АЛГЕБРА

ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

II қисм

Р.Н. НАЗАРОВ, Б.Т. ТОШПЎЛАТОВ,
А.Д. ДЎСТМЕТОВ

АЛГЕБРА ВА СОНЛАР НАЗАРИЯСИ

II ҚИСМ

ТОШКЕНТ - 1996

Дарсликдаги шартли белгилар

△ — масалани ечиш бошланди

▲ — масалани ечиш тугади

○ — даъвони асослаш бошлан

● — даъвони асослаш тугади

═══ — бу чизиққача мажбурий бўлган масалалар жойлашган

* — қўшимча масалалар, баъзан мураккаброқ масалалар

** — қийин масалалар

! — билиш муҳим ва хотирада саклаш фойдали бўлган (лекин ёд олиш шартмас) матн

!? дастурда йўқ, лекин муаллифлар фойдали деб ҳисоблаган материал

Ўзингизни текшириб кўринг — асосий материал бўйича билимни текшириш учун аталган мустақил иш

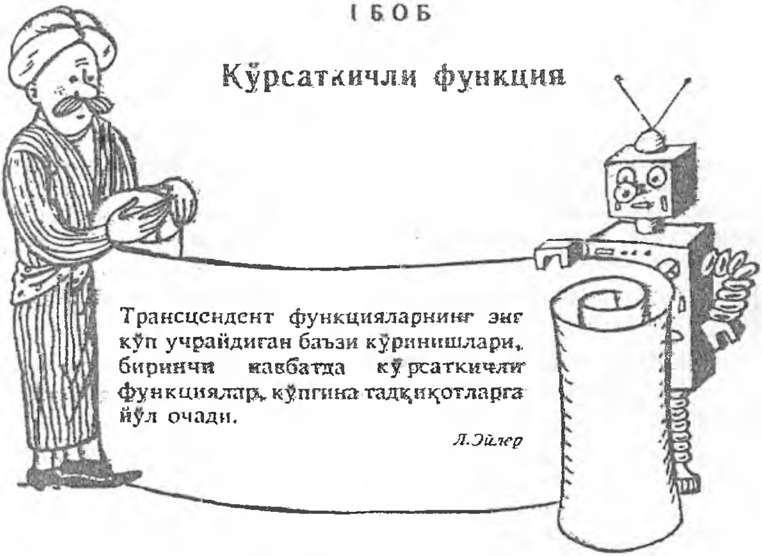
| — асосий материал ажратиб кўрсатилган

$A\ \dfrac{4306010000-13}{353(04)-96}$ бл. зак — 96

ISBN 5—645—02702—7

I БОБ

Кўрсаткичли функция



1-§. КЎРСАТКИЧЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ХОССАЛАРИ ВА УНИНГ ГРАФИГИ

Алгебра курсида ҳақиқий кўрсаткичли даража қаралган эди. Даражанинг асосий хоссаларини эслатиб ўтамиз. $a>0$, $b>0$, x, x_1 ва x_2 — исталган ҳақиқий сонлар бўлсин. У ҳолда

$$a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}, \tag{1}$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}, \tag{2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}, \tag{3}$$

$$(ab)^x=a^xb^x, \tag{4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \tag{5}$$

$$a^x>0, \tag{6}$$

$$\text{агар } a>1,\ x>0 \text{ бўлса, } a^x>1. \tag{7}$$

Бундан ташқари, алгебра курсида $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$,

---

Эйлер Леонард (1707—1783) — математик, механик, физик ва астроном, Петербург Фанлар Академиясининг академиги. Л. Эйлернинг илмий ишлари табиий фанларнинг математик усулларини қўллаш мумкин бўлган барча соҳаларига тааллуклидир.

$y=x^{\frac{1}{3}}$ ва ҳоказо функциялар, яъни $y=x^r$ даражали функциялар қаралган эди, бунда r — берилган сон, x — ўзгарувчи.

Амалиётда, шунингдек, $y=2^x$, $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ва ҳоказо функциялардан, яъни $y=a^x$ кўринишдаги функциядан ҳам фойдаланилади, бу ерда a — берилган сон, x — ўзгарувчи. Бундай функциялар *кўрсаткичли функциялар* деб аталади. Уларнинг бундай аталиши кўрсаткичли функциянинг аргументи даражанинг кўрсаткичи, даражанинг асоси эса берилган сон бўлиши билан тушунтирилади.

Кўрсаткичли функция деб $y=a^x$ функцияга айтилади, бунда a — берилган сон, $a>0$, $a\neq 1$.

Кўрсаткичли функция *қуйидаги хоссаларга* эга:

1) Кўрсаткичли функциянинг *аниқланиш соҳаси* барча ҳақиқий сонлар тўплами R.

Бу хосса a^x даражанинг (бунда $a>0$) барча $x\in R$ учун аниқланганлигидан келиб чиқади.

2) Кўрсаткичли функциянинг *қийматлари тўплами* барча мусбат сонлар тўплами.

Бунга ишонч ҳосил қилиш учун $a^x=b$ (бунда $a>0$, $a\neq 1$) тенглама $b\leqslant 0$ бўлганда илдизларга эга эмаслигини, исталган $b>0$ да эса илдизга эга эканини кўрсатиш керак. Агар $b\leqslant 0$ бўлса, даражанинг (6) хоссасига кўра бу тенглама илдизга эга эмас. Бу тенгламанинг исталган $b>0$ да илдизга эга бўлиши олий математика курсида исботланади. Бу исталган $y=b$ (бунда $b>0$) тўғри чизиқнинг кўрсаткичли функция графиги билан кесишишини англатади.

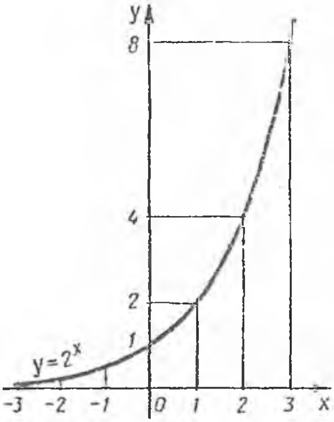
3) $y=a^x$ кўрсаткичли функция $a>1$ бўлганда барча ҳақиқий сонлар тўпламида *ўсувчи* бўлади, $0<a<1$ бўлганда эса *камаювчи* бўлади.

○ $a>1$ ва $x_2>x_1$ бўлсин. $y(x_2)>y(x_1)$, яъни $a^{x_2}>a^{x_1}$ бўлишини кўрсатамиз.

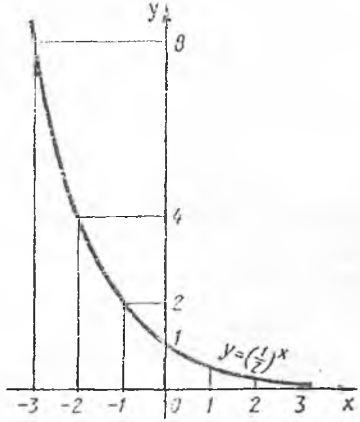
$x_2>x_1$ бўлгани учун $x_2-x_1>0$ бўлади ва даражанинг (7) хоссасига кўра $a^{x_2-x_1}>1$, яъни $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}>1$ га эга бўламиз. Бунда $a^{x_1}>0$ эканини ҳисобга олсак, $a^{x_2}>a^{x_1}$ ни ҳосил қиламиз.

$0<a<1$ ва $x_2>x_1$ бўлсин. $y(x_2)<y(x_1)$, яъни $a^{x_2}<a^{x_1}$ бўлишини кўрсатамиз.

$0<a<1$ бўлгани учун $\frac{1}{a}>1$ бўлади ва шунинг учун



1- расм



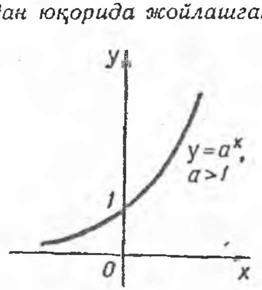
2- расм

$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} > \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}$, яъни $\frac{1}{a^{x_2}} > \frac{1}{a^{x_1}}$, бундан $a^{x_2} < a^{x_1}$. ●

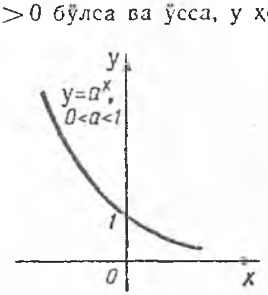
$y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графикларини кўриб ўтилган хоссалардан фойдаланган ҳолда уларга тегишли бир нечта нуқталар бўйича ясаймиз (1- ва 2- расмлар).

$y=2^x$ функциянинг графиги (0; 1) *нуқтадан ўтишини ва Ox ўқидан юқорида жойлашганлигини* таъкидлаб ўтамиз. Агар $x<0$ бўлса ва камайса, у ҳолда график Ox ўқига жадал яқинлашади (лекин уни кесиб ўтмайди); агар $x>0$ бўлса ва ўсса, у ҳолда график юқорига жадал кўтарилади. Агар $a>1$ бўлса, исталган $y=a^x$ функциянинг графиги худди шундай кўринишга эга бўлади (3- расм).

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функциянинг графиги ҳам (0; 1) *нуқтадан ўтади ва Ox ўқидан юқорида жойлашган.* Агар $x>0$ бўлса ва ўсса, у ҳолда



3- расм



4- расм

график Ox ўқига жадал яқинлашади (уни кесиб ўтмайди); агар $x<0$ бўлса ва камайса, у ҳолда график юқорига жадал кўтарилади. Агар $0<a<1$ бўлса, исталган $y=a^x$ функциянинг графиги худди шундай кўринишга эга бўлади (4- расм).

Кўрсаткичли функция кўпинча турли физик жараёнларни тавсифлашда қўлланилади. Масалан, *радиоактив емирилиш* ушбу

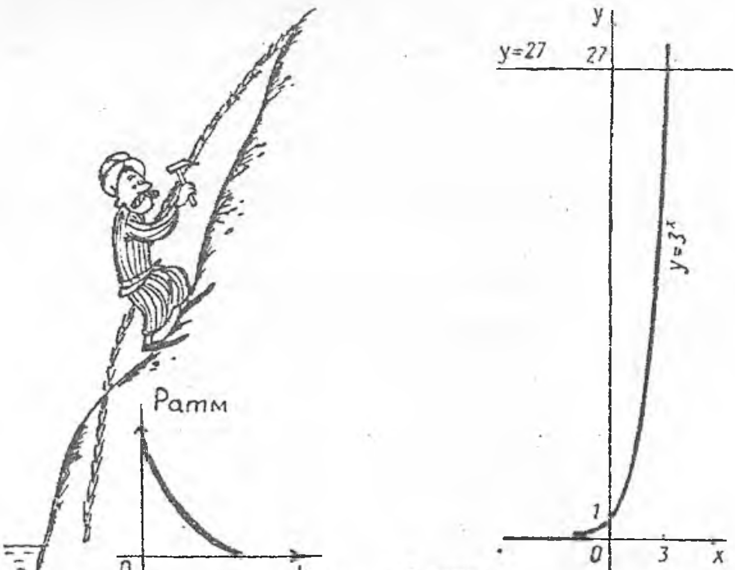
$$m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \tag{8}$$

формула билан ифодаланади, бунда $m(t)$ ва m_0 — радиоактив модданинг мос равишда t вақт моментидаги ва бошланғич $t=$ $=0$ вақт моментидаги массаси, T — ярим емирилиш даври (модда дастлабки миқдорининг икки марта камайишигача ўтган вақт оралиғи).

Ҳаво босимининг кўтарилиш баландлигига боғлиқ равишда ўзгариши, чўлғамга ўзгармас кучланишни улангандаги ўзиндукция токи ва ҳоказолар кўрсаткичли функция ёрдамида ифодаланади.

1- м а с а л а. $3^x=27$ тенгламани ечинг.

△ $27>0$ бўлганлиги учун кўрсаткичли функциянинг хоссасига кўра берилган тенглама илдизга эга. Илдизлардан бири $x=$ $=3$ бўлади, чунки $3^3=27$. Бошқа илдизлар йўқ, чунки $y=3^x$ функция бутун сонлар ўқида ўсади ва шунинг учун $x>3$ да $3^x>$ >27 ва $x<3$ да $3^x<27$ (5- расм). ▲



5- расм

2-масала*. Плутонийнинг ярим емирилиш даври 140 суткага тенг. Агар плутонийнинг бошланғич массаси 8 г га тенг бўлса, 10 йилдан кейин қанча плутоний қолади?

△ (8) формуладан фойдаланамиз. Бу масалада $t=10\times$ $\times 365$ (бир йилда 365 кун бор деб ҳисоблаймиз), $T=140$. $\frac{t}{T}=\frac{365}{14}$. Ҳисоблашларни МК-54 микрокалькуляторида қуйидаги программа бўйича бажарамиз:

365 $\boxed{\text{В}\uparrow}$ 14 $\boxed{\div}$ 0,5 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^y}$ 8 $\boxed{\times}$ $\underline{1{,}1345092 \cdot 10^{-7}}$

Жавоб. 10 йилдан кейин тахминан $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ г плутоний қолади. ▲

Машқлар

1. Функциянинг графигини ясанг: 1) $y=3^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2. $y=3^x$ функциянинг графигидан фойдаланиб, қуйидаги сонларнинг тақрибий қийматларини топинг:

   1) $\sqrt{3}$; 2) $3^{\frac{2}{3}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3^{-1,5}$.

3. Функциянинг графигини схематик равишда тасвирланг:

   1) $y=0{,}4^x$; 2) $y=(\sqrt{2})^x$; 3) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; 4) $y=(\sqrt{3})^x$.

4. (Оғзаки.) Кўрсаткичли функциянинг ўсиш ёки камайиш хоссасидан фойдаланиб, сонларни таққосланг:

   1) $1{,}7^3$ ва 1; 2) $0{,}3^2$ ва 1; 3) $3{,}2^{1,5}$ ва $3{,}2^{1,6}$;

   4) $0{,}2^{-3}$ ва $0{,}2^{-2}$; 5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ ва $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$; 6) 3^{π} ва $3^{3,14}$

5. Функциялар графиклари кесишиш нуқталарининг координаталарини топинг:

   1) $y=2^x$ ва $y=8$; 2) $y=3^x$ ва $y=\frac{1}{3}$;

   3) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ва $y=\frac{1}{16}$; 4) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ва $y=9$.

6. (Оғзаки.) Тенгламани ечинг:

   1) $5^x=\frac{1}{5}$; 2) $7^x=49$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\sqrt{3}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=\sqrt[3]{7}$.

7. (Оғзаки). Функция ўсувчими ёки камаювчими эканини аниқланг:

   1) $y=0{,}3^{-x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x}$; 3) $y=1{,}3^{-2x}$; 4) $0{,}7^{-3x}$

8. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=3^x-2$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+3$; 3) $y=2^{x+1}$; 4) $y=3^{x-2}$

9. $y=2^x$ ва $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ функцияларнинг графиклари ординаталар ўқига нисбатан симметрик эканини исботланг.

10 *. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=2^{|x|}$; 2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$; 3) $y=|3^x-2|$; 4) $y=2-3^x$.

11 * *. Радиоактив емирилишда модданинг миқдори бир сутка давомида икки марта камаяди. 1,5 суткадан кейин 250 г модданинг қанчаси қолади? 3,5 суткадан кейин-чи? Ҳисоблашларни микрокалькуляторда бажаринг.

12 * *. Бир ўрмон участкасида $4\cdot10^5$ м^3 ёғоч тайёрлаш мумкин. Дарахтларнинг йиллик ўсиши 4 %. 5 йилдан кейин бу участкада қанча ёғоч тайёрлаш мумкин? Ҳисоблашларни микрокалькуляторда бажаринг.

2-§. КЎРСАТКИЧЛИ ТЕНГЛАМА ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Кўрсаткичли тенглама ва тенгсизликларга, яъни номаълум даража кўрсаткичида иштирок этадиган тенглама ва тенгсизликларга доир бир нечта мисол қараймиз.

1. Тенглама

Кўрсаткичли тенгламаларни ечиш кўпинча

$$a^x=a^b$$

кўринишидаги тенгламаларни ечишга келтирилади, бунда $a>0$, $a\neq1$, x — номаълум. Бу тенглама биргина $x=b$ илдизга эга, чунки қуйидаги теорема ўринлидир.

Т е о р е м а. Агар $a>0$, $a\neq1$ ва $a^{x_1}=a^{x_2}$ бўлса, у ҳолда $x_1=x_2$.

○ $x_1=x_2$ тенглик бажарилмайди, яъни $x_1<x_2$ ёки $x_1>x_2$ деб фараз қилайлик. Масалан, $x_1<x_2$ бўлсин. У ҳолда агар $a>1$ бўлса, $y=a^x$ кўрсаткичли функция ўсади ва шунинг учун $a^{x_1}<a^{x_2}$ тенгсизлик бажарилиши керак; агар $0<a<1$ бўлса, функция камаяди ва $a^{x_1}>a^{x_2}$ тенгсизлик бажарилиши керак.

Иккала ҳолда ҳам $a^{x_1}=a^{x_2}$ шартга зид натижа ҳосил бўлди. ●

1-м а с а л а. $4\cdot2^x=1$ тенгламани ечинг.

△ Тенгламани $2^{x+2}=2^0$ кўринишда ёзамиз, бундан $x+2=0$.

Ж а в о б. $x=-2$. ▲

2-м а с а л а. $2^{3x}\cdot3^x=576$ тенгламани ечинг.

△ $2^{3x}=(2^3)^x=8^x$, $576=24^2$ бўлгани учун тенгламани $8^x\cdot 3^x=24^2$ ёки $24^x=24^2$ кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $x=2$.

Жавоб. $x=2$. ▲

3-масала. $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-2}=25$ тенгламани ечинг.

△ Тенгламанинг ўнг қисмида умумий кўпайтувчи 3^{x-2} ни қавсдан ташқарига чиқариб, $3^{x-2}(3^3-2)=25$; $3^{x-2}\cdot 25=25$ ни ҳосил қиламиз, бундан $3^{x-2}=1$; $x-2=0$; $x=2$.

Жавоб. $x=2$. ▲

4-масала. $3^x=7^x$ тенгламани ечинг.

△ $7^x\neq 0$ бўлгани учун тенгламани $\frac{3^x}{7^x}=1$ кўринишда ёзиш мумкин, бундан $\left(\frac{3}{7}\right)^x=1$, $x=0$.

Жавоб. $x=0$. ▲

5-масала. $3\cdot 2^{x+1}+2\cdot 5^{x-2}=5^x+2^{x-2}$ тенгламани ечинг.

△ Тенгламани $3\cdot 2^{x+1}-2^{x-2}=5^x-2\cdot 5^{x-2}$ кўринишда ёзамиз, бундан $2^{x-2}(3\cdot 2^3-1)=5^{x-2}(5^2-2)$, $2^{x-2}\cdot 23=5^{x-2}\cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2}=1$, $x-2=0$.

Жавоб. $x=2$. ▲

6-масала. $9^x-4\cdot 3^x-45=0$ тенгламани ечинг.

△ $3^x=t$ алмаштириш билан берилган тенглама $t^2-4t-45=0$ квадрат тенгламага келтирилади. Бу тенгламани ечиб, унинг илдизларини топамиз: $t_1=9$, $t_2=-5$, бундан $3^x=9$; $3^x=-5$. $3^x=9$ тенглама $x=2$ илдизга эга, $3^x=-5$ тенглама эса илдизга эга эмас, чунки кўрсаткичли функция манфий қиймат қабул қилиши мумкин эмас.

Жавоб. $x=2$. ▲

2. Тенгсизлик.

Кўрсаткичли тенгсизликларни ечиш кўпинча $a^x>a^b$ ёки $a^x<a$ кўринишдаги тенгсизликларни ечишга келтирилади. Бу тенгсизликлар кўрсаткичли функциянинг ўсиш ёки камайиш хоссаси ёрдамида ечилади.

7-масала. $3^x<81$ тенгсизликни ечинг.

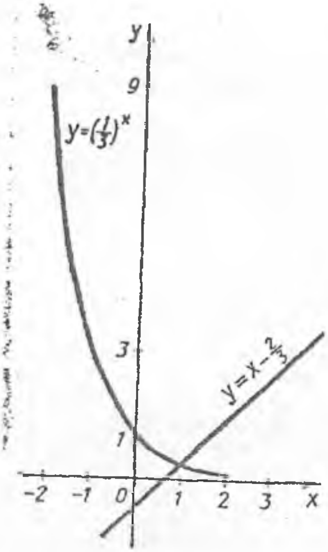
△ Тенгсизликни $3^x<3^4$ кўринишда ёзамиз. $3>1$ бўлгани учун $y=3^x$ функция ўсувчидир. Демак, $x<4$ да $3^x<3^4$ тенгсизлик бажарилади. $x\geqslant 4$ да эса $3^x\geqslant 3^4$ тенгсизлик бажарилади. Шундай қилиб, $3^x<3^4$ тенгсизлик $x<4$ да тўғри, $x\geqslant 4$ да эса нотўғри тенгсизлик бўлади, яъни $3^x<81$ тенгсизлик $x<4$ бўлганда ва фақат шундагина бажарилади.

Жавоб. $x<4$. ▲

8-масала. $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\sqrt{8}$ тенгсизликни ечинг.

△ Тенгсизликни

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^{\frac{3}{2}} \text{ ёки } \left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$



6- расм.

кўринишда ёзамиз. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ — камаювчи функция бўлгани учун $x<-\frac{3}{2}$.

Жавоб. $x<-\frac{3}{2}$. ▲

9- масала. $16^x+4^x-2>0$ тенгсизликни ечинг.

△ $4^x=t$ белгилаш киритамиз, у ҳолда $t^2+t-2>0$ квадрат тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик $t<-2$ да ва $t>1$ да бажарилади. $t=4^x$ бўлгани учун иккита тенгсизликка эга бўламиз: $4^x<-2$, $4^x>1$. Биринчи тенгсизлик ечимга эга эмас, чунки барча $x\in R$ да $4^x>0$. Иккинчи тенгсизликни $4^x>4^0$ кўринишда ёзиш мумкин, бундан $x>0$.

Жавоб. $x>0$. ▲

10- масала*. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x-\frac{2}{3}$ тенгламани график усулда ечинг.

△ $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ ва $y=x-\frac{2}{3}$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (6- расм).

Расмдан бу функцияларнинг графиклари $x\approx 1$ абсциссали нуқтада кесишиши кўриниб турибди. Текшириш $x=1$ берилган тенгламанинг илдизи эканини кўрсатади:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3} \text{ ва } 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Бошқа илдизлар йўқ эканини кўрсатамиз. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ камаювчи функция, $y=x-\frac{2}{3}$ эса ўсувчи функция. Демак, $x>1$ да биринчи функциянинг қийматлари $\frac{1}{3}$ дан кичик, иккинчисининг қийматлари эса $\frac{1}{3}$ дан катта; $x<1$ да, аксинча, биринчи функциянинг қийматлари $\frac{1}{3}$ дан катта, иккинчисининг қийматлари эса $\frac{1}{3}$ дан кичик. Геометрик нуқтаи назардан (6- расм) бу мазкур функцияларнинг графиклари $x>1$ ва $x<1$ да «узоқлашишини» ва шунинг учун $x\neq 1$ да кесишиш нуқталарига эга бўла олмаслигини англатади. ▲

Бу масаланинг ечилишидан, хусусан, $\left(\frac{1}{3}\right)^x>x-\frac{2}{3}$ тенгсизликнинг $x<1$ да, $\left(\frac{1}{3}\right)^x<x-\frac{2}{3}$ тенгсизликнинг эса $x>1$ да бажарилиши келиб чиқишини таъкидлаб ўтамиз.

3. Тенгламалар системалари

11-масала. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x+2y=-1, \\ 4^{x+y^2}=16. \end{cases}$$

△ Бу системани ўрнига қўйиш усули билан ечамиз:

$$x=-2y-1;\ 4^{-2y-1+y^2}=4^2,$$

бундан $-2y-1+y^2=2$, $y^2-2y-3=0$, $y_1=3$, $y_2=-1$. x нинг қийматларини топамиз:

$$x_1=-2\cdot3-1=-7,\ x_2=-2\cdot(-1)-1=1.$$

Жавоб. $(-7;\ 3)$, $(1;\ -1)$. ▲

12*-масала. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 3^{y+1}-2^x=5; \\ 4^x-6\cdot3^y+2=0. \end{cases}$$

△ $2^x=u$, $3^y=v$ белгилашлар киритамиз. У ҳолда система қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} 3v-u=5, \\ u^2-6v+2=0. \end{cases}$$

Бу системани ўрнига қўйиш усули билан ечамиз:

$$u=3v-5,\ (3v-5)^2-6v+2=0,$$

$9v^2-36v+27=0$, $v^2-4v+3=0$, $v_1=1$, $v_2=3$. u нинг қийматларини топамиз: $u_1=-2$, $u_2=4$. Қабул қилинган белгилашларга қайтамиз:

1) $2^x=-2$, $3^y=1$. Бу тенгламалардан биринчиси илдизга эга бўлмагани учун бу ҳолда системанинг ечими йўқ.

2) $2^x=4$, $3^y=3$, бундан $x=2$, $y=1$.

Жавоб. $(2;\ 1)$. ▲

Машқлар

Тенгламани ечинг (13—18):

13. 1) $4^{x-1}=1$; 2) $0{,}3^{3x-2}=1$;

3) $2^{2x}=2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

14. 1) $27^x=\frac{1}{3}$; 2) $400^x=\frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x=25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$.

15. 1) $3\cdot 9^x=81$; 2) $2\cdot 4^x=64$;

3) $3^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^{x-2}=1$; 4) $0{,}5^{x+7}\cdot 0{,}5^{1-2x}=2$;

5) $0{,}6^{x+3}=0{,}6^{2x-5}$; 6) $6^{3x-1}=6^{1-2x}$.

16. 1) $3^{2x-1}+3^{2x}=108$; 2) $2^{3x+2}-2^{3x-2}=30$;

3) $2^{x+1}+2^{x-1}+2^x=28$; 4) $3^{x-1}-3^x+3^{x+1}=63$.

17. 1) $5^x=8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x=5^{2x}$; 4) $4^x=3^{\frac{x}{2}}$.

18. 1) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$; 2) $16^x-17\cdot 4^x+16=0$;

3) $25^x-6\cdot 5^x+5=0$; 4) $64^x-8^x-56=0$.

19. Тенгсизликни ечинг:

1) $3^x>9$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\frac{1}{4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x<2$;

4) $4^x<\frac{1}{2}$; 5) $2^{3x}\geqslant\frac{1}{2}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}\leqslant\frac{1}{9}$.

20. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}2x-y=1,\\ 5^{x+y}=25;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=2;\\ 3^{x^2+y}=\frac{1}{9}.\end{cases}$

Тенгламани ечинг (21—28):

21. 1) $3^{x^2+x-12}=1$; 2) $2^{x^2-7x+10}=1$;

3) $2^{\frac{x-1}{x-2}}=4$; 4) $0{,}5^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{1}{x+1}}$.

22. 1) $0{,}3^{x^3-x^2+x-1}=1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2-2x+3}=1$;

3) $5{,}1^{\frac{1}{2}(x-3)}=5{,}1\sqrt{5{,}1}$; 4) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

23. 1) $10^x=\sqrt[3]{100}$; 2) $10^x=\sqrt[5]{10\,000}$; 3) $225^{2x^2-24}=15$;

4) $10^x=\frac{1}{\sqrt[4]{10\,000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x=10^{x^2-x}$; 6) $100^{x^2-1}=10^{1-5x}$.

24. 1) $2^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}-x}=\sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06}=5^{x^2}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0{,}7^{\sqrt{x+12}}\cdot 0{,}7^{-2}=0{,}7^{\sqrt{x}}$.

25. 1) $7^x-7^{x-1}=6$; 2) $3^{2y-1}+3^{2y-2}-3^{2y-4}=315$;

3) $5^{3x}+3\cdot 5^{3x-2}=140$; 4) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-1}-5\cdot 2^x+6=0$.

26. 1) $7^{x-2}=3^{2-x}$; 2) $2^{x-3}=3^{3-x}$;

3) $3^{\frac{x+2}{4}}=5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}}=3^{2(x-3)}$.

27. 1) $3^{x+3}+3^x=7^{x+1}+5\cdot 7^x$;

2) $3^{x+4}+3\cdot 5^{x+3}=5^{x+4}+3^{x+3}$;

3) $2^{8-x}+7^{3-x}=7^{4-x}+2^{3-x}\cdot 11$;

4) $2^{x+1}+2^{x-1}-3^{x-1}=3^{x-2}-2^{x-3}+2\cdot 3^{x-3}$.

28. 1) $8\cdot 4^x-6\cdot 2^x+1=0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x-6=0$;

3) $13^{2x+1}-13^x-12=0$; 4) $3^{2x+1}-10\cdot 3^x+3=0$;

5) $2^{3x}+8\cdot 2^x-6\cdot 2^{2x}=0$; 6) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}-7\cdot 5^x=0$.

Тенгсизликни ечинг (29—31):

29. 1) $5^{x-1}\leqslant\sqrt{5}$; 2) $3^{\frac{x}{2}}>9$; 3) $3^{x^2-4}\geqslant 1$;

4) $2^{-x^2+3x}<4$; 5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\geqslant\frac{9}{7}$; 6) $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x}<\frac{121}{169}$.

30. 1) $3^{x+2}+3^{x-1}<28$; 2) $2^{x-1}+2^{x+3}>17$;

3) $2^{2x-1}+2^{2x-2}+2^{2x-3}\geqslant 448$; 4) $5^{3x+1}-5^{3x-3}\leqslant 624$.

31. 1) $9^x-3^x-6>0$; 2) $4^x-2^x<12$;

3) $5^{2x+1}+4\cdot 5^x-1>0$; 4) $3\cdot 9^x+11\cdot 3^x<4$.

32. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x=-x-\frac{7}{4}$; 4) $3^x=11-x$.

33 *. Тенгсизликни график усулда ечинг:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x\geqslant x+1$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x<x-\frac{1}{2}$;

3) $2^x\leqslant 9-\frac{1}{3}x$; 4) $3^x>-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

34 *. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $2^x=3-2x-x^2$; 2) $3^{-x}=\sqrt{x}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=-\frac{3}{x}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^3-1$.

35. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 5^x-5^y=100, \\ 5^{x-1}+5^{y-1}=30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2^x-9\cdot 3^y=7, \\ 2^x\cdot 3^y=\frac{8}{9}. \end{cases}$

36 *. x нинг қандай қийматларида $2^{x-1}, 2^{x-4}$ ва 2^{x-2} сонлар йиғиндиси чексиз камаювчи 6,5; 3,25; 1,625; ... геометрик прогрессиянинг йиғиндисига тенг бўлади?

37*. Тенгламани ечинг:

1) $3^{2x+6}=2^{x+3}$; 2) $5^{x-2}=4^{2x-4}$;

3) $2^x\cdot 3^x=36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}}=\frac{1}{27}$.

38**. Тенгсизликни ечинг:

1) $0{,}4^x-2{,}5^{x+1}>1{,}5$; 2) $25\cdot 0{,}04^{2x}>0{,}2^{x(3-x)}$;

3) $\frac{4^x}{4^x-3^x}<4$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x-32\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2-1}<0$.

I БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

39. Сонларни таққосланг:

1) $4^{-\sqrt{3}}$ ва $4^{-\sqrt{2}}$; 2) $2^{\sqrt{3}}$ ва $2^{1,7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ ва $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ ва $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$.

40. Сонни бир билан таққосланг:

1) $2^{-\sqrt{5}}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$.

41. (Оғзаки.) Функция ўсувчи ёки камаювчи бўладими:

1) $y=0{,}78^x$; 2) $y=1{,}69^x$;

3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$; 4) $y=4^{-x}$?

42. $x\in[-1;\,2]$ бўлганда функциянинг қиймати қандай оралиқда ётади: 1) $y=5^x$; 2) $y=5^{-x}$?

Тенгламани ечинг (43—45):

43. 1) $1{,}5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$; 2) $0{,}75^{2x-3}=\left(1\frac{1}{3}\right)^{5-x}$;

3) $5^{x^2-5x-6}=1$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2}=\frac{1}{7}$.

44. 1) $2^x+2^{x-3}=18$; 2) $3^x+4\cdot 3^{x+1}=13$;
3) $2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x=9$;
4) $5^{x+1}+3\cdot 5^{x-1}-6\cdot 5^x+10=0$.

45. 1) $5^{2x}-5^x-600=0$;
2) $9^x-3^x-6=0$;
3) $3^x+9^{x-1}-810=0$;
4) $4^x+2^{x+1}-80=0$.

46. Тенгсизликни ечинг:

1) $3^{x-2}>9$; 2) $5^{2x}<\frac{1}{25}$;

3) $0{,}7^{x^2+2x}<0{,}7^3$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}>\frac{1}{81}$.

47. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $2^{-x}=3x+10$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=2x+5$.

УЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КУРИНГ!

1. Функциянинг схематик графигини ясанг:

$$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x, \quad y=5^x.$$

2. Сонларни таққосланг:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2} \text{ ва } \left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}; \quad 5^{-0,2} \text{ ва } 5^{-1,2}.$$

3. Тенгламани ечинг:

$$3^{x+1}=27^{x-1};$$

$$0,2^{x^2+4x-5}=1; \quad 2^{x+3}-2^{x+1}=12; \quad 4\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0.$$

4. Тенгсизликни ечинг:

$$7^{x-2}>49; \ (0,5)^{x^2-2}\geqslant\frac{1}{4}.$$

48. $y=2^x$ функциянинг x нинг натурал қийматларидаги қийматлари кетма-кетлиги геометрик прогрессия ташкил этишини исботланг.

49. Ташкилот биринчи йили a сўм даромадга эга эди. Кейинги ҳар бир йилда даромад p % га ортa борди. n-йилдан кейин ташкилотнинг даромади қандай бўлади?

50. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=3^x-1$; 2) $y=3^{x-1}$;

3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}-2$; 4) $y=2^{2-x}+3$.

Тенгламани ечинг (51—53):

51. 1) $0,6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$; 2) $16\sqrt{0,25^{5-\frac{x}{4}}}=2^{\sqrt{x+1}}$.

52. 1) $2\cdot 3^{3x-1}+27^{x-\frac{2}{3}}=9^{x-1}+2\cdot 3^{2x-1}$;

2) $2^{\sqrt{x}+2}-2^{\sqrt{x}+1}=12+2^{\sqrt{x}-1}$;

3) $22\cdot 9^{x-1}-\frac{1}{3}\cdot 3^{x+3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x+2}=4$;

4) $5\cdot 4^{x-1}-16^x+0,25\cdot 2^{2x+2}+7=0$.

53. 1) $2^{x+4}+2^{x+2}=5^{x+1}+3\cdot5^x$;

2) $5^{2x}-7^x-5^{2x}\cdot17+7^x\cdot17=0$;

3) $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$;

4) $3\cdot4^x+\frac{1}{3}\cdot9^{x+2}=6\cdot4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot9^{x+1}$.

54. Тенгсизликни ечинг:

1) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+1}}<1$; 2) $2^{x^2}\cdot5^{x^2}<10^{-3}(10^{3-x})^2$;

3) $\frac{4^x-2^{x+1}+8}{2^{1-x}}<8^x$; 4) $\frac{1}{3^x+5}\leqslant\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

55. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}2^{x-y}=128,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2y+1}=\frac{1}{8};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^x\cdot5^y=10,\\ 5^y-2^x=3.\end{cases}$

56*. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=2^{x+|x|}$; 2) $y=|3^{|x|}-3|$.

57*. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot0{,}04^x$; 2) $4\cdot3^x-9\cdot2^x=5\cdot3^{\frac{x}{2}}\cdot2^{\frac{x}{2}}$;

3) $2\cdot4^x-3\cdot10^x-5\cdot25^x=0$; 4) $4\cdot9^x+12^x-3\cdot16^x=0$.

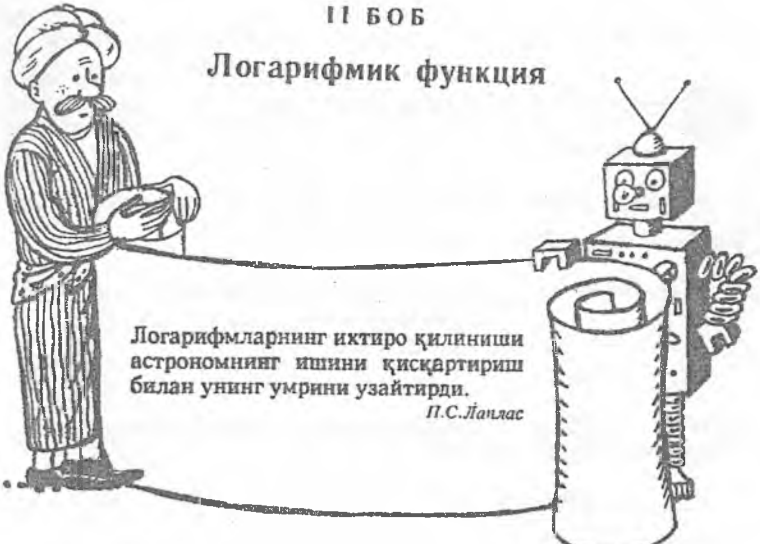
58*. Тенгсизликни ечинг:

1) $3^{|x-2|}<9$; 2) $4^{|x+1|}>16$;

3) $2^{|x-2|}>4^{|x+1|}$; 4) $5^{|x+4|}<25^{|x|}$.

II БОБ

Логарифмик функция



3-§. ЛОГАРИФМЛАР

1-масала. $x^4=81$ тенгламанинг мусбат илдизини топинг.

△ Арифметик илдизнинг таърифига кўра куйидагига эга бўламиз:

$$x=\sqrt[4]{81}=3. \blacktriangle$$

2-масала. $3^x=81$ тенгламани ечинг.

△ Берилган тенгламани бундай ёзамиз: $3^x=3^4$, бундан $x=4$. ▲

1-масалада номаълум даражанинг асосидир, 2-масалада номаълум даража кўрсаткичидир.

2-масалани ечиш усули тенгламанинг чап ва ўнг қисмларини айни бир 3 асосли даража кўринишида ифодалай олишдан иборат. Лекин, масалан, $3^x=80$ тенгламани шундай усул билан ечиш мумкин эмас. Бироқ, сиз бу тенглама илдизга эга эканини биласиз. Бундай тенгламаларни еча олиш учун *соннинг логарифми* тушунчаси киритилади.

2-§ да $a^x=b$ (бунда $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$) тенглама биргина *илдизга эга экани айтилган эди. Бу илдиз b сонининг a асосга*

Лаплас Пьер Симон (1749—1827) — Француз математиги, физиги ва астрономи, француз Фанлар Академиясининг адьюнкти. Буюк Француз инқилобидан сўнг таълим системасини кайта ташкил этишда фаол иштирок этди. Унинг изланишларининг муҳим йўналиши — математика, осмон механикаси ва математик физикадир. Эҳтимоллар назариясининг яратувчиларидан бири бўлган.

кўра *логарифми* деб аталади ва $\log_a b$ каби белгиланади. Масалан, $3^x=81$ тенгламанинг илдизи 4 сонидир, яъни $\log_3 81=4$.

Шундай қилиб, *b мусбат соннинг a асосга кўра логарифми* деб b сонни ҳосил қилиш учун a (бунда $a>0$, $a\neq 1$) сонни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади.

Масалан, $\log_2 8=3$, чунки $2^3=8$; $\log_3\frac{1}{9}=-2$, чунки $3^{-2}=\frac{1}{9}$ $\log_7 7=1$, чунки $7^1=7$; $\log_4 1=0$, чунки $4^0=1$.

Логарифмнинг таърифини қисқача бундай ёзиш мумкин:

$$\boxed{a^{\log_a b}=b.}$$

Бу тенглик $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$ бўлганда ўринлидир. У одатда *асосий логарифмик айният* деб аталади.

Масалан, $4^{\log_4 5}=5$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3}=3$; $13^{\log_{13}\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$.

Асосий логарифмик айният ёрдамида, масалан, $x=\log_3 80$ қиймат $3^x=80$ тенгламанинг илдизи эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $3^{\log_3 80}=80$.

Соннинг логарифмини топиш амали *логарифмлаш амали* деб аталади.

3-масала. $\log_{64}128$ ни ҳисобланг.

△ $\log_{64}128=x$ белгилаш киритамиз. Логарифмнинг таърифига кўра: $64^x=128$. $64=2^6$, $128=2^7$ бўлгани учун $2^{6x}=2^7$, бундан $6x=7$, $x=\frac{7}{6}$.

Жавоб. $\log_{64}128=\frac{7}{6}$. ▲

4-масала. $3^{-2\log_3 5}$ ни ҳисобланг.

△ Даражанинг хоссаси ва асосий логарифмик айниятдан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$3^{-2\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^{-2}=5^{-2}=\frac{1}{25}. \quad ▲$$

5-масала. $\log_3(1-x)=2$ тенгламани ечинг.

△ Логарифмнинг таърифига кўра $3^2=1-x$, бундан $x=-8$. ▲

6-масала.* x нинг қандай қийматларида $\log_5\frac{x-1}{2-x}$ мавжуд бўлади?

△ Логарифмнинг асоси $5>0$ ва $5\neq 1$ бўлгани учун берилган логарифм $\frac{x-1}{2-x}>0$ бўлганда ва фақат шундагина мавжуд бўлади.

Бу тенгсизликни ечиб, $1<x<2$ эканини топамиз. ▲

Машқлар

Ҳисобланг (59—66):

59. 1) $\log_2 16$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_2 2$;

4) $\log_2 1$; 5) $\log_2 \frac{1}{2}$; 6) $\log_2 \frac{1}{8}$.

60. 1) $\log_3 27$; 2) $\log_3 81$; 3) $\log_3 3$;

4) $\log_3 1$; 5) $\log_3 \frac{1}{9}$; 6) $\log_3 \frac{1}{3}$.

61. 1) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 3) $\log_{0,5} 0,125$;

4) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; 5) $\log_{0.5} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$.

62. 1) $\log_5 625$; 2) $\log_6 216$; 3) $\log_4 \frac{1}{16}$; 4) $\log_5 \frac{1}{125}$.

63. 1) $\log_{\frac{1}{5}} 125$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

64. 1) $3^{\log_3 18}$; 2) $5^{\log_5 16}$; 3) $10^{\log_{10} 2}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 6}$.

65. 1) $3^{5\log_3 2}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6\log_{\frac{1}{2}} 2}$; 3) $0,3^{2\log_{0,3} 6}$; 4) $7^{\frac{1}{2}\log_7 9}$.

66. 1) $8^{\log_2 5}$; 2) $9^{\log_3 12}$; 3) $16^{\log_4 7}$; 4) $0,125^{\log_{0,5} 1}$.

67. Тенгламани ечинг:

1) $\log_6 x = 3$; 2) $\log_5 x = 4$; 3) $\log_2 (5 - x) = 3$;

4) $\log_3 (x + 2) = 3$; 5) $\log_{\frac{1}{4}} \left(x - \frac{1}{2}\right) = -2$;

6) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5 + x) = -1$.

Ҳисобланг (68—70):

68. 1) $\log_2 \sqrt[4]{2}$; 2) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$; 3) $\log_{0,5} \frac{1}{\sqrt{32}}$; 4) $\log_7 \sqrt[3]{\frac{7}{49}}$.

69. 1) $9^{2\log_3 5}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5\log_2 3}$;

4) $27^{-4\log_{\frac{1}{3}} 5}$; 5) $10^{3 - \log_{10} 5}$; 6) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1 + 2\log_{\frac{1}{7}} 3}$.

70. 1) $\log_2 \log_3 81$; 2) $\log_3 \log_2 8$; 3) $2\log_{27} \log_{10} 1000$;

4) $\frac{1}{3} \log_9 \log_2 8$; 5) $\log_4 \log_{16} 256 + \log_4 \sqrt{2}$;

6) $3\log_2 \log_4 16 + \log_{\frac{1}{2}} 2$.

Ифода x нинг қандай қийматларида маънога эга бўлишини аниқланг (71—72):

71. 1) $\log_3(12-x)$; 2) $\log_2(x-12)$;

3) $\log_{\frac{1}{4}}(-x)$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{6}{2x-1}$.

72*. 1) $\log_6(49-x^2)$; 2) $\log_7(x^2+x-6)$; 3) $\log_3(2-x-x^2)$;

4) $\log_5(x^2+2x+7)$; 5) $\log_{36}\frac{2x+4}{x-3}$; 6) $\log_6\frac{4-x}{3x+5}$.

Тенгламани ечинг (73—74):

73. 1) $2^x=5$; 2) $1{,}2^x=4$; 3) $4^{2x+3}=5$; 4) $7^{1-2x}=2$.

74*. 1) $7^{2x}+7^x-12=0$; 2) $9^x-3^x-12=0$;

3) $8^{x+1}-8^{2x-1}=30$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x-5\left(\frac{1}{3}\right)^x+6=0$.

4-§. ЛОГАРИФМНИНГ ХОССАЛАРИ

Логарифмлар иштирок этган ифодаларни алмаштиришда, ҳисоблашларда ва тенгламаларни ечишда кўпинча *логарифмларнинг* турли *хоссаларидан* фойдаланилади. Булардан асосийларини кўриб чиқамиз.

! $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, r — исталган ҳақиқий сон бўлсин. У ҳолда қуйидаги формулалар ўринли:

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c, \quad (1)$$

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c, \quad (2)$$

$$\log_a b^r=r\log_a b. \quad (3)$$

○ Асосий логарифмик айниятга кўра:

$$a^{\log_a b}=b, \quad (4)$$

$$a^{\log_a c}=c. \quad (5)$$

1) (4) ва (5) тengликларни ўзаро кўпайтириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$a^{\log_a b+\log_a c}=bc,$$

бундан логарифмнинг таърифига кўра $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$. (1) формула исботланди.

2) (4) тенгликни (5) га бўлиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$a^{\log_a b-\log_a c}=\frac{b}{c},$$

бундан логарифмнинг таърифига кўра (2) формула келиб чиқади.

3) $a^{\log_a b}=b$ асосий логарифмик айниятни r кўрсаткичли дара-

жага кўтариб, қуйидагига эга бўламиз:

$$a^{r\log_a b}=b^r,$$

бундан логарифмнинг таърифига кўра (3) формула келиб чиқади. ●

(1) — (3) формулаларни қўллашга доир мисоллар келтирамиз:

1) $\log_6 18+\log_6 2=\log_6 36=2;$
2) $\log_{12} 48-\log_{12} 4=\log_{12} 12=1;$
3) $\dfrac{\log_3 4}{\log_3 4^{\frac{1}{7}}}=\dfrac{\log_3 4}{\frac{1}{7}\log_3 4}=7.$

Масала. $\log_5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 12+\log_5 50$ ни ҳисобланг.

△ (1) — (3) формулаларни қўллаб, қуйидагини топамиз:
$\log_5\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log_5 12+\log_5 50=\log_5\dfrac{\sqrt{3}\cdot 50}{\sqrt{12}}=\log_5 25=2.$ ▲

Машқлар

Ҳисобланг (75—80):

75. 1) $\log_{10}5+\log_{10}2;$ 2) $\log_{10}8+\log_{10}125;$
3) $\log_{12}2+\log_{12}72;$ 4) $\log_3 6+\log_3\frac{3}{2}.$

76. 1) $\log_2 15-\log_2\frac{15}{16};$ 2) $\log_5 75-\log_5 3;$
3) $\log_{\frac{1}{3}}54-\log_{\frac{1}{3}}2;$ 4) $\log_8\frac{1}{16}-\log_8 32.$

77. 1) $\log_{13}\sqrt[5]{169};$ 2) $\log_{11}\sqrt[3]{121};$
3) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[4]{243};$ 4) $\log_2\dfrac{1}{\sqrt[6]{128}}.$

78. 1) $\log_8 12-\log_8 15+\log_8 20;$
2) $\log_9 15+\log_9 18-\log_9 10;$
3) $\frac{1}{2}\log_7 36-\log_7 14-3\log_7\sqrt[3]{21};$
4) $2\log_{\frac{1}{3}}6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}400+3\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{45}.$

79. 1) $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 16};$ 2) $\dfrac{\log_5 27}{\log_5 9};$
3) $\dfrac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9};$ 4) $\dfrac{\log_7 8}{\log_7 15-\log_7 30}.$

80. 1) $\dfrac{\log_2 24-\frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18-\frac{1}{3}\log_3 72}$; 2) $\dfrac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$;

3) $\dfrac{\log_2 4+\log_2\sqrt{10}}{\log_2 20+3\log_2 2}$; 4) $\dfrac{3\log_7 2-\frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\frac{1}{3}\log_5 27}$.

81. x ни унинг берилган логарифми бўйича топинг ($a>0$, $b>0$):

1) $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b$;
2) $\log_6 x=2\log_5 a-3\log_5 b$.

82 *. Ҳисобланг:

1) $36^{\log_6 5}+10^{1-\log_{10}2}-8^{\log_2 3}$;

2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

83 **. Агар $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $p\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\log_{a^p} b=\frac{1}{p}\log_a b$ бўлишини исботланг.

Шу формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳисобланг:

1) $\log_{36}2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}}3$;

2) $2\log_{25}30+\log_{0,2}6$.

5-§. ЎНЛИ ВА НАТУРАЛ ЛОГАРИФМЛАР

Сонларнинг логарифмлари учун махсус жадваллар (*логарифмлар жадваллари*) тузилган. Логарифмлар микрокалькулятор ёрдамида ҳам ҳисобланади. Иккала ҳолда ҳам фақат *ўнли* ёки *натурал логарифмлар* топилади.

Сонниг *ўнли логарифми* деб шу соннинг 10 асосга кўра логарифмига айтилади ва $\log_{10} b$ ўрнига $\lg b$ ёзилади.

Сонниг *натурал логарифми* деб, шу соннинг e асосга кўра логарифмига айтилади, бу ерда e — қиймати тахрибан 2,7 га тенг иррационал сон. Бунда $\log_e b$ ўрнига $\ln b$ ёзилади.

e иррационал сон математикада ва унинг татбиқларида муҳим роль ўйнайди. e сонини йиғинди сифатида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\ldots.$$

e сонини микрокалькуляторда ҳисоблаш қуйидаги программа бўйича бажарилади:

1 $\boxed{F}$ $\boxed{e^x}$ $\underline{2{,}7182818}$.

$\lg b$ ва $\ln b$ ни микрокалькуляторда ҳисоблаш мос равишда қуйидаги программалар бўйича бажарилади:

$$b \ \boxed{F} \ \boxed{\lg} \quad \text{ва} \quad b \ \boxed{F} \ \boxed{\ln}.$$

Масалан, $\lg 13$ ни ҳисобласак, $13 \ \boxed{F} \ \boxed{\lg} \ \underline{1{,}1139433}$ ни ҳосил қиламиз. $\ln 13$ ни ҳисоблаб,

$$13 \ \boxed{F} \ \boxed{\ln} \ \underline{2{,}5649493}$$

ни ҳосил қиламиз.

Сонларнинг исталган асосга кўра логарифмларини топиш учун уларнинг фақат ўнли ёки фақат натурал логарифмлари қийматларини билиш етарли экан. Бунинг учун бир асосга кўра логарифмдан бошқа асосга кўра логарифмга *ўтиш формуласидан* фойдаланилади:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},}$$

бу ерда $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$.

(1) формуланинг ўринли эканини исботлаймиз.

○ * Асосий логарифмик айниятни ёзамиз: $a^{\log_a b}=b$. Унинг иккала қисмини c асосга кўра логарифмлаймиз:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Даражанинг логарифми хоссасидан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b, \text{ бундан } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \ \bullet$$

(1) формуладан $c=10$ ва $c=e$ да ўнли ва натурал логарифмларга ўтиш формулалари келиб чиқади:

$$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}, \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}. \qquad (2)$$

1 масала. МК-54 микрокалькулятори ёрдамида $\log_3 80$ ни ҳисобланг.

△ 1) Ўнли логарифмлар ёрдамида:

$$80 \ \boxed{F} \ \boxed{\lg} \ 3 \ \boxed{F} \ \boxed{\lg} \ \boxed{\div} \ \underline{3{,}988927}.$$

2) Натурал логарифмлар ёрдамида:

$$80 \ \boxed{F} \ \boxed{\ln} \ 3 \ \boxed{F} \ \boxed{\ln} \ \boxed{\div} \ \underline{3{,}9886928}.$$

Жавоб. $\log_3 80 \approx 3{,}99$. ▲

Бир асосга кўра логарифмдан бошқа асосга кўра логарифмга ўтиш формуласидан баъзан тенгламаларни ечишда фойдаланилади.

2- м а с а л а. $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$ тенгламани ечинг.

△ Ўтиш формуласига кўра

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}.$$

Шунинг учун тенглама $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}$ кўринишга эга бўлади, бундан $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ▲

3- м а с а л а *. *Жамғарма банкидаги a сўмга тенг икки фоизли омонат n йилдан кейин $a(1,02)^n$ га, уч фоизли омонат эса $a(1,03)^n$ га тенг бўлади. Неча йилдан кейин ҳар қайси омонат икки марта ортади?*

△ 1) Биринчи омонат учун $2a = a(1,02)^n$, бундан $(1,02)^n = 2$, $n = \log_{1,02}2$. Ҳисоблашларни МК-54 да амалга оширамиз:

2 $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ 1,02 $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ 36,002788.

2) Иккинчи омонат учун $n = \log_{1,03}2$ ва ҳисоблаш программаси қуйидагича:

2 $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ 1,03 $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ 23,449772.

Ж а в о б. Биринчи омонат бўйича тахминан 36 йилдан кейин, иккинчи омонат бўйича эса тахминан 23,5 йилдан кейин.

Машқлар

Микрокалькулятор ёрдамида ҳисобланг (84—85):

84. 1) $\lg 23$; 2) $\lg 7$; 3) $\lg 0,37$; 4) $\lg\frac{2}{3}$.

85. 1) $\ln 81$; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 0,17$; 4) $\ln\frac{6}{7}$.

86. Берилган логарифмни ўнли логарифм орқали ифодаланг ва микрокалькуляторда 0,01 гача аниқлик билан ҳисобланг:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0,75$; 4) $\log_{0,75}1,13$.

87. Берилган логарифмни натурал логарифм орқали ифодаланг ва микрокалькуляторда 0,01 гача аниқлик билан ҳисобланг:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0,7}9$; 4) $\log_{1,1} 0,23$.

Тенгламани ечинг (88—89):

88. 1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25}2$; 2) $\log_3 x = 9\log_{27}8 - 3\log_3 4$;

3) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$; 6) $\log_4 x - \log_{16} x = \frac{1}{4}$.

---

89. 1) $\log_2^2 x - 9\log_8 x = 4$; 2) $\log_3^2 x - 15\log_{27} x + 6 = 0$;

3) $\log_3^2 x + 5\log_9 x - 1,5 = 0$; 4) $16\log_{16}^2 x + 3\log_4 x - 1 = 0$.

90*. Ҳисобланг (микрокалькулятордан фойдаланманг):

1) $\frac{\log_5 2}{\log_5 6}+\frac{\log_4 3}{\log_4 6}$; 2) $\left(\log_7 2+\frac{1}{\log_5 7}\right)\lg 7$;

3) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 9}$; 4) $\frac{\log_{27} 8}{\log_3 4}$.

91**. Янги шаҳарчада истиқомат қилувчи аҳолининг сони йилига 8 % ортади. Неча йилдан кейин аҳоли сони икки марта ортади?

92**. Поршенли насоснинг бир марта ҳаракатланиши билан идишдаги мавжуд ҳавонинг 1,2 % и чиқиб кетади. Насос неча марта ҳаракатлангандан кейин идишдаги ҳаво дастлабки массасининг $\frac{1}{10^{16}}$ қисми қолади?

93**. МК-54 микрокалькуляторида e сонининг тақрибий қийматини $e\approx 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}+\ldots$ формула бўйича: 1) $n=7$; 2) $n=8$; 3) $n=9$; 4) $n=10$ бўлганда ҳисобланг.

6-§. ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ГРАФИГИ

Математикада ва унинг татбиқларида кўпинча $y=\log_a x$ *логарифмик функция* учрайди, бу ерда a — берилган сон, $a>0$, $a\neq 1$.

Логарифмик функция *қуйидаги хоссаларга* эга:

1) Логарифмик функциянинг *аниқланиш соҳаси* — барча мусбат сонлар тўплами.

Бу логарифмнинг таърифидан келиб чиқади, чунки $\log_a x$ ифода фақат $x>0$ да маънога эга.

2) Логарифмик функциянинг қийматлар тўплами — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.

Бу исталган ҳақиқий b сон учун шундай мусбат x сон мавжуд бўлиб, унинг учун $\log_a x=b$ бўлишидан, яъни $\log_a x=b$ тенглама илдизга эга эканидан келиб чиқади. Бундай илдиз мавжуд ва у $x=$ $=a^b$га тенг, чунки $\log_a a^b=b$.

3) $y=\log_a x$ логарифмик функция $x>0$ оралиқда агар $a>$ >1 бўлса, ўсувчи, агар $0<a<1$ бўлса, камаювчидир.

○ $a>1$ бўлсин. Агар $x_2>x_1>0$ бўлса, у ҳолда $y(x_2)>y(x_1)$, яъни $\log_a x_2>\log_a x_1$ бўлишини исботлаймиз. Асосий логарифмик айниятдан фойдаланиб $x_2>x_1$ шартни бундай ёзиш мумкин: $a^{\log_a x_2}>a^{\log_a x_1}$. Бу тенгсизликдан $a>1$ асосли даражанинг хоссасига кўра $\log_a x_2>\log_a x_1$ экани келиб чиқади.

$0<a<1$ бўлсин. Агар $x_2>x_1>0$ бўлса, у ҳолда $\log_a x_2<\log_a x_1$ бўлишини исботлаймиз. $x_2>x_1$ шартни $a^{\log_a x_2}>a^{\log_a x_1}$ кўринишда ёзиб, $\log_a x_2<\log_a x_1$ ни ҳосил қиламиз, чунки $0<a<1$. ●

4) Агар $a>1$ бўлса, у ҳолда $y=\log_a x$ функция $x>1$ да *мусбат қийматлар,* $0<x<1$ да эса *манфий қийматлар* қабул қилади. Агар $0<a<1$ бўлса, у ҳолда $y=\log_a x$ функция $0<x<$ <1 да мусбат қийматлар, $x>1$ да манфий қийматлар қабул қилади.

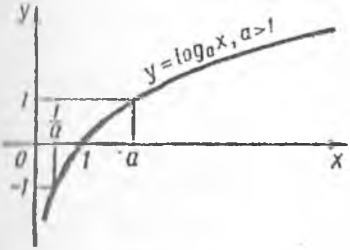
Бу $y=\log_a x$ функция $x=1$ да нолга тенг қиймат қабул қилиши ва $x>0$ оралиқда, агар $a>1$ бўлса, ўсувчилигидан ҳамда агар $0<a<1$ бўлса, камаювчилигидан келиб чиқади.

$y=\log_a x$ логарифмик функциянинг кўриб чиқилган хоссаларидан унинг графиги Oy ўқидан ўнгда жойлашганлиги ва $a>$ >1 да 7- расмдаги кўринишга, $0<a<1$ да эса 8- расмдаги кўринишга эга бўлиши келиб чиқади.

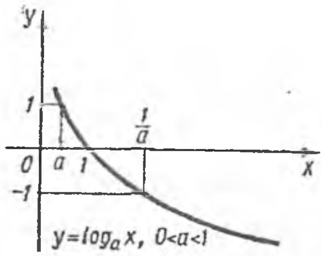
9- расмда $y=\log_3 x$ функциянинг графиги, 10- расмда эса $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ функциянинг графиги тасвирланган.

Исталган $y=\log_a x$ логарифмик функциянинг графиги (1; 0) нуқтадан ўтишини таъкидлаб ўтамиз.

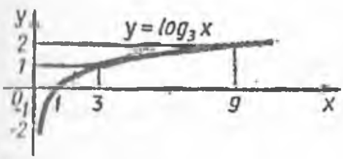
Тенгламаларни ечишда кўпинча қуйидаги теоремадан фойдаланилади:



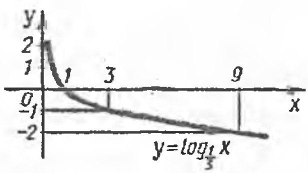
7-расм



8-расм



9-расм



10-расм

Теорема. Агар $\log_a x_1=\log_a x_2$ бўлса, у ҳолда $x_1=x_2$ бўлади, бунда $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$.

○ $x_1\neq x_2$ деб фараз қилайлик, масалан, $x_2>x_1$ бўлсин. Агар $a>1$ бўлса, у ҳолда $x_2>x_1$ тенгсизликдан $\log_a x_2>\log_a x_1$ бўлиши, агар $0<a<1$ бўлса, у ҳолда $x_2>x_1$ тенгсизликдан $\log_a x_2<\log_a x_1$ бўлиши келиб чиқади. Иккала ҳолда ҳам $\log_a x_1=\log_a x_2$ шартга зид хол юз берди. Демак, $x_1=x_2$. ●

1-масала. $\log_5(3x-2)=\log_5 7$ тенгламани ечинг.

△ Исботланган теоремадан фойдаланиб $3x-2=7$ ни ҳосил қиламиз, бундан $3x=9$, $x=3$. ▲

2-масала. $\log_2 x<3$ тенгсизликни ечинг.

△ $3=\log_2 2^3=\log_2 8$ эканидан фойдаланиб, берилган тенгсизликни бундай ёзамиз: $\log_2 x<\log_2 8$. $y=\log_2 x$ функция $x>0$ да аниқланган ва ўсувчи эканидан $\log_2 x<\log_2 8$ тенгсизлик $x>0$ ва $x<8$ да бажарилади.

Жавоб. $0<x<8$. ▲

3-масала. $\log_{\frac{1}{3}} x\leqslant -2$ тенгсизликни ечинг.

△ Берилган тенгсизликни бундай ёзамиз: $\log_{\frac{1}{3}} x\leqslant \log_{\frac{1}{3}} 9$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ функция $x\geqslant 0$ да аниқланган ва камаювчи, шунинг учун тенгсизлик $x>0$ ва $x\geqslant 9$ да бажарилади.

Жавоб. $x\geqslant 9$. ▲

Машқлар

94. Сонларни таққосланг:

1) $\log_3\frac{6}{5}$ ва $\log_3\frac{5}{6}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}9$ ва $\log_{\frac{1}{3}}17$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}e$ ва $\log_{\frac{1}{2}}\pi$; 4) $\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}$ ва $\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$.

95. Қуйидаги сон мусбат сонми ёки манфий сонми эканини аниқланг:

1) $\log_3 4{,}5$; 2) $\log_3 0{,}45$; 3) $\log_5 25{,}3$; 4) $\log_{0,5} 9{,}6$.

96. Агар

1) $\log_3 x=-0{,}3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}x=1{,}7$;

3) $\lg x=0{,}2$; 4) $\log_2 x=1{,}3$

бўлса, x сонини бир билан таққосланг.

97. Функция ўсувчими ёки камаювчими эканини аниқланг:

1) $y=\log_{0,075}x$; 2) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x$; 3) $y=\lg x$; 4) $y=\ln x$.

98. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\log_2 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$.

99. $y=\log_2 x$ функциянинг графиги бўйича $\log_2 3$; $\log_2 0{,}3$; $\log_2 5$; $\log_2 0{,}7$ ни тақрибан топинг.

100. Функциянинг графигини схематик равишда тасвирланг:

1) $y=\lg x$; 2) $y=\ln x$; 3) $y=\log_{0,4}x$; 4) $y=\log_{\frac{1}{5}}x$.

Тенгсизликни ечинг (101—102):

101. 1) $\log_5 x>\log_5 3$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}x\leqslant\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{8}$;

3) $\lg x<\lg 4$; 4) $\ln x>\ln 0{,}5$.

102. 1) $\log_3 x<2$; 2) $\log_{0,4}x>2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant 16$; 4) $\log_{0,4}x\leqslant 2$.

103. Тенгламани ечинг:

1) $\log_3(5x-1)=2$; 2) $\log_5(3x+1)=2$;

3) $\log_4(2x-3)=1$; 4) $\log_7(x+3)=2$;

5) $\lg(3x-1)=0$; 6) $\lg(2-5x)=1$.

---

104. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\log_3(x-1)$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

3) $y=1+\log_3 x$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}x-1$;

5) $y=1+\log_3(x-1)$; 6) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)-1$.

105 *. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\log_2 x = -x + 1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$; 4) $\log_3 x = 2 - \frac{1}{3}x^2$.

106 **. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$;

3) $y = \log_2 |3 - x|$; 4) $y = |1 - \log_2 x|$.

107 **. $y = \log_2 x$ ва $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ функцияларнинг графиклари абсциссалар ўқига нисбатан симметрик эканини кўрсатинг.

7-§. ТЕСКАРИ ФУНКЦИЯ

v_0 бошланғич тезлик билан юқорига тик отилган жисм v тезлигининг t ҳаракат вақтига боғлиқлиги $v = v_0 - gt$ формула билан ифодаланиши маълум. Бу формуладан *тескари боғланишни* — вақтнинг тезликка боғлиқлигини топиш мумкин: $t = \frac{v_0 - v}{g}$. $t(v) = \frac{v_0 - v}{g}$ функция $v(t) = v_0 - gt$ функцияга, $v(t)$ функция эса $t(v)$ функцияга *тескари функция* деб аталади. Бу мисолда t нинг ҳар бир қийматига v нинг ягона қиймати мос келишини ва аксинча, v нинг ҳар бир қийматига t нинг ягона қиймати мос келишини таъкидлаб ўтамиз.

Энди кўрсаткичли ва логарифмик функцияларни қараймиз. $f(x)$ билан кўрсаткичли функцияни, $g(x)$ билан эса логарифмик функцияни белгилаймиз:

$$f(x) = a^x,\ g(x) = \log_a x,$$

бунда a — берилган сон, $a > 0$, $a \neq 1$.

$a^x = y$ тенгламани x га нисбатан ечамиз. Логарифмнинг таърифига кўра $x = \log_a y$. Бу тенгламада x ва y нинг ўринларини алмаштириб, $y = \log_a x$ логарифмик функцияга эга бўламиз. *$y = \log_a x$ функция $y = a^x$ функцияга тескари функция деб аталади.* Агар $y = \log_a x$ тенгликдан x ни топсак, у ҳолда $x = a^y$ га эга бўламиз, x ва y нинг ўринларини алмаштириб эса $y = a^x$ кўрсаткичли функцияга эга бўламиз. *$y = a^x$ функция $y = \log_a x$ функцияга тескари функция деб аталади.* Шунинг учун $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар *ўзаро тескари функциялар* деб аталади.

Умуман, агар $y = f(x)$ функция формула билан берилган бўлса, у ҳолда тескари функцияни топиш учун $f(x) = y$ тенгламани x га нисбатан ечиш ҳамда x ва y ларнинг ўринларини алмаштириш керак.

Агар $f(x) = y$ тенглама биттадан ортиқ илдизга эга бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функцияга тескари функция мавжуд эмас.

Масалан, $f(x)=x^2$ функцияга тескари функция мавжуд эмас, чунки $x^2=y$ тенглама исталган $y>0$ учун иккита: $x_{1,2}=\pm\sqrt{y}$ илдизга эга. Агар $y=x^2$ функция фақат $x\geqslant 0$ оралиқда қараладиган бўлса, у ҳолда бу функцияга тескари $y=\sqrt{x}$ функция мавжуд, чунки $y\geqslant 0$ да $x^2=y$ тенглама фақат битта номанфий илдизга эга.

1-масала. $y=\frac{1}{x-2}$ функцияга тескари функцияни топинг.

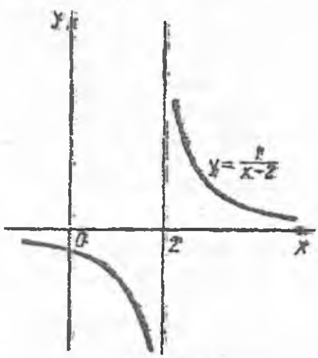
△ Бу тенгламани x га нисбатан ечиб, $x=2+\frac{1}{y}$ га эга бўламиз, x ни y га ва y ни x га алмаштириб, $y=2+\frac{1}{x}$ ни ҳосил қиламиз. ▲

Бу масалада $y=\frac{1}{x-2}$ функциянинг аниқланиш соҳаси 2 га тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламидир, унинг қийматлар тўплами эса 0 га тенг бўлмаган барча ҳақиқий сонлар тўпламидир. Бу функциянинг графиги 11-расмда тасвирланган.

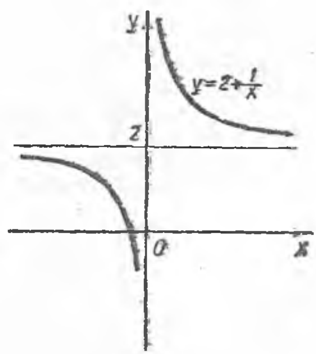
$y=2+\frac{1}{x}$ тескари функция учун унинг аниқланиш соҳаси 0 га тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар тўплами, қийматлар тўплами эса 2 га тенг бўлмаган барча ҳақиқий сонлар тўплами. Тескари функциянинг графиги 12-расмда тасвирланган.

Умуман, тескари функциянинг аниқланиш соҳаси дастлабки функциянинг қийматлар тўплами билан, тескари функциянинг қийматлар тўплами эса дастлабки функциянинг аниқланиш соҳаси билан устма-уст тушади.

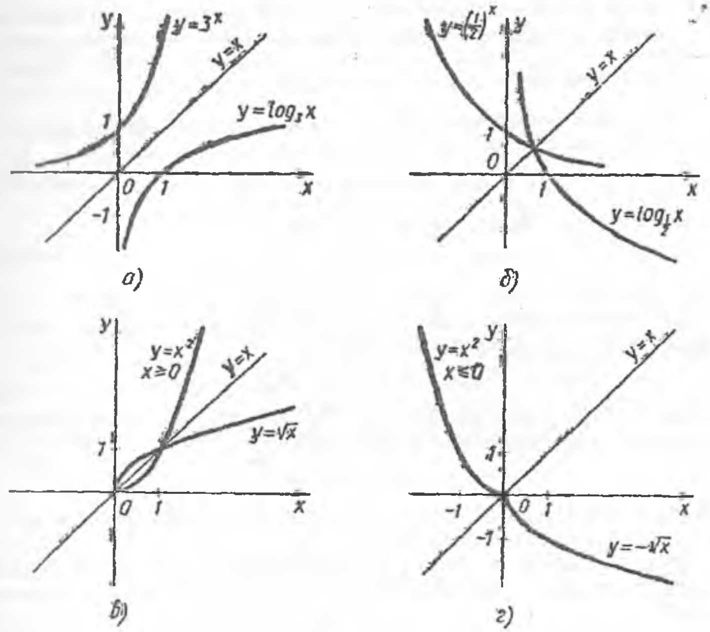
Агар берилган функцияга тескари функция мавжуд бўлса, у ҳолда тескари функциянинг графиги берилган функциянинг графигига $y=x$ ўққа нисбатан симметрик бўлишини кўрсатиш мумкин.



11-расм



12-расм



13- расм

Ўзаро тескари функцияларнинг графикларига мисоллар 13- расмда кўрсатилган.

Машқлар

108. Берилган функцияга тескари функцияни топинг:

1) $y=2x-1$; 2) $y=-5x+4$;

3) $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$; 4) $y=\frac{3x-1}{2}$;

5) $y=x^3+1$; 6) $y=x^3-3$;

7) $y=3^x$; 8) $y=\log_{0,5}x$.

109. Берилган функцияга тескари функциянинг аниқланиш соҳасини ва қийматлар тўпламини топинг:

1) $y=-2x+1$; 2) $y=\frac{1}{4}x-7$; 3) $y=x^3-1$;

4) $y=(x-1)^3$; 5) $y=\frac{2}{x}$; 6) $y=\frac{3}{x-4}$.

110. Битта расмда берилган функциянинг графигини ва берилган функцияга тескари функциянинг графигини ясанг:

1) $y=3x-1$; 2) $y=\frac{2x-1}{3}$;

3) $y=x^2-1$, бунда $x\geqslant 0$; 4) $y=(x-1)^2$, бунда $x\geqslant 1$.

8-§. ЛОГАРИФМИК ТЕНГЛАМАЛАР

1-масала Ушбу тенгламани ечинг:

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3. \qquad (1)$$

$\triangle$ x шундай сонки, унда (1) тенглик тўғри бўлади яъни x (1) тенгламанинг илдизи деб фараз қилайлик. У ҳолда логарифмнинг хоссасига кўра ушбу

$$\log_2(x+1)(x+3)=3 \qquad (2)$$

тенглик тўғри тенглик бўлади. Бу тенгликдан логарифмнинг таърифига кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(x+1)(x+3)=8,$$

бундан $x^2+4x+3=8$, яъни $x^2+4x-5=0$. Охирги тенглик $x_1==1$ ёки $x_2=-5$ бўлганда тўғри.

Шундай қилиб, x сони (1) тенгламанинг илдизи деб фараз қилиб, биз x ёки 1 га, ёки -5 га тенг бўлиши мумкин эканини кўрдик.

Бу сонлар (1) тенгламанинг илдизи бўлиш-бўлмаслигини текширамиз. *Берилган тенгламанинг чап қисмига* $x=1$ *ни қўйиб,* $\log_2(1+1)+\log_2(1+3)=\log_2 2+\log_2 4=1+2=3$ ни ҳосил қиламиз, яъни $x=1$ қиймат (1) тенгламанинг илдизи.

$x=-5$ да $x+1$ ва $x+3$ сонлар манфий ва шунинг учун (1) тенгламанинг чап қисми маънога эга эмас, яъни $x==-5$ берилган тенгламанинг илдизи эмас.

Жавоб. $x=1$. $\blacktriangle$

$x=-5$ (2) тенгламанинг илдизи эканини таъкидлаб ўтамиз, чунки $\log_2(-5+1)(-5+3)=\log_2 8=\log_2 2^3=3$, $x=1$ сони (1) ва (2) тенгламаларнинг иккаласининг илдизи экани, $x==-5$ сони эса (1) тенгламанинг илдизи эмас,лекин (2) тенгламанинг илдизи экани келиб чиқди. Шундай қилиб, (1) тенгламадан (2) тенгламага ўтишда $x=1$ сақланиб қолди ва $x=-5$ чет илдиз ҳосил бўлди. Бу ҳолда (2) тенглама (1) *тенгламанинг натижаси* дейилади.

! Агар биринчи тенгламанинг ҳамма илдизлари иккинчи тенгламанинг илдизлари бўлса, у ҳолда иккинчи тенглама *биринчи тенгламанинг натижаси* дейилади.

Дастлабки тенгламанинг натижаси бўлган тенгламада ҳар доим ҳам чет илдизлар пайдо бўлавермайди; муҳими фақат дастлабки тенгламанинг илдизлари йўқолмаса бас.

Кўпгина ҳолларда, 1- масаладаги каби, тенгламалар биринкетин берилган тенгламанинг натижаси бўлувчи, нисбатан содда тенгламаларга ўтиш билан ечилади. Бундай ҳолларда илдизлар топилгандан сўнг *уларни текшириб кўриш зарур.*

2- масала. $\log_2(1-x)=3-\log_2(3-x)$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ Логарифмни тенгламанинг ўнг қисмидан чап қисмига ўтказамиз:

$$\log_2(1-x)+\log_2(3-x)=3,$$

бундан

$$\log_2(1-x)(3-x)=3,$$

$$(1-x)(3-x)=8.$$

Бу тенгламани ечиб, $x_1=5$, $x_1=-1$ га эга бўламиз. $x=5$ сони дастлабки тенгламанинг илдизи эмас, чунки $x=5$ да тенгламанинг чап ва ўнг қисмлари маъносини йўқотади. Текшириш $x=-1$ сони дастлабки тенгламанинг илдизи эканини кўрсатади.

Жавоб. $x=-1$. ▲

3- масала. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg x+\lg(x+3). \qquad (3)$$

$\triangle$ Логарифмлар хоссасига кўра

$$\lg(2x^2-4x+12)=\lg(x^2+3x), \qquad (4)$$

бундан

$$2x^2-4x+12=x^2+3x, \qquad (5)$$

$$x^2-7x+12=0, \qquad (6)$$

$x_1=3$, $x_2=4$. Текширишлар x нинг иккала қиймати ҳам дастлабки тенгламанинг илдизи эканини кўрсатади.

Жавоб. $x_1=3$, $x_2=4$. ▲

Текшириш билан $x_1=3$ ва $x_2=4$ сонлари фақат (6) ва (3) тенгламаларнинг эмас, балки (4) ва (5) тенгламаларнинг ҳам илдизи эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бу барча тенгламалар бошқа илдизларга эга эмас. Бундай тенгламалар *тенг кучли* тенгламалар деб аталади.

Айни бир илдизлар тўпламига эга бўлган тенгламалар *тенг кучли тенгламалар* деб аталади.

Хусусан, илдизларга эга бўлмаган иккита тенглама тенг кучли тенгламалардир.

Иккита тенг кучли тенгламадан исталган бири иккинчисининг натижаси эканини таъкидлаймиз.

Сиз алгебра курсида учратган тенгламаларнинг кўпчилиги берилган тенгламадан унга тенг кучли тенгламага ўтиш ёрдамида ечилган эди. Бир номаълумли биринчи даражали тенгламалар, квадрат тенгламалар, кўрсаткичли тенгламалар шундай ечилган эди.

Тенглама унга тенг кучли тенгламага қуйидаги алмаштиришлар билан келтирилади:

тенгламанинг исталган ҳадини унинг бир қисмидан иккинчи қисмига ишорасини қарама-қаршисига ўзгартириш билан ўтказиш мумкин.

тенгламанинг иккала қисмини айни бир сонга кўпайтириш ёки бўлиш мумкин.

Лекин тенглама исталган алмаштиришларда ҳам ўзига тенг кучли тенгламага алмашавермайди. Масалан, $\sqrt{x}=x-2$ тенгламанинг иккала қисмини квадратга кўтарганда биринчи тенгламанинг натижаси бўлган, лекин унга тенг кучли бўлмаган $x=(x-2)^2$ тенглама ҳосил бўлади. Шунинг учун иккинчи тенгламани ечгандан сўнг унинг илдизлари дастлабки тентламанинг илдизлари бўладими ёки йўқми эканини текшириш зарур.

4-масала. $\log_7(3x+4)=\log_7(5x+8)$ тенгламани ечинг.

△ Логарифм ишораси остидаги ифодаларни тенглаб қуйидагига эга бўламиз:

$$3x+4=5x+8,$$

бундан $x=-2$. Текшириш билан $x=-2$ да дастлабки тенгламанинг чап ва ўнг қисмлари маънога эга бўлмаслигига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб. Илдизлари йўқ. ▲

Бу ерда логарифмлар тенглигидан сонлар тенглигига ўтишда бу сонларнинг мусбат бўлишлик талаби ҳисобга олинмаганлиги сабабли чет илдиз пайдо бўлди.

Логарифмик тенгламаларга доир кўриб ўтилган мисоллар уларни логарифмлар хоссаларидан фойдаланиб ечишда дастлабки тенгламанинг натижаси бўлувчи тенглама ҳосил бўлишини кўрсатади. Шунинг учун чет илдизларни аниқлашга имкон берувчи текширишлар зарур.

5-масала. Ушбу тенгламани ечинг:

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x=2\log_4(2x-1). \qquad (7)$$

△ Берилган тенгламани алмаштирамиз:

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x-2\log_4(2x-1)=0,$$
$$\log_4(2x-1)\cdot(\log_4 x-2)=0.$$

Тенгламанинг чап қисмидаги ҳар бир кўпайтувчини нолга тенглаб, қуйидагига эга бўламиз:

1) $\log_4(2x-1)=0$, бундан $2x-1=1$, $x_1=1$;

2) $\log_4 x-2=0$, бундан $\log_4 x=2$, $x_2=16$.

Текширишлар x нинг иккала қиймати дастлабки тенгламанинг илдизи эканини кўрсатади.

Жавоб. $x_1=1$, $x_2=16$. ▲

Агар (7) тенгламанинг иккала қисми $\log_4(2x-1)$ ифодага бўлинса, у ҳолда $x=1$ илдиз йўқолишини таъкидлаб ўтамиз.

Умуман *тенгламанинг иккала қисмини номаълум қатнашган ифодага бўлишда илдиз йўқолиши мумкин.* Шунинг учун иккала қисми умумий кўпайтувчини ўз ичига олган тенгламалар барча ҳадларини тенгламанинг бир қисмига ўтказиш ва кўпайтувчиларга ажратиш билан ечилади.

Тенгламаларни ечишда муҳими илдизларни йўқотмаслик керак, чет илдизларнинг бор-йўқлигини эса *текшириш* билан аниқлаш мумкин. Шунинг учун тенгламани алмаштиришда ҳар бир навбатдаги тенглама олдинги тенгламанинг натижаси эканини кузатиб бориш муҳимдир.

6-масала. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ 4y^2 + x - 12 = 0. \end{cases}$$

$\triangle$ Биринчи тенгламадан x ни y орқали ифодалаймиз: $\log_2\frac{x}{y}=\log_2 2$, $\frac{x}{y}=2$, $x=2y$. $x=2y$ ни системанинг иккинчи тенгламасига қўйиб, $4y^2+2y-12=0$ га эга бўламиз, бундан $y_1=\frac{3}{2}$, $y_2=-2$.

x нинг қийматларини топамиз: $x_1=3$, $x_2=-4$. Текшириш билан $\left(3;\ \frac{3}{2}\right)$ системанинг ечими эканига, $(-4;\ -2)$ эса чет ечим эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\left(3;\ \frac{3}{2}\right)$. $\blacktriangle$

Машқлар

111. Берилган икки тенгламадан қайси бири бошқасининг натижаси эканини аниқланг:

1) $x-3=0$ ва $x^2-5x+6=0$;
2) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=0$ ва $x^2-3x+2=0$.
3) $\log_8 x+\log_8(x-2)=1$ ва $\log_8 x(x-2)=1$;
4) $|x|=5$ ва $\sqrt{x^2}=5$.

Тенгламани ечинг (112—126):

112. 1) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$;
2) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$;
3) $\lg(x+\sqrt{3})+\lg(x-\sqrt{3})=0$;
4) $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$.

113. 1) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)=\lg 2$;
2) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)=\lg 5$;

3) $\log_7(2x^2-7x+6)-\log_7(x-2)=\log_7 x$;
4) $\log_3(x^3-x)-\log_3 x=\log_3 3$.

114. 1) $\frac{1}{2}\lg(x^2+x-5)=\lg 5x+\lg\frac{1}{5x}$;

2) $\frac{1}{2}\lg(x^2-4x-1)=\lg 8x-\lg 4x$.

115. 1) $\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$.

116. 1) $\log_7(x-1)\log_7 x=\log_7 x$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} x\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)=\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)$;
3) $\log_2(3x+1)\log_3 x=2\log_2(3x+1)$;
4) $\log_{\sqrt{3}}(x-2)\log_5 x=2\log_3(x-2)$.

117. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases}\lg x-\lg y=2,\\ x-10y=900;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2,\\ x^2y-2y+9=0.\end{cases}$

Тенгламани ечинг (118 — 120):

118. 1) $\log_5 x^2=0$; 2) $\log_4 x^2=3$; 3) $\log_3 x^3=0$; 4) $\log_4 x^3=6$;
5) $\lg x^4+\lg 4x=2+\lg x^3$; 6) $\lg x+\lg x^2=\lg 9x$.

119. 1) $\log_4(x+2)(x+3)+\log_4\frac{x-2}{x+3}=2$;

2) $\log_2\frac{x-1}{x+4}+\log_2(x-1)(x+4)=2$;

3) $\log_3 x^2-\log_3\frac{x}{x+6}=3$; 4) $\log_2\frac{x+4}{x}+\log_2 x^2=5$.

120. 1) $2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x}=1600$; 2) $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400$;

3) $\frac{1}{4+\lg x}+\frac{2}{2-\lg x}=1$; 4) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$.

121. Тенгламалар тенг кучлими ёки йўқми эканини аниқланг:
1) $2x-7=4x+5$ ва $2x+12=0$;
2) $\frac{1}{5}(2x-1)=1$ ва $\frac{3x-1}{8}=1$;
3) $x^2-3x+2=0$ ва $x^2+3x+2=0$;
4) $(x-2)^2=3(x-2)$ ва $x-2=3$;
5) $|2x-1|=3$ ва $2x-1=3$.

122. Тенгламаларни ечмасдан, уларнинг тенг кучлими ёки йўқми эканини аниқланг:
1) $2x-1=4-1{,}5x$ ва $3{,}5x-5=0$;
2) $x(x-1)=2x+5$ ва $x^2-3x-5=0$;

3) $2^{3x+1}=2^{-3}$ ва $3x+1=-3$;

4) $\log_3(x-1)=2$ ва $x-1=9$.

123. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} \lg x-\lg y=7, \\ \lg x+\lg y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{y}=4, \\ xy=2. \end{cases}$

Тенгламани ечинг (124—126):

124 *. 1) $\log_2 x-2\log_x 2=-1$; 2) $\log_2 x+\log_x 2=2{,}5$;
3) $\log_3 x+2\log_x 3=3$; 4) $\log_3 x-6\log_x 3=1$.

125 **. 1) $\log_{x^2} 9+\log_{\sqrt{x}} 4=2$; 2) $\log_{x^2} 16-\log_{\sqrt{x}} 7=2$.

126. ***. 1) $\lg(6\cdot 5^x-25\cdot 20^x)-\lg 25=x$;
2) $\lg(2^x+x+4)=x-x\lg 5$.

9-§. ЛОГАРИФМИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР

Логарифмик функцияларни ўрганишда $\log_a x<b$ ва $\log_a x\geqslant b$ кўринишдаги тенгсизликлар каралган эди. Анча мураккаб логарифмик тенгсизликларни ечишга мисоллар келтирамиз. Бундай тенгсизликларни ечишнинг оддий усули улардан нисбатан содда тенгсизликларга ёки айнан шу ечимлар тўпламига эга бўлган тенгсизликлар системасига ўтишдан иборат.

1-масала. Ушбу

$$\lg(x+1)\leqslant 2 \tag{1}$$

тенгсизликни ечинг.

△ Берилган тенгсизликнинг ўнг қисми x нинг барча қийматларида маънога эга, чап қисми эса $x+1>0$ да, яъни $x>-1$ да маънога эга. $x>-1$ оралиқ (1) *тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси* деб аталади. 10 асосли логарифмик функция ўсувчи бўлгани учун (1) тенгсизлик $x+1>0$ шартда $x+1\leqslant 100$ бўлса, бажарилади (чунки $2=\lg 100$). Шундай қилиб, (1) тенгсизлик

$$\begin{cases} x>-1, \\ x+1\leqslant 100 \end{cases} \tag{2}$$

тенгсизликлар системасига тенг кучли, яъни (1) тенгсизлик ва (2) система айни бир ечимлар тўпламига эга. (2) системани ечиб, $-1<x\leqslant 99$ ни топамиз. ▲

2-масала. Ушбу

$$\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\leqslant 1 \tag{3}$$

тенгсизликни ечинг.

△ Логарифмик функция аргументнинг мусбат қийматларида аниқланган, шунинг учун тенгсизликнинг чап қисми $x-3>0$ ва $x-2>0$ да маънога эга.

Демак, бу тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси $x>3$ оралиқдир. Логарифмнинг хоссасига кўра (3) тенгсизлик $x>3$ да

$$\log_2(x-3)(x-2) \leqslant \log_2 2 \qquad (4)$$

тенгсизликка тенг кучлидир. 2 асосли логарифмик функция ўсувчи функциядир. Шунинг учун (4) тенгсизлик $(x-3)(x-2) \leqslant 2$ бўлса, $x>3$ да бажарилади. Шундай қилиб, дастлабки (3) тенгсизлик ушбу

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leqslant 2, \\ x>3 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасига тенг кучлидир.

Бу системанинг биринчи тенгсизлигини ечиб, $x^2-5x+4 \leqslant 0$ ни ҳосил қиламиз, бундан $1 \leqslant x \leqslant 4$. Бу кесмани $x>3$ оралиқ билан устма-уст қўйиб, $3<x\leqslant 4$ ни ҳосил қиламиз (14- расм). ▲

3- м а с а л а *. Ушбу

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant -4 \qquad (5)$$

тенгсизликни ечинг.

△ Тенгсизликнинг аниқланиш соҳаси ушбу

$$x^2+2x-8>0$$

шартдан топилади. (5) тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 16.$$

$\frac{1}{2}$ асосли логарифмик функция камаювчи функция бўлгани сабабли тенгсизликнинг аниқланиш соҳасидаги барча x лар учун қуйидагига эга бўламиз:

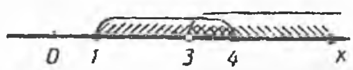
$$x^2+2x-8 \leqslant 16.$$

Шундай қилиб, дастлабки (5) тенгсизлик $\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-8 \leqslant 16 \end{cases}$

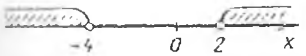
ёки $\begin{cases} x^2+2x-8>0, \\ x^2+2x-24 \leqslant 0 \end{cases}$

тенгсизликлар системасига тенг кучлидир.

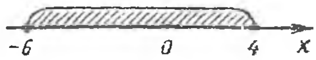
Биринчи квадрат тенгсизликни ечиб, $x<-4$, $x>2$ га эга бўламиз (15- расм). Иккинчи квадрат тенгсизликни ечиб, $-6\leqslant$



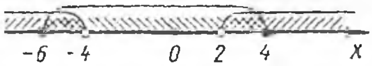
14- расм



15- расм



16- расм



17- расм

$\leqslant x\leqslant 4$ га эга бўламиз (16- расм). Демак, системанинг иккала тенгсизлиги $-6\leqslant x<-4$ да ва $2<x\leqslant 4$ да бир вақтда бажарилади (17- расм).

Жавоб. $-6\leqslant x<-4$, $2<x\leqslant 4$. ▲

Машқлар

127. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\lg(3x-2)$; 2) $y=\log_2(7-5x)$;

3) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)$; 4) $y=\log_7(4-x^2)$.

Тенгсизликни ечинг (128—130):

128. 1) $\log_3(x+2)<3$; 2) $\log_8(4-2x)\geqslant 2$;

3) $\log_3(x+1)<-2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\geqslant -2$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(4-3x)\geqslant -1$; 6) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5x)<-2$.

129. 1) $\lg x>\lg 8+1$; 2) $\lg x>2-\lg 4$;

3) $\log_2(x-4)<1$; 4) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

130. 1) $\log_{15}(x-3)+\log_{15}(x-5)<1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geqslant -2$.

---

131. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\log_5(x^2-4x+3)$;

2) $y=\log_6\frac{3x+2}{1-x}$.

Тенгсизликни ечинг (132—137):

132. 1) $\log_5\frac{3x-2}{x^2+1}>0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x^2+3}{x-7}<0$;

3) $\lg(3x-4) < \lg(2x+1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) > \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

133. 1) $\log_8(x^2-4x+3) < 1$; 2) $\log_6(x^2-3x+2) \geqslant 1$;

3) $\log_3(x^2+2x) > 1$; 4) $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2{,}5x+7) < -1$.

134. 1) $\lg(x^2-8x+13) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-5x+7) < 0$;

3) $\log_2(x^2+2x) < 3$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geqslant -3$.

135. 1) $\log_{0.2}x - \log_5(x-2) < \log_{0.2}3$;

2) $\lg x - \log_{0.1}(x-1) > \log_{0.1}0{,}5$.

136. 1) $\log^2_{0.2}x - 5\log_{0.2}x < -6$;

2) $\log^2_{0.1}x + \log_{0.1}x > 4$.

137*. 1) $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} < 1$;

2) $\log_3(2-3^{-x}) < x+1-\log_3 4$;

3) $\log_{x^2-3}(4x+7) > 0$;

4) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6}-2x) < 0$.

II БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Ҳисобланг (138—142):

138. 1) $\log_{15}225$; 2) $\log_4 256$;

3) $\log_3\frac{1}{243}$; 4) $\log_7\frac{1}{343}$.

139. 1) $\log_{\frac{1}{4}}64$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}8$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{64}$;

140. 1) $\log_{11}1$; 2) $\log_7 7$; 3) $\log_{16}64$; 4) $\log_{27}9$.

141. 1) $(0{,}1)^{-\lg 0{,}3}$; 2) $10^{-\lg 4}$;

3) $5^{-\log_5 3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-\log_6 4}$.

142. 1) $4\log_{\frac{1}{2}}3 - \frac{2}{3}\log_{\frac{1}{2}}27 - 2\log_{\frac{1}{2}}6$;

2) $\frac{2}{3}\lg 0{,}001 + \lg\sqrt[3]{1000} - \frac{3}{5}\lg\sqrt{10000}$.

143. Микрокалькулятор ёрдамида ҳисобланг:

1) $\log_8 7$; 2) $\log_3 12$; 3) $\log_{1,3}0{,}17$; 4) $\log_{0.3}8{,}1$

144. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\log_4 x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

Берилган функциялардан қайсилари ўсувчи функция, қайсилари камаювчи функция? x нинг қандай қийматларида ҳар бир функция мусбат қийматлар, манфий қийматлар, нолга тенг қиймат қабул қилади?

145. Функция ўсувчими ёки камаювчими эканини аниқланг:

1) $y=\log_{0.2} x$; 2) $y=\log_{\sqrt{5}} x$;

3) $y=\log_{\frac{1}{e}} x$; 4) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$.

146. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\log_3 x=5-x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=3x$.

147. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\log_7(5-2x)$; 2) $y=\log_2(x^2-2x)$.

Тенгламани ечинг (148—150):

148. 1) $\log_3(3x-1)=2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x)=-2$;

3) $2\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-x)$; 4) $\lg(x^2-2)=\lg x$.

149. 1) $\lg(x^2-2x)=\lg 30-1$;
2) $\log_3(2x^2+x)=\log_3 6-\log_3 2$;
3) $\lg^2 x-3\lg x=4$;
4) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6=0$.

150. 1) $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$;
2) $\log_3(5-x)+\log_3(-1-x)=3$;
3) $\lg(x-2)+\lg x=\lg 3$;
4) $\log_{\sqrt{6}}(x-1)+\log_{\sqrt{6}}(x+4)=\log_{\sqrt{6}} 6$.

Тенгсизликни ечинг (151—153):

151. 1) $\log_2(x-5)\leqslant 2$;
2) $\log_3(7-x)>1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}}(3-5x)<-3$.

152. 1) $\log_3(5-4x)<\log_3(x-1)$;
2) $\log_{0.3}(2x+5)\geqslant\log_{0.3}(x+1)$.

153. 1) $\lg(x^2+2x+2)<1$;
2) $\log_3(x^2+7x-5)>1$.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КЎРИНГ!

1. Ҳисобланг: $\log_5 125$; $\lg 0{,}01$; $2^{\log_2 3}$; $3^{2\log_3 7}$; $\log_2 68 - \log_2 17$.

2. Функциянинг графигини схематик равишда ясанг:

$$y = \log_{0,2} x; \qquad y = \log_2 x.$$

3. Сонларни таққосланг:

$$\log_{0,2} 3 \text{ ва } \log_{0,2} 2{,}5; \ \log_2 0{,}7 \text{ ва } \log_2 1{,}2.$$

4. Тенгламани ечинг:

$$\log_5(3x+1) = 2;$$
$$\log_3(x+2) + \log_3 x = 1;$$
$$\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x+3).$$

5. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = \ln 3, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$$

6. Тенгсизликни ечинг:

$$\log_3(x-1) \leqslant 2; \quad \log_{\frac{1}{5}}(2-x) > -1.$$

154. Ҳисобланг:

1) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; 2) $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{25\sqrt[4]{5}}$; 3) $2^{2-\log_2 5}$;

4) $3{,}6^{\log_{3,6} 10+1}$; 5) $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8$;

6) $\log_2 \log_2 \log_2 2^{16}$.

155. x нинг қандай қийматларида тенгсизлик тўғри бўлади:

1) $\log_x 8 < \log_x 10$; 2) $\log_x \frac{3}{4} < \log_x \frac{1}{2}$?

156. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\log_3 x = \frac{3}{x}$; 2) $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Тенгламани ечинг (157—162):

157. 1) $3^{4x} = 10$; 2) $2^{3x} = 3$; 3) $1{,}3^{3x-2} = 3$;

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5+4x} = 1{,}5$; 5) $16^x - 4^{x+1} - 14 = 0$;

6) $25^x + 2 \cdot 5^x - 15 = 0$.

158. 1) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$; 3) $\log_3 x \cdot \log_2 x = 4\log_3 2$;

2) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$; 4) $\log_5 x \cdot \log_3 x = 9\log_5 3$.

159. 1) $\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)=0$;

2) $\log_5(x^2-12)-\log_5(-x)=0$;

3) $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=2$;

4) $\lg(x+6)-\lg\sqrt{2x-3}=\lg 4$.

160. 1) $\log_{\sqrt{2}}x+4\log_4 x+\log_8 x=13$;

2) $\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$.

161. 1) $\log_{\frac{1}{x}}5+\log_{\frac{1}{x^2}}12+\frac{1}{2}\log_x 3=1$;

2) $\frac{1}{2}\log_x 7-\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}3-\log_{x^2}28=1$.

162. 1) $\log_2\frac{2}{x-1}=\log_2 x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{10}{7-x}=\log_{\frac{1}{2}}x$;

3) $\lg\frac{x+8}{x-1}=\lg x$; 4) $\lg\frac{x-4}{x-2}=\lg x$.

163. Тенгсизликни ечинг:

1) $\log_{\sqrt{6}}(x-4)+\log_{\sqrt{6}}(x+1)\leqslant 2$;

2) $\log_{3\sqrt{2}}(x-5)+\log_{3\sqrt{2}}(x+12)\leqslant 2$;

3) $\log_3(8x^2+x)>2+\log_3 x^2+\log_3 x$;

4) $\log_2 x+\log_2(x-3)>\log_2 4$;

5) $\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geqslant-1$;

6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+10)+\log_{\frac{1}{\sqrt{7}}}(x+4)>-2$.

164*. Агар мусбат сонлар кетма-кетлиги геометрик прогрессия бўлса, у ҳолда уларнинг бир хил асос бўйича логарифмлари арифметик прогрессия ташкил этишини исботланг.

165*. Агар геометрик прогрессия кетма-кет учта ҳадининг йиғиндиси 62 га, уларнинг ўнли логарифмлари йиғиндиси 3 та тенг бўлса, шу ҳадларни топинг.

166*. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\frac{1}{\log_2 x}$; 2) $y=\frac{1}{\ln x}$.

Тенгламани ечинг (167—169):

167**. 1) $x^{\lg 9}+9^{\lg x}=6$; 2) $x^{3\lg^3 x-\frac{2}{3}\lg x}=100\sqrt[3]{10}$.

168**. 1) $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$;

2) $1+2\log_{x+2}5=\log_5(x+2)$.

169**. 1) $\log_2(2x-5)-\log_2(2^x-2)=2-x$;

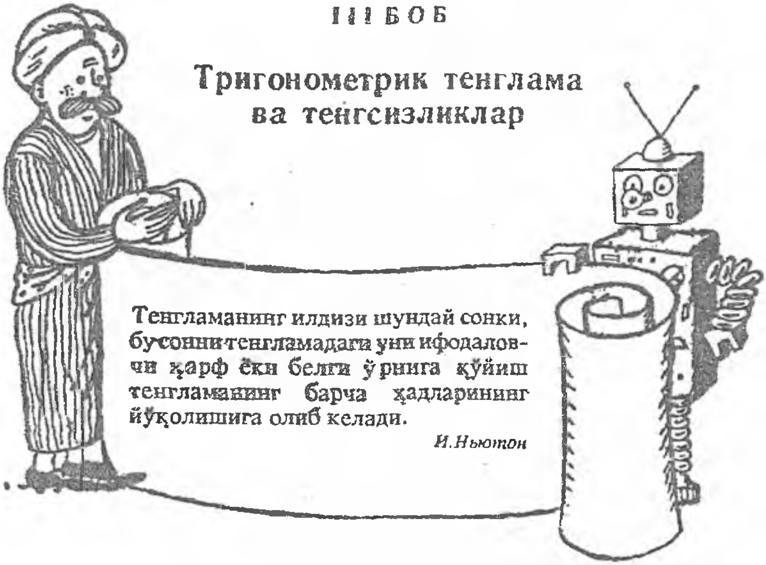
2) $\log_{1-x}(3-x)=\log_{3-x}(1-x)$.

170**. Тенгсизликни ечинг.

1) $\log_{\frac{1}{3}}(2^{x+2}-4^x)\geqslant-2$; 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant 2$.

III БОБ

Тригонометрик тенглама ва тенгсизликлар



10-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФОРМУЛАЛАР (ТАКРОРЛАШ)

Алгебра курсида градусларда ёки радианларда ифодаланган ихтиёрий бурчакнинг *синуси, косинуси* ва *тангенси* қаралган эди. Ўша ернинг ўзида тригонометрик ифодаларни шакл алмаштиришда фойдаланиладиган асосий формулалар исботланган эди. Шу формулаларни эслатиб ўтамиз.

1. Асосий тригонометрик айният:

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.} \qquad (1)$$

2. Синус, косинус, тангенс ва котангенс орасидаги боғланишлар:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.} \qquad (2)$$

Ньютон Исаак (1643—1727) — инглиз математиги, физиги, механиги, астрономи; хозирги замон механикасининг асосчиси; у немис математиги Г. Лейбниц билан бир вақтда дифференциал ва интеграл ҳисобини ишлаб чиққан.

3. Қўшиш формулалари:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}} \qquad (3)$$

4. Иккиланган бурчак синуси ва косинуси формулалари:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.} \qquad (4)$$

5. Келтириш формулалари.

Синус учун:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha.\end{gathered}} \qquad (5)$$

Косинус учун

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.\end{gathered}} \qquad (6)$$

Тангенс ва котангенс учун:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha,\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha,\\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha.\end{gathered}} \qquad (7)$$

Келтириш формулаларини ёдда сақлаш шарт эмас. Улардан исталган бирини ёзишда қуйидаги *қоидаларга* асосланиш мумкин:

1) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ шартда формуланинг чап қисми қандай ишорага эга бўлса, ўнг қисмига ҳам шундай ишора қўйилади.

2) Агар формуланинг чап қисмида бурчак $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ёки $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ га тенг бўлса, синус косинусга, тангенс котангенсга алмашади ва аксинча. Агар бурчак $\pi\pm\alpha$ га тенг бўлса, алмаштириш юз бермайди.

Масалан, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ учун келтириш формуласини шу қоидалар ёрдамида қандай қилиб ҳосил қилиш мумкинлигини кўрсатамиз. Биринчи қоида бўйича формуланинг ўнг қисмига «—» белгисини қўйиш керак, чунки агар $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\alpha<\pi$, косинус эса иккинчи чоракда манфийдир. Иккинчи қоида бўйича косинусни синусга алмаштириш керак, демак, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

6. $(-\alpha)$ **бурчакнинг синуси, косинуси, тангенси формулалари:**

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha. \qquad (8)$$

7. $\alpha+2\pi n$ **бурчакнинг синуси ва косинуси,** $\alpha+\pi n$, $n\in Z$ **бурчакнинг тангенси формулалари:**

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha,\\ \operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha,\ n\in Z.\end{gathered}} \qquad (9)$$

(1) — (9) формулаларни қўллашга доир бир нечта мисол келтирамиз:

1-масала. Агар $\sin\alpha=-0{,}8$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$ ни ҳисобланг.

△ Аввал $\cos\alpha$ ни топамиз. (1) формуладан $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-(-0{,}8)^2=0{,}36$. Учинчи чоракда $\cos\alpha<0$ бўлгани учун $\cos\alpha=-0{,}6$. (2) формулаларга кўра $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0{,}8}{-0{,}6}=\frac{4}{3}$ ни топамиз. ▲

2- м а с а л а. Ифодани соддалаштиринг: $\frac{\sin 3\alpha \cos\alpha + \cos 3\alpha \sin\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$.

$\triangle$ (1), (3) ва (4) формулалардан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{\sin 3\alpha \cos\alpha + \cos 3\alpha \sin \alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{\sin(3\alpha + \alpha)}{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2\sin 2\alpha. \blacktriangle$$

3- м а с а л а. $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$ ни ҳисобланг.

$\triangle$ (8) ва (9) формулалардан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\sin\frac{41\alpha}{6} = -\sin\left(6\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6}.$$

Келтириш формулаларига кўра қуйидагини топамиз:

$$-\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ж а в о б. $\sin\left(-\frac{41\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. $\blacktriangle$

М а ш қ л а р

171. 60°; 45°; 120°; 135°; 270°; 720° бурчакларни радиан ўлчовларда ифодаланг.

172. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $\frac{7\pi}{2}$; 3π; $\frac{11}{4}\pi$ бурчакларни градус ўлчовларда ифодаланг.

173. Агар

1) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos\alpha = 1$;

4) $\cos\alpha = 0$; 5) $\sin\alpha = -1$; 6) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

бўлса, P (1,0) нуқтани α бурчакка буришдан ҳосил бўлган нуқталарни бирлик айланада тасвирланг.

174. Ҳисобланг:

1) $\sin\alpha$, бунда $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\cos\alpha$, бунда $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \pi < \pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha$, бунда $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha$, бунда $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

175. Агар $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ ва $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $\cos\beta=\frac{5}{13}$ ва $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\sin(\alpha+\beta)$ни ҳисобланг.

176. Агар $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бўлса, $\sin 2\alpha$ ни ҳисобланг.

Ҳисобланг (177—178):

177. 1) $\sin 405°-\cos 315°$; 2) $\cos 690°-\sin 780°$;

3) $\sin\frac{11}{6}\pi+\cos\frac{5}{3}\pi$; 4) $\cos\frac{7}{4}\pi+\sin\frac{7}{4}\pi$.

178. 1) $\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$; 2) $\cos\frac{5}{4}\pi$; 3) $\operatorname{tg}\frac{11}{3}\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{7}{4}\pi$; 5) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$; 6) $\sin\frac{19}{4}\pi$.

Ифодани соддалаштиринг (179—180):

179. 1) $\frac{\sin(-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}{1+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\sin(2\pi+\alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)+1}$.

180. 1) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-1}$;

4) $\frac{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha-1}$; 5) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 6) $\frac{\cos^2 2\alpha}{1+\cos 4\alpha}$.

181. Айниятни исботланг:

1) $\left(1+\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

2) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$;

3) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha=2\cos(\alpha-\beta)$;

4) $\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\cdot\sin 2\beta=-2\sin(\alpha-\beta)$.

---

182. Ўткир бурчакнинг синуси $\frac{15}{17}$ га тенг. Шу бурчакка қўшни бурчакнинг косинусини топинг.

183. Учбурчак бурчагининг косинуси $\frac{9}{41}$ га тенг. Учбурчакнинг шу учидаги берилган бурчагига қўшни бурчакнинг синусини топинг.

184. Айниятни исботланг:

1) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\cos^2\alpha$; 3) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

185.** Ҳисобланг:

1) $\sin 575^\circ\cdot\cos 845^\circ-\cos 1405^\circ\cdot\sin 1675^\circ-$
$-\operatorname{tg} 215^\circ\cdot\operatorname{tg} 685^\circ-\operatorname{tg}^2 35^\circ$;

2) $\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7$;

3) $4\sin 18^\circ\cdot\sin 306^\circ$; 4) $\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{5\pi}{7}$.

186. Соддалаштиринг:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

187. Ифодани соддалаштиринг ва унинг сон қийматини топинг:

1) $\frac{\sin\left(\frac{19\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(7\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\alpha-\pi)}$, бунда $\alpha=\frac{5}{6}\pi$;

2) $\frac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)-\operatorname{tg}(4\pi-\beta)}{1+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\operatorname{tg}\beta}$, бунда $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{12}$.

188. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{2-\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$; 2) $\frac{2\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos(-\alpha)+\sin\alpha}-\frac{2-3\sin^2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

189*. Айниятни исботланг:

1) $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1-\sin\alpha$;

2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$;

3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$; 4) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

190.** Агар $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ва $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ бўлса, у ҳолда $\sin(\alpha+\beta)<$
$<\sin\alpha+\sin\beta$ бўлишини исботланг.

191.** Ифоданинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

1) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\cos^2\alpha$;

2) $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

192 **. Айниятни исботланг:

1) $\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{\beta}{2}$;

2) $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

193 *. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$.

11-§. СИНУСЛАР ЙИҒИНДИСИ ВА АЙИРМАСИ. КОСИНУСЛАР ЙИҒИНДИСИ ВА АЙИРМАСИ

1-масала. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Қўшиш формуласи ва иккиланган бурчак синуси формуласидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\right.$$
$$\left.+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$
$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.\ \blacktriangle$$

Агар *синуслар йиғиндиси формуласи*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (1)$$

дан фойдаланилса, шу масалани соддароқ ечиш мумкин. Шу формула ёрдамида қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$
$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Энди (1) формуланинг тўғрилигини исботлаймиз.

○ $\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=y$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ ва шунинг учун $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$
$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=$
$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

(1) формула билан бир қаторда қуйидаги *синуслар айирмаси формуласи, косинуслар йиғиндиси* ва *айирмаси формулаларидан* ҳам фойдаланилади:

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},}\qquad (2)$$

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},}\qquad (3)$$

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\qquad (4)$$

(3) ва (4) формулалар ҳам (1) формуланинг исботланишига ўхшаш исботланади; (2) формула β ни $-\beta$ га алмаштириш билан (1) формуладан ҳосил қилинади (*буни мустақил исботланг*).

2- масала. $\sin 75°+\cos 75°$ни ҳисобланг.

$$\triangle \sin 75°+\cos 75°=\sin 75°+\sin 15°=$$

$$=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=$$

$$=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}. \ \blacktriangle$$

3- масала. $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ ни кўпайтмага алмаштиринг.

$$\triangle\ 2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right). \ \blacktriangle$$

4*- масала. $\sin\alpha+\cos\alpha$ ифоданинг энг кичик қиймати $-\sqrt{2}$ га, энг катта қиймати эса $\sqrt{2}$ га тенг эканини исботланг.

$\triangle$ Берилган ифодани кўпайтмага алмаштирамиз:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Косинуснинг энг кичик қиймати -1 га, энг катта қиймати эса 1 га тенг бўлгани учун берилган ифоданинг энг кичик қиймати $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$ га, энг катта қиймати эса $\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ га тенг. $\blacktriangle$

Машқлар

194. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$;

3) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

4) $\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$.

195. Ҳисобланг:

1) $\cos 105^\circ+\cos 75^\circ$; 2) $\sin 105^\circ-\sin 75^\circ$;

3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\cos\frac{11\pi}{1}-\cos\frac{5\pi}{12}$;

5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$; 6) $\sin 105^\circ+\sin 165^\circ$.

196. Кўпайтмага алмаштиринг:

1) $1+2\sin\alpha$; 2) $1-2\sin\alpha$;

3) $1+2\cos\alpha$; 4) $1+\sin\alpha$.

197. Айниятни исботланг:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha$; 2) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

198. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Айниятни исботланг (199—200):

199. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$.

200. 1) $\frac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

201. Кўпайтма кўринишида ёзинг:

1) $\cos 22^\circ+\cos 24^\circ+\cos 26^\circ+\cos 28^\circ$;

2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

202 *. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ айниятни исботланг ва ҳисобланг:

1) $\operatorname{tg}267°+\operatorname{tg}93°$; 2) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$.

203 **. Кўпайтувчиларга ажратинг:

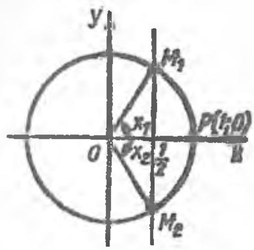
1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$;
2) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$;
3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$;
4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

12-§. $\cos x=a$ ТЕНГЛАМА

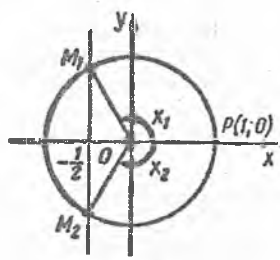
Косинуснинг қийматлари $[-1;\ 1]$ оралиқда жойлашганлиги, яъни $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$ экани алгебра курсидан маълум. Шунинг учун агар $|a|>1$ бўлса, у ҳолда $\cos x=a$ тенглама илдизга эга эмас. Масалан, $\cos x=-1{,}5$ тенглама илдизга эга эмас.

1-масала. $\cos x=\frac{1}{2}$ тенгламани ечинг.

△ $\cos x$ — бирлик айлананинг $P(1;\ 0)$ нуқтани координата боши атрофида x бурчакка буриш билан ҳосил қилинган нуқтаси абсциссасидир. $\frac{1}{2}$ га тенг абсциссага айлананинг иккита нуқтаси: M_1 ва M_2 эга (18-расм). $\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$ бўлгани учун M_1 нуқта $P(1;\ 0)$ нуқтадан $x_1=\frac{\pi}{3}$ бурчакка, шунингдек, $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, бунда $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ бурчакларга буриш билан ҳосил қилинади. M_2 нуқта $P(1;0)$ нуқтадан $x_2=-\frac{\pi}{3}$ бурчакка, шунингдек, $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, бунда $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ бурчакларга буриш билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, $\cos x=\frac{1}{2}$ тенгламанинг ҳамма илдизларини $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ формулалар бўйича топиш



18-расм



19-расм

мумкин экан. Бу икки формула ўрнига одатда қуйидаги битта формуладан фойдаланилади:

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z. \ \blacktriangle$$

2- масала. $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\frac{1}{2}$ га тенг абсциссага айлананинг иккита нуктаси: M_1 ва M_2 эга (19- расм) $-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$ бўлгани учун бурчак $x_1=\frac{2\pi}{3}$ ва шунинг учун бурчак $x_2=-\frac{2\pi}{3}$. Демак, $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламанинг барча илдизларини $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$ формула бўйича топиш мумкин.

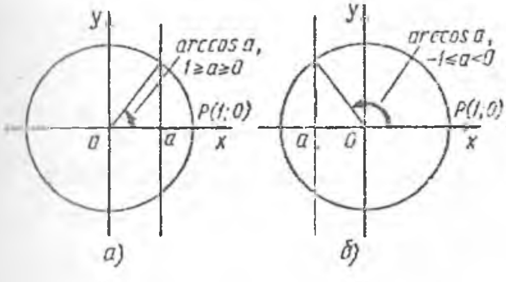
Шундай қилиб, $\cos x=\frac{1}{2}$ ва $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламаларнинг ҳар бири чексиз кўп илдизга эга. $0\leqslant x\leqslant\pi$ кесмада бу тенгламаларнинг ҳар бири фақат битта илдизга эга: $x_1=\frac{\pi}{3}$ сон $\cos x=\frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизи ва $x_1=\frac{2\pi}{3}$ сон $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизи. $\frac{\pi}{3}$ сони $\frac{1}{2}$ *сонининг арккосинуси деб аталади ва бундай ёзилади:* $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ сони эса $\left(-\frac{1}{2}\right)$ *сонининг арккосинуси* деб аталади ва бундай ёзилади: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Умуман $\cos x=a$, бунда $-1\leqslant a\leqslant 1$ тенглама $0\leqslant x\leqslant\pi$ кесмада фақат битта илдизга эга. Агар $a\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда илдиз $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда жойлашади; агар $a<0$ бўлса, у ҳолда илдиз $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ оралиқда жойлашади. Бу илдиз *a сонининг арккосинуси* деб аталади ва $\arccos a$ *каби белгиланади* (20- расм).

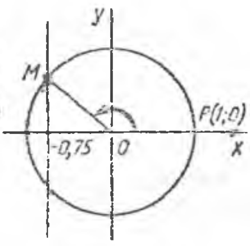
! Шундай қилиб, $a\in[-1,\ 1]$ *сонининг арккосинуси* деб косинуси a га тенг бўлган $\alpha\in[0;\ \pi]$ сонга айтилади:

$$\boxed{\arccos a=\alpha,\ \text{бунда}\ \cos\alpha=a\ \text{ва}\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi.} \quad (1)$$

Масалан, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, чунки $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $0\leqslant\frac{\pi}{6}\leqslant\pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, чунки $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $0\leqslant\frac{5\pi}{6}\leqslant\pi$.



20- расм



21- расм

1 ва 2- масалаларни ечишда қилингани каби $\cos x = a$ (бунда $|a| \leqslant 1$) *тенгламанинг барча илдизлари*

$$\boxed{x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n,\ n \in Z} \qquad (2)$$

формула билан ифодаланишини кўрсатиш мумкин.

3- масала. $\cos x = -0{,}75$ тенгламани ечинг.

△ (2) формулага кўра қуйидагини топамиз:

$$x = \pm \arccos\ (-0{,}75) + 2\pi n,\ n \in Z. \quad ▲$$

$\arccos\ (-0{,}75)$ нинг қийматини 21- расмда POM бурчакни транспортир билан ўлчаш ёрдамида тақрибан топиш мумкин. Арккосинуснинг тақрибий қийматини шунингдек махсус жадваллар ёки микрокалькулятор ёрдамида ҳам топиш мумкин.

Масалан, $\arccos\ (-0{,}75)$ нинг қийматини МК- 54 микрокалькуляторида қуйидаги программа бўйича ҳисоблаш мумкин:

0,75 $\boxed{/-/}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\underline{2{,}4188583.}$

Шундай қилиб, $\arccos(-0{,}75) \approx 2{,}42$.

Бу ҳолда микрокалькуляторнинг Р-ГРД-Г улагичи Р (радиан) ҳолатга ўрнатилган эди.

Агар ҳисоблашлар градус ўлчовида бажарилса, у ҳолда микрокалькуляторнинг Р-ГРД-Г улагичини Г (градус) ҳолатга ўрнатиш керак. Ҳисоблаш программаси аввалгича қолади:

0,75 $\boxed{/\approx/}$ $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{\cos^{-1}}$ $\underline{138{,}59038.}$

Шундай қилиб, $\arccos(-0{,}75) \approx 139°$.

4- масала*. $(4 \cos x - 1)(2 \cos 2x + 1) = 0$ тенгламани ечинг.

△ 1) $4\cos x - 1 = 0,\ \cos x = \frac{1}{4},\ x = \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$

2) $2\cos 2x+1=0$, $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$,

$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Жавоб. $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. ▲

Исталган $a\in[-1;\ 1]$ учун қуйидаги формула ўринли эканини исботлаш мумкин:

$$\boxed{\arccos(-a)=\pi-\arccos a.} \qquad (3)$$

Бу формула манфий сонлар арккосинуслари қийматларини мусбат сонлар арккосинуслари қийматлари орқали ифодалаш имконини беради.

Масалан:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

(2) формуладан $\cos x=a$ тенгламанинг $a=0$, $a=1$, $a=-1$ даги илдизларини қуйидаги анча содда формулалар билан топиш мумкин экани келиб чиқади:

$\cos x=0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$	(4)
$\cos x=1$	$x=2\pi n,\ n\in Z$	(5)
$\cos x=-1$	$x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$	(6)

5- масала. $\cos\frac{x}{3}=-1$ тенгламани ечинг.

△ (6) формулага кўра $\frac{x}{3}=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ га эга бўламиз, бундан $x=3\pi+6\pi n$, $n\in Z$. ▲

Машқлар

Ҳисобланг (204—205):

204. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\frac{1}{2}$; 5) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

205. 1) $2 \arccos 0 + 3 \arccos 1$; 2) $3 \arccos(-1) - 2 \arccos 0$;

3) $12 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 6 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

206. Сонларни таққосланг:

1) $\arccos \frac{1}{3}$ ва $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$ ва $\arccos(-1)$.

Тенгламани ечинг (207—210):

207. 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{1}{2}$;

3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

208. 1) $\cos x = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = \frac{3}{4}$;

3) $\cos x = -0{,}3$; 4) $\cos x = -0{,}2$.

209. 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$;

4) $2 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

---

210. 1) $\cos x \cdot \cos 3x = \sin 3x \cdot \sin x$;
2) $\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x = 0$.

211. Ифода маънога эгами ёки йўқми эканини аниқланг:

1) $\arccos(\sqrt{6} - 3)$; 2) $\arccos(\sqrt{7} - 2)$;

3) $\arccos(2 - \sqrt{10})$; 4) $\arccos(1 - \sqrt{5})$;

5) $\operatorname{tg}\left(2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$.

Тенгламани ечинг (212—213):

212. 1) $\cos^2 2x = 1 + \sin^2 2x$; 2) $4 \cos^2 x = 3$;

3) $2 \cos^2 x = 1 + 2 \sin^2 x$; 4) $2\sqrt{2} \cos^2 x = 1 + \sqrt{2}$.

213. 1) $(1 + \cos x)(3 - 2 \cos x) = 0$;
2) $(1 - \cos x)(4 + 3 \cos 2x) = 0$;
3) $(1 + 2 \cos x)(1 - 3 \cos x) = 0$;
4) $(1 - 2 \cos x)(2 + 3 \cos x) = 0$.

214 *. Тенгламани ечинг:

1) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos \frac{x+1}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

215**. $-1 \leqslant a \leqslant 1$ бўладиган a нинг барча қийматларида $\cos(\arccos a) = a$ тенглик бажарилишини исботланг. Ҳисобланг:

1) $\cos(\arccos 0{,}2)$; 2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{1}{3}\right)$;

5) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

216**. $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ да $\arccos(\cos\alpha) = \alpha$ эканини исботланг. Ҳисобланг:

1) $5\arccos\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $3\arccos(\cos 2)$;

3) $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $\arccos(\cos 4)$.

217*. Микрокалькулятор ёрдамида тенгламани ечинг:

1) $\cos x = 0{,}35$; 2) $\cos x = -0{,}27$.

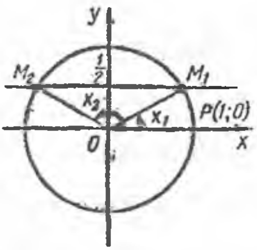
13-§. $\sin x = a$ ТЕНГЛАМА

Маълумки, синуснинг қийматлари $[-1;\ 1]$ оралиқда ётади, яъни $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$. Шунинг учун агар $|a| > 1$ бўлса, у ҳолда $\sin x = a$ тенглама илдизга эга эмас. Масалан, $\sin x = 2$ тенглама илдизга эга эмас.

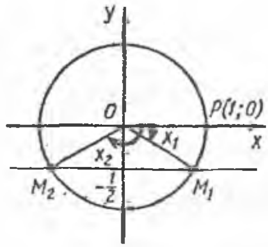
1-масала. $\sin x = \frac{1}{2}$ тенгламани ечинг.

△ $\sin x$ — бирлик айлананинг $P(1;\ 0)$ нуқтани координата боши атрофида x бурчакка буриш билан ҳосил қилинган нуқтасининг ординатаси эканини эслатиб ўтамиз. $\frac{1}{2}$ га тенг ординатага бирлик айлананинг иккита нуқтаси: M_1 ва M_2 эга (22-расм). $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ бўлгани учун M_1 нуқта $P(1;\ 0)$ нуқтани $x_1 = \frac{\pi}{6}$ бурчакка, шунингдек, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, бунда $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$ бурчакларга буриш билан ҳосил қилинади. M_2 нуқта $P(1;\ 0)$ нуқтани $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ бурчакка, шунингдек, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ бурчакларга, яъни $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, бунда $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$ бурчакларга буриш билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, $\sin x = \frac{1}{2}$ тенгламанинг барча илдизларини қуйидаги формулалардан топиш мумкин:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\quad k \in Z.$$



22- расм



23- расм

Бу формулалар битта формулага бирлаштирилади:

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z. \qquad (1)$$

Ҳақиқатан ҳам, агар n жуфт сон, яъни $n=2k$ бўлса, у ҳолда (1) формуладан $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ ни, агар n тоқ сон, яъни $n=2k+1$ бўлса, у ҳолда (1) формуладан $x=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ ни ҳосил қиламиз.

Жавоб. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$ ▲

2- масала. $\sin x=-\frac{1}{2}$ тенгламани ечинг.

△ $-\frac{1}{2}$ га тенг ординатага бирлик айлананинг иккита нуқтаси: M_1 ва M_2 эга (23- расм), бунда $x_1=-\frac{\pi}{6}$, $x_2=-\frac{5\pi}{6}$. Демак, $\sin x=-\frac{1}{2}$ тенгламанинг барча илдизларини $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$ формулалардан топиш мумкин.

Бу формулалар битта формулага бирлаштирилади:

$$x=(-1)^n\left(\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in Z. \qquad (2)$$

Ҳақиқатан ҳам, агар $n=2k$ бўлса, у ҳолда (2) формула бўйича $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ ни, агар $n=2k-1$ бўлса, у ҳолда (2) формула бўйича $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$ ни топамиз.

Жавоб. $x=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n,\ n\in Z.$ ▲

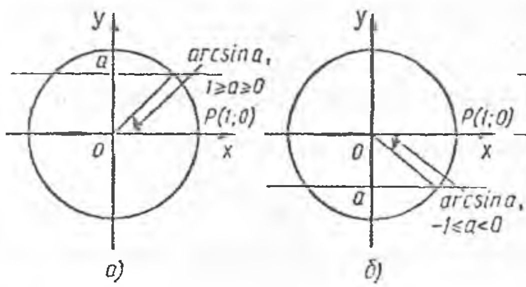
Шундай қилиб, $\sin x=\frac{1}{2}$ ва $\sin x=-\frac{1}{2}$ тенгламалардан ҳар бири чексиз кўп илдизга эга экан. $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ кесмада бу тенгламаларнинг ҳар бири фақат битта илдизга эга: $x_1 = \frac{\pi}{6}$ сон $\sin x = \frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизи ва $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ сон $\sin x = -\frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизи. $\frac{\pi}{6}$ сони $\frac{1}{2}$ *сонининг арксинуси* деб аталади ва бундай ёзилади: $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. $-\frac{\pi}{6}$ сони $-\frac{1}{2}$ сонининг арксинуси деб аталади ва бундай ёзилади: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Умуман $\sin x = a$ (бунда $-1 \leqslant a \leqslant 1$) тенглама $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ кесмада фақат битта илдизга эга. Агар $a \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда илдиз $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда ётади, агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда илдиз $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ оралиқда ётади. Бу илдиз *a сонининг арксинуси деб аталади ва* $\arcsin a$ *каби белгиланади* (24- расм).

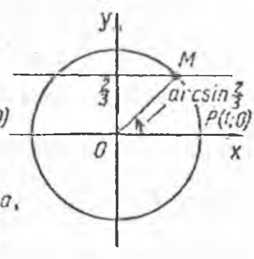
Шундай қилиб, $a \in [-1;\ 1]$ *сонининг арксинуси* деб синуси a га тенг бўлган $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ сонига айтилади:

$$\boxed{\arcsin a = \alpha, \text{ бунда } \sin\alpha = a \text{ ва } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.} \quad (3)$$

Масалан, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, чунки $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ва $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, чунки $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ва $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.



24- расм



25- расм

1- ва 2- масалаларни ечишда қилингани каби $\sin x = a$, (бунда $|a| \leqslant 1$) тенгламанинг илдизлари қуйидаги формула билан ифодаланишини кўрсатиш мумкин:

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.} \qquad (4)$$

3- масала. $\sin x = \frac{2}{3}$ тенгламани ечинг.

△ (4) формулага кўра $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$ ни топамиз. ▲

$\arcsin \frac{2}{3}$ нинг қийматини 25- расмдан *POM* бурчакни транспортир билан ўлчаш ёрдамида тақрибан топиш мумкин.

Арксинуснинг қийматини махсус жадваллар ёрдамида ёки микрокалькулятор ёрдамида топиш мумкин. Масалан, $\arcsin \frac{2}{3}$ нинг қийматини МК- 54 микрокалькуляторида қуйидаги программа бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$2\ \boxed{B\uparrow}\ 3\ \boxed{\div}\ \boxed{F}\ \boxed{\sin^{-1}}\ \underline{7{,}2972769 \cdot 10^{-1}}$$

Шундай қилиб, $\arcsin \frac{2}{3} \approx 0{,}73$. Бунда микрокалькуляторнинг Р-ГРД-Г улагичи Р (радиан) вазиятига ўрнатилган.

4- масала.* $(3 \sin x - 1)(2 \sin 2x + 1) = 0$ тенгламани ечинг.

△ 1) $3 \sin x - 1 = 0$, $\sin x = \frac{1}{3}$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

2) $2 \sin 2x + 1 = 0$, $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) +$

$$+ \pi n = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Жавоб. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. ▲

Исталган $a \in [-1;\ 1]$ учун қуйидаги формула ўринли эканини исботлаш мумкин:

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a.} \qquad (5)$$

Бу формула манфий сонлар арксинуслари қийматларини мусбат сонлар арксинуслари қийматлари орқали топиш имконини беради.

Масалан:

$$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Шуни таъкидлаймизки, (4) формуладан $\sin x = a$ тенгламанинг $a=0$, $a=1$, $a=-1$ даги илдизларини қуйидаги анча содда формулалар билан топиш мумкин экани келиб чиқади:

$\sin x = 0$	$x = \pi n,\ n \in Z$	(6)
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	(7)
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	(8)

5- масала. $\sin 2x = 1$ тенгламани ечинг.

△ (7) формулага кўра $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ га эга бўламиз, бундан $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.▲

Машқлар

Ҳисобланг (218—219):

218. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin \frac{1}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

219. 1) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$; 2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

3) $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

220. Сонларни таққосланг:

1) $\arcsin \frac{1}{4}$ ва $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$ ва $\arcsin(-1)$.

Тенгламани ечинг (221—224):

221. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\sin x = -\frac{1}{2}$.

222. 1) $\sin x = \frac{3}{4}$; 2) $\sin x = \frac{2}{7}$;

3) $\sin x = -\frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

223. 1) $\sin 3x = 1$; 2) $\sin 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$;

4) $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$; 6) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

---

224. 1) $\sin 4x\cos 2x = \cos 4x\sin 2x$;
2) $\cos 2x\sin 3x = \sin 2x\cos 3x$.

225. Ифода маънога эгами ёки йўқми эканини аниқланг:

1) $\arcsin(\sqrt{5}-2)$; 2) $\arcsin(\sqrt{5}-3)$;

3) $\arcsin(3-\sqrt{17})$; 4) $\arcsin(2-\sqrt{10})$;

5) $\operatorname{tg}\left(6\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Тенгламани ечинг (226—228):

226. 1) $1-4\sin x\cos x=0$; 2) $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$;

3) $1+6\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=0$; 4) $1-8\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}=0$.

227. 1) $1+\cos 5x\sin 4x=\cos 4x\sin 5x$;
2) $1-\sin x\cos 2x=\cos x\sin 2x$.

228. 1) $(2\sin x-1)(3\sin x+1)=0$;
2) $(4\sin x-3)(2\sin x+1)=0$;
3) $(2\sin 2x-1)(\sin 4x+1)=0$;
4) $(4\sin 3x-1)(2\sin x+3)=0$.

229 *. Тенгламани ечинг:

1) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$;

2) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$.

230 **. $-1\leqslant a\leqslant 1$ да $\sin(\arcsin a)=a$ эканини исботланг. Ҳисобланг:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{7}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi+\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

5) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

231 **. $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ да $\arcsin(\sin\alpha)=\alpha$ эканини исботланг.

Ҳисобланг:

1) $7\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\arcsin\left(\sin\frac{1}{2}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{7}\right)$; 4) $\arcsin(\sin 5)$.

232 *. Микрокалькулятор ёрдамида тенгламани ечинг:
1) $\sin x=0,65$; 2) $\sin x=-0,31$.

4- §. $\operatorname{tg} x = a$ ТЕНГЛАМА

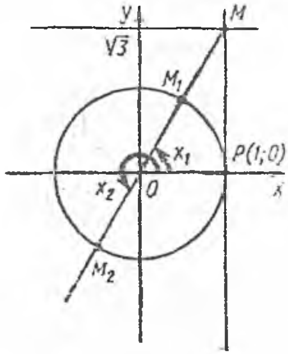
Маълумки, тангенс исталган ҳақиқий қийматни қабул қилиши мумкин. Шунинг учун $\operatorname{tg} x = a$ тенглама a нинг исталган қийматида илдизга эга.

1- масала. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ тенгламани ечинг.

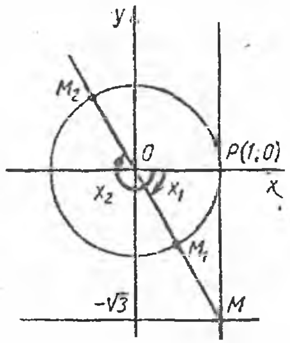
$\triangle$ Тангенслари $\sqrt{3}$ га тенг бурчакларни ясаймиз. Бунинг учун P нуқтадан PO га перпендикуляр қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз (26- расм) ҳамда $PM = \sqrt{3}$ кесмани қўямиз, M ва O нуқталардан тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ бирлик айланани иккита бир-бирига диаметрал қарама-қарши бўлган M_1 ва M_2 нуқталарда кесиб ўтади. Тўғри бурчакли учбурчак POM дан $\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} x_1$ ни топамиз, бундан $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Шундай қилиб, M_1 нуқта $(1, 0)$ нуқтани координаталар боши атрофида $\frac{\pi}{3}$ бурчакка ва, шунингдек, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ (бунда $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) бурчакларга буриш билан ҳосил бўлади.

M_2 нуқта $P(1; 0)$ нуқтани $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$ бурчакка ва, шунингдек, $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$ (бунда $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) бурчакларга буришдан ҳосил бўлади.

Шундай қилиб, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ тенгламанинг илдизларини $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in Z$ формулалардан топиш мумкин.



26- расм



27- расм

Бу формулалар битта формулага бирлаштирилади·

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z. \quad ▲$$

2-масала. $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ тенгламани ечинг

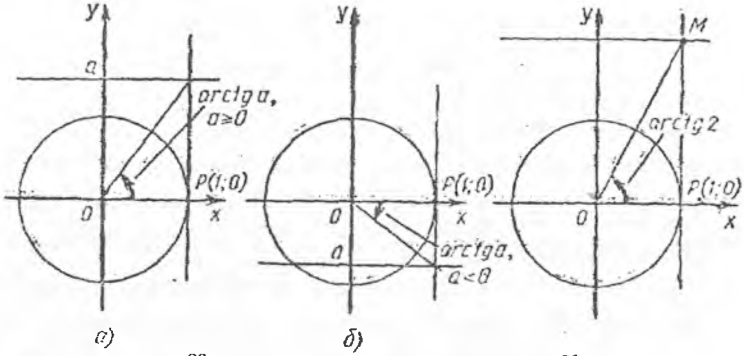
△ Тангенслари $-\sqrt{3}$ га тенг бўлган бурчаклар 27-расмда кўрсатилган, бунда $PM\perp PO$, $PM=\sqrt{3}$. Тўғри бурчакли POM учбурчакдан $\angle POM=\frac{\pi}{3}$ ни, яъни $x_1=-\frac{\pi}{3}$ ни топамиз. Шундай қилиб, M_1 нуқта $P(1;\ 0)$ нуқтани координаталар боши атрофида $x_1=-\frac{\pi}{3}$ бурчакка, ва шунингдек, $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$ (бунда $k=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$) бурчакларга буришдан ҳосил бўлади. M_2 нуқта $P(1;\ 0)$ нуқтани $x=-\frac{\pi}{3}+\pi(2k+1)$, $k\in Z$ бурчакларга буришдан ҳосил бўлади. Шунинг учун $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ тенгламанинг илдизларини

$$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$$

формуладан топиш мумкин. ▲

Шундай қилиб, $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ ва $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ тенгламаларнинг ҳар бири чексиз кўп илдизларга эга. $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ интервалда бу тенгламаларнинг ҳар бири фақат битта илдизга эга: $x_1=\frac{\pi}{3}$ сон $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ тенгламанинг илдизи ва $x_1=-\frac{\pi}{3}$ сон $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$ тенгламанинг илдизи. $\frac{\pi}{3}$ сон $\sqrt{3}$ сонининг *арктангенси* дейилади ва бундай ёзилади: $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$ сони $-\sqrt{3}$ сонининг арктангенси дейилади ва бундай ёзилади: $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$.

Умуман $\operatorname{tg} x=a$ тенглама исталган $a\in R$ учун $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ оралиқда битта илдизга эга. Агар $a\geqslant 0$ бўлса, илдиз $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда жойлашган: агар $a<0$ бўлса, $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ оралиқда жойлашган. Бу илдиз a сонининг *арктангенси* дейилади ва $\operatorname{arctg} a$ деб белгиланилади (28-расм).



а) б)

28- расм 29- расм

Шундай қилиб, *$a \in R$ сонининг арктангенси* деб, тангенси a сонига тенг бўлган $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ сонга айтилади.

$$\boxed{\operatorname{arctg} a=\alpha, \text{ агар } \operatorname{tg}\alpha=a \text{ ва } -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2} \text{ бўлса.}} \quad (1)$$

Масалан, $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, чунки $\operatorname{tg}=\frac{\pi}{4}$ ва $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, чунки $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ва $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$.

1- ва 2- масалаларни ечишда қилинганга ўхшаш тарзда кўрсатиш мумкин: $\operatorname{tg} x=a$ (бунда $a \in R$) *тенгламанинг барча илдизлари*

$$\boxed{x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n \in Z} \quad (2)$$

формула орқали ифодаланади.

3- масала. $\operatorname{tg} x=2$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ (2) формуладан $x=\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n \in Z$ ни топамиз. $\blacktriangle$

$\operatorname{arctg} 2$ нинг қийматини 29- расмдан POM бурчакни транспортир ёрдамида ўлчаб тақрибан топиш мумкин.

Арктангенснинг тақрибий қийматларини жадваллардан ёки микрокалькулятор ёрдамида топиш мумкин.

Масалан, $\operatorname{arctg} 2$ нинг қийматини МК- 54 да қуйидаги программа орқали топиш мумкин:

$$2 \quad \boxed{F} \quad \boxed{tg^{-1}} \quad \underline{1,1071486.}$$

Шундай килиб, $\operatorname{arctg} 2 \approx 1,11$.

4-масала *. $(\operatorname{tg} x+4)(\operatorname{ctg} x-\sqrt{3})=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ 1) $\operatorname{tg} x+4=0, \quad \operatorname{tg} x=-4, \quad x=\operatorname{arctg}(-4)+\pi n,\ n \in Z.$

x нинг бу қийматларида дастлабки тенгламанинг чап қисмидаги биринчи қавс нолга айланади, иккинчиси эса маъносини йўқотмайди, чунки $\operatorname{tg} x=-4$ тенгликдан $\operatorname{ctg} x=-\frac{1}{4}$ эканлиги келиб чиқади. Демак, x нинг топилган қийматлари дастлабки тенгламанинг илдизлари бўлар экан.

2) $\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}=0,\ \operatorname{ctg} x=\sqrt{3},\ \operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}},\ x=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n=$ $=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z.$

x нинг бу қийматлари ҳам дастлабки тенгламанинг илдизлари бўлар экан, чунки бунда тенгламанинг чап қисмидаги иккинчи қавс нолга тенг, биринчи қавс эса маъносини йўқотмайди.

Жавоб. $x=\operatorname{arctg}(-4)+\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in Z.$ ▲

Исталган $a \in R$ учун қуйидаги формула тўғри эканини исботлаш мумкин.

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a.} \qquad (3)$$

Бу формула манфий сонлар арктангенсларининг қийматларини мусбат сонлар арктангенсларининг қийматлари орқали ифодалаш имконини беради.

Масалан,

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg} 1=-\frac{\pi}{4}.$$

Машқлар

Ҳисобланг (233—234):

233. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

234. 1) $6 \operatorname{arctg}\sqrt{3}-4 \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
2) $2 \operatorname{arctg} 1+3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;
3) $3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

4) $5\,\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

235. Сонларни таққосланг:

1) $\mathrm{arctg}\,(-3)$ ва $\mathrm{arctg}\,2$; 2) $\mathrm{arctg}\,(-5)$ ва $\mathrm{arctg}\,0$.

Тенгламаларни ечинг (236—239):

236. 1) $\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\mathrm{tg}\,x = -\sqrt{3}$; 3) $\mathrm{tg}\,x = -\sqrt{3}$;

4) $\mathrm{tg}\,x = -1$; 5) $\mathrm{tg}\,x = 4$; 6) $\mathrm{tg}\,x = -5$.

237. 1) $\mathrm{tg}\,2x = 0$; 2) $\mathrm{tg}\,3x = 0$; 3) $1 + \mathrm{tg}\,\frac{x}{3} = 0$;

4) $\sqrt{3} + \mathrm{tg}\,\frac{x}{6} = 0$.

---

238. 1) $(\mathrm{tg}x - 1)(\mathrm{tg}x + \sqrt{3}) = 0$; 2) $(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x + 1)(\mathrm{tg}x - \sqrt{3}) = 0$;

3) $(\mathrm{tg}x - 2)(2\cos x - 1) = 0$. 4) $(\mathrm{tg}x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

5) $(\mathrm{tg}x + 4)\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$; 6) $\left(\mathrm{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\mathrm{tg}x - 1) = 0$.

239 *. 1) $\mathrm{arctg}\,(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\mathrm{arctg}\,(3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

240 **. Исталган a да $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,a) = a$ эканлигини исботланг. Ҳисобланг:

1) $\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\,2{,}1)$; 2) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,(-0{,}3))$;

3) $\mathrm{tg}\,(\pi - \mathrm{arctg}\,7)$; 4) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,6\right)$.

241 **. $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ да $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,\alpha) = \alpha$ эканлигини исботланг.

Ҳисобланг:

1) $3\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,0{,}5)$;

3) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,13)$.

242 *. Микрокалькулятор ёрдамида тенгламани ечинг:

1) $\mathrm{tg}\,x = 9$; 2) $\mathrm{tg}\,x = -7{,}8$.

15-§. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАРНИ ЕЧИШ.

Олдинги параграфларда энг содда тригонометрик тенгламалар $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\,x = a$ нинг илдизлари формулалари келтириб чиқарилган эди. Бу тенгламаларга бошқа тригонометрик тенгламалар ҳам келтирилади. Бундай тенгламаларнинг кўпчилигини ечиш учун тригонометрик ифодаларни алмаштириш формулалари-ни қўлланиш талаб қилинади. Тригонометрик тенгламаларни ечишга доир баъзи бир мисолларни кўрайлик.

1. Квадрат тенгламага келтириладиган тенглама

1-масала. $\sin^2 x+\sin x-2=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ Бу тенглама $\sin x$ га нисбатан квадрат тенглама. $\sin x=y$ деб белгилаб, $y^2+y-2=0$ тенгламани ҳосил қиламиз. Унинг илдизлари $y_1=1$, $y_2=-2$. Шундай қилиб, дастлабки тенгламанинг ечими энг содда $\sin x=1$ ва $\sin x=-2$ тенгламаларни ечишга келтирилди.

$\sin x=1$ тенглама $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ илдизларга эга; $\sin x=$ $=-2$ тенглама эса илдизларга эга эмас.

Жавоб. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

2-масала. $2\cos^2 x-5\sin x+1=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\cos^2 x$ ни $1-\sin^2 x$ га алмаштириб, қуйидагини топамиз:

$$2(1-\sin^2 x)-5\sin x+1=0 \text{ ёки } \sin^2 x+5\sin x-3=0.$$

$\sin x=y$ белгилаш киритиб, $2y^2+5y-3=0$ ни ҳосил қиламиз, бундан $y_1=-3$, $y_2=\frac{1}{2}$.

1) $\sin x=-3$ — тенглама илдизга эга эмас, чунки $|-3|>1$.

2) $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

Жавоб. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. ▲

3-масала*. $2\sin^2 x-\cos x-1=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ формуладан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2(1-\cos^2 x)-\cos x-1=0 \text{ ёки } 2\cos^2 x+\cos x-1=0.$$

$$\cos x=y,\ 2y^2-y-1=0,\ y_1=1,\ y_2=-\frac{1}{2}.$$

1) $\cos x=1$, $x=2\pi n$, $n\in Z$.

2) $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n=\pm(\pi-$ $-\arccos\frac{1}{2})+2\pi n=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2\pi n=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Жавоб. $x=2\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. ▲

4-масала. $\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x+1=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ бўлгани учун тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин:

$$\operatorname{tg} x-\frac{2}{\operatorname{tg} x}+1=0.$$

Тенгламанинг иккала қисмини $\operatorname{tg} x$ га кўпайтириб, қуйидагини оламиз:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$
$$\operatorname{tg} x = y, \ y^2 + y - 2 = 0, \ y_1 = 1, \ y_2 = -2.$$

1) $\operatorname{tg} x = 1, \ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z.$

2) $\operatorname{tg} x = -2, \ x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi n = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \ n \in Z.$

Шуни қайд қиламизки, агар $\operatorname{tg} x \neq 0$ ва $\operatorname{ctg} x \neq 0$ бўлса, дастлабки тенгламанинг чап қисми маънога эга бўлади. Топилган илдизлар учун $\operatorname{tg} x \neq 0$ ва $\operatorname{ctg} x \neq 0$ бўлгани сабабли, дастлабки тенглама $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ тенгламага тенг кучли.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \ n \in Z.$ ▲

5- масала. $3\cos^2 6x + 8 \sin 3x \cos x - 4 = 0$ тенгламани ечинг.

△ Ушбу $\sin^2 6x + \cos^2 6x = 1$, $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$ формулалардан фойдаланиб, тенгламани ўзгартирамиз:

$$3(1 - \sin^2 6x) + 4 \sin 6x - 4 = 0,$$
$$3 \sin^2 6x - 4 \sin 6x + 1 = 0.$$

$\sin 6x = y$ деб белгилаб, $3y^2 - 4y + 1 = 0$ тенгламани оламиз, бундан $y_1 = 1, \ y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\sin 6x = 1, \ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \ n \in Z.$

2) $\sin 6x = \frac{1}{3}, \ 6x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, \ x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6}, \ n \in Z.$

Жавоб. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \ x = \frac{(-1)^n}{6} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{6}, \ n \in Z.$ ▲

2. $a \sin x + b \cos x = c$ кўринишдаги тенгламалар

6- масала. $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ тенгламани ечинг.

△ Тенгламани $\cos x$ га бўлиб, қуйидагини оламиз: $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0, \ \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}, \ x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \ n \in Z.$ ▲

Бу масалани ечишда $2 \sin x - \cos x = 0$ тенгламанинг иккала қисми $\cos x$ га бўлинади. Тенгламани номаълум сон таркибида бўлган ифодага бўлганда илдизлар йўқолиши мумкинлигини эслатиб ўтамиз. Шунинг учун $\cos x = 0$ тенгламанинг илдизлари берилган тенгламанинг илдизлари бўлиш-бўлмаслигини текшириб кўриш керак. Агар $\cos x = 0$ бўлса, $2 \sin x - \cos x = 0$ тенгламадан $x = 0$ экани келиб чиқади. Бироқ $\sin x$ ва $\cos x$ лар $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ тенглик билан боғланганлиги сабабли улар бир вақтда нолга тенг бўла олмайди. Демак, $a \sin x + b \cos x = 0$ (бунда $a \neq 0$,

$b \neq 0$) тенгламани $\cos x$ (ёки $\sin x$) га бўлишда тенгламанинг илдизлари йўқолмайди.

7- масала. $2\sin x+\cos x=2$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$ формулалардан фойдаланиб ва тенгламанинг ўнг қисмини $2=2\cdot 1=$ $=2\left(\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\right)$ кўринишда ёзиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$3\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Бу тенгламани $\cos^2\frac{x}{2}$ га бўлиб, $3\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-4\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1=0$ ни оламиз. $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=y$ деб белгилаб, $3y^2-4y+1=0$ тенгламани ҳосил қиламиз, бундан $y_1=1$, $y_2=\frac{1}{3}$.

1) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1$, $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

2) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$, $\frac{x}{2}=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n$, $x=2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

Жавоб. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. $\blacktriangle$

8- масала*. $\sin 2x-\sin x-\cos x-1=0$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\sin 2x$ ни $\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$ айниятдан фойдаланиб, $\sin x+\cos x$ орқали ифодалаймиз. $\sin x+\cos x=t$ деб белгилаймиз, у ҳолда $\sin 2x=t^2-1$ ва тенглама $t^2-t-2=0$ кўринишини олади, бундан $t_1=-1$, $t_2=2$.

$$1)\ \sin x+\cos x=-1,\ 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=$$

$$=-\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2},\ 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0;\quad \cos\frac{x}{2}=0,$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in Z;$$

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}=-1,$$

$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

2) $\sin x+\cos x=2$ тенглама илдизларга эга эмас, чунки $\sin x\leqslant 1$, $\cos x\leqslant 1$ ва $\sin x=1$, $\cos x=1$ тенгликлар бир вақтда бажарилиши мумкин эмас.

Жавоб. $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. $\blacktriangle$

3. Чап қисмини кўпайтувчиларга ажратилиб ечиладиган тенгламалар

Ўнг қисми нолга тенг бўлган кўпгина тригонометрик тенгламаларни чап қисмини кўпайтувчиларга ажратилиб ечилади.

9- масала. $\sin 2x - \sin x = 0$ тенгламани ечинг.

△ Иккиланган бурчак синуси формуласидан фойдаланиб тенгламани $2\sin x \cos x - \sin x = 0$ кўринишда ёзиб оламиз.

Умумий кўпайтувчи $\sin x$ ни қавс ташқарисига чиқариб, қуйидагини оламиз:

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Жавоб. $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

10- масала. $\cos 3x + \sin 5x = 0$ тенгламани ечинг.

△ $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ келтириш формуласидан фойдаланиб, тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Косинуслар йиғиндиси формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Жавоб. $x = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, $x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

11- масала. $\sin 7x + \sin 3x = 3\cos 2x$ тенгламани ечинг.

△ Синуслар йиғиндиси формуласини қўллаб, тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$2\sin 5x\cdot\cos 2x = 3\cos 2x \text{ ёки}$$

$$2\sin 5x\cdot\cos 2x - 3\cos 2x = 0, \ \cos 2x\left(\sin 5x - \frac{3}{2}\right) = 0.$$

$\cos 2x = 0$ тенглама $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ илдизларга эга, $\sin 5x = \frac{3}{2}$ тенглама эса илдизга эга эмас.

Жавоб. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ▲

12- масала. $\cos 3x\cdot\cos x = \cos 2x$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x$

бўлгани учун, тенглама $\sin x \cdot \sin 3x = 0$ кўринишини олади.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin 3x = 0$, $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

πn кўринишдаги сонлар $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$ кўринишидаги сонлар ичида борлигини айтиб ўтамиз, чунки агар $n = 3k$ бўлса, у ҳолда $\frac{\pi n}{3} = \pi k$. Демак, илдизларнинг биринчи серияси иккинчисида ҳам мавжуд.

Жавоб. $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. ▲

Кўпинча тригонометрик тенгламани ечишдан ҳосил бўлган илдизларнинг иккита серияси умумий қисмга эга эканлигини эътиборга олиш қийин бўлади. Бундай ҳолларда жавобни иккита серия кўринишида қолдириш мумкин. Масалан, 12- масаланинг жавобини қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин эди:

$$x = \pi n, \ x = \frac{\pi n}{3}, \ n \in Z.$$

13- масала*. $(\operatorname{tg} x + 1)\left(2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3}\right) = 0$ тенгламани ечинг:

$\triangle$ 1) $\operatorname{tg} x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

x нинг бу қийматлари дастлабки тенгламанинг илдизлари бўлади, чунки бунда тенгламанинг чап қисмидаги биринчи қавс нолга тенг, иккинчиси эса маъносини йўқотмайди.

2) $2\cos\frac{x}{3} - \sqrt{3} = 0$, $\cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$,

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 6\pi n$, $n \in Z$.

x нинг бу қийматларида дастлабки тенгламанинг чап қисмидаги иккинчи қавс нолга тенг, биринчи қавс эса маънога эга эмас. Шунинг учун бу қийматлар дастлабки тенгламанинг илдизлари бўлмайди:

Жавоб. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. ▲

14- масала*. $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$ тенгламани ечинг.

$\triangle$ $\sin^2 x$ ни $\cos 2x$ орқали ифодалаймиз. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ бўлганлиги учун $\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, бундан $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Шунинг учун дастлабки тенгламани бундай ёзиб олиш мумкин:

$$3(1 - \cos 2x) + 2(1 - \cos^2 2x) = 5$$

ёки $2\cos^2 2x + 3\cos 2x = 0$, $\cos 2x(2\cos 2x + 3) = 0$.

1) $\cos 2x=0,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z;$

2) $\cos 2x=-\frac{3}{2}$ тенглама илдизларга эга эмас.

Жавоб. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$ ▲

Машқлар

Тенгламани ечинг (243—263):

243. 1) $\sin^2 x=\frac{1}{4}$; 2) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$;

3) $2\cos^2 x-\cos x-1=0$; 4) $2\sin^2 x+\sin x-1=0$;

5) $2\sin^2 x+\sin x-6=0$; 6) $2\cos^2 x+\cos x-6=0$.

244. 1) $2\cos^2 x-\sin x+1=0$; 2) $3\cos^2 x-\sin x-1=0$;

3) $4\sin^2 x-\cos x-1=0$; 4) $2\sin^2 x+3\cos x=0$.

245. 1) $\operatorname{tg}^2 x=2$; 2) $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x=2\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-4=0$;

5) $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+1=\sqrt{3}$; 6) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1=0$.

246. 1) $1+7\cos^2 x=3\sin 2x$; 2) $3+\sin 2x=4\sin^2 x$;

3) $\cos 2x+\cos^2 x+\sin x\cos x=0$;

4) $3\cos 2x+\sin^2 x+5\sin x\cos x=0$.

247. 1) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$; 2) $\cos x=\sin x$;

3) $\sin x=2\cos x$; 4) $2\sin x+\cos x=0$.

248. 1) $\sin x-\cos x=1$; 2) $\sin x+\cos x=1$;

3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$; 4) $\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}$.

249. 1) $\cos x=\cos 3x$; 2) $\sin 5x=\sin x$;

3) $\sin 2x=\cos 3x$; 4) $\sin x+\cos 3x=0$.

250. 1) $\cos 3x-\cos 5x=\sin 4x$; 2) $\sin 7x-\sin x=\cos 4x$;

3) $\cos x+\cos 3x=4\cos 2x$; 4) $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos 4x$.

---

251. 1) $(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})\left(2\sin\frac{x}{12}+1\right)=0$;

2) $\left(1-\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}\right)(1+\sqrt{3}\operatorname{tg} x)=0$;

3) $\left(2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\right)(2\operatorname{tg} x+1)=0$;

4) $\left(1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)(\operatorname{tg} x-3)=0$.

252. 1) $\sqrt{3}\sin x\cos x=\sin^2 x$; 2) $2\sin x\cos x=\cos x$;

3) $\sin 4x+\sin^2 2x=0$; 4) $\sin 2x+2\cos^2 x=0$.

253. 1) $2\sin^2 x=1+\frac{1}{3}\sin 4x$; 2) $2\cos^2 2x-1=\sin 4x$;

3) $2\cos^2 2x+3\cos^2 x=2$; 4) $(\sin x+\cos x)^2=1+\cos x$.

254. 1) $2\sin 2x-3(\sin x+\cos x)+2=0$;

2) $\sin 2x+3=3\sin x+3\cos x$;

3) $\sin 2x+4(\sin x+\cos x)+4=0$;

4) $\sin 2x+5(\cos x-\sin x+1)=0$.

255. 1) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right]=0$;

2) $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=(\sin x+\cos x)^2$.

256. 1) $8\sin x\cos x\cos 2x=1$;

2) $1+\cos^2 x=\sin^4 x$.

257. 1) $2\cos^2 2x+3\sin 4x+4\sin^2 2x=0$;

2) $1-\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

3) $2\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^2 2x=1$;

4) $\sin^2 2x+\cos^2 3x=1+4\sin x$.

258. 1) $\cos x\cos 2x=\sin x\sin 2x$; 2) $\sin 2x\cos x=\cos 2x\sin x$;

3) $\sin 3x=\sin 2x\cos x$; 4) $\cos 5x\cos x=\cos 4x$.

259 *. 1) $4\sin^2 x-5\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$;

2) $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$;

3) $1-4\sin x\cos x+4\cos^2 x=0$; 4) $1+\sin^2 x=2\sin x\cos x$.

260 *. 1) $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$;

2) $6\cos 2x\sin x+7\sin 2x=0$.

261 **. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$;

2) $\sin x(1-\cos x)^2+\cos x(1-\sin x)^2=2$.

262 **. 1) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$;

2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

263 **. 1) $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$;

2) $\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}$.

16-§. ЭНГ СОДДА ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШГА ОИД МИСОЛЛАР

1-масала. $\cos x>\frac{1}{2}$ тенг[illegible] ечинг.

Δ Косинуснинг таърифидан [illegible] бу бирлик айлана нуқта-нинг абсциссасидир. $\cos x>\frac{1}{2}$ [illegible] ечиш учун бирлиайлананинг қандай нуқталари $\frac{1}{2}$ дан катта абсциссага эга эканини аниқлаш керак.

$\frac{1}{2}$ га тенг абсциссага бирлик айлананинг иккита нуқтаси: M_1 ва M_2 эгадир (30-расм).

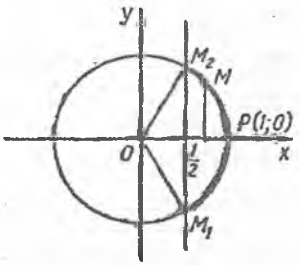
M_1 нуқта $P(1;0)$ нуқтани $-\frac{\pi}{3}$ бурчакка, ва, шунингдек, $-\frac{\pi}{3}+2\pi n\ (n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ бурчакларга буришдан ҳосил қилинади, M_2 нуқта эса $\frac{\pi}{3}$ бурчакка ва шунингдек, $\frac{\pi}{3}+2\pi n\ (n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ бурчакларга буришдан ҳосил бўлади.

Бирлик айлана ёйининг M_1M_2 тўғри чизиқдан ўнгда ётувчи барча M нуқталари $\frac{1}{2}$ дан катта абсциссага эга бўлади. Шундай қилиб, $\cos x > \frac{1}{2}$ тенгсизликнинг ечими $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$ оралиқдаги барча x сонларидир.

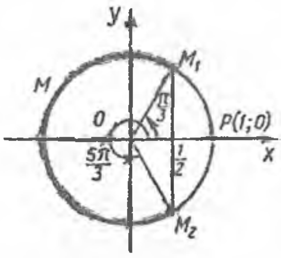
Берилган тенгсизликнинг барча ечимлари $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$ интерваллар тўпламидан иборат. ▲

2-масала: $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

△ Бирлик айлана M_1MM_2 ёйининг барча нуқталари $\frac{1}{2}$ дан катта бўлмаган абсциссага эга (31-расм). Шунинг учун $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ тенгсизликнинг ечимлари $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}$ оралиққа тегишли бўлган барча x сонлари бўлади. Берилган тенгсизликнинг барча ечимлари $\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$ кесмалар тўпламидир. ▲



30-расм



31-расм

3-масала. $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ тенгсизликни ечинг.

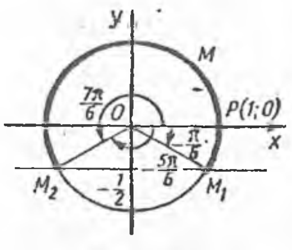
$\triangle$ Бирлик айлана M_1MM_2 ёйининг барча нукталари $-\frac{1}{2}$ дан кичик бўлмаган ординатага эга (32-расм). Шунинг учун $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ тенгсизликнинг ечимлари $-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$ оралиққа тегишли бўлган барча x сонлар бўлади. Берилган тенгсизликнинг барча ечимлари $-\frac{\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n \in Z$ кесмалар тўпламидир. ▲

Айлананинг M_1M_2 тўғри чизикдан пастда ётувчи барча нукталари $-\frac{1}{2}$ дан кичик бўлган ординатага эга эканини таъкидлаб ўтамиз (32-расм). Шунинг учун $\sin x < -\frac{1}{2}$ тенгсизликнинг ечимлари барча $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right)$ сонлар бўлади. Бу тенгсизликнинг барча ечимлари $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi g\right)$, $n \in Z$ интерваллардир. ▲

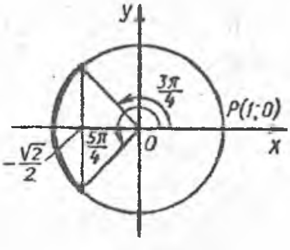
4-масала*. $\cos\left(\frac{x}{4}-1\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тенгсизликни ечинг.

$\triangle$ $\frac{x}{4}-1=y$ деб белгилаймиз. $\cos y \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ тенгсизликни ечиб (33-расм), $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in Z$ ни топамиз. $y=\frac{x}{4}-1$ нинг ўрнига қўйиб, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4}-1 \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi n$ ни оламиз, бундан $1+\frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1+\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n$, $n \in Z$.

Жавоб. $4+3\pi+8\pi n \leqslant x \leqslant 4+5\pi+8\pi n$, $n \in Z$. ▲



32-расм



33-расм

Машқлар

Тенгсизликни ечинг (264—270):

264. 1) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

265. 1) $\cos x \leqslant \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -2$;

3) $\cos x \geqslant 1$; 4) $\cos x \leqslant -1$.

266. 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

267. 1) $\sin x \geqslant -\sqrt{2}$; 2) $\sin x > 1$; 3) $\sin x \leqslant -1$; 4) $\sin x \geqslant 1$.

---

268. 1) $\sqrt{2}\cos 2x \leqslant 1$; 2) $2\sin 3x > -1$;

3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

269*. 1) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right) \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

270**. 1) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$; 2) $\cos^2 x - \cos x < 0$.

III БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

Ифодани соддалаштиринг (271—272):

271. 1) $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$.

272. 1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$.

273. Айниятни исботланг.

1) $1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; 2) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

Ҳисобланг (274—275):

274. 1) $2\sin 6\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3\alpha\right)-\sin 6\alpha$, бунда $\alpha=\frac{5\pi}{24}$;

2) $\cos 3\alpha + 2\cos(\pi-3\alpha)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-1{,}5\,\alpha\right)$, бунда $\alpha=\frac{5\pi}{36}$.

275. 1) $\frac{\sqrt{3}\,(\cos 75^\circ-\cos 15^\circ)}{1-2\sin^2 15^\circ}$; 2) $\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8}-1}{1+8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$.

276. Айниятни исботланг:

1) $\frac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$; 2) $\frac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

277. Исботланг: 1) $\sin 35° + \sin 25° = \cos 5°$;

2) $\cos 12° - \cos 48° = \sin 18°$.

278. Ҳисобланг:

1) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

2) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\arcsin 1$;

3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arccos(-1) - \arcsin(-1)$;

5) $2\operatorname{arctg} 1 + 3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

6) $4\operatorname{arctg}(-1) + 3\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

Тенгламани ечинг (279—288):

279. 1) $\cos(4 - 2x) = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos(6 + 3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) - \sqrt{3} = 0$

280. 1) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; 2) $1 - \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

3) $3 + 4\sin(2x + 1) = 0$; 4) $5\sin(2x - 1) - 2 = 0$.

281. 1) $(1 + \sqrt{2}\cos x)(1 - 4\sin x \cdot \cos x) = 0$;

2) $(1 - \sqrt{2}\cos x)(1 + 2\sin 2x \cdot \cos 2x) = 0$.

282. 1) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{3} - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$; 4) $1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 0$.

283. 1) $2\sin^2 x + \sin x = 0$; 2) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$;

3) $6\sin^2 x - \cos x = 0$; 4) $6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = 0$.

284. 1) $6\sin^2 x - \cos x + 6 = 0$; 2) $8\cos^2 x - 12\sin x + 7 = 0$.

285. 1) $\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x = 0$; 2) $2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;

3) $\operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; 4) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

286. 1) $2\sin 2x = 3\cos 2x$; 2) $4\sin 3x + 5\cos 3x = 0$.

287. 1) $5\sin x + \cos x = 5$; 2) $4\sin x + 3\cos x = 6$.

288. 1) $\sin 3x = \sin 5x$; 2) $\cos x = \cos 3x$;

3) $\cos^2 3x - \cos 3x \cdot \cos 5x = 0$; 4) $\sin x \cdot \sin 5x - \sin^2 5x = 0$.

289. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

> ***ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КЎРИНГ!***
>
> 1. Ифоданинг қийматини топинг:
>
> $$\frac{1+\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos (0{,}5\pi + \alpha)}, \text{ бунда } \alpha = \frac{7}{3}\pi;$$
>
> $$\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \cos 75^\circ}; \quad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
>
> 2. Тенгламани ечинг:
>
> $$\sin 3x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 3x = 1;$$
> $$2\cos^2 x + 5\cos x = 3;$$
> $$\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 0;$$
> $$\sin 3x - \sin x = 0;$$
> $$2\sin x + \sin 2x = 0.$$
>
> 3. Тенгсизликни ечинг:
>
> $$\sin x > \frac{1}{2}; \quad \cos x < 0.$$

290. Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}\right) \cdot \frac{1-\cos 4\alpha}{\cos (\pi - \beta + \alpha)}.$$

Айниятни исботланг (**291—292**):

291. 1) $$\frac{\sin (2\alpha - 3\pi) + 1 \cos \left(\frac{7\pi}{6} + 2\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) + \sqrt{3}\cos (2\alpha - 3\pi)} = -\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\alpha;$$

2) $$\frac{4\sin^4 (\alpha - 1{,}5\pi)}{\sin^4 (\alpha - 2{,}5\pi) + \cos^4 (\alpha + 2{,}5\pi) - 1} = -2\operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

3) $$\frac{-2\cos^4 (\alpha - \pi)}{\cos^4 (\alpha - 1{,}5\pi) + \sin^4 (\alpha + 1{,}5\pi) - 1} = \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

4) $$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right) - \sqrt{3}\sin (2{,}5\pi - 2\alpha)}{\cos (4{,}5\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\alpha\right)} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{3}}.$$

292. 1) $$\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 2\alpha+\cos\alpha+1}{\cos\alpha+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}=2\cos\dfrac{3}{2}\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

4) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=-\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

293. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos 2\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Хисобланг (**294—295**):

294. 1) $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $\sin\left(\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

295. 1) $\sin(4\arcsin 1)$; 2) $\sin\left(3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\cos\left(5\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\cos(6\arcsin 1)$;

5) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(4\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Тенгламани ечинг (**296—303**):

296. 1) $\sin 2x+2\cos 2x=1$; 2) $\cos 2x+3\sin 2x=3$.

297. 1) $3\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$;

2) $2\sin^2 x+3\sin x\cos x-2\cos^2 x=0$.

298. 1) $1+2\sin x=\sin 2x+2\cos x$;

2) $1+3\cos x=\sin 2x+3\sin x$.

299. 1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1+\cos 2x$;

2) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x$.

300. 1) $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\dfrac{1}{4}$;

2) $\sin^3 x\cos x+\cos^3 x\sin x=\dfrac{1}{4}$.

301. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$; 2) $\sin^2 x+\cos^2 2x=1$;

3) $\sin 4x=6\cos^2 2x-4$; 4) $2\cos^2 3x+\sin 5x=1$.

302. 1) $\sin^2 x-\cos x\cos 3x=\dfrac{1}{4}$; 2) $\sin 3x=3\sin x$;

3) $3\cos 2x-7\sin x=4$; 4) $1+\cos x+\cos 2x=0$;

5) $\cos 4x - \sin 2x = 1$;

6) $5 \sin 2x + 4 \cos^3 x - 8 \cos x = 0$.

303. 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 7x$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

3) $\sin x - \sin 3x = \sin 2x - \sin 4x$;

4) $\cos x - \cos 3x = \cos 2x - \cos 4x$.

304.** Агар $\sin\alpha + \cos\alpha = m$ бўлса, $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ ифоданинг қийматини топинг.

305.** Агар $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ бўлса, $\dfrac{1-\cos^4\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) - \sin^4\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right)}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$ ифода α га боғлиқ эмаслигини исботланг.

306.** α, β ва γ лар учбурчакнинг ички бурчаклари бўлсин. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$ эканини исботланг.

Ҳисобланг (307—308):

307*. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\pi - \arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\sin\left(\pi + \arcsin\frac{2}{3}\right)$;

5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{5}\right)$.

308*. 1) $\operatorname{tg}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\right)$.

Тенгламани ечинг (309—313):

309.** 1) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 0$; 2) $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 0$; 3) $\frac{\cos 2x}{\cos x} = 0$;

4) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 0$; 5) $\frac{\sin x}{\sin 5x} = 0$; 6) $\frac{\cos x}{\cos 7x} = 0$.

310.** 1) $\sin x \sin 5x = 1$; 2) $\sin x \cos 4x = -1$;

3) $\cos x \sin 5x = -1$; 4) $\sin x \cos 3x = -1$.

311.** 1) $2\cos 3x = 3\sin x + \cos x$; 2) $\cos 3x - \cos 2x = \sin 3x$.

312.** 1) $\sin 2x + \cos 2x = 2\operatorname{tg} x + 1$; 2) $\sin 2x - \cos 2x = \operatorname{tg} x$.

313.** 1) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x$;

2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$.

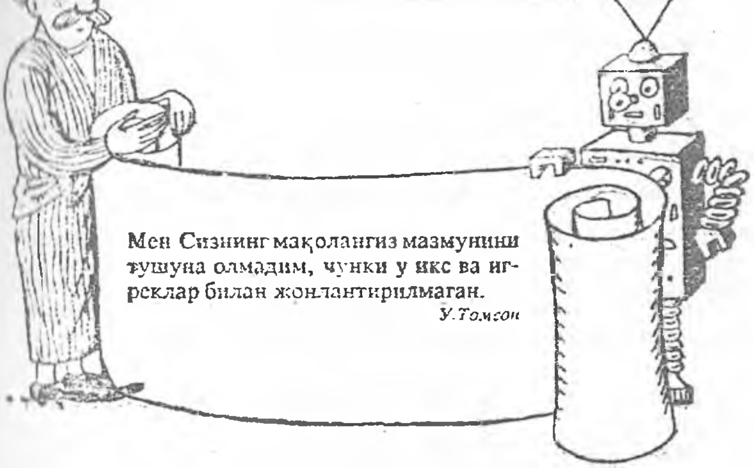
314.** a нинг қандай қийматларида $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ тенглама илдизларга эга бўлади? Бу илдизларни топинг.

315.** Тенгсизликни ечинг:

1) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$; 2) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

IV БОБ

Тригонометрик функциялар



17-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ АНИҚЛАНИШ СОҲАСИ ВА ҚИЙМАТЛАР ТЎПЛАМИ

Сиз ҳар бир ҳақиқий x сон учун бирлик айланада (1;0) нуқтани x радиан бурчакка буришдан ҳосил қилинадиган биргина нуқта мос келишини биласиз.

Бу бурчак учун $\sin x$ ва $\cos x$ аниқланган. Шу билан ҳар бир ҳақиқий x сонга $\sin x$ ва $\cos x$ лар мос қўйилган, яъни барча ҳақиқий сонлар тўплами R да

$$y=\sin x \text{ ва } y=\cos x$$

функциялар аниқланган.

> Шундай қилиб, $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ функцияларнинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўплами R дан иборатдир.

$y=\sin x$ функциянинг қийматлар тўпламини топиш учун y ни x нинг турли қийматларида қандай қийматлар қабул қилишини аниқлаш керак, яъни y нинг қайси қийматлари учун x нинг $\sin x=y$ бўладиган қийматлари борлигини аниқлаш керак. Маълумки,

---

Томсон Уильям, Лорд Кельвин (1824—1907) — инглиз физиги, Лондон қироллик жамиятининг президенти. Термодинамика иккинчи қонунининг ифодаларидан бирини берди, температуранинг абсолют шкаласини (Кельвин шкаласини) таклиф қилди.

$\sin x = a$ тенглама, агар $|a| \leqslant 1$ бўлса, илдизларга эга, агар $|a| > 1$ бўлса, илдизларга эга эмас.

Демак, $y = \sin x$ функциянинг қийматлари тўплами $-1 \leqslant y \leqslant 1$ кесмадир.

Шунинг сингари $y = \cos x$ функция қийматлари тўплами $-1 \leqslant y \leqslant 1$ кесмадир.

1-масала. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

△ x нинг $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ ифода маънога эга бўлмайдиган қийматини, яъни x нинг махраж нолга тенг бўладиган қийматларини топамиз. $\sin x + \cos x = 0$ тенгламани ечиб, $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$ ни топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси барча $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$ қийматлар экан. ▲

2-масала. $y = 3 + \sin x \cos x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

△ x нинг турли қийматларида y нинг қандай қийматлар қабул қила олишини аниқлаш, яъни a нинг қандай қийматларида $3 + \sin x \cos x = a$ тенглама илдизларга эга бўлишини топиш керак. Иккиланган бурчак синуси формуласини қўллаб, тенгламани бундай ёзамиз: $3 + \frac{1}{2} \sin 2x = a$, бундан $\sin 2x = 2a - 6$. Бу тенглама $|2a - 6| \leqslant 1$, яъни $-1 \leqslant 2a - 6 \leqslant 1$ бўлганда илдизларга эга, бундан $5 \leqslant 2a \leqslant 7$, $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$. Демак, берилган функциянинг қийматлар тўплами $2{,}5 \leqslant y \leqslant 3{,}5$ кесмадан иборат. ▲

$y = \operatorname{tg} x$ функция $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ формула орқали аниқланади. Бу функция x нинг $\cos x \neq 0$ бўладиган қийматларида аниқланган. Маълумки, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ да $\cos x = 0$.

Демак, $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг *аниқланиш соҳаси* $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ сонлар тўпламидир.

$\operatorname{tg} x = a$ тенглама a нинг исталган ҳақиқий қийматида илдизларга эга бўлганлиги учун $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг қийматлар тўплами барча ҳақиқий сонлар тўплами R бўлади.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ функциялар *тригонометрик функциялар дейилади.*

3-масала. $y = \sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

△ $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ ифода x нинг қандай қийматларида маънога эга эканлигини аниқлаш керак. $\sin 3x$ ифода x нинг исталган қийматларида, $\operatorname{tg} 2x$ ифода эса $2x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$, яъни $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ да маънога эга. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат. ▲

4-масала*. $y=3 \sin x+4 \cos x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

△ $3 \sin x+4 \cos x=a$ функция a нинг қандай қийматларида илдизга эга эканини аниқлаймиз. Тенгламани $\sqrt{3^2+4^2}=5$ га бўламиз: $\frac{3}{5} \sin x+\frac{4}{5} \cos x=\frac{a}{5}$. $0<\frac{3}{5}<1$ бўлганидан, биринчи чорак $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ да шундай α бурчак топиладики, бунда $\cos \alpha=\frac{3}{5}$ (бу $\alpha=\arccos \frac{3}{5}$ бурчак) бўлади. У ҳолда $\sin^2 \alpha=$ $=1-\cos^2 \alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$, бундан $\sin \alpha=\frac{4}{5}$, чунки $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Тенглама қуйидаги кўринишни олади: $\sin x \cos \alpha+\cos x \sin \alpha=$ $=\frac{a}{5}$, яъни $\sin (x+\alpha)=\frac{a}{5}$. Агар $-1 \leqslant \frac{a}{5} \leqslant 1$, яъни $-5 \leqslant a \leqslant 5$ бўлса, бу тенглама илдизларга эга.

Жавоб. $-5 \leqslant y \leqslant 5$. ▲

Машқлар

316. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sin 2x$; 2) $y=\cos \frac{x}{2}$; 3) $y=\cos \frac{1}{x}$;

4) $y=\sin \frac{2}{x}$; 5) $y=\sin \sqrt{x}$; 6) $y=\cos \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

317. Функцияларнинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $y=1+\sin x$; 2) $y=1-\cos x$;

3) $y=2 \sin x+3$; 4) $y=1-4 \cos 2x$;

5) $y=\sin 2x \cos 2x+2$; 6) $y=\frac{1}{2} \sin x \cos x-1$.

318. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\frac{1}{\cos x}$; 2) $y=\frac{2}{\sin x}$; 3) $y=\operatorname{tg} \frac{x}{3}$; 4) $y=\operatorname{tg} 5x$.

Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг (319—320):

319. 1) $y=\sqrt{\sin x+1}$; 2) $y=\sqrt{\cos x-1}$; 3) $y=\sqrt{2\cos x-1}$;
4) $y=\sqrt{1-2\sin x}$; 5) $y=\lg\sin x$; 6) $y=\ln\cos x$.

320. 1) $y=\frac{1}{2\sin^2 x-\sin x}$; 2) $y=\frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$;
3) $y=\frac{1}{\sin x-\sin 3x}$; 4) $y=\frac{1}{\cos^3 x+\cos x}$.

321. Функциянинг қийматлар тўпламини топинг:
1) $y=2\sin^2 x-\cos 2x$; 2) $y=1-8\cos^2 x\sin^2 x$;
3) $y=\frac{1+8\cos^2 x}{4}$; 4) $y=10-9\sin^2 3x$;
5) $y=1-2|\cos x|$; 6) $y=\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

322*. $y=3\cos 2x-4\sin 2x$ функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

323**. $y=\sin x-5\cos x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

324**. $y=10\cos^2 x-6\sin x\cos x+2\sin^2 x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

18-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ЖУФТЛИГИ, ТОҚЛИГИ ВА ДАВРИЙЛИГИ

Сиз биласизки, x нинг исталган қийматлари учун $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$ тенгликлар тўғри.

Демак, $y=\sin x$ — *тоқ* функция, $y=\cos x$ эса *жуфт* функция. Шунингдек, $y=\operatorname{tg} x$ функциянинг аниқланиш соҳасидаги исталган x қийматда $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x$ тенглик тўғри бўлганлиги учун $y=\operatorname{tg} x$ *тоқ* функциядир.

1- м а с а л а. $y=2+\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$ функциянинг жуфт ёки тоқ эканини аниқланг.

△ Келтириш формулаларидан фойдаланиб, берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз: $y=2+\sin^2 x$. Бундан эса $y(-x)=2+\sin^2(-x)=2+(-\sin x)^2=2+\sin^2 x=y(x)$, яъни берилган функция жуфт функция экан. ▲

x нинг исталган қиймати учун $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ тенгликлар тўғрилиги маълум.

Бу тенгликлардан кўринадики, аргумент 2π га ўзгарганда синус ва косинуснинг қийматлари даврий такрорланади. Бундай функциялар *даври 2π бўлган даврий функциялар* дейилади.

Агар шундай $T \neq 0$ сон мавжуд бўлсаки, $y=f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидаги исталган x учун $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ *даврий функция деб аталади.*

T сон $f(x)$ функциянинг *даври* дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, агар x сон $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, у ҳолда $x+T$, $x-T$ сонлар ва, умуман, $x+Tn$, $n \in Z$ сонлар ҳам шу даврий функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли ва $f(x+Tn)=f(x)$, $n \in Z$ бўлади.

2π сони $y=\cos x$ функциянинг *энг кичик мусбат даври* эканини кўрсатамиз.

○ $T>0$ косинуснинг даври бўлсин, яъни исталган x учун $\cos(x+T)=\cos x$ тенглик бажарилади. $x=0$ деб, $\cos T=1$ ни ҳосил қиламиз. Бундан эса $T=2\pi k$, $k \in Z$. $T>0$ бўлганидан T қуйидаги 2π, 4π, 6π, ... қийматларни қабул қила олади ва шунинг учун унинг даври 2π дан кичик бўлиши мумкин эмас. ●

$y=\sin x$ функциянинг энг кичик мусбат даври ҳам 2π га тенг эканини исботлаш мумкин.

2- м а с а л а. $f(x)=\sin 3x$ функциянинг $\frac{2\pi}{3}$ даврли даврий функция эканини исботланг.

△ Агар $f(x)$ функция барча сонлар ўқида аниқланган бўлса, унинг T даврли даврий функция эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун исталган x да $f(x+T)=f(x)$ тенгликнинг тўғрилигини кўрсатиш кифоя. Берилган функция барча $x \in R$ ларда аниқланган ва $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x=f(x)$. ▲

$\operatorname{tg} x$ функция π даврли даврий функция эканини кўрсатамиз. Агар x бу функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, яъни $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$, у ҳолда келтириш формулаларидан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-x)=-(-\operatorname{tg} x)=\operatorname{tg} x, \ \operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x.$$

Шундай қилиб, $\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(x+\pi)$.

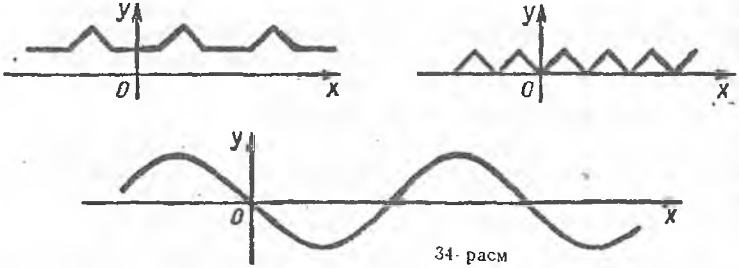
Демак, π сони $\operatorname{tg} x$ функциянинг даври.

π сони $\operatorname{tg} x$ *функциянинг энг кичик мусбат даври* эканини кўрсатамиз.

○ T — тангенснинг даври бўлсин, у ҳолда $\operatorname{tg}(x+T)=\operatorname{tg} x$, бундан $x=0$ да

$$\operatorname{tg} T=0, \ T=k\pi, \ k \in Z$$

ни оламиз.



34- расм

Энг кичик бутун мусбат k сон 1 га тенг бўлганлиги учун π сони $\operatorname{tg} x$ функциянинг энг кичик мусбат давридир. ●

3- м а с а л а . $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ функциянинг 3π даврли даврий функция эканини исботланг.

△ $\operatorname{tg}\frac{x+3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{x-3\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}-\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$

бўлгани сабабли, $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ функция 3π даврли даврий функция бўлади. ▲

Даврий функциялар ёрдамида кўпгина физик жараёнлар (маятникнинг тебраниши, сайёраларнинг айланиши, ўзгарувчан ток ва ҳоказолар) таърифланади. 34-расмда баъзи даврий функцияларнинг графиклари тасвирланган. Сон тўғри чизиғининг узунликлари даврга тенг бўлган, барча кетма-кет келган кесмаларида даврий функциянинг графиги айни бир хил кўринишга эга бўлади.

Машқлар

Берилган функцияларнинг жуфт ёки тоқ эканлигини аниқланг (325—326):

325. 1) $y=\cos 3x$; 2) $y=2\sin 4x$; 3) $y=\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x$;

4) $y=x\cos\frac{x}{2}$; 5) $y=x\sin x$; 6) $y=2\sin^2 x$.

326. 1) $y=\sin x+x$;

2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-x^2$;

3) $y=3-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\sin(\pi-x)$;

4) $y=\frac{1}{2}\cos 2x\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2x\right)+3$;

5) $y=\frac{\sin x}{x}+\sin x\cdot\cos x$; 6) $y=x^2+\frac{1+\cos x}{2}$.

327. Берилган функция даври 2π бўлган даврий функция эканини исботланг:

1) $y=\cos x-1$; 2) $y=\sin x+1$; 3) $y=3\sin x$;

4) $y=\frac{\cos x}{2}$; 5) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y=\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

328. Берилган функция даври T бўлган даврий функция эканини исботланг, бунда:

1) $y=\sin 2x$, $T=\pi$; 2) $y=\cos\frac{x}{2}$, $T=4\pi$;

3) $y=\mathrm{tg}\, 2x$, $T=\frac{\pi}{2}$; 4) $y=\sin\frac{4x}{5}$, $T=\frac{5}{2}\pi$.

---

329. Берилган функция жуфт ёки тоқ эканлигини аниқланг:

1) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; 2) $y=\frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1+\cos 2x}$; 3) $y=\frac{\cos 2x-x^2}{\sin x}$;

4) $y=\frac{x^3+\sin 2x}{\cos x}$; 5) $y=3^{\cos x}$; 6) $y=x\ |\sin x|\ \sin^3 x$.

Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг (330—331):

330*. 1) $y=\cos\frac{2}{5}x$; 2) $y=\sin\frac{3}{2}x$; 3) $y=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$;

4) $y=|\sin x|$.

331**. 1) $y=\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin x+\mathrm{tg}\, x$.

332**. $f(x)$ функция барча сон тўғри чизиғида аниқланган бўлсин. Қуйидагиларни исботланг:

1) $f(x)+f(-x)$ — жуфт функция;

2) $f(x)-f(-x)$ — тоқ функция.

Бу функциялардан фойдаланиб, $f(x)$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар кўринишда ифодаланг.

19-§. $y=\cos x$ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

$y=\cos x$ функция бутун сон тўғри чизиғида аниқланган ва унинг қийматлар тўплами $[-1;\ 1]$ кесма бўлишини эслатиб ўтамиз. Демак, *бу функциянинг графиги $y=-1$ ва $y=1$ тўғри чизиқлар оралиғида жойлашган.*

$y=\cos x$ функция 2π даврли даврий функция бўлганидан, унинг графигини узунлиги 2π га тенг бўлган бирор оралиқда, масалан, $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ оралиқда ясаш кифоядир, у ҳолда танланган кесмани $2\pi n$, $n\in Z$ га силжитиб ҳосил қилинган оралиқларда ҳам график худди ўшандай бўлади.

$y=\cos x$ жуфт функциядир. Шунинг учун унинг графиги Oy ўққа нисбатан симметрик. $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ оралиқдаги графикни ясаш учун *графикни $0\leqslant x\leqslant\pi$ оралиқда ясаш,* кейин эса уни Oy ўққа нисбатан симметрик акслантириш кифоя.

Функциянинг графигини ясашдан олдин *$y=\cos x$ функциянинг $0\leqslant x\leqslant\pi$ кесмада камайишини кўрсатамиз.*

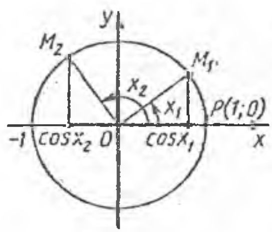
○ Ҳақиқатан ҳам, $P(1; 0)$ нуқтани координаталар бошидан соат милига қарши 0 дан π бурчакка буришда нуқтанинг абсциссаси, яъни $\cos x$ 1 дан -1 гача камаяди. Шунинг учун, агар $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$ бўлса, у ҳолда $\cos x_1 > \cos x_2$ бўлади (35- расм). Бу эса $y = \cos x$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмада камайишини билдиради. ●

$y = \cos x$ функциянинг $0 \leqslant x \leqslant \pi$ кесмада камайиш хоссасидан фойдаланиб ва графикка тегишли бир нечта нуқталарни топиб, бу кесмада функциянинг графигини ясаймиз (36- расм).

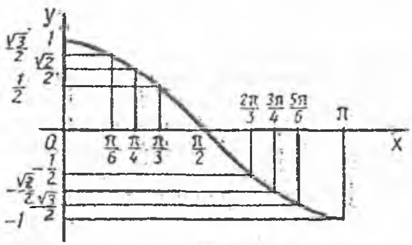
$y = \cos x$ функциянинг жуфтлик хоссасидан фойдаланиб, $[0; \pi]$ кесмада ясалган графикни Oy ўққа нисбатан симметрик акс эттирамиз ва бу функциянинг графигини $[-\pi; \pi]$ кесмада ҳосил қиламиз (37-расм).

$y = \cos x$ функция 2π даврли даврий функция ва унинг графиги узунлиги даврга тенг бўлган $[-\pi; \pi]$ кесмада ясалди, шу сабабли уни бутун сон тўғри чизиғи бўйлаб 2π, 4π га ва ҳоказо ўнгга, -2π, -4π га ва ҳоказо чапга ва умуман $2\pi n$, $n \in Z$ га суриб давом эттирамиз (38- расм).

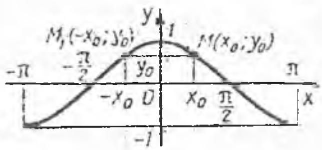
Шундай қилиб, $y = \cos x$ функциянинг графиги унинг бир қисмини $[0; \pi]$ кесмада ясалишидан бутун сон тўғри чизиғида



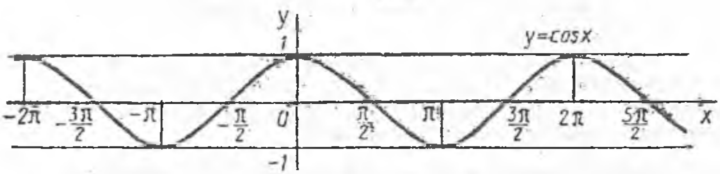
35- расм



36- расм



37- расм



38- расм

геометрик равишда ясалди. Шунинг учун $y=\cos x$ функциянинг хоссаларини бу функциянинг $[0; \pi]$ кесмадаги хоссаларига таяниб топиш мумкин. Масалан, $y=\cos x$ функция $[-\pi; 0]$ кесмада ўсади, чунки y $[0; \pi]$ кесмада камаяди ва жуфт функциядир. $y=\cos x$ функциянинг асосий хоссаларини санаб ўтамиз:

1) *Аниқланиш соҳаси* — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.
2) *Қийматлар тўплами* — $[-1; 1]$ кесма.
3) $y=\cos x$ функция 2π *даврли* даврий функция.
4) $y=\cos x$ — *жуфт функция.*
5) $y=\cos x$ функция:

— 0 *га тенг қийматни* $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади;

— 1 га тенг *энг катта* қийматни $x=2\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади;

— (-1) га тенг энг кичик қийматни $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади;

— *мусбат қийматларни* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда ва бу интервални $2\pi n$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ ларга силжитишдан ҳосил бўладиган интервалларда қабул қилади;

— *манфий қийматларни* $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ интервалда ва бу интервални $2\pi n$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ ларга силжитишдан ҳосил бўладиган интервалларда қабул қилади.

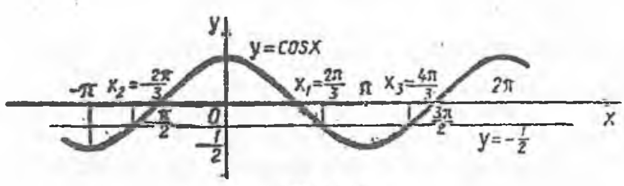
6) $y=\cos x$ функция:

— $[\pi; 2\pi]$ кесмада ва бу кесмани $2\pi n$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ ларга силжитишдан ҳосил бўладиган кесмаларда *ўсади*;

— $[0; \pi]$ кесмада ва бу кесмани $2\pi n$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$ ларга силжитишдан ҳосил бўладиган кесмаларда *камаяди.*

1-масала. $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламанинг $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ кесмага тегишли бўлган барча илдизларини топинг.

△ Берилган кесмада $y=\cos x$ ва $y=-\frac{1}{2}$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (39-расм). Бу графиклар x_1, x_2, x_3 абсциссалари $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизлари бўладиган учта нуқтада кесишади.



39-расм

$[0;\ \pi]$ кесмада $\cos x=-\frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизи $x_1=$ $=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$ сони бўлади. Расмдан кўринадики, x_2 ва x_1 нуқталар $0y$ ўққа нисбатан симметрик, яъни $x_2=-x_1=-\frac{2\pi}{3}$, ҳамда $x_3=x_2+2\pi=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$.

Жавоб. $x_1=\frac{2\pi}{3},\ x_2=-\frac{2\pi}{3},\ x_3=\frac{4\pi}{3}$. ▲

2-масала. $\cos x>-\frac{1}{2}$ тенгламанинг $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ кесмага тегишли барча ечимларини топинг.

△ 39-расмдан кўринадики, $y=\cos x$ функциянинг графиги $\left(-\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right)$ ва $\left(\frac{4\pi}{3};\ 2\pi\right]$ оралиқларда $y=-\frac{1}{2}$ функция графигидан юқорида ётади.

Жавоб. $-\frac{2\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}<x\leqslant 2\pi$. ▲

Машқлар

$y=\cos x$ функциянинг графигидан фойдаланиб машқларни бажаринг (333—338):

333. (Оғзаки.) x нинг $[0;\ 3\pi]$ кесмага тегишли бўлган қандай қийматларида $y=\cos x$ функция:
1) 0; 1; —1 га тенг қийматларни;
2) мусбат қийматларни;
3) манфий қийматларни қабул қилишини аниқланг.

334. (Оғзаки.) $y=\cos x$ функциянинг қуйидаги кесмаларда ўсиш ёки камайишини аниқланг:

1) $[3\pi;\ 4\pi]$; 2) $[-2\pi;\ -\pi]$;

3) $[2\pi;\ \frac{5\pi}{2}]$; 4) $[-\frac{\pi}{2};\ 0]$;

5) $[1;\ 3]$; 6) $[-2;\ -1]$.

335. Берилган кесмани шундай икки кесмага ажратингки, уларнинг бирида $y=\cos x$ функция ўссин, иккинчисида эса камайсин:

1) $[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$; 2) $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$;

3) $[0;\ \frac{3\pi}{2}]$; 4) $[-\pi;\ \frac{\pi}{2}]$.

336. $y=\cos x$ функциянинг ўсиш ва камайиш хоссасидан фойдаланиб, сонларни таққосланг:

1) $\cos\frac{\pi}{7}$ ва $\cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ ва $\cos\frac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ ва $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ ва $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1$ ва $\cos 3$; 6) $\cos 4$ ва $\cos 5$.

337. Тенгламаларнинг $[0;\ 3\pi]$ кесмага тегишли бўлган барча илдизларини топинг:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x=-\frac{1}{2}$.

338. Тенгсизликларнинг $[0;\ 3\pi]$ кесмага тегишли бўлган барча ечимларини топинг:

1) $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$; 2) $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$;

3) $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

339. Келтириш формулаларидан синусни косинус орқали ифодалаб, сонларни таққосланг:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ ва $\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{\pi}{7}$ ва $\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\cos\frac{5\pi}{8}$ ва $\sin\frac{5\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ ва $\cos\frac{3\pi}{7}$;

5) $\cos\frac{\pi}{6}$ ва $\sin\frac{5\pi}{14}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8}$ ва $\sin\frac{3\pi}{10}$.

340. Тенгламанинг $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ оралиққа тегишли бўладиган барча илдизларини топинг:

1) $\cos 2x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

341. Тенгсизликнинг $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ оралиққа тегишли бўладиган барча ечимларини топинг:

1) $\cos 2x<\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

342*. Функциянинг графигини ясанг ва унинг хоссаларини аниқланг:

1) $y=1+\cos x$; 2) $y=\cos x-2$;
3) $y=\cos 2x$; 4) $y=3\cos x$.

343*. Агар x: 1) $\left[\frac{\pi}{3};\ \pi\right]$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right)$ оралиққа тегишли бўлса, $y=\cos x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

344*. Функцияларнинг графигини ясанг:

1) $y=|\cos x|$; 2) $y=3-2\cos(x-1)$.

20- §. $y = \sin x$ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

$y = \sin x$ функция бутун сонлар ўқида аниқланган, тоқ ва 2π даврли даврий функциядир. Унинг графигини $y = \cos x$ функция графигини ясаш усули каби, масалан, $[0; \pi]$ кесмада бошлаш усули билан ясаш мумкин. Лекин қуйидаги формуладан фойдаланиш осонроқдир:

$$\boxed{\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).}$$

Бу формула $y = \sin x$ функциянинг графигини $y = \cos x$ функциянинг графигидан Ox ўқи бўйлаб ўнгга $\frac{\pi}{2}$ қадар силжитиш билан ҳосил қилиш мумкин эканини кўрсатади (40- расм).

$y = \sin x$ функциянинг графиги 41- расмда тасвирланган.

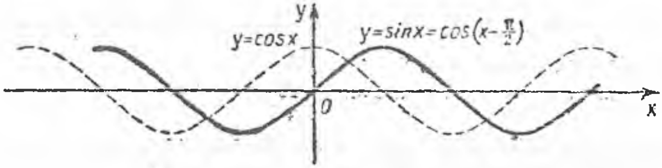
$y = \sin x$ функциянинг графиги бўлган эгри чизиқ *синусоида* деб аталади.

$y = \sin x$ функция графиги $y = \cos x$ функциянинг графигини силжитиш билан ҳосил қилингани учун $y = \sin x$ функциянинг хоссаларини $y = \cos x$ функциянинг хоссаларидан ҳосил қилиш мумкин.

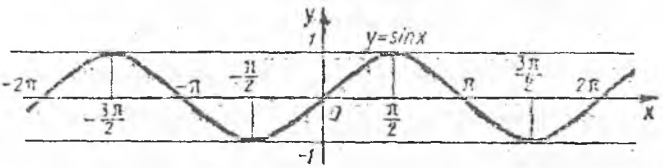
$y = \sin x$ *функциянинг асосий хоссаларини* санаб ўтамиз:

1) *Аниқланиш соҳаси* — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.
2) *Қийматлар тўплами* — $[-1; 1]$ кесма.
3) $y = \sin x$ функция даври 2π бўлган *даврий функция*.
4) $y = \sin x$ — *тоқ функция*.
5) $y = \sin x$ функция:

— 0 *га тенг қийматни* $x = \pi n$, $n \in Z$ да қабул қилади;



40- расм



41- расм

— 1 га тенг *энг катта қийматни* $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ да қабул қилади;

— (-1) га тенг *энг кичик қийматни* $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ да қабул қилади;

— *мусбат қийматларни* $(0;\ \pi)$ интервалда ва бу интервални $2\pi n,\ n=\pm1,\ \pm2,...$ қадар силжитиш билан ҳосил бўладиган интервалларда қабул қилади;

— *манфий қийматларни* $(\pi,\ 2\pi)$ интервалда ва бу интервални $2\pi n,\ n=\pm1,\ \pm2,...$ қадар силжитиш билан ҳосил бўладиган интервалларда қабул қилади.

6) $y=\sin x$ функция:

— $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ кесмада ва бу кесмани $2\pi n,\ n=\pm1,\ \pm2,...$ қадар силжитиш билан ҳосил бўладиган кесмаларда *ўсади*;

— $[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}]$ кесмада ва бу кесмани $2\pi n,\ n=\pm1,\ \pm2,...$ қадар силжитиш билан ҳосил бўладиган кесмаларда *камаяди*.

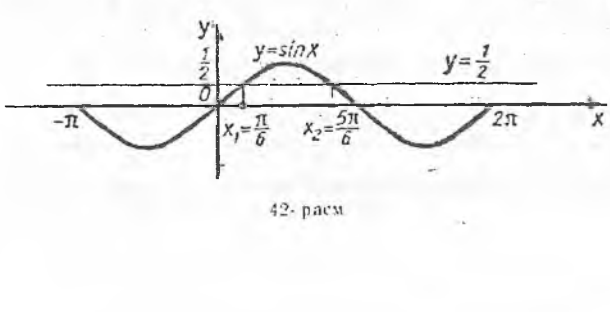
1-масала. $\sin x=\frac{1}{2}$ тенгламанинг $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

△ $y=\sin x$ ва $y=\frac{1}{2}$ функцияларнинг берилган кесмадаги графикларини ясаймиз (42- расм). Бу графиклар абсциссалари $\sin x=\frac{1}{2}$ тенгламанинг илдизлари бўлган иккита нуқтада кесишади. $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$ кесмада тенглама $x_1=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ илдизга эга. Иккинчи илдиз $x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, чунки $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$.

Жавоб. $x_1=\frac{\pi}{6},\ x_2=\frac{5\pi}{6}$. ▲

2-масала. $\sin x<\frac{1}{2}$ тенгсизликнинг $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ кесмага тегишли барча ечимларини топинг.

42- расмдан $y=\sin x$ функциянинг графиги $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{6}\right)$ ва



42- расм

$\left(\frac{5\pi}{6};\ 2\pi\right]$ ораликларда $y=\frac{1}{2}$ функциянинг графигидан пастда ётиши кўриниб турибди.

Ж а в о б. $-\pi\leqslant x<\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}<x\leqslant 2\pi$. ▲

Машқлар

$y=\sin x$ функциянинг графигидан фойдаланиб, машқларни бажаринг (**345—350**):

345. (Оғзаки.) x нинг $[0;\ 3\pi]$ кесмага тегишли қандай қийматларида $y=\sin x$ функция:

1) 0 га; 1 га; -1 га тенг қийматларни;
2) мусбат қийматларни;
3) манфий қийматларни қабул қилишини аниқланг.

346. (Оғзаки). Аниқланг, $y=\sin x$ функция берилган ораликда ўсадими ёки камаядими:

1) $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; 3) $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$;

4 $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2;\ 4]$; 6) $(6;\ 7)$.

347. Берилган кесмани шундай иккита кесмага бўлингки, $y=\sin x$ функция уларнинг бирида ўссин, иккинчисида эса камайсин.

1) $[0;\ \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$; 3) $[-\pi;\ 0]$; 4) $[-2\pi;\ -\pi]$.

348. $y=\sin x$ функциянинг ўсиш ёки камайиш хоссасидан фойдаланиб, сонларни таққосланг:

1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ ва $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ ва $\sin\frac{11\pi}{7}$;

3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ ва $\sin\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ ва $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;

5) $\sin 3$ ва $\sin 4$; 6) $\sin 7$ ва $\sin 6$.

349. Тенгламанинг $[0;\ 3\pi]$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг:

1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

350. Тенгсизликнинг $[0;\ 3\pi]$ кесмага тегишли барча ечимларини топинг:

1) $\sin x>\frac{1}{2}$; 2) $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x\geqslant-\frac{1}{2}$; 4) $\sin x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

351. Косинусни келтириш формуласи бўйича синус орқали ифодалаб, сонларни таққосланг:

1) $\sin\frac{\pi}{9}$ ва $\cos\frac{\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{9\pi}{8}$ ва $\cos\frac{9\pi}{8}$;

3) $\sin\frac{\pi}{5}$ ва $\cos\frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8}$ ва $\cos\frac{3\pi}{10}$.

352. Тенгламанинг $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ оралиққа тегишли барча илдизларини топинг:

1) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

353. Тенгсизликнинг $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ оралиққа тегишли барча ечимларини топинг:

1) $\sin 2x\geqslant-\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

354. Функциянинг графигини ясанг ва унинг хоссаларини аниқланг:

1) $y=1-\sin x$; 2) $y=2+\sin x$;

3) $y=\sin 3x$; 4) $y=2\sin x$.

355*. Агар x: 1) $\left[\frac{\pi}{6};\ \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}\right]$ оралиққа тегишли бўлса, $y=\sin x$ функциянинг қийматлар тўпламини топинг.

356.** Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\sin|x|$; 2) $y=|\sin x|$.

357*. Ўзгарувчан электр токининг кучи вақтга боғлиқ функция бўлиб, $I=A\sin(\omega t+\varphi)$ формула билан ифодаланади, бунда A — тебраниш амплитудаси, φ бошланғич фаза, ω — частота. Агар

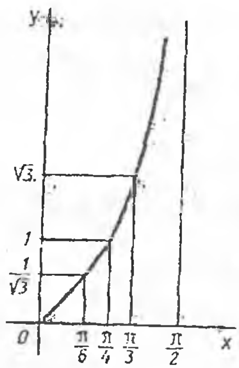
1) $A=2,\ \omega=1,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$;

2) $A=1,\ \omega=2,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$

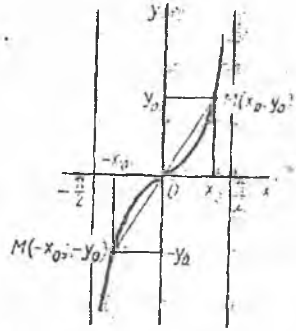
бўлса, бу функциянинг графигини ясанг.

21-§. $y=\operatorname{tg} x$ ФУНКЦИЯ, УНИНГ ХОССАЛАРИ ВА ГРАФИГИ

$y=\operatorname{tg} x$ функциянинг $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$ да аниқланганлигини, тоқ ва π даврли даврий функция эканини эслатиб ўтамиз. *Шунинг учун унинг графигини* $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ *оралиқда ясаш етарли. Кейин уни координаталар бошига нисбатан симметрик равишда акслантириб,* $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *интервалдаги графиги ҳосил қилинади.* Ва ниҳоят, $y=\operatorname{tg} x$ *функциянинг даврийлигидан фойдаланиб, унинг бутун аниқланиш соҳасидаги графиги ясалади.*



43- расм



44- расм

$y=\operatorname{tg} x$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқдаги графигини ясашдан олдин унинг бу оралиқда *ўсишини* кўрсатамиз.

○ * $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ бўлсин. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, яъни $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x}$ эканини кўрсатамиз.

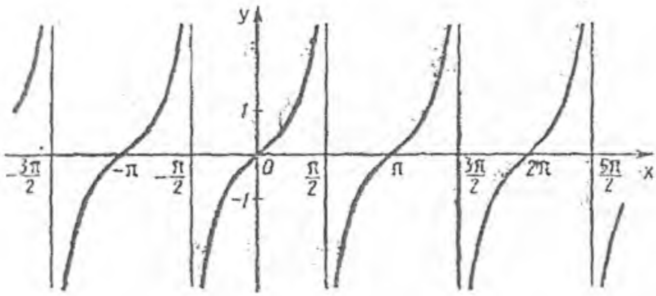
Шартга кўра $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, бундан $y=\sin x$ функциянинг хоссаларига кўра $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$ га, $y=\cos x$ функциянинг хоссаларига кўра эса $\cos x_1 > \cos x_2 > 0$ га эга бўламиз, бундан $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

$\sin x_1 < \sin x_2$ га $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$ тенгсизликларни кўпайтириб, $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$ га эга бўламиз. ●

$y=\operatorname{tg} x$ функциянинг $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ оралиқда ўсиши хоссасидан фойдаланиб ва графикка тегишли бир нечта нуқтани топиб, уни шу оралиқда ясаймиз (43- расм).

$y=\operatorname{tg} x$ функциянинг тоқлик хоссасидан фойдаланиб, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда ясалган графикни координаталар бошига нисбатан акслантирамиз; бу функциянинг $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги графигини ҳосил қиламиз (44- расм).

$x=\pm\frac{\pi}{2}$ да $y=\operatorname{tg} x$ функция аниқланмаганлигини эслатиб ўтамиз. Агар $x<\frac{\pi}{2}$ бўлса ва x $\frac{\pi}{2}$ га яқинлашса, у ҳолда $\sin x$ 1 га



45- расм

яқинлашади. $\cos x$ эса мусбат ҳолича қолиб, 0 га интилади. Бунда $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ каср *чексиз ўсади* ва шунинг учун *$y = \operatorname{tg} x$ функциянинг графиги $x = \frac{\pi}{2}$ вертикал тўғри чизиққа яқинлашади.* Шунга ўхшаш x нинг $-\frac{\pi}{2}$ дан катта ва $-\frac{\pi}{2}$ га яқинлашувчи манфий қийматларида $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг графиги $x = -\frac{\pi}{2}$ вертикал тўғри чизиққа яқинлашади.

$y = \operatorname{tg} x$ функциянинг графигини *бутун аниқланиш соҳасида* ясашга ўтамиз. $y = \operatorname{tg} x$ функция π даврли даврий функциядир. Демак, бу функциянинг графиги унинг $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги графигидан (44- расм) абсциссалар ўқи бўйлаб πn, $n \in Z$ қадар силжитишлар билан ҳосил қилинади (45- расм).

Шундай қилиб, $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг бутун графиги унинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда ясалган қисмидан геометрик шакл алмаштиришлар ёрдамида ясалади.

Шунинг учун $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг хоссаларини унинг $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқдаги хоссаларига суянган ҳолда олиш мумкин. Масалан, $y = \operatorname{tg} x$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда ўсади, чунки бу функция $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда ўсади ва тоқдир.

$y = \operatorname{tg} x$ функциянинг асосий хоссаларини санаб ўтамиз:

1) *Аниқланиш соҳаси* — $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ бўлган барча ҳақиқий сонлар тўплами.
2) *Қийматлар тўплами* — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.
3) $y = \operatorname{tg} x$ функция — даври π бўлган *даврий функция.*

4) $y=\operatorname{tg}x$ функция — *тоқ функция.*

5) $y=\operatorname{tg}x$ функция:

— *0 га тенг қийматни* $x=\pi n$, $n\in Z$ да;

— *мусбат қийматларни*

$$\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$$

интервалларда;

— *манфий қийматлари*

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \pi n\right),\ n\in Z$$

интервалларда қабул қилади.

6) $y=\operatorname{tg}x$ функция

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in Z$$

интервалларда *ўсади.*

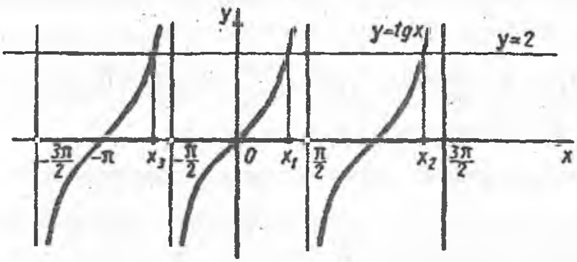
1-масала. $\operatorname{tg}x=2$ тенгламанинг $-\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ кесмага тегишли барча илдизларини топинг.

△ $y=\operatorname{tg}x$ ва $y=2$ функцияларнинг берилган кесмадаги графикларини ясаймиз (46-*а* расм). Бу графиклар x_1, x_2, x_3 абсциссалари $\operatorname{tg}x=2$ тенгламанинг илдизлари бўлган учта нуқтада кесишади. $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда тенглама $x_1=\operatorname{arctg}2$ илдизга эга. $y=\operatorname{tg}x$ функция π даврли даврий функция бўлгани учун $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi$, $x_3=\operatorname{arctg}2-\pi$.

Жавоб. $x_1=\operatorname{arctg}2$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi$, $x_3=\operatorname{arctg}2-\pi$. ▲

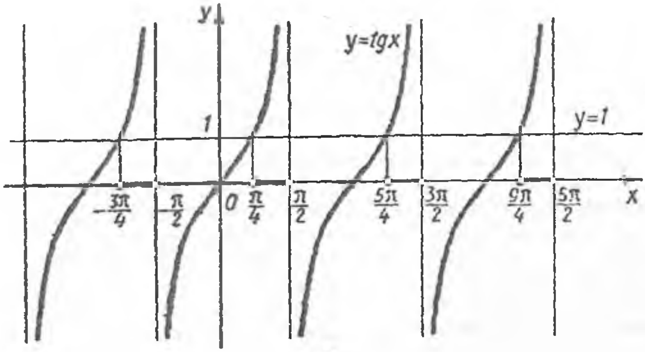
2-масала. $\operatorname{tg}x\leqslant 2$ тенгсизликнинг $-\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ кесмага тегишли барча ечимларини топинг.

△ 46-*а* расмда $y=\operatorname{tg}x$ функциянинг графиги $[-\pi;\ x_3]$,



а)

46-*а* расм



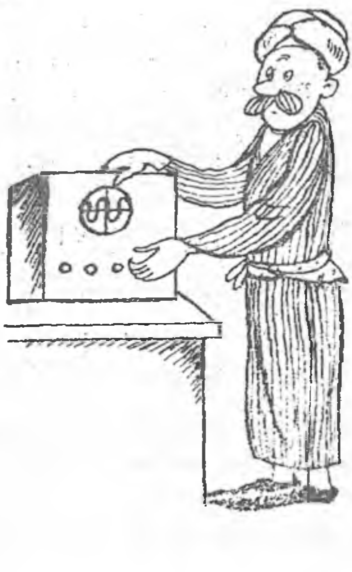
б)

46- *б* расм

$\left(-\frac{\pi}{2};\ x_1\right]$ ва $\left(\frac{\pi}{2};\ x_2\right]$ ораликларда $y=2$ тўғри чизикдан юкорида ётмаслиги кўриниб турибди. Ж а в о б. $-\pi\leqslant x\leqslant -\pi+\operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2}<x\leqslant \operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2}<x\leqslant \pi+\operatorname{arctg} 2$. ▲

3- **м а с а л а.** $\operatorname{tg}x>1$ тенгсизликни ечинг.

△ $y=\operatorname{tg}x$ ва $y=1$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (46-*б* расм). Расмдан кўриниб турибдики, $y=\operatorname{tg}x$ функциянинг графиги $\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда, шунингдек, уни π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π га



ва ҳ.к. силжитиш билан ҳосил қилинган оралиқларда $y=1$ тўғри чизиқдан юқорида ётади.

Жавоб. $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. ▲

Тригонометрик функциялар математика, физика ва техникада кенг қўлланилади. Масалан, тор тебраниши, маятник тебраниши, ўзгарувчан ток занжиридаги кучланиш каби кўпгина жараёнлар $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ формула билан бериладиган функция орқали тавсифланади. Бундай жараёнлар *гармоник тебранишлар,* уларни ифодаловчи функциялар эса *гармоникалар* (грекча harmonikos — ўлчовдош сўзидан) деб аталади. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ функциянинг графиги $y=\sin x$ функциянинг графигидан уни координата ўқлари бўйлаб сиқиш ёки чўзиш ва Ox ўқи бўйлаб силжитиш билан ҳосил қилинади. Одатда гармоник тебраниш вақтнинг функциясидир: $y=A\sin(\omega t+\varphi)$, бу ерда A — тебраниш амплитудаси, ω — тебраниш частотаси, φ — тебранишнинг бошланғич фазаси, $\frac{2\pi}{\omega}$ — тебраниш даври.

Машқлар

$y=\operatorname{tg}x$ функциянинг графигидан фойдаланиб, машқларни бажаринг (358—363):

358. (Оғзаки.) $y=\operatorname{tg}x$ функция x нинг $-\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ оралиқдаги қандай қийматларида:
1) 0 га тенг қиймат;
2) мусбат қийматлар;
3) манфий қийматлар қабул қилишини аниқланг.

359. (Оғзаки.) $y=\operatorname{tg}x$ функция
1) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $[2;\ 3]$
оралиқда ўсувчи функциями ёки йўқми эканини аниқланг.

360. $y=\operatorname{tg}x$ функциянинг ўсиш хоссасидан фойдаланиб, сонларни таққосланг:
1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$ ва $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}$ ва $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$;
3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ ва $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ ва $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;
5) $\operatorname{tg}2$ ва $\operatorname{tg}3$; 6) $\operatorname{tg}1$ ва $\operatorname{tg}1{,}5$.

361. Тенгламанинг $(-\pi;\ 2\pi)$ оралиққа тегишли барча илдизларини топинг:
1) $\operatorname{tg}x=1$; 2) $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg}x=-1$.

362. Тенгсизликнинг $(-\pi;\ 2\pi)$ оралиққа тегишли барча ечимларини топинг:
1) $\operatorname{tg}x\geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg}x<\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg}x<-1$; 4) $\operatorname{tg}x\geqslant-\sqrt{3}$.

363. Тенгсизликни ечинг:

1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

---

364. Тенгламанинг $[0;\ 3\pi]$ ораликка тегишли барча илдизларини топинг:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{tg} x = -2$.

365. Тенгсизликни ечинг:

1) $\operatorname{tg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 3) $\operatorname{tg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -5$.

366. Тенгсизликнинг $[0;\ 3\pi]$ ораликка тегишли барча ечимларини топинг:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

367. Тенгламанинг $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ ораликка тегишли барча илдизларини топинг:

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} 3x = -1$.

368. Тенгсизликнинг $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ ораликка тегишли барча ечимларини топинг:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$.

369*. Функциянинг графигини ясанг ва унинг хоссаларини аникланг:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} x - 2$;

3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$; 4) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

370*. Агар x

1) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0;\ \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right)$ ораликка тегишли бўлса, у ҳолда $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг кийматлар тўпламини топинг.

371.** Функциянинг графигини ясанг:

1) $y = \operatorname{tg} |x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

372.** Тенгсизликни ечинг:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$;

3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

IV БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

373. Функциянинг аникланиш соҳасини топинг:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $y = \sqrt{\sin x}$; 4) $y = \sqrt{\cos x}$;

5) $y = \frac{2x}{2\sin x - 1}$; 6) $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x - \sin x}$

374. Функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $y=1-2\sin^2 x$; 2) $y=2\cos^2 x-1$;

3) $y=3-2\sin^2 x$; 4) $y=2\cos^2 x+5$;

5) $y=\cos 3x\cdot\sin x-\sin 3x\cos x+4$;

6) $y=\cos 2x\cos x+\sin 2x\cos x-3$.

375. Берилган функция жуфтми ёки тоқми эканини аниқланг:

1) $y=x^2+\cos x$; 2) $y=x^3-\sin x$;

3) $y=(1-x^2)\cos x$; 4) $y=(1+\sin x)\sin x$.

376. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $y=\cos 7x$; 2) $y=\sin\frac{x}{7}$.

377. Тенгламанинг $[0; 3\pi]$ оралиққа тегишли барча илдизларини топинг:

1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$; 2) $\sqrt{3}-\sin x=\sin x$;

3) $3\text{tg}\, x=\sqrt{3}$; 4) $\cos x+1=0$.

378. Тенгсизликнинг $[-2\pi; -\pi]$ оралиққа тегишли барча ечимларини топинг:

1) $1+2\cos x\geqslant 0$; 2) $1-2\sin x<0$;

3) $2+\text{tg}\, x>0$; 4) $1-2\text{tg}\, x\leqslant 0$.

379. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\cos x=x^2$; 2) $\sin x=1-x$.

УЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КУРИНГ!

1. $y=\text{tg}\, 4x$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг. Бу функция жуфт функция бўладими?
2. $y=\sin x$; $y=\cos x$ функцияларининг графикларини $[-\pi; 2\pi]$ кесмада схематик равишда ясанг. x нинг қандай қийматларида $y(x)=1$, $y(x)=-1$, $y(x)=0$, $y(x)>0$, $y(x)<0$ бўлади, функция ўсади, функция камаяди?
3. $y=\text{tg}\, x$ функция графигини $[-\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{2}]$ кесмада схематик равишда ясанг. x нинг қандай қийматларида $\text{tg}\, x=0$, $\text{tg}\, x<0$, $\text{tg}\, x>0$ бўлади?
4. $\text{tg}\, x\geqslant -1$ тенгсизликни ечинг.

380. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=\text{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$; 2 $y=\sqrt{\text{tg}\, x}$.

381. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

1) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$; 2) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y=1-2\,|\sin 3x|$; 4) $y=\sin^2 x-2\cos^2 2x$.

382. Берилган функция жуфтми ёки тоқми эканини аниқланг:

1) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$; 2) $y=\sin x \operatorname{tg} x$;

3) $y=\cos x+|\sin x|$; 4) $y=\sin x\,|\cos x|$.

383. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $y=2\sin(2x+1)$; 2) $y=3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1)$.

384. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\cos x=|x|$; 2) $\sin x=-|x+1|$.

385. Функциянинг нолларини топинг:

1) $y=\sin^2 x+\sin x$; 2) $y=\cos^2 x-\cos x$;

3) $y=\cos 4x-\cos 2x+\sin x$;

4) $y=\cos x-\cos 2x-\sin 3x$.

386*. x нинг $y=1,5-2\sin^2\frac{x}{2}$ функция мусбат қийматлар қабул қиладиган барча қийматларини топинг.

387*. x нинг $y=\operatorname{tg} 2x-1$ функция манфий қийматлар қабул қиладиган барча қийматларини топинг.

388.** Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-2$;

2) $y=\frac{1}{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$;

3) $y=\sin x+|\sin x|$;

4) $y=\cos x=\sqrt{\cos^2 x}$.

389.** Функциянинг қийматлар тўпламини топинг:

1) $y=12\sin x-5\cos x$;

2) $y=\cos^2 x-\sin x$.

390.** Тенгсизликни ечинг:

1) $\sin x\geqslant\cos x$;

2) $\operatorname{tg} x>\sin x$.

X СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

391. Функциянинг асосий хоссаларини аниқланг ва унинг графигини ясанг:

1) $y=3^x+1$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$;

3) $y=\log_2(x+1)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)$.

392. Сонларни таққосланг:

1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}$ ва $2{,}5^{0,5}$; 2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}$ ва $0{,}2^{\frac{3}{4}}$;

3) $\log_{3,1}\sqrt{10}$ ва $\log_{3,1}3$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}$ ва $\log_{0,3}\frac{3}{4}$.

393. Ушбу ҳолатда a сони $0<a<1$ ёки $a>1$ оралиқлардан қайси бирига тегишли бўлади:

1) $a^{0,2}>1$; 2) $a^{-1,3}>1$;

3) $a^{-3,1}<1$; 4) $a^{2,7}<1$;

5) $\log_a 0,2>0$; 6) $\log_a 1,3>0$;

7) $\log_a 2,4<0$; 8) $\log_a 0,4<0$?

Тенгламани ечинг (394—397):

394. 1) $2,4^{3-2x}=2,4^{3x-2}$; 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$;

3) $3^{x+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{8}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$.

395. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$; 2) $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^x}=216$;

3) $2^x\cdot5^x=0,1(10^{x-2})^2$; 4) $\left(1\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^x=1$.

396. 1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$; 2) $3^{2x}-2\cdot3^{2x-1}-2\cdot3^{2x-2}=1$;

3) $7^x-7^{x-1}=6$; 4) $3^{x+2}+3^x=10$.

397. 1) $3^{2x}-3^x=72$; 2) $4^x-2^{x+1}=48$.

Тенгсизликни ечинг (398—399):

398. 1) $2,5^{1-x}>2,5^{-3x}$; 2) $0,13^{x-4}\geqslant0,13^{2-x}$;

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$; 4) $3^{-4x}>\sqrt{3}$.

399. 1) $0,04^{3x-2}\geqslant5^{2-x}$; 2) $8^{x-3}\leqslant0,125^{2x}$;

3) $5^{x^2+3x+1,5}<5\sqrt{5}$; 4) $0,2^{x^2-6x+7}\geqslant1$.

Ҳисобланг (400—401):

400. 1) $\log_{27}729$; 2) $\log_9 729$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}729$;

4) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}$; 5) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{4}{25}$; 6) $\log_{\frac{5}{2}}\frac{8}{125}$.

401. 1) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[5]{64}$; 2) $\log_8\log_4\log_2 16$; 3) $2^{\log_2 16}$;

4) $3^{\log_3\frac{1}{9}}$; 5) $25^{-\log_5 2}$; 6) $64^{0,5\log_2 10}$.

Тенгламани ечинг (402—403):

402. 1) $5\log_2 x=3\log_2 x+6$; 2) $5\log_5 x-3\log_3 9=2\log_5 x$;

3) $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$; 4) $(\log_3 x)^2+5=2\log_3 x^3$.

403. 1) $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1$;

2) $\lg(1-3x)-\lg(x+5)=\lg5$;

3) $\ln\frac{2}{x+1}=\ln(x+2)$;

4) $\log_3\sqrt{3x-6}-\log_3\sqrt{x-3}=1$.

Тенгсизликни ечинг (404—405):

404. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)>0$;

2) $\log_5(3x-1)<1$;
3) $\log_{0,5}(1+2x)>-1$;
4) $\log_3(1-2x)<-1$.

405. 1) $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$;
2) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;
3) $\log_{0,5}(3x-4)<\log_{0,5}(x-2)$;
4) $\log_{0,5}(4-x)\geqslant\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$.

406. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $0,5^x=2x+1$; 2) $2^x=3-x^2$; 3) $\log_3 x=4-x$;

4) $\log_{\frac{1}{2}} x=4x^2$; 5) $2^x=\log_{0,5}x$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\log_3 x$.

407. Ҳисобланг:

1) $2\,\mathrm{arctg}\,1-3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $8\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{3}$;

3) $3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-6\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $12\,\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3})+4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Тенгламани ечинг (408—414):

408. 1) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $3\cos x-2=0$; 4) $2\,\mathrm{tg}\,x+5=0$.

409. 1) $3\sin^2 x+2\sin x-8=0$;
2) $3\cos^2 x-5\cos x-12=0$;
3) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x=2+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x$;
4) $3\,\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\,x+5=0$.

410. 1) $(3-4\sin x)\,(3+4\cos x)=0$;
2) $(2+5\sin x)\,(3-5\cos x)=0$;
3) $(\mathrm{tg}\,x-5)\,(\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3})=0$;
4) $(\mathrm{tg}\,x+3)\,(\mathrm{tg}\,x+1)=0$.

411. 1) $\sin 2x=3\sin x\cos^2 x$; 2) $\sin 4x=\sin 2x$;

3) $\cos 2x+\cos^2 x=0$; 4) $\sin 2x=\cos^2 x$.

412. 1) $\cos x+\cos 2x=0$; 2) $\cos x-\cos 5x=0$;

3) $\sin 3x+\sin x=2\sin 2x$; 4) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

413. 1) $2\cos x+\sin x=0$; 2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$;

3) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$; 4) $\sqrt{2}\cos x-2\sin x=0$.

414. 1) $\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x=\cos 2x$;

2) $\cos^4 x-\sin^4 x-\sin x=2\cos^2 x$;

3) $\sin^4 x-2\sin^2 x-\sin x=\cos^4 x$;

4) $2\sin^2 x-\cos^4 x=1-\sin^4 x$.

415. Ифодани соддалаштиринг:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 4) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}$;

5) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2 2\alpha}$; 6) $\dfrac{\left(\cos\frac{3}{4}\alpha-\sin\frac{3}{4}\alpha\right)^2}{1-\sin\frac{3}{2}\alpha}$.

416. Синус ёки косинуснинг графигидан фойдаланиб, тенгламанинг $[-\pi; 3\pi]$ оралиққа тегишли барча илдизларини топинг:

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

---

417. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

1) $y=2^x+\lg(6-3x)$; 2) $y=3^{-x}-2\ln(2x+4)$;

3) $y=\dfrac{1}{\cos 2x}$; 4) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$.

418. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=2^{x-1}-3$; 2) $y=\log_2(x+2)+3$;

3) $y=3\sin x-2$; 4) $y=2+\cos 2x$.

419. Функциянинг жуфтми ёки тоқми эканини аниқланг:

1) $y=2^x+2^{-x}$; 2) $y=3^x-3^{-x}$;

3) $y=\ln\dfrac{3+x}{3-x}$; 4) $y=\left|\ln\dfrac{5+x}{5-x}\right|$

Тенгламани ечинг (420—422):

420. 1) $4^{\sqrt{2x-4}}=64\cdot 2^{\sqrt{2x-4}}$; 2) $\sqrt{4^{x(x-1)-\frac{1}{2}}}=\sqrt[4]{2}$;

3) $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0$;

4) $5^{x+4}+3\cdot 4^{x+3}=4^{x+4}+4\cdot 5^{x+3}$.

421. 1) $\log_4(2+\sqrt{x+3})=1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2-2x}=-\frac{1}{2}$;

3) $\frac{1}{2}\log_3(x-2)=\log_3\sqrt{x+1}-\log_3 2$;

4) $\frac{1}{2}\log_3(x+1)=\log_3\sqrt{x+4}-2\log_3\sqrt{2}$.

422. 1) $x^{1+\lg x}=10x$; 2) $x^{\lg x}=100x$;

3) $4^{1+\lg x}-6^{\lg x}-2\cdot 3^{2+\lg x^2}=0$;

4) $5^{1+\log_4 x}+0{,}2\cdot 5^{\log_{\frac{1}{4}} x}=5{,}2$;

5) $\log_2(17-2^x)+\log_2(2^x+15)=8$;

6) $\log_2(3+2^x)+\log_2(5-2^x)=4$.

Тенгсизликни ечинг (423—425):

423. 1) $3{,}3^{x^2+6x}<1$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2}>\frac{1}{2}$;

3) $16^{\frac{2x+1}{3x-7}}-64^{\frac{1}{3}}(0{,}25)^{-2}>0$;

4) $8{,}4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}}<1$;

5) $2^{2x+1}-21\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geqslant 0$;

6) $3^{4-3x}-35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\geqslant 0$.

424. 1) $(x^2-4)\log_{0,5}x>0$; 2) $(3x-1)\log_2 x>0$;

3) $\frac{2-3x}{\log_{\frac{1}{3}}x}<0$; 4) $(1-x^2)\log_3 x<0$.

425. 1) $x^{1+\lg x}<0{,}1^{-2}$; 2) $\sqrt{x^{4\lg x}}<10x$;

3) $x+3>\log_3(26+3^x)$; 4) $3-x<\log_5(20+5^x)$.

Тенгламалар системасини ечинг (426—427):

426. 1) $\begin{cases}2^{x+y}=32,\\3^{3y-x}=27;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^x-2^{2y}=77,\\3^{\frac{x}{2}}-2^y=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=576,\\\log_{\sqrt{2}}(y-x)=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\lg x+\lg y=4,\\x^{\lg y}=1000.\end{cases}$

427. 1) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\x^2-5y^2+4=0;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{15},\\\log_3 x+\log_3 y=1+\log_3 5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972,\\\log_{\sqrt{3}}(x-y)=2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+y^2=16,\\\log_2 x+2\log_2 y=3.\end{cases}$

428. Сон қандай бутун сонлар орасида жойлашган:

1) $\lg 50$; 2) $\log_2 10$?

Ҳисобланг (429—431):

429. 1) $\log_4 \sin\frac{\pi}{4}$; 2) $\log_{10}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\log_3 \sin\frac{3}{4}\pi$; 4) $\log_2\cos\frac{1}{3}\pi$;

5) $\log_2\sin\frac{\pi}{2}-\log_{\frac{1}{2}}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

6) $\log_3 1-\log_4\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\log_5\cos 0$.

430. 1) $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\sqrt{3})$; 2) $\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg}\,1)$; 3) $\sin(\mathrm{arctg}(-\sqrt{3}))$;

4) $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $\cos(\mathrm{arctg}\,1)$; 6) $\cos(\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}))$.

431. 1) $\cos\left(6\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$;

3) $\sin\left(4\arccos\frac{1}{2}\right)$; 4) $\sin(5\arccos 0)$;

5) $\mathrm{tg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\mathrm{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Тенгламани ечинг (432—438):

432. 1) $4\sin^4 x+\sin^2 2x=2$; 2) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}=\frac{5}{8}$.

433. 1) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}$; 2) $6\sin x+5\cos x=6$.

434. 1) $\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}^2 x-2\mathrm{tg}\,x-2=0$; 2) $1-\cos x=\mathrm{tg}\,x-\sin x$.

435. 1) $\sin x+\sin 2x=\cos x+2\cos^2 x$;

2) $2\cos 2x=\sqrt{6}\,(\cos x-\sin x)$.

436. 1) $2-\mathrm{tg}\,2x=\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$;

2) $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\cos x+\sin x$.

437. 1) $4\sin^2 x-8\sin x\cos x+10\cos^2 x=3$;

2) $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$;

3) $2\sin x\cos x+5\cos^2 x=4$;

4) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x=1$.

438. 1) $\cos x\sin 9x=\cos 3x\sin 7x$;

2) $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x$;

3) $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$;

4) $\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}$.

439. Тенгсизликнинг $[-3\pi;\ \pi]$ оралиқда жойлашган барча ечимларини тригонометрик функцияларнинг графикларидан фойдаланиб топинг:

1) $2\cos x-\sqrt{3}<0$; 2) $\sqrt{2}\sin x+1\geqslant 0$;

3) $\sqrt{3}+\operatorname{tg} x\leqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x-2>0$.

440. Функция жуфтми ёки тоқми эканини аниқланг:

1) $y=x\sin x$; 2) $y=x^2\cos 2x$;

3) $y=x+\sin x$; 4) $y=x+\cos x$.

441. Даврий функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $y=\cos 3x$; 2) $y=\sin\frac{x}{5}$;

3) $y=\operatorname{tg} 5x$; 4) $y=\sin x+\operatorname{tg} x$.

442. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топинг:

1) $y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$; 2) $y=2\cos 2x+\sin^2 x$.

443. Тенгламани график усулда ечинг:

1) $\cos x=3x-1$; 2) $\sin x=0,5x^3$;

3) $\cos x=\sqrt{x}$; 4) $\cos x=x^2$.

444. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=|\cos x|$; 2) $y=|\sin x|$;

3) $y=|\operatorname{tg} x|$; 4) $y=\sin|x|$.

Ифодани соддалаштиринг (445—447):

445. 1) $\frac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\sin\alpha}$; 2) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

446. 1) $\frac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{4-4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$.

447. 1) $\frac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$; 2) $\frac{1+\cos x+\sin x+\operatorname{tg} x}{\sin x+\cos x}$.

448 *. Ҳисобланг:

1) $\frac{3\sin^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha=2$;

2) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$.

Айниятни исботланг (449—450):

449 *. 1) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

4) $\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=1+\frac{(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

450 *. 1) $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x\cdot\cos\frac{3}{2}x$;

2) $4\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x$;

3) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{8}$; 4) $\cos 3x\cos 6x\cos 12x=\frac{\sin 24x}{8\sin 3x}$.

451 *. Функциянинг аникланиш соҳасини топинг:

1) $y=\sqrt{\log_{0,8}(x^2-5x+7)}$; 2) $y=\sqrt{\log_{0,5}(x^2-9)}$;

3) $y=\sqrt{\log_{0,7}\frac{x-1}{x+5}}$; 4) $y=\sqrt{\log_{0,4}(x-x^2)}$.

452 **. $-1\leqslant x\leqslant 1$ да $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ бўлишини исботланг. Ҳисобланг:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

453 **. $-1\leqslant x\leqslant 1$ да $\arcsin x+\arccos x=C$ (бунда C — ўзгармас) бўлишини исботланг; C ни топинг.

Тенгламани ечинг (454—456):

454 **. 1) $16^{\sin^2 x}+16^{\cos^2 x}=10$;

2) $(\sqrt{3}+\sqrt{8})^x+(\sqrt{3}-\sqrt{8})^x=34$.

455 **. 1) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x=2\operatorname{ctg} 4x$;

2) $\frac{\sin 4x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)$.

456 **. 1) $\frac{\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 3x}$; 2) $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x$.

457 **. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 2^x\cdot 8^{-y}=2\sqrt{2}, \\ \log_9\frac{1}{x}+0,5=\frac{1}{2}\log_3 9y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^{\log_x 2}=y^{\log_5 y}, \\ 2^{\log_y 3}=x^{\log_2 x}. \end{cases}$

458 **. Тенгсизликни ечинг:

1) $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$; 2) $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$;

3) $\frac{4^x+2x-4}{x-1}\leqslant 2$; 4) $\frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1}<2$;

5) $3\sin x>2\cos^2 x$; 6) $\sin^2 x+2\sin x>0$.

459 **. Функция графигининг эскизини чизинг:

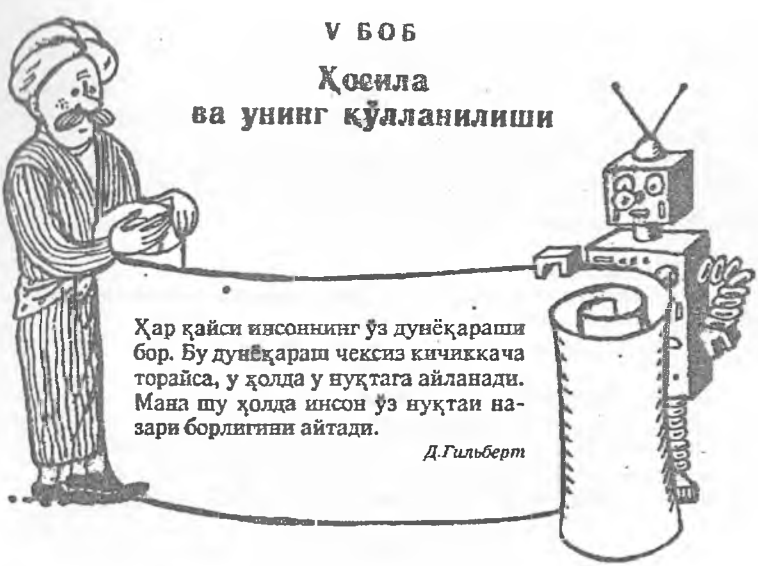
1) $y=\arcsin x$; 2) $y=\arccos x$;

3) $y=\frac{1}{\sin x}$; 4) [illegible]

5) $y=|x-1|+|x+2|$; 6) [illegible]

V БОБ

Ҳосила ва унинг қўлланилиши



22-§. ҲОСИЛА

1-масала. Метро станциясида тормоз белгисидан биринчи вагоннинг тўхташигача бўлган масофа 80 м га тенг. Агар метро поезди тормоз белгисидан кейин $1{,}6 \text{м/с}^2$ текис секинланувчан тезланиш билан ҳаракат қилса, у ҳолда метро поезди бу белгига қандай тезлик билан келиши керак?

$\triangle$ Масалани ечиш учун поезднинг тормоз белгисидан ўтиш моментидаги тезлигини, яъни шу вақт моментидаги оний тезлигини топиш керак. Тормоз йўли $s=\frac{at^2}{2}$ формула билан ҳисобланади, бунда a — тезланиш, t — тормозланиш вақти. Мазкур ҳолда $s=80$, $a=1{,}6$, шунинг учун $80=0{,}8t^2$, бундан $t=10$с. $v=at$ формуладан оний тезликни топамиз: $v=1{,}6\cdot 10=16$, яъни $v=16$м/с. $\blacktriangle$

Кўпчилик амалий масалаларнинг ечими *оний тезликка* боғлиқ. Масалан, вишкадан сакраётган спортчининг сув остига ботиш чуқурлиги унинг сувга қандай тезлик билан шўнғишига боғлиқ, сунъий йўлдошнинг берилган орбитага чиқиши унинг учирилиш тезлигига боғлиқ. Оний тезликни топишда ҳаракатнинг кичик вақт оралиғидаги ўртача тезлигидан фойдаланилади. Ҳаракатнинг

Гильберт Давид (1862—1943) — немис математиги. Гильбертнинг ишлари математиканинг кўпгина бўлимлари (сонлар назарияси, математик мантиқ, дифференциал ва интеграл ҳисоб, математик физика ва бошқ.)нинг ривожланишига катта таъсир кўрсатди.

ўртача ва оний тезликлари ўзаро қандай боғланганлигини кўрайлик.

Нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган ва ҳаракат бошлангандан t вақт ўтганда $s(t)$ йўл ўтган бўлсин, яъни $s(t)$ функция берилган бўлсин.

Бирор t вақт моментини тайинлаймиз ва t дан $t+h$ гача вақт оралиғини қараймиз, бунда h — кичик сон. Нуқта t дан $t+h$ гача вақт оралиғида

$$s(t+h)-s(t)$$

га тенг йўл ўтган.

Нуқта ҳаракатининг шу вақт оралиғидаги *ўртача тезлиги* қуйидаги нисбатга тенг:

$$v_{\text{ўрт}}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Физика курсидан маълумки, h камайиши билан бу нисбат t вақт моментидаги *оний тезлик* деб аталувчи ва $v(t)$ каби белгиланувчи бирор сонга яқинлашади. $v(t)$ сони бу нисбатнинг h нолга интилгандаги *лимити* деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$v(t)=\lim\frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Бу тенглик $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ нисбатни $v(t)$ оний тезликнинг тақрибий қиймати сифатида қараш мумкин эканини англатади. Агар h камая бориб, нолга интилса, у ҳолда яқинлашиш хатоси исталганча кичик бўлади, яъни у ҳам нолга интилади.

Масалан, агар $s(t)=3t^2$ бўлса, у ҳолда

$$v_{\text{ўрт}}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{3(t+h)^2-3t^2}{h}=\frac{6th+3h^2}{h}=6t+3h.$$

Агар $h\to 0$ бўлса, у ҳолда $6t+3h\to 6t$, яъни $v_{\text{ўрт}}\to v(t)=6t$.

$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ нисбат *айирмали нисбат, унинг $h\to 0$ даги лимити* эса $s(t)$ *функциянинг ҳосиласи* деб аталади ва $s'(t)$ каби белгиланади (ўқилиши: «эс штрих те»).

Умуман, $f(x)$ функция бирор оралиқда аниқланган бўлиб, x — шу оралиқнинг нуқтаси ва $h\neq 0$ шундай сон бўлсинки, $x+h$ ҳам берилган оралиққа тегишли бўлсин. У ҳолда $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ айирмали нисбатнинг $h\to 0$ даги лимити (агар бу лимит мавжуд бўлса) *$f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи* деб аталади ва $f'(x)$ каби белгиланади (ўқилиши «эф штрих икс»).

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.} \qquad (1)$$

(1) формулада h (бунда $h \neq 0$) сони мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин эканини ва бунда $x+h$ сони $f(x)$ функция аниқланган оралиққа тегишли бўлиши зарур эканини таъкидлаймиз.

Агар $f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция *шу нуқтада дифференциалланувчи функция* деб аталади. Агар $f(x)$ функция бирор оралиқнинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция *шу оралиқда ҳосилага эга*, деб айтилади. Ҳосилани топиш амали *дифференциаллаш амали* деб аталади.

2-масала. $f(x)=x^2$ функциянинг ҳосиласини топинг.

$\triangle$ Айирмали нисбатни тузамиз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h.$$

Агар $h \to 0$ бўлса, $2x+h \to 2x$ бўлади, шунинг учун $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$. Демак, $(x^2)'=2x$. $\blacktriangle$

3-масала. $f(x)=x^3$ функциянинг ҳосиласини топинг.

$\triangle$ Аввал ушбу айирмани топамиз: $f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-$ $-x^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3=h(3x^2+3xh+h^2)$.

Энди айирмали нисбатни тузамиз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=3x^2+3xh+h^2.$$

Агар $h \to 0$ бўлса, $h^2 \to 0$ ва $3xh \to 0$ бўлади, шунинг учун $3x^2+$ $+3xh+h^2 \to 3x^2$. Демак, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2$, яъни $(x^3)'=$ $=3x^2$. $\blacktriangle$

4-масала. $f(x)=C$ функциянинг ҳосиласини топинг, бунда C — берилган сон.

$$\triangle \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{C-C}{h}=0.$$

Айирмали нисбат исталган $h \neq 0$ да нолга тенг бўлгани, яъни унинг қиймати $h \to 0$ да ўзгармагани учун бу нисбатнинг лимити ҳам нолга тенг бўлади. Шундай қилиб, *ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенг:* $(C)'=0$. $\blacktriangle$

5-масала. $f(x)=kx+b$ чизиқли функциянинг ҳосиласини топинг.

$$\triangle \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k(x+h)+b-(kx+b)}{h}=\frac{kh}{h}=k.$$

Айирмали нисбат исталган $h \neq 0$ да k га тенг бўлгани учун бу нисбатнинг лимити ҳам $h \to 0$ да k га тенг бўлади. Демак, $(kx+b)'=k$. $\blacktriangle$

Ушбу

$$\boxed{(kx+b)'=k}$$

формулани қўллаб масалан, қуйидагиларга эга бўламиз: $(3x+7)'=3$; $(-2x+1)'=-2$; $(5x)'=5$; $(x)'=1$.

Лимитлар назариясини ўрганиш ўрта мактаб дастурига кирмайди. Шунинг учун биз айирмали нисбатнинг лимити ва унинг хоссаларининг қатъий таърифини қарамаймиз. Шу сабабли ўрта мактаб математика курсида ҳосилалар учун баъзи формулалар қатъий исботланмайди ёки умуман исботсиз қабул қилинади.

Энг содда функцияларнинг ҳосилаларини топишда биз кўргазмали тасаввурлардан фойдаланамиз. Масалан, биз агар $h\to 0$ бўлса, у ҳолда $5h\to 0$, $h^2\to 0$, $5-3h\to 5$ ва ҳ.к. бўлиши ўз-ўзидан тушунарли, деб ҳисоблаймиз.

Машқлар

460. Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб, $f'(x)$ ни топинг:
1) $f(x)=3x+2$; 2) $f(x)=5x+7$;
3) $f(x)=3x^2-5x$; 4) $f(x)=-3x^2+2$.

461. $(kx+b)'=k$ формуладан фойдаланиб, функциянинг ҳосиласини топинг:
1) $f(x)=2x$; 2) $f(x)=4x$;
3) $f(x)=-7x+5$; 4) $f(x)=-5x-7$.

462. Нуқта $s(t)=1+3t$ қонун бўйича ҳаракат қилмоқда. Ҳаракатнинг 1) $t=1$ дан $t=4$ гача;
2) $t=0{,}8$ дан $t=1$ гача вақт оралиғидаги ўртача тезлигини топинг.

463. Агар
1) $s(t)=2t+1$; 2) $s(t)=2-3t$
бўлса, нуқта ҳаракатининг оний тезлигини топинг.

464. Ҳаракат қонуни $s(t)=0{,}25t+2$ формула билан берилган. Қуйидагини топинг:
1) ҳаракатнинг $t=4$ дан $t=8$ гача ўртача тезлигини;
2) ҳаракатнинг $t=4$ ва $t=8$ моментдаги тезлигини.

---

465. Агар нуқта ҳаракатининг $s(t)$ қонуни
1) $s(t)=\frac{3}{2}t^2$; 2) $s(t)=5t^2$
формула билан берилган бўлса, унинг ҳаракатининг оний тезлигини топинг.

466. $s(t)=t^2+2$ қонун бўйича ҳаракат қилаётган жисмнинг
1) $t=5$; 2) $t=10$
вақт моментидаги тезлигини аниқланг.

23-§. ДАРАЖАЛИ ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

1-масала $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ эканини исботланг.

$\triangle$ $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$ бўлсин. У ҳолда

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{(x+h)x}.$$

Агар $h\to 0$ бўлса, у ҳолда $x+h\to x$ ва шунинг учун касрнинг махражи x га интилади. Демак, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Бунда агар $x>0$ бўлса, у ҳолда $x+h>0$ бўлади, агар $x<0$ бўлса, у ҳолда $x+$ $+h<0$ бўлади деб фараз қилинади.

Шундай қилиб, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ формула $x\neq 0$ да ўринли.

2-масала. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ эканини исботланг.

$\triangle$ $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$, $x+h>0$ бўлсин. Айирмали нисбатни тузамиз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Сурат ва махражни $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ йиғиндига кўпайтирамиз. Қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Агар $h\to 0$ бўлса, у ҳолда $\sqrt{x+h}$ ифода $\sqrt{x}$ га интилади, шунинг учун охирги касрнинг махражи $2\sqrt{x}$ га интилади. Демак, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Шундай қилиб,

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

формула $x>0$ да ўринли. ▲

Шундай қилиб, бу ва бундан олдинги параграфда ҳосила учун қуйидаги формулалар ҳосил қилинди:

$$\boxed{\begin{gathered}(C)'=0;\ (x)'=1,\ (x^2)'=2x;\\ (x^3)'=3x^2;\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\quad x\neq 0;\quad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad x>0.\end{gathered}}$$

Охирги тўртта формула $p=2;\ 3;\ -1;\ \frac{1}{2}$ учун $f(x)=x^p$ даражали функция ҳосиласининг формулаларидир. Уларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(x^2)'=2x^{2-1},\ (x^3)'=3x^{3-1},\ (x^{-1})'=(-1)x^{-1-1},\ (x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.$$

24-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ ҚОИДАЛАРИ

Ҳосилани ҳисоблаётганда қуйидаги дифференциаллаш қоидалари фойдалидир.

1. *Йиғиндининг ҳосиласи ҳосилалар йиғиндисига тенг:*

$$\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).} \qquad (1)$$

Ҳосиланинг бу хоссаси батафсил бундай ифодаланади: агар $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар бири ҳосилага эга бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси ҳам ҳосилага эга бўлади ва (1) формула ўринлидир.

○ * $f(x)+g(x)=F(x)$ белгилаш киритамиз. У ҳолда $F(x+h)-F(x)=f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$. Шунинг учун айирмали нисбат қуйидагига тенг:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

$h\to 0$ да ўнг томондаги биринчи каср $f'(x)$ га тенг лимитга, иккинчи каср эса $g'(x)$ га тенг лимитга эга. Шунинг учун чап қисми $F'(x)=f'(x)+g'(x)$ га тенг лимитга эга, яъни (1) тенглик ўринли. ●

Бир неча функция йиғиндисининг ҳосиласи бу функциялар ҳосилалари йиғиндисига тенг эканлиги, *айирманинг ҳосиласи ҳосилалар айирмасига тенг* эканлиги шунга ўхшаш исботланади.

1-масала. Функциянинг ҳосиласини топинг.

1) $f(x)=x^3-x^2+x-3$;

2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

△ 1) $f'(x)=(x^3)'-(x^2)'+(x)'-(3)'=3x^2-2x+1.$

2) $f'(x)=(x^{\frac{1}{2}})'-(x^{-\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$ ▲

2. *Ўзгармас кўпайтувчини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:*

$$\boxed{(cf(x))'=cf'(x),} \qquad (2)$$

○ * $cf(x)=F(x)$ белгилаш киритамиз, у ҳолда

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

бундан $h\to 0$ да $F'(x)=cf'(x)$ га эга бўламиз. ●

2-масала. Агар $f(x)=\frac{1}{4}x^5-3x^3+7x-17$ бўлса, $f'(-2)$ ни ҳисобланг.

$$\triangle\ f'(x)=\left(\frac{1}{4}x^5\right)'-(3x^3)'+(7x)'-(17)'=$$

$$=\frac{1}{4}(x^5)'-3(x^3)'+7(x)'=\frac{5}{4}x^4-9x^2+7;$$

$$f'(-2)=\frac{5}{4}(-2)^4-9(-2)^2+7=-9. \quad \blacktriangle$$

Кўпайтманинг ва бўлинманинг ҳосиласи формулаларини исботсиз келтирамиз.

3. *Кўпайтманинг ҳосиласи:*

$$\boxed{(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).} \qquad (3)$$

3- м а с а л а . Агар $f(x)=3x^2-5$, $g(x)=2x+7$ бўлса, (3) формуланинг ўринли эканини текширинг.

$\triangle$ (3) формуланинг чап қисмида $(f(x)\cdot g(x))'=((3x^2-5)(2x+7))'=(6x^3+21x^2-10x-35)'=18x^2+42x-10$ га эга бўламиз.

(3) формуланинг ўнг қисмида $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=(3x^2-5)'\cdot(2x+7)+(3x^2-5)\cdot(2x+7)'=6x(2x+7)+(3x^2-5)2=18x^2+42x-10$ га эга бўламиз. $\blacktriangle$

4- м а с а л а . x нинг $f(x)=(x-1)^9(x+2)^6$ функция ҳосиласининг қиймати 0 га тенг бўладиган қийматларини топинг.

$\triangle$ (3) формулага кўра $f'(x)=9(x-1)^8(x+2)^6+6(x-1)^9(x+2)^5=3(x-1)^8(x+2)^5(3x+6+2x-2)=3(x-1)^8(x+2)^5(5x+4)$ га эга бўламиз.

$3(x-1)^8(x+2)^5(5x+4)=0$ тенгламани ечиб, $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-0{,}8$ бўлганда $f'(x)=0$ бўлишини топамиз. $\blacktriangle$

4. *Бўлинманинг ҳосиласи:*

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.} \qquad (4)$$

5- м а с а л а . $F(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

$\triangle$ $x^3=f(x)$, $x^2+1=g(x)$ белгилаш киритамиз. (4) формулага кўра қуйидагини топамиз:

$$F'(x)=\frac{(x^3)'(x^2+1)-x^3(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2(x^2+1)-x^3 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}. \quad \blacktriangle$$

6-м а с а л а . x нинг $f(x)=\frac{-1}{x^2+3}$ функция ҳосиласининг қиймати: 1) мусбат; 2) манфий бўладиган қийматларини топинг.

△ (4) формулага кўра $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+3)^2}$ га эга бўламиз.

1) $\frac{-2x}{(x^2+3)^2}>0$ тенгсизликни ечиб, топамиз $x<0$ да $f'(x)>0$;

2) $\frac{-2x}{(x^2+3)^2}<0$ тенгсизликни ечиб топамиз, $x>0$ да $f'(x)<$ <0. ▲

Машқлар

Функциянинг ҳосиласини топинг (478—480):

478. 1) x^2+x; 2) x^2-x; 3) $3x^2$; 4) $-17x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0,5x^3$; 7) $13x^2+26$; 8) $8x^2-16$.

479. 1) $3x^2-5x+6$; 2) $5x^2+6x-7$; 3) x^4+2x^2;
4) x^5-3x^2; 5) x^3+5x; 6) $-2x^3+18x$;
7) $2x^3-3x^2+6x+1$; 8) $-3x^3+2x^2-x-5$.

480. 1) $x^2+\frac{1}{x^3}$; 2) $x^3+\frac{1}{x^2}$; 3) $2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[11]{x}$.

481. Агар.
1) $f(x)=x^2-2x+1$; 2) $f(x)=x^3-2x$;
3) $f(x)=-x^3+x^2$; 4) $f(x)=x^2+x+1$
бўлса, $f'(0)$ ва $f'(2)$ ни топинг.

482. $f'(3)$ ва $f'(1)$ ни топинг.
1) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1$;
3) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}$; 4) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$.

483. 1) $f(x)=x^3-2x$; 2) $f(x)=-x^2+3x+1$;
3) $f(x)=2x^3+3x^2-12x-3$; 4) $f(x)=x^3+2x^2-7x+1$;
5) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$; 6) $f(x)=x^4+4x^3-8x^2-5$.
x нинг $f(x)$ функция ҳосиласининг қиймати 0 га тенг бўладиган қийматларини топинг.

484. Функциянинг ҳосиласини топинг:
1) $(x-2)^2\cdot x^3$; 2) $(x^2-x)(x^3+x)$;
3) $(x+2)\cdot\sqrt[3]{x}$; 4) $(x-1)\sqrt{x}$.

485. $f'(1)$ ни топинг:
1) $f(x)=(x-1)^6(2-x)^7$; 2) $f(x)=(2x-1)^5(1+x)^4$;
3) $f(x)=\sqrt{2-x}\cdot(3-2x)^8$; 4) $f(x)=(5x-4)^6\cdot\sqrt{3x-2}$.

486. x нинг кандай кийматларида $y=(x-3)^5(2+5x)^6$ функция хосиласининг киймати 0 га тенг бўлади?

487. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $\frac{x^5+x^3+x}{x+1}$; 2) $\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{x-1}$.

488. $f'(1)$ ни топинг:

1) $f(x)=\frac{2x-1}{2x+1}$; 2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

3) $f(x)=\frac{2x-3}{5-4x}$; 4) $f(x)=\frac{2x^2}{1-7x}$.

Функциянинг ҳосиласини топинг (489—492):

489.

1) $\frac{x^4+x^3+81}{x^2}$; 2) $\frac{x^3+x^2+16}{x}$; 3) $\frac{x\sqrt{x}+x^2+3}{\sqrt{x}}$; 4) $\frac{x\sqrt[3]{x}+3x+18}{\sqrt[3]{x}}$.

490. 1) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 2) $\frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$;

3) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

491. 1) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)$; 2) $(x-1)^4(x+1)^7$;

3) $\sqrt[4]{3x+2}\,(3x-1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3$.

492. 1) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; 2) $\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}$;

3) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x}$; 4) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$.

493. x нинг қандай қийматларида функциянинг ҳосиласи мусбат қийматлар қабул қилишини аниқланг:

1) $f(x)=x^4-4x^2+1$; 2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+3$;

3) $f(x)=(x+2)^2\sqrt{x}$; 4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.

494. x нинг қандай қийматларида функциянинг ҳосиласи манфий қийматлар қабул қилишини аниқланг:

1) $(5-3x)^4(3x-1)^3$; 2) $(2x-3)^2(3-2x)^3$;

3) $\frac{3x^2-1}{1-2x}$; 4) $\frac{3x^3}{1-3x}$.

495. Жисмнинг ўқ атрофида бурилиш бурчаги t вақтга боғлиқ равишда $\varphi(t)=0{,}1t^2-0{,}5t+0{,}2$ қонун бўйича ўзгаради. Жисм айланишининг $t=20$с вақт моментидаги бурчак тезлигини (рад/с ларда) топинг.

496*. Массаси $m=5$ кг бўлган жисм тўғри чизиқ бўйлаб $s=1-t+t^2$ (бунда s метрларда, t секундларда ўлчанади) қонун бўйича ҳаракатланмоқда. Жисмнинг ҳаракат бошланган-дан 10 с дан кейинги $\frac{mv^2}{2}$ кинетик энергиясини топинг.

497**. Узунлиги 25 см бўлган ингичка бир жинслимас стерженнинг массаси (г ларда) $m=2l^2+3l$ (бунда l — стерженнинг унинг бошидан бошлаб хисобланган узунлиги) қонун бўйича тақсимланган. 1) Стержень бошидан 3 см масофадаги нуқтада; 2) стержень охиридаги нуқтада чизиқли зичликни топинг.

498**. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ функциянинг $x<2$ даги ва $x>3$ даги ҳосилаларини топинг.

25-§. БАЪЗИ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

Элементар функция деб даражали, кўрсаткичли, логарифмик ва тригонометрик функцияларга, шунингдек, уларнинг турли комбинацияларига айтилади. Кўпчилик амалий масалаларни ечишда кўпинча шундай функцияларнинг ҳосилаларини топишга тўғри келади.

Масалан, ўзгарувчан ток занжиридаги кучланиш $U(t)=$ $=A\sin(\omega t+\varphi)$ формула билан ифодаланади; $I(t)$ ток кучини топиш учун $U'(t)$ ҳосилани топа билиш керак, чунки $I(t)=U'(t)$.

1. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи

$f(x)=a^x$ (бунда, $a>0$, $a\neq 1$) кўрсаткичли функция бутун сонлар ўқида аниқланган ва унинг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга. Исталган кўрсаткичли функцияни қуйидаги формула бўйича e асосли кўрсаткичли функция орқали ифодалаш мумкин:

$$a^x=e^{x\ln a}, \tag{1}$$

чунки $e^{x\ln a}=(e^{\ln a})^x=a^x$. Олий математика курсида e^x функция ушбу ажойиб хоссага эга эканлиги исботланади: унинг ҳосиласи яна e^x га тенг, яъни

$$\boxed{(e^x)'=e^x.} \tag{2}$$

Яна

$$(e^{kx+b})'=ke^{kx+b} \tag{3}$$

эканини ҳам исботлаш мумкин.

Масалан, $(e^{3x+1})'=3e^{3x+1}$; $(e^{-2x-4})'=-2e^{-2x-4}$.

1-масала. a^x (бунда $a<0$, $a\neq 1$) функциянинг ҳосиласини топинг.

△ (1) ва (3) формулалардан фойдаланиб,
$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=\ln a\cdot e^{x\ln a}=\ln a\cdot a^x$ эканини топамиз. ▲

Шундай қилиб,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.} \tag{4}$$

Масалан, $(3^x)' = 3^x \ln 3$, $(0{,}7^x)' = 0{,}7^x \ln 0{,}7$.

2*. Логарифмик функциянинг ҳосиласи

Исталган $a > 0$, $a \neq 1$ асосли $\log_a x$ логарифмик функцияни ушбу

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{5}$$

ўтиш формуласи ёрдамида e асосли логарифмик функция орқали ифодалаш мумкин.

$\ln x$ функциянинг ҳосиласи қуйидаги формула билан ифодаланади

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0} \tag{6}$$

Шунингдек, қуйидаги формула ҳам ўринли:

$$(\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b} \tag{7}$$

Масалан, $(\ln(4x - 3))' = \frac{4}{4x - 3}$, $(\ln(1 - 2x))' = \frac{-2}{1 - 2x} = \frac{2}{2x - 1}$.

2-масала. $\log_a x$ (бунда $a > 0$, $a \neq 1$) функциянинг ҳосиласини топинг.

△ (5) ва (6) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \ \blacktriangle$$

Шундай қилиб,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}} \tag{8}$$

Масалан,

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}, \qquad (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}.$$

3. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

Синуснинг ҳосиласи формуласини қандай келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатамиз.

$f(x) = \sin x$ белгилаш киритамиз ва айирмали нисбатни тузамиз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Агар $h\to 0$ бўлса, у ҳолда $x+\frac{h}{2}\to x$ ва $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x$.

$h\to 0$ да $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$ бўлишини исботлаш мумкин. Бунга микрокалькулятор ёрдамида кўргазмали ишонч ҳосил қилиш мумкин. Масалан, $h=0,5$; $0,1$; $0,01$; $0,001$ да $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ каср мос равишда қуйидаги қийматларни қабул қилади:

0,9896158; 0,99958336; 0,9999984; 0,99999994.

Шундай қилиб, $(\sin x)'=\cos x$.

$(\cos x)'=-\sin x$ эканига шунга ўхшаш ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шундай қилиб, қуйидаги формулалар ўринли:

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x.}\tag{9}$$

Шунингдек, қуйидаги формулалар ҳам ўринли:

$$\begin{aligned}(\sin(kx+b))'&=k\cos(kx+b),\\ (\cos(kx+b))'&=-k\sin(kx+b).\end{aligned}\tag{10}$$

Масалан, $\sin\left(\frac{1}{4}x-1\right)'=\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{4}x-1\right)$, $\cos(3-4x)'=$
$=-(-4)\sin(3-4x)=4\sin(3-4x)$.

3-масала. $\operatorname{tg}x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

△ Бўлинманинг дифференциали қоидасидан ва (9) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.\ ▲$$

4. Дифференциаллаш қоидалари ва ҳосилалар учун формулаларнинг масалалар ечишга қўлланилиши

Якуний жадвални келтирамиз:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x), \quad (cf(x))'=cf'(x),$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$
$$(x^p)'=px^{p-1}, \quad (e^x)'=e^x, \quad (\ln x)'=\frac{1}{x},$$
$$(a^x)'=a^x\ln a, \quad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},$$
$$(\sin x)'=\cos x, \quad (\cos x)'=-\sin x.$$

4-масала. Функциянинг ҳосиласини топинг:

1) $f(x)=\sin(2x+1)-3\cos(1-x)$;

2) $f(x)=e^{-3x}\sin(5x-1)$;

3) $f(x)=\frac{\ln 3x}{x+1}$.

△ 1) $f'(x)=2\cos(2x+1)-3\sin(1-x)$;

2) $f'(x)=-3e^{-3x}\sin(5x-1)+5e^{-3x}\cos(5x-1)$;

3) $f'(x)=\frac{\frac{3}{3x}(x+1)-1\cdot\ln 3x}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x\ln 3x}{x(x+1)^2}$. ▲

5-масала.* x нинг $f(x)=x^2-2\ln x$ функция ҳосиласининг қийматлари нолга тенг бўладиган, мусбат, манфий бўладиган қийматларини топинг.

△ Ҳосилани топамиз: $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$.

$(x^2-2\ln x)'=2x-\frac{2}{x}$ тенглик x нинг тенгликнинг иккала қисми маънога эга бўладиган қийматларида, яъни $x>0$ да ўринли эканини таъкидлаймиз.

$\frac{2(x^2-1)}{x}$ ифода $x_{1,2}=\pm1$ да 0 га тенг, $-1<x<0$ ва $x>1$ оралиқларда мусбат, $x<-1$ ва $0<x<1$ оралиқларда манфий. $x>0$ бўлгани учун фақат $x=1$ да $f'(x)=0$ бўлади; $x>1$ да $f'(x)>0$; $0<x<1$ да $f'(x)<0$. ▲

Машқлар

Функциянинг ҳосиласини топинг (499—507):

499. 1) e^x+1; 2) e^x+x^2;

3) $e^{2x}+\frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x}+\sqrt{x}$.

500. 1) $e^{2x+1}+2x^3$; 2) $e^{\frac{1}{2}x-1}-\sqrt{x-1}$;

3) $e^{0,3x+2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $e^{1-x}+x^{-3}$.

501. 1) 2^x+e^x; 2) 3^x-x^{-2};

3) $e^{2x}-x$; 4) $e^{3x}+2x^2$.

502. 1) $0{,}5^x+e^{3x}$; 2) 3^x-e^{2x};

3) $e^{2-x}+\sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x}+\frac{1}{x^4}$.

503. 1) $2\ln x+3^x$; 2) $3\ln x-2^x$;

3) $\log_2 x+\frac{1}{2x}$; 4) $3x^{-3}-\log_3 x$.

504. 1) $\sin x+x^2$; 2) $\cos x-1$;

3) $\cos x+e^x$; 4) $\sin x-2^x$.

505. 1) $\sin(2x-1)$; 2) $\cos(x+2)$;

3) $\cos(1-x)$; 4) $\sin(3-x)$.

506. 1) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)+e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x$;

3) $\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2x}$; 4) $3\cos 4x-\frac{1}{2x}$.

507. 1) $\frac{\cos x}{e^x}$; 2) $\frac{3^x}{\sin x}$; 3) $\ln x\cdot\cos 3x$; 4) $\log_3 x\cdot\sin 2x$.

508. $f(x)$ функция ҳосиласининг x_0 нуқтадаги қийматини топинг:

1) $f(x)=e^{2x-4}+2\ln x$, $x_0=2$;

2) $f(x)=e^{3x-2}-\ln(3x-1)$, $x_0=\frac{2}{3}$;

3) $f(x)=2^x-\log_2 x$, $x_0=1$;

4) $f(x)=\log_{0,5}x-3^x$, $x_0=1$.

509. x нинг қандай қийматларида $f(x)$ функция ҳосиласининг қиймати 0 га тенг бўлишини аниқланг:

1) $f(x)=x-\cos x$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$;

3) $f(x)=2\ln(x+3)-x$; 4) $f(x)=\ln(x+1)-2x$;

5) $f(x)=x^2+2x-12\ln x$; 6) $f(x)=x^2-6x-8\ln x$.

510. x нинг қандай қийматларида $f(x)$ функция ҳосиласининг қиймати мусбат бўлишини аниқланг:

1) $f(x)=e^x-x$; 2) $f(x)=x\ln 2-2^x$;

3) $f(x)=e^x\cdot x^2$; 4) $f(x)=e^x\cdot\sqrt{x}$.

Функциянинг ҳосиласини топинг (511—515):

511. 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{3}}+\ln\frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}}-2\ln\frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}}+3\cos\frac{1-x}{2}$; 4) $3e^{\frac{2-x}{3}}-2\sin\frac{1+x}{4}$.

512. 1) $5\sin\frac{2x+3}{4}-4\sqrt{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{3}{2-x}}-3\cos\frac{x-2}{3}$;

3) $6\sqrt[3]{\frac{1}{(2-x)^2}}+4e^{\frac{3-5x}{2}}$; 4) $2\sqrt[4]{\frac{1}{(x+2)^3}}-5e^{\frac{x-4}{5}}$

513. 1) $0{,}5^x\cdot\cos 2x$; 2) $5\sqrt{x}\cdot e^{-x}$;

3) $\ln(1-3x)\cdot\sin x$; 4) $e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x)$.

514. 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{e^{0,5x}}{\cos 2x-5}$; 4) $\frac{5^{2x}}{\sin 3x+7}$.

515. 1) $\frac{e^x-e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x-\log_2 x}{\ln 2\cdot x}$;

3) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$; 4) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

516. x нинг қандай қийматларида $f(x)$ функция ҳосиласининг қиймати 0 га тенг бўлишини аниқланг:

1) $f(x)=5(\sin x-\cos x)+\sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x)=1-5\cos 2x+2(\sin x-\cos x)-2x$.

517*. $f(x)$ функциянинг қийматлари нолга тенг бўладиган нуқталарда унинг ҳосиласининг қийматларини топинг:

1) $f(x)=e^{2x}\ln(2x-1)$;

2) $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}$.

518*. Агар $f(x)=x\sin 2x$, $x=\pi$ бўлса, $f'(x)+f(x)+2$ ни ҳисобланг.

519. x нинг $f(x)$ функция ҳосиласининг қийматлари 0 га тенг, мусбат, манфий бўладиган қийматларини топинг:

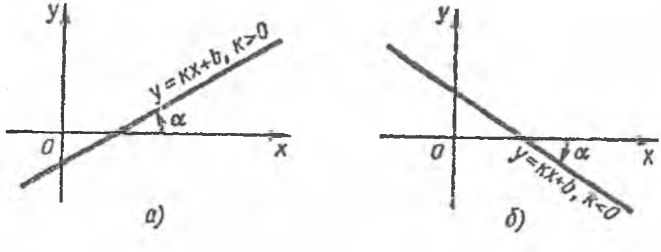
1) $f(x)=x-\ln x$; 2) $f(x)=x\ln x$;

3) $f(x)=x^2\ln x$; 4) $f(x)=x^3-3\ln x$.

520**. $\ln(x^2-5x+6)$ функциянинг $x<2$ даги ва $x>3$ даги ҳосиласини топинг.

26-§. ҲОСИЛАНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

$y=kx+b$ чизиқли функциянинг графиги тўғри чизиқ (47-расм) бўлишини эслатиб ўтамиз. $k=\operatorname{tg}\alpha$ сони *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти*, α бурчак эса шу *тўғри чизиқ билан Ox ўқи орасидаги бурчак деб* аталади.



47- расм

Агар $k>0$ бўлса, у ҳолда $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бўлади (47- *a*, расм); бу ҳолда $y=kx+b$ функция ўсади ва *тўғри чизиқ юқорига йўналган* деб аталади.

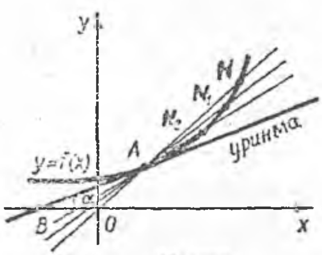
Агар $k<0$ бўлса, у ҳолда $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ бўлади (47-*б*, расм); бу ҳолда $y=kx+b$ функция камаяди ва *тўғри чизиқ пастга йўналган* деб айтилади.

Дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция ҳосиласининг геометрик маъносини аниқлаймиз.

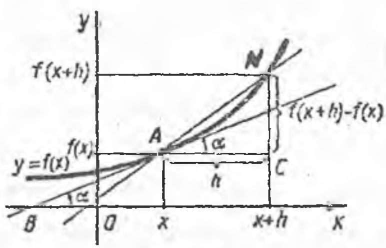
A ва N нуқталар $y=f(x)$ функциянинг графигига тегишли бўлсин (48- расм). Агар A нуқта кўзғалмас, N нуқта эса график бўйлаб ҳаракатланиб, A нуқтага яқинлашса, у ҳолда AN тўғри чизиқ бирор AB лимит тўғри чизиққа яқинлашади (48- расм). Бу AB тўғри чизиқ $y=f(x)$ *функцияга A нуқтада ўтказилган уринма* деб аталади.

x ва $x+h$ лар A ва N нуқталарнинг абсциссалари бўлсин (49- расм), у ҳолда уларнинг ординаталари $f(x)$ ва $f(x+h)$ га тенг бўлади. ACN учбурчакдан (49- расм) $\operatorname{tg}\angle CAN=\frac{NC}{AC}$ ёки

$$\operatorname{tg}\angle CAN=\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{1}$$



48- расм



49- расм

га эга бўламиз. Агар x сони тайинланган ва $h \to 0$ бўлса, у ҳолда A нуқта қўзғалмас, N нуқта эса график бўйлаб ҳаракатланиб, A нуқтага интилади. Бунда AN тўғри чизиқ AB уринмага интилади, $\angle AN$ бурчак α бурчакка интилади ва шунинг учун (1) формуланинг чап қисми $\operatorname{tg}\alpha$ га интилади. (1) формуланинг ўнг қисми $h \to 0$ да $f'(x)$ га интилади. Шундай қилиб, (1) формуладан $h \to 0$ да қуйидагига эга бўламиз:

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg}\alpha.} \tag{2}$$

! Шундай қилиб, ҳосиланинг геометрик маъноси қуйидагича: функция ҳосиласининг нуқтадаги қиймати функция графигига шу нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентига тенг.

1-масала. $y = \sin x$ функция графигига (0;0) нуқтада ўтказилган уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчакни топинг.

$\triangle$ $y = \sin x$ эгри чизиққа (0;0) нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини, яъни $x = 0$ да шу функция ҳосиласининг қийматини топамиз.

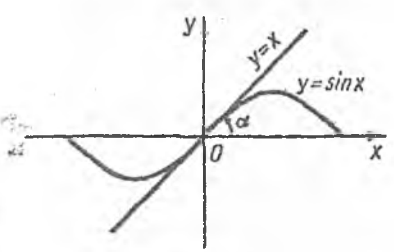
$f(x) = \sin x$ функциянинг ҳосиласи $f'(x) = \cos x$. (2) формулага кўра $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = \cos 0 = 1$ га эга бўламиз, бундан $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (50- расм). $\blacktriangle$

Бу хосса $y = \sin x$ функциянинг графигини ясаш учун фойдали эканини таъкидлаб ўтамиз: (0;0) нуқтада синусоида $y = x$ тўғри чизиққа уринади (50- расм).

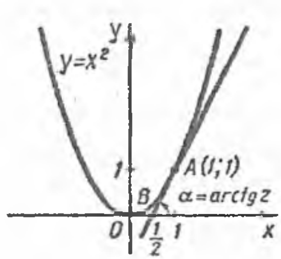
2-масала. $y = x^2$ параболага (1;1) нуқтада ўтказилган уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчакни топинг ва бу уринманинг тенгламасини ёзинг.

$\triangle$ $f(x) = x^2$ функциянинг ҳосиласи $2x$ га тенг: $f'(x) = 2x$. (2) формулага кўра $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ эканини топамиз, бундан $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (51- расм).

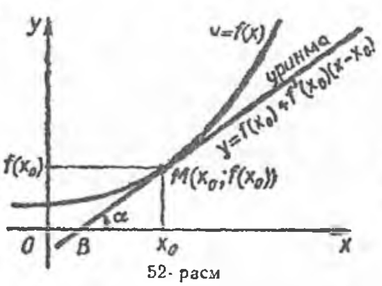
Энди $y = x^2$ параболага A (1; 1) нуқтада ўтказилган AB уринманинг тенгламасини топамиз. Агар $y = kx + b$ шу AB тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлса, у ҳолда $k = \operatorname{tg}\alpha = 2$, яъни уринманинг тенгламаси $y = 2x + b$ кўринишга эга бўлади. Бу тенгламага (1;



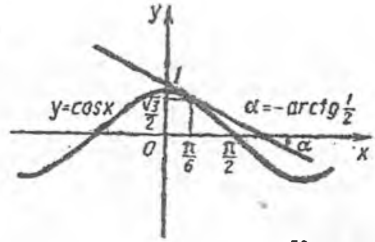
50- расм



51- расм



52- расм



53- расм

1) нуқтанинг координаталарини қўйиб, $1=2\cdot1+b$ га эга бўламиз, бундан $b=-1$. Демак, $y=2x-1$ — изланаётган уринманинг тенгламаси. ▲

2-масалада қилингани каби дифференциалланувчи $y=f(x)$ функцияга $(x_0;\ f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини келтириб чиқарамиз (52-расм).

Агар $y=kx+b$ — изланаётган тенглама бўлса, у ҳолда (2) формулага кўра $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$ ни топамиз, яъни уринманинг тенгламаси $y=f'(x_0)x+b$ кўринишга эга бўлади. Бу тенгламага нуқтанинг $(x_0;\ f(x_0))$ координаталарини қўйиб, $f(x_0)=f'(x_0)x_0+b$ га эга бўламиз, бундан $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$. Шундай қилиб, уринманинг тенгламаси: $y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$ ёки

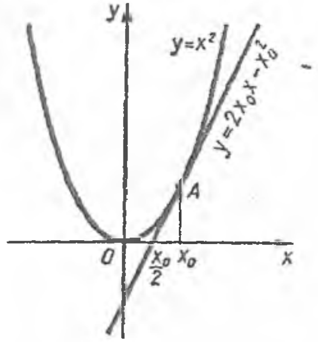
$$\boxed{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).} \tag{3}$$

3-масала. $y=\cos x$ функция графигига $x_0=\frac{\pi}{6}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини топинг.

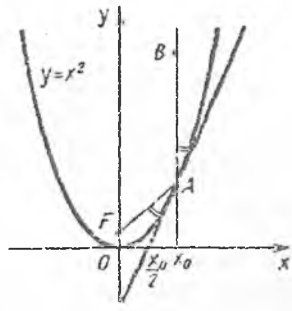
△ $f(x)=\cos x$ функциянинг ва унинг ҳосиласининг $x_0=\frac{\pi}{6}$ нуқтадаги қийматлари қуйидагига тенг: $f(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$. (3) формуладан фойдаланиб, уринманинг изланаётган тенгламасини тузамиз: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ ёки $y=-\frac{1}{2}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$. ▲

$y=\cos x$ функция графигига $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нуқтада ўтказилган уринма 53- расмда тасвирланган.

4*-масала. $y=x^2$ параболага x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган уринма Ox ўқини $\frac{x_0}{2}$ нуқтада кесиб ўтишини кўрсатинг.



54- расм



55- расм

△ $f(x)=x^2$ бўлсин, у ҳолда $f'(x)=2x$, $f(x_0)=x_0^2$ ва $f'(x_0)=$ $=2x_0$.

(3) формула бўйича уринманинг тенгламасини топамиз:

$$y=x_0^2+2x_0(x-x_0)=2x_0x-x_0^2.$$

Бу уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасини топамиз. $2x_0x-x_0^2=0$ тенгликдан $x=\frac{x_0}{2}$ эканини топамиз. ▲

Бу ердан *$y=x^2$ параболага x_0* абсциссали A нуқтада *ўтказилган уринмани энг содда геометрик ясаш усули* келиб чиқади: A нуқта ва абсциссалар ўқининг $\frac{x_0}{2}$ нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқ параболага A нуқтада уринади (54- расм).

Параболага ўтказилган уринмани ясаб, унинг *F фокусини ясаш* мумкин. Фокус деб ёруғлик манбаини ундан тарқалувчи барча нурларнинг параболик кўзгудан параболанинг симметрия ўқига параллел равишда қайтадиган қилиб жойлаштирилиши керак бўлган нуқтага айтилишини эслатиб ўтамиз. *F фокусни ясаш учун Oy* ўқига параллел AB тўғри чизиқни ва уринма билан AB тўғри чизиқ ҳосил қилган бурчакка тенг бурчак ҳосил қилувчи AF тўғри чизиқни ясаш керак (55- расм).

Машқлар

521. Агар $y=kx+b$ тўғри чизиқ $(x_0;\ y_0)$ нуқта орқали ўтса ва Ox ўқи билан α бурчак ҳосил қилса, k ва b нинг қийматини топинг:

1) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $x_0=2$, $y_0=-3$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $x_0=-3$, $y_0=2$;

3) $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $x_0=1$, $y_0=1$; 4) $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $x_0=-1$, $y_0=-$ [illegible]

522. $y=f(x)$ функция графигига x_0 абсциссали нуктада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг:

1) $f(x)=x^3,\ x_0=1;$ 2) $f(x)=\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{4};$

3) $f(x)=\ln x,\ x_0=1;$ 4) $f(x)=e^x,\ x_0=\ln 3.$

523. $y=f(x)$ функция графигига x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчакни топинг:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3,\ x_0=1;$ 2) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=1;$

3) $f(x)=2\sqrt{x},\ x_0=3;$ 4) $f(x)=\frac{18}{\sqrt{x}},\ x_0=3;$

5) $f(x)=e^{\frac{3x+1}{2}},\ x_0=0;$ 6) $f(x)=\ln(2x+1),\ x_0=2.$

524. $y=f(x)$ функция графигига x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $f(x)=x^2+x+1,\ x_0=1;$ 2) $f(x)=x-3x^2,\ x_0=2;$

3) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=3;$ 4) $f(x)=\frac{1}{x^2},\ x_0=-2;$

5) $f(x)=\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{4};$ 6) $f(x)=e^x,\ x_0=0;$

7) $f(x)=\ln x,\ x_0=1;$ 8) $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1.$

---

525. $y=f(x)$ функция графигига $x=0$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $f(x)=x-2\sqrt{x+1};$ 2) $f(x)=x+\frac{1}{x+1};$

3) $f(x)=e^{2x}+\sin x;$ 4) $f(x)=\sin 2x-\ln(x+1).$

526. $y=f(x)$ функция графигига $x=0$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма билан Oy ўқи орасидаги бурчакни топинг:

1) $f(x)=x+e^{-x};$ 2) $f(x)=\cos x;$

3) $f(x)=x^2+\sin x;$ 4) $f(x)=\sqrt{x+1}+e^{\frac{x}{2}}.$

527*. Функцияларнинг графиклари қандай бурчак остида кесишишади (*эгри чизиқларнинг* кесишиш нуқталаридаги улар *орасидаги бурчак* деб бу эгри чизиқларга шу нуқтада ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади):

1) $y=8-x$ ва $y=4\sqrt{x+4};$

2) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ ва $y=\frac{1}{2}(x-1)^2;$

3) $y=\ln(1+x)$ ва $y=\ln(1-x)$,

4) $y=e^x$ ва $y=e^{-x}$?

528*. Берилган икки функциянинг графиклари битта умумий нуктага ва бу нуктада умумий уринмага эга эканлигини кўрсатинг; шу уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $y=x^4$ ва $y=x^6+2x^2$;

2) $y=x^4$ ва $y=x^3-3x^2$;

3) $y=(x+2)^2$ ва $y=2-x^2$;

4) $y=x(2+x)$ ва $y=x(2-x)$.

529*. $y=f(x)$ функция графигининг шундай нукталарини топингки, бу нукталарда шу графикка ўтказилган уринма $y=kx$ тўғри чизикка параллел бўлсин:

1) $f(x)=e^x+e^{-x}$, $k=\frac{3}{2}$; 2) $f(x)=\sqrt{3x+1}$, $k=\frac{3}{4}$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $k=2$; 4) $f(x)=x+\sin x$, $k=0$.

530**. $y=\frac{x+2}{x-2}$ функция графигига кайси нукталарда ўтказилган уринмалар Ox ўки билан $-\frac{\pi}{4}$ га тенг бурчак хосил килади?

531**. $f(x)=x^3-x-1$ ва $g(x)=3x^2-4x+1$ эгри чизикларга ўтказилган уринмалар параллел бўладиган нукталарни топинг. Шу уринмаларнинг тенгламаларини ёзинг.

V БОБГА ДОИР МАШКЛАР

Функциянинг хосиласини топинг (532—536):

532. 1) $2x^4-x^3+3x+4$; 2) $-x^5+2x^3-3x^2-1$;

3) $6\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3}-8\sqrt[4]{x}$; 5) $(2x+3)^8$;

6) $(4-3x)^7$; 7) $\sqrt[3]{3x-2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

533. 1) $e^x-\sin x$; 2) $\cos x-\ln x$; 3) $\sin x-\sqrt[3]{x}$;

4) $6x^4-9e^x$; 5) $\frac{5}{x}+4e^x$; 6) $\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2}\ln x$.

534. 1) $\sin 5x+\cos(2x-3)$; 2) $e^{2x}-\ln 3x$;

3) $\sin(x-3)-\ln(1-2x)$; 4) $6\sin\frac{2x}{3}-e^{1-3x}$.

535. 1) $x^2\cos x$; 2) $x^3\ln x$; 3) $5xe^x$;

4) $x\sin 2x$; 5) $e^{-x}\sin x$; 6) $e^x\cos x$.

536. 1) $\frac{x^3+1}{x^2+2}$; 2) $\frac{x^2}{x^3+1}$; 3) $\frac{\sin x}{x+1}$; 4) $\frac{\ln x}{1-x}$.

537. x нинг $f(x)$ функция ҳосиласининг қиймати нолга тенг, мусбат, манфий бўладиган қийматларини топинг:

1) $f(x)=2x^3-x^2$; 2) $f(x)=-3x^3+2x^2+4$;

3) $f(x)=x^5-5x^3-20x$; 4) $f(x)=(x+3)^3(x-4)^2$;

5) $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$; 6) $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$.

538. $f(x)$ функция ҳосиласининг x_0 абсциссали нуқтадаги қийматини топинг:

1) $f(x)=\cos x\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{6}$; 2) $f(x)=e^x\ln x,\ x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{2\cos x}{\sin x},\ x_0=\frac{\pi}{4}$; 4) $f(x)=\frac{x}{1+e^x},\ x^0=0$.

539. Функция графигига x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $y=x^2-2x,\ x_0=3$; 2) $y=x^3+3x,\ x_0=3$;

3) $y=\sin x,\ x_0=\frac{\pi}{6}$; 4) $y=\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{3}$.

540. Жисмнинг ҳаракат қонуни $s(t)=0{,}5t^2+3t+2$ формула билан берилган (s — метр ҳисобида, t — секунд ҳисобида). 4с да жисм қандай йўл ўтган? Шу вақт моментидаги ҳаракат тезлиги қандай?

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КЎРИНГ!

1. $f(x)=3x^3+4x-1$ функция ҳосиласининг $x=3$ нуқтадаги қийматини топинг.
2. Функциянинг ҳосиласини топинг:

$$\frac{3}{x}+2\sqrt{x}-e^x;\quad (3x-5)^4;\quad 3\sin 2x\cdot\cos x;\quad \frac{x^3}{x^2+5}.$$

3. $y=\cos 3x$ функция графигига $x_0=\frac{\pi}{6}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.
4. $y=x^4-2x^3+3$ функция графигига $x_0=\frac{1}{2}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчакни топинг.

Функциянинг ҳосиласини топинг (541—542):

541. 1) $y=\cos^2 3x$; 2) $y=\sin^2\frac{x}{2}$;

3) $y=\sin x\cdot\cos x+x$; 4) $y=(x^3+1)\cos 2x$;

5) $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}\,(x^4-1)$.

542. 1) $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$; 2) $y=\frac{\sqrt{x+4}}{4x}$;

3) $y=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$; 4) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

543. x нинг $f(x)$ функция ҳосиласининг қиймати нолга тенг, мусбат, манфий бўладиган қийматларини топинг:

1) $f(x)=2^x+2^{-x}$; 2) $f(x)=3^{2x}-2x\ln 3$;

3) $f(x)=x+\ln 2x$; 4) $f(x)=x+\ln(2x+1)$;

5) $f(x)=6x-x\sqrt{x}$; 6) $f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-3x$.

544. Агар $f(x)=x^3+3x^2+ax$ бўлса, a нинг x нинг барча ҳақиқий қийматларида $f'(x)\geqslant 0$ бўладиган барча қийматларини топинг.

545. Агар $f(x)=ax^3-6x^2-x$ бўлса, a нинг x нинг барча ҳақиқий қийматларида $f'(x)<0$ бўладиган барча қийматларини топинг.

546. a нинг $f'(x)=0$ тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмайдиган барча қийматларини топинг, бунда:

1) $f(x)=ax^2-\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=ax+\frac{1}{x}$;

3) $f(x)=ax^3+3x^2+6x$; 4) $f(x)=x^3+6x^2+ax$.

547. a нинг $f'(x)<0$ тенгсизлик ҳақиқий ечимларга эга бўлмайдиган барча қийматларини топинг, бунда:

1) $f(x)=ax^7+x^3-1$; 2) $f(x)=x^5+ax^3+3$;

3) $f(x)=(x+a)\sqrt{x}$; 4) $f(x)=x+\frac{a}{x}$.

548. Функцияларнинг графиклари қандай бурчак остида кесишади:

1) $y=2\sqrt{x}$ ва $y=2\sqrt{6-x}$;

2) $y=\sqrt{2x+1}$ ва $y=1$?

549. Функция графигига x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $y=2\sin\frac{x}{2}$, $x_0=\frac{3\pi}{2}$; 2) $y=2^{-x}-2^{-2x}$, $x_0=2$;

3) $y=\frac{x+2}{3-x}$, $x_0=2$; 4) $y=x+\ln x$, $x_0=e$.

550 *. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2$ функция графигига $y=6x$ тўғри чизиққа параллел равишда ўтказилган уринмаларнинг тенгламаларини топинг.

551 *. Тўғри чизиқ $y=\frac{4}{x}$ гиперболага (1; 4) нуқтада уринади. Шу уринма ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзини топинг.

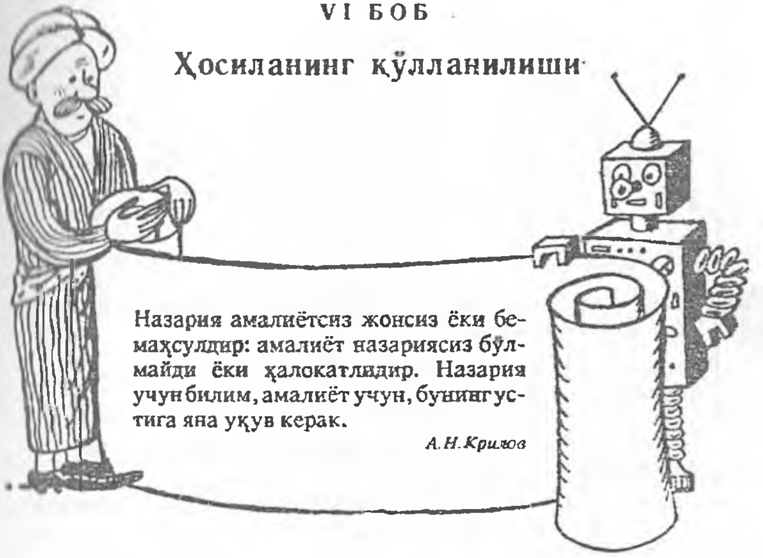
552 * *. Тўғри чизиқ $y=\frac{k}{x}$ (бунда $k>0$) гиперболага x_0 абсциссали нуқтада уринади.

1) Шу уринма ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзи уриниш нуқтасининг вазиятига боғлиқ эмаслигини исботланг, шу юзни топинг.

2) Шу уринма $(x_0;\ \frac{k}{x_0})$ ва $(2x_0;\ 0)$ нуқталар орқали ўтишини исботланг.

VI БОБ

Ҳосиланинг қўлланилиши



27-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСИШИ ВА КАМАЙИШИ

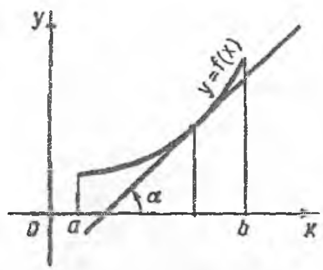
Ҳосила функцияларни текширишда, яъни функцияларнинг турли хоссаларини ўрганишда кенг қўлланилади. Масалан, ҳосила ёрдамида функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини, унинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш мумкин.

Ҳосиланинг функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топишда қўлланилишини кўриб чиқамиз.

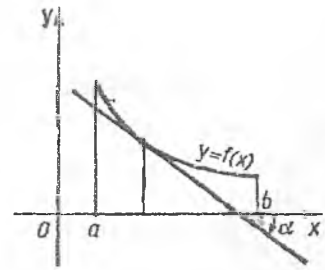
Бирор оралиқда $y=f(x)$ функция ҳосиласининг қийматлари мусбат, яъни $f'(x)>0$ бўлсин. У ҳолда бу функцияга берилган оралиқнинг ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринманинг $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$ бурчак коэффициенти мусбат бўлади; бу функцияга ўтказилган уринма юқорига йўналганлигини ва шунинг учун функция графиги бу оралиқда «кўтарилишини», яъни $f(x)$ функция ўсишини англатади (56- расм).

Агар бирор оралиқда $f'(x)<0$ бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция графигига ўтказилган уринманинг $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$ бурчак коэффициенти манфий бўлади. Бу функция графигига ўтказилган уринманинг пастга йўналганлигини ва шунинг учун функция графиги бу оралиқда «тушишини», яъни $f(x)$ функция камайишини англатади (57- расм).

Крилов Алексей Николаевич (1863—1945) — рус математиги, механиги, кемасози, академик. Асосий изланишлари кема назарияси, қурилиш механикаси, дифференциал тенгламалар назарияси ва фан тарихига тааллуқли.



56- расм



57- расм

Шундай қилиб, агар ораликда $f'(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция шу ораликда *ўсади.*

Агар ораликда $f'(x) < 0$ бўлса, $f(x)$ функция шу ораликда *камаяди.*

Бу тасдиқнинг қатъий исботи мактаб математика курси доирасига кирмайди.

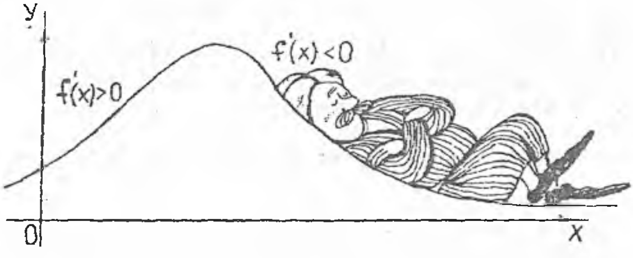
1- масала. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ функциянинг $x > 1$ ораликда ўсишини исботланг.

$\triangle$ Ҳосилани топамиз: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$. Агар $x > 1$ бўлса, у ҳолда $\frac{x^2-1}{x^2} > 0$, яъни $x > 1$ да $f'(x) > 0$ бўлади ва шунинг учун берилган функция $x > 1$ораликда ўсади. $\blacktriangle$

Функциянинг ўсиш ва камайиш ораликлари кўпинча шу функциянинг *монотонлик ораликлари* деб аталади.

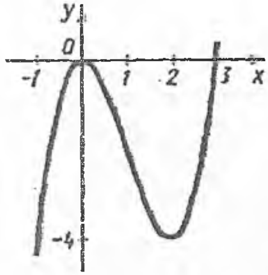
2-масала. $f(x) = x^3 - 3x^2$ функциянинг монотонлик интервалларини топинг.

$\triangle$ Ҳосилани топамиз: $f'(x) = 3x^2 - 6x$. $f'(x) > 0$ тенгсизликни, яъни $3x^2 - 6x > 0$ тенгсизликни ечиб, ўсиш ораликларини топамиз:



$x<0$, $x>2$. $f'(x)<0$ тенгсизликни, яъни $3x^2-6x<0$ тенгсизликни ечиб, камайиш оралиғини топамиз: $0<x<2$. ▲

$y=x^3-3x^2$ функциянинг графиги 58 расмда тасвирланган. Бу расмдан $y=x^3-3x^2$ функция фақат $x<0$ ва $x>2$ оралиқлардагина эмас, балки $x\leqslant 0$ ва $x\geqslant 2$ оралиқларда ҳам ўсиши; фақат $0<x<2$ оралиқдагина эмас, балки $0\leqslant x\leqslant 2$ оралиқда ҳам камайиши кўриниб турибди.



58- расм

Машқлар

553. $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$ функция $x>1$ оралиқда ўсишини, $x<0$ ва $0<x<1$ оралиқларда камайишини исботланг.

Функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг (554—558):

554. 1) $y=x^2-x$; 2) $y=5x^2-3x-1$;
3) $y=x^2+2x$; 4) $y=x^2+12x-100$.

555. 1) $y=x^3-3x$; 2) $y=x^4-2x^2$;
3) $y=2x^3-3x^2-36x+40$;
4) $y=x^3-6x^2+9$.

---

556. 1) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=1+\frac{2}{x}$;
3) $y=-\sqrt{x-3}$; 4) $y=1+3\sqrt{x-5}$.

557. 1) $y=\frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$;
3) $y=(x-1)e^{3x}$; 4) $y=x\cdot e^{-3x}$.

558*. 1) $y=x-\sin 2x$; 2) $y=3x+2\cos 3x$.

559**. a нинг қандай қийматларида функция бутун сонлар тўғри чизиғида ўсади:
1) $y=x^3-ax$; 2) $y=ax-\sin x$?

28- §. ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

58- расмда $y=x^3-3x^2$ функциянинг графиги тасвирланган. $x=0$ *нуқтанинг атрофини, яъни шу нуқтани ўз ичига олган бирор интервални* қараймиз. Расмдан кўриниб турганидек, $x=0$ нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, шу атрофда x^3-3x^2 функция энг катта қийматни $x=0$ нуқтада қабул қилади. Масалан, функция $(-1;\ 1)$ интервалда 0 га тенг энг катта қийматни $x=0$ нуқтада қабул қилади. $x=0$ нуқта бу функциянинг *максимум нуқтаси* деб аталади.

Шунга ўхшаш, $x=2$ нуқта x^3-3x^2 функциянинг *минимум нуқтаси* деб аталади, чунки функциянинг бу нуқтадаги қиймати унинг $x=2$ нуқтанинг бирор атрофига, масалан, $(1{,}5;\ 2{,}5)$ атрофга тегишли исталган нуқтасидаги қийматидан катта эмас.

Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофга тегишли барча x лар учун

$$f(x)\leqslant f(x_0)$$

тенгсизлик бажарилса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *максимум нуқтаси* деб аталади.

Масалан, $x_0=0$ нуқта $f(x)=1-x^2$ функциянинг максимум нуқтаси бўлади, чунки $f(0)=1$ ва x нинг барча қийматларида $f(x)\leqslant 1$ тенгсизлик ўринли (59-расм).

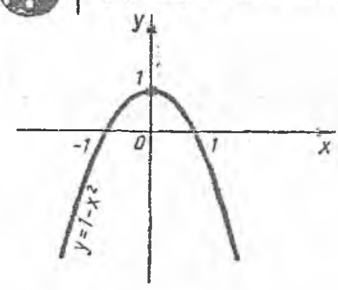
Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофга тегишли барча x лар учун

$$f(x)\geqslant f(x_0)$$

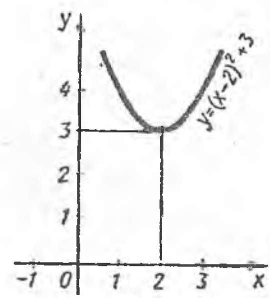
тенгсизлик бажарилса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг *минимум нуқтаси* деб аталади.

Масалан, $x_0=2$ нуқта $f(x)=3+(x-2)^2$ функциянинг минимум нуқтаси бўлади, чунки $f(2)=3$ ва барча x ларда $f(x)\geqslant 3$ (60- расм).

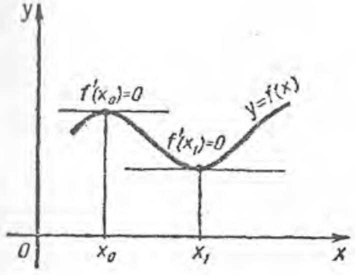
Минимум нуқталари ва максимум нуқталари *экстремум нуқталари* деб аталади.



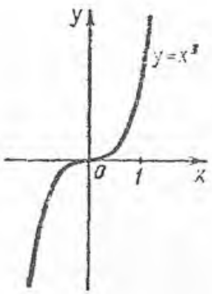
59- расм



60- расм



61- расм



62- расм

x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва шу нуқтада ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функцияни қараймиз.

Агар x_0 дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда $f'(x_0)=0$ бўлади.
Бу тасдиқ *Ферма теоремаси* деб аталади *.

Ферма теоремаси кўргазмали геометрик маънога эга: *экстремум нуқтасида уринма абсциссалар ўқига параллел* бўлади ва шунинг учун унинг $f'(x_0)$ бурчак коэффициенти нолга тенг бўлади (61- расм).

Масалан, $f(x)=1-x^2$ функция (59- расм) $x_0=0$ нуқтада максимумга эга, унинг ҳосиласи $f'(x)=-2x$, $f'(0)=0$. $f(x)=(x-2)^2+3$ функция $x_0=2$ нуқтада минимумга эга (60- расм), $f'(x)=2(x-2)$, $f'(2)=0$.

Агар $f'(x_0)=0$ бўлса, у ҳолда бу x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг албатта экстремум нуқтаси бўлади деб тасдиқлашга етарли эмаслигини таъкидлаб ўтамиз.

Масалан, агар $f(x)=x^3$ бўлса, у ҳолда $f'(0)=0$. Бироқ $x=0$ нуқта экстремум нуқтаси эмас, чунки x^3 функция бутун сонлар ўқида ўсади (62- расм).

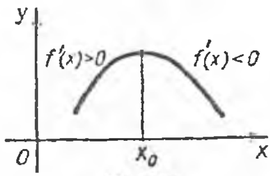
Шундай қилиб, дифференциалланувчи функциянинг экстремум нуқталарини $f'(x)=0$ тенгламанинг илдизлари орасидан излаш керак, бироқ ҳар доим ҳам бу тенгламанинг илдизи экстремум нуқтаси бўлавермайди. Функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўладиган нуқталар *стационар нуқталар* деб аталади.

Шундай қилиб, x_0 нуқта экстремум нуқтаси бўлиши учун унинг стационар нуқта бўлиши *зарурдир.*

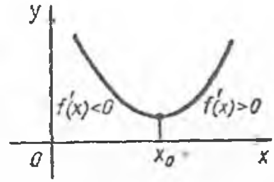
Стационар нуқта экстремум нуқтаси бўлишлигининг *етарлилик шартини* келтирамиз. Бу шарт бажарилганда стационар нуқта функциянинг максимум ёки минимум нуқтаси бўлади.

---

* Ферма Пьер (1601—1665) — француз математиги, сонлар назарияси ва математик анализнинг асосчиларидан бири.



63- расм



64- расм

Агар ҳосила стационар нуқталардан чапда мусбат, ўнгда эса манфий бўлса, яъни бу нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини «+» дан «—» га алмаштирса, у ҳолда бу стационар нуқта максимум нуқтаси бўлади (63-расм).

Ҳақиқатан, бу ҳолда стационар нуқтадан чапда функция ўсади, ўнгда эса камаяди, яъни берилган нуқта максимум нуқтасидир.

Агар стационар нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда бу стационар нуқта минимум нуқтаси бўлади (64- расм).

Агар стационар нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини ўзгартирмаса, яъни стационар нуқтанинг чап ва ўнг томонларида ҳосила мусбат ёки манфий бўлса, у ҳолда бу нуқта экстремум нуқтаси бўлмайди.

1- масала. $f(x)=x^4-4x^3$ функциянинг экстремум нуқтасини топинг.

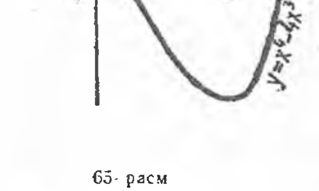
△ Ҳосилани топамиз: $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$. Стационар нуқталарни топамиз: $4x^2(x-3)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$.

Интерваллар усули билан $f'(x)=4x^2(x-3)$ ҳосила $x>3$ да мусбат, $x<0$ да ва $0<x<3$ да манфий эканини аниқлаймиз.

$x_1=0$ нуқтадан ўтишда ҳосиланинг ишораси ўзгармаганлиги учун бу нуқта экстремум нуқтаси бўлмайди.

$x_2=3$ нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Шунинг учун $x_2=3$ минимум нуқтасидир. ▲

$y=x^4-4x^3$ функция графигининг эскизи 65- расмда тасвирланган.



65- расм

2- масала. $f(x)=x^3-x$ функциянинг экстремум нуқталарини ва функциянинг шу нуқталардаги қийматларини топинг.

△ Ҳосила қуйидагига тенг:

$$f'(x)=3x^2-1=3\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ҳосилани нолга тенглаб, иккита стационар нуқтани топамиз:

$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ нуктадан ўтишда ҳосила ишорасини «$+$» дан «$-$» га ўзгартиради, шунинг учун $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ максимум нуктаси. $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ нуктадан ўтишда ҳосила ишорасини «$-$» дан «$+$» га ўзгартиради, шунинг учун $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$ минимум нуктасидир.

Функциянинг максимум нуктасидаги қиймати $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=$ $=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ га, минимум нуктасидаги қиймати $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ га тенг. ▲

Машқлар

560. Функциянинг стационар нукталарини топинг:

1) $y=\frac{x}{2}+\frac{8}{x}$; 2) $y=2x^3-15x^2+36x$;

3) $y=e^{2x}-2e^x$; 4) $y=\sin x-\cos x$.

561. Функциянинг экстремум нуқталарини топинг:

1) $y=2x^2-20x+1$; 2) $y=3x^2+36x-1$;

3) $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$; 4) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{16}$.

562. Функция экстремум нуқталарини ва унинг шу нукталардаги қийматларини топинг:

1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=x^4-8x^2+3$;

3) $y=x+\sin x$; 4) $y=2\cos x+x$.

563. Функциянинг экстремум нуқталарини топинг:

1) $y=x+\sqrt{3-x}$; 2) $y=(x-1)^{\frac{6}{7}}$;

3) $y=x-\sin 2x$; 4) $y=\cos 3x-3x$.

564*. Функциянинг экстремум нуқталарини ва унинг шу нукталардаги қийматларини топинг:

1) $y=\frac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; 2) $y=\frac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$;

3) $y=(x-1)e^{3x}$; 4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

565.** $y=(x+1)^n e^{-x}$, $n\in N$ (n — натурал сон) функцияни экстремумга текширинг.

29-§. ҲОСИЛАНИНГ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ГРАФИКЛАРИНИ ЯСАШДА ҚЎЛЛАНИЛИШИ

Агар функция графиги бирор ораликда узлуксиз чизиқни, яъни қалам учини қоғоз варағидан кўтармай ўтказиш (чизиш) мумкин бўлган чизиқни ифодаласа, у ҳолда бу *функция шу ораликда узлуксиз функция* деб аталади (66- расм). Шунингдек, узлуксиз бўлмаган функциялар ҳам мавжуд. Масалан, 67- расмда $[a; c]$ ва $[c; b]$ ораликларда узлуксиз бўлган, лекин $x=c$ нуқтада узилган ва шунинг учун бутун $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлмаган функциянинг графиги тасвирланган. Мактаб математика курсида ўрганиладиган барча функциялар ўзлари аниқланган ҳар бир ораликда узлуксиздир.

Агар функция бирор ораликда ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция шу ораликда узлуксиз бўлишини таъкидлаб ўтамиз.

Тескари тасдиқ нотўғри. Ораликда узлуксиз бўлган функция шу ораликнинг баъзи нуқталарида ҳосилага эга бўлмаслиги мумкин. Масалан, $y=|\log_2 x|$ функция $x>0$ ораликда узлуксиз, лекин $x=1$ нуқтада ҳосилага эга эмас, чунки бу нуқтада функциянинг графиги уринмага эга эмас (68- расм).

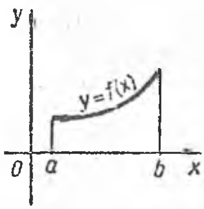
Ҳосила ёрдамида графикларни ясашга ўтамиз.

1- масала. $f(x)=x^3-2x^2+x$ функциянинг графигини ясанг.

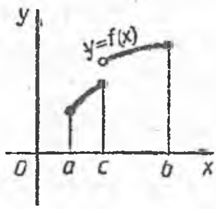
△ Бу функция барча $x\in R$ да аниқланган. Ҳосила ёрдамида бу функциянинг монотонлик ораликларини ва унинг экстремум нуқталарини топамиз. Ҳосила қуйидагига тенг: $f'(x)=3x^2-4x+$ $+1$. Стационар нуқталарни топамиз: $3x^2-4x+1=0$, бундан $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$.

Ҳосиланинг ишорасини аниқлаш учун $3x^2-4x+1$ учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз: $f'(x)=3(x-\frac{1}{3})(x-1)$.

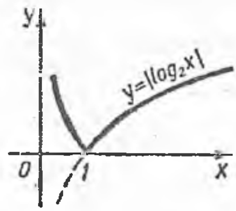
Ҳосила $x<\frac{1}{3}$ ва $x>1$ ораликларда мусбат; демак, бу ораликларда функция ўсади.



66- расм



67- расм



68- расм

$\frac{1}{3} < x < 1$ да ҳосила манфий; демак, бу интервалда функция камаяди.

$x_1 = \frac{1}{3}$ нуқта максимум нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтадан чапда функция ўсади, ўнгда эса камаяди. Функциянинг бу нуқтадаги қиймати қуйидагига тенг: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

$x_2 = 1$ нуқта минимум нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтадан чапда функция камаяди, ўнгда эса ўсади; унинг минимум нуқтасидаги қиймати 0 га тенг: $f(1) = 0$.

Текшириш натижаларини қуйидаги жадвалда ёзамиз:

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

«↗» белги функциянинг ўсишини, «↘» белги эса функциянинг камайишини англатади.

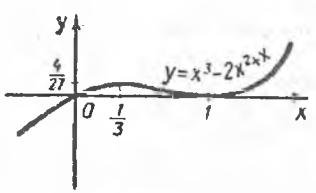
Графикни ясашда одатда графикнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари топилади. $f(0) = 0$ бўлгани учун график координаталар бошидан ўтади. $f(x) = 0$ тенгламани ечиб, графикнинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталарини топамиз:

$$x^3 - 2x^2 + x = 0, \quad x(x^2 - 2x + 1) = 0, \quad x(x-1)^2 = 0,$$

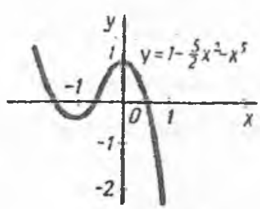
бундан $x = 0$, $x = 1$.

Графикни янада аниқроқ ясаш учун функциянинг яна иккита нуқтадаги қийматини топамиз: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, $f(2) = 2$.

Текшириш натижаларидан фойдаланиб, $y = x^3 - 2x^2 + x$ функциянинг графигини ясаймиз (69- расм). ▲



69- расм



70- расм

Функция графигини ясаш учун одатда дастлаб бу функциянинг хоссаларини унинг ҳосиласи ёрдамида тахминан 1-масалани ечгандаги каби схемада текширилади.

Функциянинг хоссаларини текширишда:
1) унинг аниқланиш соҳасини;
2) ҳосиласини;
3) стационар нуқталарини;
4) ўсиш ва камайиш оралиқларини;
5) экстремум нуқталарини ва функциянинг шу нуқталардаги қийматларини топиш фойдали.

Текшириш натижаларини жадвал кўринишида ёзиш қулай. Кейин жадвалдан фойдаланиб, функциянинг графиги ясалади. Графикни янада аниқроқ ясаш учун, одатда, унинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари ва графикнинг иложи бўлса, яна бир нечта нуқтаси топилади.

2-масала. $f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ функциянинг графигини ясанг.

△ 1) Аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.

2) $f'(x)=-5x-5x^4=-5x(1+x^3)$.

3) $-x(1+x^3)=0$ тенгламани ечиб, $x_1=-1$ ва $x_2=0$ стационар нуқталарни топамиз.

4) Ҳосила $-1<x<0$ интервалда мусбат, демак, бу интервалда функция ўсади. $x<-1$ ва $x>0$ оралиқларда ҳосила манфий, демак, бу оралиқларда функция камаяди.

5) $x_1=-1$ стационар нуқта минимум нуқтаси бўлади, чунки бу нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради; $f(-1)=-0{,}5$. $x_2=0$ нуқта — максимум нуқтаси, чунки бу нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини «+» дан «—» га ўзгартиради; $f(0)=1$.

Жадвал тузамиз:

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$x>0$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	1	$\searrow$

Текшириш натижаларидан фойдаланиб, $y=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ функциянинг графигини ясаймиз (70- расм). ▲

$y=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$ функциянинг графиги бу функциянинг баъзи хоссаларини текшириш ёрдамида ясалди. График бўйича бу функциянинг яна бошқа хоссаларини ҳам аниқлаш мумкин.

Масалан, 70- расмдан $1-\frac{5}{2}x^2-x^5=0$ тенглама учта турли илдизга эга эканлиги кўриниб турибди.

Жуфт (тоқ) функциянинг графигини ясаш учун унинг хоссаларини текшириш ва графигини $x>0$ да ясаш, сўнгра графикни ординаталар ўқига (координаталар бошига) нисбатан симметрик акслантириш етарлидир. Мисол келтирамиз.

3- масала. $f(x)=x+\frac{4}{x}$ функциянинг графигини ясанг:

$\triangle$ 1) аниқланиш соҳаси: $x\neq 0$;

2) берилган функция тоқ функция, чунки

$f(-x)=-x+\frac{4}{x}=-(x+\frac{4}{x})=-f(x)$. Шунинг учун дастлаб бу функцияни текширамиз ва унинг графигини $x>0$ да ясаймиз;

3) $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$;

4) функция $x>0$ оралиқда битта $x=2$ стационар нуқтага эга;

5) ҳосила $x>2$ оралиқда мусбат, демак, функция бу оралиқда ўсади. Ҳосила $0<x<2$ интервалда манфий, демак, функция бу интервалда камаяди;

6) $x=2$ нуқта минимум нуқтаси бўлади, чунки бу нуқта орқали ўтишда ҳосила ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради.

Жадвал тузамиз:

x	$0<x<2$	2	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

Функциянинг яна иккита нуқтадаги қийматини топамиз: $f(1)=5$, $f(4)=5$.

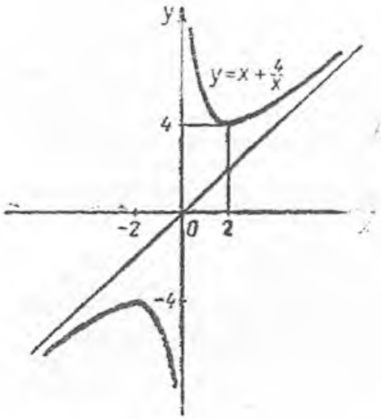
Текшириш натижаларидан фойдаланиб, $y=x+\frac{4}{x}$ функциянинг $x>0$ даги графигини ясаймиз. Бу функциянинг $x<0$ даги графигини координаталар бошига нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ясаймиз (71- расм) ▲

Функциянинг графигини ясашга доир масалаларни ечишда ёзувни қисқартириш мақсадида жадвални тузишгача бўлган кўпгина мулоҳазаларни оғзаки бажариш мумкин.

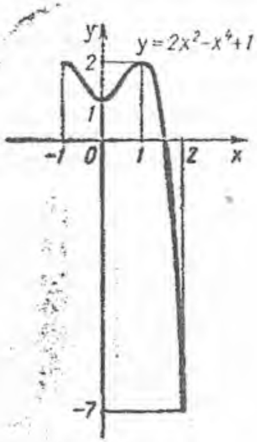
Баъзи масалаларда функцияни бутун аниқланиш соҳасида эмас, балки бирор оралиқда текшириш талаб этилади.

4- масала. $f(x)=1+2x^2-x^4$ функциянинг графигини $[-1;2]$ кесмада ясанг.

$\triangle$ Ҳосилани топамиз: $f'(x)=4x\pm 4x^3=4x(1+x)(1-x)$.



71- расм



72- расм

Жадвал тузамиз:

x	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2
$f'(x)$	0	—	0	+	0	—	-24
$f(x)$	2	↘	1	↗	2	↘	-7

Бу жадвалдан фойдаланиб, $y=1+2x^2-x^4$ функциянинг графигини $[-1;\ 2]$ кесмада ясаймиз (72- расм). ▲

Машқлар

Функциянинг графигини ясанг (566—567):

566. 1) $y=x^3-3x^2+4$; 2) $y=2+3x-x^3$;
3) $y=-x^3+4x^2-4x$; 4) $y=x^3+6x^2+9x$.

567. 1) $y=-x^4+8x^2-16$; 2) $y=x^4-2x^2+2$;
3) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6$; 4) $y=6x^4-4x^6$.

568. 1) $y=x^3-3x^2+2$ функциянинг графигини $[-1;\ 3]$ кесмада ясанг;
2) $y=x^4-10x^2+9$ функциянинг графигини $[-3;\ 3]$ кесмада ясанг.

Функциянинг графигини ясанг (569—571):

569. 1) $y=2+5x^3-3x^5$; 2) $y=3x^5-5x^3$;

3) $y=4x^5-5x^4$; 4) $y=\frac{1}{10}x^5-\frac{5}{6}x^3+2x$.

570. 1) $y=3x+\frac{1}{3x}$; 2) $y=\frac{4}{x}-x$;

3) $y=x+\frac{2}{\sqrt{x}}$; 4) $y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

571 *. 1) $y=\frac{x^2}{x-2}$; 2) $y=\frac{-x^2+3x-1}{x}$;

3) $y=\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$; 4) $y=\frac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$.

572 **. $y=\frac{x^3-4}{(x-1)^3}$ функциянинг графигини ясанг. $\frac{x^3-4}{(x-1)^3}=C$ тенглама C нинг турли қийматларида нечта ҳақиқий илдизга эга?

30-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭНГ КАТТА ВА ЭНГ КИЧИК ҚИЙМАТИ

1. Амалиётда кўпинча функциянинг *кесмада* қабул қиладиган барча қийматлари орасидан энг катта ёки энг кичик қийматини топиш талаб этиладиган масалаларни ечишга тўғри келади.

Масалан, $f(x)=1+2x^2-x^4$ функциянинг $[-1; 2]$ кесмадаги графигини қараймиз. Бу график олдинги параграфда ясалган эди (72- расм).

Расмдан кўриниб турганидек, бу оралиқдаги 2 га тенг энг катта қийматни функция иккита нуқтада: $x=-1$ ва $x=1$ да қабул қилади; -7 га тенг энг кичик қийматни функция $x=2$ нуқтада қабул қилади.

$x=0$ нуқта $f(x)=1+2x^2-x^4$ функциянинг минимум нуқтаси бўлади. Бу қуйидагини англатади: $x=0$ нуқтанинг шундай атрофи, масалан, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ интервал мавжудки, функция бу атрофдаги энг кичик қийматини $x=0$ да қабул қилади. Лекин катта оралиқда, масалан, $[-1; 2]$ кесмада функция энг кичик қийматини минимум нуқтасида эмас, балки кесманинг охирида қабул қилади.

Шундай қилиб, функциянинг кесмадаги энг кичик қийматини топиш учун унинг минимум нуқталаридаги қийматлари билан кесманинг охирларидаги қийматларини таққослаш керак.

Умуман $f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз ва кесманинг ҳар бир ички нуқтасида ҳосилага эга бўлсин.

Функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топиш учун:

1) функциянинг кесманинг охирларидаги қийматларини, яъни $f(a)$ ва $f(b)$ сонларни топиш;

2) унинг $(a; b)$ интервалга тегишли стационар нуқталардаги қийматларини топиш;

3) топилган қийматлар орасидан энг каттасини ва энг кичигини танлаш керак.

1-масала. $f(x)=x^3+\frac{3}{x}$ функциянинг $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

△ 1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=6\frac{1}{8}$, $f(2)=9\frac{1}{2}$.

2) $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}=\frac{3x^4-3}{x^2}$, $3x^4-3=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$.

$\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ интервалга битта стационар нуқта $x_1=1$, тегишли $f(1)=4$.

3) $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ ва 4 сонлари орасида энг каттаси $9\frac{1}{2}$, энг кичиги 4.

Жавоб. Функциянинг энг катта қиймати $9\frac{1}{2}$ га, энг кичик қиймати 4 га тенг. ▲

2-масала. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциянинг $[2;\ 4]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

△ 1) $f(2)=2{,}5$, $f(4)=4{,}25$.

2) $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x_1=-1$, $x_1=1$.

$(2;\ 4)$ интервалда стационар нуқта йўқ.

3) 2,5 ва 4,25 сонлари орасида энг каттаси 4,25, энг кичиги 2,5.

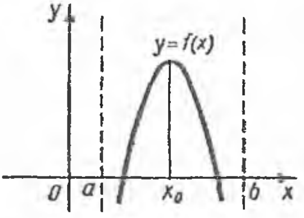
Жавоб. Функциянинг энг катта қиймати 4,25, энг кичик қиймати 2,5 га тенг. ▲

2. Баъзи масалаларни ечишда кўпинча функциянинг кесмадаги эмас, балки *интервалдаги* энг катта ёки энг кичик қийматини топишга тўғри келади.

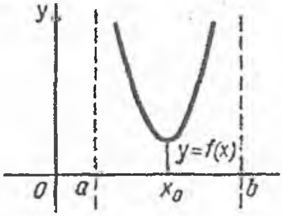
Амалий масалаларда одатда $f(x)$ функция берилган интервалда фақат битта стационар нуқтага: ёки максимум нуқтасига, ёки минимум нуқтасига эга бўлади. Бундай ҳолларда шу берилган оралиқдаги энг катта қийматини функция максимум нуқтасида қабул қилади (73-расм), берилган оралиқдаги энг кичик қийматини эса минимум нуқтасида қабул қилади (74-расм).

3-масала. 36 сонини йиғиндиси энг кичик бўладиган ихтиёрий иккита мусбат соннинг кўпайтмаси кўринишида ёзинг.

△ Биринчи кўпайтувчи x га тенг бўлсин, у ҳолда иккинчи кўпайтувчи $\frac{36}{x}$ га тенг бўлади. Бу сонларнинг йиғиндиси $x+\frac{36}{x}$ га тенг. Масала шартига кўра x — мусбат сон. Шундай қилиб, масала x нинг шундай қийматини топишга келтирилдики, бу



73- расм



74- расм

қийматда $f(x)=x+\frac{36}{x}$ функция ўзининг $x>0$ интервалдаги энг кичик қийматини қабул қилсин.

Ҳосилани топамиз: $f'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x+6)(x-6)}{x^2}$.

Стационар нуқталар $x_1=6$ ва $x_2=-6$ бўлади. $x>0$ интервалда фақат битта $x=6$ стационар нуқта бор. $x=6$ нуқтадан ўтишда ҳосила ишорасини «—» дан «+»га ўзгартиради ва шунинг учун $x=6$ минимум нуқтаси. Демак, $f(x)=x+\frac{36}{x}$ функция $x>0$ интервалдаги энг кичик қийматини $x=6$ нуқтада қабул қилади (бу қиймат қуйидагига тенг: $f(6)=12$).

Ж а в о б. $36=6\cdot 6$. ▲

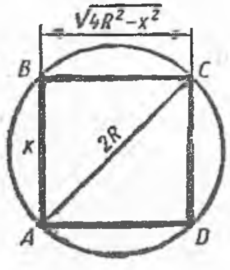
3 *. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топишга доир баъзи масалаларни ечишда қуйидаги тасдиқдан фойдаланиш маъқулдир.

Агар $f(x)$ функциянинг бирор оралиқдаги қиймати номанфий бўлса, у ҳолда бу функция ва $(f(x))^n$ функция (бунда n — натурал сон) энг катта (энг кичик) қийматини айни бир нуқтада қабул қилади.

4 *- м а с а л а. R радиусли айланага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклар орасидан энг катта юзга эга бўлган тўғри тўртбурчакни топинг.

△ Тўғри тўртбурчакни топиш дегани бу унинг ўлчамларини, яъни унинг томонлари узунликларини топиш демакдир. $ABCD$ тўғри тўртбурчак R радиусли айланага ички чизилган бўлсин (75-расм). $AB=x$ белгилаш киритамиз. $\triangle ABC$ дан Пифагор теоремасига кўра $BC=\sqrt{4R^2-x^2}$ бўлишини топамиз. Тўғри тўртбурчакнинг юзи қуйидагига тенг:

$$S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2},\ \text{бунда}\ 0<x<2R.$$



75- расм

Масала x нинг шундай қийматини

топишга келтирилдики, бу қийматда $S(x)$ функция ўзининг $0 < x < 2R$ интервалдаги энг катта қийматини қабул қилади.

$0 < x < 2R$ интервалда $S(x) > 0$ бўлгани учун $S(x)$ ва $f(x) = (S(x))^2$ функциялар ўзларининг бу интервалдаги энг катта қийматларини айни бир нуқтада қабул қилади.

Шундай қилиб, масала x нинг шундай қийматини топишга келтирилдики, бу қийматда $f(x) = x^2(4R^2 - x^2) = 4R^2x^2 - x^4$ функция ўзининг $0 < x < 2R$ интервалдаги энг катта қийматини қабул қилсин.

Ҳосилани топамиз:

$$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 4x(R\sqrt{2} + x)(R\sqrt{2} - x).$$

$0 < x < 2R$ интервалда фақат битта $x = R\sqrt{2}$ стационар нуқта — максимум нуқтаси бор. Демак, $f(x)$ функция (ва демак, $S(x)$ функция ҳам) энг катта қийматни $x = R\sqrt{2}$ да қабул қилади.

Шундай қилиб, изланаётган тўғри тўртбурчакнинг бир томони $R\sqrt{2}$ га тенг, иккинчи томони эса $\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2}$ га тенг, яъни изланаётган тўғри тўртбурчак томони $R\sqrt{2}$ га тенг бўлган квадрат бўлиб, унинг юзи $2R^2$ га тенг. ▲

Машқлар

573. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ функциянинг 1) $[-4; 3]$ кесмадаги; 2) $[-2; 1]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

574. 1) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ функциянинг $[-3; 2]$ кесмадаги;

2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ функциянинг $[-2; -0,5]$ кесмадаги;

3) $f(x) = x - \sqrt{x}$ функциянинг $[0; 4]$ кесмадаги;

4) $f(x) = \sin x + \cos x$ функциянинг $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

575. 1) $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$ функциянинг $x > 0$ интервалдаги;

2) $f(x) = \frac{2}{x} - x^2$ функциянинг $x < 0$ интервалдаги энг катта (ёки энг кичик) қийматини топинг.

576. 50 сонини кубларининг йиғиндиси энг кичик бўладиган икки соннинг йиғиндиси кўринишида ёзинг.

577. 625 сонини шундай иккита мусбат соннинг кўпайтмаси кўринишида ёзингки, бу сонлар квадратларининг йиғиндиси энг кичик бўлсин.

578. Периметри p бўлган барча тўғри тўртбурчаклар орасидан юзи энг катта бўладиган тўғри тўртбурчакни топинг.

579. Юзи 9 см^2 га тенг бўлган барча тўғри тўртбурчаклар орасидан периметри энг кичик бўладиган тўғри тўртбурчакни топинг.

---

580. Ушбу

1) $f(x)=\ln x-x$ функциянинг $[\frac{1}{2};\ 3]$ кесмадаги;

2) $f(x)=x+e^{-x}$ функциянинг $[-1;\ 2]$ кесмадаги;

3) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ функциянинг $[0;\ 2\pi]$ кесмадаги;

4) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$ функциянинг $[0;\ \pi]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

581. Ушбу

1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ функциянинг $x>0$ оралиқдаги;

2) $3x-2x\sqrt{x}$ функциянинг $x>0$ оралиқдаги энг катта қийматини топинг.

582. Ушбу

1) $e^{3x}-3x$ функциянинг $(-1;\ 1)$ интервалдаги;

2) $\frac{1}{x}+\ln x$ функциянинг $(0;\ 2)$ интервалдаги энг кичик қийматини топинг.

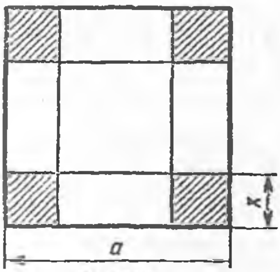
583*. Ушбу

1) $x\sqrt[4]{5-x}$ функциянинг $(0;\ 5)$ интервалдаги;

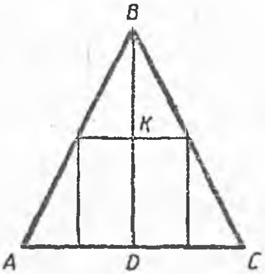
2) $x\sqrt[3]{4-x}$ функциянинг $(0;\ 4)$ интервалдаги энг катта қийматини топинг.

584*. Томони a бўлган квадрат картондан тўғри тўртбурчак шаклидаги усти очиқ қути ясаш керак. Бунда квадратнинг четларини қирқиб ва ҳосил бўлган четларни буклаш керак (76-расм). Қутининг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг баландлиги қандай бўлиши керак?

585*. Тенг ёнли учбурчаклар томони a бўлган квадратга шундай ташқи чизилганки, квадратнинг бир томони учбурчакнинг



76-расм



77-расм

асосида ётади (77- расм). $BK=x$ белгилаш киритиб, x нинг учбурчакнинг юзи энг кичик бўладиган қийматини топинг.

586**. Иккита учи Ox ўқида ва бошқа иккита учи $y=3-x^2$ параболада ётадиган барча тўғри тўртбурчаклар орасидан юзи энг катта бўладиган тўғри тўртбурчакни танлаб олинг. Шу юзни топинг.

587**. $y=x^2$ параболада $A(2;\ 0{,}5)$ нуқтага энг яқин нуқтани топинг.

588**. Эни бир хил учта тахтадан нов ясалмоқда. Нов ён деворларининг асосга оғиш бурчаклари қандай бўлганда нов кўндаланг кесимининг юзи энг катта бўлади?

VI БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

589. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

1) $y=2x^3+3x^2-2$; 2) $y=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+5$;

3) $y=\frac{3}{x}-1$; 4) $y=\frac{2}{x-3}$.

590. Функциянинг стационар нуқталарини топинг:

1) $y=x^4-4x^3-8x^2+1$; 2) $y=4x^4-2x^2+3$;

3) $y=\frac{x}{3}+\frac{12}{x}$; 4) $y=\cos 2x+2\cos x$.

591. Функциянинг экстремум нуқталарини топинг:
1) $y=x^3-4x^2$; 2) $y=3x^4-4x^3$.

592. Функциянинг экстремум нуқталарини ва унинг шу нуқталардаги қийматларини топинг:
1) $y=x^5-2{,}5x^2+3$; 2) $y=0{,}2x^5-4x^2-3$.

593. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\frac{x^3}{3}+3x^2$; 2) $y=-\frac{x^4}{4}+x^2$.

594. 1) $y=3x^2-6x+5$ функциянинг графигини $[0;\ 3]$ кесмада;

2) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$ функциянинг графигини $[-2;\ 4]$ кесмада ясанг.

595. 1) $f(x)=x^3-6x^2+9$ функциянинг $[-2;\ 2]$ кесмадаги;
2) $f(x)=x^3+6x^2+9x$ функциянинг $[-4;\ 0]$ кесмадаги;
3) $f(x)=x^4-2x^2+3$ функциянинг $[-4;\ 3]$ кесмадаги;
4) $f(x)=x^4-8x^2+5$ функциянинг $[-3;\ 2]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

596. Берилган периметрли барча тўғри тўртбурчаклар орасида квадрат энг кичик диагоналга эга бўлишини исботланг.

597. p периметрли барча тенг ёнли учбурчаклар орасида энг катта юзга эга бўладиган учбурчакни топинг.

598. Асосида квадрат ётувчи ва тўла сиртининг юзи 600 см^2 га тенг барча тўғри бурчакли параллелепипедлар орасидан энг катта ҳажмли параллелепипедни топинг.

ЎЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КЎРИНГ!

1. $y=6x-2x^3$ функциянинг ўсиш ва камайиш интервалларини топинг:
2. $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$ функциянинг экстремум нукталарини топинг.
3. Функциянинг графигини ясанг: $y=2x^4-x^2+1$; $y=x^3-3x$.
4. $y=x+\frac{4}{x}$ функциянинг $[1; 5]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик кийматини топинг.
5. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг периметри 8 м, баландлиги 3 м. Параллелепипеднинг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг асосининг томонлари қандай узунликда бўлиши керак?

599. $y=1,8x^5-2\frac{1}{3}x^3+7x+12,5$ функция ўзининг бутун аниқланиш соҳасида ўсишини исботланг.

600. $y=x(1+2\sqrt{x})$ функция ўзининг бутун аниқланиш соҳасида ўсишини исботланг.

601. Функциянинг экстремум нукталарини топинг:

1) $y=x\ln x$; 2) $y=xe^x$;

3) $y=\frac{4}{x-3}-\frac{16}{x-7}$; 4) $y=\frac{25}{7-x}-\frac{9}{3-x}$.

602. Функциянинг графигини ясанг:

1) $y=\frac{2}{x^2-4}$; 2) $y=\frac{2}{x^2+4}$;

3) $y=(x-1)^2(x+2)$; 4) $y=x(x-1)^3$.

603. 1) $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ функциянинг $[0; \frac{3}{2}\pi]$ кесмадаги;

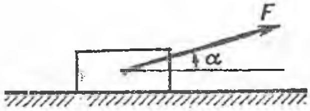
2) $f(x)=2\cos x+\sin 2x$ функциянинг $[0; \pi]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик кийматини топинг.

604. Жисм $s(t)=6t^2-t^3$ қонун бўйича ҳаракатланмоқда. Жисмнинг энг катта тезлиги қанча?

605. Бир катети ва гипотенузасининг йиғиндиси l га тенг бўлган барча тўғри бурчакли учбурчаклар орасидан юзи энг катта бўлган учбурчакни топинг.

606*. Радиуси R бўлган ярим доирага томонларидан бири шу ярим доиранинг диаметрида ётувчи барча ички чизилган тўғри тўртбурчаклар орасидан юзи энг катта бўладиган тўғри тўртбурчакни танланг. Шу юзни топинг.

607*. Юк автомобилининг очиқ кузови сиртининг юзи $2S$ бўлган тўғри бурчакли параллелепипед кўринишига эга. Кузовнинг



78- расм

ҳажми энг катта, бўйининг энига нисбати эса $\frac{5}{2}$ га тенг бўлиши учун унинг бўйи ва эни қандай бўлиши керак?

608.** $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ функциянинг экстремум нуқталарини топинг.

609. Функциянинг графигини ясанг:

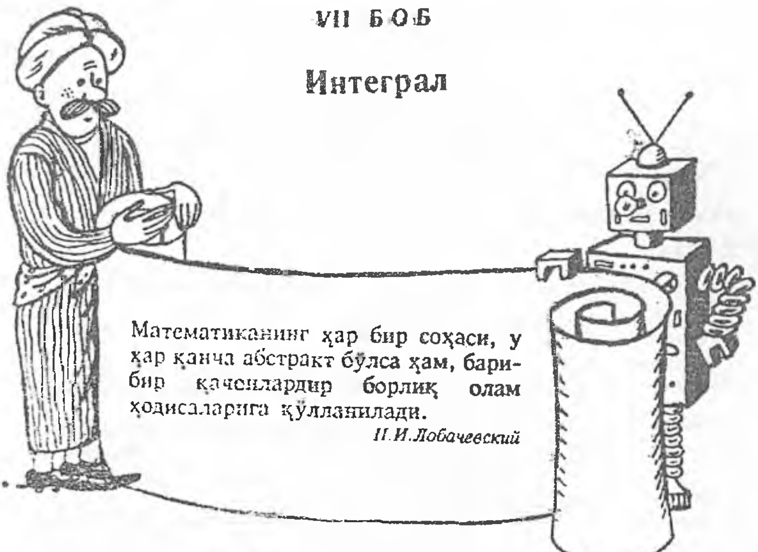
1) $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$; 2) $y=|x|\cdot\sqrt[3]{1+3x}$;

3) $y=x^2\cdot e^{-x}$; 4) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

610.** Горизонтал текисликда ётган юкни унга қўйилган ку... билан ўрнидан силжитиш керак (78- расм). Агар ю... ишқаланиш кучи k га тенг бўлса, кучнинг катталиги ... бўлиши учун бу куч билан текислик орасида х... ...ган бурчак қандай бўлиши кераклигини аник...

VII БОБ

Интеграл



31-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ

Нуқтанинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатини кўрайлик. Ҳаракат бошлангандан ўтган t вақт ичида нуқта $s(t)$ йўл ўтган бўлсин. У ҳолда $v(t)$ оний тезлик $s(t)$ функциянинг ҳосиласига тенг, яъни $v(t)=s'(t)$.

Амалиётда тескари масала ҳам учрайди: нуқтанинг $v(t)$ ҳаракат тезлиги берилган, унинг босиб ўтган $s(t)$ йўлини топинг, яъни шундай $s(t)$ функцияни топиш керакки, унинг ҳосиласи $v(t)$ га тенг бўлсин. $s'(t)=v(t)$ бўлган бундай $s(t)$ функцияни $v(t)$ функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Масалан, агар $v(t)=at$ (бунда a — берилган сон) бўлса, у ҳолда $s(t)=\frac{at^2}{2}$ функция $v(t)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки $s'(t)=\left(\frac{at^2}{2}\right)'=at=v(t)$.

Бирор оралиқдаги барча x лар учун $F'(x)=f(x)$ бўлса, $F(x)$ функция шу оралиқда $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Масалан, $F(x)=\sin x$ функция $f(x)=\cos x$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки $(\sin x)'=\cos x$; $F(x)=\frac{x^4}{4}$ функ-

---

Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) — рус математиги, ноевклид геометрия асосчиси, фазонинг табиати ҳақидаги тушунчада тўнтариш қилган.

ция $f(x)=x^3$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади, чунки $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$.

1-масала. $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ функцияларнинг ҳаммаси айни бир $f(x)=x^2$ функциянинг бошланғич функциялари бўлишини исботланг.

△ 1) $F_1(x)=\frac{x^3}{3}$ деб белгилаймиз, у ҳолда $F_1'(x)=3\cdot\frac{x^2}{3}=$ $=x^2=f(x)$.

2) $F_2(x)=\frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'+(1)'=x^2=f(x)$.

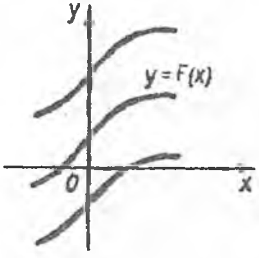
3) $F_3(x)=\frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4\right)'=x^2=f(x)$. ▲

Умуман ҳар қандай $\frac{x^3}{3}+C$ (бунда C — ўзгармас сон) функция x^2 функциянинг бошланғич функцияси бўлади. Бу хулоса ўзгармас соннинг ҳосиласи нолга тенглигидан келиб чиқади. Бу мисол берилган функция учун унинг бошланғич функцияси *бир қийматли аниқланмаслигини* кўрсатади.

$F_1(x)$ ва $F_2(x)$ айни бир $f(x)$ функциянинг бошланғич функциялари бўлсин. У ҳолда $F_1'(x)=f(x)$ ва $F_2'(x)=f(x)$. Уларнинг $g(x)=F_1(x)-F_2(x)$ айирмасининг ҳосиласи нолга тенг, чунки $g'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Агар бирор оралиқда $g'(x)=0$ бўлса, у ҳолда бу оралиқнинг ҳар бир нуқтасидаги $y=g(x)$ функция графигига ўтказилган уринма Ox ўқига параллел бўлади. Шунинг учун $y=g(x)$ функция графиги Ox ўқига параллел тўғри чизиқ, яъни $g(x)=C$ бўлади, бунда C — бирор ўзгармас. $g(x)=C$, $g(x)=F_1(x)-F_2(x)$ тенгликлардан кўринадики, $F_1(x)=F_2(x)+C$.

Шундай қилиб, $F(x)$ функция бирор оралиқда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг барча бошланғич функциялари қуйидаги кўринишда ёзилади: $F(x)+C$, бунда C — ихтиёрий ўзгармас.



79-расм

Берилган $f(x)$ функция барча бошланғич функцияларининг графикларини кўрайлик. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлса, у ҳолда бу функциянинг исталган бошланғич функцияси $F(x)$ га C ўзгармасни қўшиш билан ҳосил қилинади: $F(x)+C$. $y=F(x)+C$ функциянинг графиги $y=F(x)$ функция графигини Oy ўқ бўйлаб силжитишдан ҳосил қилинади (79-расм). C ни танлаш билан бошланғич функция графигини берилган нуқта орқали ўтишига эришиш мумкин.

2- масала. $f(x)=x$ функция учун графиги (2; 5) нуқта орқали ўтадиган бошланғич функцияни топинг.

△ $f(x)=x$ нинг барча бошланғич функциялари $F(x)=\frac{x^2}{2}+C$ формуладан топилади, чунки $F'(x)=x$. Шундай C сонини топамизки, $y=\frac{x^2}{2}+C$ функциянинг графиги (2; 5) нуқтадан ўтсин. $x=2$, $y=5$ ларни қўйиб, $5=\frac{2^2}{2}+C$ ни ҳосил қиламиз, бундан $C=3$. Демак, $F(x)=\frac{x^2}{2}+3$. ▲

3- масала. Исталган ҳақиқий $p\neq-1$ сон учун $F(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}$ функция $x>0$ оралиқда $f(x)=x^p$ функция учун бошланғич функция эканини исботланг.

△ $(x^{p+1})'=(p+1)x^p$ бўлгани учун $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)'=\frac{(x^{p+1})'}{p+1}=x^p$ бўлади. ▲

Масалан, $\frac{1}{x^2}$ функциянинг бошланғич функцияси $\frac{x^{-2+1}}{-2+1}=$ $=-\frac{1}{x}$ га тенг; $\sqrt{x}$ функциянинг бошланғич функцияси $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ га тенг.

Машқлар

611. $F(x)$ функция бутун сон ўқида $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини кўрсатинг:

1) $F(x)=\frac{x^6}{6}$, $f(x)=x^5$; 2) $F(x)=\frac{x^5}{5}+1$, $f(x)=x^4$;

3) $F(x)=x^3+2$, $f(x)=3x^2$; 4) $F(x)=\frac{x^4}{2}+3$, $f(x)=2x^3$.

612. $F(x)$ функция $x>0$ да $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини кўрсатинг:

1) $F(x)=\frac{2}{x}$, $f(x)=-\frac{2}{x^2}$; 2) $F(x)=\frac{1}{x^2}+3$, $f(x)=-\frac{2}{x^3}$;

3) $F(x)=1+\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $F(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

613. 3- масаладаги тасдиқдан фойдаланиб, берилган функциянинг барча бошланғич функцияларини топинг.

1) x^2; 2) x^3; 3) x^{-3}; 4) $x^{-\frac{1}{2}}$

614. $f(x)$ функция учун графиги M нуқта орқали ўтадиган бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x)=x^2$, $M(1;\ 2)$ 2) $f(x)=x$, $M(-1;\ 3)$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $M(1;\ 1)$;   4) $f(x)=\sqrt{x}$, $M(9;\ 10)$.

615. $F(x)$ функция бутун сонли тўғри чизиғида $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлишини кўрсатинг:

1) $F(x)=3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$;   2) $F(x)=1+\sin 2x$, $f(x)=2\cos 2x$.

32-§. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯЛАРНИ ТОПИШ ҚОИДАЛАРИ

Берилган функциянинг ҳосиласини топиш амали дифференциаллаш деб аталишини эслатиб ўтамиз. Берилган функция учун бошланғич функцияни топишдан иборат тескари амал *интеграллаш* дейилади (латинча untegrare — тиклаш).

Баъзи функциялар учун бошланғич функциялар жадвалини ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб тузиш мумкин. Масалан, $(\cos x)' = -\sin x$ эканини билган ҳолда $(-\cos x)' = \sin x$ ни ҳосил қиламиз, бундан эса $\sin x$ функциянинг барча бошланғич функциялари ушбу кўринишда ёзилади: $-\cos x + C$, бунда C — ўзгармас.

*Бошланғич функциялар жадвали*ни келтирамиз:

Функция	Бошланғич функцияси
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$(kx+b)^p,\ p\neq -1,\ k\neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\frac{1}{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln(kx+b)+C$
$e^{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
$\sin(kx+b),\ k\neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)$
$\cos(kx+b),\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)$

Шуни таъкидлаймизки, кўрилган мисолларда ва кейинчалик ҳам бирор оралиқда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлиши учун иккала $F(x)$ ва $f(x)$ функциялар шу оралиқда аниқланган бўлиши керак.

Масалан, $\frac{1}{2x-4}$ функциянинг $2x-4>0$ бўладиган оралиқдаги, яъни $x>2$ оралиқдаги бошланғич функцияси $\frac{1}{2}\ln(2x-4)$ функция бўлади.

Шунингдек, интеграллаш қоидаларини дифференциаллаш қоидаси ёрдамида ҳам топиш мумкин. Қуйидаги интеграллаш қоидаларини келтирамиз:

$F(x)$ ва $G(x)$ — бирор оралиқда мос равишда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг бошланғич функциялари бўлсин. Унда:

1) $F(x)\pm G(x)$ функция $f(x)\pm g(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади;

2) $a\cdot F(x)$ функция $a\cdot f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

1- масала. $f(x)=x^2+3\cos x$ функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топинг.

△ Интеграллаш қоидаларидан ҳамда $p=2$ да x^p ва $\cos x$ учун бошланғич функциялар жадвалидан фойдаланиб, берилган функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топамиз:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+3\sin x. \quad ▲$$

2- масала. $e^{1-x}-4\sin(2x+3)$ функциянинг барча бошланғич функцияларини топинг.

△ Бошланғич функциялар жадвалидан топамиз: e^{1-x} функциянинг бошланғич функцияларидан бири $-e^{1-x}$ функция, $\sin(2x+3)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $-\frac{1}{2}\cos(2x+3)$ функция бўлади. Интеграллаш қоидалари бўйича берилган функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топамиз: $-e^{1-x}+2\cos(2x+3)$.

Жавоб: $-e^{1-x}+2\cos(2x+3)+C$. ▲

Машқлар

Функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топинг **(616—618)**:

616. 1) $2x^5-3x^2$; 2) $5x^4+2x^3$; 3) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$;

4) $\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}$; 5) $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$; 6) $4\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}$;

7) $3x^3+2x-1$; 8) $6x^2-4x+3$.

617. 1) $3\cos x-4\sin x$; 2) $5\sin x+2\cos x$;

3) $e^x-2\cos x$; 4) $3e^x-\sin x$;

5) $5-e^{-x}+3\cos x$; 6) $1+3e^x-4\cos x$;

7) $6\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}+3e^x$; 8) $\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^{-x}$.

618. 1) $(x+1)^4$; 2) $(x-2)^3$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;

5) $\frac{1}{x-1}+4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3}-2\sin(x-1)$.

619. Функциянинг барча бошланғич функцияларини топинг:

1) $\sin(2x+3)$; 2) $\cos(3x+4)$;

3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$; 4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$;

5) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 6) e^{3x-5}; 7) $\frac{1}{2x}$; 8) $\frac{1}{3x-1}$.

620. $f(x)$ функция учун графиги M нуқтадан ўтадиган бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x)=2x+3$, $M(1;\ 2)$; 2) $f(x)=4x-1$, $M(-1;\ 3)$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 5\right)$; 4) $f(x)=\cos 3x$, $M(0;\ 0)$.

Функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топинг **(621—624)**:

621. 1) $e^{2x}-\cos 3x$; 2) $e^{\frac{x}{4}}+\sin 2x$;

3) $2\sin\frac{x}{5}-5e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7}+2e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{x}{4}}-3\cos(6x-1)$; 6) $\sqrt{\frac{x}{5}}+4\sin(4x+2)$;

7) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{2}{1-x}$; 8) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}}-\frac{3}{2x-5}$.

622. 1) $\frac{2x^4-4x^3+x}{3}$; 2) $\frac{6x^3-3x+2}{5}$;

3) $(1+2x)(x-3)$; 4) $(2x-3)(2+3x)$.

623. 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

624. 1) $\sin x\cdot\cos x$;

2) $\sin x\cos 3x-\cos x\sin 3x$.

625*. $y=2\sin 5x+2\cos\frac{x}{2}$ функциянинг $x=\frac{\pi}{3}$ да 0 га тенг қийматни қабул қиладиган бошланғич функциясини топинг.

626 * *. Функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топинг:

1) $\frac{x}{x-3}$; 2) $\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 3) $\cos^2 x$; 4) $\sin 3x \cdot \cos 5x$.

33-§. ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ТРАПЕЦИЯНИНГ ЮЗИ ВА ИНТЕГРАЛ

80- расмда тасвирланган фигурани кўрайлик. Бу фигура қуйидан Ox ўқдаги $[a; b]$ кесма билан, юқоридан мусбат қиймат қабул қиладиган $y=f(x)$ узлуксиз функциянинг графиги билан, ён томонлардан эса $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқларнинг кесмалари билан чегараланган. Бундай фигурани *эгри чизиқли трапеция* дейилади. $[a; b]$ кесмани эса *эгри чизиқли трапециянинг асослари* дейилади.

Эгри чизиқли трапециянинг S юзини $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси ёрдамида қандай ҳисоблаш мумкинлигини аниқлаймиз.

$[a; x]$ асосли эгри чизиқли трапециянинг юзини $S(x)$ деб белгилаймиз (81- расм), бунда x — $[a; b]$ кесмадаги исталган нуқта: $x=a$ бўлганда $[a; x]$ кесма нуқтага айланади, шунинг учун $S(a)=0$; $x=b$ да $S(b)=S$.

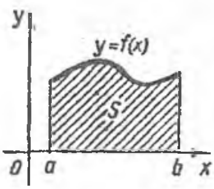
$S(x)$ *ни* $f(x)$ *функциянинг бошланғич функцияси* бўлишини, яъни $S'(x)=f(x)$ эканини кўрсатамиз.

○ $S(x+h)-S(x)$ айирмачи кўрайлик, бунда $h>0$ ($h<0$ ҳол ҳам худди шундай кўрилади). Бу айирма асоси $[x; x+h]$ бўлган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг (82- расм). Агар h сон кичик бўлса, у ҳолда бу юз тақрибан $f(x)\cdot h$ га тенг, яъни $S(x+h)-S(x)\approx f(x)\cdot h$.

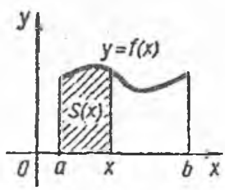
Демак, $\frac{S(x+h)-S(x)}{h}\approx f(x)$. $h\to 0$ да бу тақрибий тенгликнинг чап қисми ҳосиланинг таърифига кўра $S'(x)$ га интилади, яқинлашиш хатолиги эса $h\to 0$ да исталганча кичик бўла боради. Шунинг учун $h\to 0$ да $S'(x)=f(x)$ тенглик ҳосил бўлади. Бу эса $S(x)$ нинг $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси эканини билдиради. ●

Исталган бошқа $F(x)$ бошланғич функция $S(x)$ дан ўзгармас сонга фарқ қилади, яъни

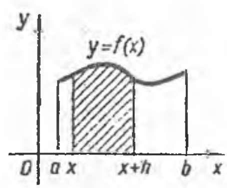
$$F(x)=S(x)+C. \qquad (1)$$



80- расм



81- расм



82- расм

Бу тенгликдан $x=a$ да $F(a)=S(a)+C$ ни оламиз. $S(a)=0$ бўлгани учун $C=F(a)$ ва (1) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S(x)=F(x)-F(a).$$

Бундан $x=b$ да

$$S(b)=F(b)-F(a)$$

ни топамиз.

Демак, *эгри чизиқли трапециянинг юзини* (80- расм) қуйидаги формула орқали ҳисоблаш мумкин:

$$\boxed{S=F(b)-F(a),} \tag{2}$$

бунда $F(x)$ — берилган $f(x)$ функциянинг исталган бошланғич функцияси.

Шундай қилиб, эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаш $f(x)$ функциянинг $F(x)$ бошланғич функциясини топишга, яъни $f(x)$ функцияни интеграллашга келтирилади.

$F(b)-F(a)$ айирма *$f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги интеграли* дейилади ва бундай белгиланади: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (ўқилиши: «a дан b гача интеграл эф икс дэ икс»), яъни

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(b)-F(a).} \tag{3}$$

(3) формулани дифференциал ва интеграл ҳисоб асосчилари шарафига *Ньютон — Лейбниц формуласи* деб аталади.

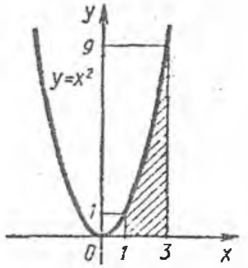
(2) ва (3) формуладан қуйидагини оламиз

$$\boxed{S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.} \tag{4}$$

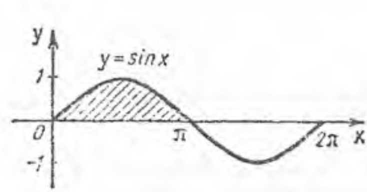
1- масала. 83- расмда тасвирланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг.

△ (4) формуладан $S=\int\limits_1^3 x^2dx$ ни топамиз. Бу интегрални (3) Ньютон — Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз. $f(x)=x^2$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $F(x)=\frac{x^3}{3}$ функциядир. Шунинг учун $S=\int\limits_1^3 x^2dx=F(3)-F(1)=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=8\frac{2}{3}$ (кв. бирлик). ▲

(3) ва (4) формулалар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесма ичида мусбат,



83- расм



84- расм

кесманинг бирор охирида ёки иккала охирида эса нолга тенг бўлган ҳолда ҳам ўринлидир.

2- м а с а л а. 84- расмда тасвирланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг.

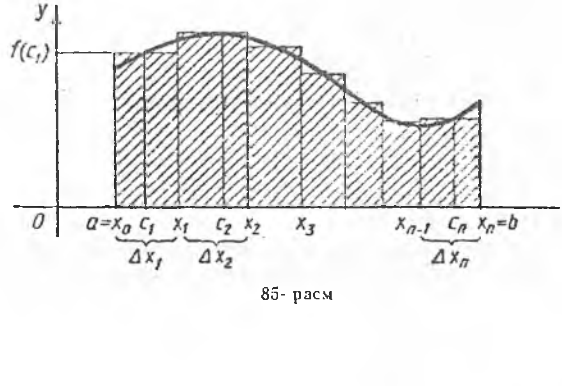
△ $F(x) = -\cos x$ функция $f(x) = \sin x$ функция учун бошланғич функциядир. (3), (4) формулалардан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = F(\pi) - F(0) = (-\cos\pi) - (-\cos 0) =$$

$$1 + 1 = 2 \text{ (кв. бирлик).} ▲$$

Интеграл тарихан эгри чизиқлар билан чегараланган *фигураларнинг юзини,* хусусан эгри чизиқли трапециянинг юзини *ҳисоблаш муносабати билан келиб чиққан.* 85- расмда тасвирланган эгри чизиқли трапецияни кўрайлик. Бу расмда трапециянинг асоси бўлган $[a; b]$ кесма $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ нуқталар билан n та кесмага (тенг бўлиши шарт эмас) бўлинган.

Бу нуқталардан вертикал тўғри чизиқлар ўтказилган. Биринчи $[x_0; x_1]$ кесмада ихтиёрий c_1 нуқта танланган ва бу кесмада баландлиги $f(c_1)$ бўлган тўғри тўртбурчак ясалган; иккинчи $[x_1; x_2]$ кесмада c_2 нуқта танланган ва бу кесмада баландлиги $f(c_2)$



85- расм

бўлган тўғри тўртбурчак ясалган ва ҳоказо. Берилган эгри чизиқли трапециянинг юзи тақрибан ясалган тўғри тўртбурчаклар юзлари йиғиндисига тенг:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n, \qquad (5)$$

бунда Δx_i — берилган кесманинг узунлиги, яъни $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ ва ҳоказо. Шундай қилиб, эгри чизиқли трапециянинг S юзини тақрибан (5) формула орқали ҳисоблаш мумкин, яъни $S \approx S_n$.

(5) йиғиндини $f(x)$ *функциянинг* $[a;\ b]$ *кесмадаги интеграл йиғиндиси* дейилади. Бунда $f(x)$ функция $[a;\ b]$ кесмада узлуксиз ва исталган қийматни (мусбат, манфий ва нолга тенг) қабул қила олади деб тахмин қиламиз. Агар $n \to \infty$ ва бўлиниш кесмалари узунликлари нолга интилса, у ҳолда S_n интеграл йиғинди бирор сонга интилади, ана шу сонни $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги интеграли дейилади ва $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ кўринишда белгиланади. Бунда ҳам Ньютон — Лейбниц формуласи тўғри.

Машқлар

627. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапецияни тасвирланг:

1) $y = (x-1)^2$ функция графиги, Ox ўқи ва $x = 2$ тўғри чизиқ;

2) $y = 2x - x^2$ функция графиги ва Ox ўқи;

3) $y = \frac{2}{x}$ функция графиги, Ox ўқ ва $x = 1$, $x = 4$ тўғри чизиқлар;

4) $y = \sqrt{x}$ функция графиги, Ox ўқи ва $x = 4$ тўғри чизиқ.

628. $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар, Ox ўқи ва $y = f(x)$ функция графиги билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини топинг:

1) $a = 2$, $b = 4$, $f(x) = x^3$;
2) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$;
3) $a = -2$, $b = 1$, $f(x) = x^2 + 1$;
4) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;
5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$;
6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

629. Ox ўқи ва ушбу парабола билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = 4 - x^2$; 2) $y = 1 - x^2$;
3) $y = -x^2 + 3x - 2$; 4) $y = -x^2 + 4x - 3$.

---

630. $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар, Ox ўқи ва $y = f(x)$ функция графиги билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $a=1,\ b=8,\ f(x)=\sqrt[3]{x}$; 2) $a=4,\ b=9,\ f(x)=\sqrt{x}$.

631. $x=b$ тўғри чизиқ, Ox ўқи ва $y=f(x)$ функция графиги билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $b=2,\ f(x)=5x-x^2,\ 2\leqslant x\leqslant 5$; 2) $b=3,\ f(x)=x^2+2x$;

3) $b=1,\ f(x)=e^x-1$; 4) $b=2,\ f(x)=1-\frac{1}{x}$.

34-§. ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

Интегралларни интеграл йиғиндилар ёрдамида тақрибан ҳисоблаш мумкин. Интегрални бундай тақрибий ҳисоблаш усули жуда катта ва узундан-узоқ ҳисоблашлар қилишни талаб қилади. Бу усулдан $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топишнинг иложи бўлмаган ҳолларда фойдаланилади ва ҳисоблашларда махсус программалар тузилиб, одатда ЭҲМ дан фойдаланилади. Агарда бошланғич функция маълум бўлса, Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб, интегрални аниқ ҳисоблаш мумкин.

Интегралларни бошланғич функциялар жадвали ва интеграллаш қоидалари ёрдамида Ньютон — Лейбниц формуласидан фойдаланиб, ҳисоблашга оид мисоллар келтирамиз.

1- масала. $\int_0^1 (x-1)\,dx$ интегрални ҳисобланг.

△ $x-1$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири $\frac{x^2}{2}-x$ бўлади. Шунинг учун $\int_0^1 (x-1)\,dx=\left(\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(\frac{0^2}{2}-0\right)=$

$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$. ▲

Интегралларни ҳисоблашда қуйидагича белгилашлар киритиш қулайдир:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_b^a.$$

У ҳолда Ньютон — Лейбниц формуласини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b.$$

2- масала. $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx$ интегрални ҳисобланг.

$$\triangle\ \int_{-a}^{a} \sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_{-a}^{a}=(-\cos a)-(-\cos(-a))=$$

$$=-\cos a+\cos(-a)=0,$$

чунки $\cos(-a)=\cos a$. ▲

3- масала. $\int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx$ интегрални ҳисобланг.

$$\triangle \int\limits_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx = \int\limits_{-1}^{3} (2x+3)^{-\frac{1}{2}}dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= (2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}} - (2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}} = 3-1 = 2. \blacktriangle$$

4- масала. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ интегрални ҳисобланг.

$$\triangle \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}\Big(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacktriangle$$

5- масала*. $\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$ интегрални ҳисобланг.

$$\triangle \int\limits_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx = \int\limits_{0}^{3} (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{3} \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{0}^{3} =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) = 7\frac{11}{15}. \blacktriangle$$

Машқлар

Интегрални ҳисобланг (632—639):

632. 1) $\int\limits_{0}^{1} x\,dx$; 2) $\int\limits_{0}^{3} x^2dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{2} 3x^2dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{3} 2x\,dx$;

5) $\int\limits_{2}^{3} \frac{1}{x^2}dx$; 6) $\int\limits_{1}^{2} \frac{1}{x^3}dx$; 7) $\int\limits_{1}^{7} \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int\limits_{4}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

633. 1) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^x dx$; 3) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int\limits_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

634. 1) $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx$; 2) $\int_{-2}^{-1}(5-4x)\,dx$;

3) $\int_{-1}^{2}(1-3x^2)\,dx$; 4) $\int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx$;

5) $\int_{-2}^{-1}(6x^2+2x-10)\,dx$; 6) $\int_{0}^{2}(3x^2-4x+5)\,dx$.

635. 1) $\int_{0}^{4}(x-3\sqrt{x})\,dx$; 2) $\int_{1}^{9}\left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

3) $\int_{0}^{2}e^{3x}\,dx$; 4) $\int_{1}^{3}2e^{2x}\,dx$.

---

636. 1) $\int_{-2}^{1}x(x+3)(2x-1)\,dx$; 2) $\int_{-1}^{0}(x+1)(x^2-2)\,dx$;

3) $\int_{1}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$; 4) $\int_{-2}^{-1}\frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)dx$.

637. 1) $\int_{1}^{2}\frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int_{1}^{3}\frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int_{0}^{5}\frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx$; 4) $\int_{2}^{7}\frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

638. 1) $\int_{1}^{2}\frac{3}{2x-1}dx$; 2) $\int_{0}^{1}\frac{4}{3x+2}dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

639**. 1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2x-\sin^2x)\,dx$; 4) $\int_{0}^{\pi}(\sin^4x+\cos^4x)\,dx$;

5) $\int_{0}^{3}x^2\sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_{3}^{4}\frac{x^2-4x+5}{x-2}dx$.

640**. $\int\limits_1^b (b-4x)\,dx \geqslant 6-5b$ тенгсизлик бажариладиган барча $b>1$ сонларни топинг.

35-§. ЮЗЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАР ЁРДАМИДА ҲИСОБЛАШ

1-масала. Ox ўқи, $x=-1$, $x=2$ тўғри чизиқлар ва $y=9-x^2$ парабола билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисобланг.

△ $y=9-x^2$ функция графигини ясаймиз ва берилган трапецияни тасвирлаймиз (86-расм).

Изланаётган S юз $S=\int\limits_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx$ интегралга тенг.

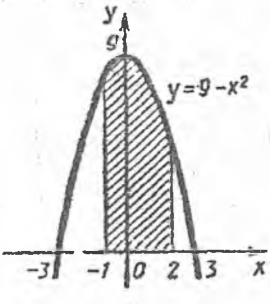
Ньютон — Лейбниц формуласидан топамиз:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

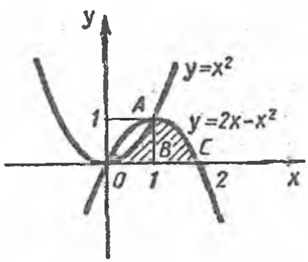
$$=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(9(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24. \ ▲$$

2-масала. $y=x^2$, $y=2x-x^2$ параболалар ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

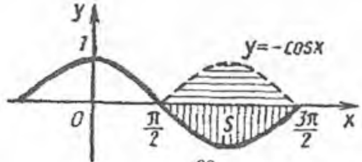
△ $y=x^2$, $y=2x-x^2$ функцияларнинг графикларини ясаймиз ва $x^2=2x-x^2$ тенгламадан бу графикларнинг кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз. Бу тенгламанинг илдизлари $x_1=0$, $x_2=1$. Берилган фигура 87-расмда тасвирланган. Расмдан кўриниб турибдики, бу фигура иккита эгри чизиқли трапециядан тузилган.



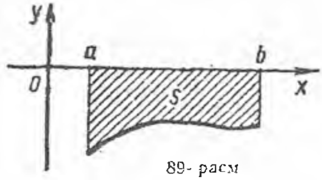
86-расм



87-расм



88- расм



89- расм

Демак, изланаётган юз бу трапецияларнинг юзлари йиғиндисига тенг:

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)\,dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^2=1. \ \blacktriangle$$

3- масала. Ox ўқининг $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмаси ва $y=\cos x$ функциянинг бу кесмадаги графиги билан чегараланган фигуранинг S юзини топинг.

$\triangle$ Кўрамизки, бу фигуранинг юзи Ox ўққа нисбатан бу фигурага симметрик фигуранинг юзига тенг (88- расм), яъни Ox ўқининг $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмаси билан ва $y=-\cos x$ функциянинг $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмадаги графиги билан чегараланган фигуранинг юзига тенг. Бу кесмада $-\cos x\geqslant 0$ ва шунинг учун

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)\,dx=(-\sin x)\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

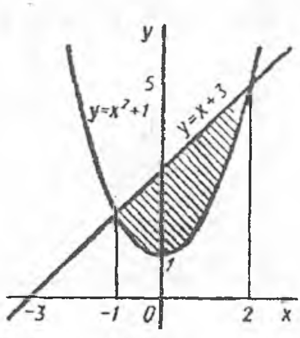
$$=\left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2. \ \blacktriangle$$

Умуман, агар $[a;\ b]$ кесмада $f(x)\leqslant 0$ бўлса (89- расм), у ҳолда эгри чизиқли трапециянинг S юзи

$S=\int_a^b(-f(x))\,dx$ га тенг бўлади.

4- масала. $y=x^2+1$ парабола ва $y=x+3$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг S юзини топинг.

$\triangle$ $y=x^2+1$ ва $y=x+3$ функцияларнинг графикларини ясаймиз. $x^2+1=x+3$ тенгламадан бу графиклар кесишадиган нуқталарнинг абсциссаларини топамиз. Бу тенглама $x_1=-1$, $x_2=2$ илдизларга эга. Берилган функцияларнинг графиклари билан чегараланган фигура 90- расмда



90- расм

тасвирланган. Бу расмдан кўринадики, изланаётган юзни биринчиси юқоридан $y=x+3$ тўғри чизиқ, иккинчиси эса $y=x^2+1$ парабола ёйи билан чегараланган ҳамда $[-1;\ 2]$ кесмага тираладиган иккита трапеция S_1 ва S_2 юзларининг айирмаси сифатида топиш мумкин.

$$S_1=\int_{-1}^{2}(x+3)\,dx,\quad S_2=\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx$$

бўлгани учун

$$S=S_1-S_2=\int_{-1}^{2}(x+3)\,dx-\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx.$$

Бошланғич функциялар хоссасидан фойдаланиб, S ни битта интеграл кўринишида ёзиш мумкин:

$$S=\int_{-1}^{2}((x+3)-(x^2+1))\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=4{,}5.\ \blacktriangle$$

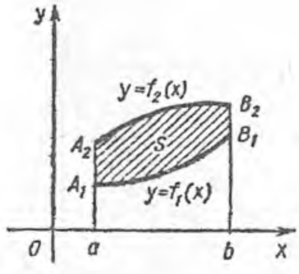
Умуман, 91- расмда тасвирланган фигуранинг юзи қуйидагига тенг:

$$S=\int_{a}^{b}(f_2(x)-f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

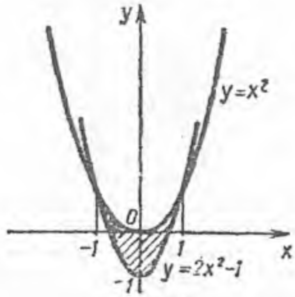
Бу формула $f_2(x)\geqslant f_1(x)$ шартни қаноатлантирадиган $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ (исталган ишорали қийматларни қабул қиладиган) узлуксиз функциялар учун тўғридир.

5- м а с а л а. $y=x^2$ ва $y=2x^2-1$ параболалар билан чегараланган фигуранинг S юзини топинг.

$\triangle$ Берилган фигурани ясаймиз (92- расм) ва $x^2=2x^2-1$



91- расм



92- расм

тенгламадан параболалар кесишишадиган нуқталарнинг абсциссаларини топамиз.

Бу тенглама $x_{1,2}=\pm 1$ илдизларга эга. (1) формуладан фойдаланамиз. Бунда $f_1(x)=2x^2-1$, $f_2(x)=x^2$.

$$S=\int_{-1}^{1}(x^2-(2x^2-1))dx=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}. \blacktriangle$$

Машқлар

641. 93- расмда эгри чизиқли трапециялар тасвирланган. Уларнинг ҳар бирининг юзларини топинг.

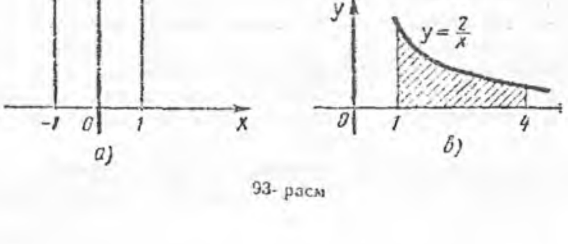
Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини топинг (642—651):

642. 1) $y=(x+1)^2$ парабола, $y=1-x$ тўғри чизиқ ва Ox ўқи;
2) $y=4-x^2$ парабола, $y=x+2$ тўғри чизиқ ва Ox ўқи;
3) $y=4x-x^2$ парабола, $y=4-x$ тўғри чизиқ ва Ox ўқи;
4) $y=3x^2$ парабола, $y=1,5x+4,5$ тўғри чизиқ ва Ox ўқи.

643. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=(x-2)^2$ функциялар графиклари ва Ox ўқи;
2) $y=x^3$, $y=2x-x^2$ функциялар графиклари ва Ox ўқи.

644. 1) $y=x^2+3x$ парабола ва Ox ўқи;
2) $y=x^2-4x+3$ парабола ва Ox ўқи.

645. 1) $y=x^2+1$ парабола ва $y=3-x$ тўғри чизиқ;
2) $y=(x+2)^2$ парабола ва $y=x+2$ тўғри чизиқ;
3) $y=\sqrt{x}$ функция графиги ва $y=x^2$ парабола;
4) $y=\sqrt{x}$ функция графиги ва $y=x$ тўғри чизиқ.



93- расм

646. 1) $y=6x^2$, $y=(x-3)(x-4)$ параболалар ва Ox ўқи;
2) $y=4-x^2$, $y=(x-2)^2$ параболалар ва Ox ўқи.

647. 1) $y=\sin x$ функция графиги, Ox ўқидаги $[0; \pi]$ кесма ҳамда $(0; 0)$ ва $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ;
2) $y=\sin x$, $y=\cos x$ функциялар графиклари ва Ox ўқдаги $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ кесма.

648. 1) $y=6x-x^2$ парабола ва $y=x+4$ тўғри чизиқ;
2) $y=4-x^2$ парабола ва $y=x+2$ тўғри чизиқ.

649. 1) $y=2-x^2$ парабола ва $y=-x$ тўғри чизиқ;
2) $y=1$ тўғри чизиқ, Oy ўқи ва $y=\sin x$ функциянинг $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлгандаги графиги.

650*. 1) $y=-x^2+4x-3$ парабола ҳамда $(1; 0)$ ва $(0; -3)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ;
2) $y=-x^2$ парабола ва $y=-2$ тўғри чизиқ;
3) $y=1-x^2$ ва $y=x^2-1$ параболалар;
4) $y=x^3$ функция графиги ҳамда $y=1$ ва $x=-2$ тўғри чизиқлар.

651**. 1) $y=x^2+10$ парабола ва бу параболага $(0; 1)$ нуқтада ўтказилган уринмалар;
2) $y=\frac{1}{x}$ гипербола, $x=1$ тўғри чизиқ ва $y=\frac{1}{x}$ эгри чизиққа $x=2$ абсциссали нуқтадаги уринма.

652**. Фигура $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ чизиқлар билан чегараланган. $y=x^2+1$ функция графигида шундай $(x_0; y_0)$ нуқтани топингки, ундан бу функция графигига ўтказилган уринма фигурадан энг катта юзли трапеция ажратсин

36-§. ҲОСИЛА ВА ИНТЕГРАЛНИНГ АМАЛИЁТ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШДАГИ ТАТБИҚИ

1. Энг содда дифференциал тенгламалар

Шу вақтга қадар номаълумлар сонлар бўлиб келган тенгламалар кўрилар эди. Математика ва унинг татбиқларида номаълум ўрнида функциялар қатнашадиган тенгламаларни кўришга тўғри келади. Масалан, берилган $v(t)$ тезлик бўйича $s(t)$ йўлни топиш масаласи $s'(t)=v(t)$ тенгламани ечишга олиб келинади, бунда $v(t)$ — берилган функция, $s(t)$ эса изланаётган функция.

Масалан, агар $v(t)=3-4t$ бўлса, у ҳолда $s(t)$ ни топиш учун $s'(t)=3-4t$ тенгламани ечиш керак.

Бу тенглама номаълум функциянинг ҳосиласини ўз ичига олган. Бундай тенгламалар *дифференциал тенгламалар* деб аталади.

1-масала. $y'=x+1$ дифференциал тенгламани ечинг.

$\triangle$ Ҳосиласи $x+1$ га тенг бўлган $y(x)$ функцияни топиш, яъни

$x+1$ функциянинг бошланғич функциясини топиш талаб этилмоқда. Бошланғич функцияларни топиш қоидаларидан қуйидагини оламиз:

$$y=\frac{x^2}{2}+x+C,$$

бунда C — ихтиёрий ўзгармас сон. ▲

Дифференциал тенгламанинг ечими ўзгармасгача аниқликда бир қийматлимас аниқланади. Одатда дифференциал тенгламага бу ўзгармас аниқланадиган шартлар қўшилади.

2- масала. $y'=\cos x$ дифференциал тенгламанинг $y(0)=$ $=2$ шартни қаноатлантирувчи $y(x)$ ечимини топинг.

△ Бу тенгламанинг барча ечимлари $y(x)=\sin x+C$ формула билан ёзилади. $y(0)=2$ шартдан $\sin 0+C=2$ ни топамиз, бундан $C=2$.

Жавоб. $y=2+\sin x$. ▲

Физика, биология, техника ва бошқа фанларнинг кўпчилик амалий масалаларини ечиш

$$y'=ky, \qquad (1)$$

бунда k — берилган сон, дифференциал тенгламани ечишга келтирилади. Бу тенгламанинг ечимлари

$$y=C\cdot e^{kx} \qquad (2)$$

функциялар бўлади, бунда C — қўйилган аниқ масаланинг шартлари билан аниқланиладиган ўзгармас сон.

Масалан, t вақт моментидаги бактерияларнинг кўпайиш тезлиги $m'(t)$ бактериялар массаси $m(t)$ билан қуйидаги тенглама орқали боғланган:

$$m'(t)=km(t),$$

бунда k — бактерияларнинг турига ва ташқи шарт-шароитларга боғлиқ бўлган мусбат сон. Бу тенгламанинг ечимлари қуйидаги функциялар бўлади:

$$m(t)=Ce^{kt}.$$

C ўзгармасни, масалан, $t=0$ моментда бактериялар массаси m маълум деган шартдан топиш мумкин. Унда $m(0)=m_0=$ $=Ce^{k\cdot 0}=C$, шунинг учун

$$m(t)=m_0e^{kt}.$$

(1) тенгламани қўлланилишининг бир мисоли моддаларнинг радиоактив парчаланиши ҳақидаги масаладир. Агар $m'(t)$ берилган t вақт моментидаги радиоактив парчаланиш тезлиги бўлса, у ҳолда

$$m'(t)=-km(t),$$

бунда k — модданинг радиоактивлигига боғлиқ бўлган ўзгармас сон. Бу тенгламанинг ечимлари

$$m(t)=Ce^{-kt}$$

функциялар бўлади.

Агар t вақт моментида масса m_0 га тенг бўлса, у ҳолда $C=m_0$ ва шунинг учун

$$m(t)=m_0e^{-kt}. \qquad (3)$$

Шуни айтиб ўтамизки, амалиётда радиоактив модданинг парчаланиш тезлиги ярим парчаланиш даври билан, яъни дастлабки модданинг ярми парчаланадиган вақт оралиғи билан характерланади.

T — ярим парчаланиш даври бўлсин, у ҳолда (3) тенгликдан $t=T$ да $\frac{m_0}{2}=m_0e^{-kT}$ ни оламиз, бундан $k=\frac{\ln 2}{T}$.

Шунинг учун (3) формула бундай ёзилади:

$$m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармоник тебранишлар

Амалиётда кўпинча даврий такрорланадиган жараёнлар учрайди, масалан, маятник, тор, пружина ва ҳоказоларнинг тебранма ҳаракати; ўзгарувчан ток, магнит майдон ва ҳоказо билан боғлиқ бўлган жараёнлар. Кўпгина бундай масалаларни ечиш ушбу дифференциал тенгламани ечишга келтирилади:

$$y''=-\omega^2y, \qquad (4)$$

бунда ω — берилган мусбат сон, $y=y(x)$, $y''=(y'(x))'$. $(y'(x))'$ функцияни $y(x)$ *функциянинг иккинчи ҳосиласи* дейилади ва $y''(x)$ ёки қисқача y'' кўринишда белгиланилади. (4) тенгламанинг ечимлари

$$y(x)=C_1\sin\ (\omega x+C_2) \qquad (5)$$

функциялардир, бунда C_1, C_2 — қўйилган аниқ масаланинг шартлари билан аниқланадиган ўзгармас сонлар. (4) тенглама *гармоник тебранишларнинг дифференциал тенгламаси* деб аталади, (5) тенглик эса *гармоник тебранишлар тенгламаси* дейилади.

Масалан, агар $y(t)$ — эркин тебранаётган тор нуқтасининг t вақт моментида мувозанат ҳолатидан четлашиши бўлса, у ҳолда

$$y(t)=A\sin(\omega t+\varphi),$$

бунда A — тебраниш амплитудаси, ω — частота, φ — бошланғич фаза.

Гармоник тебраниш графиги синусоида бўлади.

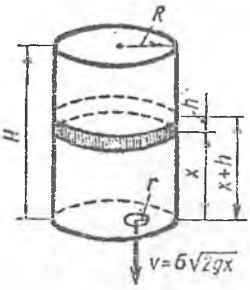
3. Бошланғич функция ва интегралнинг қўлланилишига доир мисоллар

3- м а с а л а. Баландлиги 5 м га, асосининг радиуси эса 0,8 м га тенг бўлган цилиндрик бак сув билан тўлдирилган (94- расм). Бак тубидаги доиравий жўмракнинг радиуси 0,1 м га тенг бўлса, бак ичидаги сув қанча вақт ичида оқиб чиқиб кетади?

△ Бакнинг баландлигини H, унинг асоси радиусини R, жўмракнинг радиусини r деб белгилаймиз (узунликни метрларда, вақтни эса секундларда ўлчаймиз).

Суюқликнинг оқиб чиқиш тезлиги v суюқликнинг баландлиги x га боғлиқ бўлади ва ушбу Бернулли формуласи билан ҳисобланилади

$$v=\sigma\sqrt{2gx}, \qquad (6)$$



94- расм

бунда $g=9{,}8$, σ — суюқликнинг хоссасига боғлиқ бўлган коэффициент; сув учун $\sigma=0{,}6$. Шунинг учун бакдаги сув камайгани сари оқиб чиқиш тезлиги ҳам камаяди (доимий эмас).

$t(x)$ — баландлиги x, асосининг радиуси R ва жўмрагининг радиуси r бўлган ўша бакдан сувнинг оқиб чиқишига кетадиган вақт бўлсин (94- расм). $t_1=t(x+h)-t(x)$ вақт ичида сувнинг оқиб чиқиш тезлиги доимий ва (6) формула билан ифодаланилади деб, $\frac{t(x+h)-t(x)}{h}$ айирмали нисбатни тақрибан топамиз.

t_1 вақт ичида бакдан оқиб чиққан сувнинг ҳажми баландлиги h, асосининг радиуси R бўлган цилиндрнинг ҳажмига, яъни πR^2h га тенг. Иккинчи томондан бу ҳажм асоси бак тубидаги жўмракдан иборат, баландлиги эса сувнинг оқим тезлиги v нинг t_1 вақтга кўпайтирилганига тенг бўлган цилиндрнинг ҳажмига, яъни πr^2vt_1 га тенг. Демак, $\pi R^2h=\pi r^2vt_1$. Бундан, (6) формулани эътиборга олиб ва $t_1=t(t+h)-t(x)$ деб, топамиз:

$$\frac{t(x+h)-t(x)}{h}\approx\frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}},$$

бунда яқинлашиш хатолиги $h\to0$ да нолга интилади. Демак, $h\to0$ да қуйидаги тенглик топилади: $t'(x)=\frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$, бундан эса $t(x)=\frac{R^2}{r^2\sigma\sqrt{2g}}\cdot2\sqrt{x}+C$.

Агар $x=0$ (бакда сув йўқ) бўлса, у ҳолда $t(0)=0$ бўлади, шунинг учун $C=0$. $x=H$ да изланаётган вақтни топамиз:

$$t(H)=\frac{R^2\sqrt{2H}}{r^2\sigma\sqrt{g}}.$$

Масалада берилган маълумотлардан фойдаланиб, ҳисоблаймиз:

$$t(5)=\frac{(0{,}8)^2\cdot\sqrt{10}}{(0{,}1)^2\cdot0{,}6\cdot\sqrt{9{,}8}}\approx108.$$

Ж а в о б : 108 с. ▲

4-масала. Агар пружинани 0,01 м сиқиш учун 10 Н куч керак бўлса, пружинани 0,08 м сиқиш учун кетадиган F кучнинг ишини ҳисобланг.

△ Гук қонунига асосан F куч пружинанинг чўзилиши ёки сиқилишига пропорционал, яъни $F=kx$, бунда x — чўзиш ёки сиқиш катталиги (м ҳисобида), k — доимий. Масала шартидан k ни топамиз. $x=0{,}01$ м бўлганда куч $F=10$ Н бўлгани учун $k=\frac{F}{x}=1000$. Демак, $F(x)=kx=1000x$.

Жисм a нуқтадан b нуқтага кўчгандаги $F(x)$ кучнинг бажарган иши

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

га тенг.

Масалада берилган маълумотлардан фойдаланиб, топамиз:

$$A=\int_0^{0{,}08} 1000xdx=$$

$$=1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}08}=3{,}2 \ (\text{Ж}). \ ▲$$

Машқлар

653. Жисм $v(t)$ (м/с) тезлик билан тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Жисмнинг $t=t_1$ дан $t=t_2$ гача бўлган вақт оралиғида босиб ўтган йўлини ҳисобланг:

1) $v(t)=3t^2+1$, $t_1=0$, $t_2=4$;
2) $v(t)=2t^2+t$, $t_1=1$, $t_2=3$.

654. Тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган жисмнинг тезлиги $v(t)=4t-t^2$ га тенг. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан то тўхтагунгача ўтган йўлини ҳисобланг:

655. Дифференциал тенгламани ечинг:

1) $y'=3-4x$; 2) $y'=6x^2-8x+1$;
3) $y'=3e^{2x}$; 4) $y'=4\cos 2x$;
5) $y'=3\sin x$; 6) $y'=\cos x-\sin x$.

656. Дифференциал тенгламанинг берилган шартни каноатлантирадиган ечимини топинг:

1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$;
2) $y' = 2\cos x$, $y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$;
4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$;
6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

657. $y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ функция C_1 ва C_2 нинг исталган қийматларида $y'' + \omega^2 y = 0$ дифференциал тенгламанинг ечими эканлигини кўрсатинг.

658. Массаси 1 г га тенг радий 10 йилдан кейин 0,999 г гача камайди. Неча йилдан кейин радийнинг массаси 0,5 г гача камаяди?

659. Агар 2Н куч пружинани 1 см қисса, пружинани 3 см қисиш учун сарф қилиш керак бўлган ишни ҳисобланг.

660. Агар 3Н куч пружинани 1 см га чўзса, пружинани 8 см чўзиш учун сарф қилиниши керак бўлган ишни ҳисобланг.

VII БОБГА ДОИР МАШҚЛАР

661. $f(x)$ функция учун графиги M нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг:

1) $f(x) = \cos x$, $M(0;\ -2)$;
2) $f(x) = \sin x$, $M(-\pi;\ 0)$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M(4;\ 5)$;
4) $f(x) = e^x$, $M(0;\ 2)$;
5) $f(x) = 3x^2 + 1$, $M(1;\ -2)$;
6) $f(x) = 2 - 2x$, $M(2;\ 3)$.

662. Интегрални ҳисобланг:

1) $\int_{-1}^{2} 2dx$;
2) $\int_{-2}^{2} (3 - x)dx$;
3) $\int_{1}^{3} (x^2 - 2x)dx$;
4) $\int_{-1}^{1} (2x - 3x^2)dx$;
5) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;
6) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$;
7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$;
8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

663. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
2) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;

3) $y=x^2$, $y=2-x$;

4) $y=2x^2$, $y=0{,}5x+1{,}5$;

5) $y=\sqrt[3]{x}$, $x=-8$, $x=-1$, $y=0$;

6) $y=\frac{1}{x^3}$, $x=-3$, $x=-1$, $y=0$.

УЗИНГИЗНИ ТЕКШИРИБ КУРИНГ!

1. $F(x)=e^{2x}+x^3-\cos x$ функция бутун сон тўғри чизиғида $f(x)=2e^{2x}+3x^2+\sin x$ функция учун бошланғич функция бўлишини кўрсатинг.
2. $f(x)=3x^2+2x-3$ функция учун графиги $M(1;\ -2)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг.
3. Ҳисобланг:

$$\int_1^2 3x^3dx;\quad \int_2^4 \frac{dx}{x^3};\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx;\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx.$$

4. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг: а) $y=x^2+x-6$ парабола ва Ox ўқи; б) $y=x^2+1$ ва $y=0$ функциялар графиги.

Интегрални ҳисобланг (664—665):

664. 1) $\int_0^1 (5x^4-8x^3)\,dx$; 2) $\int_{-1}^1 (6x^3-5x)\,dx$;

3) $\int_1^4 \sqrt{x}\left(3-\frac{7}{x}\right)dx$; 4) $\int_1^8 4\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{4}{x}\right)dx$;

5) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$; 6) $\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$.

665. 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$;

3) $\int_1^3 3\sin(3x-6)\,dx$; 4) $\int_0^3 8\cos(4x-12)\,dx$.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (666—667):

666. 1) $y=\frac{1}{x}$, $y=4x$, $x=1$, $y=0$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=2$, $y=0$;

3) $y=x^2+1$, $y=x+1$; 4) $y=x^2+2$, $y=2x+2$.

667. 1) $y=x^2-6x+9$, $y=x^2+4x+4$, $y=0$;

2) $y=x^2+1$, $y=3-x^2$;

3) $y=x^2$, $y=2\sqrt{2}x$;

4) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

668*. 1) $y=x^2-2x+2$ парабола, параболанинг Oy ўқи билан кесишган нуктасидан шу параболага ўтказилган уринма ва $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

2) $y=\frac{4}{x}$ гипербола, унга $x=2$ абсциссали нуқтадан ўтган уринма ва $y=0$, $x=6$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

669**. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y=x^3-3x^2-9x+1$, $x=0$, $y=6$, $x<0$;

2) $y=x^4-2x^2+5$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.

670**. k нинг қандай қийматида $y=x^2+px$ (бунда p — берилган сон) парабола ва $y=kx+1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзи энг кичик бўлади?

XI СИНФ АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ КУРСИНИ ТАКРОРЛАШ УЧУН МАШҚЛАР

671. $f(x)$ функция ҳосиласининг x_0 нуктадаги қийматини топинг:

1) $f(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+x$, $x_0=\frac{1}{3}$;

2) $f(x)=\frac{x^4}{4}+0{,}5x^2-1$, $x_0=\frac{1}{2}$;

3) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-x$, $x_0=-2$;

4) $f(x)=x^{-3}-\frac{2}{x^2}+3x$, $x_0=3$;

5) $f(x)=x^2\ln(2-x)$, $x_0=1$;

6) $y=x^3e^x$, $x_0=-1$;

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x_0=1$;

8) $y=\frac{\cos x}{\sin x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

672. $f(x)$ функциянинг ҳосиласи 0 бўладиган x нинг қийматларини топинг:

1) $f(x)=\sin 2x-x$;

2) $f(x)=\cos 2x+2x$;

3) $f(x)=(2x-1)^3$;

4) $f(x)=(1-3x)^5$.

673. Агар $f(x)=(2x-3)(3x^2+1)$ бўлса, у ҳолда $f'(1)=$ $=f'(0)$ бўлишини кўрсатинг.

674. $f(x)=x^3-1{,}5x^2-18x=\sqrt{3}$ функциянинг ҳосиласи манфий бўладиган x нинг қийматларини топинг.

675. x_0 абсциссали нуқтада $y=f(x)$ функция графигига уринманинг бурчак коэффициентини топинг:

1) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$;

2) $f(x)=\cos 3x,\ x_0=\frac{\pi}{6}$.

676. x_0 абсциссали нуқтада $y=f(x)$ функция графигига уринма билан Ox ўқи орасидаги бурчакни топинг:

1) $f(x)=\frac{1}{4x^2}-\sqrt{x},\ x_0=1$;

2) $f(x)=2x\sqrt{x},\ x_0=\frac{1}{3}$.

677. x_0 абсциссали нуқтада $y=f(x)$ функция графигига уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $f(x)=\frac{3}{4x\sqrt{x}},\quad x_0=\frac{1}{4}$;

2) $f(x)=2x^4-x^2+4,\ x_0=-1$.

678. $y=f(x)$ функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

1) $f(x)=4x^3+6x^2$; 2) $f(x)=3x^2-2x^3$;

3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$; 4) $f(x)=x^4+\frac{1}{2}x^2$.

679. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $[-1;\ 4]$ кесмада $y=\sqrt{x+5}$ нинг;

2) $[1;\ 2]$ кесмада $y=x^2-\frac{1}{x}$ нинг;

3) $[0;\ \frac{\pi}{2}]$ кесмада $y=3\sin x+4\cos x$ нинг;

4) $[0;\ \frac{\pi}{2}]$ кесмада $y=\sin x+2\sqrt{2}\cos x$ нинг;

5) $[0{,}5;\ 4]$ кесмада $y=\ln x-x$ нинг;

6) $[-1;\ 1]$ кесмада $y=2x\,e^{2x}$ нинг;

7) $[0;\ \sqrt{\frac{5}{3}}]$ кесмада $y=x\sqrt[3]{5-3x^2}$ нинг;

8) $[0;\ 1]$ кесмада $y=x\sqrt{1-x^2}$ нинг.

680. Цилиндр ўқ кесимининг периметри 6 дм. Цилиндр асосининг радиуси қандай бўлганда унинг ҳажми энг катта бўлади?

681. Агар тўла сирти юзи 54π см^2 бўлган цилиндр асосининг радиуси 2 см дан кичикмас ва 4 см дан каттамаслиги маълум бўлса, унинг мумкин бўлган энг катта ҳажмини топинг.

682. $SABC$ мунтазам пирамиданинг S учидан SO баландлик ўтказилган. Агар $SO+AC=9$ ва $1\leqslant AC\leqslant 8$ шартларда

пирамиданинг ҳажми энг катта бўлса, пирамида асослари томонини топинг.

683. Мунтазам тўғри тўртбурчакли призмада диагонали $2\sqrt{3}$ га тенг. Призманинг баландлиги қандай бўлганда унинг ҳажми энг катта бўлади?

684. $f(x)=x^{-2}+\cos x$ функция учун графиги $M\left(0{,}5\pi;\ -\frac{2}{\pi}\right)$ нуқтадан ўтадиган бошланғич функцияни топинг.

685. Ҳисобланг:

1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx;$ 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx;$ 3) $\int\limits_{-2}^{1} (x^2+2x+3)\,dx;$

4) $\int\limits_{1}^{2} (x^2-6x+8)\,dx;$ 5) $\int\limits_{e}^{2e} \left(1+\frac{1}{x}\right)dx;$ 6) $\int\limits_{1}^{3} (x^{-2}+1)\,dx;$

7) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{3-2x}\,dx;$ 8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{5-4x}\,dx.$

686. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y=4x-x^2,\ y=5,\ x=0,\ x=3;$
2) $y=x^2-2x+3,\ x=1,\ x=2,\ y=1;$
3) $y=\frac{4}{x},\ y=-x^2+4x+1;$
4) $y=x^2-2x+8,\ y=6,\ x=-1,\ x=3;$
5) $y=\sin x,\ y=0,\ x=\frac{2\pi}{3},\ x=\pi;$
6) $y=\cos x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{6}.$

---

687. Тўппончадан узилган ўқ юқорига 360 м/с тезлик билан отилиб чиқди. $t=10$с вақт моментида ўқнинг тезлигини топинг ва ўқнинг қанча вақт юқорига кўтарилишини аниқланг. Ўқнинг ҳаракат тенгламаси $h=v_0t-4{,}9t^2$.

688. Ғилдирак шундай айланадики, унинг бурилиш бурчаги вақтнинг кубига тўғри пропорционал. Ғилдиракнинг биринчи айланиши 2 с да бўлди. Айланиш бошлангандан 4 с ўтгандаги ғилдиракнинг бурчак тезлигини аниқланг.

Функциянинг ҳосиласини топинг (689—691):

689. 1) $y=\frac{x^5-3x^3+2x^2-x+3}{x^3};$ 2) $y=10x^{-\frac{1}{2}}-5x^{-0,4}+10x^{-0,7};$

3) $y=x\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x};$ 4) $y=\frac{6x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}.$

690. 1) $y=\frac{3x^2-2x+1}{x+1};$ 2) $y=\frac{2x^2-3x+1}{2x+1};$

3) $y=\frac{\ln x+1}{x}$; 4) $y=\frac{4\ln x}{1+\ln x}$.

691. 1) $y=(2x+1)^2\cdot\sqrt{x-1}$; 2) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

3) $y=\sin 2x\cdot\cos 3x$; 4) $y=x\cdot\cos 2x$.

692. x нинг $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ функциянинг ҳосиласи -1 га тенг бўладиган қийматларини топинг.

693. $f'(2)$ соннинг ишорасини аниқланг, бунда:

1) $f(x)=e^{3-2x}\cdot x^2$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{e^{1-x}}$.

694. $f(x)=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$ функция берилган. $f'(0)$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ни топинг.

695. Агар $f(x)=x^3+x^2+x\sqrt{3}$, $g(x)=x\sqrt{3}+1$ бўлса, x нинг $f'(x)\leqslant g'(x)$ бўладиган қийматларини топинг.

696. $y=x^3-x+1$ функция графигининг Oy ўқи билан кесишиш нуқтасида унга ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

697. $y=2$ ординатали нуқтада $y=3x^3-1$ функциянинг графигига ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

698. $y=4x-3$ тўғри чизиқ $y=6-2x+x^2$ парабола учун уринма бўлади. Уриниш нуқтасининг координаталарини ҳисобланг.

699. Шундай нуқталарни топингки, бу нуқталарда $y=4x^3-9x^2+6x+1$ функция графигига ўтказилган уринмалар абсциссалар ўқига параллел бўлсин.

700. $y=3x^2+7x+1$ параболада шундай нуқтани топингки, бу нуқтада параболага ўтказилган уринма абсциссалар ўқи билан $\frac{\pi}{4}$ бурчак ҳосил қилсин.

701. $y=f(x)$ функциянинг графигига x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

1) $f(x)=x\ln 2x$, $x_0=0{,}5$; 2) $f(x)=2^{-x}$, $x_0=1$;

3) $f(x)=\frac{9x^2}{\sqrt{x}}$, $x_0=\frac{1}{9}$; 4) $f(x)=x^3e^{1-x}$, $x_0=1$.

702. Функциянинг монотонлик оралиқларини топинг:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x}$.

Функциянинг экстремум нуқталарини топинг (703—704):

703. 1) $y=(x-1)^3(x-2)^2$; 2) $y=4+(6-x)^4$.

704. 1) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 2) $y=\frac{x^2+6x+3}{3x+4}$.

705. Функциянинг берилган оралиқдаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

1) $y=2\sin x+\sin 2x,\ [0;\ \frac{3\pi}{2}]$;

2) $y=2\sin x+\cos 2x,\ [0;\ \frac{\pi}{2}]$.

706. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

1) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+9$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-9$;

3) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+\frac{7}{4}$; 4) $y=-x^4+6x^2-9$;

5) $y=\frac{x^2+1}{x}$; 6) $y=\frac{x^2+2}{2x}$.

707. $y=x^2+px+q$ квадрат функция $x=5$ да 1 га тенг минимумга эга бўлиши учун p ва q коэффициентлар қандай бўлиши керак?

708. Ясовчиси 20 дм бўлган конуснинг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг баландлиги қандай бўлиши керак?

709. Агар цилиндрнинг ҳажми V га тенг бўлса, унинг сирти қандай энг кичик юзга эга бўлади?

710. R радиусли шарга ички чизилган ва ён сирти энг катта юзга эга бўлган цилиндр асосининг радиусини топинг.

711. R радиусли шарга ички чизилган энг катта ҳажмли цилиндрнинг баландлигини топинг.

712. R радиусли шарга ички чизилган максимал ҳажмли конуснинг баландлигини топинг.

713*. Берилган V ҳажмли конусга пирамида ички чизилган бўлиб, унинг асосида учидаги бурчаги α га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак ётади. α нинг қандай қийматида пирамиданинг ҳажми энг катта бўлади?

714. $f(x)=\cos 4x$ функция учун $F(x)$ бошланғич функцияни $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=-1$ шартида топинг.

715. Функциянинг бошланғич функциясини топинг:

1) $y=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$; 2) $y=\frac{3}{4x-1}$.

716. Ҳисобланг:

1) $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx$; 2) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-2\sin^2 x)\,dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x-1)\,dx$;

5) $\int_2^3 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$; 6) $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$.

717. Куйидаги чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=3-x$, $y=0$;

2) $y=-x^2+6x-2$, $y=x^2-2x+4$;

3) $y=-\frac{16}{x}$, $y=-x^3$, $y=1$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{8}$.

718*. b нинг $f(x)=\sin 2x-8(b+2)\cos x-(4b^2+16b+6)x$ функция бутун сон тўғри чизиғида камаювчи бўладиган, шу билан бирга стационар нукталарга эга бўлмайдиган барча кийматларини топинг.

719*. x нинг шундай кийматларини топингки, абсциссаси шу кийматлардан иборат бўлган нукталарда $y=3\cos 5x$ ва $y=5\cos 3x+2$ функциялар графикларига ўтказилган уринмалар параллел бўлсин.

720*. $A\left(2; -\frac{12}{5}\right)$ нукта оркали $y=-\frac{3}{5}x^2$ параболага ўтказилган уринма, абсциссалар ўқини B нуқтада, ординаталар ўқини эса C нуктада кесиб ўтади. BOC учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини топинг (O — координаталар боши).

721**. $y=-\frac{12}{x}$ гиперболага $A(3; -4)$ нуқтадан l уринма ўтказилган. l тўғри чизикқа ва абсциссалар ўкига уринувчи ва маркази ординаталар ўкида бўлган айлананинг радиусини топинг.

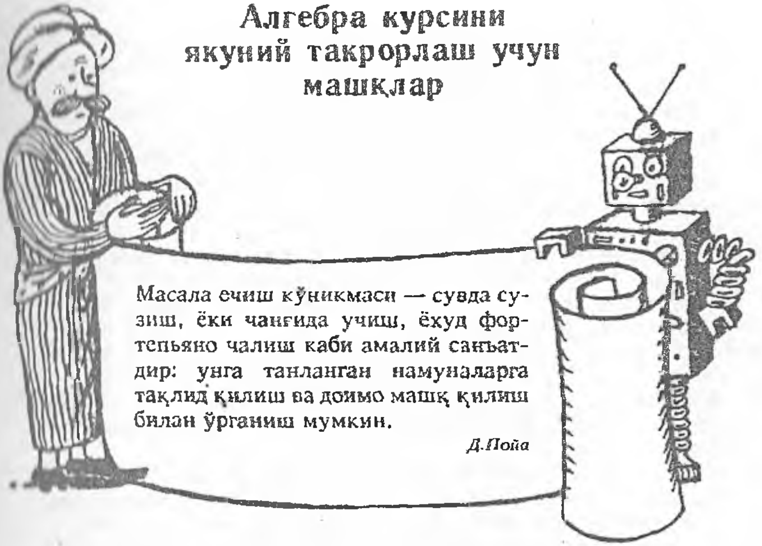
722**. Кемадаги сигнални денгизда 1 миля масофадан фарқлаш мумкин. Жанубга томон соатига 3 миля тезлик билан сузиб кетаётган A кема бу вакт ғарбга караб соатига 4 миля тезлик билан сузиб кетаётган B кемадан 5 миля ғарб томонида бўлади. Кемалар сигнал кабул килиш мумкин бўлган масофада бўла оладиларми?

723**. $y=0{,}5x^2-2x+2$ парабола ва унга $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ ва $B(4;2)$ нукталарда ўтказилган уринмалар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

724**. $y=\sqrt{x}$ функция графигида a абсциссали (бунда $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$) нуктадан, бу графикка уринма ўтказилган. a нинг бу уринма, Ox ўқи ва $x=3$ тўғри чизиқ билан чегараланган учбурчакнинг юзи энг кичик буладиган кийматини топинг ва бу энг кичик юзни ҳисобланг.

725**. $y=\sin x$ эгри чизик, $y=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигура берилган. (0; 0) нукта оркали ўтказиладиган тўғри чизик бу фигурани тенг юзли иккита фигурага бўлиши учун у Ox ўк билан кандай бурчак ҳосил килиши лозим?

Алгебра курсини якуний такрорлаш учун машқлар



1. Сонлар ва алгебраик алмаштиришлар (726—779).
2. Тенгламалар (780—819).
3. Тенгсизликлар (820—845).
4. Тенглама ва тенгсизликлар системалари (846—852).
5. Матнли масалалар (853—872).
6. Функциялар ва графиклар (873—923).
7. *Аралаш топшириқлар* (924—929).
8. Битириш имтиҳонларида тавсия этилган масалалар (930—933).

1. Сонлар ва алгебраик алмаштиришлар

726. 3,2 нинг 2,5% ни топинг.
727. Агар сонning 42 % и 12,6 ни ташкил этса, шу сонни топинг.
728. 1,3 сони 39 нинг неча процентини (фоизини) ташкил этади?
729. 46,6 сони 11,65 нинг неча процентини ташкил этади?
730. 175 % и 78,75 ни ташкил қиладиган сонни топинг.
731. *7,5 нинг 180 % ни топинг.*

Пойа Дьердь (1887—1985) — америкалик математик, Венгрияда туғилган. Асосий изланишлари эҳтимоллар назарияси, математик физика, сонлар назариясига тааллуқли. Замонавий эвристика (психология фанининг ижодий фикрлаш қонуниятларини ўрганадиган бўлими) нинг асосчиси.

732. Молнинг нархи дастлаб 24 %, кейин эса яна янги нархнинг 50 % ига арзонлаштирилди. Мол нархининг умумий арзонлаштирилиш фоизини топинг.

733. Қуйма таркибида 18 кг рух, 6 кг қалай ва 36 кг мис бор. Қуйма таркибий қисмларининг фоизлари қандай?

734. Молнинг баҳоси ва уни ташиш харажатлари 394 сўм 20 тийинни ташкил этади, бунда ташиш харажатлари мол баҳосининг 8 % ини ташкил этади. Молнинг баҳоси уни ташиш харажатларини ҳисобламаганда қанчага тенг?

735. Пирамиданинг баландлиги 5 см га тенг, унинг асосининг юзи эса 4 $см^2$ га тенг. Агар пирамида асосининг юзи ҳам, баландлиги ҳам 10 % га орттирилса, бу пирамиданинг ҳажми неча фоизга ортади?

736. Бир сонни 72 га бўлинса, 68 га тенг қолдиқ қолади. Агар шу сонни 12 га бўлинса, қандай қолдиқ қолади?

737. Икки соннинг йиғиндиси 1100 га тенг. Агар бу сонлардан бирининг 6 % и иккинчисининг 5 % ига тенг бўлса, улардан энг каттасини топинг.

738. Жамғарма банки бир йилдан кам бўлмаган омонат бўйича йилига 3 % қўшимча пул тўлайди. Омонатчи жамғарма банкига 600 сўм пул қўйди. У омонат қўйганидан кейинги иккинчи йилнинг охирида қанча пул олади? Омонат қўйганидан кейинги учинчи йилнинг охирида-чи?

739. Оддий омонат бўйича жамғарма банки йилига 2 % қўшимча пул тўлайди. Омонатчи банкка 500 сўм қўйди, бир ойдан кейин ҳисобидан 100 сўм олди. 100 сўм олган кунидан йилнинг охиригача унинг ҳисобида қанча пул йиғилади?

Ҳисобланг **(740—741)**.

740. 1) $\dfrac{5{,}48+8{,}02}{(7{,}97+8{,}77):3{,}72}$; 2) $\dfrac{20{,}88:18+45:0{,}36}{19{,}59+11{,}95}$;

3) $23{,}276:2{,}3-3{,}6\cdot(17{,}2\cdot0{,}125+0{,}005:0{,}1)+6{,}25\cdot3{,}2$;

4) $9{,}25\cdot1{,}04-(6{,}372:0{,}6+1{,}125\cdot0{,}8):1{,}2+0{,}16\cdot6{,}25$.

741. 1) $\dfrac{\left(28:1\frac{3}{4}+7\frac{1}{3}:22+1\frac{2}{3}\cdot9\frac{3}{4}+14:1\frac{1}{2}\right)\cdot3\frac{1}{7}}{10\frac{1}{2}-9\frac{3}{4}}$;

2) $\dfrac{\left(6\frac{2}{3}+2\frac{4}{15}+5\frac{1}{2}\right):\frac{1}{15}-30:\frac{5}{28}}{\left(5\cdot\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{22}\right)\cdot48\frac{1}{2}}$;

3) $\left(0{,}645:0{,}3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6{,}25-1:5+\frac{1}{7}\cdot1{,}96\right)$;

4) $\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-0{,}108)$.

742. Пропорциянинг номаълум ҳадини топинг:

1) $10:\frac{1}{8}=x:1\frac{1}{4}$; 2) $x:0{,}75=9\frac{1}{2}:14\frac{1}{4}$;

3) $\dfrac{0{,}3}{x}=\dfrac{\frac{4}{9}}{3\frac{1}{3}}$; 4) $\dfrac{x}{15}=\dfrac{1{,}456}{1{,}05}$.

Ҳисобланг (743—745):

743. 1) $\left(625^{-\frac{1}{4}}\cdot 75^{0,5}-8{,}7^{0}\right)\cdot\left(\frac{1}{3^{0,5}}+1\right)$;

2) $\left(\dfrac{15\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}}-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}\right)-183\sqrt{5}$.

744. 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}$; 2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}}\cdot 2^{-3}$;

3) $\left(3^{1-\sqrt{3}}\right)^{1+\sqrt{3}}$; 4) $\left(5^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

745. 1) $\log_8\sqrt{2}$; 2) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{32}$;

3) $5^{2+\log_5 2}$; 4) $(\sqrt{3})^{2-\log_{\sqrt{3}}7}$;

5) $\log_3\dfrac{9}{\sqrt[5]{3}}+\log_6\sqrt[5]{36}$; 6) $16^{0,5\log_4 10+1}$.

746. Сонлардан кайси бири катта:

1) $\sqrt{8}$ ми, $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}$; 2) $\sqrt{5}$ ми, $9^{\log_3\sqrt{2}+\log_{\frac{1}{9}}\frac{5}{4}}$;

3) $\sqrt{18}$ ми, $4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}$;

4) $\sqrt[3]{18}$ ми, $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}5}$?

Соддалаштиринг (747—748):

747. 1) $\dfrac{2\sqrt[6]{4\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^{3}$;

3) $3\sqrt{\frac{5}{9}}-\frac{1}{2}\sqrt{20}+3\sqrt{180}-4\sqrt{\frac{125}{4}}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

5) $(m-n)\cdot\sqrt{\dfrac{k}{m^2-2mn+n^2}}$, $m>n>0, k>0$;

6) $\sqrt{b^2+2b\sqrt{2}+2}+\sqrt{b^2-2b\sqrt{2}+2}$, $b>\sqrt{2}$.

748. 1) $\sqrt{a^4(9a^2-6a+1)}$; 2) $\sqrt{b^2(4b^4+4b^2+1)}$;

3) $\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{a}{1+\sqrt{a}}$, бунда $a>0$, $a\neq 1$;

4) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}$, бунда $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

749. Қаснинг махражини иррационалликдан қутқаринг:

1) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{b}{2\sqrt{a}}$;

5) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 7) $\frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$; 8) $\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$.

750. Қасрнинг суратини иррационалликдан қутқаринг:

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; 3) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$;

4) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$; 5) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{3}$; 6) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

751. Сонни оддий каср кўринишида ёзинг:

1) 0,(4); 2) 2(7); 3) 0,(21); 4) 1,(36); 5) 0,3(5); 6) 0,21(3).

752. Қуйидаги сонларни даврий ўнли каср кўринишида ёзинг:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $5\frac{2}{11}$.

753. 1) Иккита мусбат иррационал сонниг йиғиндиси рационал сон бўлиши мумкинми?

2) Иккита иррационал сонниг кўпайтмаси рационал сон бўлиши мумкинми?

3) Тенг бўлмаган иккита мусбат иррационал сонниг йиғиндисини уларнинг кўпайтмасига бўлгандаги бўлинма рационал сон бўлиши мумкинми?

754. Агар a ва b натурал сонлар ва $\sqrt{ab}$ рационал сон бўлса, у ҳолда $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ҳам рационал сон бўлишини, агар $\sqrt{ab}$ иррационал сон бўлса, у ҳолда $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ҳам иррационал сон бўлишини исботланг.

755. a — рационал сон, b — иррационал сон, шу билан бирга бунда $a \neq 0$ бўлсин, $a+b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ — иррационал сонлар бўлишини исботланг.

756. Оралиқлар умумий нуқтага эгами:

1) $[1;\ 3\sqrt{2}+2\sqrt{7}]$ ва $[3\sqrt{3}+4;\ 15]$;

2) $[0;\ \sqrt{27}+\sqrt{6}]$ ва $(\sqrt{48}-1;\ 10)$;

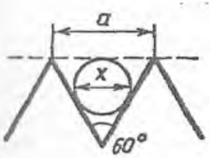
3) $[2;\ 2\sqrt{5}+2\sqrt{6}]$ ва $(3\sqrt{2}+\sqrt{22};\ 11)$;

4) $[1;\ 1+\sqrt{3}]$ ва $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1};\ 4\right)$?

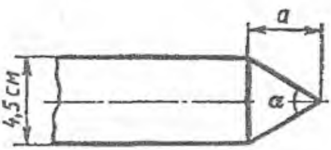
757. $0<a<b$ бўлсин. Сон ўқида:

1) $\frac{a+b}{2}$ нуқта $[a;\ b]$ кесманинг ўртаси бўлишини.

2) $\frac{a-b}{2}$ нуқта $[-b;\ a]$ кесманинг ўртаси бўлишини;



95- расм



96- расм

3) $\frac{b-a}{2}$ нуқта $[-a;\ b]$ кесманинг ўртаси бўлишини;

4) $\frac{-a-b}{2}$ нуқта $[-b;\ -a]$ кесманинг ўртаси бўлишини;

5) $\frac{a+bc}{1+c}$ (бунда $c>0$) нуқта $[a;\ b]$ кесманинг ичида ётишини исботланг.

758. 1) Тенг томонли учбурчакка ички чизилган доиранинг диаметри x ни ҳисобланг, бунда $a=6$ см (95-расм).

2) 96-расмда тасвирланган тановар (заготовка) нинг α бурчагини ҳисобланг, бунда $a=4$ см.

759. Жарликнинг эни l ни 97-расмда келтирилган маълумотлар асосида ҳисобланг.

760. Кўприкнинг узунлигини 98-расмда келтирилган маълумотлар асосида ҳисобланг.

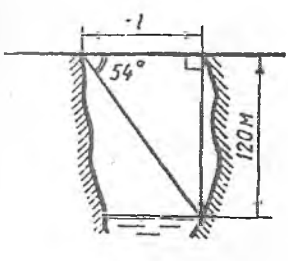
761. Тригонометрик функциялардан бирининг берилган қиймати бўйича қолган барча тригонометрик функцияларнинг сон қийматларини топинг $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$:

1) $\cos\alpha=0{,}8$; 2) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$;

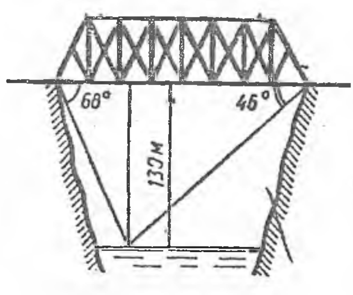
3) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}4$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$.

762. Ҳисобланг:

1) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$;



97- расм



98- расм

3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 2)$;

5) $\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 6) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$.

763. Ҳисобланг:

1) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$, бунда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}$;

2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, бунда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{5}$;

3) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2-\cos^2\alpha}$, бунда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

4) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, бунда $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Соддалаштиринг (764—769):

764. 1) $\frac{a^2+3a+2}{a^2-25}\cdot\frac{10-2a}{a+2}$;

2) $\frac{b^2-1}{b^2+2b-3}\cdot\frac{2b+1}{b+1}+\frac{b+2}{b-3}$;

3) $\frac{a+2}{a-2}\cdot\left(\frac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6}:\frac{2a-3}{a-2}\right)$;

4) $\left(2+\frac{1}{b}\right):\frac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\cdot\frac{2b+1}{b}$.

765. 1) $\left(\frac{1+2m}{1+m}+\frac{1}{m}\right):\left(\frac{1+2m}{m}-\frac{1}{1+m}\right)$;

2) $\left(\frac{a^2}{2b^2}-4+\frac{8b^2}{a^2}\right):\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right)$;

3) $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a-1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$;

4) $\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{2a}{a^2+4a+3}+\frac{1}{(a+1)^2+a+1}-\frac{2}{a+3}$.

766. 1) $\frac{1}{4+4\sqrt{a}}-\frac{1}{2-2a}+\frac{1}{4-4\sqrt{a}}$;

2) $\frac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}$.

767. 1) $\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}$;

2) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}$;

3) $\left(\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}$;

4) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{ab}}.$

768. 1) $\dfrac{(ab^{-2}+a^{-2}b)^{-1}\cdot(a^{-3}+b^{-3})}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}}\right)^{-10}};$

2) $\left(\dfrac{9a-25a^{-1}}{3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{a+7+10a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}}\right)^{4}.$

769. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}};$

2) $\left(\dfrac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^{4}}-9\sqrt[3]{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}-\frac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-(b^{2}+18b+81)^{0.5};$

3) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1;$

4) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{a^{4}})^{3}}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{a^{3}\sqrt{a^{2}b}}\right)^{4}}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^{6}}.$

770. Кўпайтувчиларга ажратинг:

1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha;$ 2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha;$

3) $3-4\sin^{2}\alpha;$ 4) $1-4\cos^{2}\alpha.$

771. Агар $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ бўлса, у ҳолда қуйидагиларни исботланг:

1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$

Ифодани соддалаштиринг (772—774):

772. 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha;$ 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^{2}\frac{\alpha}{2}};$

3) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^{2}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^{2}\frac{\alpha}{2}};$ 4) $\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}^{2}\frac{\alpha}{2}};$

5) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^{2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{1+\operatorname{tg}^{2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)};$ 6) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$

773. 1) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; 4) $\dfrac{\cos^2(\alpha+\beta)-\cos^2(\alpha-\beta)}{\sin 2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; 6) $\dfrac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

774. 1) $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\alpha\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\cdot\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha$;

3) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

4) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

Айниятни исботланг (775—779):

775. 1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$;

3) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;

4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

776. 1) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

777. 1) $(1+\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$;

2) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

778. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

779. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2. Тенгламалар

780. Тенгламани ечинг:

1) $\frac{2x+4}{5}=2-\frac{6-7x}{15}$; 2) $1{,}5-\frac{x}{3}=\frac{2x-5}{6}-\frac{x-4}{3}$;

3) $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6}$;

4) $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\frac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right)$.

781. a нинг қандай қийматида $a(x-3)+8=13(x+2)$ тенглама 0 га тенг илдизга эга бўлади?

782. b нинг қандай қийматида $1-b(x+4)=2\cdot(x-8)$ тенглама 1 га тенг илдизга эга бўлади?

Тенгламани ечинг (783—794):

783. 1) $x(x+1)-(x+2)(x+3)+9=x(x+4)-(x+5)(x+2)$;
2) $2(x+3)(x+1)+8=(2x+1)(x+5)$.

784. 1) $\frac{3x}{x+1}+\frac{x-1}{x-2}=4$; 2) $\frac{3x}{x+5}-1=\frac{2x+5}{x}$;

3) $\frac{5}{3x+7}=\frac{7}{5x+9}$; 4) $\frac{4x^2-1}{4x^2-16x+7}-1=\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{2x-7}$;

5) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x^2-9}$; 6) $\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{11}{x^2-6x+8}$.

785. 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)x$;
2) $a^2x=a+b+b^2x$.

786. 1) $x^2-2x-15=0$; 2) $3x^2+4x-4=0$; 3) $7x^2+4x=0$;
4) $12x^2-4x=0$; 5) $2x^2-x=1$; 6) $4x^2-100=0$.

787. 1) $\frac{x^2}{12}=\frac{7x}{12}-1$; 2) $2x-\frac{10}{3}=\frac{x^2}{6}$;

3) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$; 4) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

788. 1) $x-1=\frac{1}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+12}{x-3}=\frac{7x}{x-3}$;

3) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0$; 4) $\frac{3x^2}{3x-1}-2=\frac{2x+1}{3x+1}$.

789. 1) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{7}{2+x}=\frac{7x^2-28}{x^2-4}+\frac{18}{2-x}$; 2) $\frac{x+1}{x+3}-\frac{12}{x^2-9}=\frac{2-x}{3-x}$.

790. 1) $\frac{2x}{x-3}+\frac{1}{2x+3}+\frac{3x+9}{2x^2-3x-9}=0$; 2) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$.

791. 1) $x-4+\frac{1}{x}=0$; 2) $\frac{4x^2}{x+2}-\frac{10}{x+2}+4=0$.

792. 1) $x^4-7x^2+12=0$; 2) $x^4-11x^2+30=0$;

3) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $2x^4-5x^2+2=0$;

5) $x-2\sqrt{x}=15$; 6) $4\sqrt{x}+x-5=0$.

793. 1) $2x^{-2}+4x^{-1}+3=0$;

2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$;

3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$;

4) $\frac{3x^2}{(x-1)^2}-\frac{5x}{x-1}-2=0$.

794. 1) $x^2-3ax-b^2+\frac{9a^2}{4}=0$; 2) $x^2+ax-b^2+\frac{a^2}{4}=0$;

3) $\frac{x}{x-b}+\frac{2x}{x+b}=\frac{b^2}{4(x^2-b^2)}$; 4) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$.

795. ax^2+bx+c учҳад қандай шартда иккиҳаднинг квадрати бўлади?

796. $ax^2+bx+a=0$ тенгламанинг илдизлари, агар $a\neq 0$ бўлса, ўзаро тескари сонлар бўлишини исботланг.

Тенгламани ечинг (797—798):

797. 1) $|2x-3|=7$; 2) $|x+6|=2x$;

3) $\left|\frac{x}{2}-\frac{5}{4}\right|=x-1$; 4) $2x-7=|x-4|$.

798. 1) $|6-2x|=3x+1$; 2) $2|x-2|=|x|-1$;

3) $|3x-1|+|4-x|=5$; 4) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=x-1$.

799. $|x^2-3x-6|=2x$ тенгламанинг энг кичик илдизини топинг.

800. $|x^2-8x+5|=2x$ тенгламанинг энг катта рационал илдизини топинг.

Тенгламани ечинг (801—808):

801. 1) $\sqrt{2x+7}=x+2$; 2) $x=2-\sqrt{2x-5}$;

3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$; 4) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$;

5) $\frac{6-x}{\sqrt{x+9}}=\sqrt{8-3x}$; 6) $\frac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{2-x}{2}}$.

802. 1) $3^{x-7}=81$; 2) $2^{x^2-5x+6,5}=\sqrt{2}$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-7}=\left(\frac{5}{4}\right)^{3x-7}$; 4) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x=2^{2x+6}$.

803. 1) $9^{5x}-9^{5x-1}=8$; 2) $2^{x+4}-2^x=120$;

3) $4^{x-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}+\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3-x}{2}}=208$; 4) $4^x-4^{x-1}+4^{x-2}=52$.

804. 1) $5^{2x+5}\cdot 7^{3x+1}=35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$;

2) $(0,2)^{x^2}\cdot 5^{2x+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^6$.

805. 1) $2\lg x-\lg 5=5+3\lg 2$;

2) $1-\lg 2=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{3}+\lg x+\frac{1}{2}\lg 3\right)$;

3) $\lg\left(\frac{1}{2}+x\right)=\lg\frac{1}{2}-\lg x$;

4) $2\lg x=-\lg\frac{1}{6-x^2}$.

806. 1) $\log_2(2x-18)+\log_2(x-9)=5$;

2) $\lg(x^2+19)-\lg(x+1)=1$.

807. 1) $5^{\log_5 x^2}-6\cdot 5^{\log_5 x}+5=0$;

2) $25^{\log_5 x}-4\cdot 5^{\log_5 x+1}=125$;

3) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

4) $\lg 10+\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{\sqrt{2x}}\right)=2$.

808. 1) $\lg(3^{x-2}-2)=0$; 2) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

3) $x^{\lg x}=10$; 4) $x^{\log_3 x}=9x$;

5) $x^{\lg x}-1=10(1-x^{-\lg x})$; 6) $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x^x}$

809. Агар m, n ва k ҳақиқий сонлар бўлса, $(x-m)(x-n)=k^2$ тенгламанинг илдизлари соф мавҳум сон бўлиши мумкинми?

810. Тенгламани ечинг (z — комплекс сон):

1) $z^2+2z+5=0$; 2) $z^2-6z+10=0$;
3) $9z^2-6z+10=0$; 4) $4z^2+16z+17=0$;
5) $z^2+4z+19=0$; 6) $z^2-2z+3=0$.

Тенгламани ечинг (811—819):

811. 1) $\sin 2x=3\cos x$; 2) $\sin 4x=\cos^4 x-\sin^4 x$;

3) $2\cos^2 x=1+4\sin 4x$;
4) $2\cos 2x+2\cos x\cdot\sin^2 x=\cos x$;
5) $\sin 2x+2\sin x-3\cos x=3$;
6) $2\cos x+\cos 2x=2\sin x$.

812. 1) $\sin^3 x+\cos^3 x=0$; 2) $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$;

3) $8\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos x=\sqrt{3}$;

4) $4\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=\cos 4x$;
5) $2\sin^2 x+3\sin^2 2x=0$.

813. 1) $\sin^3 x\cdot\cos x+\cos^3 x\cdot\sin x=\cos 2x$;
2) $\cos^2 x+7\sin^2 x=8\cos x\cdot\sin x$;
3) $9\sin x\cdot\cos x+5\sin^2 x=7$;
4) $2+\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=\sin^2 x$.

814. 1) $\sin 5x=\sin 3x$; 2) $\cos 6x+\cos 2x=0$;
3) $\sin 3x+\cos 7x=0$; 4) $\sin x+\cos 5x$.

815. 1) $\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$;

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$;

3) $\sin x+\sin 5x=\sin 3x$;

4) $\cos 7x-\cos 3x=3\sin 5x$.

816. 1) $5+\sin 2x=5(\sin x+\cos x)$;

2) $\sin 2x=(\sqrt{2}-1)(1+\sin x+\cos x)$;

3) $5+\sin x+2\sin x\cdot\cos x=\cos x$;

4) $2+2\cos x=3\sin x\cdot\cos x+2\sin x$.

817. 1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;

2) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

818. 1) $\operatorname{tg}^2 3x-4\sin^2 3x=0$; 2) $\sin x\cdot\operatorname{tg} x=\cos x+\operatorname{tg} x$;

3) $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$; 4) $4\operatorname{ctg}^2 x=5-\frac{9}{\sin x}$;

5) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$; 6) $\sin x\cdot\operatorname{ctg} 3x=\cos 5x$.

819. 1) $\operatorname{tg} 2x=3\operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 2x=2\operatorname{ctg} x$;

3) $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2$; 4) $\operatorname{tg}(2x+1)\cdot\operatorname{ctg}(x+1)=1$.

3. Тенгсизликлар

Тенгсизликни ечинг (820—821):

820. 1) $x+8>4-3x$; 2) $3x+1-2(3+x)<4x+1$;

3) $\frac{x+4}{4}<x-1$; 4) $\frac{2x-5}{-3}<x$.

821. 1) $1,5x+3<4x+0,6$; 2) $\frac{3x-8}{4}-9>x-\frac{2x-37}{3}$;

3) $10x-\frac{6x-7}{2}<\frac{20x+1}{3}$; 4) $\frac{7-x}{9}-\frac{2+3x}{3}>0$;

5) $\frac{4-3x}{8}-\frac{5-2x}{12}<2$; 6) $\frac{5x-7}{6}-\frac{x+2}{7}\geqslant 2$.

822. Қаср x нинг қандай қийматларида мусбат бўлади:

1) $\frac{2x-1}{7}$; 2) $\frac{2x-1}{3x-2}$; 3) $\frac{21x-5}{6-3x}$; 4) $\frac{3-11x}{4}$;

5) $\frac{5x-4}{7x+5}$; 6) $\frac{3x+10}{40-x}$; 7) $\frac{x+2}{5-4x}$; 8) $\frac{8-x}{6+3x}$?

823. Қаср x нинг қандай қийматларида манфий бўлади:

1) $\frac{11x-23}{7}$; 2) $\frac{3-2x}{3x-2}$; 3) $\frac{4x+9}{2x-5}$;

4) $\frac{10-4x}{9x+2}$; 5) $\frac{6-5x}{x^2}$; 6) $\frac{18-7x}{-4x^2-1}$?

824. Тенгсизликни ечинг:

1) $\frac{3x+2}{x-1}<2$; 2) $\frac{5x+4}{x-3}<4$; 3) $\frac{3}{2x+3}\geqslant\frac{2}{3}$;

4) $\frac{2}{x-4}<1$; 5) $\frac{2}{x-1}<\frac{3}{x-4}$; 6) $\frac{2}{x+3}\leqslant 4$.

825. Квадрат тенгсизликни ечинг:

1) $x^2-3x-4>0$; 2) $x^2-6x\geqslant 8x-45$;

3) $x^2-8x+7\leqslant 0$; 4) $4x+21-x^2>0$;

5) $26-11x-x^2<0$; 6) $3x^2-2x+7>0$;

7) $3x^2+4x-4\geqslant 0$; 8) $-\frac{1}{2}x^2+x-5>0$;

9) $8x^2-2x-1<0$; 10) $5x^2+7x\leqslant 0$.

Тенгсизликни ечинг (826—827):

826. 1) $\frac{x^2-9}{x^2-4}<0$; 2) $(2x^2+3)(x+4)^3>0$.

827. 1) $\frac{3x-6}{2x^2+5x-3}<0$; 2) $\frac{3x-15}{x^2+5x-14}\geqslant 0$; 3) $\frac{5x^2+4x-1}{6-2x}\leqslant 0$;

4) $\frac{x-1}{x^2+4x+2}<0$; 5) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}<0$; 6) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3}>0$.

828. $\lg(x^2+8x+15)$ ифода x нинг қандай қийматларида маънога эга эмас?

829. $(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3=0$ тенглама m нинг қандай энг кичик бутун қийматида иккита турли ҳақиқий илдизга эга бўлади?

830. $(m-7)x^2+2(m-7)x+3=0$ тенглама m нинг қандай бутун қийматларида ҳақиқий илдизларга эга эмас?

831. $\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}$ ифода x нинг қандай энг катта бутун қийматида манфий қиймат қабул қилади?

832. $\frac{x^2-x-6}{-7-x^2}$ ифода x нинг қандай энг кичик бутун қийматида мусбат қиймат қабул қилади?

Тенгсизликни ечинг (833—841):

833. 1) $|x-3|<6$; 2) $|x-3{,}4|>0{,}6$; 3) $|x-7|>2$;

4) $|2x-3|<0{,}5$; 5) $|2x-3|<x$; 6) $|4-x|>x$;

7) $|x^2-7x+12|\leqslant 6$; 8) $|x^2-3x-4|>6$;

9) $|2x^2-x-1|\geqslant 5$; 10) $|3x^2-x-4|<2$.

834. 1) $2^{-x+5}<\frac{1}{4}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}>\frac{1}{27}$;

3) $4^{x^2+x-12}>1$; 4) $3^{\frac{\frac{2}{3}x-1}{2x+3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{81}}$.

835. 1) $3^{x+1}\cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \geqslant \sqrt[3]{3}$; 2) $3^{x+1}+3^{x-1}<10$.

836. 1) $2^{2x}-4^{x-1}+8^{\frac{2}{3}x}\cdot 2^{-4}>52$;

2) $2^{x+2}-2^{x+3}+5^{x-2}>5^{x+1}+2^{x+4}$.

837. 1) $3^{\log_2\frac{x-1}{x+2}}<\frac{1}{9}$; 2) $5^{\log_2(x^2-4x+3,5)}>\frac{1}{5}$.

838. 1) $\log_6(2-x)<\log_6(2x+5)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2)\geqslant -1$.

839. 1) $4^{\log_{0,25}(3-2x)}<2$; 2) $\frac{\log_3(x-1)}{2x-1}<0$;

3) $\sqrt{\lg x}<\frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}(2x+6)+2$.

840. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x-1}\right)\leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5))>0$;

3) $\log_\pi(x+27)-\log_\pi(16-2x)<\log_\pi x$.

841. 1) $\cos(-3x)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

842. Тенгсизликни график ёрдамида ечинг:

1) $\sin x>\frac{1}{4}$; 2) $\sin x>-\frac{1}{4}$;

3) $\operatorname{tg} x-3\leqslant 0$; 4) $\cos x>\frac{1}{3}$.

Тенгсизликни исботланг (843—845):

843. 1) $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$;

2) $\frac{a^3+b^3}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, бунда $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

844. 1) $(a+b)(ab+1)\geqslant 4ab$, бунда $a>0$, $b>0$;

2) $a^4+6a^2b^2+b^4>4ab(a^2+b^2)$, бунда $a\neq b$.

845. 1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$, бунда $a>0$, $b>0$, $c>0$;

2) $2a^2+b^2+c^2\geqslant 2a(b+c)$;

3) $a^2+ab+b^2+2a-2b+4\geqslant 0$;

4) $3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$, бунда $a>0$.

4. Тенглама ва тенгсизликлар системалари

Тенгламалар системасини ечинг (846—847):

846. 1) $\begin{cases}3x-2y=5,\\6x+2y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x-7y=3,\\6x+5y=17;\end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-3y-1=0, \\ x+3y-5=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y-13=0, \\ x+2y+1=0. \end{cases}$

847. 1) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1, \\ y=\frac{1}{2}x-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x-y}{5}-\frac{x-y}{2}=10, \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{9x-y}{7}-2y=3, \\ \frac{12x+5y}{3}-3x=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{3}=6, \\ \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=0. \end{cases}$

Системанинг ҳақиқий ечимларини топинг (848—850):

848. 1) $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=16, \\ \frac{x}{y}=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=20, \\ xy=96; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=12, \\ x+y=7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=-30, \\ x-y=11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+2y^2=96, \\ x=2y. \end{cases}$

849. 1) $\begin{cases} x^2+x+y=6, \\ y-x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=13, \\ x-y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x^2+x+y=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=23. \end{cases}$

850. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=3\frac{1}{3}, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2=13x+4y, \\ y^2=4x+13y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40, \\ 2x^2+y^2+3x=52. \end{cases}$

851. Системанинг энг катта ва энг кичик бутун ечимларини топинг:

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2}-\frac{3x+5}{3}-\frac{x}{6}<3-\frac{x+4}{2}, \\ 1-\frac{2x-8}{3}+\frac{4-3x}{2}<2x-\frac{x+2}{3}. \end{cases}$$

852. Тенгсизликлар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} 5(1-2x)>12-\frac{4x+3}{2}, \\ 1+x<\frac{8-x}{3}-\frac{2-x}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+1}{5}-\frac{x+2}{4}<\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{2}, \\ \frac{x-2}{3}>1+\frac{x-5}{15}. \end{cases}$

5. Матнли масалалар

853. Йўловчи юқорига ҳаракатсиз эскалаторда 3 мин да, ҳаракатланаётган эскалаторда 45 с да кўтарилади. Эскалатор юқорига унда ҳаракатсиз турган йўловчи билан бирга қанча вақтда кўтарилади?

854. Теплоход икки пристан оралиғидаги масофани дарё оқими бўйича 7 соат, оқимга қарши 9 соатда ўтади. Агар оқимнинг тезлиги 2 км/соат бўлса, пристанлар орасидаги масофани аниқланг.

855. Пароход маълум масофани 2,25 суткада ўтиши керак эди, лекин у ҳар бир соатда мўлжалдагидан 2,5 км кўп йўл ўтганлиги ва шунинг учун мўлжалланган масофани 2 суткада ўтганлиги маълум бўлди. Пароход қанча масофани ўтиши керак эди?

856. Бир ишчи маълум ишни 24 кунда бажаради, иккинчи ишчи шу ишни 48 кунда бажара олади. Агар иккала ишчи биргаликда ишласа, бу иш неча кунда бажарилади?

857. Бассейн иккита қувур билан 7,5 соатда тўлдирилади. Биринчи қувурнинг ёлғиз ўзи бассейнни иккинчи қувурнинг ёлғиз ўзи тўлдирганидан 8 соат тезроқ тўлдиради. Биринчи қувурнинг алоҳида ўзи бассейнни неча соатда тўлдира олади?

858. Ҳосилни йиғиштириб олишда умумий майдони 174 га бўлган ердан 4556 ц баҳори буғдой ҳосили олинди, бунда чўл ерларида бир гектаридан 30 ц дан, қолган ерларда эса бир гектаридан 22 ц ҳосил олинди. Неча гектар чўл ерлари ўзлаштирилган?

859. Икки соннинг айирмаси уларнинг кўпайтмаси билан 1:24 каби нисбатда, бу сонлар йиғиндиси эса уларнинг айирмасидан 5 марта катта. Шу сонларни топинг.

860. Учта касрнинг суратлари 1 га тенг. Бу касрларнинг йиғиндиси 1 га тенг. Биринчи ва иккинчи касрлар орасидаги айирма учинчи касрга тенг. Дастлабки иккита касрнинг йиғиндиси учинчи касрдан 5 марта катта. Шу касрларни топинг.

861. Ишчилар бригадаси маълум муддатда 360 та буюм тайёрлаши керак эди. Кунлик вазифани 9 та буюм ошиғи билан бажариб, бригада муддатидан бир кун олдин режа топшириқларини 5 % га ошириб бажарди. Агар бригада шундай меҳнат унумдорлиги билан ишлашда давом этса, белгиланган муддатгача нечта буюм тайёрлайди?

862. Катер дарё причалидан дарё бўйлаб пастга 36 км сузгандан кейин ҳаракат бошланишидан 10 соат олдин оқизиб юбо-

рилган солга етиб олди. Агар катер сол билан бир вақтда жўнаганда эди, у 30 км юриб орқасига қайтганда, солни пристандан 10 км масофада учратган бўлар эди. Катернинг ўз тезлигини топинг.

863. Иккита ташкилот театрга чипталар сотиб олди. Биринчи ташкилот чипталарга 30 сўм сарфлади, 5 та чипта кам сотиб олган ва ҳар бир чиптага биринчи ташкилотга қараганда 30 тийин кам тўлаган иккинчи ташкилот эса чипталар учун 18 сўм тўлади. Ҳар қайси ташкилот нечта театр чиптаси сотиб олган?

864. Пристандан дарё оқими бўйлаб сол оқизилди, шу пристандан 5 соату 20 мин дан сўнг солнинг орқасидан моторли қайиқ жўнади, у 17 км сузиб солга етиб олди. Агар моторли қайиқнинг оқим бўйлаб тезлиги солнинг тезлигидан 48 км/соат ортиқ экани маълум бўлса, солнинг тезлиги қанча?

865. Ҳосилни йиғиштириб олишда икки участканинг ҳар биридан 210 ц дан буғдой ҳосили олинди. Биринчи участканинг майдони иккинчи участканинг майдонидан 0,5 га кичик. Агар биринчи участкадаги буғдой ҳосили иккинчи участкадагидан ҳар бир гектарига 1 ц ортиқ бўлса, ҳар қайси участканинг ҳар бир гектаридан неча центнердан буғдой ҳосили олинган?

866. Уйдан мактабгача бўлган масофа 700 м га тенг. Агар ўқувчининг қадами 20 см узун бўлган акаси ундан 400 қадам кам босса, ўқувчи уйдан мактабгача неча қадам босади?

867. Геометрик прогрессиянинг кетма-кет ҳадлари бўлган тўртта сондан учинчи сон биринчи сондан 9 тага, иккинчи сон эса тўртинчи сондан 18 тага ортиқ бўлса, шу тўрттала сонни топинг.

868. Агар арифметик прогрессия дастлабки учта ҳадининг йиғиндиси нолга, дастлабки тўртта ҳадининг йиғиндиси эса 1 га тенг бўлса, шу прогрессиянинг дастлабки ўн иккита ҳадининг йиғиндисини топинг.

869. Тўртта сондан дастлабки учтаси геометрик прогрессиянинг кетма-кет учта ҳади, охирги учтаси эса арифметик прогрессиянинг ҳадлари бўлишини билган ҳолда шу тўртта сонни топинг. Биринчи ва тўртинчи соннинг йиғиндиси 16 га тенг, иккинчи ва учинчи соннинг йиғиндиси эса 12 га тенг.

870. Геометрик прогрессия дастлабки бешта ҳадининг йиғиндиси 62 га тенг. Унинг бешинчи, саккизинчи ва ўн биринчи ҳади арифметик прогрессиянинг мос равишда биринчи, иккинчи ва ўнинчи ҳадлари бўлиши маълум. Геометрик прогрессиянинг биринчи ҳадини топинг.

871. Арифметик прогрессиянинг бешинчи ва олтинчи ҳадлари кўпайтмаси унинг биринчи ва иккинчи ҳадлари кўпайтмасидан 33 марта катта. Агар прогрессиянинг барча ҳадлари мусбат экани маълум бўлса, прогрессиянинг бешинчи ҳади иккинчи ҳадидан неча марта катта?

872. Юзи 12 $см^2$ бўлган учбурчакда томонларнинг ўрталари кесмалар билан туташтирилди, янги ҳосил бўлган учбурчакда худди шундай йўл билан яна янги учбурчак ҳосил қилинди ва ҳ. к. Шундай усул билан ясаладиган барча учбурчаклар юзларининг йиғиндисини топинг.

6. Функциялар ва графиклар

873. $y=-\frac{5}{2}x+b$ чизиқли функциянинг графиги $(-2;\ 3)$ нуқта орқали ўтади. b ни топинг.

874. $y=kx+3$ чизиқли функциянинг графиги $(-1;\ 4)$ нуқта орқали ўтади. k ни топинг.

875. Агар $y=kx+b$ чизиқли функциянинг графиги A ва B нуқталар орқали ўтса, k ва b коэффициентларни топинг:
1) $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 2)$;
3) $A(4;2)$, $B(-4;\ -3)$; 4) $A(-2;\ -2)$, $B(3;\ -2)$.

876. $A(-3;\ 2)$ нуқтадан $B(-2;\ 2)$ ва $C(3;\ 0)$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтади. Графиклари мазкур тўғри чизиқлар бўлган чизиқли функцияларни ифодаловчи формулаларни ёзинг.

877. A нуқта $x+\frac{y}{2}=1$ тўғри чизиққа тегишлими ёки йўқми эканини аниқланг:
1) $A(-1;\ 4)$; 2) $A(0;\ 3)$; 3) $A(1;\ 0)$; 4) $A\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$.

878. Чизиқли функция $y=-\frac{3}{4}x+2$ формула билан берилган.
1) Функция графигининг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари A ва B нуқталарни топинг;
2) AB кесманинг узунлигини топинг;
3) координаталар бошидан $y=-\frac{3}{4}x+2$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

879. x нинг $y=3x-1$ функция графиги: 1) Ox ўқидан юқорида; 2) Ox ўқидан қуйида жойлашадиган қийматларини топинг.

880. x нинг $y=-2x+1$ функциянинг қийматлари: 1) мусбат; 2) манфий бўладиган қийматларини топинг.

881. x нинг $y=2x-1$ функциянинг графиги $y=3x-2$ функциянинг графигидан пастда ётадиган қийматларини топинг.

882. x нинг $y=(\sqrt{3}-2)x-\sqrt{3}$ функциянинг графиги $y=(1+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}$ функциянинг графигидан юқорида ётадиган қийматларини топинг.

883. $y=2x-3$ функциянинг ўсишини исботланг.

884. $y=-\sqrt{3}x-3$ функциянинг камайишини исботланг.

885. Қуйидаги функцияларнинг графиклари кесишадими ёки йўқми эканини аниқланг:

1) $y=3x-2$ ва $y=3x+1$;
2) $y=3x-2$ ва $y=5x+1$;
3) $y=3x-2$ ва $y=6x-4$.

886. Функцияларнинг графигини ясанг:

1) $y=2-|x|$;
2) $y=|2-x|$; 3) $y=|2-x|+|x-3|$.

Берилган функцияларнинг ҳар бирининг графиги $y=3$ тўғри чизиқ билан кесишиш-кесишишмаслигини аниқланг. Кесишишадиган ҳолларда кесишиш нуқталари координаталарини топинг.

887. $y=x^2-2x-3$ функция берилган.

1) унинг графигини ясанг ва x нинг $y(x)<0$ бўладиган қийматларини топинг;
2) бу функциянинг $[1; 4]$ оралиқда ўсишини исботланг;
3) x нинг функция энг кичик қиймат қабул қиладиган қийматини топинг;
4) x нинг $y=x^2-2x-3$ функциянинг графиги $y=-2x+1$ функциянинг графигидан юқорида ётадиган қийматини топинг;
5) $y=x^2-2x-3$ параболага абсциссаси 2 га тенг бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

888. $y=-2x^2+3x+2$ функция берилган.

1) унинг графигини ясанг ва x нинг $y(x)<0$ бўладиган қийматларини топинг;
2) $y=-2x^2+3x+2$ функциянинг $[1; 2]$ оралиқда камайишини исботланг;
3) x нинг функция энг катта қиймат қабул қиладиган қийматини топинг;
4) x нинг $y=-2x^2+3x+2$ функциянинг графиги $y=3x+2$ функциянинг графигидан пастда ётадиган қийматларини топинг;
5) $y=-2x^2+3x+2$ параболага ординатаси 3 га тенг бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

889. Функцияларнинг графиклари кесишишадими ёки йўқми эканини аниқланг:

1) $y=x^2$ ва $y=x+6$; 2) $y=\frac{3}{x}$ ва $y=4(x+1)$;
3) $y=\frac{1}{8}x^2$ ва $y=\frac{1}{x}$; 4) $y=2x-1$ ва $y=\frac{1}{x}$.

890. Функцияни жуфт ва тоқликка оид текширинг:

1) $y=2x^2-1$; 2) $y=x-x^3$;
3) $y=x^5-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{\sin x}{x}$.

891. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

1) $y=\cos\frac{3x}{2}$; 2) $y=2\sin 0{,}6x$.

1) $y=-x^4+4x^2-5$; 2) $y=x^3-4x$.

893. Агар $y(1)=0$ ва $y(4)=0$ бўлса, $y=ax^2+bx-4$ функциянинг энг катта (энг кичик) қийматини топинг.

894. Квадрат функция графигининг координата ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг:

1) $y=2x^2-5x+6$;
2) $y=2x^2-5x+6$;
3) $y=4x^2+12x+9$.

895. Агар $y(-2)=15$, $y(3)=0$, $y(0)=-3$ бўлса, $y=ax^2+$ $+bx+c$ функциянинг графигини ясанг.

896. $y=\sqrt{25-x^2}$ функциянинг графигини ясанг. График бўйича функциянинг монотонлик оралиқларини кўрсатинг. Берилган функциянинг графиги Oy ўқига нисбатан симметрик эканини исботланг.

897. $y=\frac{5}{x-2}$ функциянинг графигини ясанг. $y=\frac{5}{x-2}$ функция $x<2$ ва $x>2$ оралиқларда камайишини исботланг. Қандай нуқтада $y=\frac{5}{x-2}$ функциянинг графиги ординаталар ўқини кесиб ўтади?

Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг (898—899):

898. 1) $y=\lg(2-x)-\sqrt{x+2}$; 2) $y=\lg(x^2+2x-15)$;

3) $y=\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$; 4) $y=\sqrt{\log_3\frac{2x+1}{x-6}}$.

899. 1) $y=\frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\log_2(x-1)}$; 2) $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+6))$;

3) $y=\sqrt{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}$; 4) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-1}$.

Функциянинг қийматлар тўпламини топинг (900—901):

900. 1) $y=x^2+6x+3$; 2) $y=-2x^2+8x-1$;

3) $y=e^x+1$; 4) $y=2+\frac{2}{x}$.

901. 1) $y=0{,}5+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\cos 2x-\frac{\pi}{4}$;

3) $y=2\sin x-3\cos x$; 4) $y=0{,}5\cos x+\sin x$.

902. Ox ўқи билан $y=x^3-x^2-7x+6$ функция графигига $M(2;$ $-4)$ нуқтада ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

903. $y=x^2\cdot e^{-x}$ функция графигига $x=1$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг Ox ўқи билан ҳосил қилган бурчаги тангенсини топинг.

904. Ox ўқи билан $y=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ функция графигига

$x=\frac{\pi}{3}$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма орасидаги бурчакни топинг.

905. $f(x)=\frac{x^3+1}{3}$ функция графигига унинг Ox ўқи билан кесишиш нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг

906. $f(x)=\sqrt{x^3}+1$ функция графигига $x=4$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

907. $f(x)=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ функциянинг $-3\leqslant x\leqslant 6$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг

908. $f(x)=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x$ функциянинг $e^{\frac{3}{4}}\leqslant x\leqslant e^3$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

909. $y=x^2$ параболада шундай нуқта топингки, ундан $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$ нуқтагача бўлган масофа энг кичик бўлсин.

910. Координата текислигида $A(3; -1)$ ва $D(4; -1)$ нуқталар берилган AD кесма асосларидан бири бўлувчи, бошқа асосининг учлари $[-1; 1]$ кесмада, берилган $y=1-x^2$ парабола ёйида ётувчи трапецияларни қараймиз. Бу трапециялар орасидан энг катта юзга эга бўлган трапеция танланган. Шу юзни топинг.

911. Координата текислигида $K(3; 6)$ нуқта берилган. Икки учи Oy ўқига нисбатан симметрик ҳамда $[-1; 1]$ кесмада берилган $y=4x^2$ парабола ёйида ётувчи, K нуқта эса томонларидан бирининг ўртаси бўлган учбурчакларни қараймиз. Шу учбурчаклар орасидан юзи энг катта бўлган учбурчакни танланган. Шу юзни топинг.

912. Ўқ кесимининг периметри p га тенг бўлган барча цилиндрлар орасидан хажми энг катта бўлган цилиндрни танлаб олинган. Шу ҳажмни топинг.

913. R радиусли сферанинг ичига жойлаштириш мумкин бўлган барча цилиндрлар орасидан энг катта ҳажмга эга бўлган цилиндрни топинг.

914. Берилган ҳажмли консерва тунука банкаси цилиндр шаклига эга бўлиши керак. Асосининг диаметри билан баландлиги орасидаги нисбат қандай бўлганда энг кам тунука сарф бўлади?

915. R радиусли сферага ички чизилган барча учбурчакли мунтазам призмалар орасидан ҳажми энг катта бўлган призма танлаб олинган. Шу призманинг ҳажмини топинг.

916. Асосининг радиуси R ва баландлиги H бўлган конусга ички чизилган барча цилиндрлар орасидан ҳажми энг катта бўлган цилиндрни топинг.

917. Функциянинг экстремумини топинг:

1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$; 2) $f(x)=x^4-2x^5+5$.

918. $y=x^3-3x+2$ функцияни ҳосила ёрдамида текширинг ва унинг графигини ясанг. Графикка ўтказилган уринмалар Ox ўқига параллел бўладиган нуқталарни топинг.

919. $y=x^3-5x^2-x+5$ функцияни ҳосила ёрдамида текширинг ва унинг графигини ясанг. Шу функция графигига абсциссаси 4 га тенг бўлган нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг.

920. Функцияни ҳосила ёрдамида текширинг ва унинг графигини ясанг:

1) $y=-\frac{x^4}{4}+x^2$; 2) $y=x^4-2x^2-3$.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг (921—923):

921. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$; 2) $y=4x-x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;

3) $y=4-x^2$, $y=2x^2-8$; 4) $y=x^2+3$, $y=x+5$;

5) $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$; 6) $y=2\sqrt{x}$, $6-y=0$, $x=0$.

922. 1) $y=9-x^2$, $y=(x-1)^2-4$; 2) $y=(x-2)^2$, $y=4-x$;

3) $y=x^{-2}$, $y=\frac{17}{4}-x^2$, $x>0$; 4) $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

923. 1) $y=\cos x$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$; 2) $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\sqrt{x}$, $x=\pi$;

3) $y=\cos x$, $y=x+1$, $y=0$;

4) $y=3^x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$.

7. Аралаш топшириқлар

924. 1) $\sin 2x+\cos 2x+1=0$ тенгламани ечинг.

2) $0{,}5^{x-1}\leqslant 2^{-0{,}5x}$ тенгсизликни ечинг.

3) Ҳисобланг: $5\cdot 10^{2-\log_{100}25}$.

4) $f(x)=\frac{1}{3}x^3$ функция учун графиги $(1;\ -0{,}5)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг. Бошланғич функциянинг $x=2$ нуқтадаги қийматини ҳисобланг.

5) Агар айирилувчи камаювчи квадратининг иккиланганига тенг бўлса, камаювчи қандай бўлганда айирма энг катта бўлади?

925. 1) $\sin^2 x+0{,}5\sin 2x=1$ тенгламани ечинг.

2) $0{,}6^{2x^2+8x}>1$ тенгсизликни ечинг.

3) Ҳисобланг: $10^{0{,}5\log_4 10+1}$

4) $f(x)=2\sqrt{x}$ функция учун графиги $(4;\ 10)$ нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни топинг. Бошланғич функциянинг $x=\sqrt[3]{9}$ бўлгандаги қийматини топинг.

5) Агар иккинчи кўпайтувчи биринчи кўпайтувчидан 3 бирлик кичик бўлса, биринчи кўпайтувчининг қандай қийматида кўпайтма энг кичик бўлади?

926. 1) $\sin x = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ тенгламани ечинг.

2) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) < \log_{\frac{1}{2}} (2x+6)$ тенгсизликни ечинг.

3) $y=3x^2-12x+11$ функциянинг $x>2$ ўсишини исботланг.

4) $y=-3x^2-x-1$, $x=-1$ ва $y=-15$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

5) Ифодани соддалаштиринг:

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}-\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}\right)$$

927. 1) $\sin x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ тенгламани ечинг.

2) $\log_2 x + \log_2 (2x-1) < \log_2 (2x+2)$ тенгсизликни ечинг.

3) $y=-2x^2+4x-7$ функциянинг $x>1$ да камайишини исботланг.

4) $y=x^2-4x+8$, $x=-1$, $x=4$, $y=3$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

5) Ифодани соддалаштиринг:

$$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2.$$

928. 1) Автомашина шоҳкўчада 150 км ва тошкўчада 50 км юрди, бунда унинг тошкўчадаги тезлиги шоҳкўчадаги тезлигидан 20 км/соатга кичик бўлди. Агар шоҳкўчадаги ва тошкўчадаги ҳаракатланиш вақтлари айни бир хил бўлса, автомашина тошкўчада қандай тезлик билан ҳаракатланган?

2) $\dfrac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}$ ифодани соддалаштиринг.

3) $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$ тенгламани ечинг.

4) $y=4-x^2$, $y=2x-x^2$, $x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5) Агар $f(x)=16\ln x-2x^2$ бўлса, x нинг $f'(x)\geqslant 0$ бўладиган қийматларини топинг.

929. 1) Моторли қайиқ дарё оқими бўйлаб пастга 91 км сузди ва тўрт соат дам олгандан сўнг орқасига қайтди, бунда у бутун йўлга бир сутка сарфлади. Агар қайиқнинг ўз тезлиги 10 км/соатга тенг бўлса, дарё оқимининг тезлиги қанча?

2) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^4\alpha}{4-\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}$ ифодани соддалаштиринг.

3) $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0$ тенгламани ечинг.

4) $y=x^2-4$, $y=x^2-6x+8$ ва $x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5) Агар $f(x)=x^2-2\ln x$ бўлса, x нинг $f'(x)\leqslant 0$ бўладиган қийматларини топинг.

8. Битириш имтиҳонларида тавсия этилган масалалар

930. 1) $0{,}5(\mathrm{tg}75^\circ-\mathrm{ctg}\,75^\circ)$ ифодани соддалаштиринг.

2) $\log_3 x=\dfrac{\log_3(2x+3)}{\log_3 9}$ тенгламани ечинг.

3) $2\cdot 0{,}5^{2x-1}<0{,}25^{1-3x}$ тенгсизликни ечинг.

4) $y=x^2-2x+1$ функция графиги ва координата ўқлари билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

5) $MABCD$ мунтазам пирамидада баландлик $MO=2$, $\angle MAO=45^\circ$. Агар бошқа пирамиданинг учи O нуқтада бўлиб, асоси $MABCD$ пирамиданинг $ABCD$ асосига параллел текислик билан кесими бўлса, энг катта ҳажмга эга бўлган шу пирамиданинг баландлигини топинг.

931. 1) $\cos(-2\alpha)+\cos(1{,}5\pi+2\alpha)\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$ ифодани соддалаштиринг.

2) $\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}=\dfrac{\sqrt{x+5}}{x+3}$ тенгламани ечинг.

3) Тенгсизликни ечинг ва унинг бирор-бир иккита ечимини топинг: $\log_{0,5}(x-1)>-2$.

4) $y=0{,}5x^2-2x+6$ функция графиги, шу функция графигига $x_0=3$ абсциссали нуқтада ўтказилган уринма ва $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

5) $MABCD$ пирамиданинг асоси $ABCD$ квадратдан иборат, MA қирраси асос текислигига перпендикуляр, $MC=5\sqrt{2}$, $0<BC<5\sqrt{2}$, CBM учбурчакнинг энг катта юзини топинг.

932. 1) $2\sin^2 x=1-(2-\cos x)^2$ тенгламани ечинг.

2) $\log_2 x+\log_2(x-2)<3$ тенгсизликни ечинг.

3) $y=\dfrac{10}{x}$, $x=1$, $x=10$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигура $x=3$ тўғри чизиқ билан икки қисмга бўлинади. Ҳосил бўлган фигуралардан қайси бири катта юзга эга бўлишини аниқланг.

4) $\sqrt{289-x^2}=x^2-49$ тенгламани ечинг.

5) Тўғри призманинг асоси тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакдан иборат, унинг катта ён ёғининг периметри 24 см га тенг. Призманинг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг асосининг томонлари қандай узунликларга эга бўлиши керак?

933. 1) $3^{2x+1}+3^{2x+2}=\frac{4}{9}$ тенгламани ечинг.

2) $y=\log_{0,5}(3-2x)$ функция бутун аниқланиш соҳасида ўсишини исботланг.

3) $\sin x>0,5\sqrt{2}$ тенгсизликни ечинг. $[-\pi;\ \pi]$ кесмага тегишли битта ечимни кўрсатинг.

4) $y=\frac{8}{x}$, $x=4$, $y=x+2$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг. $\ln 2\approx0,69$ экани маълум.

5) Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг апофемаси $2\sqrt{3}$ га тенг, баландлиги эса $[1;\ 3]$ кесмага тегишли исталган қийматни қабул қилади. Пирамиданинг энг катта ҳажмини топинг.

СИНФДАН ТАШҚАРИ ИШЛАР УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Турли масалалар

934. Тенгламани ечинг:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{25+10x+x^2}=8$;

2) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=6$;

3) $\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)\ (27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7$;

4) $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

935. Тасдиқни исботланг: агар бутун a_1, a_2, ..., a_n коэффициентли $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ тенглама $x_0\neq 0$ бўлган рационал илдизга эга бўлса, у ҳолда бу илдиз бутун сон бўлади, бунда $\frac{a_n}{x_0}$ ҳам бутун сон ва натижада тенгламанинг чап қисмини $x-x_0$ га «устун» қилиб бўлишда $(n-1)$- даражали кўпҳад ҳосил бўлади. Шу тасдиқдан фойдаланиб, тенгламани ечинг:

1) $x^3-3x^2+x=3$;
2) $x^3-3x^2-4x+12=0$;
3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0$;
4) $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=0$.

936. Тенгламани ечинг:

1) $\sin x+\cos x=-1$; 2) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$;

3) $5\sin x+\cos x=5$; 4) $4\sin x+3\cos x=6$.

937. $y=x^3-6x^2+11x-6$ функциянинг графиги Ox ўқини абсциссаси бутун сонлар бўлган нуқталарда кесадими?

938. $2x^3+mx^2+nx+12=0$ тенглама $x_1=1$, $x_2=-2$ илдизларга эга. Шу тенгламанинг учинчи илдизини топинг.

939. Тенгламалар системасини ечинг, ҳамда у a ва b параметрларнинг қандай қийматларида ечимга эга бўлишини аниқланг:

1) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=\frac{5}{2}, \\ x+y=a+a^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ \log_b x+\log_b y=2. \end{cases}$

940. Тенгламалар системасини ечинг:

1) $\begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y, \\ y^{\sqrt{y}} = x^4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{2}\sin x = \sin y, \\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin 2x + \sin 2y = 0. \end{cases}$

941. $\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} > 0$ тенгсизликни ечинг.

942. Тенгсизликни ечинг:

1) $\sqrt{2x-5} < \sqrt{5x+4}$; 2) $\sqrt{3x-2} > x-2$;

3) $\sqrt{5x+11} > x+3$; 4) $\sqrt{x+3} > x+1$;

5) $\sqrt{2x-7} \leqslant \sqrt{6x+13}$; 6) $\sqrt{3-x} < \sqrt{3x-5}$.

Функциянинг графигини ясанг (943—945):

943. 1) $y = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$; 2) $y = \frac{2}{1-2x}$;

3) $y = \frac{3x+2}{2x-3}$; 4) $y = \frac{2x}{2-|x|}$.

944. 1) $y = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$; 2) $y = \frac{1}{\cos x}$;

3) $y = \frac{1}{\ln x}$; 4) $y = \frac{3}{x(x+2)}$.

945. 1) $y = \log_2 \sin x$; 2) $y = \sqrt{\cos x}$;

3) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = \sin^2 x$.

946. Айниятни исботланг:

1) $\log_b a \cdot \log_c d \cdot \log_d c = \log_d a$;

2) $\log_{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \ldots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$.

2. Олий ўқув юртларига кириш имтиҳонларида тавсия этилган масалалар

Тенгламани ечинг (947—952):

947. 1) $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$;

2) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$;

3) $\frac{2x+1}{x}-2\sqrt{\frac{2x+1}{x}}=3$;

4) $\frac{1}{2-\sqrt{4-x}}+\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4-x}}$.

948. 1) $9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

2) $\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2^2 x+1}=9^{2-\log_2 x^3}$;

4) $x-\log_3\sqrt{31-9x}=1-\log_3\sqrt{1+3^{2(1-x)}}$;

5) $2\log_2 x-2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{\log_2 x}$;

6) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$.

949. 1) $1+\log_x(5-x)=\log_7 4\cdot\log_x 7$;

2) $1+\log_x(4-x)=\log_5 3\cdot\log_x 5$;

3) $(\log_4(2x+9)+1)\log_{x+2}2=1$;

4) $(\log_9(7-x)+1)\log_{3-x}3=1$.

950. 1) $\cos 3x-\sin 6x+\sin 2x-\cos 7x=0$;

2) $\cos 3x-\sin 6x-\cos 7x-2\sin 2x=0,\ x\in[0;\ \pi]$;

3) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$;

4) $\cos^3 x-3\cos^2 x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\sin^2 x+\cos^2 3x=1$; 6) $\operatorname{ctg} x+\sin 2x=\operatorname{ctg} 3x$.

951. 1) $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0$;

2) $\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}$;

3) $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$;

4) $\sqrt{5\sin 2x-2}=\sin x-\cos x$.

952. 1) $\frac{2\cos x}{\sin 3x+\sin x}-\frac{4}{3}=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\frac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}-\frac{1}{3}=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

953. $\cos x+(1+\cos x)\operatorname{tg}^2 x-1=0$ тенгламанинг $\operatorname{tg} x>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча илдизларини топинг.

954. $\sin 4x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{25\pi}{6}$ тенгламанинг $\lg(x-\sqrt{2x+24})>0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча илдизларини топинг.

955. $\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin x\cdot\cos 2x=0$ тенгламанинг $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right)$ интервалдаги энг катта илдизини топинг.

Тенгламалар системасини ечинг (956—958):

956.1) $\begin{cases} x-3y=-5, \\ \frac{x}{3y}-\frac{2y}{x}=-\frac{23}{6}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+(y-4)^2=6, \\ 4x-xy=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ (x+z)\ (y+z)=15, \\ (y-1)\ (x+z)=4. \end{cases}$

957. 1) $\begin{cases} 6^x-2\cdot 3^y=2, \\ 6^x\cdot 3^y=12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2, \\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2^{y+1}=3, \\ 4x+4^y=32; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10\ (y-x)-x^4=9, \\ \sqrt{y}+\sqrt{y-2x}=\sqrt{2}. \end{cases}$

958. 1) $\begin{cases} xy=20, \\ x^{\lg y}x=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^4+19=20\ (x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 27\cdot 3^{2x-y}+3^{x^2}=4\ \sqrt{3}, \\ \lg\ (y-4x)=2\lg\ (2+2x-y)-\lg y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8\cdot 2^{-x-2y}+2^{y^2}=3\ \sqrt{2}, \\ \lg\ (x+4y)=2\lg\ (2-x-2y)-\lg x. \end{cases}$

Тенгсизликни ечинг (959—961):

959. 1) $\frac{2x-3}{4-x}>\frac{1}{x}$; 2) $\frac{2x+5}{|x+1|}\geqslant 1$;

3) $\frac{x-4}{\sqrt{8+x}}<1$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x-1}}<1$.

960. 1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+6}<1$;

2) $5^x-3^{x+1}>2\ (5^{x-1}-3^{x-2})$;

3) $\log_2 \frac{x}{x-1} \leqslant -1;$

4) $\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7.$

961. 1) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x-\sqrt{x^2-4}) \leqslant 0;$

2) $\sqrt{2+\log_x 9} \cdot \log_{\frac{1}{3}} x < 2;$

3) $\log_{\frac{1}{3}-2x}(1-16x^2) > 0;$

4) $\frac{1}{\log_5(3-2x)} - \frac{1}{4-\log_5(3-2x)} < 0.$

962. $y=-2x^3+3x^2+12x+5$ функциянинг $[-2;\ 1]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

963. $y=3\sqrt{3}\sin x \cdot \sin 2x$ функциянинг $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесмадаги энг катта қийматини топинг.

964. $y=24x-\cos 12x-3\sin 8x$ функциянинг $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг.

965. $y=\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг.

966. $y=\cos \pi x$ функция графигига $x=\frac{1}{6}$ ва $x=\frac{7}{6}$ абсциссали нуқталарда ўтказилган уринмаларнинг кесишиш нуқтаси координаталарини топинг.

967. $y=\frac{x^3+1}{x}$ функция графигига ўтказилган шундай уринмаларнинг тенгламаларини ёзингки, улар координата ўқлари билан 1/2 юзли учбурчакни чегаралаб турсин.

968. $y=(x-1)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ функция графигига ўтказилган уринма ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзи энг кичик бўлиши учун шу уринмани функция графигининг қандай нуқтасида ўтказиш керак?

969. $y=2x^2-3x+8$ параболада шундай нуқталарни топингки, параболага шу нуқталарда ўтказилган уринмалар координаталар бошидан ўтсин.

970. k нинг қандай қийматида $y=x^2+2x-3$ парабола билан $y=kx+1$ тўғри чизиқ орасида ётувчи фигуранинг юзи энг кичик бўлади?

971. $y=x^2+px+q$ парабола $y=2x-3$ тўғри чизиқни 1 абсциссали нуқтада кесиб ўтади. p ва q нинг қандай қийматларида параболанинг учидан Ox ўқигача бўлган масофа энг кичик бўлади? Шу масофани топинг.

972. $y=4x-x^2$ парабола ва унга $M\left(\frac{5}{2};\ 6\right)$ нуқтадан ўтувчи уринма билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

973. x нинг $y=6\cos^2 x+6\sin x-2$ функция энг катта қиймат қабул қиладиган барча қийматларини топинг.

974. a нинг $y=x^2+(a+4)x+2a+3$ функциянинг $[0;\ 2]$ кесмадаги энг кичик қиймати -4 га тенг бўладиган барча қийматларини топинг.

975. a нинг $y=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ квадратик функциянинг $[0;\ 2]$ кесмадаги энг кичик қиймати 3 га тенг бўладиган барча қийматларини топинг.

976. a параметрнинг $y=4x^2+8ax-a$ ва $y=4ax^2-8x+a-2$ параболаларнинг учлари $y=-5$ тўғри чизиқдан бир томонда ётадиган барча қийматларини топинг.

977. $y=-3x^2+8x-9$ ва $y=x^2+8x+13$ функциялар графикларидаги энг яқин нуқталар орасидаги масофани топинг.

978. Агар геометрик прогрессиянинг дастлабки учта ҳадининг йиғиндиси ва кўпайтмаси мос равишда 63 ва 1728 га тенг бўлса, унинг биринчи ҳадини ва махражини топинг.

АЛГЕБРА ВА АНАЛИЗ АСОСЛАРИ ҚУРСИ БЎЙИЧА ҚИСҚАЧА НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Сонинг арксинуси, арккосинуси ва арктангенси a, $-1\leqslant a\leqslant 1$ *сонининг арксинуси* ($\arcsin a$ каби белгиланади) — шундай α, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ сонки, унинг синуси a га тенг; $\arcsin(-a)=-\arcsin a$.

Масалан, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

a, $-1\leqslant a\leqslant 1$, *сонининг арккосинуси* ($\arccos a$ каби белгиланади) — шундай α, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ сонки, унинг косинуси a га тенг; $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

Масалан: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\frac{2\pi}{3}$.

a, $a\in R$ сонининг арктангенси ($\operatorname{arctg} a$ каби белгиланади) шундай α, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ сонки, унинг тангенси a га тенг; $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a$.

Масалан, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{4}$.

Энг содда тригонометрик тенгламаларнинг илдизлари формулалари:

$$\sin x=a,\ |a|\leqslant 1;\ x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in Z;$$
$$\cos x=a,\ |a|\leqslant 1;\ x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z;$$
$$\operatorname{tg} x=a,\ a\in R;\ x=\operatorname{arctg} a+\pi n,\ n\in Z.$$

Дифференциал тенглама — номаълум функциянинг ҳосиласини ўз ичига олган тенглама. Масалан,

$$y'=ky,\ y''-\omega^2y=0.$$

Дифференциал тенгламанинг ечими бир қийматлимас аниқланади. Масалан, $y'-2x=0$ дифференциал тенгламанинг ечими $y=x^2+C$ функциялар бўлади, бу ерда C — ихтиёрий сон.

Ечимнинг ягона бўлишлиги учун қўшимча шартлар берилади. Масалан, гармоник тебранишнинг $y''+\omega^2y=0$ дифференциал тенгламаси ечими ягона бўлишлиги учун тебранишнинг A амплитудаси ва φ бошланғич фазасини бериш етарли, у ҳолда гармоник тебранишнинг $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ тенгламаси бир қийматли аниқланади.

$y=f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги **интеграли** ($\int\limits_a^b f(x)\,dx$ каби белгиланади) — $f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n$ интеграл йиғиндининг $[x_{k-1};\ x_k]$ кесмалардан энг каттаси нолга интилади деган шартдаги лимити. Бу ерда $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, $\Delta_k=x_k-x_{k-1}$, $c_k\in[x_{k-1};\ x_k]$.

Ньютон — Лейбниц формуласи:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

бу ерда $F(x)$ қаралаётган $f(x)$ функциянинг $[a;\ b]$ кесмадаги бошланғич функцияси.

Асоси $[a;\ b]$, юқоридан мусбат қиймат қабул қилувчи $f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган *эгри чизиқли трапециянинг юзи* қуйидагига тенг:

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

x мусбат сонниниг a, $a>0$ асосга кўра **логарифми** ($\log_a x$ каби белгиланади) шу x ни ҳосил қилиш учун a сонини кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичи, яъни $a^{\log_a x}=x$.

Масалан, $\log_3 27=3$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=2$, $\log_3\frac{1}{9}=-2$, $3^{\log_3 4}=4$.

Логарифмлаш — соннинг логарифмини топиш амали.

Логарифмларнинг хоссалари ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $x_1>0$, $x_2>0$, $n\in R$):

1. $\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$.
2. $\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$.
3. $\log_a x^p=p\log_a x$.
4. Агар $\log_a x_1=\log_a x_2$, $a>0$, $a\neq 1$ бўлса, у ҳолда $x_1=x_2$.

Соннинг ўнли логарифми — шу соннинг 10 асосга кўра логарифми, $\lg a$ каби белгиланади.

Соннинг натурал логарифми — шу соннинг e асосга кўра логарифми, $\ln a$ каби белгиланади.

e сони — иррационал сон, $e\approx 2{,}718$.

Бир асосга кўра логарифмдан бошқа асосга кўра логарифмга ўтиш формуласи:

$$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Масалан, $\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 3}$; $\log_5 6=\frac{\ln 6}{\ln 5}$.

Масалан, $x^2-5x+6=0$ ва $(x-2)(x-3)=0$ тенгламалар тенг кучли тенгламалардир; $\log_2 x=3$ ва $2x-16=0$ тенгламалар ҳам тенг кучли тенгламалардир.

Агар тенгламанинг илдизлари тўплами берилган тенгламанинг барча илдизларини ўз ичига олса, бу *тенглама берилган тенгламанинг натижаси* деб аталади.

Масалан, $x^2+x-6=0$ тенглама $\sqrt{6-x}=x$ тенгламанинг натижасидир.

Иккита тенглама улардан ҳар бири иккинчисининг натижаси бўлганда ва фақат шундагина тенг кучли бўлади.

Тригонометрик формулалар.

Асосий тригонометрик айният:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Тангенс, котангенс, синус ва косинус орасидаги боғланишлар:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Қўшиш формулалари:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Иккиланган бурчак формулалари:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Синуслар ва косинуслар йиғиндиси ҳамда айирмасини кўпайтмага алмаштириш формулалари:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Келтириш формулалари қуйидаги қоидалар бўйича ҳосил қилинади:

1. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ шартда формуланинг ўнг қисмига чап қисми қандай ишорали бўлса, ўша ишора қўйилади.

2. Агар формуланинг чап қисмида бурчак $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ёки $\frac{3\pi}{2}$ $\pm\alpha$ га тенг бўлса, у ҳолда синус косинусга, тангенс котангенсга алмаштирилади ва аксинча. Агар бурчак $\pi\pm\alpha$ га тенг бўлса, алмаштириш бажарилмайди.

Масалан, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

Тригонометрик функциялар $-y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=$ $=\operatorname{ctg} x$ функциялар.

Тригонометрик функцияларнинг хоссалари

$y=\sin x$ функция

1. Аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.
2. Қийматлар тўплами — $[-1;\ 1]$ кесма.
3. Даврий функция, энг кичик мусбат даври 2π га тенг, яъни $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
4. Тоқ функция: $\sin(-x)=-\sin x$.
5. 1 га тенг энг катта қийматни $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади; -1 га тенг энг кичик қийматни $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади; нолга тенг қийматни $x=\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади, мусбат қийматларни $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n\in Z$ интервалда, манфий қийматларни $(-\pi+2\pi n,\ 2\pi n)$, $n\in Z$ интервалларда қабул қилади.
6. $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ оралиқларда ўсувчи, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$ оралиқларда камаювчи.

$y=\cos x$ функция

1. Аниқланиш соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.
2. Қийматлар тўплами $[-1;\ 1]$ кесма.
3. Даврий функция, энг кичик мусбат даври 2π га тенг.
4. Жуфт функция.
5. 1 га тенг энг катта қийматни $x=2\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади; -1 га тенг энг кичик қийматни $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади; нолга тенг қийматни $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади; мусбат қийматларни $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$ интервалларда; манфий қийматларни $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$ интервалларда қабул қилади.

6. $[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$, $n\in Z$ ораликларда ўсувчи; $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$ ораликларда камаювчи функция.

$y=\operatorname{tg} x$ функция

1. Аниқланиш соҳаси $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$ дан ташқари барча ҳақиқий сонлар тўплами.

2. Қийматлар тўплами — барча ҳақиқий сонлар тўплами R.

3. Даврий функция, энг кичик мусбат даври π га тенг.

4. Тоқ функция.

5. Нолга тенг қийматни $x=\pi n$, $n\in Z$ да қабул қилади; мусбат қийматларни $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$ интервалларда; манфий қийматларни $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right)$, $n\in Z$ интервалларда қабул қилади.

6. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$ интервалларда ўсувчи функция.

Жуфт функция — ўзининг аниқланиш соҳасидаги ҳар бир x учун

$$f(-x)=f(x)$$

хоссага эга $f(x)$ функция.

Масалан, $f(x)=x^2$, $f(x)=\cos x$ — жуфт функциялардир.

Функциянинг экстремуми.

Функциянинг *ўсиши ва камайиши.* Агар ораликда $f'(x)>0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция шу ораликда ўсади. Агар ораликда $f'(x)<0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция шу ораликда камаяди.

$f(x)$ функциянинг *максимум нуқтаси* — шундай x_0 нуктаки, x_0 нуктанинг бирор атрофидаги барча x лар учун $f(x)\leqslant f(x_0)$ тенгсизлик бажарилади.

$f(x)$ функциянинг *минимум нуқтаси* — шундай x_0 нуктаки, x_0 нуктанинг бирор атрофидаги барча x лар учун $f(x)\geqslant f(x_0)$ тенгсизлик бажарилади.

Функциянинг *экстремум нуқтаси* — максимум ёки минимум нуқтаси.

Функциянинг *стационар нуқтаси* — функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўладиган нуқта.

Ферма теоремаси (экстремумнинг зарурий шарти). Агар x_0 нуқтада дифференциалланувчи $f(x)$ функция шу нуқтада экстремумга эга бўлса, у ҳолда $f'(x_0)=0$.

Экстремумнинг *етарлилик шарти.* Агар x_0 стационар нуктадан ўтишда функциянинг ҳосиласи ишорасини «+» дан «—» га ўзгартирса, у ҳолда x_0 нукта бу функциянинг максимум нуқтаси бўлади, агар ҳосила ишорасини «—» дан «+» га ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуқта минимум нуқтаси бўлади.

Функциянинг *кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини* топиш учун бу функциянинг экстремум нуқталаридаги ва кесманинг охирларидаги қийматларини топиш ва шундан кейин улар орасидан энг катта ва энг кичик қийматларни танлаш керак.

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

X СИНФ

5. 2) $x=-1$; 4) $x=-2$. 11. 88,4 г; 22,1 г. 12. $4{,}87\cdot 10^5$ м^3. 13. 2) $x=\frac{2}{3}$; 4) $x=-\frac{2}{3}$. 14. 2) $x=-0{,}5$; 4) $x=4$. 15. 2) $x=2{,}5$; 4) $x=9$; 6) $x=0{,}4$. 16. 2) $x=1$; 4) $x=3$. 17. 2) $x=0$; 4) $x=0$. 18. 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x=1$. 19. 2) $x<2$; 4) $x<-0{,}5$; 6) $x\geqslant 3$. 20. 2) $(0;\ -2)$; $(-1;\ -3)$. 21. 2) $x_1=2$, $x_2=5$; 4) $x=\frac{1}{3}$. 22. 2) $x_1=1$, $x_2=-3$; 4) $x_1=0{,}5$, $x_2=-3$. 23. 2) $x=0{,}8$; 4) $x=-1$; 6) $x_1=0{,}5$, $x_2=-3$. 24. 2) $x_1=0{,}3$, $x_2=-0{,}2$; 4) $x=4$. 25. 2) $y=3$; 4) $x=2$. 26. 2) $x=3$; 4) $x=3$. 27. 2) $x=-3$; 4) $x=4$. 28. 2) $x=-1$; 4) $x_1=1$, $x_2=-1$; 6) $x=-1$. 29. 2) $x>4$; 4) $x<1$, $x>2$; 6) $1<x<2$. 30. 2) $x>1$; 4) $x\leqslant 1$. 31. 2) $x<2$; 4) $x<-1$. 35. 2) $(3;\ -2)$. 36. $x=4$. 37. 2) $x=2$; 4) $x=3{,}25$. 38. 2) $-2<x<1$; 4) $-\frac{4}{3}<x<2$. 39. 2) $2^{\sqrt{3}}>2^{1{,}7}$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3{,}14}$. 40. 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}<1$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}>1$. 42. 2) $0{,}04\leqslant y\leqslant 5$. 43. 2) $x=-2$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. 44. 2) $x=0$; 4) $x=2$. 45. 2) $x=1$; 4) $x=3$. 46. 2) $x<-1$; 4) $-2<x<2$. 49. $a(1+0{,}01p)^{n-1}$. 51. 2) $x=24$. 52. 2) $x=9$; 4) $x=1$. 53. 2) $x=0$; 4) $x=-0{,}5$. 54. 2) $-3<x<1$; 4) $-1<x\leqslant 1$. 55. 2) $(1;1)$. 57. 2) $x=4$; 4) $x=1$. 58. 2) $x<-3$, $x>1$; 4) $x<-1\frac{1}{3}$, $x>4$. 59. 2) 6; 4) 0; 6) -3. 60. 2) 4; 4) 0; 6) -1. 61. 2) -2; 4) 1; 6) $-\frac{1}{3}$. 62. 2) 3; 4) -2. 63. 2) -3; 4) -2. 64. 2) 16; 4) 6. 65. 2) 64; 4) 3. 66. 2) 144; 4) 1. 67. 2) $x=625$; 4) $x=25$; 6) $x=5{,}5$. 68. 1) $-1{,}5$; 4) $-1\frac{2}{3}$. 69. 2) $-\frac{1}{4}$; 4) 5^{12}; 6) $1\frac{2}{7}$. 70. 2) 1; 4) $\frac{1}{6}$; 6) 2. 71. 2) $x>12$; 4) $x>0{,}5$. 72. 2) $x<-3$; $x>2$; 4) x — исталган ҳақиқий сон; 6) $-\frac{5}{3}<x<4$. 73. 2) $x=\log_{1{,}2}4$; 4) $x=\frac{1}{2}(1-\log_7 2)$. 74. 2) $x=\log_3 4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\log_{\frac{1}{3}} 2$. 75. 2) 3; 4) 2. 76. 2) 2; 4) -3. 77. 2) $\frac{2}{3}$; 4) $-1\frac{1}{6}$. 78. 2) 1,5; 4) -4. 79. 2) 1,5; 4) -3. 80. 2) $1\frac{1}{3}$; 4) 0. 81. 2) $x=\frac{a^2}{b^3}$. 82. 1) 3; 2) 19. 83. 2) 1. 84. 2) 0,845; 4) $-0{,}176$. 85. 2) 0,693; 4) $-0{,}154$. 86. 2) 1,29; 4) $-0{,}42$. 87. 2) 1,3; 4) $-15{,}42$. 88. 2) $x=8$; 4) $x=3$; 6) $x=2$. 89. 2) $x_1=9$, $x_2=27$; 4) $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\sqrt{2}$. 90. 2) 1; 4) 0,5. 91. 9 йил. 92. 3052 марта. 93. 2) 2,7182788; 4) 2,7182819. 94. 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9>\log_{\frac{1}{3}} 17$; 4) $\log_2\frac{\sqrt{5}}{2}>\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}$. 95. 2) $\log_3 0{,}45<0$; 4) $\log_{0{,}5} 9{,}6<0$. 96. 2) $x<1$; 4) $x>1$. 101. 2)

$x > \frac{1}{8}$; 4) $x > 0{,}5$. 102. 2) $0 < x < 0{,}16$; 4) $x \geqslant 0{,}16$. 103. 2) $x = 8$; 4) $x = 46$ 6) $x = -1{,}6$. 108. 2) $y = \frac{4-x}{5}$; 4) $y = \frac{2x+1}{3}$; 6) $y = \sqrt[3]{x+3}$; 8) $y = (0{,}5)^x$. 111. 2) Иккинчиси; 4) Ҳар иккисидан бири — бошқасининг натижасидир 112. 2) $x = 3$; 4) $x = 2$. 113. 2) Илдизи йўқ; 4) $x = 2$. 114. 2) $x = 5$. 115. 2) Илдизи йўқ. 116. 2) $x = 1$; 4) $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. 117. 2) (1; 9). 118. 2) $x_{1,2} = \pm 8$; 4) $x = 16$; 6) $x = 3$. 119. 2) $x = 3$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -8$. 120. 2) $x = 9$; 4) $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$. 121. 2) Ҳа; 4) йўқ; 122. 2) Ҳа; 4) йўқ; 123. 2) $\left(8; \frac{1}{4}\right)$. 124. 2) $x_1 = 4$ $x_2 = \sqrt{2}$; 3) $x_1 = 3$, $x_2 = 9$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{9}$. 125. 2) $x = \frac{2}{7}$. 126. 2) $x = -4$ 127. 2) $x < \frac{7}{5}$; 4) $-2 < x < 2$. 128. 2) $x \leqslant -30$; 4) $1 < x \leqslant 10$; 6) $x < -0{,}05$ 129. 2) $x > 25$; 4) $\frac{5}{3} < x < 3$. 130. 2) $2 < x \leqslant 3$, $11 \leqslant x < 12$. 131. 2) $-\frac{2}{3} < x < 1$. 132. 2) $x > 7$; 4) Ечими йўқ. 133. 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $x < -0{,}5$, $x > 3$. 134. 2) $x < 2$, $x > 3$; 4) $-2 \leqslant x < -1$, $6 < x \leqslant 7$. 135. 2) $x > 2$. 136. 2) $0 < x < 0{,}1$, $x > 10000$. 137. 2) $\log_3 \frac{1}{2} < x < \log_3 \frac{2}{3}$, $x < \log_3 2$; 4) $x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{6}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 138. 2) 4; 4) -3. 139. 2) -4; 4) 6. 140. 2) 1; 4) $\frac{2}{3}$. 141. 2) $\frac{1}{4}$; 4) 4. 142. 2) $-2{,}2$. 143. 2) 2,26; 4) $-1{,}73$. 145. 2) Ўсувчи; 4) камаювчи. 147. 2) $x < 0$, $x > 2$. 148. 2) $x = \frac{3}{8}$; 4) $x = 2$. 149. 2) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. 150. 2) $x = -4$; 4) $x = 2$. 151. 2) $x < 10$; 4) $x < -1$. 152. 2) Ечими йўқ. 153. 2) $x < -8$, $x > 1$. 154. 2) $-4{,}5$; 4) 36; 6) 2. 155. 2) $0 < x < 1$. 157. 2) $x = \frac{1}{3}\log_2 3$; 4) $x = \frac{x}{4}(\log_{\frac{1}{5}} 1{,}5 - 5)$; 6) $x = \log_5 3$. 158. 2) $x = 27$; 4) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{27}$. 159. 2) $x = -4$; 4) $x_1 = 14$, $x_2 = 6$. 160. 2) Илдизи йўқ. 161. 2) $x = 4{,}5$. 162. 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$; 4) илдизи йўқ. 163. 2) $5 < x \leqslant 6$; 4) $x > 4$; 6) $-4 < x < -3$. 165. 2; 10; 50 ёки 50; 10; 2. 167. 2) $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$. 168. 2) $x_1 = 23$, $x_2 = -1{,}8$. 169. 2) $x = 2 - \sqrt{2}$. 170. 2) $x \leqslant 0$, $\log_6 5 \leqslant x < 1$. 171. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; 4π. 172. 90°; 30°; 150°; 630°; 540° 495°. 174. 2) $-\frac{4}{5}$; 4) $\frac{12}{5}$; 175. $\frac{56}{65}$. 177. 2) 0; 4) 0. 178. 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) -1; 6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 179. 2) $\frac{1}{\sin\alpha - \cos\alpha}$. 180. 2) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$; 6) 0,5. 182. $-\frac{8}{17}$. 183. $\frac{40}{41}$ 185. 2) 0; 3) -1. Кўрсатма: берилган ифодани қуйидаги кўринишда ёзинг: $-4\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{4\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ}$, кейин иккиланган бурчак синуси формуласидан фойдаланинг. 4) $\frac{1}{8}$. Кўрсатма: берилган ифодани қуйидаги кўринишда ёзинг: $-\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$, кейин иккиланган бурчак синуси формуласидан фойдаланинг.

186. 2) -1. 187. 2) $\sqrt{3}$. 188. 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. 191. 2) $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$. 193. 2) 1. 194. 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) $\sin2\alpha$. 195. 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 196. 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 198. 2) $2\sin\alpha$. 201. 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. 202. 2) 0. 203. 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$. 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\times\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. 204. 2) 0; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$. 205. 2) 2π; 4) 8π. 206. 2) $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)<\arccos(-1)$. 207. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. 208. 2) $x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\pm\arccos(-0{,}2)+2\pi n,\ n\in Z$. 209. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{2}+6\pi n,\ n\in Z$; 6) $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. 210. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. 211. 2) ҳа; 4) йўқ; 6) ҳа. 212. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in Z$. 213. 2) $x=2\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2\pi n,\ n\in Z$. 214. 2) $x=-2{,}5$. 215. 2) $-\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. 216. 2) 6; 4) $2\pi-4$. 217. 2) $x\approx\pm1{,}84+2\pi n,\ n\in Z$. 218. 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 6) $-\frac{\pi}{3}$. 219. 2) 0; 4) $-\frac{\pi}{2}$. 220. 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)>\arcsin(-1)$. 221. 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. 222. 2) $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{7}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}+\pi n,\ n\in Z$. 223. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; 6) $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. 224. 2) $x=\pi n,\ n\in Z$. 225. 2) Ҳа, 4) йўқ; 6) йўқ. 226. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 4) $x=(-1)^n\frac{3}{2}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{3\pi n}{2},\ n\in Z$. 228. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=(-1)^n\frac{1}{3}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. 229. 2) $x=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$. 230. 2) $-\frac{1}{5}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{3}$. 231. 2) 2; 4) $5-2\pi$. 232. 2) $x\approx(-1)^{n+1}\cdot0{,}32+\pi n,\ n\in Z$. 233. 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$. 234. 2) 0; 4) $-\frac{47\pi}{12}$. 235. 2) $\operatorname{arctg}(-5)<\operatorname{arctg}0$. 236. 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; 6) $x=-\operatorname{arctg}5+\pi n,\ n\in Z$. 237. 2) $x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. 238. 2) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\operatorname{arctg}4{,}5+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}=\pi n$ $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. 239. 2) $\frac{3+\sqrt{3}}{5}$. 240. 2) $-0{,}3$; 4) -6. 241. 2) 2; 4) 13—

-4π. 242. 2) $x\approx -1{,}44+\pi n,\ n\in Z$. 243. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; 4) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 6) илдизи йўқ. 244. 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. 245. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\mathrm{arctg}\,4+\pi n$, $n\in Z$; 6) илдизи йўқ. 246. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\mathrm{arctg}\,3+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\mathrm{arctg}\,3+\pi n$, $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$. 247. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. 4) $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 248. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$. 249. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. 250. 2) $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$. $x=(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$. 251. 2) $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=\pm\pi+8\pi n,\ n\in Z$; 4) $x=\mathrm{arctg}\,3+\pi n$, $x=2\pi,\ n\in Z$. 252. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$, 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. 253. 2) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. 254. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. 255. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$. 256. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$. 257. 2) илдизи йўқ. 4) $x=\pi n,\ n\in Z$. 258. 2) $x=\pi n$; 4) $x=\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$. 259. 2) $x=\mathrm{arctg}\,2+\pi n$, $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$; 4) илдизи йўқ. 260. 2) $x=\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 261. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\pi n,\ n\in Z$. 262. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 263. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. 264. 2) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$. 265. ечими йўқ; 4) $x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$. 266. 2) $-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. 267. 2) ечими йўқ; 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. 268. 2) $-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 269. 2) $12-3\pi+8\pi n<x<12-\pi+8\pi n,\ n\in Z$. 270. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$. 271. 2) $2\sin\alpha$. 272. 2) $-\mathrm{ctg}\,\alpha$. 274. 2) ... 275. 2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 278. 2) $-\frac{7\pi}{4}$; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 6) 0. 279. 2) $x=-2\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$. ...

$x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$ $n\in Z$; 280. 2) $x=\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$; 4) $x=\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{5}+$ $\frac{\pi n}{2}, n\in Z$. 281. 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 282. 2) $x=\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$ 4) $x=\frac{3\pi}{28}+\pi n$, $n\in Z$. 283. 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\arccos\frac{1}{3}+$ $+2\pi n$, $n\in Z$. 284. 2) $x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{39}-3}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 285. 2) $x=$ $=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}1{,}5+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 286. 2) $x=$ $=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{5}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 287. 2) Илдизи йўқ. 288. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{5}$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. 289. 2) $-\frac{5\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 290. 4 $\sin 2\alpha$. 293. 2) $2\sin\alpha$. 294. 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) 1. 295. 2) 0; 4) -1; 6) 0. 296. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 297. 2) $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in Z$. 298. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 299. 2) $x=$ $=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$. 300. 2) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 301. 2) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 4) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}$, $n\in Z$. 302. 2) $x=\pi n$, $n\in Z$. 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 303. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. 304. $\frac{m^2-1}{2}$. 307. 2) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{1}{5}$. 308. 2) $\frac{5}{4}$; 4) 2. 309. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$; 6) илдизи йўқ. 310. 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; 4) илдизи йўқ. 311. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+$ $+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 312. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 313. 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 314. $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$, $x=\pm\frac{1}{4}\arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 315. 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 316. 2) $x\in R$; 4) $x\neq 0$; 6) $x<-1$, $x\geqslant 1$. 317. 2) $0\leqslant$ $\leqslant y\leqslant 2$; 4) $-3\leqslant y\leqslant 5$; 6) $-1{,}25\leqslant y\leqslant -0{,}75$. 318. 2) $x\neq \pi n$, $n\in Z$; 4) $x\neq\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$. 319. 2) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $-\frac{7\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. 320. 2) $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$ $n\in Z$. 321. 2) $-1\leqslant y\leqslant 1$; 4) $1\leqslant y\leqslant 10$; 6) $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. 322. 5 ва -5. 323. $-\sqrt{26}\leqslant y\leqslant\sqrt{26}$. 324. $1\leqslant y\leqslant 11$. 325. 2) Тоқ; 4) тоқ; 6) жуфт. 326. 2) Жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; 4) жуфт; 6) жуфт. 329. 2) Жуфт; 4) тоқ; 6) жуфт. 330. 2)

$\frac{4\pi}{3}$; 4) π. 331. 2) 2π. 335. 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[-\pi; 0]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. 336. 2) $\cos\frac{8\pi}{7} < \cos\frac{10\pi}{7}$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 6) $\cos 4 < \cos 5$. 337. 2) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. 338. 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{3}$. 4) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} < x \leqslant 3\pi$. 339. 2) $\sin\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5} > \cos\frac{3\pi}{5}$. 6) $\cos\frac{\pi}{8} > \sin\frac{3\pi}{10}$. 340. 2) $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $-\frac{11\pi}{12}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{23\pi}{12}$; $\frac{25\pi}{12}$. 341. 2) $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12} < x < \frac{13\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12} < x < \frac{25\pi}{12}$. 343. 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$. 347. 2) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 4) $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$. 348. 2) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; 4) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 6) $\sin 7 > \sin 6$. 349. 2) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. 350. 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4} \leqslant x \leqslant 3\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. 351. 2) $\sin\frac{9\pi}{8} > \cos\frac{9\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8} < \cos\frac{3\pi}{10}$. 352. 2) $-\frac{11\pi}{9}$; $-\frac{10\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{9}$; $-\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{8\pi}{9}$. 353. 2) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x < -\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9} < x < -\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9} < x < \frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9} < x \leqslant \pi$. 355. 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. 360. 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} < \operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) < \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$. 361. 2) $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$. 362. 2) $-\pi \leqslant x < -\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$; 4) $-\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. 363. 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 364. 2) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi$, $-\operatorname{arctg} 2 + 2\pi$, $-\operatorname{arctg} 2 + 3\pi$. 365. 2) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $-\operatorname{arctg} 5 + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 366. 2) $0 \leqslant x < \operatorname{arctg} 4$, $\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4 + \pi$, $\frac{3\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4 + 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} < x \leqslant 3\pi$; 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + 3\pi < x \leqslant 3\pi$. 367. 2) $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$. 368. 2) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$. 370. 2) $y > 1$; 4) $y \in R$. 372. 2) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 373. 2) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x\neq \pi n$, $x\neq (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 374. 2) $-1\leqslant y\leqslant 1$; 4) $5\leqslant y\leqslant 7$; 6) $-4\leqslant y\leqslant -2$. 375. 2) Тоқ; 4) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. 376. 2) 14π. 377. 2) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; 4) π; 3π. 378. 2) $-\frac{11\pi}{6}<x<\frac{7\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-2\pi\leqslant x<\frac{3\pi}{2}$. 380. 2) $\pi n\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 381. 2) $\frac{1}{2}$ ва $-\frac{1}{2}$; 4) 1 ва -2. 382. 2) Жуфт, 4) тоқ. 383. 2) 4π. 385. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{2\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. 386. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 387. $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. 389. 2) $-1\leqslant y\leqslant\frac{5}{4}$. 390. 2) $\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 392. 2) $(0{,}2)^{\frac{2}{3}}>(0{,}2)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5}<\log_{0,3}\frac{3}{4}$. 393. 2) $0<a<1$; 4) $0<a<1$; 6) $a>1$; 8) $a>1$. 394. 2) $x=1$; 4) $x=-\frac{3}{8}$. 395. 2) $x=9$; 4) $x=0$. 396. 2) $x=1$; 4) $x=0$. 397. 2) $x=3$. 398. 2) $x\leqslant 3$; 4) $x<-\frac{1}{8}$. 399. 2) $x\leqslant 1$; 4) $3-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 3+\sqrt{2}$. 400. 2) 3; 4) -1; 6) -3. 401. 2) 0; 4) $\frac{1}{9}$; 6) 1000. 402. 2) $x=25$; 4) $x_1=3$, $x_2=243$. 403. 2) $x=-3$; 4) илдизи йўқ. 404. 2) $\frac{1}{3}<x<2$; 4) $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$. 405. 2) $-1\leqslant x<1$, $3<x\leqslant 5$; 4) $1<x\leqslant 2$, $3\leqslant x<4$. 407. 2) 4π; 4) $-\pi$. 408. 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=-\operatorname{arctg}2{,}5+\pi n$, $n\in Z$. 409. 2) Илдизи йўқ; 4) илдизи йўқ. 410. 2) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{5}+\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{3}{5}+2\pi n$ $n\in Z$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in Z$. 411. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 412. 2) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{2}$ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 413. 2) $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 414. 2) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 415. 2) 2; 4) $-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$; 6) 1. 416. 2) $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$. 417. 2) $x>-2$; 4) $x\neq 2\pi+4\pi n$, $n\in Z$. 419. 2) Тоқ; 4) жуфт. 420. 2) $x_1=1{,}5$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x=-3$. 421. 2) $x_1=-1$, $x_2=3$; 4) $x=0$. 422. 2) $x_1=100$, $x_2=0{,}1$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{16}$; 6) $x=0$. 423. 2) $x\in R$; 4) $x<3$; 6) $x\leqslant 1-\frac{1}{3}\log_3 5$. 424. 2) $0<x<\frac{1}{3}$, $x>1$; 4) $0<x<1$, $x>1$. 425. 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}<x<10$. 426. 2) $(4; 1)$; 4) $(10; 1000)$, $(1000; 10)$. 427. 2) $(5; 2)$; 4) $(\sqrt{8}; \sqrt[4]{8})$. 428. 2) $3<\log_2 10<4$. 429. 2) 0; 4) -1; 6) 0. 430. 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. 431. 2) -1; 4) 1;

6) -1. 432. 2) $x=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2}$, $n\in Z$. 433. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\ \mathrm{arctg}\frac{1}{11}+2\pi n$, $n\in Z$. 434. 2) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 435. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+2\pi n$, $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in Z$. 436. 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, x=2\pi n, n\in Z$. 437. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, x=\mathrm{arctg}3+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\mathrm{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 438. 2) $x=\frac{\pi n}{8}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$. 439. 2) $-3\pi\leqslant x\leqslant-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi$; 4) $\mathrm{arctg}\frac{2}{3}-3\pi<x<-\frac{5\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\frac{2}{3}-2\pi<x<-\frac{3\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\frac{2}{3}-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\frac{2}{3}<x<\frac{\pi}{2}$. 440. 2) Жуфт; 4) жуфт ҳам эмас, ток ҳам эмас. 441. 2) 10π; 4) 2π. 442. 1) 3 ва -2. 445. 2) $2\cos\alpha$. 446. 2) $\mathrm{ctg}\alpha\ \mathrm{ctg}\ 3\alpha$. 447. 2) $1+\frac{1}{\cos x}$. 448. 2) $1\frac{5}{7}$. 451. 1) $2\leqslant x\leqslant 3$; 2) $-\sqrt{10}\leqslant x<-3$; $3<x\leqslant\sqrt{10}$; 3) $x>1$; 4) $0<x<1$. 452. 2) $\frac{12}{13}$. 453. $C=\frac{\pi}{2}$. 454. 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 2) $x_1=4$, $x_2=-4$. 455. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 456. 2) $x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 457. 2) $\left(7^{(\log_5\log_7 2)^{\frac{1}{3}}};\ 5^{(\log_5\log_7 2)^{\frac{1}{3}}}\right)$. 458. 2) $x>0{,}01$; 4) $x\in R$; 6) $2\pi n<x<\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

XI СИНФ

460. 2) $f'(x)=5$; 4) $f'(x)=-6x$. 461. 2) $f'(x)=4$; 4) $f'(x)=-5$. 462. 2) $v_{\text{ўр}}=3$. 463. 2) $v(t)=-3$. 464. 2) $v(4)=0{,}25$, $v(8)=0{,}25$. 465. 2) $v(t)=10t$. 466. 2) $v(10)=20$. 467. 2) $7x^6$; 4) $13x^{12}$. 468. 2) $-3x^{-4}$; 4) $-7x^{-8}$. 469. 2) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; 4) $\sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$. 470. 2) $-\frac{9}{x^{10}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 6) $-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$. 471. 2) $-15(5x+2)^{-4}$; 4) $-20(2-5x)^3$; 5) $2500x^3$. 472. 2) $-\frac{3}{4\sqrt[4]{(7-3x)^3}}$; 4) $\frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 473. 2) $-\frac{2}{27}$; 4) $\frac{1}{12}$; 6) $-\frac{3}{16}$. 474. 2) $\frac{6}{(3-2x)^4}$; 4) $-\frac{4}{\sqrt[7]{(3-14x)^5}}$; 6) $\frac{4}{3(1-2x)(\sqrt[3]{1-2x})^2}$. 475. 2) $x=\frac{8}{27}$. 476. $\frac{1}{4}$. 477. 2) $8x+12$. 478. 2) $2x-1$; 4) $-34x$; 6) $1{,}5x^2$; 8) $16x$. 479. 2) $10x+6$; 4) $5x^4-6x$; 6) $-6x^2+18$; 8) $-9x^2+4x-1$. 480. 2) $3x^2-\frac{2}{x^3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}}+\frac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$. 481. 2) $f'(0)=-2$, $f'(2)=10$; 4) $f'(0)=1$, $f'(2)=5$. 482. 2) $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{9}$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$; 4)

$f'(3)=\frac{14\sqrt{3}}{9}$, $f'(1)=3$. 483. 2) $x=1,5$; 4) $x_1=1$, $x_2=-\frac{7}{3}$; 6) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-4$. 484. 2) $5x^4-4x^3+3x^3-2x$; 4) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. 485. 2) 192; 4) 31,5. 486. $x_1=3$, $x_2=-0,4$, $x_3=1\frac{5}{11}$. 487. 2) $\frac{2\sqrt{x}(x^2-2x-1)-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$. 488. 2) 1; 4) $-\frac{5}{18}$. 489. 2) $2x+1-\frac{16}{x^2}$; 4) $1+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{x\sqrt[3]{x}}$. 490. 2) $\frac{3x^2+4}{2x\sqrt{x}}$; 4) $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$. 491. 2) $(x-1)^3(x+1)^6(11x-3)$; 4) $\frac{4(2x-3)^2(10x+3)}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$. 492. 2) $\frac{6x^2+6x+4}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{(x+2)(5x-x^2-4)}{2x\sqrt{x}(2-x)^2}$. 493. 2) $-1<x<0$, $x>2$; 4) $x>1$. 494. 2) $x\neq 1,5$; 4) $x>0,5$. 495. 3,5 рад/с. 496. 902,5 Ж. 497. 2) 103 г/см. 498. $\frac{2x-5}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$. Кўрсатма: берилган формулани $x>3$ да $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}$ кўринишда, $x<2$ да эса $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{3-x}$ кўринишда ёзиб олинг. 499. 2) e^x+2x; 4) $-3e^{-3x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 500. 2) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$; 4) $-e^{1-x}3x^{-4}$. 501. 2) $3^x\ln x+2x^{-3}$; 4) $3e^{3x}+4x$. 502. 2) $3^x\ln 3-2e^{2x}$; 4) $-e^{3-x}-\frac{4}{x^5}$. 503. 2) $\frac{3}{x}-2^x\ln 2$; 4) $-9x^{-4}-\frac{1}{x\ln 3}$. 504. 2) $-\sin x$; 4) $\cos x-2^x\ln 2$. 505. 2) $-\sin(x+2)$; 4) $-\cos(3-x)$. 506. 2) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}+3\right)+2^x\ln 2$; 4) $-12\sin 4x+\frac{1}{2x^2}$. 507. 2) $\frac{3^x(\ln 3\cdot\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$; 4) $\frac{1}{x\ln 3}\cdot\sin 2x+2\log_3 x\cdot\cos 2x$. 508. 1) 0; 4) $-\frac{1}{\ln 2}-3\ln 3$. 509. 1) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=-0,5$; 6) $x=4$. 510. 2) $x<0$, 4) $x>0$. 511. 2) $-\frac{1}{2\sqrt{6-6x}}+\frac{10}{2-5x}$; 4) $-e^{\frac{2-x}{5}}-\frac{1}{2}\cos\frac{1+x}{4}$. 512. 2) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3(2-x)\sqrt[3]{2-x}}+\sin\frac{x-2}{3}$; 4) $-\frac{3}{2(x+2)\sqrt[4]{(x+2)^3}}e^{\frac{x-4}{5}}$. 513. 2) $\frac{5}{2\sqrt{x}}(1-2x)e^{-x}$; 4) $2e^{3-2x}(\sin(3-2x)-\cos(3-2x))$. 514. 2) $\frac{\sqrt{3}(1+3^x)-2x\sqrt{3}\,3^x\ln 3}{2\sqrt{x}(3^x+1)^2}$; 4) $\frac{5^{2x}(2\ln 5\sin 3x+14\ln 5-3\cos 3x)}{(\sin 3x+7)^2}$. 515. 2) $\frac{1}{x^2\ln 2}\left(x2^x\ln 2-\frac{1}{\ln 2}-2^x+\log_2 x\right)$; 4) $\sin x+\cos x$. 516. 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in Z$. 517. 2) 2. 518. $2+2\pi$. 519. 2) $x=e^{-1}$ да $f'(x)=0$, $x>e^{-1}$ да $f'(x)>0$, $0<x<e^{-1}$ да $f'(x)<0$; 4) $x=1$ да $f'(x)=0$, $x>1$ да $f'(x)>0$, $0<x<1$ да $f'(x)<0$. 520. $\frac{2x-5}{x^2-5x+6}$. Кўрсатма: берилган функцияни $x>3$ да $\ln(x-3)+\ln(x-2)$ кўринишда, $x<2$ да эса $\ln(3-x)+\ln(2-x)$ кўринишда ёзиб олинг. 521. 2) $k=1$, $b=5$;

4) $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 522. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 3. 523. 2) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$. 524. 2) $y=-11x+12$; 4) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$; 6) $y=x+1$; 8) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

525. 2) $y=1$; 4) $y=x$. 526. 2) 0; 4) $\frac{\pi}{4}$. 527. 2) $\frac{\pi}{2}$, 4) $\frac{\pi}{2}$. 528. 2) $y=0$; 4) $y=2x$.

529. 2) $(1; 2)$; 4) $(\pi+2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n\in Z$. 530. $(3; 5)$, $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$. 531. $(1; -1)$, $y=2x-3$; $(1; 0)$, $y=2x-2$. 532. 2) $-5x^4+6x^2-6x$; 4) $-\frac{6}{x^4}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $-21(4-3x)^6$; 8) $\frac{2}{(1-4x)\sqrt{1-4x}}$. 533. 2) $-\sin x-\frac{1}{x}$; 4) $24x^3-9e^x$; 6) $-\frac{1}{x^4}+$ $+\frac{1}{2x}$. 534. 2) $2e^{2x}-\frac{1}{x}$; 4) $4\cos\frac{2x}{3}+3e^{1-3x}$. 535. 2) $x^2(1+3\ln x)$; 4) $\sin 2x+$ $+2x\cos 2x$; 6) $e^x(\cos x-\sin x)$. 536. 2) $\frac{2x-x^4}{(x^3+1)^2}$; 4) $\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$. 537. $x=0$ ва $x=\frac{4}{9}$ да $f'(x)=0$, $0<x<\frac{4}{9}$ да $f'(x)>0$, $x<0$ ва $x>\frac{4}{9}$ да $f'(x)<0$; 4) $x=4$, $x=-3$ ва $x=1{,}2$ да $f'(x)=0$, $x<-3$, $-3<x<1{,}2$ ва $x>4$ да $f'(x)>0$, $1{,}2<x<$ <4 да $f'(x)<0$; 6) $x=1$ да $f'(x)=0$, $x>1$ да $f'(x)>0$, $x<0$ ва $0<x<1$ да $f'(x)<0$. 538. 2) e; 4) 0,5. 539. 2) $y=30x-54$; 4) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

540. $s(4)=22$ м, $v(4)=7$ м/с. 541. 2) $\frac{1}{2}\sin x$; 4) $3x^2\cos 2x-2(x^3+1)\sin 2x$; 6) $\frac{x^4-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+4x^3\sqrt[3]{x-1}$. 542. 2) $-\frac{x+8}{8x^2\sqrt{x+4}}$; 4) $\frac{2}{\sin 2x-1}$. 543. 2) $x=0$ да $f'(x)=0$, $x>0$ да $f'(x)>0$, $x<0$ да $f'(x)<0$; 4) $x>-\frac{1}{2}$ да $f'(x)>0$; 6) $x=$ $=3$ да $f'(x)=0$, $x>3$ да $f'(x)>0$, $-1<x<3$ да $f'(x)<0$. 544. $a\geqslant 1$. 545. $a<$ <-12. 546. 2) $a\leqslant 0$; 4) $a>12$. 547. 2) $a\geqslant 0$; 4) $a\leqslant 0$. 548. 2) $\frac{\pi}{4}$. 549. 2) $y=-\frac{1}{8}\ln 2\cdot x+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\ln 2$; 4) $y=(1+e^{-1})x$. 550. $y=6x+\frac{19}{6}$, $y=6x-54$.

551. 8 кв. бирлик. 552. $2k$ кв. бирлик. 554. 2) $x>0{,}3$ ораликда ўсади, $x<$ $<0{,}3$ ораликда камаяди; 4) $x>-6$ ораликда ўсади, $x<-6$ ораликда камаяди. 555. 2) $-1<x<0$ ва $x>1$ ораликларда ўсади, $x<-1$ ва $0<x<1$ ораликларда камаяди; 4) $x<0$ ва $x>4$ ораликларда ўсади, $0<x<4$ интервалда камаяди. 556. 2) $x<0$ ва $x>0$ ораликларда камаяди; 4) $x>5$ ораликда ўсади. 557. 2) $0<$ $<x<3{,}2$ интервалда ўсади, $x<0$ ва $x>3{,}2$ ораликларда камаяди; 4) $x<\frac{1}{3}$ ораликда ўсади, $x>\frac{1}{3}$ ораликда камаяди. 558. 2) $-\frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<$ $<\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$ интервалларда ўсади. 559. 2) $a\geqslant 1$. 560. 2) $x_1=2$, $x_2=3$; 4) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 561. 2) $x=-6$ — максимум нуктаси; 4) $x=-8$ — максимум нуктаси, $x=8$ — минимум нуктаси. 562. 2) $x=0$— максимум нуктаси, $y(0)=3$, $x=$

$=-2$ ва $x=2$— минимум нуқталари, $y(-2)=y(2)=-13$; 4) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$— максимум нуқталари, $y(\frac{\pi}{6}+2\pi n)=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{5\pi}{6}+$ $+2\pi n$ — минимум нуқталари, $y\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)=-\sqrt{3}+\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$. 563. 2) Экстремум нуқталари йўқ; 4) экстремум нуқталари йўқ. 564. 2) $x=-1$ — максимум нуқтаси, $y(-1)=0{,}25$; $x=0$ ва $x=4$ — минимум нуқталари, $y(0)=0$, $y(4)=10\frac{2}{3}$; 4) $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$ — максимум нуқталари, $y=\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$; $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$ — минимум нуқталари, $y(-\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi n)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 565. Агар n — тоқ сон бўлса, унда $x=n-1$ — максимум нуқтаси; агар n — жуфт сон бўлса, унда $x=n-1$ — максимум нуқтаси, $x=-1$ — минимум нуқтаси. 572. $c<\frac{4}{9}$, $c>4$ да битта илдиз, $c=\frac{4}{9}$, $c=1$, $c=4$ да иккита илдиз; $\frac{4}{9}<c<1$, $1<c<4$ да учта илдиз. Кўрсатма: функцияни умумий текширишга қўшимча равишда функциянинг қийматини 1 сони билан таққосланг. 573. 2) Энг катта қиймат 68 га тенг, энг кичик қиймат — 31 га тенг. 574. 2) Энг катта қиймат — 2 га тенг, энг кичик қиймат — 2,5 га тенг; 4) энг катта қиймат — 1 га тенг, энг кичик қиймат — $\sqrt{2}$ га тенг. 575. 2) Энг катта қиймат —3 га тенг. 576. $25+25$. 577. $25\cdot25$. 578. $\frac{p}{4}$ томонли квадрат. 579. 3 см томонли квадрат. 580. 2) Энг катта қиймат $2+e^{-2}$ га тенг, энг кичик қиймат 1 га тенг; 4) энг катта қиймат 1,5 га тенг, энг кичик қиймат —3 га тенг. 581. 2) 1. 582. 2) 1. 583. 2) 3. 584. $\frac{a}{6}$. 585. $x=a$. 586. 4. 587. (1; 1). 588. $\frac{2}{3}\pi$. 589. 2) $x<-1$ ва $x>2$ оралиқларда ўсади, $-1<x<2$ интервалда камаяди; 4) $x<3$ ва $x>3$ оралиқларда камаяди. 590. 2) $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm0{,}5$; 4) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 591. 2) $x=1$— минимум нуқтаси. 592. 2) $x=0$ — максимум нуқтаси, $y(0)=-3$; $x=2$— минимум нуқтаси, $y(2)=-12{,}6$. 595. 2) Энг катта қиймат 0 га тенг, энг кичик қиймат —4 га тенг; 4) энг катта қиймат 14 га тенг, энг кичик қиймат — 11 га тенг. 597. Томони $\frac{p}{3}$ бўлган тенг томонли учбурчак. 598. Қирраси 10 см ли куб. 601. 2) $x=-1$ — минимум нуқтаси; 4) $x=-3$ — максимум нуқтаси, $x=4{,}5$ — минимум нуқтаси. 603. 2) Энг катта қиймати $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ га тенг, энг кичик қиймати— $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ га тенг. 604. 12. 605. $\frac{l}{3}$ ва $\frac{l}{\sqrt{3}}$ катетлар, $\frac{2l}{3}$ гипотенуза. 606. R^2. 607. $2\sqrt{\frac{S}{15}}$, $5\sqrt{\frac{S}{15}}$. 608. $x=-\sqrt{2}$— максимум нуқтаси, $x=\sqrt{2}$— минимум нуқтаси. 610. arctg$k$. 613. 2) $\frac{x^4}{4}+C$; 4) $2\sqrt{x}+C$. 614. 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}$; 4) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8$. 616. 2) $x^5+\frac{x^4}{2}$; 4) $-\frac{1}{x^2}-3\ln x$; 6) $3x\sqrt[3]{x}-4x\sqrt{x}$; 8) $2x^3-2x^2+3x$. 617. 2) $2\sin x-$ $-5\cos x$; 4) $3e^x+\cos x$; 6) $x+3e^x-4\sin x$; 8) $8\sqrt{x}+3\ln x+2e^{-x}$. 618. 2)

$\frac{1}{4}(x-2)^4$; 4) $\frac{9}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}$; 6) $3\ln(x-3)+2\cos(x-1)$. 619. 2) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$. 4) $-4\cos\left(\frac{x}{4}+5\right)+C$; 6) $\frac{1}{3}e^{3x-5}+C$; 8) $\frac{1}{3}\ln(3x-1)+C$. 620. 2) $2x^2-x$; 4) $\frac{1}{3}\sin 3x$. 621. 2) $4e^{\frac{x}{4}}-\frac{1}{2}\cos 2x$; 3) $-10\cos\frac{x}{5}-\frac{5}{2}e^{2x+\frac{1}{3}}$; 4) $21\sin\frac{x}{7}+\frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}$; 6) $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{5}}-\cos(4x+2)$; 8) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2}\ln(2x-5)$. 622. 2) $\frac{3x^4-3x^2+4x}{10}$; 4) $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x$. 623. 2) $\left(\frac{9}{7}x-\frac{3}{2}\right)x\sqrt[3]{x}$; 4) $\left(\frac{1}{3}x-3\right)2\sqrt{x}$. 624 2) $\frac{1}{2}\cos 2x$. 625. $6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-2{,}8$. 626. 2) $\ln(x+2)$; 4) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x$. 628. 2) $12\frac{1}{3}$; 4) 6; 6) $\frac{1}{2}$. 629. 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{1}{3}$. 630. 2) $12\frac{2}{3}$. 631. 2) 18. 632. 2) 9; 4) 5; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. 633. 2) 1; 4) 2; 6) 0. 634. 2) 11; 4) $2\frac{2}{3}$; 6) 10. 635. 2) 68; 4) e^6-e^2. 636. 2) $-\frac{11}{12}$; 4) 5. 637. 2) $4\sqrt{3}$; 4) 8. 638. 2) $\frac{4}{3}\ln 2{,}5$; 4) 0,5. 639. 1) π; 2) 0,5; 3) 0,5; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $16\frac{16}{105}$; 6) $1{,}5+\ln 2$. 640. $b=2$. 641. 1) $8\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{2}{3}$; 3) $2\ln 4$. 642. 2) $6\frac{1}{6}$; 4) 4. 643. 2) $\frac{11}{12}$. 644. 2) $1\frac{1}{3}$. 645. 2) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{6}$. 646. 1) 8. 647. 2) $2-\sqrt{2}$. 648. 2) 4,5. 649. 2) $\frac{\pi}{2}-1$. 650. 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 4) 6,75. 651. 1) 18; 2) $\ln 2-\frac{5}{8}$. 652. (0,5; 1,75). 653. 2) $21\frac{1}{3}$ м. 654. $10\frac{2}{3}$ м. 655. 2) $y=2x^3-4x^2+x+C$; 4) $y=2\sin 2x+C$; 6) $y=\sin x+\cos x+C$. 656. 2) $y=2\sin x+1$; 4) $y=2x+x^2-x^3+2$; 6) $y=3-e^{-x}$. 658. $\frac{10\ln 0{,}5}{\ln 0{,}999}\approx 6927$ йил. 659. 0,09 Ж. 660. 0,96 Ж. 661. 2) $-\cos x-1$; 4) e^x+1; 6) $2x-x^2+3$. 662. 2) 12; 4) -2; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. 663. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $1\frac{151}{192}$; 6) $\frac{4}{9}$. 664. 2) 0; 4) -3; 6) $8\frac{2}{3}$. 665. 2) $-\frac{1}{6}$; 4) $2\sin 12$. 666. 2) 1; 4) $1\frac{1}{3}$. 667. 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$. 668. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $4\ln 3-2$. 669. 1) 1,75; 2) $3\frac{8}{15}$. 670. $k=p$. 671. 2) $\frac{5}{8}$; 4) $3\frac{1}{9}$; 6) $\frac{2}{e}$; 8) -2. 672 . 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{1}{3}$. 674. $-2<x<3$. 675. 2) -3. 676. 2) $\frac{\pi}{3}$. 677. 2) $y=-6x-1$. 679. 2) 3,5 ва 0; 4) 3 ва 1; 6) $2e^2$ ва $-\frac{1}{e}$; 8) 0,5 ва 0. 680. 1 дм. 681. 54π см^3. 682. 6. 683. 2. 684. $\sin x-\frac{1}{x}-1$. 685. 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 6) $2\frac{2}{3}$; 8) $\ln 3$. 686. 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $9\frac{1}{3}$; 6) 1. 687. $v(10)=262$ м/с, $t\approx 37$ с. 688. 12π. 689. 2) $-5x^{-\frac{3}{2}}+2x^{-1,4}-2x^{-1,2}$; 4) $5x^{-\frac{1}{6}}$. 690. 2) $\frac{4x^2+4x-5}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{4}{x(1+\ln x)^2}$. 691. 2) $\frac{2x(4x+3)}{3\sqrt[3]{x+1}}$; 4) $\cos 2x-$

$-2x\sin 2x$. 692. $x=2$. 693. 2) $f'(2)>0$. 694. $f'(0)=4$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=8(7+4\sqrt{3})$. 695. $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$. 696. -1. 697. 9. 698. (3; 9). 699. (1; 2), (0,5; 2,25). 700. (−1; −3). 701. 2) $y=0{,}5(1+\ln x-x\ln 2)$; 4) $y=2x-1$. 702. 2) $x<0$ ва $x>0$ оралиқларда ўсади. 703. 2) $x=6$ — минимум нуқтаси. 704. 2) $x=0$ — минимум нуқтаси, $x=-2\frac{2}{3}$ — максимум нуқтаси. 705. 2) 1,5 ва 1. 707. $p=-10$, $q=26$. 708. $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. 709. $3\sqrt[3]{2\pi a^2}$. 701. $\frac{R}{\sqrt{2}}$. 711. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 712. $\frac{4R}{3}$. 713. $\frac{\pi}{3}$. 714. $\frac{1}{8}(2\sin 4x-9)$. 715. $\frac{3}{4}\ln(4x-1)+C$. 716. 2) 11,25 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$; 6) $5{,}5+7\ln 2$. 717. 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\ln 2$. 718. $b>\sqrt{3}-1$, $b<-3-\sqrt{3}$. 719. $x=\pi n$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 721. 3 ёки 12. 722. Йўқ, чунки кемалар орасидаги энг кичик масофа 48 минутдан кейин 3 миляга тенг бўлади. 723. $1\frac{11}{12}$. 724. $a=1$, $S=4$. 725. $\operatorname{arctg}\frac{4}{\pi^2}$.

Алгебра курсини якуний такрорлаш учун машқлар

726. 0,08. 727. 30. 728. $3\frac{1}{3}$%. 729. 400%. 730. 45. 731. 13,5. 732. 62%. 733. 30%, 10%, 60%. 734. 365 сўм. 735. 121%. 736. 8. 737. 600. 738. 636 сўм 54 тийин, 655 сўм 64 тийин. 739. 408 сўм 85 тийин. 740. 2) 4; 4) 1,02. 741. 2) $\frac{4}{15}$; 4) 2. 742. 2) 0,5; 4) 20,8. 743. 2) 1083. 744. 2) 64; 4) 25. 745. 2) −10; 4) $\frac{3}{7}$; 6) 160. 746. 2) Иккинчи; 4) биринчи. 747. 2) $\sqrt{3}$; 4) 0; 6) $2b$. 748. 2) $|b|\cdot(2b^2+1)$; 4) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 749. 2) $2\sqrt{5}$; 4) $\frac{b\sqrt{a}}{2a}$; 6) $3(\sqrt{6}-\sqrt{5})$; 8) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$. 750. 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{6}}$ 6) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. 751. 2) $2\frac{7}{9}$; 4) $1\frac{4}{11}$; 6) $\frac{16}{75}$. 752. 2) 2,(1); 4) 5,(18). 753. 2) Ҳа. 756. 2) Ҳа; 4) ҳа. 758. 1) $2\sqrt{3}\approx 3{,}46$см; 2) $2\arcsin\frac{9}{16}\approx 68{,}5°$. 759. $120\operatorname{tg}36°\approx 87$ м. 760. $130(\operatorname{tg}22°+\operatorname{tg}44°)\approx 178$ м. 761. 2) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$, $\sin\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=\frac{7}{25}$. 762. 2) 0,5; 4) 0,5; 6) $-\frac{3}{4}$. 763. 2) $-\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{4}{5}$. 764. 2) $\frac{3(b+1)}{b+3}$; 4) $\frac{b-4}{2b}$. 765. 2) $\frac{a^2-4b^2}{ab}$; 4) 0. 766. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 767. 2) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. 768. 2) $16a^2$. 769. 2) $-6\sqrt{b}$; 4) $\sqrt[12]{a^{-2}b}$. 770. 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. 772. 2) $\sin\alpha$; 4) $\sin\alpha$;

6) $\operatorname{tg}\alpha$. 773. 2) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $-\sin 2\alpha$; 6) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. 774. 2) $-\sin^2\alpha$; 4) $-\cos 2\alpha \cos 4\beta$. 780. 2) $x=3$; 4) $x=8$. 781. $a=-6$. 782. $b=3$. 783. 2) $x=3$. 784. 2) $x=-1{,}25$; 4) $x=-1$; 6) $x=5$. 785. 2) $x=\frac{1}{a-b}$. 786. 2) $x_1=-2$, $x_2=\frac{2}{3}$; 4) $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{3}$; ; 6) $x_{1,2}=\pm 5$. 787. 2) $x_1=2$, $x_2=10$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$. 788. 2) $x=4$; 4) $x=3$. 789. 2) Илдизи йўқ. 790. 2) $x=2$. 791. 2) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. 792. 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $x=1$. 793. 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=-1$, $x_4=3$; 4) $x_1=2$, $x_2=0{,}25$. 794. 2) $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm b$; 4) $x_1=a$, $x_2=-2{,}5a$. 795. $a>0$, $b^2=4ac$. 797. 2) $x=6$; 4) $x=3\frac{2}{3}$. 798. 2) $x_1=3$, $x_2=\frac{5}{3}$; 4) $x=1$. 799. $x=3$. 800. $x=5$. 801. 2) Илдизи йўқ; 4) $x_1=2$, $x_2=-1$; 6) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=\frac{16}{9}$. 802. 2) $x_1=3$, $x_2=2$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. 803. 2) $x=3$; 4) $x=3$. 804. 2) $x_1=4$, $x_2=-2$. 805. 2) $x=25\sqrt{3}$; 4) $x=\sqrt{3}$. 806. 2) $x_1=1$, $x_2=9$. 807. 2) $x=9$; 4) $x=18$. 808. 2) $x_1=0{,}01$, $x_2=100$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=9$; 6) $x_1=1$, $x_2=4$. 809. Йўқ. 810. 2) $z_{1,2}=3\pm i$; 4) $z_{1,2}=-2\pm\frac{i}{2}$; 6) $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$. 811. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, 812. 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$. 813. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\pi n$, $n\in Z$; 4). Илдизи йўқ. 814. 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. 815. 2) $x=\frac{\pi}{8}2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$. 816. 2) $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\pi+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi n$, $n\in Z$. 817. 2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in Z$. 818. 2) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$, $n\in Z$. 819. 2) Илдизи йўқ, 4) $x=\pi n$, $n\in Z$. 820. 2) $x>-2$; 4) $x>1$. 821. 2) $x>56$; 4) $x<0{,}1$; 6) $x>5$. 822. 2) $x<0{,}5$, $x>\frac{2}{3}$; 4) $x<\frac{3}{11}$; 6) $-3\frac{1}{3}<x<40$; 8) $-2<x<8$. 823. 2) $x<\frac{2}{3}$, $x>\frac{3}{2}$; 4) $x<-\frac{2}{9}$, $x>\frac{5}{2}$; 6) $x<2\frac{4}{7}$. 824. 2) $-16<x<3$; 4) $x<4$; $x>6$; 6) $x<-3$, $x\geqslant -2{,}5$. 825. 2) $x\leqslant 5$, $x\geqslant 9$; 4) $-3<x<7$; 6) $x\in R$; 8) ечими йўқ; 10) $-1{,}4\leqslant x\leqslant 0$. 826. 2) $x>-4$. 827. 2) $-7<x<2$, $x\geqslant 5$; 4) $x<-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}<x<1$; 6) $x<-4$, $-1<x<2$, $x>3$. 828. $-5\leqslant x\leqslant -3$. 829. $m=2$. 830. $m=8$, $m=9$. 831. $x=6$. 832. $x=-1$. 833. 2) $x<2{,}8$, $x>4$; 4) $1{,}25<x<1{,}75$; 6) $x<2$;

8) $x<-2$, $1<x<2$, $x>5$; 10) $\frac{1-\sqrt{73}}{6}<x<-\frac{2}{3}$, $1<x<\frac{1+\sqrt{73}}{6}$. 834. 2) $-1<x<5$; 4) $-1,5<x\leqslant 0,9$. 835. 2) $x<1$ 836. 2) Ечими йўқ. 837. 2) $x<1$, $x>3$. 838. 2) $-\sqrt{5}\leqslant x<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<x\leqslant\sqrt{5}$. 839. 2) $1<x<2$; 4) $x>3$. 840. 2) $-3<x<-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}<x<3$. 841. 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 842. 2) $-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n<x<\arcsin\frac{1}{4}+\pi+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $\arccos\frac{1}{3}+2\pi n<x<\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. 846. 2) (2; 1); 4) (5; −3). 847. 2) (−1200; 500); 4) (7; 2). 848. 2) (−8; −2), (8; 2); 4) (3; 4), (4; 3); 6) (8; 4), (−8; −4). 849. 2) (7; 6); 4) (2; 3), $\left(-9;\ 28\frac{2}{3}\right)$. 850. 2) (3; 1), (−3; −1); 4) (3; 5), (3; −5). 851. 2; 12. 852. 2) $x>5$. 853. 1 млн. 854. 126 км. 855. 1080 км. 856. 16 кун. 857. 12 соат. 858. 91 га. 859. 8; 12. 860. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. 861. 432 та деталь. 862. 15 км/соат. 863. 25 ва 20 та чипта ёки 20 ва 15 та чипта. 864. 3 км/соат. 865. 21 ц, 20 ц. 866. 1400 кадам. 867. 3; −6; 12; −24. 868. 27. 869. 1; 3; 9; 15 ёки 16; 8; 4; 0. 870. 2 ёки $12\frac{2}{5}$. 871. 3 марта. 872. 16 $см^2$. 873. $b=-2$. 874. $k=-1$. 875. 2) $k=-1$, $b=3$; 4) $k=0$, $b=-2$. 876. $y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$, $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$. 877. 2) Йўқ; 4) ҳа. 878. 2) $3\frac{1}{3}$. 879. 2) $x<\frac{1}{3}$. 880. 2) $x>0,5$. 881. $x>1$. 882. $x<-\sqrt{3}$. 885. 2) Ҳа. 886. 2) (−1; 3), (5; 3). 887. 4) $x<-2$, $x>2$. 888. 4) $x\neq 0$. 889. 2) Ҳа; 4) ҳа. 890. 2) Тоқ; 4) жуфт. 891. 2) $\frac{10\pi}{3}$. 893. 2,25. 894. 2) (0; 2), (2; 0), (0,5; 0). 898. 2) $x<-5$, $x>3$; 4) $x\leqslant -7$, $x>6$. 899. 2) $\frac{1}{2}(5-\sqrt{41})<x<2$, $3<x<\frac{1}{2}(5+\sqrt{41})$; 4) $3<x\leqslant 3\frac{1}{3}$. 900. 2) $y\leqslant 7$; 4) $y\neq 2$. 901. 2) $-1-\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant 1-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\sqrt{1,25}\leqslant y\leqslant\sqrt{1,25}$. 902. $\frac{4}{\pi}$. 903. e^{-1}. 904. $-\frac{\pi}{4}$. 905. $y=x+1$. 906. $y=3x-3$. 907. 132; −57. 908. 9; 4. 909. (1; 1). 910. $\frac{49}{27}$. 911. 2. 912. $\frac{\pi p^3}{216}$. 913. $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H=R\frac{2}{\sqrt{3}}$. 914. $R=H$. 915. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 916. $r=\frac{2R}{3}$, $h=\frac{H}{3}$. 917. 2) $x=0$ минимум нуктаси, $x=0,4$ — максимум нуктаси. 918. (1; 0), (−1; 4). 919. $y=7x-43$. 921. 2) $3\frac{2}{3}$; 4) 4,5; 6) 18. 922. 2) 4,5; 4) $\frac{5}{12}$. 923. 2) $\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi}-2$; 4) $\frac{8}{3\ln 3}$. 924. 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $x\geqslant 2$; 3) 100; 4) $y=\frac{x^4-7}{12}$; $\frac{3}{4}$; 5) 0,25. 925. 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $-4<x<0$; 3) 160; 4) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$; $3\frac{1}{3}$. 5) 1,5. 926. 1) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $x<3$; 4) 31,5; 5) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. 927. 1) $x=\pi+2\pi n$,

$x=\frac{\pi}{9}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $0{,}5<x<2$; 4) $16\frac{2}{3}$; 5) $9a$. 928. 1) 30 км/соат; 2) $\frac{1}{2\cos\alpha}$; 3) $x=1{,}5$; 4) 4; 5) $0<x\leqslant 2$. 929. 1 км/соат; 2) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $x=0$; 4) 12; 5) $0<x\leqslant$ $\leqslant 1$. 930. 1) $\sqrt{3}$; 2) $x=3$; 3) $x>0{,}5$; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 1. 931. 1) 1; 2) $x=-1$; 3) $1<x<5$; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) 12,5. 932. 1) $x=2\pi n$, $n\in Z$; 2) $2<x<4$; 3) ўнгдаги; 4) $x_{1,2}=\pm 8$; 5) $4\sqrt{2}$ см, 8 см. 933. 1) $x=-1{,}5$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. 4) $10-8\ln 2\approx 4{,}48$; 5) $21\frac{1}{3}$. 934. 1) $-5\leqslant x\leqslant 3$; 2) $x\geqslant 3$; 3) $x_1=0$, $x_2=-$ -19. К ў р с а т м а: $y=\sqrt[3]{8-x}$ белгилаш киритинг; $z=\sqrt[3]{27+x}$, бундан y^3+ $+z^3=35$ (1). Дастлабки тенгламани бундай ёзинг: $y^2-yz+z^2=7$ (2). (1) тенгламани (2) га бўлиб, $y+z=5$ (3) га эга бўламиз. (2) ва (3) тенгламалар системасини ечиб, y нинг қийматини топинг ва кейин киритилган белгилашлардан фойдаланинг; 4) $x_1=73$, $x_2=-8$. 935. 1) $x=3$; 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=3$; 3) $x_1=-1$, $x_2=3$; 4) $x_1=-$ -1, $x_2=4$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. 936. 1) $x=\pi+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{4}+$ $+\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) илдизи йўқ. 937. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. 938. $x_3=3$. 939. 1) Агар $a>0$ ва $a\neq 1$ бўлса, $(a,\ a^2)$, $(a^2;\ a)$; агар $a<-1$ ва $a\neq -2$ бўлса, $(-a-1;\ (a+1)^2)$, $((a+1)^2;\ -a-$ $-1)$. 940. 1) $(1;\ 1)$, $\left(\frac{9}{4};\ \frac{27}{8}\right)$; 2) $(1;\ 1)$, $(2;\ 4)$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{7\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{1}{6}+n;\ \frac{1}{6}+n\right)$, $n\in Z$; 5) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\right.$ $\left.-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$; 6) $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi n;\ (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k+\pi n\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k\right)$, $n\in Z$, $k\in Z$. 941. $x<-4$, $-3<x<-2$, $-1<x<1$, $x>2$. 942. 1) $x\geqslant 2{,}5$; 2) $\frac{2}{3}<x<6$; 3) $-2<x<1$; 4) $-3\leqslant x<1$; 5) $2<x\leqslant 3$. 947. 1) $x=1$; 2) $x=0{,}5$; 3) $x=\frac{1}{7}$; 4) $x=\frac{8}{3}$. 948. 1) $x=0{,}5$; 2) $x=2$; 3) $x_1=2$, $x_2=32$; 4) $x=1{,}5$; 5) $x_1=$ $=\sqrt[4]{2}$, $x_2=2$; 6) $x=4$. 949. 1) $x=4$; 2) $x=3$; 3) $x=8$; 4) $x=-9$. 950. 1) $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=$ $\frac{2\pi n}{9}$, $n\in Z$; 2) 0, $\frac{\pi}{2}$, π; 3) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=$ $2\pi n$, $n\in Z$; 5) $x=\frac{\pi}{4}n$, $n\in Z$; 6) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. 951. 1) $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $x=$ $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; 3) $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 4) $x=\frac{5\pi}{12}+$ $2\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+(2n+1)\pi$, $n\in Z$. 952. 1) $x=\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{2}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 2) $x=\frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$. 953. $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi$, $n\in Z$. 954. $x=\pi n$,

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **955.** $x=\frac{\pi}{3}$. **956.** 1) $(1;\ 2)$, $\left(-4;\ \frac{1}{3}\right)$; 2) $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(2;\ -1)$, $(-2;\ 1)$; 3) $(1;\ 2)$, $(-1;\ 6)$ $(\sqrt{2};\ 4-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 4+\sqrt{2})$; 4) $(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ 5;\ 0)$, $(3;\ 2;\ -1)$, $(3;\ 5;\ -2)$. **957.** 1) $(1;\ \log_3 2)$; 2) $(3;\ -9)$; 3) $(-17;\ \log_2 10)$; 4) $(1;\ 2)$, $(-1;\ 0)$. **958.** 1) $(2;\ 10)$, $(10;\ 2)$; 2) $(0;\ 1)$, $(2;\ -1)$; 3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **959.** 1) $-1<x<0$, $2<x<4$; 2) $-2\leqslant x<-1$, $x>-1$; 3) $-8<x<8$; 4) $1<x<5$. **960.** 1) $x<-\frac{1}{2}$, >2; 2) $x>3$; 3) $-1\leqslant x<0$; 4) $-2<x<3$. **961.** 1) $x\leqslant 2$; 2) $\frac{1}{9}<x\leqslant\frac{1}{3}$, $x>1$; 3) $-\frac{1}{4}<x<0$, $0<x<\frac{1}{6}$; 4) $-311<x<-11$, $1<x<1{,}5$. **962.** 18 ва -2. **963.** 4. **964.** $4\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$ ва $-4\pi\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$. **965.** $\frac{7}{23}$. **966.** $\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi};\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **967.** $y=x+1$, $y=\frac{9}{\sqrt[3]{25}}x-\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$. **968.** $\left(\frac{1}{3};\ \frac{4}{9}\right)$. **969.** $(-2;\ 22)$, $(2;\ 10)$. **970.** $k=2$. **971.** $p=-2$, $q=0$, $d=1$. **972.** 2,25. **973.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. **974.** $a=-3{,}5$. **975.** $a=1-\sqrt{2}$, $a=5+\sqrt{10}$. **976.** $a<-4$, $-\frac{5}{4}<a<0$. **977.** $2\sqrt{5}$. **978.** $b_1=3$, $q=4$ ёки $b_1=48$, $q=\frac{1}{4}$.

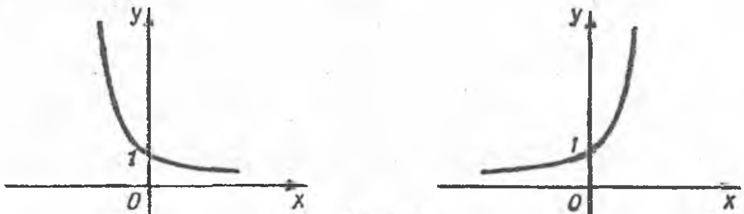
Ўзингизни текшириб кўринг!

I боб.

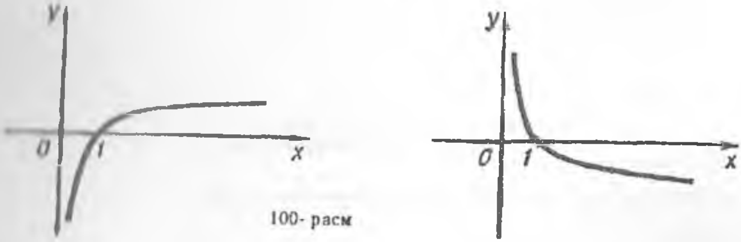
1) 99- расмга каранг.
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}>\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; $5^{-0,2}>5^{-1,2}$.
3) $x=2$; $x_1=1$, $x_2=-5$; $x=1$; $x_1=0$, $x_2=-2$.
4) $x>4$; $-2\leqslant x\leqslant 2$.

II боб.

1) 3; -2; 13; 49; 2.
2) 100- расмга каранг.
3) $\log_{0,2}3<\log_{0,2}25$; $\log_2 0{,}7<\log_2 1{,}2$.
4) $x=8$; $x=1$; $x_1=0$, $x_2=9$.



99- расм



100- расм

5) $\left(6;\ \frac{1}{2}\right)$; 6) $1<x\leqslant 10$; $-3<x<2$.

III боб.

1) 1; $\sqrt{3}$; π.

2) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

3) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5}{6}\pi+2\pi n,\ n\in Z$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi n,\ n\in Z$.

IV боб.

1) $x\neq\frac{\pi}{8}(1+2n),\ n\in Z$; йўқ.

2) $x=\frac{\pi}{2}$ да $\sin x=1$; $x=0, 2\pi$ да $\cos x=1$; $x=-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi$ да $\sin x=-1$; $x=-\pi$,
π да $\cos x=-1$; $x=0,\ \pi,\ 2\pi$ да $\sin x=0$; $x=-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ да $\cos x=0$; $0<x<\pi$
да $\sin x>0$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ да $\cos x>0$; $-\pi<x<0$, $\pi<x<2\pi$ да
$\sin x<0$; $-\pi<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ да $\cos x<0$; ўсади: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$
$\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ да $\sin x$; $-\pi<x<0$, $\pi<x<2\pi$ да $\cos x$; камаяди: $-\pi<x<$
$<-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ да $\sin x$; $0<x<\pi$ да $\cos x$.

3) $x=-\pi,\ 0$ да $\mathrm{tg}\,x=0$; $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ да $\mathrm{tg}\,x>0$; $-\frac{3}{2}\pi<x<$
$-\pi$, $-\frac{\pi}{2}<x<0$ да $\mathrm{tg}\,x=0$.

4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

V боб.

1) 85;

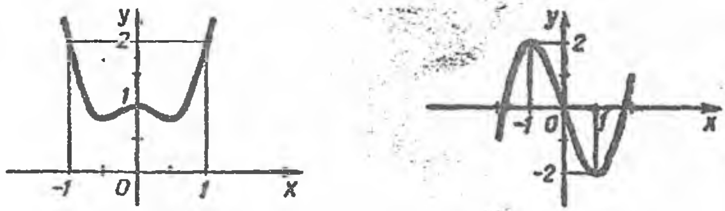
2) $-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}-e^x$; $12(3x-5)^3$; $6\cos 2x\cos x-3\sin 2x\sin x$; [illegible]

3) $k = -3$.

4) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

VI боб.

1) $-1 < x < 1$ да ўсади, $x < -1$, $x > 1$ да камаяди.
2) $(-3; -2)$ максимум нуқтаси; $(3; 2)$ минимум нуқтаси.
3) 101- расмга қаранг.
4) $y(5) = 5\frac{4}{5}$ энг катта қиймат, $y(2) = 4$ энг кичик қиймат
5) 2 м.



101- расм

VII боб.

2) $F(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$.
3) $11\frac{1}{4}$; $\frac{1}{\text{[illegible]}}$; 1; -1.
4) а) $20\frac{5}{6}$ кв. бирлик; б) 36 кв. бирлик.

СУҲБАТ
«ФАН-ТЕХНИКА ТАРАҚҚИЁТИ ВА МАТЕМАТИКА»

Давримизнинг ўзига хос хусусиятларидан бири математик усуллар ва электрон ҳисоблаш машиналарининг инсон фаолиятининг турли соҳаларида кенг қўлланилишидан иборат. «ЭҲМ» диагноз қўяди», «Конструктор муаллифдоши» — бу каби сарлавҳалар ҳозирги кунда газета саҳифаларида тез-тез учраб туради. Фан, техника, халқ хўжалигини математикалаштиришнинг гуркираш жараёни эллигинчи йилларда ЭҲМ пайдо бўлиб, жадал такомиллаштирилгандан сўнг бошланди. У математик усуллар ва ҳисоблаш техникасидан фойдаланиш билан боғлиқ қатор масалаларни ўз ичига олган замонавий амалий математиканинг шаклланишига олиб келди.

Математика энг қадимий фанлардан биридир. У кишилик жамиятининг илк даврларида амалий эҳтиёжлар натижасида пайдо бўлди. Қурилиш, ер майдонининг юзини ўлчаш, навигация, савдо ҳисоб-китоблари, давлатни бошқариш ишлари арифметик ҳисоблашларни бажариш кўникмаларини ва маълум геометрик билимларни талаб этди. Кейинчалик математика илмий билимлар умумий комплексининг таркибий қисми сифатида қатъий мантиқий система асосида ривожланди. Табиатшунослик, техника, одамларнинг ҳамма амалий фаолиятлари эҳтиёжлари доимо математика олдига янгидан-янги масалалар қўйди ва унинг ривожланишига туртки бўлди. Ўз навбатида математикадаги жараёнлар математик усулларни анча самарали қилди, унинг қўлланилиш соҳасини кенгайтирди ва шу билан умумий фан-техника ривожланишига имкон берди.

Математиканинг инсон фаолиятининг турли соҳаларида ва турли даврлардаги аҳамияти турлича бўлган. У тарихан вужудга келган ва унга иккита омил жиддий таъсир кўрсатган: математик аппаратнинг ривожланиш даражаси ва ўрганилаётган объект ҳақидаги билимларнинг етилиш даражаси, унинг жуда муҳим томонларини ва хоссаларини математик тушунчалар ва тенгламалар тилида ифодалаш имконияти ёки ҳозирги математика тили билан айтганда ўрганилаётган объектнинг «математик модели»ни яратиш имконияти.

Баъзи соддалаштиришлар ва идеаллаштиришга асосланган математик модель объектнинг айнан ўзи эмас, балки тақрибий аксидир. Бироқ реал объектни унга мос келувчи модель билан алмаштириш натижасида бу объектни ўрганишни математик масала сифатида ифодалаш ва таҳлил учун объектнинг конкрет табиатига боғлиқ бўлмаган универсал математик аппаратдан фойдаланиш имконияти пайдо бўлади. Математика далиллар ва кузатишлар кўламини ягона тарзда ифодалаш, уларни аниқ миқдорий таҳлил қилиш, объект турли шароитда ўзини қандай тута олишини олдиндан айтиш, яъни ўтказиладиган кузатиш натижаларини олдиндан айтиш (прогноз қилиш) имконини беради. Ахир олдиндан айтиш қийин масала ва ўзини оқловчи олдиндан айтишлар исталган фаннинг ўзига хос фахрланиш предметидир.

Математик моделни қуриш ва текширишнинг мураккаблиги ўрганилаётган объектнинг мураккаблигига боғлиқ. Математик моделлар механика, физика ва астрономияга, яъни материя ҳаракатининг нисбатан анча содда шаклини ўрганувчи фанларга илгаритдан ва муваффақият билан қўлланилиб келинди. Математика аниқ фанлар туркумига кирувчи бу фанларнинг тили бўлиб қолди. Математика шунингдек техникада ҳам муҳим роль ўйнади. Шу билан яқин вақтларгача математик моделларнинг кенг қўлланилиш соҳаси адоғига етган эди. ЭҲМ нинг пайдо бўлиши билан вазият тубдан ўзгарди. Бунга сабаб қуйидагилардан иборат. Математикада ечимларини изланаётган катталикларни берилган маълумотлар билан боғловчи формулалар кўринишида ифодалаш мумкин бўлмайдиган масалалар тез-тез учраб туради. Бундай масалалар ошкор кўринишда ечилмайдиган масалалар деб айтилади. Уларни ечиш учун изланаётган жавобга яқинлашувчи бирор чексиз жараённи топишга ҳаракат қилинади. Агар бундай жараён кўрсатилган бўлса, у ҳолда уларни маълум қадамгача бажариб, кейин ҳисоблашларни тўхтатиш билан (уларни чексиз давом эттириш мумкин эмас) биз масаланинг тақрибий ечимини ҳосил қиламиз. Бу иш ҳисоблашларни қатъий белгиланган қоидалар системасини бажариш билан боғлиқ бўлиб, бу системаси жараённинг характери билан берилади ва алгоритм деб аталади.

Математик масалаларни ечишга бундай ёндашиш ЭҲМ нинг пайдо бўлишига қадар ҳам маълум эди, лекин катта ҳисоблашларнинг ҳаддан зиёд узундан-узоқлиги туфайли жуда камдан-кам қўлланилар эди. Лаверье стол устида «перо учи билан» янги сайёра (Нептун)нинг траекториясини Уран сайёрасининг бошқа сайёралар таъсири остида ўз орбитасидан четга чиқиши бўйича ҳисоблаб «очганда» бир умр фан тарихида қоладиган илмий қаҳрамонлик кўрсатган эди. Лекин кўпгина ҳолларда тадқиқотчилар катта ҳисоблашлардан қочишга интиладилар. Шунинг учун жавобини формула кўринишида ҳосил қилиш мумкин бўлмаган мураккаб математик моделлар ёки умуман қаралмас, ёки қўшимча формулалар ёрдамида соддалаштирилар эди. Моделларнинг соддалаштирилиши унинг ўрганилаётган объектга мос келишлик даражасини пасайтирар, объектни текшириш натижаларининг аниқлигини камайтирар, ва демак, қизиқарлилигини камайтирар, баъзида эса хатоликларга ҳам олиб келар эди.

Тажрибали ҳисобчи бир арифметик амални бажариш учун иш сменасида ўртача ярим минут вақт сарфлайди. Замонавий ЭҲМ бир секундда миллион операцияни бажаради. Шундай қилиб, қисқа вақт ичида, чамаси 30 йилда, ЭҲМ туфайли ҳисоблашларни бажариш тезлиги тахминан 100 миллион марта ортди. Бундай сакраш бутун инсоният тарихида инсон фаолиятининг хеч бир соҳасида бўлмаган.

Сонли усулларнинг ЭҲМ базасида қўлланилиши мукаммал таҳлил қилишга йўл қўювчи математик масалалар синфини бирданига жиддий равишда кенгайтирди. Энди тадқиқотчига бирор объектнинг математик моделини қуришда жавобни ошкор ҳолда ҳосил қилиш мақсадида илгари зарур бўлган соддалаштиришга интилиш шарт эмас. Унинг диққати биринчи навбатда ўрганилаётган объектнинг ўзига хос энг муҳим хусусиятларини тўғри ҳисобга олиш ва уларни математик моделларда акс эттиришга қаратилган бўлиши керак. Модель қурилгандан сўнг мос математик масалаларни ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш ва уни ЭҲМ да амалга ошириш вазифаси қўйилади. Шундай қилиб, ЭҲМ математиканинг изланишлар усули сифатида қўлланилишига ёндашишни ўзгартирди. Улар математикада вужудга келган кўпгина йўналишларни аниқлаш ва қатор янги йўналишларни ривожлантиришга сабаб бўлди.

Ҳозирги кунда ЭҲМ фан-техника тараққиётини белгиловчи омиллардан биридир. Уларнинг қўлланилиши халқ хўжалигининг етакчи йўналишларини ривожлантиришни тезлаштиришга имкон беради, мураккаб системаларни лойиҳалаштириш, уларни яратиш ва ишлаб чиқаришга жорий этиш муддатларини қисқартиришда янгидан-янги имкониятлар очади, ишлаб чиқариш — технологик жараёнларнинг оптимал режимларини танлашни таъминлайди, бошқаришни такомиллаштириш ва меҳнат унумдорлигини ошириш учун шароит яратади. Агар одатда машиналар ишлаб чиқариш жараёнида инсоннинг жисмоний функцияларини ўз зиммасига олса, уни кучайтирса, ЭҲМ инсонларга ақлий фаолиятда ёрдам беради, уни ақлли қилади. Улар фанни жамиятимизнинг бевосита ишлаб чиқарувчи кучига айлантирувчи муҳим омиллардан биридир. ЭҲМсиз биз замонамизнинг кўпгина йирик илмий техник лойиҳаларини (космик тадқиқотлар, атом энергетикаси, товушдан тез авиация ва ш. к.) ривожлантира олмаган бўлар эдик.

ЭҲМ туфайли нафақат табиий ва техника фанларини, балки ижтимоий фанларни ҳам математикалаштиришнинг интенсив жараёни бормоқда. Математик моделларни иқтисодиётда қўлланиш муҳим аҳамият касб этди. Математик моделлаштириш химия, геология, биология, медицина (тиббиёт), психология, лингвистикада кенг қўлланила бошланди. ЭҲМ дан самарали фойдаланиш билан очиладиган улкан имкониятларни амалга оширишга лаёқатли бўлган юқори малакали кадрларни тайёрлашга катта эътибор берилмоқда. Кўпгина университетлар ва институтларда амалий ва ҳисоблаш математикаси кафедралари ташкил этилган.

Академик А. Н. Тихонов,
профессор Д. П. Қостомаров

Предмет кўрсаткичи

МУНДАРИЖА

VII б о б. Интеграл

ББК 22.14я721+22.161я721

№ 191—93
Навоий номли Ўзбекистон Республикаси
Давлат кутубхонаси.
Тираж 12 000
Карт. тиражи 24 000

Таржима М., «Просвещение» нашриётининг
1992 йилги нашрига мос келади

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Муқова нашриёт дизайн бўлимида *Л. Дабижа*
раҳбарлигида яратилган. *А. Зуев* фотосуратини олган

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Таржимонлар: *Н. Ғоипов, Б. Тўйчиев*
Муҳаррирлар: *У. Қусанов, Н. Ғоипов*
Расмлар муҳаррири *Н. Сучкова, М. Кудряшова*
Техн. муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳа *М. Маҳмудхўжаева*

ИБ № 6875

Диапозитивдан босишга рухсат этилди 03.04.95. Бичими 60x90 1/16. Тип. қоғози. Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Офсет босма усулида босилди. Шартли б. л. 16,0. Шартли кр.-отт. 16,5. Нашр. л. 12,10. 370000 нусхада босилди. Буюртма 2380.

"Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент – 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-62-95

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг 1-босмахонасида босилди. 700002, Тошкент, Сағбон кўчаси, 1-берк кўча, 2-уй.