектор учун $x^{(k)}=(x_1^{(k)},...,x_n^{(k)})=Ax^{(k)}$ кетма-кетлик қурилган бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}=\lambda_{\max},i=1,...,n \qquad (5)$$

Исбот. $Ae_i=\lambda_i e_i$ бўлсин, $i=l,...$. Фараз қилайлик,

$$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq...\geq|\lambda_n|$$

Равшанки, $x^{(0)}=a_1e_1+..+a_ne_n$ десак,

$$x^{(1)}=Ax^{(0)}=\lambda_1a_1e_1+..+\lambda_na_ne_n,...,x^{(k)}=Ax^{(k-1)}\lambda_1^ka_1e_1+...+\lambda_n^ka_ne_n.$$

Энди $e_i=(e_{i1},e_{i2},...,e_{in})$ десак, $x_1^{(k)}=\lambda_1^ka_1e_{1i}+...+\lambda_n^ka_ne_{ni}$ ва

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}=\frac{\lambda_1^ka_1e_{1i}+...+\lambda_n^ka_ne_{ni}}{\lambda_1^{k-1}a_1e_{1i}+...+\lambda_n^{k-1}a_ne_{ni}}=$$

$$=\lambda_1\frac{1+\mu_2^k(a_2e_{2i}/a_1e_{1i})+...+\mu_n^k(a_ne_{ni}/a_1e_{1i})}{1+\mu_2^{k-1}(a_2e_{2i}/a_1e_{1i})+..+\mu_n^{k-1}(a_ne_{ni}/a_1e_{1i})}=\lambda_1+0(|\mu_2|^{k-1})$$

бу ерда $\mu_i=\lambda_i/\lambda_1$, $i>1$. Яъни,

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}=\lambda_1+O(|\mu_2|^{k-1}). \qquad (6)$$

Бу ердан (5) келиб чиқади.

4. Характеристик кўпхадни топишнинг ноъмалум коэффицентлар усули.

$D(\lambda)=\det(A-\lambda E)=p_0+p_1\lambda+...+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$ дейлик. p_i коэффицентларни топиш учун

$$D(i)=d_i,i=0,...,n-1, \qquad (7)$$

Детерминантларни ҳисоблайлик.Равшанки,

$p_0=d_0$, $p_0+p_1+...+p_{n-1}+1^n=d_1$, $p_0+2p_1+...+2^{n-1}p_{n-1}+2^n=d_2$, .., $p_0+(n-1)p_1+...+(n-1)^{n-1}p_{n-1}+(n-1)^n=d_{n-1}$.(8)

Бу ердан дарров келиб чиқадики, $p_0=d_0$ ва

$p_1+...+p_{n-1}=d_1-d_0-1^n$, $p_0+2p_1+...+2^{n-1}p_{n-1}=d_2-d_0-2^n$,..,$(n-1)p_1+...+(n-1)^{n-1}p_{n-1}=d_{n-1}-d_0-(n-1)^n$. (9)

Энди ушбу матрица ва векторларни киритамиз:

$$M=[m_{ij}]=[i^j], i,j=1,...,n-1, p=[p_1,p_2,...,p_{n-1}], b=[b_1,b_2,...,b_{n-1}], b_i=d_i-d_0-i^n.$$

Натижада (7.9) системани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$Mp=b \qquad (10)$$

M матрицанинг детерминанти нолдан фарқли, у Вандермонд детерминантининг миноридир. Уни ечиб $p=M^{-1}b$ формуладан характеристик тенгламанинг коэффицентларини топамиз. Характеристик тенгламани бирор усул билан ечиб хос сонларни топамиз.

5.Mathcad да хос сон ва векторлар ички функциялар $eigenvals(A)$, $eigenvals(A)$ орқали осонгина топилади.

Матрица, ички функциялар $A:=\begin{bmatrix}40 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 40 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 40\end{bmatrix}$

Ички функциялар $r:=eigenvals(A)$ $s:=eigenvals(A)$

хос сон ва векторлар $r=\begin{bmatrix}44.49\\ 38.86\\ 39.37\\ 37.64\end{bmatrix}$ $s=\begin{bmatrix}0.3582 & -0.1852 & -0 & 0.0958\\ 0.5338 & 0.7658 & 0.7071 & -0.5129\\ 0.606 & 0.5878 & 0 & 0.7295\\ 0.4686 & -0.6132 & -0.7071 & -0.4423\end{bmatrix}$

Ундан ташқари, энг катта ва энг кичик хос сонлар (5) алгоритм асосида ҳам топилиши мумкин.

Мундарижага

1.8. НОЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ УЧУН ИТЕРАЦИЯ УСУЛИ.

Асосий тушунчалар: *Қисқартириб акс эттириш принципи. Тақрибий ечимни хатолигини баҳолаш, назарий ва амалий баҳолар.*

Асосий натижалар:

1. Қисқартириб акс эттириш принципи:

$x=g(x), x^k=g(x^{k-1}), k=1,..., \lim\limits_{k\to\infty} x^k=\xi,\ x,\ \xi\in R^n, \|g(x)-g(y)\|\le q\|x-y\|, 0<q<1.$

2. *Қолдиқ ҳад учун баҳолар:*

$\|\xi - x^{(k)}\|\le g^k\|\ \xi - x^{(0)}\|$, $\|\xi - x^{(k)}\|\le q\|\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\|/(1-q)=q^k\|\ x^{(1)} - x^{(0)}\|/(1-q)$

3.*Итерация усули:* $f(x)=0\Leftrightarrow x=g(x), x^k=g(x^{k-1}), k=1,..., \lim\limits_{k\to\infty} x^k=\xi, x,\xi\in R^n$.

4.*MathCAD да дастурлар.*

1. Қисқартириб акс эттириш принципи.

R^n деб n-ўлчовли векторлар тўпламига айтилади. У чизиқли нормаланган тўлиқ фазо, $x \in R^n$ нормаси (узунлиги) қуйидаги тенгликлар билан берилади:

$$||x||_{R^n} = ||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\ , \ l \le p \le \infty$$

Жумладан,

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, ||x||_\infty = \max |x_i|,$$

G бирор ёпиқ соха бўлсин. Ихтиёрий $f: G \to R^n$ аксылантириш n та n - ўзгарувчили функциялар

$$f(x) = f(x_1,...,x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,...,x_n) \\ f_2(x_1,...,x_n) \\ .... \\ f_n(x_1,...,x_n) \end{bmatrix}$$

вектор функция ёрдамида берилсин. Шунинг учун

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

вектор тенглама n та тенглама системаси

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ f_2(x_1,...,x_n) = 0 \\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_n(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

га эквивалент. (2) ни ушбу кўринишда ёзиш мумкин бўлсин.

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1,...,x_n) \\ x_2 = g_2(x_1,...,x_n) \\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ..\ .\ .\ .\ .. \\ x_n = g_n(x_1,...,x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

ёки вектор кўринишида

$$x = g(x) \qquad (4)$$

бу ерда равшанки, $g = [g_1,...,g_n]^T$.

Таъриф. Агар $0 \le$ q<1сон топилиб, ушбу тенгсизлик

$$|| g(x) - g(y) || \ \le q \ || x - y ||, \ \ \forall x, y \ \in G \qquad (5)$$

бажарилса, $g: G \to G \subset R_n$, аксылантириш $G \in R^n$ да қисқартириб аксылантириш дейилади.Қисқартириб аксылантириш узлуксиздир.

Таъриф. Агар ҳар қандай $x \in G$ учун $g(x) \in G$ бўлса g ни ўзини ўзига аксылантиради дейилади: $g{:}G \to G$ ёки $g(G) \subseteq G$.

Энди ушбу шартни қарайлик:

$$G = S_{(x_o, r)} = \{x \ \in R^n : \ || x - x_0 || \le r\}$$

Лемма. Агар $g: S \to R^n$ аксылантиришда S да қисқартириб аксылантириш, яъни

$|| g(x) - g(y) || \le q || x - y ||, 0 \le q \le 1, \ x, y \in \overrightarrow{S},$ ва $|| g(x_0) - x_0 || \le (1-q)r$ бўлса,

$g(\vec{S}) \subseteq \vec{S}$ бўлади, яъни $g: \vec{S} \to \vec{S}$ бўлади.

Исбот. $x \in \vec{S}(x_0, r)$ ихтиёрий нуқта бўлсин. Унда

$$\| g(x) - x_0 \| \le \| g(x) - g(x_0) \| + \| g(x_0) - x_0 \| \le qr + (1-q)r \le r .$$

Энди $x = g(x)$ тенгламани тақрибий ечишга ўтамиз.

Таъриф. Агар ξ=g(ξ) бўлса $\xi \in G$ нуқта $g(x)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.

$x = g(x)$ тенглама учун итерация усули қуйидагича кўрилади:

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), k = 1, ..., \tag{6}$$

тузилади. Бу кетма кетликнинг маъносини ушбу теорема ечиб беради.

Теорема 1. Агар $g: G \to G$ узлуксиз ва $g(G) \subseteq G$, лимит $\xi = \lim\{x^{(k)}, k \to \infty\}$ мавжуд бўлса, ξ=g(ξ) тенглик ўринли, яъни ξ нуқта $g(x)$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси бўлади.

Исбот. Равшанки, $\xi = \lim\limits_{x\to\infty} x^{(k)} = \lim\limits_{x\to\infty} g(x^{(k-1)}) = g(\lim\limits_{x\to\infty} x^{(k-1)}) = g(\xi)$.

Теорема 2. (қисқартириб акс эттириш принципи).
Агар $g(G) \subseteq G$ бўлиб, $g(x)$-қисқартириб акслантириш бўлса, у ҳолда $g(x)\ : G \to G\ \ G$ тўпламда ягона қўзғалмас нуқтага эга.

Бу қўзғалмас нуқта итерация кетма-кетлигининг лимити сифатида топилиши мумкин. Аниқ ечим ва итерация орасидаги фарқ қуйидагича баҳоланади:

$$\| \xi - x^{(k)} \| \le q^k \| \xi - x^{(0)} \|, \qquad \text{(назарий баҳо)} \tag{7}$$

$$\| \xi - x^{(k)} \| \le \frac{q}{1-q} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| = \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \quad \text{(амалий баҳо)} \tag{8}$$

Исбот. 1) $\{x^{(k)}\}$ -фундаментал кетма-кетлик, яъни

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \to 0, \ k,p \to \infty .$$

Ҳақиқатдан ҳам, $\|x^{(k+i)} - x^{(k+i+1)}\| \le q \|x^{(k+i-1)} - x^{(k+i)}\| \le q^{k+i} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$,

$$\| x^{(k)} - x^{(k+1)} \| \le \sum_{i=0}^{p-1} \left\| x^{(k+i)} - x^{(k+i+1)} \right\| \le \sum_{i=0}^{p=1} q^{k+i} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

Демак,

$$\| x^{(k)} - x^{(k+p)} \| \le \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \sum_{i=0}^{p-1} q^{k+i} \le \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \sum_{i=0}^{\infty} q^{k+i} \le q^k \| x^{(1)} - x^{(0)} \| / (1-q) .$$

Бу ердан $0 \le q < 1$ эканлигидан $\| x^{(k)} - x^{(k+p)} \| \to 0 \ k, p \to \infty$.

2) $\{x^{(k)}\}$ фундаментал, R^n тўлиқ лигидан шундай $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ мавжуд; $x^{(k)} \in G$; ва G ёпиқлигидан $\xi \in G$.

3) 1- теоремага асосан $\xi = g(\xi)$.

4) ξ-ягона. Акс ҳолда ξ_1=g(ξ_1), ξ_2=g(ξ_2) десак,

$$\| \xi_1 - \xi_2 \| = \| g(\xi_1) - g(\xi_2) \| \le q \| \xi_1 - \xi_2 \|$$

ва $q \ge 1$ бўлиб чиқади.Бу мумкин эмас.

2. Қолдиқ ҳадларни баҳолаш. Равшанки,

$$\| \xi - x^{(k)} \| = \| g(\xi) - g(x^{(k-1)}) \| \le q \| \xi - x^{(k-1)} \| \le \ldots \le q^k \| \xi - x^{(0)} \|,$$

яъни

$$\| \xi - x^{(k)} \| \le q^{(k)} \| \xi - x^{(0)} \|.$$

Лекин,

$$\|\xi - x^{(k)}\| \le q\|\xi - x^{(k-1)}\| \le q\left\|\xi - x^{(k)}\right\| + q\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|.$$

Бу ердан осонгина қуйидаги тенгсизликни оламиз:

$$\| \xi - x^{(k)} \| \le q/(1-q) \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|.$$

(7) назарий баҳо дейилади, бу ерда ноъмалум ечим иштирок этмокда.

(8) амалий баҳо дейилади, бу баҳони биз ҳар бир тақрибий ечим $x^{(k)}$ топилгач ҳисоблашимиз мумкин.

(7) баҳо ёрдамида $x^{(k)}$ ни топмасдан нечта итерациядан сўнг $\| \xi - x^{(k)} \| \le \varepsilon$ бўлишини олдиндан айтиб бериш мумкин. Бунинг учун

$$\left\|\xi - x^{(k)}\right\| \le q \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| /(1-q) < \varepsilon.$$

тенгсизлик бажарилиши керак.

(8) баҳо эса $\| \xi - x^{(k)} \| \le \varepsilon$ бўлишини тақрибий ечимлар $x^{(k-1)}$, $x^{(k)}$ топилгандан сўнг $q\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|/(1-q) \le \varepsilon$ бўлса бажарилиш мумкинлигини айтиб беради.

Қисқартириб акс эттириш принципининг тадбиқлари жуда кенг. У битта тенглама, тенгламалар системаси, дифференциал, интеграл тенгламаларни тақрибий ечишда ишлатилади. Баён этилган теорема (2) ихтиёрий тўлиқ X фазода ҳам ўринли. Масалан, X,Y -тўлиқ метрик фазолар бўлсин, бу ерда $C[a,b]$ нинг ўрнини X, модуль ўрнини фазодаги норма босади, $f(x)=0$ вектор тенглама $x=g(x)$ вектор тенгламага келтирилади ва қолган барча ишлар бир хил бажарилади.

3. Итерация усули. (4) учун итерация усули қурамиз. Бирор $x^{(0)} \in G$ олиб ушбу итерация (векторлар) кетма-кетлигини тузамиз

$$x^{(k)} = g(x^{(k-1)}),\ k=1,2,...,; \qquad (9)$$

ёки батафсилроқ

$$\begin{aligned} &x_1^{(k)} = g_1(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)\\ &x_n^{(k)} = g_n(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \end{aligned}$$

Усулнинг яқинлашиш шартини, яъни $g(x): G \to R^n$ нинг қачон қисқартириб акс эттирувчи акслантириш эканлигини топамиз. Равшанки, агар $c_k \in G$ бирор ўрта қиймат бўлса, у ҳолда Лагранжнинг чекли орттирмалар формуласига асосан

$$\xi_i - x_i^{(k)} = g_i(\xi) - g_i(x_i^{(k-1)}) = \sum_{j=1}^{n} g_i'(c_k)(\xi_j - x_j^{(k-1)}),\ i=1,...,n.$$

Демак, вектор кўринишида ушбу тенгликка тўғри келамиз:

$$\xi - x^{(k)} = g'(e_k)(\xi - x^{(k-1)})$$

Бу тенгликдан кўринадики агар $q = \max\{\| g'(x) \|,\ x \in G\}$ десак,

$$\| \xi - x^{(k)} \| \le q^k \| \xi - x^{(0)} \| \qquad (11)$$

бўлади.
Шунинг учун, агар, $q<1$ бўлса $x^{(k)}\to\xi$, $k\to\infty$ муносабат ўринли.
Бундай ҳолда қисқартириб акс эттириш принципи ўринли бўлади.

Энди $f(x)=0$ тенгламани $x=g(x)$ кўринишига келтиришда имкони борича q миқдорни кичик қилиб танлаб олишни кўрамиз. Бунинг учун $g(x)=x+Lf(x)$ деб оламиз. Равшанки, $g'(x)=x+Lf'(x)$, бу ерда $g'(x)=\left[\partial_j g_i(x)\right],\ f'(x)=\left[\partial_j f_i(x)\right]$ Якоби матрицалари. 2 ҳол бўлиши мумкин:

1) $g'(x^{(0)})=x+Lf'(x^{(0)})=0,\ Ex=x\ ,\ L=-[f'(x^{(0)})]^{-1}$ (12)

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-[f'(x^{(0)})]^{-1}f(x^{(k-1)})$$
(13)

2) $g'(x^{(k-1)})=E+Lf'(x^{(k-1)})=0,\quad L=-[f'(x^{(k-1)})]^{-1}$ (14)

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-[f'(x^{(k-1)})]^{-1}f(x^{(k-1)})$$
(15)

n=1ҳол учун (13),(15) формулалар, маълумки, қуйидаги кўринишга эга

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-f(x^{(k-1)})/f'(x^{(0)}),\ f:R\to R, \qquad (13.1)$$
$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)}),\ f:R\to R \qquad (13.2)$$

(13) соддалаштирилган Ньютон методи, (15) эса Ньютон методи дейилади.
n=2 учун (13) формулалар қуйидаги кўринишни олади.

$$x_1^{(k)}=x_1^{(k-1)}-\frac{1}{\det(f'(x^{(0)})}\begin{vmatrix} f_1^{(k-1)} & f_{1x_2}^{(0)} \\ f_2^{(k-1)} & f_{2x_2}^{(0)} \end{vmatrix},\ x_2^{(k)}=x_2^{(k-1)}-\frac{1}{\det(f'(x^{(0)})}\begin{vmatrix} f_{1x_1}^{(0)} & f_1^{(k-1)} \\ f_{2x_1}^{(0)} & f_2^{(k-1)} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

n=2 учун (8.15) формулалар қуйидаги кўринишни олади.

$$x_1^{(k)}=x_1^{(k-1)}-\frac{1}{\det(f'(x^{(k-1)})}\begin{vmatrix} f_1^{(k-1)} & f_{1x_2}^{(k-1)} \\ f_2^{(k-1)} & f_{2x_2}^{(k-1)} \end{vmatrix},\ x_2^{(k)}=x_2^{(k-1)}-\frac{1}{\det(f'(x^{(k-1)})}\begin{vmatrix} f_{1x_1}^{(k-1)} & f_1^{(k-1)} \\ f_{2x_1}^{(k-1)} & f_2^{(k-1)} \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

Бу формулалар кейинги параграфда алоҳида қаралади.

Шунинг учун $q=\max\{\|g'(x)\|,\ x\in G\}<1$ шарт x нинг ξ га яқин қийматларида бажарилади. Бу фикрдан (13) дан (15) метод яхширок яқинлашиши ҳам кўриниб турибди. Бу фикрни қолдиқ хадлар баҳолари ҳам таъкидлайди, (13) чизиқли яқинлашишга эга, (15) квадратик яқинлашишга эга.

Мисол 1. Итерация усули ёрдамида $\{x_1^2+x_2^2=1,\ x_1^2-x_2=0$ ечилсин.

Ечиш. $x_1^2+x_2^2=1$ айлана, $x_1^2-x_2=0$ кубик парабола билан кесишиб иккита ечимни беради. Уларни чизиб $\xi_{1,2}$=[0,9;0,5] тақрибий ечимларни топамиз. ξ_1 учун x(0)=[0,9;0,5] бошланғич ечим танлаймиз. $\{x^{(k)}\}$ ни топиш учун (8.13) усулни танлаймиз. Равшанки,

$$f(x)=\begin{bmatrix} x_1^2+x_2^2-1 \\ x_1^2-x_2 \end{bmatrix},f'(x)=\begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix},\ f'(x^{(0)})=\begin{bmatrix} 1,8 & 1 \\ 1,8 & -1 \end{bmatrix},\det(f'(x^{(0)})=-3.6,$$

$$[f'(x^{(0)})]^{-1}=-\frac{1}{3.6}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1.8 & 1.8 \end{bmatrix}=L\,.$$

Шунинг учун системани x=g(x) кўринишга келтирамиз, бу ерда

$$g(x) = x + Lf(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{3.6} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1.8 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2 \end{bmatrix}$$

x=g(x) системани энди итерация (соддалаштирилган Ньютон) усули билан ечамиз.Бошланғич итерацияларни киритамиз ва натижа оламиз:

k	x_1	x_2	e
1	0.797222	0.625000	0.227778
2	0.787013	0.617188	0.018021
3	0.786315	0.618134	0.001644
4	0.786166	0.618022	0.000261

Шундай қилиб

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.786166 \\ 0.618022 \end{bmatrix}$$

дейиш мумкин.Усулнинг дастурини 1.9 параграфдаги Ньютон усулининг дастуридан ҳосила иштирок этган устунларни бошланғич нуқтада ҳисобланишидан олиш мумкин.Дастурнинг ўзи ҳам қуйида келтирилган.

Мисол 2. Итерация усулининг тадбиқи сифатида қуйидаги ночизиқ оддий дифференциал тенглама учун чегара масалани қараймиз:

$$u'' = f(x,u), u(a) = A, u(b) = B$$

$[a,b]$ кесмани $a \le x_0 \le x_1 \le ... \le x_n \le b$ нуқталар тўплами билан бўлиб тур ясаймиз. Бу нуқталарда тенгламани ёзамиз: $u''(x_i)=f(x_i,u(x_i)), u(x_0)=A, u(x_n)=B.$ $u''=f(x,u)$ ҳосилани иккинчи тартибли чекли айирмали ҳосила билан алмаштирамиз:

$$u''(x_i) = (u(x_{i-1}) - 2\,u(x_i.) + u(x_{i+1}))/h^2 + h^2\,u(4)\,(c)/24 = A_{xx}u(x_i\ ) + O(h^2).$$

$$u''(x_i) = (u(x_{i-1}) - 2\,u(x_i.) + u(x_{i+1}))/h^2 + h^2\,u^{(4)}\,(c)/24 = f(x_i, u(x_i))$$

Чексиз кичиқ миқдор $O(h^2)$ ни ташлаб юбориб қуйидаги чекли айирмали схемага келамиз:

$$u_0 = A, u_n = B \quad \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = f(x_i, u_i), i=1,...,n,$$

Бу ерда u_i миқдор $u(x_i)$ ечимнинг тақрибий қиймати. Кўриниб турибдики бу ночизиқ система, уни итерация усули билан ечиш мумкин:

$$u_0^{(0)} = A, u_n^{(0)} = B,\ (u_{i-1}^{(k)} - 2u_i^{(k)} + u_{i+1}^{(k)})/h^2 = f(x_i, u_i^{(k)}), i = 1,...,n.$$

Бу система ҳар бир к учун прогонка усули билан ечилади,итерациялар $|u^{(k)}i - u^{(k-1)}i| \le \varepsilon$ бўлгунча давом эттирилади.

4. MathCADда итерация усулининг дастури.

MathCAD дастурида ночизиқ тенгламалар системасини тақрибий ечиш учун стандарт ички функциялар мавжуд, улар given ..find блоки, minimize (f(x),x) ички функцияси. Мисол сифатида ушбу системаларни оламиз: $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0$,

1) given ..find блоки

Бошланғич итерацияни бериш x:=1 y:=0 (x:=-1 y:=0)

Тенгламаларни бериш(баробар йўғон) Given $x^2+y^2=1$ $x^2-y=0$

Илдизни ўзгарувчига бериш $r:=Find(x,y)$

Илдизни чиқариш $r^T=\begin{bmatrix}0.7861 & 0.6181\end{bmatrix}$ $(r^T=\begin{bmatrix}-0.7861 & 0.6181\end{bmatrix})$

Итерация усулини ташкил этувчи жараёнлар тузамиз.

2) Итерация усули. $x_1+0.5\cos x_2=1, \sin(x_1+1)-x_2=1.2$ системани қараймиз.

Итерация функциясини бериш $g(x):=\begin{bmatrix}1-0.5*\cos(x_2) & \sin(x_1+1)-1.2\end{bmatrix}^T$

Бошланғич итерация ни бериш $x^{<1>}:=\begin{bmatrix}0.4 & 0.5\end{bmatrix}^T$ $x^{<1>}:=\begin{bmatrix}-0.6 & -0.1\end{bmatrix}^T$

Итерацияларни ҳисоблаш ва чиқариш $k:=0..5$ $x^{<k+1>}:=g(x^{<k>})$

$$x=\begin{bmatrix}0.4 & 0.562 & 0.515 & 0.510 & 0.511 & 0.511\\ 0.5 & -0.215 & -0.20 & -0.202 & -0.219 & -0.219\end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix}-0.6 & 0.502 & 0.655 & 0.510 & 0.510 & 0.510\\ -0.1 & -0.811 & -0.202 & -0.203 & -0.202 & -0.202\end{bmatrix}$$

Назарий саволлар ва топшириқ.

1. $f_1=ax_1+b\sin(x_2)=d_1, f_2=c\cos(x_1)+d\cdot\ln(1+x^2)=d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
2. $f_1=\sin(x_1+a)+bx_2=d_1, f_2=cx_1+d\cos(x_2+e)=d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
3. $f_1=ax_1+b\sin(x_2+c)=d_1,\ f_2=\cos(x_1+e)+dx_2=d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
4. $f_1=tg(x_1+a)+bx_2=d_1, f_2=cx_1+\cos(x_1)+d\sin(x_2+e)=d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.

$f_1=\sin(x_1+a)+bx_2=d_1,\ f_2=cx_1+dsin(x_2+e)=d_2$ системани итерация усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.

Мундарижага

1.9. НОЧИЗИҚ СИСТЕМА УЧУН НЬЮТОН-КАНТОРОВИЧ УСУЛИ

Асосий тушунчалар: *Ночизиқ система учун Ньютон -Канторович итерация усули.*
Ньютон -Канторович итерация усулининг яқинлашиш шарти.
Асосий натижалар:
1.Ночизиқ система: $f_i(x)=f_i(x_1,...,x_n)=0, i=1,...,n \Leftrightarrow f(x)=0, f:R^n\to R^n$
2.Ньютон- Канторович усули:

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-[f'(x^{(k-1)})]^{-1}f(x^{(k-1)}),\ \|\xi-x^{(k)}\|\le 1/q[q\|\xi-x^{(0)}\|]^{2^k},\ q=M/2m_1.$$

3. Ньютон- Канторович усулининг MathCAD да дастури.

1. Ночизиқ система

Ушбу ночизиқ тенламалар системаси берилган бўлсин.

$$\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n)=0 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ f_n(x_1,...,x_n)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Бу системани R^n - n - ўлчовли Евклид фазосининг векторлари ва $f=[f_1,...,f_n]:\to R^n$ вектор функция киритиб битта вектор тенглама

$$f(x)=0 \qquad (2)$$

кўринишида ёзиб олиш мумкин. Унинг ечимини ξ деб белгилаймиз.Вектор функцияни ξ ечимнинг бирор G атрофида икки марта узлуксиз ҳосилага эга деб фараз қиламиз, яъни: $f(x)\in C^2(G)$.

Бизга маълумки, $f'(x)$ Якоби матрицаси - икки ўлчовли массив, $f''(x)$ - Гессиан - уч ўлчовли массив, яъни

$$f'(x)=[\partial_i f_k(x)],\ f''(x)=[\partial_j\partial_i f_k(x)]$$

бу ерда $\partial_i f_k(x)=\partial f_k(x)/\partial x_i$, $\partial_j\partial_i f_k(x)=\partial_2 f_k(x)/\partial x_i\partial x_j$. Равшанки, $f'(x)y$ - вектор, $f''(x)*y$ - матрица, $f'''(x)*y*z$ - вектор.

$[f'(x)]^{-1}$ Якоби матрицасига тескари матрица бўлсин. $n=2$ учун

$$[f'(x)]^{-1}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix} \partial_2 f_2 & -\partial_2 f_1 \\ -\partial_1 f_2 & \partial_1 f_1 \end{bmatrix},$$

бу ерда $D=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\partial_1 f_1(x)\,\partial_2 f_2(x)-\partial_1 f_2(x)\,\partial_2 f_1(x)$.

2.Ньютон-Канторович усули. Фараз қилайлик $x^{(k-1)}, k=1,2,...,$ топилган бўлсин, $x^{(k)}$ ни топайлик. Бунинг учун $\xi=x^{(k-1)}+h^{(k-1)}$ деб олиб $h^{(k-1)}$ тузатишни топамиз. Бунинг учун $f(\xi)$ ни $x^{(k-1)}$ атрофида Тейлор формуласи бўйича ёзамиз:

$$f(\xi)=0=f(x^{(k-1)}+h^{(k-1)})=f(x^{(k-1)})+f'(x^{(k-1)})h^{(k-1)}+0.5f''(c)[h^{(k-1)}]^2 \qquad (4)$$

Агар $\|h^{(k-1)}\|$ чексиз кичик миқдор бўлса, (9.4) да охирги ҳад ҳам чексиз кичик миқдор бўлади. Уни ташлаб юбориб $h^{(k-1)}$ га нисбатан ушбу тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$0=f(\xi)=f(x^{(k-1)})+f^{(1)}(x^{(k-1)})\,h^{(k-1)}\approx 0 \qquad (5)$$

Бу ердан $h^{(k-1)}$ (5)ни чап томонини 0 га айлантирувчи вектор деб қабул қилсак ушбу тузатмани топамиз:

$$[f'(x^{(k-1)})]h^{(k-1)}=-f(x^{(k-1)}),\qquad h^{(k-1)}=-[f'(x^{(k-1)})]^{-1}*f(x^{(k-1)}). \qquad (6),$$

Тузатмани $\xi=x^{(k-1)}+h^{(k-1)}$ ифодага қўямиз ва ушбу формулани топамиз:

$$\xi\approx x^{(k)}=x^{(k-1)}+h^{(k-1)}=x^{(k-1)}-[f'(x^{(k-1)})]^{-1}f(x^{(k-1)}),$$

$$x^{(k)}=x^{(k-1)}-[f'(x^{(k-1)})]^{-1}f(x^{(k-1)}). \qquad (7)$$

(7) тенглик Ньютон-Канторович усули дейилади. Энди n=2 учун қуйидаги муносабатларни топамиз:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}-\frac{1}{D_k}\begin{bmatrix} \partial_2 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & -\partial_2 f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \\ -\partial_1 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & \partial_1 f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Бу формулани ажратиб ҳам ёзиш мумкин.

$$x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{1}{D_k}\begin{bmatrix} f(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & \partial_1 f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & \partial_2 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \end{bmatrix},$$

$$x_2^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{1}{D_k}\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \\ \partial_1 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) & f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)}) \end{bmatrix}$$

бу ерда $D_k = D(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}) = \det([f'(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}])$.

Энди $r^{(k)} = \xi - x^{(k)}$ ни баҳолаймиз. Бунда $h^{(k-1)} = x^{(k)} - x^{(k-1)}$. Шунинг учун $r^{(k)} = r^{(k-1)} - h^{(k-1)}$ (5) дан топамиз.

$$f^{(1)}(x^{(k-1)})h^{(k-1)} = -f(x^{(k-1)}),\quad \text{ёки } f^{(1)}(x^{(k-1)})(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -f(x^{(k-1)}),$$

Буни (4) га қўямиз:

$$f(\xi)=f(x^{(k-1)}+h^{(k-1)})=f(x^{(k-1)})+f'(x^{(k-1)})r^{(k-1)}+0{,}5f''(c)[r^{(k-1)}]^2=$$

$$=f'(x^{(k-1)})[r^{(k-1)}-h^{(k-1)}]+0{,}5f''(c)[r^{(k-1)}]^2==f^{(1)}(x^{(k-1)})r^{(k)}+0{,}5f''(c)[r^{(k-1)}]^2=0$$

Бу ердан

$$r^{(k)}=-0.5[f^{(1)}(x^{(k-1)})]^{-1}f'(c)[r^{(k-1)}]^2 \qquad (10)$$

Теорема 1. Агар Гессиан норма бўйича чегараланган, якобианга тескари матрица чегараланган, яъни

$$\|f''(x)\| \le M_2,\quad x \in G$$

$$\|[f'(x)]^{-1}\| \le 1/m_1,\quad x \in G$$

бўлса

$$\|\xi-x^{(k)}\| \le q\|\xi-x^{(k-1)}\|^2 \qquad (11)$$

$$\|\xi-x^{(k)}\| \le 1/q[q\|\xi-x^{(0)}\|]^{2^k},\ q=M/2m_1 \qquad (12)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Исбот. (11) тенсизлик (10) дан осонгина келиб чиқади (12) тенгсизлик (11)дан кетма-кет қўллаш натижасида келиб чиқади.

Изоҳлар.Соддалаштириш мақсадида Ньютон усулининг қуйидаги модификацияларини кўриш мумкин:

1) $$x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{f(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial_1 f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})},\ x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\frac{f_2(x_1^{(k+1)},x_2^{(k)})}{\partial_2 f_2(x_1^{(k+1)},x_2^{(k)})},\ k=1,2,....,\qquad (13)$$

2) $$\begin{aligned} &x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial_1 f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})},\\ &x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\frac{f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial_2 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}-\frac{\partial_1 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})(x_1^{(k+1)}-x_1^{(k)})}{\partial_2 f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})},\ k=1,2,....\end{aligned}\qquad (14)$$

Бу усулларнинг қулайлиги шундаки уларда Якоби матрицасининг тескарисини топиш шарт эмас. Бу усулларни биз ажраладиган Ньютон усуллари деб айтамиз. Бу иккала усул ушбу кўринишдаги Ньютон усулда

$$f^{(1)}(x^{(k-1)})(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = -f(x^{(k-1)}),$$

$[f^{(1)}(x^{(k-1)})]$ ўрнига қуйидаги тақрибий матрицалар олинишидан келиб чиқади:

$$[f^{(1)}(x^{(k-1)})]=\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & 0... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \partial_n f_n \end{bmatrix},\ [f^{(1)}(x^{(k-1)})]=\begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & 0... & 0 \\ ... & ... & ... \\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \partial_n f_n \end{bmatrix}$$

Экспериментлар (9.13) усулни (9.14) га нисбатан афзаллигини кўрсатмоқда. Кейинги усулнинг дастури $x_2^{(k)}$ ни ҳисоблаш операторидагина фарқ қилади холос.

Мисол .9.1.Ньютон итерация усулининг тадбиқи сифатида қуйидаги ночизиқ оддий дифференциал тенглама учун чегара масалани қараймиз $u''=f(x,u), u(a)=A, u(b)=B$ $[a,b]$ кесмани $a \le x_0 \le x_1 ... \le x_n \le b$ нуқталар тўплами билан бўлиб тўр ясаймиз. Бу нуқталарда тенгламани ёзамиз:

$$u''(x_i)=f(x_i,u(x_i)), u(x_0)=A, u(x_n)=B.$$

Ҳосилани иккинчи тартибли чекли айирмали ҳосила билан алмаштирамиз:

$$u''(x_i)=(u(x_{i-1})-2\,u(x_i.)+\,u(x_{i+1}))/h^2\;+h^2\,u^{(4)}\,(c)/24=\Lambda_{xx}u(x_i\;)+O(h^2).$$

Чексиз кичик миқдор $O(h^2)$ ни ташлаб юбориб қуйидаги чекли айирмали схемага келамиз:

$$u_0\;=A, u_n=B,$$

$$u_{i-1}-2u_i+\;u_{i+1}/h^2=f(x_i,u_i), i=1,...,n,$$

Бу ерда u_i миқдор $u(x_i)$ ечимнинг тақрибий қиймати. Кўриниб турибдики бу ночизиқ система, уни ушбу Ньютон итерация усули билан ечиш мумкин:

$$u^{(k)}{}_0\;=A, u^{(k)}{}_n=B$$

$$(u^{(k)}{}_{i-1}-(2+h^2f_u(x_i,u^{(k-1)}{}_i))\,u^{(k)}{}_i\,+\,u^{(k)}{}_{i+1})/h^2\,=\,f(x_i,u^{(k-1)}{}_i)-\,f_u(x_i,u^{(k-1)}{}_i)=, i=1,...,n.$$

Охирги муносабат қуйидагича топилди:

$$f(x_i,u_i^{(k)})=\,f(x_i,u_i^{(k-1)}\;+u_i-\,u_i^{(k-1)})=\,f(x_i,u_i^{(k-1)})+\,f_u(x_i,u_i^{(k-1)})(\,u_i^{(k)}-\,u_i^{(k-1)})+O(|\,u_i-\,u_i^{(k-1)}\,|^2).$$

Бу ифода юқоридаги тенгламанинг ўнг томонига қўйилади ва гуруҳлаштирилади. (Чексиз кичик миқдор ташлаб юборилади.)

Бу система ҳар бир к учун прогонка усули билан ечилади, итерациялар $\left|u^{(k)}{}_i-u^{(k-1)}{}_i\right|\le\varepsilon$ бўлгунча давом эттирилади.

9.3. Ньютон усулининг дастури.

1) **Ньютон итерация усули**: $x^{<k+1>}:=x^{<k>}-(J(x^{<k>}))^{-1}f(x^{<k>})$.

Индекснинг бошланғич қиймати ORIGIN :=1

Итерацияловчи функцияларни бериш $g(x)^T:=\left[\,x_1^{\;2}+x_2^{\;2}=1, x_1^{\;2}-x=0\,\right]$

Якоби матрицасини қуриш $J(x):=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\\ 2x_1 & -1\end{bmatrix}$

Бошланғич итерацияни бериш $x^{<1>}:=\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}^T$ ($x^{<1>}:=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$)

Ньютон итерацияларини қуриш k:=0..5 $x^{<k+1>}:=x^{<k>}-(J(x^{<k>}))^{-1}f(x^{<k>})$

$$x=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -0.833 & -0.788 & -0.786 & -0.786\\ 0 & 1 & 0.667 & 0.619 & 0.618 & 0.618\end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0.8333 & 0.7881 & 0.7861 & 0.7861\\ 0 & 1 & 0.6667 & 0.6190 & 0.6180 & 0.6180\end{bmatrix}$$

Ҳозирча формула $x^{<k+1>} := x^{<k>} - (J(x^{<k>}))^{-1} f(x^{<k>})$ фақат MathCAD да ишлаяпти.

2) **Минимизация усули**. $f(x) := (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_2 - x_1^2)^2 \to \min$ масалани қараймиз. Равшанки, Minimize f(x)=0, яъни f(x)=0. Шунинг учун, топамиз:

Бошланғич қиймат $x_1 := -1 \;\; x_2 := 0 \quad (x_1 := 1 \;\; x_2 := 0)$

Мақсад функция $f(x) := [x_1{}^2 + x_2{}^2 - 1]^2 + [x_1{}^2 - x_2]^2$

Ички функцияга мурожаат $s := Minimize(f, x_1, x_2)$

Натижалар $s^T = (-0.786\ 0.618)$ ($r^T = (0.787\ 0.618)$)

3) Minner ички функциясидан фойдаланиш

Бошланғич қиймат $x_1 := -1 \;\; x_2 := 0 \quad (x_1 := 1 \;\; x_2 := 0)$

Блокбоши $Given\ x_1{}^2 + x_2{}^2 - 1 = 0, x_1{}^2 - x_2 = 0$

Ички функцияга мурожаат $s := Mineer(x_1, x_2)$

Натижалар $r^T = (0.787\ 0.618)$ ($s^T = (-0.786\ 0.618)$)

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. $f_1 = ax_1 + b\sin(x_2) = d_1, f_2 = c\cos(x_1) + d \cdot \ln(1 + x^2) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
2. $f_1 = \sin(x_1 + a) + bx_2 = d_1, f_2 = cx_1 + d\cos(x_2 + e) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
3. $f_1 = ax_1 + b\sin(x_2 + c) = d_1,\ f_2 = \cos(x_1 + e) + dx_2 = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
4. $f_1 = tg(x_1 + a) + bx_2 = d_1,\ f_2 = cx_1 + \cos(x_1) + d\sin(x_2 + e) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг.
5. $f_1 = \sin(x_1 + a) + bx_2 = d_1,\ f_2 = cx_1 + dsin(x_2 + e) = d_2$ системасини Ньютон усулини қўллаш учун қулай кўринишга келтиринг. Мундарижага

1.10. НЬЮТОН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КЎПХАДИ

Асосий тушунчалар: *Интерполяция масаласи, кўпхадлар билан интерполяциялаш, бўлинган айирмалар ва уларнинг хоссалари, Ньютон интерполяция кўпхади, усулнинг дастури.*

Асосий натижалар:

1.Интерполяция масаласи: $F(x_i)=y_i,\ i=0,1,...,n$, $\mathrm{F}(x)=?$.

2.Кўпхад билан интерполяциялаш: $P_n(x_i)=y_i,\ i=0,1,...,n$, $\mathrm{P_n}(x)=?$.

3.Бўлинган айирмалар:

$$f[x_0,...,x_k]=(f[x_0,...,x_{k-2},x_k]-f[x_0,...,x_{k-1}])/(x_k-x_{k-1}),k\geq 1.$$

4.Ньютон интерполяция формуласи:

$$N_n(f;x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+...+f[x_0,...,x_n](x-x_1)...(x-x_{n-1}),$$

$$N_n(f;x)=f(x_0)+hf[x_0,x_1]t+...+h^n f[x_0,...,x_n]t(t-1)...(t-n+1),\ x=x_0+th.$$

5. Ньютон интерполяция кўпхадиниMathCAD да қуриш дастури.

1. Интерполяция масаласи

[a,b] кесмадан олинган $a=x_0<...<x_n=b$ нуқталарда бирор $y=f(x)$ функциянинг $y_i=f(x_i)$, i=0,1,..,n қийматларида берилган бўлсин. $y=f(x)$ функциянинг $x_i,\ i=0,1,..,n$ нуқталардан фарқли бўлган x нуқтада, яъни $x\neq x_i, i=0,1,..,n$ қийматини топиш талаб этилади.

Агар $y=f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши маълум бўлса, бу ишни бажариш мумкин. Лекин бу ерда, бу ҳисоблашда агар $f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси ҳисоблашга яроқли бўлсагина бажариш мумкин. Агар $f(x)$ функциянинг аналитик ифодаси мураккаб(масалан, интеграл билан ифодаланган ёки ошкормас кўринишда берилган) ёки фақат $\{(x_i,\ f(x_i)),\ i=0,1,..,n\}$ жадвалгина берилган бўлса, бу ҳисоблашни бажариш мумкин эмас.

Бундай шароитда қуйидагича иш қилинади: $\{(x_i,\ f(x_i)),\ i=0,1,..,n\}$ жадвал бўйича $f(x)$ функцияга яқин бўлган бирор $F(x)$ функция кўрилади ва $f(x)\approx F(x)$деб қабул қилинади. Бу масалани $f(x)$функцияни $F(x)$функция билан яқинлаштириш масаласи дейилади.

Бу масаланинг классик ечими қуйидагича ҳал қилинади: $F(x)$ функция $x=x_i,\ i=0,1,..,n,$ нуқталарда $f(x)$ билан устма-уст тушади деб қабул қилинади, яъни

$$F(x_i)=f(x_i)\ ,\ i=0,1,..,n \qquad (1)$$

Яқинлашувчи функция $F(x)$ ни (1.10.1) шарт асосида топишни интерполяция масаласи дейилади. $F(x)$ функцияни интерполяция формуласи, $x_0,..,x_n$ нуқталарни интерполяция нуқталари дейилади. (1) шартни интерполяция шартлари дейилади.

$F(x)$ функцияни даражали кўпҳад, тригонометрик кўпхад, рационал функция, сплайн-функция кўринишда олиш мумкин.

(1) ўрнига

$$F^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),\ i = 0,1,...,n;\ j = 0,1,..,k \qquad (2)$$

Ҳосил бўлган формула Эрмит интерполяция кўпхади дейилади.

2. Кўпҳад билан интерполяциялаш .

$F(x)$ функцияни кўпҳад

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

кўринишда излаймиз. $P_n(x_i) = y_i,\ i = 0,1,...,n$ деб талаб қилиб ушбу чизиқли тенгламалар системасига келамиз:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^{\,j} = f(x_i),\ i = 0,1,...,n \qquad (3)$$

Бу системанинг детерминанти алгебрадан маълум бўлган Вандермонд детерминантидир:

$$D = |x_{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} & ... & x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} & ... & x_1^{\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & ... & x_n^{\,n} \end{vmatrix} = \prod \left(x_j - x_i\right) \quad 0 \le i < j \le n$$

Равшанки, агар интерполяция нуқталари ҳар хил бўлса D≠0 . Шундай қилиб биз ушбу теоремага келдик.

Теорема 1. Агар $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ бўлса $P_n(x_i) = y_i,\ i = 0,1,..,n,$ шартларни қаноатлантирувчи ягона интерполяция кўпхади $P_n(x)$ мавжуд

Амалда $P_n(x)$ интерполяция кўпхадининг И.Ньютон (1643-1727) ва Ж.Л.Лагранж (1736-1813) топган қулай кўринишлари ишлатилади.

3. Бўлинган айирмалар.

Ньютон интерполяция кўпхадини

$$N_n(f;x) = d_0 + d_1(x - x_0) + ... + d_n(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

кўринишда излаган, лекин , афсуски шу ердан бошлаб у $x_0,...,x_n$ нуқталар бир-биридан тенг узокликларда жойлашган деб фараз қилиб ўзининг икки хил формуласини яратди.

Биз эса $x_0,...,x_n$ нуқталар ихтиёрий жойлашган ва фақат $x_i \ne x_j,\ i \ne j$, деб фараз қиламиз.

Таъриф 1. Ушбу миқдорлар

$$f[x_0, x_1] = (f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0), \qquad f[x_0, x_1, x_2] = (f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1])/(x_2 - x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f[x_0, ..., x_k] = (f[x_0, ..., x_{k-2}, x_k] - f[x_0, ..., x_{k-1}])/(x_k - x_{k-1}) \qquad (5)$$

$f(x)$ функциянинг $1\text{-}, 2\text{-}, ...,\ k$ - тартибли бўлинган айирмалари дейилади.

Лемма 1. $f[x_0,....,x_k]$, $k \le n,$ бўлинган айирма ўз аргументларига нисбатан симметрикдир.

Исбот. k га нисбатан индукция методини қўллаймиз. $k=1$ да равшанки, $f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$. Энди k-1 учун леммани ўринли деб фараз қилайлик. $f[x_0,....,x_k]$ да $x_0,...,x_{k-1}$ ларни ёки $x_0,...,x_{k-2}$ ларни ихтиёрий алмаштирсак ҳам $f[x_0,....,x_k]$ ўзгармайди. Демак, фақат x_{k-1} билан x_k ни алмаштириб кўриш керак. $f[x_0,....,x_k]$ нинг таърифидан бу ҳолда ҳам у ўзгармайди.

Лемма 2. $f[x_0,....,x_k]$ бўлинган айирма учун ушбу формула ўринли

$$f[x_0,....,x_k]=\frac{f[x_1,...,x_k]-f[x_0,....,x_{k-1}]}{x_k-x_0}=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j\neq i}^{k}(x_i-x_j)} \qquad (6)$$

Исбот. Бевосита кўрамизки,

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0},\quad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Қолгани индукция усули билан исботланиши мумкин.

(6) бўлинган айирмаларнинг классик таърифи, (5) эса замонавий таърифи.(5) таърифнинг қулайлиги унинг рекурентлиги ва ҳисоблаш учун қулайлигидадир.

Лемма 3. Ҳар қандай k-1 - тартибли кўпхаднинг k - тартибли бўлинган айирмаси нолга тенг.

Исбот. Осонгина кўриш мумкинки, ўзгармаснинг 1-тартибли бўлинган айирмаси, чизиқли функциянинг 2-тартибли бўлинган айирмаси ва хоказо, k-1 - тартибли кўпхаднинг k-тартибли бўлинган айирмаси нолга тенг (ўхшатиш:k-1-тартибли кўпхаднинг k-ҳосиласи нолга тенг).

4.Ньютон интерполяция кўпхади.

$N_n(x)$ нинг номаълум $d_i,\ i=0,1,..n$, коэффициентларини интерполяция шартларидан топамиз:

$$N_n(x_0)=d_0=f(x_0),\ I_n(x_1)=d_0+d_1(x_1-x_0)=f(x_1) ==> d_1=f[x_0,x_1]$$

$$N_n(x_2)=d_0+d_1(x_2-x_0)+d_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2) ==> d_2=f[x_0,x_1,x_2]$$

ва хоказо, равшанки, $d_n=f[x_0,x_1,...,x_n],\ k\le n$

Демак, интерполяция кўпхадининг Ньютон кўриниши

$$N_n(f;x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+...+f[x_0,...,x_n](x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

шаклда бўлади.

Агар $x_1-x_0 = \quad .=.x_n \quad x_n$ бўлса $\frac{(x-x_0)}{h}=t$ деб (7) ўрнига ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$N_n(f;x)=f(x_0)+hf[x_0,x_1]t+...+h^n f[x_0,...,x_n]t(t-1)...(t-n+1),\ x=x_0+th$$

5. Ньютон интерполяция кўпхадини қуриш дастури.

MathCAD ойнасида қуйидаги командаларни терамиз:

Тугун нуқталар, функция $n:=4 \quad f(t):=x*\sin(t) \quad a:=0 \quad b:=4 \quad h:=(b-a)/n$

Интерполяция шартлари $i:=0..n \quad x_i:=a+ih \quad y_i=f(x_i)$

Қийматлар $x:=[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T \quad y=[0 \quad 0.8415 \quad 1.8186 \quad 0.4234 \quad -3.0272]^T$

Бўлинган айирмалар k:=0..n $a_0:=f(x_0) \quad a_k:=\sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{j=0}^{k} if(i=j,1,1/(x_i-x_j))$

Ньютон кўпҳади $Nn(t):=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(t-x_j)$

Натижалар $Nn(2.3)=1.6893 \quad Nn(2)=1.8186 \quad Nn(3)=0.4234$

Натижа алгоритмнинг тўғри ишлаётганини кўрсатмокда.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Интерполяция масаласи нима?
2. Алебраик интерполяция нима?
3. Бўлинган айирмалар нима?
4. Ньютон кўпхадини ёзинг.
5. Ньютон кўпхадини қолдиғи нимага тенг.

Мундарижага

1.11. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КЎПХАДИ

Асосий тушунчалар: *Лагранж интерполяция кўпхади, Лагранж интерполяция кўпхадининг қолдиғи, Лагранж интерполяция кўпхадининг дастури, Ньютон интерполяция кўпхадининг қолдиғи, Ньютон интерполяция кўпхадининг дастури.*

Асосий натижалар:

1. Лагранж интерполяция кўпхади:

$$L_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x),\, l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\ i=01,...,n\,.$$

2. Лагранж интерполяция дастурининг дастури.

3.Интерполяция кўпхадининг қолдиғи:

$$R_n^N(f;x)=f[x_0,...,x_n,x](x-x_0)...(x-x_n),\omega_n(x)=(x-x_0)...(x-x_n) \quad ,$$

$$R_n^L(f;x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\ \xi)\ \omega_n(x)\,.$$

4.Лагранж интерполяция кўпхадиниMathCAD да кўриш дастури.

1. Лагранж интерполяция кўпхадини

$$L_n(f;x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+...+f(x_n)l_n(x) \qquad (1)$$

кўринишда излади, бу ерда $l_j(x)$ лар n-даражали кўпхад бўлиб

$$l_j(x_i)=\delta_{ij},\delta_{ij}=1, i=j,\ \delta_{ij}=0, i\neq j,$$

шартларни қаноатлантиради. Равшанки,

$$l_i(x)=c_i(x-x_0)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)$$

бўлиши керак ва C_i коэффициент $l_i(x_i)=1$ шартдан топилиши керак. Демак,

$$C_i=1/[(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)],\ l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j},\ i=01,...,n \qquad (2)$$

$$L_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x) \qquad (3)$$

тенг узоқликда жойлашган нуқталар учун

$$l_i(x)=(-1)^{n-i}\frac{t(t-1)...(t-n)}{i!(n-i)!},\ i=0,1,...,n;\ x=x_0+th \qquad (4)$$

формулани (2) дан осонгина олиш мумкин. Интерполяция кўпхади ягоналигидан, $L_n(f;x)=N_n(f;x)$.

2. Лагранж усулининг дастури.

Лагранж интерполяция кўпҳади: $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), l_i(x)=\prod_{j=0, j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

MathCAD ойнасида қуйидаги командаларни терамиз:

Тугун нуқталар, функция $n:=4\ \ f(x):=x*\sin(x)\ \ a:=0\ \ b:=4\ \ h:=(b-a)/n$

Интерполяция шартлари $i:=0..n\ \ vx_i:=a+ih\ \ vy_i=f(vx_i)$

Қийматлар $vx:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T\ \ vy=\begin{bmatrix}0 & 0.8415 & 1.8186 & 0.4234 & -3.0272\end{bmatrix}^T$

Индексларнинг ўзгариш соҳаси $i:=0..n\ \ j:=0..n$

Лагранж интерполяция кўпҳади $Ln(x):=\sum_{i=0}^{n} vy_i\prod_{j=0}^{n} if(i=j,1,(x-vx_j)/(vx_i-vx_j))$

Қийматлар $Ln(2.3)=1.689\ \ f(2.3)=1.715\ \ Ln(1)=0.841\ \ Ln(2)=1.8186$

Натижа дастурни тўғрилигини кўрсатамиз.

3. Интерполяция кўпхадининг қолдиғи.

$$R_n^N(f;x)=f(x)-N_n(f;x), R_n^L(f;x)=f(x)-L_n(f;x), R_n^N(f;x)=R_n^L(f;x)=R_n(f;x)$$

интерполяция кўпхадининг қолдиғи дейилади. Равшанки, иккала ҳол учун

$$R_n(f;x)=0,\quad x=x_i,\quad i=0,1,...,n$$

$R_n(f;x)$ нинг кўринишини икки усулда топамиз:

бўлинган айирмалар (10.5) ёрдамида ва $f(x)$ функциянинг ҳосиласи ёрдамида. (10.5) даги $f[x_0,x], x\neq x_0$, таърифидан

$$f(x)\ =\ f(x_0)\ +f[x_0,x]\,(x-x_0) \qquad (5)$$

формулани топамиз. У бизга Лагранжнинг чекли орттирмалар формуласини эслатади ва биз учун функцияни $x_0,...,x_n$ нуқталар атрофида ёйиш учун калит формулани беради. $f[x_0,x_1,x], x \neq x_0,x_1$ нинг таърифидан

$$f[x_0,x]=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x](x-x_1)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулани (5) га қўйсак

$$f(x)\ =f(x_0)\ +f[x_0,x_1]\ (x-x_0)\ +f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1) \qquad (6)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу ишни

$f[x_0,...,x_k,x],\ x\neq\ x_i,\ i=0,1,...,k$ ларни барчаси учун бажариб, кетма-кет ўрнига қўйишларни бажарсак қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x](x-x_0)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1)=$$
$$=\ f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+...+f[x_0,...,x_n](x-x_0)...(x-x_{n-1})+$$
$$+f[x_0,....,x_n,x](x-x_0)...(x-x_n)=N_n(f;x)+R_n^N(f;x)$$

Бу ерда

$$N_n(f;x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,...,x_k](x-x_0)...(x-x_{k-1}) \quad , \qquad (7)$$

$$R_n^N(f;x)=f[x_0,...,x_n,x](x-x_0)...(x-x_n) \qquad (8)$$

Демак, биз ушбу натижани олдик.

Теорема 1. Агар $f(x)\,[a,b]$ да узлуксиз бўлса

$$f(x)=N_n(f;x)+R_n^N(f;x)$$

ёйилма ўринли.

Равшанки, $N_n(f;x)$-Ньютон интерполяция кўпхади, $R_n^N(f;x)=f(x)-N_n(f;x)$ унинг қолдиғи. Энди $f(x)$ функция $[a,b]$кесмада $(n+1)$ та узлуксиз ҳосилага эга функциялар тўплами $C^{n+1}[a,b]$ га киради деб 1-теоремани кучайтирамиз.

Теорема 2. Агар $f(x)\ \in C^{n+1}[a,b]$ бўлса ҳар бир $x\in\ [a,b]$ учун $\xi=\xi\ (x)$ нуқта мавжудки,

$$R_n^L(f;x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\ \xi)\ \omega_n(x),\quad \omega_n(x)=(x-x_0)...(x-x_n) \qquad (9)$$

тенглик ўринли.

Исбот. $R_n^L(f;x)=f(x)-L_n(f;x)=A\omega_n(x)$деб оламиз. Равшанки,

$$A=\frac{f(x)-L_n(f,x)}{\omega_n(x)}$$

деб олиш мумкин..

A нинг бундай қийматида $u(t)$ функция $n+2$ та нуқталарда $x_0,..,x_i,x,x_{i+1},...,x_n$ да 0 га айланади, яъни $n+2$ та илдизга эга бўлади.

$[x_0,x_1],....,[x_i,x],\ [x,x_{i+1}],\ ...,\ [x_{n-1},x_n]$ кесмаларга Ролль теоремасини қўллаб

$u'(x)$ функция $n+1$ та илдизга,

$$u''(x) \text{ функция } n \text{ та илдизга,}$$
....
$$u^{(n+1)}(x) \text{ функция 1 та илдизга}$$

эга деган ҳулосага келамиз. Фараз килайлик $\xi = \xi(x)$ нуқтада $u^{(n+1)}(\xi) = 0$ бўлсин.Лекин, $u^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A(n+1)!$ эканлигидан

$u^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - A(n+1)! = 0$ яъни

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Шундай қилиб

$$R_n^L(f;x) = f(x) - L_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x-x_n) \qquad (10)$$

x нинг ихтиёрийлигидан юқоридаги тенглик барча $x \in [a,b]$ лар учун ўринли эканлиги келиб чиқади. Агар

$$M_{n+1} = \max\{\left|f^{(n+1)}(x)\right|,\ x \in [a,b]\}$$

десак, (11.16) дан ушбу тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$|R_n^L(f;x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|...|x-x_n|$$

Хулоса 1.Агар $f(x) \in C^k[a,b]$ бўлса шундай $\xi = \xi(x)$ нуқта мавжудки

$$f[x_0,...,x_k] = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-x_0)...(x-x_k)$$

2. $(k-1)$-тартибли кўпхаднинг k-тартибли бўлинган айирмаси 0 га тенг.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Лагранжнинг базис кўпхадлари нима?
2. Лагранж ва Ньютон кўпхадлари тенг эканлигини кўрсатинг.
3. Лагранж ва Ньютон кўпхадларини фарқларини айтинг.
4. Лагранж кўпхадини ёзинг.
5. Лагранж кўпхадининг қолдиғи нимага тенг?

Мундарижага

1.12. СПЛАЙНЛАР БИЛАН ИНТЕРПОЛЯЦИЯЛАШ.

Асосий тушунчалар: *Сплайнларнинг таърифлари, чизиқли интерполяция сплайни ва унинг қолдиғи,кубик интерполяция сплайни ва унинг аникловчи тенгламалар системаси.*

Асосий натижалар:

1.Сплайнларнинг таърифи:

$$s(x) \in C^{p-k}[a,b], \quad 1 \le k \le p; \ s^{(k+1)}(x) = 0, x_i \le x \le x_{i+1}; s(x_i) = f(x_i), i = 0,...,n.$$

2.Кубик интерполяция сплайни:

$$S(f;x) = \frac{M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(x-x_i)^3}{6h_i} + (f_i - \frac{M_i h_i^2}{6})\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + (f_{i+1} - \frac{M_{i+1}h_i^2}{6})\frac{x-x_i}{h_i},$$

$$2M_0 + \beta_0 M_1 = d_0, \ \alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \ i = 1,2,...,n-1, \ \alpha_n M_0 + 2M_1 = d_n$$

3. Кубик сплайнни MathCAD да қуриш дастури.

1. Сплайнларнинг таърифи

$[a,b]$кесма $a = x_0 < x_1 < ... < x_n \;\; = b$ нуқталар билан бўлакларга бўлинган бўлсин. $p \ge 1$ натурал сон бўлсин.

Таъриф 1. $[a,b]$ да аниқланган даражали k- дефектли сплайн деб ушбу шартларни қаноатлантирувчи функцияга айтилади:

$$1)\, s(x) \in C^{p-k}[a,b], \quad 1 \le k \le p;$$

$$2) \qquad s(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i) + ... + a_{ki}(x - x_i)^k, x_i \le x \le x_{i+1}$$

k -даражали кўпхад, яъни $s^{(k+1)}(x) = 0, x_i \;\le x \;\le x_{i+1},$

Таъриф 2. Агар $s(x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,...n$ бўлса $s(x)$ сплайн $f(x)$ ни интерполяциялайди дейилади ва қуйидагича ёзилади: $s(f, x)$

Агар $p = 2m\text{-}1,\ m \ \ge 1,\ k = 1,...$ бўлса сплайн тоқ даражали оддий сплайн дейилади. Бунда сплайннинг эркинлик даражасини (коэффицентлар сонини) аниқлайлик.

Ҳар бир кесма $[x_i, x_{i+1}]$да $s(f; x)$ $2m\text{-}1$ - даражали кўпхад, яъни $A = 2mn$ та коэффициентга эга. Бу коэффициентларга қуйидаги боғланишлар қўйилган:

а) ички $n\text{-}1$ та $(x_1,..., x_{n\text{-}1})$ нуқталарда $S, S',.., S^{(2m\text{-}2)}$ ҳосилалар узлуксиз, яъни $(n\text{-}1)(2m\text{-}1)$ та шарт бор;

б) $(n+1)$ та интерполяция $S(f; x_i) = f(x_i),\ i = 0,1,..., n$ шартлар бор, яъни $B = n + 1 + (n\text{-}1)(2m\text{-}1)$ та шартлар бор. Фарқ $A\text{-}B = 2m - 2$ га тенг. Бу етишмаган шартлар чегара шартлар сифатида берилади.

1-тур чегара шарти: $f^{\ (j)}(x_0),\ f^{\ (j)}(x_n),\ 1 \le\ j \le\ m\text{-}1$ лар берилган, яъни (уларнинг сони $A\text{-}B = 2m - 2$ га тенг.)

$$S^{(j)}(f;t)= f^{\,j}(t),\ t=a \ \text{ёки}\ t=b\ j=1,...,m\text{-}1.$$

2-тур чегара шарт: $f^{\ (j)}(x_0),\ f^{\ (j)}(x_n),\ m \le\ j \le\ 2m\text{-}2$, лар берилган, яъни(уларнинг сони $A\text{-}B = 2m - 2$ га тенг.)

$$S^{(j)}(f;t)= f^{\ (j)}(t),\ t=a \ \text{ёки}\ t=b, j=m,...,2m\text{-}2$$

2'-тур чегара шарт: $f^{(i)}(a), f^{(j)}(b)$ ҳосилалар берилмаган. Шунинг учун $S^{(j)}(f;t)= 0,\ t=a$ ёки $t=b,\ j=m,..., 2m\text{-}2$, (уларнинг сони $A\text{-}B = 2m - 2$ га тенг.) деб қабул қилинади. 2'- тур чегара шарт табиий дейилади.

Даврий чегара шарт. Агар интерполяция қилинувчи функция даврий бўлса сплайн ҳам даврий бўлиши керак.Шунинг учун $S^{(j)}(f;t) = \ f^{\,j}(t),\ j = 1,..., 2m\text{-}2$, деб талаб қилинади.

Мисол 1. Чизиқли интерполяция сплайни. $(m = 1)$. Равшанки, ҳар бир $[x_i, x_{i+1}]$ оралиқда $S(f; x) = a_i + b_i(x\text{-}x_i)$ бўлиб, a_i, b_i коэффициентлар интерполия шартлардан топилади: $S(f; x_i) = f(x_i),\ S(f; x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ шунинг учун $a_i \ = \ f(x_i),\ b_i \ = \ f[x_i, x_{i+1}].\ \ h_i \ = x_{i+1}\text{-}x_i$ десак,

$$S(f;x)=f(x_i)+(x\text{-}x_i)f[x_i,x_{i+1}], x_i \ \le\ x \le\ x_{i+1},$$

бўлади. Равшанки, чизиқли сплайн қолдиғи

$$R(f;x)=f(x)-S(f;x)=\frac{f^2(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1}),\qquad (1)$$

ҳар бир $[x_i,x_{i+1}]$ учун алоҳида олинади.

(1) формула (11.16) дан келиб чиқади.

Мисол 2. Параболик сплайн. $[a,b]$ кесмани $a=x_0<x_1<...<x_{2n}=b$ нуқталар билан 2n бўлакка бўламиз.$[x_0,x_2],[x_2,x_4],...,[x_{2n}-2,x_{2n}]$ кесмаларда 2-даражали интерполяция кўпхадни қуриб ушбу функцияни аниклаймиз:

$$\text{S(f;x)}=\{\,f(x_i)+f[x_i,x_{i+1}](x-x_i)+f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}](x-x_i)(x-x_{i+1}),$$
$$x\in[x_i,x_{i+1}],i=0,2,...,2n-2.\qquad (2)$$

Уни параболик сплайн деб атаймиз. Қолдиқ ҳад қуйидагича бўлади:

$$R(f;x)=f(x)-S(f;x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_i)(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})$$

2. Кубик интерполяция сплайни .

m=2,k=1 десак,

$$S(f;x)=a_i+b_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-x_i)^3,x_i\le x\le x_{i+1}$$

формулага эгамиз.

Равшанки, $S''(x)$ - чизиқли функция, шунинг учун $S''(x_i)=M_i$ десак

$$S''(x)=S''_{3,i}(x)=M_i\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+M_{i+1}\frac{x-x_i}{h_i},x\in[x_i;x_{i+1}],$$

формулага келамиз. Бу ердан, равшанки,

$$S(x)=M_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+M_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}+\alpha_i(x_{i+1}-x)+\beta_i(x-x_i),\quad h_i=x_{i+1}-x_i,$$

Аввало,

$S(x_i)=f(x_i),\ S(x_{i+1})=f(x_{i+1})$ эканлигидан

$$\alpha_i=\frac{f_i}{h_i}-\frac{M_ih_i^2}{6},\ \ \beta_i=\frac{f_{i+1}}{h_i}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6}$$

Шунинг учун,

$$S(f;x)=\frac{M_i(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}+\frac{M_{i+1}(x-x_i)^3}{6h_i}+(f_i-\frac{M_ih_i^2}{6})\frac{x_{i+1}-x}{h_i}+(f_{i+1}-\frac{M_{i+1}h_i^2}{6})\frac{x-x_i}{h_i}\qquad (3)$$

Бу ердан 1-ҳосилани топамиз: (3) дан $x_i\le x\le x_{i+1}$ учун

$$S'(f;x)=-\frac{M_i(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}+\frac{M_{i+1}(x-x_i)^2}{2h_i}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{(M_{i+1}-M_i)h_i}{6},\ x_i\le x\le x_{i+1},\qquad (4)$$

(4) дан бир томонлама ҳосилаларни $x_1,...,x_{n-1}$ нуқталарда топамиз:

$$S^i(f;x_i-0)=\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}}{3}M_i+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}},S^i(f;x_i+0)=-\frac{h_i}{6}M_i-\frac{h_i}{3}M_{i+1}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}$$

Шарт бўйича S', S'' лар узлуксиз. S'(f;x) нинг $x_1,...,x_{n-1}$ нуқталардаги ҳосилаларни тенглаштириб ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}},i=1,2,...,n-1,$$

ёки

$$\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, \quad i = 1,2,...,n-1 \qquad (5)$$

бу ерда

$$\alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \ \beta_i = 1 - \alpha_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i},$$

$$d_i = 6\frac{f[x_i; x_{i+1}] - f[x_{i-1}; x_i]}{h_{i-1} + h_i} = 6f[x_{i-1}; x_i; x_{i+1}].$$

Кубик интерполяция сплайнини тўла топиш учун (5) системага яна 2 та чегара шарт қўйиш керак.

1-тур чегара шарт: $S'(f;a) = f_0'$, $S'(f;b) = f_n'$

(4) дан қуйидагиларни топамиз:

$$S^i(f; x_0 + 0) = -\frac{h_0 M_0}{3} + \frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{M_1 h_0}{6} = f_0^1$$

$$S^1(f; x_n - 0) = \frac{h_{n-1} M_{n-1}}{6} + \frac{h_{n-1}}{3} M_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} = f_n^1$$

Шунинг учун чегара шартларнинг кўринишлари

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right), M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_0}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right).$$

шаклда бўлади, шундай қилиб биз

$$\begin{aligned} &2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f_0'\right), \\ &\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \alpha_i M_{i+1} = d_i, i = 1,...,n-1, \\ &M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_0}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \ . \end{aligned} \qquad (6)$$

системага келамиз. Бу системадан M_i лар топилгач кубик сплайн қиймати (3) формула асосида ҳисобланади.

2-тур чегара шарт.

$$S''(f,a) = M_0, \ S''(f,b) = M_n,$$

У ҳолда фақат (4) ечилади, ёки

$$\begin{aligned} &2M_1 + \beta_1 M_2 = d_1 - \alpha_1 M_0 \\ &\alpha_i M_{i-1} + 2M_i + \beta_i M_{i+1} = d_i, i = 2,...,n-2, \\ &\alpha_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1} - \beta_{n-1} M_n \end{aligned} \qquad (7)$$

Яна, $M_0,...,M_n$ лардан фойдаланиб $S(f;x)$нинг қиймати (3) формула билан ҳисобланиши мумкин.

2'- тур чегара шарт. $M_0 = M_n = 0$. Бу (7) нинг ҳусусий холи.

3. Сплайнлар билан интерполяциялаш дастури.

Сплайнлар билан интерполяциялаш: $s_1(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i), x_i \le x \le x_{i+1}$.

$$S_3(f;t) = \frac{M_i (x_{i+1} - t)^3}{6h_i} + \frac{M_{i+1}(t - x_i)^3}{6h_i} + \left(f_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x_{i+1} - t}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right)\frac{t - x_i}{h_i}.$$

Чизиқли s1 , кубик s3 сплайнлар қуйидагича қурилади:

Тугун нуқталар, функция $n:=4 \quad f(t):=x*\sin(t) \quad a:=0 \quad b:=4 \quad h:=(b-a)/n$

Интерполяция шартлари $i:=0..n \quad x_i:=a+ih \quad y_i=f(x_i)$

Қийматлар $x:=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T \quad y=\begin{bmatrix}0 & 0.8415 & 1.8186 & 0.4234 & -3.0272\end{bmatrix}^T$

Сплайнлар $s1(t):=l\operatorname{int}erp(x,y,t) \quad M:=cspline(x,y) \quad s3(t):=\operatorname{int}erp(M,x,y,t)$

Қийматлар $s1(1.5)=0.868 \quad s3(1.5)=0.98 \quad f(1.5)=0.997$

Натижалар дастурни тўғри ишлаётганлигини кўрсатяпди.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Сплайн нима?
2. Чегара шартлар нима?
3. Сплайннинг деффекти нима?
4. Чизиқли сплайннинг қолдиғи нимага тенг?
5. Кубик сплайннинг қолдиғи нимага тенг?

Мундарижага

1.13. ТАҚРИБИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ФОРМУЛАЛАРИ ЧЕКЛИ АЙИРМАЛИ ҲОСИЛАЛАР

Асосий тушунчалар: *Тақрибий дифференциаллаш формулалари ёки чекли айирмали ҳосилалар ва уларнинг хатоликлари.*

Асосий натижалар::

1.Тақрибий дифференциаллаш масаласи:

$$D_x f(x)\approx \Lambda_x f(x), D_{xx} f(x)\approx \Lambda_{xx} f(x).$$

2.Чекли айирмали ҳосилалар: $\Lambda_x^+ f(x), \Lambda_x^- f(x), \Lambda_x^0 f(x), \Lambda_x^r f(x), \Lambda_x^l f(x), \Lambda_{xx} f(x):$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{1}{12}f''(\xi)h=\Lambda_x^+ f(x)+0(h),$$

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}+\frac{1}{12}f''(\xi)h=\Lambda_x^- f(x)+0(h)$$

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+0(h^2)=\Lambda_x^0 f(x)+0(h^2),$$

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[-3f(x)+4(x+h)-f(x+2h)]+0(h^2)=\Lambda_x^l f(x)+0(h^2),$$

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x-2h)-4(x-h)+3f(x)]+0(h^2)=\Lambda_x^r f(x)+0(h^2),$$

$$f''(x)=\frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}-\frac{f^{IV}(\xi)}{12}h^2=\Lambda_{xx} f(x)+0(h^2)$$

1. Тақрибий дифферноциаллаш масаласи.

Бирор $[a,b]$ кесмада жадвали

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \qquad (1)$$

нуқталар тўплами берилган ва бу нуқталарда қандайдир $y = f(x)$ функциянинг $y_i = f(x_i), i = 0,1,2,\ldots,n$ қийматлари берилган.

Тақрибий дифференциаллаш масаласида $D^{(r)} f(x) = f^{(r)}(x)$ ҳосилани, интеграллаш масаласида

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} p_i f(\xi_i) \quad , \qquad (2)$$

интегрални топиш талаб қилинади. Бу ерда $p_i, \xi_{i,} i = 0,1,\ldots,n -$коэффицентлар ва тугун нуқталар, йиғинди тақрибий интеграллаш ёки квадратура формуласи деб айтилади.

Бу иккала масалада ҳам $y = f(x)$ функциянинг аналитик кўриниши бирор чексиз йиғинди ёки интеграл кўринишида берилган бўлганда ҳам вужудга келади. Гап шундаки, йиғинди ва интеграл билан берилган функциянинг қийматларини ҳисоблаш қийин бўлганлиги учун унинг қиймати чекли сондаги, масалан, $\{x_i\}$ нуқталарда ҳисоблангач қолган нуқталарда ҳисоблаш учун янги лекин соддароқ функция қурилади.

Бу икки масала ҳам бир хил усулда ечилади. Масалан, интерполяция формулалари

$$N_n(f;x), L_n(f;x), S_N(f;x)$$

кўрилиб, ($N_n(f;x)$ Ньютон, $L_n(f;x)$ - Лагранж интерполяция кўпхадлари)

$$f\,'(x) \approx I_n{}'(f;x), J(f) = J(I_n(f;x))$$

деб олинади. Бунда қуйидаги хатоликларга йўл қўйилади:

$$r_n(f;x) = f\,'(x) - I_n{}'(f;x) \qquad (3)$$

$$r_n(f) = \int_a^b [f(x) - I_n(f;x)]dx = \int_a^b R_n(f;x)dx \qquad (4)$$

К бирор функциялар тўплами бўлсин. Агар

$$r_n(f) = 0, \quad f \in K \qquad (5)$$

бўлса тақрибий интеграллаш формуласи K тўпламда аниқ дейилади. (4) формуладан кўринадики, тақрибий интеграллаш формуласи $K = P_n$ - n - даражали кўпхадлар тўпламида аниқ экан.

Тақрибий интеграллаш формуласига бошқача ҳам тус бериш мумкин. $N_n(f;x)$ ўрнида $L_n(f;x)$ олсак

$$I(f) \approx I(L_n(f;x)) = \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) \qquad (6)$$

ни ҳосил қилишингиз мумкин, бу ерда

$$p_i = \int_a^b l_i(x)dx; \quad i = 0,1,\ldots,n \qquad (7)$$

Демак, тақрибий интеграллаш формуласининг жумладан тақрибий дифференциаллаш формуласини (6) кўринишида олиш мумкин, масалан,

$$D(f)=f'(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i f(x_i),\quad c_i=c_i(x)=l_i'(x)\ ,\ . \tag{8}$$

Тақрибий дифференциаллаш формулалари. Чекли айирмали ҳосилалар $f'(x_i), f''(x_i)$ ларнинг тақрибий қийматларини топамиз. Нуқталар тенг узоқликда жойлашган деб фараз қилайлик.

Ньютон интерполяция формуласидан фойдаланиш

$$N_2(f;x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0;x_i]+(x-x_0)(x-x_i)f[x_0;x_1;x_2]$$

Формуладан

$$f'(x_0)\approx N_2'(f;x_0)=\frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h}\overset{def}{\equiv} f_{x,0}=\Lambda_x^r\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) \tag{9}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_1)\approx \mathrm{N}_2(\mathrm{f};\mathrm{x}_1)=\frac{f_2-f_0}{2h}\overset{def}{\equiv} f_{x,1}\equiv\Lambda_x^0\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) \tag{10}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_2)\approx \mathrm{N}_2'(\mathrm{f};\mathrm{x}_2)=\frac{f_0-4f_1+3f_2}{2h}\overset{def}{\equiv} f_{x,2}\equiv\Lambda_x^l\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) \tag{11}$$

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_1)\approx \mathrm{N}_2''(\mathrm{f};\mathrm{x}_0)=\frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2}\overset{def}{\equiv} f_{xx,0}\equiv\Lambda_{xx}\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) \tag{12}$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгликларда ўнг томондаги учинчи устун ҳосилаларнинг тақрибий қийматлари, тўртинчи ва бешинчи устун эса бу тақрибий қийматларнинг шартли белгиларини ифодалайди. Бундан кейин def ифода таъриф бўйича деган маънони англатади.

$r_2^1(f;x)=R_2^1(f;x)$ эканлигидан

$r_2(f;x_i)=f^{(3)}(\xi)/3![(x_i-x_1)(x_i-x_2)+\ (x_i-x_0)\ (x_i-x_2)+\ (x_i-x_0)\ (x_i-x_1)]$

шунинг учун

$$f^i(x_0)=\frac{-3f_0+4f_1-f_2}{2h}+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3}h^2=f_{x,0}+O(h^2) \tag{13}$$

$$f^1(x_1)=\frac{f_2-f_0}{2h}-\frac{f^{(3)}(\xi)}{3}h^2=f_{x,0}+O(h^2) \tag{14}$$

$$f^1(x_2)=\frac{f_0-4f_1+3f_2}{2h}+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3}h^2=f_{x,2}+O(h^{2)} \tag{15}$$

Қуйида кўрамизки,

$$f^{(2)}(x_1)=\frac{f_0-2f_1+f_2}{h^2}-\frac{f^{IV}(\xi)h^2}{12}=f_{xx,1}+O(h^2)=\Lambda_{xx}f(x_1)+O(h^2) \tag{16}$$

(9) - (12) формулалар тақрибий дифференциаллаш формуласи ёки чекли айирмали ҳосилалар дейилади. (13) - (16) бу формулаларнинг хатоликларини кўрсатади. (14) биринчи тартибли марказий ҳосила, (16) иккинчи тартибли марказий ҳосила дейилади. Учинчи ҳосила чекланган функциялар синфида бу ҳосилаларнинг хатоликлари бошқаларникидан икки марта кичиклиги кўриниб турибди.

2. Тейлор формуласидан фойдаланиш.

Фараз қилайлик, функция формулаларда мавжуд узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Бунинг учун $f(x)\in C^p[a;b],\ p\le 4$, бўлиши биз учун етарли.

Аввало, $f(x)\in C^2[a;b]$ дейлик.Тейлор формуласига асосан,

$$f(x_i \pm h) = f(x_i) \pm\ hf'(x_i) + h^2/12\, f''(\xi_i)$$

Бу ердан

$$\pm f'(x_i) = \frac{f(x_i \pm h) - f(x_i)}{h} - \frac{1}{12} f''(\xi_i)h.$$

Энди $f(x)\in C^n[a;b]$ бўлсин, у ҳолда

$$f(x_i \pm h) = f(x_i) \pm hf'(x_i) + h^2/2f''(x_i)\ h^3/3!\, f'''(x_i + h_4/4f^{IV}(\xi_i)$$

бу тенгликларни қўшиб

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i+h) - 2f(x_i) + f(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}[\frac{f^{IV}(\xi_i) + f^{IV}(\xi_2)}{2}]$$

формулага келамиз. $f^{IV}(x)\in C^4[a;b]$ лигидан

$$f^{IV}(\xi_1) + f^{IV}(\xi_2) = 2f^{IV}(\xi)$$

тенгликни қаноатлантирувчи ξ нуқта мавжуд. Шу боис

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i-h) - 2f(x_i) + f(x_i+h)}{h^2} - \frac{f^{IV}(\xi)}{12}h^2 = \Lambda_{xx} f(x_i) + O(h^2) \qquad (19)$$

(16) формула исбот булди.(13),(15) формулалар ҳам қуйидагича умумлаштирилиши мумкин

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x-2h) - 4(x-h) + 3f(x)] + 0(h^2) = f_{x,0} = \Lambda_x^r f(x) + 0(h^2).,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[-3f(x) + 4(x+h) - f(x+2h)] + 0(h^2) = \Lambda_x^l f(x) + 0(h^2)$$

Бу формулаларни исботлаймиз:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + f''\frac{(x)h^2}{2} + 0(h^3)$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm f'(x)2h + f''(x)2h^2 + 0(h^3) \qquad (*)$$

$$4f(x \pm h) = 4f(x) \pm 4f'(x)h + f''(x)2h^2 + 0(h^3) \qquad (**)$$

(**) дан (*) ни айириб, $f'(x)$ни топсак исботлашимиз керак бўлган формулалар келиб чиқади.

Яратилган барча формулаларни битта жадвалга ёзамиз:

N÷	**хосила**	**Чекли айирмали хосила**	**Шартли белгиси**	**Қолдиғи**
1	$f`(x_i)$	$\frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^+ f(x_i)$	-hf"(ξ)/2
2	$f`(x_i)$	$\frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^- f(x_i)$	hf"(ξ)/2
3	$f`(x_i)$	$\frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h}$	$f_{x,i} = \Lambda_x^0 f(x_i)$	$h^2 f'''(\xi)/6$
4	$f`(x_0)$	$\frac{-3f(x_0) + 4f(x_i) - f(x_2)}{2h}$	$f_{x,0} = \Lambda_x^r f(x_0)$	$h^2 f'''(\xi)/3$

5	$f`(x_n)$	$\dfrac{f(x_{n-2})-4f(x_{n-1})+3f(x_n)}{2h}$	$f_{x,n}=\Lambda_x^l f(x_n)$	$-h^2 f'''(\xi)/3$
6	$f`(x_i)$	$\dfrac{f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})}{h^2}$	$f_{x,i}=\Lambda_{xx} f(x_i)$	$-h^2 f^{IV}(\xi)/12$

Бу тақрибий дифференциалаш формулалари тенгламаларни чекли айирмали схемалар ёрдамида тақрибий ечишда муҳим роль уйнайди.

Мисол 1. $y'=f(x,y), y(a)=y_0, a\le x\le b,$ Коши масаласини қарайлик. [a,b] кесмада $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, нуқталар тўпламини киритамиз. $y'(x_i)=f(x_i,y(x_i)), y(x_0)=y_0, a\le x\le b, y'(x_i)=(y(x_{i+1})-y(x_i))/(h)+r_h=f(x_i,y(x_i))$ деб оламиз. Чексиз кичик ҳадларни ташлаб юбориб $y_i\approx y(x_i)$қийматларни топиш учун Эйлер формуласига келамиз: $y_{i+1}=y_i+f(x_i,y_i), i=0,1,...,n-1,$ берилган. Кўрсатиладики, $y(x_i)-y_i=0(h)$.

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. **Биринчи** тартибли марказий чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
2. Биринчи тартибли чап чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
3. Биринчи тартибли ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
4. Иккинчи тартибли биринчи чап ва ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.
5. Иккинчи тартили марказий чекли айирмали ҳосила ва қолдиғи нимага тенг.

Мундарижага

1.14. ТАҚРИБИЙ ИНТЕГРАЛЛАШ (квадратура) ФОРМУЛАЛАРИ

Асосий тушунчалар: *Тақрибий интеграллаш формулалари, Ньютон - Котес формулалари ва уларнинг қолдиқлари, Трапеция формуласи, Симпсон формуласи*

Асосий натижалар:

1. Ньютон - Котес формулалари $J_h^{NK}(f)=J(L_n(f;x))=\int_a^b\sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)dx=\sum_{i=0}^n f(x_i)p_i$.

2.Тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)=h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+0.5}$

3.Трапеция формуласи: $J_h^T(f)=\dfrac{h}{2}\{f_0+2[f_1+...+f_{n-1}]+f_n\}$.

4.Симпсонформуласи:

$$J_h^C(f)=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{m-1}[f_{2i}+4f_{2i+1}+f_{2i+2}]=\frac{h}{3}[f_0+4(f_1+...+f_{2m-1})+2(f_2+...+f_{2m-2})+f_{2m}].$$

4. Интегрални тақрибий ҳисоблашга доир дастурлар

1. Ньтон-Котес формулалари $J_h^{NK}(f)$.

$J(f) = \mathrm{int}(f,a,b))$ интегрални ҳисоблаш учун Ланграж интерполяция формуласидан фойдаланамиз:

$$J_h^{NK}(f) = J(L_n(f;x)) = \int_a^b L_n(f;x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)p_i \qquad (1)$$

бу ерда

$$p_i = \int_a^b l_i(x)dx = \int_a^b \prod_{j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx \qquad (2)$$

(1) формула $x_{i+1} - x_i = h$, ҳол учун Ньютон - Котес формуласи дейилади, (2) Ньютон -Котес коэффициентлари дейилади. (2) да $x = x+th$ алмаштириш бажарсак $dx = hdt,\ x \to t,\ a \to 0, b \to n,\ h = (b-a)/n$ ва

$$p_i = \frac{b-a}{n}\int_0^n (-1)^{n-i} \frac{t(t-1)...(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}dt \qquad (3)$$

кўринишни ҳосил қиламиз. (3)ни ҳосил қилишда

$$x - x_j = (t-j)h,\ x_i - x_j = (i-j)h$$

тенгликлардан фойдаландик.

2. Тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)$.

Квадратура формуласи (интеграл йиғинди) да

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p_i f(\xi_i)} \qquad (4)$$

да $\xi_i = x_i + h/2, p_i = h, i = 0,1,...,n-1,$ деб ушбу марказий тўғри тўртбурчаклар формуласи $J_h^{TT}(f)$ га келамиз:

$$J_h^{TT}(f) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) = h\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+0.5}\ .$$

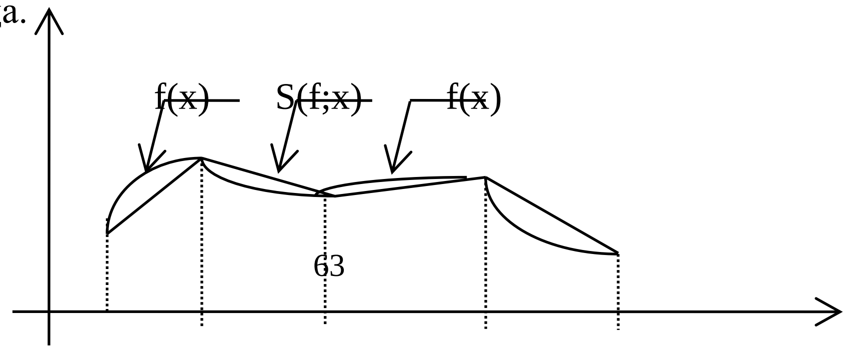
Марказий тўғри тўртбурчаклар формуласида эгри чизиқли трапеция юзи чизмада кўрсатилган асослари h ва $f(x_i + h/2)$ га тенг тўғри тўртбурчак юзаларининг йиғиндиси $J_h^{TT}(f)$ га алмаштирилмокда.

3. Трапеция формуласи $J_h^{T}(f)$.

Квадратура формуласида $\xi_i = x_i, p_0 = p_n = h/2, p_i = h, i = 1,...,n-1$ деб оламиз

$$J_h^{T}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f_i + f_{i+1}}{2} h = \frac{h}{2}\{\mathrm{f_0 + 2(f_1 + ... + f_{n-1}) + f_n}\} \qquad (5)$$

(5) формула трапеция формуласи дейилади. Трапеция формуласида эгри чизиқли трапеция юзи чизмада кўрсатилган асослари f_i, f_{i+1}, h баландликка эга трапециялар юзаларининг йиғиндиси $J_h^{T}(f)$ билан алмаштирилмокда.



4. Симпсон формуласи $J_h^C(f)$.

$J(f)$ интегрални тақрибий ҳисоблаш учун $\{(x_i, f(x_i)),\ i=0,1,...,2n\}$ жадвал олиб хар бир $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ $\{i=0,1,...,2n-2\}$ кесмада Ньютоннинг иккинчи даражали кўпхадини қурамиз. Бу функциялар $[x_0; x_{2n}]$ кесмада узлуксиз иккинчи даражали (параболик) интерполяция сплайни $S(f,x)$ ни ташқил килади.

$$S(f,x)=\begin{cases} f(x_{2i})+(x-x_{2i})f[x_{2i},x_{2i+1}] \\ +(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})f[x_{2i},x_{2i+1},x_{2i+2}] \\ x_{2i}\le x\le x_{2i+2},\ i=0.1,...,n-1 \end{cases} \qquad (6)$$

Сўнг $J(f)\approx J(S)=J_h^C(f)$ деб қабул қиламиз ва $J_h^C(f)$ ни Симпсон формуласи деб атаймиз. Равшанки,

$$J_h^C(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} L_{2,i}(f;x)dx=\frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}[f_{2i}+4f_{2i+1}+f_{2i+2}]=$$

$$\frac{h}{3}\{f_0+4(f_1+...+f_{2m-1})+2(f_2+...+f_{2m-2})+f_{2m}\}$$

Оралиқ натижа қуйидагича яратилади. $[x_0,x_2]$ кесмада Ньютоннинг 2-даражали интерполяция кўпҳадини интеграллаймиз.

Лемма 1. Ушбу содда Симпсон формуласи ўринли:

$$\int_{x_0}^{x_2} N_2(x)dx = h(f_0+4f_1+f_2)/3 = J_h^C(N_2).$$

Исбот. $a_0=f_0, a_1=f[x_0,x_1], a_2=f[x_0,x_1,x_2]$ деб қуйидагиларни оламиз:

$$\int_{x_0}^{x_2} N_2(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}(a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)dx=2ha_0+2a_1h^2+2a_2h^3/3$$

$$=2hf_0+2h^2(f_1-f_0)/h+2\frac{h^3}{3}(f_0-2f_1+f_2)/2h^2=h(f_0+4f_1+f_2)/3=J_h^C(N_2).$$

Лемма 2. $r_h^C(f)=f(x)-J_h^C(f)$ десак $r_h^C(x^\alpha)=0, \alpha=0,1,2,3$.

Исбот. $\alpha=0,1,2$ ҳоллар равшан, $\alpha=3$ ҳол элементар кўрсатилади:

$$r_h^C(x^3)=\frac{1}{4}(x_2^4-x_0^4)-\frac{(x_2-x_0)}{6}[x_0^3+4(\frac{x_0+x_2}{2})^3+x_2^3]=\frac{1}{4}(x_2^4-x_0^4)-\frac{(x_2^2-x_0^2)}{6}\frac{3}{2}[x_0^2+x_2^2]=0$$

5 . Интегрални тақрибий ҳисоблашга доир дастурлар.

$J=\int_0^\pi \sin(x)dx$ интегрални ҳисоблайлик, $J_h := \sum_{i=0}^{n} c_i f(\xi_i)$ $R_h := J-J_h$.

5.1. Тўғри тўртбурчаклар формуласи.

$$J_h^{TT} := h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i+h/2)\ ,\quad R_h^{TT}=\frac{h^2(b-a)}{24}f''(c).$$

функция, оралиқ, бўлинишлар сони $f(x) := \sin(x)\ \ a := 0\ \ b := \pi\ \ n := 20$

ҳисобланадиган интеграл $J := \int_a^b f(x)dx \qquad J = 2$

қадам, тугун нуқталар $h := (b-a)/n\ \ i := 0..n\ \ x_i := a + ih$

ТТ формуласи ва қиймати $JTT(n) := h\sum_{i=0}^{n} f(x_i - h/2) \quad JJT(n) = 1.99$

5.2.Трапеция формуласи:

$$J_h^T := h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i),\ \ R_h^T = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c).$$

функция, оралиқ, бўлинишлар сони $f(x) := \sin(x)\ \ a := 0\ \ b := \pi\ \ n := 20$

ҳисобланадиган интеграл $J := \int_a^b f(x)dx \qquad J = 2$

қадам, тугун нуқталар $h := (b-a)/n\ \ i := 0..n\ \ x_i := a + ih$

Трапеция формуласи $JT(n) := h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \quad JT(n) = 1.996$

5.3.Симпсон формуласи:

$$J_h^C := \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})],\ \ R_h^{TT} = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(c).$$

функция, оралиқ, бўлинишлар сони $f(x) := \sin(x)\ \ a := 0\ \ b := \pi\ \ n := 20$

ҳисобланадиган интеграл $J := \int_a^b f(x)dx$

қадам, тугун нуқталар $h := (b-a)/n\ \ i := 0..n\ \ x_i := a + ih$

Симпсон формуласи $JS(m) := \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})]$

интегралнинг аниқ ва тақрибий қиймати $J = 2\ \ JS(10) = 2.0000067844$

Натижа тўғрилиги кўриниб турибди.

Назарий саволлар ва топшириқлар

1. Ньютон-Котес квадратура формуласини ёзинг.
2. Чап ва унг тўғри тўртбурчаклар формуласини ёзинг.
3. Марказий тўғри туртбурчаклар формуласини ёзинг.
4. Трапеция формуласини ёзинг.

5. Симпсон формуласини ёзинг.

Мундарижага

1.15. КВАДРАТУРА ФОРМУЛАЛАРИНИНГ ҚОЛДИҚЛАРИ.

Асосий тушунчалар: *Трапеция формуласининг қолдиғи, Симпсон формуласиниг қолдиғи, хатоликни амалий баҳолашнинг Рунге қоидаси, тақрибий усулнинг яхшилашнинг Ричардсон экстраполяция формуласи.*

Асосий натижалар:

1. Квадратура формулаларининг қолдиқлари:

$$r_h^T(f) = -f^{(2)}(c)h^2(b-a)/12, \quad r_h^{TT}(f) = f^{(2)}(c)h^2(b-a)/24, \; f(x) \in C^2[a,b],$$

$$r_h^C(f) = -f^{(4)}(c)h^4(b-a)/180, \; f(x) \in C^4[a,b].$$

2.Рунге қоидаси ва Ричардсон экстраполяция формуласи:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}), \; h \to 0 \; .$$

$$Z_h{*} = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h)/\;(2^k - 1), r_h^* = Z - Z_h^* = 0(h^{k+m}) \; .$$

1. Квадратура формулаларининг қолдиқлари.

Ушбу ифодалар $r_h^T(f) = J(f) - J_h^T(\mathrm{f})$, $r_h^C(f) = J(f) - J_h^C(f), r_h^{TT}(f) = J(f) - J_h^{TT}(\mathrm{f})$ трапеция, Симпсон ва т.т. квадратура формулаларининг қолдиқларидир.

Теорема 1. Агар $f(x) \in C^2[a,b]$ бўлса ушбу тенгликлар ўринли

$$r_h^T(f) = -f^{(2)}(c)h^2(b-a)/12, r_h^{TT}(f) = f^{(2)}(c)h^2(b-a)/24 \quad . \tag{1}$$

Теорема 2. Агар $f(x) \in C^4[a,b]$ бўлса ушбу тенглик ўринли

$$r_h^C(f) = -f^{(4)}(c)h^4(b-a)/180 \, . \tag{2}$$

Исбот. Равшанки, $L_{1,i}(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i), x \in [x_i, x_{i+1}]$ десак

$$r_h^T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+1} \left[f(x) - L_{1,i}(x) \right] dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[(f^{(2)}(c_i))(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right] / 2dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(t_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right] / 2dx = \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(t_i) h^3 \tfrac{1}{12} = -h^2 \frac{b-a}{12} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(t_i)}{n} = -h^2 \frac{b-a}{12} f^{(2)}(c)$$

Бу ерда интеграл учун ўртача қиймат ҳақида теоремадан фойдаландик, чунки $f\;''(x)$ - узлуксиз ва $(x - x_i)(x - x_{i+1}) \le 0$. Охирида йиғинди учун ўрта қиймат ҳақидаги теорема ишлатилди, чунки $f\;''(x)$ - узлуксиз ва

$$f\;''(\eta_1) + ... + f\;''(\eta_n) = n\, f\;''(\xi), \quad \eta_i, \xi \in [a,b].$$

(1) нинг иккинчи формуласи қуйидагича исботланади. Равшанки,

$$f(x) = f(x_i + h/2) + f'(x_i + h/2)(x - x_{i+1/2}) + f''(c_i)(x - x_{i+1/2})^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} hf_{i+1/2} + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(c_i)(x - x_{i+1/2})^2 dx = J_h^{TT}(f) + \frac{h^3(b-a)}{24} f''(\eta)$$

(2) формула ҳам шу каби исботланади.

Лемма 3. Ихтиёрий $f(x) \in C^4[x_0, x_2]$ учун ушбу тенглик ўринли

$$r_h^C(f, x_0, x_2) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), x_0 < \eta < x_2 \, .$$

Исбот. Олдинги леммага асосан $r_h^C(P_3(x)) = 0, P_3(x) = N_2(x) + dx^3, d \in R$.

$P_3(x)$ кўпҳадни интерполяция кўпҳади шаклида оламиз:

$P_3(x_i) = f(x_i), i = 0,1,2, P_3'(x_1) = f'(x_1)$. Равшанки,

$$R_3(x) = f(x) - P_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2),$$

$$r_h^C(f) = \int_{x_0}^{x_2} R_3(x)dx = \int_a^b \frac{1}{4!} f^{(4)}(\eta)(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)dx =$$

$$= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)dx = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \int_{-h}^{h} (t + h)t^2(t - h)dt = -\frac{h^5(b-a)}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Энди равшанки,

$$r_h^C(f) = -\sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_i) = -\frac{h^4}{2*90}(b-a)\sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(4)}(\eta_i)}{m} = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\eta)$$

2. Рунге қоидаси ва Ричардсон экстраполяция формуласи

Z_h миқдор Z нинг h параметрга боғлик бирор тақрибий қиймати бўлсин ва қуйидаги асимптотик боғланиш мавжуд бўлсин:

$$Z = Z_h + ch^k + O(h^{k+m}),\ c = const,\ h \to 0 \quad k, m \text{ - бутун сонлар.} \tag{3}$$

Теорема 1. Агар (3) ўринли бўлса,

$$Z = Z_h + \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}),\ h \to 0 \tag{4}$$

муносабат ўринли бўлади, яъни ушбу формулалар ўринли:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_h - Z_{h/2}}{2^k - 1} + 0(h^{k+m}) \approx \frac{Z_h - Z_{h/2}}{2^k - 1}, r_h^* = Z - Z_h^* = 0(h^{k+m})$$

$$Z_h{*} = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h)/\ (2^k - 1) = c_1\ Z_{h/2} + c_2\ Z_h, c_1 = 2^k/(2^k - 1), c_2 = -1/(2^k - 1).$$

Исбот. (3) ни $h/2$ да ёзамиз:

$$Z = Z_{h/2} + c\ \frac{h^k}{2^k} + 0(h^{k+m}),\ h \to 0\ . \tag{5}$$

(3) дан (5) ни айирамиз ва c ни топамиз:

$$0 = Z_h - Z_{h/2} + c(2^k - 1)h^k\ /2^k + 0(h^{k+m}),\ h \to 0,$$

$$c = (Z_{h/2} - Z_h)\ 2^k/(2^k - 1)h^k + 0(h^{k+m}),\ h \to 0.$$

Бу тенгликни (3) га қўйиб (4) ни топамиз. Бу ердан кўринадики, қолдиқ ҳад $r_h = Z - Z_h$ сифатида ушбу формулани олиш мумкин экан:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} + O(h^{k+m}),\ h \to 0\ .$$

Бу қолдиқ ҳадни ҳисоблашнинг Рунге қоидаси деб айтилади. Рунге қоидасидан қуйидаги Ричардсон экстраполяция формуласи келиб чиқади:

$$Z_h{*} = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h)/\ (2^k - 1) = c_1\ Z_{h/2} + c_2\ Z_h, c_1 = 2^k/(2^k - 1), c_2 = -1/(2^k - 1) \tag{7}$$

Ричардсон экстраполяция формуласининг қолдиғи қуйидагича:

$$r_h{*} = Z - Z_h{*} = 0\ (h^{k+m}),\ h \to 0. \tag{8}$$

Теорема 3. Агар $f(x) \in C^4[a,b]$ бўлса ушбу формулалар ўринли.

$$r_h^T(f) = Ch^2 + O(h^4), C = -1/12\int_a^b f''(x)dx,$$

Агар $f(x) \in C^6[a,b]$ бўлса, ушбу формулалар ўринли:

$$r_h^C(f) = Ch^4 + O(h^6),\ C = -1/180\int_a^b f^{(4)}(x)dx\ .$$

Биринчи формулани қисқача исботга олиб борувчи фикрни келтирамиз.Равшанки,

$$r_h^T(f) = -\frac{h^2}{12}(b-a)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(2)}(c_i)}{n} = -\frac{h^2}{12}[\int_a^b f''(x)dx + O(h^2)] = ch^2 + O(h^2).$$

Демак,

$$r_{h/2}^T(f) = (J_{h/2}^T(f) - J_h^T(f))/3 + O(h^4) \qquad (9)$$

$$r_{h/2}^C(f) = (J_{h/2}^C(f) - J_h^C(f))/15 + O(h^6) \qquad (10)$$

Мисол 1.Трапеция формуласи билан $f(x) = 1/\sqrt{1+x^3}$ функциядан [0,1] кесмада интеграл $\varepsilon = 0,00001$ аниқлик билан ҳисоблансин.h_1=0,1 ва h_2=0,05 қадамлар олиб [0,1] кесмада иккита нуқталар тўплами оламиз: $x_k = a + k_1h_1, x_k = a + k_2h_2, k_1 = 0,1,...,10, k_2 = 0,1,...,20$. Ҳисоблаб топамиз: $J_{h_1}^T = 9,0916166, J_{h_2}^T = 9,0982576$. Рунге қоидаси асосида қолдиқни, Ричардсон формуласига асосан интегрални ҳисоблаймиз:

$$r_h = Z - Z_h = \frac{Z_{h/2} - Z_h}{2^k - 1} \approx \frac{J_{h_1}^T - J_{h_2}^T}{3} = 0,0001106,$$

$$Z_h^* = Z_h + (Z_{h/2} - Z_h)/\ (2^k - 1) \approx 0,9094$$

Назарий саволлар ва топшириқлар.

1. Ньютон-Котес квадратура формуласини қолдиғини ёзинг.
2. Марказий тўғри тўртбурчаклар формуласининг қолдиғини ёзинг.
3. Трапеция ва Симпсон формуласини қолдиғини исботланг.

Мундарижага

1.16. Функция минимумини топиш (математик программалаш масаласи)

Асосий тушунчалар: *Перебор усули,градиент пасайиш усули,масаланинг Matchad программасида ечилиши .*

Асосий натижалар:

1.*Масаланинг қўйилиш:*

$$Z = f(x) = f(x_1,...,x_n) \to \min,\ g_i(x) = g_i(x_1,...,x_n) \le b_i, \quad i = 1..m.$$

$$\min_{x\in R_n}\sum_{i=1}^n f_i^2(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(\xi) = 0 \Leftrightarrow f_i(\xi) = 0, \quad i = 1..n,$$

2. Перебор усули. $\min\limits_{x\in D\subset R^n} f(x) \approx \min\limits_{D_h=\{x^{(k)}\in D\}} f(x^{(k)}) = \xi$

3. Градиент пасайиш усули

$x^{(k)} = x^{(k-1)} - h\,grad\,f(x^{(k-1)}), \quad k = 1,2,...,\ \xi = \arg\min\limits_{x\in G\in R^n} f(x), \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \xi$

4.Алгоритми ва программаси.

5.Масаланинг Matchad программасида ечилиши.

1. Бирор кўп ўзгарувчили функциянинг

$$Z = f(x) = f(x_1,...,x_n) \quad (1)$$

$$g_i(x) = g_i(x_1,...,x_n) \le b_i, \quad i = 1..m \quad (2)$$

каби шартларни қаноатлантирувчи экстремум қийматларини топиш талаб этилади. (1), (2) масала шартли экстремум масаласи дейилади. $z = f(x)$ функция мақсад функция, $g_i(x) \le b_i, \ i = 1..m,$ шартлар чекланиш шартлари дейилади. Улар орасида $x_i \ge 0, \ i = 1..n,$ шартлар ҳам бўлиши мумкин. Мақсад функция сафатида космик кемани
фазога олиб чиқиш учун зарур бўлган ёқилғи миқдори,механик конструция оғирлиги, ишлаб чиқарилаётган маҳсулот таннархи, ҳаражатлар миқдори каби кўрсаткичлар бўлиши мумкин. Чекланишлар зарур ресурслар миқдорини чекланганлигини билдиради.

Агар масалада (2) шартлар бўлмаса масала шартсиз эксремум масаласи дейилади. Яна бир мисол сифатида

$$f_i(x) = f_i(x_1,...,x_n) = 0, \quad i = 1..n \quad (3)$$

тенгламалар системасини олиш мумкин.

$$f(x) = f^2(x) + f_2^2(x) + ... + f_n^2(x) \quad (4)$$

функцияни тузайлик.Равшанки,

$$\min_{x \in R_n} f(x) = f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f_i(\xi) = 0, \quad i = 1..n, \quad (5)$$

яъни $f(x)$ функция минимуминини топиш тенгламалар истемасини ечиш билан эквивалент. Ва ихтиёрий функция $f(x)$ нинг минимумини топиш

$$f_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1..n, \quad (5)$$

системани ечиш билан баробар.

Масалан, $f(x) = x_1^4 + x_1^4 - x_1^2 - x_2^2$ функциянинг минимумини топиш учун

$$2x_1^3 - x_1 = 0, \quad 2x_2^3 - x_2 = 0 \quad (6)$$

Системага келамиз. Бу система ечими $\left(\pm\sqrt{2}/2, \ \pm\sqrt{2}/2\right)$ га тенг

2. Перебор усулининг ғояси жуда содда. Берилган $D \subset R^n$ сохада $D_h = \left\{x^{(k)} \in D\right\}$нуқталар тўплами (тур) оламиз ва $f(x^{(k)})$ қийматларни ҳисоблаб чиқамиз. Қийматлар орасида энг кичик ва унга мос нуқтани масаланинг тақрибий ечими деб қабул қиламиз. Агар n катта бўлса, бу масала анча оғир масала, Масалан, $D = \left(0 \le x_i \le 1, \ i = 1..n\right)$ гиперкуб бўлсин. $h = 0.1$ қадам, билан $x_i = ih, \ i = 1..n,$ тўр ясайлик. Нуқталар сони 10^n га тенг функция қийматини 1 та нуқтада ҳисоблаш учун 100n та амал ишлатилсин. Алгоритм учун 10^{n+2} n та амал бажариш керак. $n = 10$ учун тезлиги 10^6 амал/сек бўлган компьютер бундай масалани 10^7 *секунд* ≈ 4йил узлуксиз ишлаб бажариш мумкин.

3. $f(x)$ функция градиенти деб

$$grad\, f(x) = f'(x) = (\partial_1 f(x),...,\partial_n f(x))$$

векторга айтилади. Анализдан маълумки функция градиент йўналишида ўсади, антиградиент йўналишида камаяди. Шунинг учун бирор $x^{(0)} \in D$ бошланғич нуқтадан бошлаб

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - h\, grad\, f(x^{(k-1)}), \quad k = 1,2,..., \tag{7}$$

итерациялар кўрилади, бу ерда h итерация қадами дейилади. Етарли кичик h лар учун

$$f(x^{(0)}) > f(x^{(1)}) > ... > f(x^{(n)}) > ... \tag{8}$$

бўлади. Одатда итерацияларнинг тугаллаш шарти сифатида

$$\| grad\, f(x^{(k)}) \| \le \varepsilon \tag{9}$$

тенгсизлик қабул қилинади ε>0 –аниқлик чегараси.

Мисол. $f(x) = x_1^2/4 + x_2^2$ функция учун

$$x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} - hx_1^{(k-1)}/2,\ x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} - h\cdot 2x^{(k-1)} \qquad h = 0{,}1,\ x^{(0)} = (1{,}1)$$

$$x_1^{(1)} = 0{,}95; \qquad x_1^{(2)} = 0{,}9025, \qquad x_1^{(3)} = 0{,}85574$$

$$x_2^{(1)} = 0{,}80; \qquad x_2^{(2)} = 0{,}6400, \qquad x_2^{3} = 0{,}5120$$

$$f(x^{(0)}) = 1{,}25, \quad f(x^{(1)}) = \qquad , f(x^{(3)}) = 0{,}446$$

Агар танланган h қадам учун $f(x^{(k)}) < f(x^{(k-1)})$ бажарилган, қадам 2 га бўлинади ва хоказо.

Энг тез пасайиши усулида қадам h қуйидагича танланади:

$$F(h^*) = \min F(h), \qquad F(h) = f(x^{(k)}) - h\, grad\, f(x^{(k)}). \tag{10}$$

Масалан, юқоридаги мисол учун $x^{(0)} = (1{,}1)$ да (10) масала қуйидагича бўлади:

$$\min\left[\frac{1}{4}(1 - \frac{h}{2})^2 + (1 - 2h)^2\right] \tag{11}$$

ва $h^* = \dfrac{10}{9}$ га тенг.

Шартли экстремум масаласи шартсиз экстремум масаласи турли усуллар билан келтирилиши мумкин: Лагранж усули, штраф функциялар усули ва хоказо. Масалан, штраф функциялар усулида

$$\phi_k(x) = f(x) + k\sum_{i=1}^{m}(g_i(x) - b_i)^2{}_+, \qquad k >> 1, \tag{12}$$

функция киритилади, бу ерда

$$(g_i(x) - b_i)_+ = \begin{cases} g_i(x) - b_i, & агар \quad g_i(x) > b_i, \\ O, & агар \quad g_i(x) \le b_i. \end{cases}$$

(12) функциянинг шартсиз экстремум нуқталари $x^{(k)}$ лар ҳисобланади. Махсус курсларда исботланадики, $x^{(k)} \to \xi$, бу ерда ξ шартли экстемум нуқтаси. Ҳақиқатан ҳам, равшанки,

$$\Phi_k(x^{(k)}) = \min\, \phi_k(x) \ge f(x^{(k)})$$

Шунинг учун, $x^{(k)} \in D$ нуқталар учун $\Phi_k(x^{(k)}) > \Phi_{k+1}(x^{(k+1)}) > ...$бўлса, $f(x^{(k)}) > f(x^{(k+1)}) > ...$бўлишига мажбур.

3. Mathcad да ночизиқ функциянинг экстремумларини топиш масаласини қараймиз, ушбу функция берилган бўлсин:

$$f(x,y) := 2 + 2\cdot x + 2\cdot y - x^2 - y^2$$

Масаланинг Matchad ойнасида ечилиши.

Given

$x \ge 0$

$0 \le y \le 9 - x$

first minimum point at (0,9), the uppermost vertex of T

$P := \text{Minimize}(f, x, y)$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad f(P_0, P_1) = -61$

$x := 5$ $\qquad y := 4$

Given

$x \ge 0$

$0 \le y \le 9 - x$

second minimum point at (9,0), the rightmost vertex of T

$Q := \text{Minimize}(f, x, y)$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad f(Q_0, Q_1) = -61$

Яна такрорлаймиз, бу масалалар тўғри Matchad ойнасидан олинган.

Мундарижага

1.17. Чизиқли функция минимумини топиш

Асосий тушунчалар: *ЧП масаласи, симплекс усул. Mathcadда ечим олиш.*

1. ЧП масаласининг каноник кўриниши: $f(x) = cx \to \min, Ax = b\,(Ax \le b, Ax \ge b)$.

2. ЧП масаласига мисоллар:тақсимот, рацион, транспорт масалалари.

3. ЧП ечиш учун симплекс усул.

4.Масаланинг Mathcad программаси ёрдамида ечиш.

1. $f(x) = c_1x_1 + ... + c_nx_n = (c,x) = (c,x)_{R^n}$ чизиқли функция ва чизиқли тенгламалар системаси (чекланишлар) $Ax = b$ берилган бўлсин, бу ерда

$$A = [a_{ij}],\ x = [x_1,...,x_n] \in R^n, b = [b_1,...,b_m] \in R^m,\ A: R^n \to R^m:$$

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, ..., a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m,$$
$$x_i \ge 0, i = 1..n,\ \ b_j \ge 0,\ \ j = 1..m,\ \ m \le n, \qquad (1)$$

Чизиқли функция $f(x)$ га (1) шартларни қаноатлантирадиган ечимлар U орасидан энг кичкина қиймат берувчи нуқтани топиш керак:

$$\min f(x) = \min(c,x) = f(x^*) \qquad (2)$$

$$U = \{x \in R^n : Ax = b,\ \ x \ge 0,\ \ b \ge 0\} \qquad (3)$$

(2),(3) масала чизиқли функциянинг (ЧФМ) минимуми ҳақидаги масаланинг каноник шакли дейилади.
ЧФМ хақидаги масаланинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\min(c,x)=(c,x^*),\quad U=\left\{x\in R^n : Ax=b,\ x\geq 0,\quad b\geq 0\right\} \qquad (4)$$

Умумий кўринишдаги масаласидаги тенгсизлик билан берилган шартлар тенглик шартларига қўшимча ўзгарувчилар киритиш йули билан осонгина келтирилади: масалан, $a_1x_1+...+a_nx_n\leq b\quad (a_1x_1+...+a_nx_n\geq b)$ тенгсизлик янги $x_{n+1}\geq 0$ ўзгарувчи киритилиб, қуйидаги тенглик ҳосил қилинади:

$$a_1x_1+...+a_nx_n+x_{n+1}=b\quad (a_1x_1+...+a_nx_n-x_{n+1}=b).$$

Функцияга бу ўзгарувчи 0 коэффицент билан киради: $f(x)=(c,x)+0x_{n+1}$.

2. Иккита масалани қараймиз. 1-мисол. Ресурсларни оптимал тақсимлаш масаласи. $x_1,...,x_n$ миқдорда n хил товар ишлаб чиқарилсин. Уларни тайёрлаш учун m хил ашё керак бўлсин. i-товар ишлаб чиқариш учун j-хом ашё дан a_{ij} миқдорда керак бўлсин. j- хом ашё запаси b_j бўлсин. Бир бирлик i- товар c_i фойда берсин. У ҳолда энг кўп фойда қилиш учун ушбу масалага келамиз:

$$f(x)=(c,x)\to\max,\ U=\left\{x\in R^n : Ax=b,\ x\geq 0,\quad b\geq 0\right\} \qquad (5)$$

2-мисол. Транспорт масала. i-пунктда, $1\leq i\leq m,\ a_i$ миқдорда маҳсулот бор, j-қабул пунктига b_j миқдорда махсулот керак, i-пунктдан j-пунктга бир бирлик махсулотни топиш учун $C_{i,j}$ пул кетсин, Равшанки, $a_1+...+a_n=b_1+...+b_m$ бўлиши керак. Траснспорт масаласида маҳсулотни шундай топиш керакки, ҳаражатлар энг кичик бўлсин.

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n,m}c_{ij}\,x_{ij}\to\min \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i,\ \ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ \ x_{ij}\geq 0. \qquad (7)$$

Теорема 1. (6) функцияни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{i,j}x_{i,j}=tr(Cx^T),tr(A)=\sum_{k=1}^{l}a_{k,k}.$$

Исбот. $Cx^T=Cy=A$ дейлик. У ҳолда

$$a_{i,l}=\sum_{k=1}^{m}c_{i,k}y_{k,l}=\sum_{k=1}^{m}c_{i,k}x_{l,k},tr(Cx^T)=\sum_{i=1}^{m}a_{i,i}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}x_{i,k}=Cx.$$

Теорема 2. (7) шартларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x*e_1^T=a,x^T*e_2^T=b,a=[a_1,...,a_m]^T,b=[b_1,...,b_m]^T,e_1^T=[1_1,...,1_n]^T,e_2^T=[1_1,...,1_m]^T.$$

3.Симплекс усул.**(**2)-(3) масаланинг мумкин бўлган ечими деб (3) шартларни қаноатлантирувчи $x=(x_1,...,x_n)$ векторга айтилади. Фараз қилайлик $rang(A)=m$. Симплекс усул қуйидаги икки қадамдан иборат.

1-қадам. $Ax=b$ системада m та базис ўзгарувчи мавжуд. У ҳолда Гаусс усули билан уни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\left\{x_1+\alpha_{1m+1}+...+\alpha_{in}x_n=\beta_1,...,x_m+\alpha_{mm+1}x_{m+1}+...+\alpha_{in}x_n=\beta_m,\beta_i\geq 0.\right. \qquad (8)$$

улардан $x_1,...,x_m$ ларни топиб $f(x)$ функцияни

$$f(x)=\gamma_{m+1}x_{m+1}+...+\gamma_n x_n+f_0 \quad (f(x)+p_{m+1}x_{m+1}+...+p_n x_n=f_0) \qquad (9)$$

кўринишга келтириш мумкин. Бу ерда $x_1,...,x_m$ базис ўзгарувчилар, $x_{m+1},...,x_n$ –эркин ўзгарувчилар. $x_{m+1}=..=x_n=0$, $x_i=\beta_i, i=1...,m,$ қийматларни топамиз ва

$$x^{(0)}=(\beta_1,..,\beta_m,0,...,0) \qquad (10)$$

бошланғич мумкин бўлган ечимни қурамиз.

Теорема. ($x^{(0)}$ нуқтанинг оптималлик шарти). Агар (9) да барча $\gamma_i \geq 0,\ i=m+1,...,n$ бўлса, $f(x)$ функциянинг $f(x^{(0)})$ қиймати энг кичик (энг катта) қиймат ва $x^{(0)}$ (10) оптимал ечим, чунки бирор эркин ўзгарувчи қиймати ошса функция қиймати катталашади (кичиклашади).

Фараз килайлик, γ_j лар ичида манфийлари мавжуд бўлсин. Улардан модуль бўйича энг каттаси γ_J бўлсин. J-устун ҳал килувчи дейилади.(8)-(9) ни ушбу симплекс жадвалда акс эттирамиз:

	x_1	x_2		x_m	x_{m+1}		x_J		x_n	β_i	ρ_i
x_1 x_2 . x_I . x_m	1	 1		 1	α_{1m+1} α_{2m+1} α_{Im+1} α_{mm+1}		α_{1J} α_{2J} $\alpha_{IJ}\rightarrow$ α_{mJ}		α_{1n} α_{2n} α_{1n} α_{mn}	β_1 β_2 β_I β_m	- ρ_1 ρ_I ρ_k
	0	0		0	p_{m+1}		$p_J\uparrow$		p_n	f_0	

2-қадам.Янги базисга функция қийматини камайтириб ўтиш учун β_i/α_{iJ}, $1\leq i\leq m,\ \ m+1\leq J\leq n$ сонларни қараймиз Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: 1) барча a_{ij} лар манфий; 2) a_{ij} лар орасида мусбатлари мавжуд. Биринчи ҳолда f(x) функция қуйидан чегараланмаган, иккинчи ҳолда эса ушбу қийматни топамиз: $\rho_I=\beta_J/|\alpha_{IJ}|=\min\limits_{a_{iJ}\geq 0}\{\beta_i/|\alpha|_{iJ}\}=\rho$.

I-сатр ҳал қилувчи сатр дейилади. Янги базис ечим қурамиз:

$$x^{(1)}=(\beta_1,...,\beta_{i-1},0,\beta_{i+1},...,\beta_m,0,...,\rho,...,0),$$

бу ерада ρ -*J*-ўринда. x_i ни базисдан чиқариб, x_J ни базисга киратимиз:

$$x_i^{(1)}=\begin{cases}\beta_i-\alpha_{iJ}x_J\geq 0,\ 1\leq i\leq m; x_I=0,\\ 0, m+1\leq i\leq n; x_J=\rho\end{cases}$$

Бу ечимда $f(x)$ ни топамиз ва кўрамизки, f функция қиймати камайди :

$$f(x^{(1)})=f_0+\gamma_J\beta_I/\alpha_{IJ}=f_0+\gamma_J\rho<f_0,\gamma_J<0.$$

Бу ишни оптимал ечим яратгунча давом эттирамиз.

Изоҳ. Амалда, 2-қадам осонгина бажарилади. a_{IJ} элемент ҳал қилувчи элемент дейилади. I сатр a_{IJ} га бўлинади. a_{IJ} ўрнида 1 ҳосил бўлади. У ёрдамида Гаусс усулини қўллаб, J устундаги барча элементларни 0 га айлантирамиз. Янги симплекс жадвал ҳосил бўлади. Ундан янги таянч ечимни оламиз. Уни оптималликка текширамиз ва ҳ.к.

Мисол 1. $f(x)=x_1+9x_2+5x_3+3x_4+4x_5+14x_6,$

$x_1 + x_4 = 20, x_2 + x_5 = 50, x_3 + x_6 = 30, x_4 + x_5 + x_6 = 60, x_j \geq 0.$

Масаланинг матрицаси қуйидагича

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, rang(A) = 4.$$

Базис деб x_2, x_4, x_5, x_6 ўзгарувчиларни оламиз. Уларни x_1, x_3 ва мақсад функцияни эркин ўзгарувчилар орқали қуйидагича ифодалаймиз :

$x_2 + x_1 + x_3 = 40, x_4 + x_1 = 20, x_5 - x_1 - x_3 = 10, x_6 + x_3 = 30, x_j \geq 0.$, $f(x) = 880 - 7x_1 - 14x_3$.

Ушбу симплекс жадвални тузамиз:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i	ρ_i
x_2	1	1	1	0	0	0	40	40
x_4	1	0	0	1	0	0	20	
x_5	-1	0	0	0	1	0	10	
x_6	0	0	1 $\rightarrow$	0	0	1	30	30
$f(x)$	-7	0	-14 $\uparrow$	0	0	0	-880	

Масалани қуйидагича ечамиз:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i	ρ_i
x_2	1$\rightarrow$	1	0	0	0	-1	10	10
x_4	1	0	0	1	0	0	20	20
x_5	-1	0	0	0	1	1	40	
x_3	0	0	1	0	0	1	30	
$f(x)$	-7 $\uparrow$	0	0	0	0	14	-460	

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β_i	ρ_i
x_1	0	1	0	0	0	-1	10	
x_4	0	-1	0	1	0	1	10	
x_5	0	1	0	0	1	0	50	
x_3	0	1	1	0	0	0	30	
$f(x)$	0	7	0	0	0	14	-390	

Демак, $f(x)$ =390 $\rightarrow$ min, $x^* = x_{\min} = (10, 0, 30, 10, 50, 0)$.

2-масала. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$, $x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 + x_2 \leq 3, 2x_1 + x_2 \leq 8, x_j \geq 0.$

Чекланишларни ўзгартирамиз: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, x_1 + x_2 + x_4 = 3, 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, x_j \geq 0.$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	ρ_i
x_3	1	2 $\rightarrow$	1	0	0	4	2
x_4	1	1	0	1	0	3	3
x_5	2	1	0	0	1	8	8
$f(x)$	3	4 $\uparrow$	0	0	0	0	

$x^{(0)} = (0, 0, 4, 3, 8), f(x^{(0)}) = 0$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	ρ_i
x_2	1/2	1	1/2	0	0	2	4
x_4	½ $\rightarrow$	0	-1/2	1	0	1	2
x_5	1/2	0	-1/2	0	1	6	12
$f(x)$	-1 $\uparrow$	0	2	0	0	8	

$x^{(1)} = (0,2,0,1,6),\ f(x^{(1)}) = 8$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β_i	ρ_i
x_2	1	1	-1	0	1	0	
x_1	1 $\rightarrow$	0	-1	2	0	2	2
x_5	0	1	-3	1	3	0	
$f(x)$	0 $\uparrow$	0	1	2	0	10	

$x^{(2)} = (2,1,0,0,3),\ f(x^{(2)}) = 10 \rightarrow \max$

4.Масалани Mathcad дастури ёрдамида ечиш.

Индексларнинг бош қаймати $ORIGIN := 1$

Мақсад функция $B := \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 & 3 & 4 & 14 \end{bmatrix}\ C := B^T\ \ f(x) := Cx$

Чекланишлар матрицаси, вектори

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ x := y^T$$

Блок боши $Given$

Чекланишлар (баробар йўгон) $Ax = b\ \ x \ge 0$

Ички функцияга мурожаат $r := Minimize(f, x)$

Натижани чиқариш $r = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 30 & 10 & 50 & 0 \end{bmatrix}$

Функция қиймати $f(r) = 390 \rightarrow \min$

Мисол 2. Қуйидаги транспорт масаласини ечамиз.

	B1	B2	B3	B4	B5		
A1	4	11	6	5	15	200	
A2	8	7	9	13	10	200	
A3	10	5	12	7	20	100	
Юкка эҳтиёж	70	80	150	110	90	500	500

Индексларниг бош қайматлари $ORIGIN := 1$

Матрица, векторлар

$$C := \begin{bmatrix} 4 & 11 & 6 & 5 & 15 \\ 8 & 7 & 9 & 13 & 10 \\ 10 & 5 & 12 & 7 & 20 \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 70 \\ 80 \\ 150 \\ 110 \\ 90 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Мақсад функция, векторлар $F(x) := tr(Cx^T)\ \ e_1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\ \ e_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

Блок боши, ички функция $Given\ x * e_1^T = A\ \ x^T * e_2^T = B\ x \ge 0\ \ x := Minimize(F, x)$

Ечимни олиш $x = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 40 & 90 & 0 \\ 0 & 110 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 80 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$ $F(x) = 3400$

Мундарижага

Илова 1

Амалий ва мустақил ишлар

ИНДИВИДУАЛ ТОПШИРИҚЛАР

1.Тенгламалар итерация, Ньютон усуллари билан ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин. Графиклар чизилсин.

Т.р	Топшириклар	a	b	c	d
1	f(x)=0 тенгламанинг энг	0,6319	0,9217	-	-
2	кичик нолдан фарқли	9,4637	13,8249	-	-
3	мусбат ечими топилсин	0,9464	1,3825	-	-
4	f(x)=tg (ax)-bx	8,5174	12,4424	-	-
5		1,8927	2,7650	-	-
6		4,4164	6,4516	-	-
7	f(x)=0 тенгламанинг энг	0,3049	0,3436	0,5	-
8	катта мусбат ечими	9,1464	10,3081	1,0	-
9	топилсин	0,6098	0,6872	1,5	-
10	f(x)=ln (ax)+bx-c	8,5366	9,6209	2,0	-
11		0,9146	1,0308	2,5	-
12		7,9268	8,9337	3,0	-
13	f(x)=0 тенгламанинг энг	0,33	2,3	0,5	
14	кичик нолдан фарқли	10	7,375	7,75	-
15	мусбат ечими топилсин	1	2,2	1	-
16	f(x)=asin(bx)-cx	6,3	5,189	5	-
17		1,67	2,5	1,5	-
18		8	6,18	6,25	-
					-
19		0,312	0,7586	-	-
20		0,893	0,52	-	-
21	f(x)=0 тенглама ечилсин	0,0385	0,963	-	-
22		0,944	0,51	-	-
23	f(x)=a exp(-bx)-x	0,25	0,8	-	-
24		0,67	0,6	-	-
25		0,5	0,667		
26		0,6857	0,56		
27		0,982	0,503		
28	f(x)=0 тенглама ечилсин	0,8896	-2,813	3,6929	11,2
29	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	0,107	-0,4613	2,3738	5,44
30		1,2755	-3,601	-1,37	6,76

2. **Тенгламалар итерация, Ньютон усуллари билан ечилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин. Графиклар чизилсин.**

N			
1	$\sin(x+1)-y=1.2, 2x+\cos y=2$	2	$\cos(x-1)+y=0.5, x-\cos y=3$
3	$\sin x+2y=2, \cos(y-1)+x=0.7$	4	$\cos x+y=1.5, 2x-\sin(y-0,5)=1$
5	$tg(xy+0,4)=x^2, 0,6x^2+2y^2=1$	6	$\sin(x+y)-1,6x=0, x^2+y^2=1$
7	$\cos x+y=1.5, 2x-\sin(y-0.5)=1$	8	$\sin(x+y)-1,2x=0.2, x^2+y^2=1$
9	$\{\sin(x+0,5)-y=1, 2x-\sin(y-0,5)=1$	10	$\{tg(xy+0,3)=x^2, 0,9x^2+2y^2=1$
11	$\begin{cases}\cos(x+0,5)+y=0,8\\ \sin y-2x=1,6\end{cases}$	12	$\{\sin(x+y)-1,3x=0, x^2+y^2=1$
13	$\begin{cases}\cos(y+0,5)+x=0,8\\ \sin x-2y=1,6\end{cases}$	14	$\begin{cases}tg(xy+0,1)=x^2;\\ 0,5x^2+2y^2=1\end{cases}$
15	$\begin{cases}2x-\cos(y+1)=0;\\ y+\sin x=-0,4\end{cases}$	16	$\begin{cases}\sin(x+y)=1,1x-0,1;\\ x^2+y^2=1\end{cases}$
17	$\begin{cases}\cos(y+0,5)-x=2\\ \sin x-2y=1\end{cases}$	18	$\begin{cases}tg(x-y)-xy=0\\ x^2+2y^2=1\end{cases}$
19	$\begin{cases}\sin(y+2)-x=1,5\\ y+\cos(x-2)=0,5\end{cases}$	20	$\{\sin(x-y)-xy=-1, x^2-y^2=\frac{3}{4}$
21	$\begin{cases}\sin(x+1)-y=1\\ 2x+\cos y=2\end{cases}$	22	$\begin{cases}tg(xy+0,2)=x^2;\\ x^2+2y^2=1\end{cases}$
23	$\begin{cases}\cos(x-1)+y=0,8\\ x-\cos y=2\end{cases}$	24	$\begin{cases}\sin(x+y)-1,5x=0;\\ x^2+y^2=1\end{cases}$
25	$\begin{cases}\sin x+2y=1,6\\ \cos(y-1)+x=1\end{cases}$	26	$\{tgxy=x^2, 0,5x^2+2y^2=1$
27	$\begin{cases}cox+y=1,2\\ 2x-\sin(y-0,5)=2\end{cases}$	28	$\begin{cases}\sin(x+y)=1,2x-0,2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$
29	$\begin{cases}\sin(x+y)=1,2x-0,2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$	30	$\begin{cases}\sin(x+y)=1,2x-0,2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

3.Чизиқли алгебра масалалари.

Индивидуал топшириқлар.

Тенгламалар системаси Гаусс, итерация, тескари матрица усуллари билан ечилсин. Хос сонлар ва хос векторлар топилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

1) $$A=\begin{bmatrix} 8.30 & 2.62+\alpha & 4.10 & 1.90 \\ 3.92 & 8.45 & 7.78-\alpha & 2.46 \\ 3.77 & 7.21+\alpha & 8.04 & 2.28 \\ 2.21 & 3.65-\alpha & 1.69 & 6.99 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 16.92+\alpha \\ 22.61-\alpha \\ 21.3+\alpha \\ 14.54-\alpha \end{bmatrix}, \alpha=0.2k, k=0,\dots,n.,$$

2) $$A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}, k=n+3, n+4, n+5, \dots., b=\begin{bmatrix} n+3 \\ n+3 \\ n+3 \\ n+3 \end{bmatrix}, n=1,2,\dots.$$

4.Интерполяция масаласи

Берилган функция учун Ньютон, Лагранж интерполяция кўпҳадлари, чизиқли, кубик интерполяция сплайнлари қурилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ёрдамида ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин. Тўр нуқталари $\{x_i = a + ih, i = 0..n\}$ дан фарқли учта $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ нуқталарда интерполяция формулалари ва функциянинг қийматлари ҳисобланиб, қийматлар солиштирилсин. Графиклар чизилсин.

Т.р	Топшириқлар	a	b	c	d	[a,b]	Нукталар сони	Функция ҳисобланадиган. нуқталар
1 2 3 4 5 6	f(x)=tg (ax)-bx	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6			[0,2]	10	$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$
7 8 9 10 11 12	f(x)=ln (ax)+bx-c	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6		[3,4]	10	$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$
13 14 15 16 17 18	f(x)=asin(bx)-cx	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6	1 2 3 4 5 6		[1,4]	10	$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$
19 20 21 22 23 24 25 26 27	f(x)=a exp(-bx)-x	1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9			[3,5]	10	$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$
28 29 30	f(x)=a x^3+bx^2+cx+d	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	[2.5]	10	$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$

5.Тақрибий интеграллаш

Интеграллар тўғри тўртбурчаклар, трапеция, Симпсон, Гаусс усуллари билан топилсин. Ечим Mathcad (Maple, Mathematica) дастурида ички функциялар ва алгоритм тузиб олинсин, натижаларнинг яқинлигига эришилсин.

1. $\int_0^1 \cos(x+x^3)dx$	11. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} ln\sin x \quad dx$	21. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (x+ln\sin x)dx$
2. $\int_0^1 \sin(x^4+2x^3+x^2)dx$	12. $\int_0^{\pi} \cos(2\sin x)dx$	22. $\int_0^{\pi} (x+\cos(2\sin x))dx$
3. $\int_0^1 e^{\sin x}dx$	13. $\int_0^{\pi} x^2e^{-x^2}dx$	23. $\int_0^{\pi} (x+x^2e^{-x^2})dx$
4. $\int_0^1 \sin xe^{-2x}dx$	14. $\int_0^{\pi} x^4e^{-x^2}dx$	24. $\int_0^{\pi} (x^4e^{-x^2}+x)dx$
5. $\int_0^1 e^{\cos x}dx$	15. $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x+x^3)dx$	25. $\int_{\pi/2}^{\pi} (x+\cos(x+x^3))dx$
6. $\int_0^1 ch \quad x^2dx$	16. $\int_1^2 \sin x^3dx$	26. $\int_1^2 (x+\sin x^3)dx$
7. $\int_0^1 \cos\ ^2 \ dx$	17. $\int_1^2 x^{-1}ln(1+x)dx$	27. $\int_1^2 (x+x^{-1}ln(1+x))dx$
8. $\int_0^1 \sin(x+x^3)dx$	18. $\int_1^2 x^{-1}e^{x}dx$	28. $\int_1^2 (x+x^{-1}e^{x})dx$
9. $\int_0^1 \cos xe^{-x^2}dx$	19. $\int_1^2 sh\,x^2dx$	29. $\int_1^2 (x+sh\,x^2)dx$
10. $\int_1^2 \sin 2xe^{-x^2}dx$	20. $\int_0^{\pi/4} x\sin x^3dx$	30. $\int_0^{\pi/4} (x+x\sin x^3)dx$

Мундарижага

Илова 2

Лаборатория ишлари.2-курс, 4-семестр, 6 соат.

1-лаборатория иши.

Мавзу:Ночизиқ тенгламалар ва уларнинг системаларини тақрибий ечиш

1.1.**Ночизиқ тенглама учун итерация усули**.

$$f(x)=e^{\alpha x}+2x-4\beta=0, \alpha=0.1k, \beta=1+0.01k, k\in N.$$

тенглама итерация усули билан ечилсин.Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

1.2.**Ночизиқ тенглама учун Ньютон усули**.

$$f(x)=x^3+4x-\beta=0, \beta=1+0.01k, k\in N.$$

тенглама Ньютон итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

1.3.Ночизиқ тенгламалар системаси учун итерация усули.

А) $\alpha x^3-y^2-1=0, xy^3-y-4=0, \alpha=1+0.5k, k=0,...,5.$

В) $e^{xy}=x^2-y+\alpha, (x+0.5)^2+y^2=k, x.0, y>0, \alpha=1+0.1m, k=0.6+0.1m, m=0,...,5.$

тенгламалар системаси итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

1.4.**Ночизиқ тенгламалар системаси учун Ньютон усули.**

А) $\alpha x^3-y^2-1=0, xy^3-y-4=0, \alpha=1+0.5k, k=0,...,5.$

В) $tg(xy+k)=x^2, \alpha x^2+2y^2=1, x>0, y>0, \alpha=0.5+0.1m, k=0.1m, m=0,...,5.$

тенгламалар системаси Ньютон итерация усули билан ечилсин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

2-лаборатория иши.

Чизиқли тенгламалар системаси Гаусс, оддий итерация, Зейдель усуллари билан ечилсин

$$A=\begin{bmatrix}24.21+\alpha & 2.42 & 3.35\\ 2.31 & 31.49+\alpha & 1.52\\ 3.49 & 4.85 & 28.72+\alpha\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}30.24\\ 40.95-\beta\\ 42.81\end{bmatrix}, \varepsilon=10^{-4}, \alpha=0.2k, \beta=0.2k, k=0,...,5.$$

Детерминант ва тескари матрица ҳисоблансин. Ҳисоблашлар Паскаль ва Делфи тилларида тузилган дастурлар ёрдамида амалга оширилсин.

3-лаборатория иши.

Хос сонлар ва хос векторларни тақрибий ҳисоблаш

$$A=\begin{bmatrix}24.21+\alpha & 2.42 & 3.35\\ 2.31 & 31.49+\alpha & 1.52\\ 3.49 & 4.85 & 28.72+\alpha\end{bmatrix}, \alpha=0.2k, \beta=0.2k, k=0,...,5.$$

матрицанинг хос сонлари ва хос векторлари тақрибий топилсин.

1)максимал хос сон ва унга мос хос вектор итерация усули билан ε=0.001 аниқликкача;

2)барча хос сонлар ва хос векторлар характерстик тенгламани ечиш асосида;

3)Леверрье ва Фадеев усули асосида;

4)Крылов усули асосида.

3-курс, 5-семестр, 6 соат.4-лаборатория иши-2 соат.

Интерполяция масаласи

f(x)=acos(bx+c)+dx=0,0≤x≤1,h=0,2,n=5

функция Ньютон ва Лагранж формулалари ёрдамида интерполяциялансин..

5-лаборатория иши-2 соат**.**

Тақрибий интеграллаш ва дифференциаллаш масаласи

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(ax)}{x}dx, I_2=\int_{0.5}^{1.5}\frac{\exp(ax)}{x}dx, I_3=\int_0^1\frac{\exp(-x^2)\sin(ax)}{x+a^2}dx, I_4=\int_0^1\frac{\sqrt{a+x^2}}{1+\cos(ax)}dx,$$

$a=0.5+0.1k, k=0,...,5.$

интеграллар трапеция ва Симпсон формулалари ёрдамида интеграллансин.

Мундарижага

Илова 3.

Ҳисоблаш (математикаси) усуллари

фани бўйича **Т Е С Т Л А Р**

Ҳисоблаш усуллари фани бўйича Т Е С Т Л А Р

ҲУ 6 сем 1v ________________________________(фам.исм)

___________(гуруҳ)

1. $f(x)=x^3-5x+1=0$ тенгламанинг нечта ҳақиқий илдизлари мавжуд?

A)1 B)2 C)3 D)бундай илдизлар йўқ

2. $f(x)=x^3-5x+1=0$ тенгламанинг илдизлари қайси кесмаларда жойлашган?

A)[-3,-2], [0,1], [2,3] B)[2,3], [3,4], [0,1] C)[3,2], [0,1], [2,3] D)[-3,-2], [-1,1], [2,3]

3. $f(x)=x^3-5x+1=0$, $0\le x\le 1$, тенглама итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=(x^3+1)/5$ кўринишга келтирилган. Қисиш коэффицентини топинг.

A)1/5 B)2/5 C)3/5 D)4/5

4. $f(x)=x^3-5x+1=0$, $-3\le x\le -2$, тенглама итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/22$

кўринишга келтирилган. Қисиш коэффицентини $q=\max\{|g'(x)|,-3\le x\le -2\}$ топинг.

A)11/22 B)12/22 C)13/22 D)14/22

5. $f(x)=x^3-5x+1=0$, $-3\le x\le -2$, тенглама итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/22$ кўринишга келтирилган. $x^{(0)}=-3.x^{(1)}=?$

A) -2.3 B) -2.4 C) -2.2 D) -2. 5

6. $f(x)=x^3-5x+1=0,\ 0 \le x \le 1,$ тенглама Ньютон итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/f'(x)$ кўринишга келтирилган. Бошланғич итерацияни топинг.

A) $x \le 0.2$ B)0 C)1 D)0.5

7. $f(x)=x^3-5x+1=0,\ -3 \le x \le -2,$ тенглама Ньютон итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/f'(x)$ кўринишга келтирилган. Бошланғич итерацияни топинг.

A)-3 B)-2 C)- 1 D) бошланғич.итерация йўқ

8. $f(x)=x^3-5x+1=0,\ 2 \le x \le 3,$ тенглама Ньютон итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/f'(x)$ кўринишга келтирилган. Бошланғич итерацияни топинг.

A)3 B)2 C)1 D)барчаси

9. $f(x)=x^3-5x+1=0,\ -3 \le x \le -2,$ Ньютон итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/f'(x)$ кўринишга келтирилган: $x^{(0)}=-3.\ x^{(1)}=?$

A)-2.6 B)-2.5 C)-2.7 D)-2.1

10. $f(x)=x^3-5x+1=0,\ 2 \le x \le 3,$ тенглама Ньютон итерация усулини қўллаш учун $x=g(x)=x-f(x)/f'(x)$ кўринишга келтирилган: $x^{(0)}=2.\ x^{(1)}=?$

A)2.4238 B)2.2148 C)2.1428 D)2.4428

11. $f_1=x_1^2+x_2^2-1=0,\ f_2=x_2-x_1^2=0$ НТС ечимлари ётган соҳаларни кўрсатинг.

A) $[-1,0]*[0,1] \vee [0,1]*[0,1]$ B) $[0,1]*[0,1] \vee [0,1]*[-1,0]$

C) $[0,1]*[0,1] \vee [-1,0]*[-1,0]$ D) $[0,1]*[0,1] \vee [-1,0]*[0,1]$

12. $f_1=x_1^2+x_2^2-1=0,\ f_2=x_2-x_1^2=0$ НТС ни итерация усули билан ечиш учун $x_1=\sqrt{x_2}=g_1(x_1,x_2),\ x_2=\sqrt{1-x_1^2}=g_2(x_1,x_2)$ кўринишга келтирилган. $x_1^{(0)}=0.7, x_2^{(0)}=0.6$,бўлса $x_1^{(1)}=?, x_2^{(1)}=?.$

A) 0.7868, 0.7341 B) 0.7746, 0.7141 C) 0.7546, 0.7241 D) 0.7946, 0.7541

13. $f_1=x_1^2+x_2^2-1=0,\ f_2=x_2-x_1^2=0$ НТС ни итерация усулини қўллаш учун $x_1=\sqrt{x_2}=g_1(x_1,x_2),\ x_2=\sqrt{1-x_1^2}=g_2(x_1,x_2)$ кўринишга келтирилган. $x_1^{(0)}=0.4, x_2^{(0)}=0.6$ учун $q=\left\|g^{(1)}\right\|=?.$

A) 0,6455 B) 0.7749 C) 0.5 D) 0.8887

14. $f_1=x_1^2+x_2^2-1=0,\ f_2=x_2-x_1^2=0$ НТС ни Ньютон усули билан ечиш учун $x_1=x_1-D_1/D=g_1(x_1,x_2),\ x_2=x_2-D_2/D=g_2(x_1,x_2),\ D=f_{1x_1}f_{2x_2}-f_{1x_2}f_{2x_1},$ $D_1=f_1f_{2x_2}-f_{1x_2}f_2,\quad D_2=f_{1x_1}f_2-f_1f_{2x_1}$ кўринишга келтирилган ва $x_1^{(k)}=g_1(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)}), x_2^{(k)}=g_2(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})$ итерациялар қўлланилган. $x_1^{(0)}=0.5, x_2^{(0)}=0.5$ бўлса, $x_1^{(1)}=?,\ x_2^{(1)}=?.$

A) 0.3425, 0.645 B) 0.3125, 0.625 C) 0.3625, 0.665 D) 0.875, 0.625

15. $f(x)=0,\ f: D \in R^n \to R^n$ НТС .Ньютон итерация усулини кўрсатинг.

A) $x_i^{(k)} = g_i(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}), i=1,...,n$ B) $x_i^{(k)} = g_i(x_1^{(k-1)},...x_i^{(k-1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}..., x_n^{(k-1)}), i=1,...,n$

C) $x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)})$ D) $x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(k-1)})$

16. $f(x)=0, f: D\in R^n \to R^n$ НТС учун соддалашган Ньютон итерация усулини кўрсатинг.

A) $x_i^{(k)} = g_i(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}), i=1,...,n$ B) $x_i^{(k)} = g_i(x_1^{(k-1)},...x_i^{(k-1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k-1)}..., x_n^{(k-1)}), i=1,...,n$

C) $x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(k-1)})]^{-1} f(x^{(k-1)})$ D) $x^{(k)} = x^{(k-1)} - [f'(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(k-1)})$

17. $f(x)=0, f: D\in R^n \to R^n$ НТС $x=g(x): D\in R^n \to R^n$ эквивалент кўринишга келтирилган ва итерация усули $x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), k=1,2,...,$ қўлланилган. Назарий баҳони кўрсатинг.

A) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q\|x^{(k)}\text{-}x^{(k-1)}\|/(1\text{-}q)$ B) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^k\|x^{(k)}\text{-}x^{(k-1)}\|/(1\text{-}q)$

C) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^{k-1}\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$ D) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^k\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$

18. $f(x)=0, f: D\in R^n \to R^n$ НТС $x=g(x): D\in R^n \to R^n$ эквивалент кўринишга келтирилган ва итерация усули $x^{(k)} = g(x^{(k-1)}), k=1,2,...,$ қўлланилган. Амалий баҳони кўрсатинг.

A) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q\|x^{(k)}\text{-}x^{(k-1)}\|/(1\text{-}q)$ B) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^k\|x^{(k)}\text{-}x^{(k-1)}\|/(1\text{-}q)$ C) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^{k-1}\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$

D) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^k\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$

19. $f_1=x\text{-}e^{-y}=0$, $f2=y\text{-}e^x=0$ система илдизлари етган соҳани кўрсатинг.

A) 2-чорак B) $[0,1]x[0,1]$ C)3-чорак D)4-чорак

20. $x=g(x)$ ночизик система итерация усули $x^{(k)}=g(x^{(k-1)})$ билан ечилмоқда. Узоқлашиш шарти қандай. (Бу ерда $g^{(1)}(x)$- Якоби матрицаси, $q=\max\{\|g^1(x)\|, x\in D\}$)

A) $q>1$ B) $q<1$ C) $q=1$ D) $q<2$

21. Гаусс усули билан қандай тенгламалар ечилади?

A)Ночизиқ тенглама B)Ночизиқ тенгламалар системаси C)Чизиқли тенгламалар системаси D)Чизиқли тенглама

22. Гаусс усули неча этапдан иборат?

A)1 B)2 C)3 D)4

22. Гаусс усулида чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ўнг юришда қандай кўринишга келтирилади?

A) Диогонал матрицали системага B) чап қуйи учбурчак матрицали системага

C) ўнг юқори учбурчак матрицали системага D) уч диогнал матрицали системага

23. $Ax=b \le\ge x=Cx+d$ кўринишга келтирилган ва итерация усули қўлланилган. Яқинлашиш шарти қандай?

A) $\|C\|=1$ B) $\|C\|=0$ C) $\|C\|>1$ D) $\|C\|<1$

24. $Ax=b \le\ge x=Cx+d$ кўринишга келтирилган ва итерация усули қўлланилган. Назарий баҳони кўрсатинг.

A) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^k\|\xi\text{-}x^{(1)}\|$ B) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q\|x^{(k)}\text{-}x^{(k-1)}\|/(1\text{-}q)$ C) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^{k-1}\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$

D) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \le q^k\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$

25. Чизиқли тенгламалар системаси Ax=b $\leq\geq$ x=Cx+d кўринишга келтирилган ва итерация усули қўлланилган. Амалий баҳони кўрсатинг.

A) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \leq q^k\|\xi\text{-}x^{(1)}\|$ B) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \leq q\|x^{(k)}\text{-}x^{(k-1)}\|/(1\text{-}q)$ C) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \leq q^{k-1}\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$
D) $\|\xi\text{-}x^{(k)}\| \leq q^k\|\xi\text{-}x^{(0)}\|$

26. $Ax=b, A=[a_{ij}], x=[x_i]^T, b=[b_i]^T, i, j=1,...,n,$ чизиқли тенгламалар системасининг ечими қачон мавжуд ва ягона?
A) $\det(A)\neq 0$ B) $\det(A)=0$ C) $\det(A)=0$, $\exists i:\det(A_i)\neq 0$ D) $\det(A)=0$, $\det(A_i)=0\,\forall i$

27. $Ax=b, A=[a_{ij}], x=[x_i]^T, b=[b_i]^T, i, j=1,...,n,$ чизиқли тенгламалар системаси учун Крамер қоидасини кўрсатинг. A) $\det(A)\neq 0$ B) $x_i=\det(A)/\det(A_i), i=1,...,n$ C) $\det(A)=0$, $\exists i:\det(A_i)\neq 0$ D) $\det(A)=0$, $\det(A_i)=0\,\forall i$

28. Уч диогоналли чизиқли тенгламалар $b_0x_0+c_0x_1=d_0$ $, a_ix_{i-1}+b_ix_i+c_ix_{i+1}=d_i, i=1,...,n-1,$ $a_nx_{n-1}+b_nx_n=d_n$ системаси қандай усул билан ечилади?
A) Гаусс B) итерация C) прогонка D) квадрат илдизлар

29. Прогонка усулининг ўнг юришини кўрсатинг.
A) $u_0=0, u_{i+1}=-c_i/(a_iu_i+b_i), v_0=0, v_{i+1}=(d_i-a_iv_i)/(a_iu_i+b_i), i=0,...,n-1.$ B) $x=A^{-1}b$
C) $x_n=(d_n-a_nv_n)/(a_nu_n+b_n), x_i=u_{i+1}x_{i+1}+v_{i+1}, i=n-1,...,0.$
D) $x_i=\det(A)/\det(A_i), i=1,...,n$.

30. Прогонка усулининг чап юришини кўрсатинг.
A) $u_0=0, u_{i+1}=-c_i/(a_iu_i+b_i), v_0=0, v_{i+1}=(d_i-a_iv_i)/(a_iu_i+b_i), i=0,...,n-1.$ B) $x=A^{-1}b$
C) $x_n=(d_n-a_nv_n)/(a_nu_n+b_n), x_i=u_{i+1}x_{i+1}+v_{i+1}, i=n-1,...,0.$
D) $x_i=\det(A)/\det(A_i), i=1,...,n$.

31. $f(x)=3x^2+7x+1$ кўп ҳад учун $f[x_0,x_1,x_2]$ иккинчи тартибли бўлинган айирмани топинг. $x_0=0$, $x_1=0{,}5$, $x_2=1$. A)3 B)0 C)2 D)6

32. n- тартибли Ньютон интерполяция кўпҳадида x^n олдидаги коэффицентни топинг. A) $(x\text{-}x_0)...(x\text{-}x_n)$ B) $f[x_0,...,x_n]$ C) $f(x_0)$ D)1

33. l_i (x)} Лагранжнинг фундаментал кўпҳадлари $\{l_i(x_i)=1, l_i(x_j)=0\}$ йиғиндиси нимага тенг.
A)1 B)2 C)3 D)0

34. Ньютон интерполяция кўпҳадини кўрсатинг
A) $f(x_0)+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,...,x_k](x\text{-}x_0)...(x\text{-}x_{k-1})$ B) $f(x_0)l_0(x)+...+f(x_n)l_n(x)$
C) $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ D) $f(x_0)+f[x_0,...,x_n,x](x\text{-}x_0)...(x\text{-}x_n)$

35. Лагранж интерполяция кўпҳадини кўрсатинг
A) $f(x_0)+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,...,x_k](x\text{-}x_0)...(x\text{-}x_{k-1})$ B) $f(x_0)l_0(x)+...+f(x_n)l_n(x)$ C) $a_0+a_1x+...+a_nx^n$
D) $f(x_0)+f[x_0,...,x_n,x](x\text{-}x_0)...(x\text{-}x_n)$

36. Нюътон интерполяция кўпҳадини қолдиғини кўрсатинг

A) $f[x_0,...,x_n,x](x-x_0)...(x-x_n)$ B) $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x--x_n)$

C) $-f^{(2)}(\xi)\,h^2(b-a)/12$ D) $-f(4)(\xi)\,h^4(b-a)/180$

37. Лагранж интерполяция кўпҳадини қолдиғини кўрсатинг

A) $f[x_0,...,x_n,x](x-x_0)...(x-x_n)$ B) $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)...(x--x_n)$

C) $-f^{(2)}(\xi)\,h^2(b-a)/12$ D) $-f^{(4)}(\xi)\,h^4(b-a)/180$

38. $f(0)=1, f(0.5)=0, f(1)=4$ функция қийматлари жадвали берилган. Чизиқли интерполяция сплайнининг қиймати топилсин $S_1(f;0.25)=?$.

A) 1 B)2 C)0.5 D)0,4

39. $f(0)=1, f(0.5)=0, f(1)=4$ функция қийматлари жадвали берилган. Чизиқли интерполяция сплайнининг қийматии топилсин $S_1(f;0.75)=?$.

A)1 B)2 C)3 D)4

40. 1 деффектли кубик интерполяция сплайнининг узлуксиз ҳосилалар сони нечта?

A)2 B)2n C)3n D)4n

41. Биринчи тартибли $f'(x_i)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали марказий ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг.

A) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$ B) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$

D) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$

42. Биринчи тартибли $f'(x_0)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг

A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ B) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$

D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/\,h^2+0(h^2)$

43. Биринчи тартибли $f'(x_n)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг

A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ B) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$ C) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$

D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/\,h^2+0(h^2)$

44. Иккинчи тартибли $f''(x_i)$ ҳосила учун иккинчи тартибли аниқликдаги чекли айирмали ҳосилани кўрсатинг.

A) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ B) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$

C) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$ D) $(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})/\,h^2+0(h^2)$

45. Биринчи тартибли $f'(x_i)$ ҳосила учун биринчи тартибли аниқликдаги ўнг чекли айирмали ҳосила ва қолдиғини кўрсатинг.

A) $(f_{i+1}-f_i)/h+0(h)$ B) $(f_{i+1}-f_{i-1})/2h+0(h^2)$ C) $(f_0-4f_1+3f_2)/2h+0(h^2)$

D) $(f_{n-2}-4f_{n-1}+3f_n)/2h+0(h^2)$

46. Ньютон-Котес квадратура формулаларида аниқлик тартиби қандай.

A)n B)1 C)2 D)3

47. Трапеция формуласини кўрсатинг.(Бу ерда $S_1=f_1+...+f_{2m-1}, S_2=f_2+...+f_{2m-2}$)

A) $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $h(f_0+2f_1+...+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $-f^{(2)}(\xi)\,h^2(b-a)/12$

D) $-f^{(4)}(\xi)\,h^4(b-a)/180$

48. Симпсон формуласини кўрсатинг. (Бу ерда $S_1=f_1+...+f_{2m-1}, S_2=f_2+...+f_{2m-2}$)

A) $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $h(f_0+2f_1+...+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $-f^{(2)}(\xi)\,h^2(b-a)/12$

D) $-f^{(4)}(\xi)\,h^4(b-a)/180$

49. Трапеция формуласида қолдиқ кандай. (Бу ерда $S_1=f_1+...+f_{2m-1}, S_2=f_2+...+f_{2m-2}$)

A) $\frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $h(f_0+2f_1+...+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $-f^{(2)}(\xi)\,h^2(b-a)/12$

D) $-f^{(4)}(\xi)\,h^4(b-a)/180$

50. Симпсон формуласида аниқлик тартиби ва қолдиқ қандай?

A) $5, \frac{h}{3}(f_0+4S_1+2S_2+f_{2m})$ B) $2,\ h(f_0+2f_1+...+2f_{n-1}+f_n)/2$ C) $1,\ -f^{(2)}(\xi)\,h^2(b-a)/12$

D) $3,\ -f^{(4)}(\xi)\,h^4(b-a)/180$ (бу ерда $S_1=f_1+...+f_{2m-1}, S_2=f_2+...+f_{2m-2}$)

НТ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	C	A	C	C	D	A	B	A	B	C
НТС	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	A	B	A	D	C	D	D	A	B	A
ЧАТС	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	C	B	D	D	B	A	B	C	A	C
ТД/Ин	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	D	D	A	A	B	A	B	C	B	A
ТИ	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	B	C	C	D	A	A	B	A	C	D

Мундарижага

Илова 4

Математик системалар

1.Замонавий математик дастурлар дастаси ҳақида.
2. Математик программалар.
3. Matchad программаси ҳақида.
4. Matchadдан фойдаланиш асослари.
5. Matchadда стандарт масалаларни ечиш.

1. Математик ва илмий ҳисоблашлар шахсий компьютерларнинг энг биринчи вазифаси бўлиб келган. Кўпинча бошқа фан мутахассислари компьютерда масала ечиш учун фақат дастурлаш тилларидан бирида, масалан, Паскаль, Фортран, Бейсик, Делфи, дастур тузиш керак деб ўйлашади.Афсуски, бундай эмас. Ҳозир фирмалар томонидан шундай программалар ишлаб чиқилганки, уларда турли хил масалаларни дастур тузмасдан ечиш мумкин. Бундай программалар ҳозир шундай кўп яратилганки, улар химия, физика, механика, иқтисодиёт, чизмачилик ва бошқа соҳаларда ҳам мавжуд.

2.Албатта, энг кўп тарқалган программалар-математик программалардир.Ҳозир дунёда Matchad дан ташқари Matematika, MatLab, Mapple, SWP, Derive, TK!Solver каби программалар мавжуд. Бошқа соҳаларда эса:QSP (операцияларни текшириш), GPSS(моделлаштириш), Lat_eX (мақолалар тайёрлаш), Visio(чизмачилик), AutoCad машинасозлик) каби программалар мавжуд.

Matematika-энг кучли математикага яқинроқ программа, MatLab (Mathematic Laboratory)-чизиқли алгебра масалалари учун мўлжалланган программа, Mapple-кенг қамровли турли хил масалаларни ечиш учун мўлжалланган программа, SWP(Scientific Wook Place)-олимнинг иш ўрни, илмий масалаларни ечиш учун мўлжалланган программа.

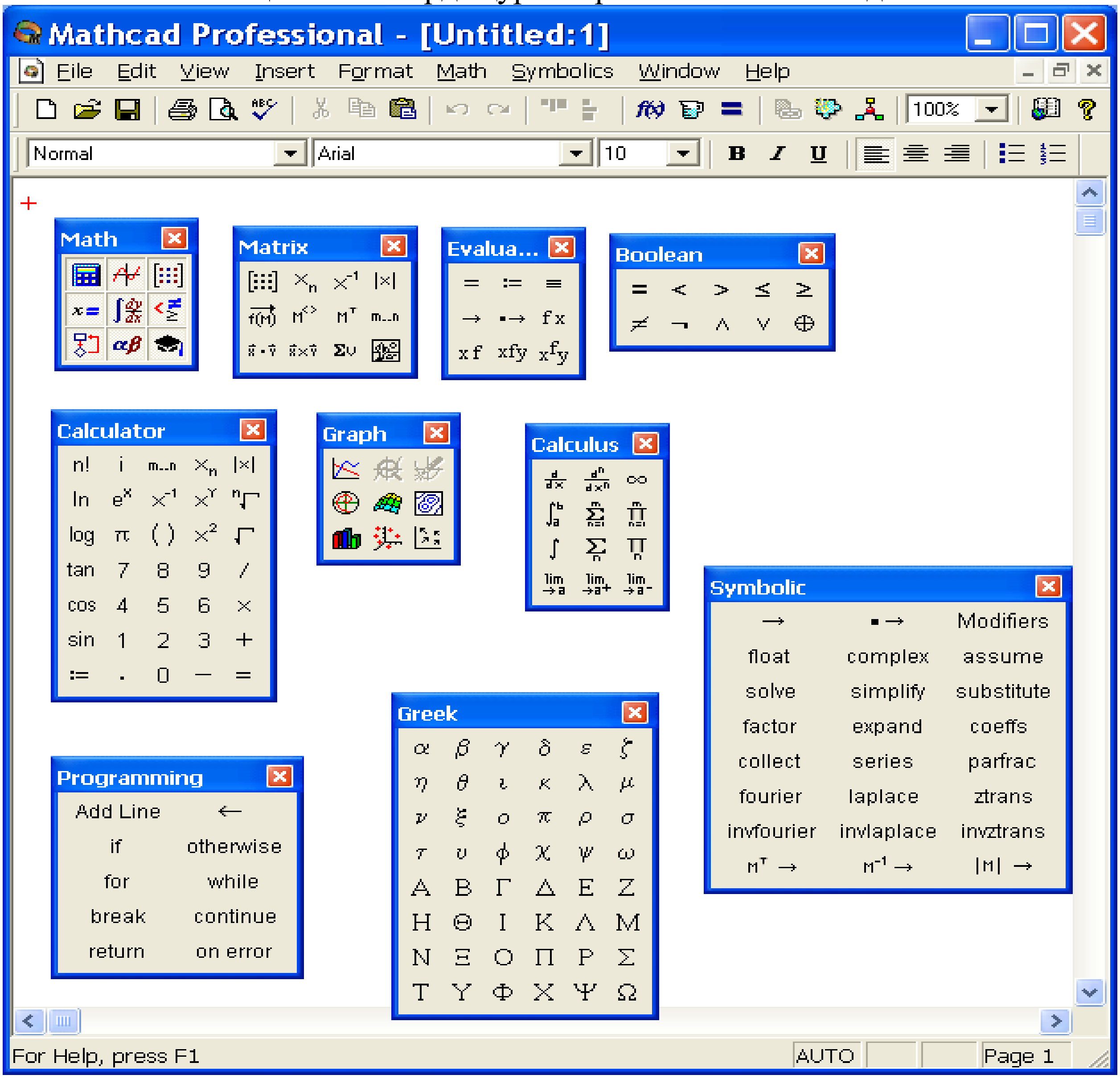
3. Matchad программаси 1986 йили яратилган ва тобора такомиллашиб бормоқда.

Ҳозир Matchad ёрдамида қаторларнинг йиғиндиларини ҳисоблаш, лимит, интеграллар, Фурье, Лаплас алмаштиришлар, ҳосилаларни ҳисоблаш, графиклар чизиш, бир ва бир неча ноъмалумли чизиқли ва чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш, детерминант, тескари матрица, хос сонлар ва хос векторларни ҳисоблаш, ОДТ учун Коши ва чегара масалаларни ечиш, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш (тўр усулида), интерполяция масаласини ечиш, эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг стандарт масалаларини ечиш каби ишларни осонгина программа тузмасдан ечиш мумкин. Фақатгина, масалани Matchad нинг математикага яқин бўлган тилида қуя олиш керак ва ечимни сўраш керак холос.

4. Matchad да масала ечиш учун унинг қуроллар панелларидан ёки менюларидан фойдаланиш керак. Энг осони қуроллар панелларидан фойдаланиш. Асосий қуроллар панелини келтирамиз.Уларнинг сони 10 та.Расмда келтирилган тартибда танишамиз:

1)Қуроллар панели Math-асосий қуроллар панели, қолганлар шу ердан очилади, 2) Қуроллар панели Matrix-матрица ва векторлар кстида амаллар бажарувчи, 3) Қуроллар панели Evaluation-ҳисоблаш операторлари панели, 4) Қуроллар панели Boolean-матиқий амаллар панели, 5) Қуроллар панели Calculator-калькулятор панели, 6) Қуроллар панели Graph-графиклар чизиш имкониятини берувчи панель, 7) Қуроллар панели Calculus-математик анализ панели, 8) Қуроллар панели Programming-программа тузиш учун зарур операторлар, 9) Қуроллар панели Greek-грек ҳарфлари панели, 10) Қуроллар панели Sumbolic-символли ҳисоблашлар панели.

Математик ҳисоблашларда қуроллар панели ишлатилади.



Мундарижага

Илова 6

АДАБИЁТЛАР:

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.:Наука, 1973-Т. 1-632 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений - М.: Физматгиз, 1966.
3. Годунов С.К. Рябенький Р.С. Разностные схемы-М.: Наука, 1977.
4. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики М.:Наука, 1977.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И. , Мирошниченко В.Л Методы сплайн функций М.:Наука, 1980.350 с.
6. Калиткин Н.И. Численные методы.- М.:Наука, 1978.
7. Зеленский К.Х, Игнатенко В.И., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики.- Киев, 1999 г. 352 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастирный П.И. Вычислительные методы, Т.1, М.:Наука, 1976 , Т.2- М.:Наука 1977.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.:Наука, 1981 г, 416 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В.Численные методы.- М.:Наука 1989. 432 с.
11.Н.В.Копчёнова, И.А.Марон. ВМ в примерах и задачах.-М.:Наука,1972.
12. Исроилов М.И.Ҳисоблаш методлари.- Т.: Ўкитувчи.2003.
13. Волков Е.А.Численные методы. - М.:Наука, 1987, 248 с.
14. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.Численные методы. - М.:Наука,1987.- 600 с.
15. Дробышевич В.И., Дымников В.П., Ривкин Г.С Задачи по вычислительной математике -М.:Наука,1980. 144 с.
16. Плис А.И. Сливина И.А. Лабораторный практикум по ВМ -М.:Наука, 1983г.
17. Турчак Л.И.Основы численных методов-М.:Наука, 1987-326 с.
18. Абдукодиров А.А., Фозилов Ф.И., Умрзоқов Т.И.ҲМ ва дастурлаш.- Т.:Ўзбекистон, 1996й, 256 бет.
19. Ф.Б.Бадалов, Ғ. Шодмонов. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари.-Т.:Фан,2000.-276 б.
20.Е.М.Мудров. Программы для ПК на языке Бейсик, Паскаль, Фортране. Томск, МП Раско,1992.-272 с.
21.А.Абдуҳамидов, С.Худойназаров.Ҳисоблаш усулларидан машқлар ва лаборатория ишлари.Т.:Ўзбекистон,1995.
22.П.-Ж.Лоран. Аппроксимация и оптимизация.М.:Мир,1975.
23.А.Н.Тихонов,В.Я.Арсенин.Методы решения некорректных задач.М.:Наука, 1980.
24.Я.Т.Гринчишин, В.И.Ефимов, А.Н.Ломакович. Алгоритмы и программы на языке Бейсик .М.:Просвещение.-1988 .-160 с.
25.Ю.П.Боглаев. ВМ и программирование. - М.:ВШ,1999-544 с.
26. Web-сайтлар: www.exponenta.ru;techno.edu.ru;toehelp.ru;math.msu.ru.;
27.Т.Е.Шуп. Прикл. числ. методы в физике и технике.-М.:ВШ,1990-256 с.
28.В.М.Вержбицкий. Численные методы . -М.:ОНИКС 21 век ,2005-400 с.
29.В.В.Воеводин. Линейная алгебра. - М.:Наука,1974-338 с.

30.Ё.У.Соатов. Олий математика, 5-жилд.-Т.:1998.-352 б.
31.К.И.Бабенко. Основы численного анализа.-М.:Наука,1986.-744 с.
32.Қобулов В.Қ. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. Т.:Ўқитувчи,1976 й.
33. Бойзоқов А., Қаюмов Ш. Ҳисоблаш математикаси асослари. Т.:ТДИУ, 2000.
34.Б.Х.Ҳўжаёров Қурилиш масалаларини сонли ечиш усуллари. Т.: «Ўз.-н» 1995.
35.ХолматовТ.Х.,Тойлоқов Н.Ш. Амалий математика ва компьютернинг дастурий таъминоти. Т.: «Меҳнат»,2000.
36.Сиддиқов А. Сонли усуллар ва программалаш. Т.: «Ўзбекистон»,2001.
37.Н.Н.Яненко. Метод дробных шагов решения многомерной задачи математической физики. Н.:Наука, 1967.
38.С.А.Немнюгин.Turbo Pascal.-СПб.:Питер, 2002.-496 с.
39.Л.В.Канторович, Г.П.Акилов.Функциональный анализ.М.:Наука, 1977.
40. Бахвалов Н.С.,Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: ВШ,2000.
41. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику-М.: Наука, 2004.
42.Asrayev Z.R. «Hisoblash usullari». Ma’ruzalar matni. Buxoro – 2006 . znuz_901_20090626190428.rar.
43. Ro`ziyev R.A., O`tapov T.U. «Sonli usullar» fanidan ma’ruza matnlari to’plami. Navoiy-2008.- znuz_749_20110126112150.rar
44. Имомов А. Ҳисоблаш математикаси (усуллари). Наманган, НамДУ,2007.- znuz_749_20101020110737.zip
45. А.С.Амридинов, А.И.Бабаяров, Б.Б.Бабажанов.«Ҳисоблаш математикаси» фанидан лаборатория ишларини бажариш бўйича услубий тавсиялар ва топшириқлар. СамДУ-2008.- znuz_662_20080519191437.rar.
46. E.M. Mirzakarimov. Amaliy mashg’ulotlar uchun sonli hisoblash usullari va dasturlash. FerPI-2009. znuz_notauth_20100417145959.1271498399.54.rar.
47. Эшназарова М., Имомов А., Мелибоев Х. “Ҳисоблаш усуллари” масофавий курси. Ўзб. Давлат Патент гувоҳномаси, BGU №00280, Тошкент, 2012.
48. Имомов А. Организация численных методов в MathCAD. Молодой учёный, №6(65), май 1, 2014 г.-с. 15-19.
49. Имомов А. Организация решения краевых задач для линейных ОДУ в MathCAD. Молодой учёный, №8(67), июнь 1, 2014 г.-с. 1-5.
50. Имомов А. Решение краевой задачи для линейных ДУ в частных производных в MathCAD. Молодой учёный, №8(67), июнь 1, 2014 г.-с. 6-12
51. Имомов А. Организация приближённого решения интегральных уравнений в MathCAD. Молодой учёный, № 14(73), сентябрь 1, 2014 г.-с. 6-15
52. Имомов А., Эргашев Б.С. «Реализация схемы Кранка — Николсона для линейного параболического дифференциального уравнения в MathCAD». Молодой учёный, № 14(73), сентябрь 1, 2014 г.-с.1-5. Мундарижага