

517.4
В-35



А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор

**ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ**



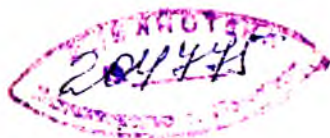
Московский государственный заочный
педагогический институт

А. Л. ВЕРНЕР, Б. Е. КАНТОР

ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие для студентов-заочников
IV—V курсов физико-математических факультетов
педагогических институтов

*Рекомендовано Главным управлением высших
и средних педагогических учебных заведений
Министерства просвещения РСФСР*



Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор *Б. А. Розенфельд*;
кандидат физико-математических наук,
доцент *Э. Б. Винберг*

Редактор МГЗПИ *Е. В. Смольникова*

Алексей Леонидович Вернер, Борис Евсеевич Кантор

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Л. В. Туркестанская*
Художественный редактор *В. А. Апкарская*
Технический редактор *Р. С. Невретдинова*
Корректор *Г. М. Махова*

п/к

Сдано в набор 19.11.84. Подписано к печати 08.04.85. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. типограф. № 1. Гарнит. лит. Печать высокая. Усл. печ. л. 7. Усл. кр. отт. 7,19. Уч.-изд. л. 7,12. Тираж 25000 экз. Заказ 957. Цена 25 коп. Заказное

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглаволиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Вернер А. Л., Кантор Б. Е.

В35 Элементы топологии и дифференциальной геометрии: Учеб. пособие для студентов-заочников IV—V курсов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. — М.: Просвещение, 1985. — 112 с., ил. — В надзаг.: Моск. гос. заоч. пед. ин-т.

Материал учебного пособия охватывает завершающий раздел курса «Геометрия» педагогических институтов. В книге рассмотрены основные понятия топологии и теория кривых и поверхностей в евклидовом пространстве, приведено достаточное количество примеров.

В $\frac{4309000000-435}{103(03) - 85}$ заказное

ББК 22.151
517.4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие предназначено для студентов заочных отделений физико-математических факультетов педагогических институтов. Оно написано в соответствии с действующей программой по геометрии и содержит материал по разделу «Элементы топологии и дифференциальной геометрии». Если предыдущие разделы курса геометрии в большей степени были связаны с курсом алгебры, то этот раздел — с курсом математического анализа. Пособие состоит из шести глав, разбитых на параграфы. Нумерация пунктов, теорем, формул внутри каждого параграфа сквозная.

В первых двух главах пособия в наиболее общем виде говорится о свойствах, связанных с непрерывностью пространства и фигур в нем. В остальных четырех главах к исследованию геометрических объектов — кривых и поверхностей — применяются методы дифференциального и интегрального исчисления.

В пособии дается достаточно краткое изложение указанной темы, более подробное изложение студент-заочник может найти в книгах [6], [7], [8], а также в [2] и [3].

Топологическое пространство

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

1. Топологическая структура. Открытые множества. Пусть задано некоторое множество X . Его элементы мы будем называть точками. Выделим семейство Φ некоторых подмножеств G_α множества X . Будем говорить, что семейство $\Phi = \{G_\alpha\}$ является *топологической структурой* в X , если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Объединение любой системы множеств из Φ принадлежит Φ .
2. Пересечение любых двух множеств из Φ принадлежит Φ .
3. Пустое множество \emptyset принадлежит Φ .
4. Само множество X принадлежит Φ .

Часто топологическую структуру Φ называют *топологией* в X . Множество X , в котором задана некоторая топология $\Phi = \{G_\alpha\}$, называется *топологическим пространством*, а множества G_α из семейства Φ называются *открытыми* в этом пространстве.

Таким образом, топологическое пространство есть пара: множество X и введенная в нем топология Φ . Поэтому топологическое пространство естественно обозначать (X, Φ) . В тех случаях, когда ясно, о какой топологии Φ идет речь, топологическое пространство будем обозначать просто X . Требования 1—4 называются аксиомами топологического пространства.

2. Примеры топологических пространств. В любом ли множестве можно ввести топологическую структуру, т. е. любое ли множество можно рассматривать как топологическое пространство? Первые два совсем простых примера дают утвердительный ответ на этот вопрос.

Пример 1. Пусть X — произвольное множество. Из аксиом 3 и 4 топологического пространства вытекает, что среди открытых множеств любой топологической структуры в X обязательно должны быть пустое множество \emptyset и само X . Очевидно, что для семейства $\Phi_0 = \{\emptyset, X\}$, которое состоит лишь из этих двух множеств, выполняются также и аксиомы 1 и 2. Поэтому Φ_0 является простейшей топологической структурой в X . Эта топология называется *тривиальной*.

Пример 2. Пусть X — произвольное множество. Сейчас мы рассмотрим другой крайний случай, когда уже любое подмножество множества X считается открытым множеством. Очевидно, что и в этом случае все аксиомы топологического пространства выполняются (например, пересечение двух подмножеств из X является подмножеством из X и т. д.). Такая топология $\Phi_\alpha = \{H, H \subset X\}$, состоящая из всех подмножеств H множества X , называется *дискретной* тополо-

гней. Отметим, что в дискретной топологии множество, состоящее из одной точки, является открытым.

Эти простейшие примеры показывают, что, вводя в одном и том же множестве различные топологии, приходим к различным топологическим пространствам. Ниже приведем еще два примера.

Будем дальше обозначать через R^n множество всевозможных упорядоченных наборов (ξ_1, \dots, ξ_n) , состоящих из n вещественных чисел ξ_j . Через $U(x_0, r)$ обозначим множество точек $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$(\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \dots + (\xi_n - \xi_n^0)^2 < r^2, \quad (1)$$

где $r = \text{const} > 0$, а $x_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ — некоторая фиксированная точка из R^n (рис. 1). (Если в R^n введена обычная евклидова метрика, то $U(x_0, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x_0 .)

Пример 3. Пусть $X = R^n$. Открытыми множествами в R^n назовем такие множества, в которых каждая их точка является центром некоторого шара, содержащегося в этом множестве, а также пустое множество. Итак, считаем, что множество G открыто в R^n , если для каждой точки $x \in G$ существует такое $r > 0$, что шар $U(x, r) \subset G$. Топология в R^n , состоящая из таких открытых множеств, используется в геометрии и математическом анализе и называется *естественной*. Обозначим ее через $\Phi_e(R^n)$. Топологическое пространство $(R^n, \Phi_e(R^n))$ будем обозначать через E^n . Выполнимость в E^n аксиом 1, 3 и 4 топологического пространства вытекает из определения топологии $\Phi_e(R^n)$. Проверим справедливость аксиомы 2.

Пусть множества G_1 и G_2 открыты в E^n , а $G = G_1 \cap G_2$. Если точка $x \in G$, то $x \in G_1$ и $x \in G_2$, поэтому существуют такие числа $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $U(x, r_1) \subset G_1$ и $U(x, r_2) \subset G_2$ (рис. 2). Если $r = \min(r_1, r_2)$, то $U(x, r) \subset G$, т. е. множество G открыто.

Пример 4. Пусть $X = R^n$. Открытыми в X множествами назовем теперь только шары $U(r)$ с центром в точке $(0, 0, \dots, 0)$, а также все множество X и пустое множество. Очевидно, аксиомы 3 и 4 выполняются. Если $\{U(r_\alpha)\}$ — любая система открытых множеств, то их объединением будет множество $U(r)$, где $r = \sup_\alpha r_\alpha$ (если $\sup_\alpha r_\alpha = +\infty$, то $U(r) = X$). Итак, аксиома 1 выполняется. Пе-

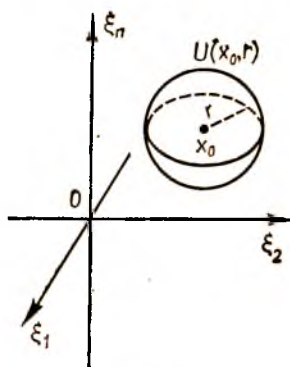


Рис. 1

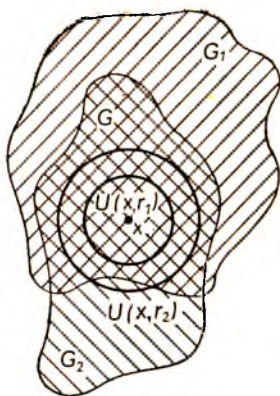


Рис. 2

ресечением двух множеств $U(r_1)$ и $U(r_2)$ будет множество $U(r)$, где $r = \min(r_1, r_2)$, т. е. выполняется аксиома 2. Итак, выделенное семейство $\Phi(0)$ является топологией в X , а $(X, \Phi(0))$ — топологическим пространством. Эту топологию $\Phi(0)$ в \mathbb{R}^n назовем концентрической.

3. Метрика. Топология, индуцируемая метрикой. В этом пункте мы рассмотрим очень важный класс топологических пространств, а именно метрические пространства. Напомним определение метрического пространства. Говорят, что в множестве X задана метрика ρ , если каждой паре элементов x, y из X ставится в соответствие вещественное число $\rho(x, y)$, причем выполняются следующие условия (аксиомы метрики):

1. $\rho(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$, причем равенство $\rho(x, y) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$.
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любых x, y, z .

Множество X с заданной в нем метрикой ρ называется метрическим пространством (X, ρ) . В тех случаях, когда ясно, о какой метрике идет речь, метрическое пространство (X, ρ) обозначают просто X . Число $\rho(x, y)$ называют расстоянием между точками x и y пространства (X, ρ) .

Покажем, что задание метрики ρ в множестве X позволяет определить топологию в пространстве (X, ρ) . Назовем шаром $U(x, r)$ с центром в точке x и радиусом $r > 0$ в метрическом пространстве (X, ρ) множество всех точек $y \in X$, таких, что $\rho(x, y) < r$. Открытым множеством в (X, ρ) назовем такое множество G , для любой точки которого существует некоторый шар положительного радиуса с центром в этой точке, содержащийся в множестве G . То, что эти множества порождают в (X, ρ) топологию, проверяется дословно так же, как это сделано в примере 3, п. 2. Топология в метрическом пространстве (X, ρ) , определенная в этом пункте, называется топологией, индуцированной в (X, ρ) метрикой ρ .

§ 2. ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Напомним, что если X — произвольное множество и H — его подмножество, то множество $X \setminus H$ называется дополнением H до X и обозначается через $C_X H$. Очевидно, выполняются равенства

$$H \cap C_X H = \emptyset, \quad H \cup C_X H = X \quad (1)$$

$$C_X(C_X H) = H. \quad (2)$$

Кроме того, легко проверить формулы двойственности

$$\bigcup_{\alpha} C_X H_{\alpha} = C_X \left(\bigcap_{\alpha} H_{\alpha} \right) \quad (3)$$

$$\bigcap_{\alpha} C_X H_{\alpha} = C_X \left(\bigcup_{\alpha} H_{\alpha} \right). \quad (4)$$

Множество F называется *замкнутым* в топологическом пространстве (X, Φ) , если оно является дополнением к открытому множеству, или, что то же самое, его дополнением до X является открытое множество.

Из аксиом топологического пространства и формул (3) и (4) непосредственно вытекают следующие свойства замкнутых множеств:

1. Пересечение любой системы замкнутых множеств есть замкнутое множество.

2. Объединение любых двух замкнутых множеств есть замкнутое множество.

3. Все пространство замкнуто.

4. Пустое множество замкнуто.

Доказательству подлежат лишь свойства 1 и 2. Докажем свойство 1.

Возьмем любую систему $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств F_α . Тогда система $\{G_\alpha = C_X F_\alpha\}$ состоит из открытых множеств. Из равенства (4) вытекает, что множество

$$F = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} C_X G_{\alpha} = C_X \left(\bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \right)$$

будет дополнением к множеству $\bigcup_{\alpha} G_{\alpha}$, которое открыто по аксиоме 1.

Следовательно, F замкнуто. Свойство 1 доказано.

Свойство 2 доказывается аналогично.

Утверждение аксиомы 2, а также соответствующее ему свойство 2 замкнутых множеств методом математической индукции легко распространить с двух на любое конечное число множеств. А именно имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств есть множество открытое. Объединение любого конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

З а м е ч а н и е. Очевидно, пересечение бесконечного семейства открытых множеств не всегда является открытым. Например, в пространстве \mathbf{R} пересечением счетного множества открытых интервалов $\left(-\frac{1}{n} - 1, 1 + \frac{1}{n} \right)$ будет отрезок $[-1, 1]$, который открытым множеством не является. Предлагаем читателю привести пример, когда объединение бесконечного семейства замкнутых множеств не будет множеством замкнутым.

§ 3. ВНУТРЕННИЕ, ВНЕШНИЕ, ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ

Пусть (X, Φ) — топологическое пространство и точка $a \in X$. Любое открытое множество, содержащее точку a , называется *окрестностью этой точки*.

Возьмем в X некоторое множество H . Точка a называется *внутренней точкой множества H* , если существует такая окрестность U точки a , что $U \subset H$ (рис. 3). Множество всех внутренних точек множества H обозначается через $\text{int } H$.

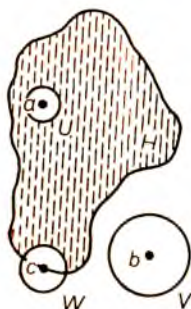


Рис. 3

Точка b называется *внешней точкой множества* H , если существует такая окрестность V точки b , в которой нет точек множества H , т. е. $V \subset C_X H$. Множество всех внешних точек множества H обозначается через $\text{ext } H$.

Точка c называется *границей множества* H , если в любой окрестности точки c имеются как точки множества H , так и точки, не принадлежащие H . Множество всех граничных точек множества H обозначается через ∂H и называется *границей* H .

Из определений внутренних, внешних и граничных точек следует, что относительно каждого множества H все пространство X распадается на три множества $\text{int } H$, $\text{ext } H$ и ∂H , попарно не имеющие общих точек, т. е. имеют место соотношения

$$\text{int } H \cup \text{ext } H \cup \partial H = X \quad (1)$$

и

$$\text{int } H \cap \text{ext } H = \text{ext } H \cap \partial H = \text{int } H \cap \partial H = \emptyset. \quad (2)$$

Кроме того, из этих определений непосредственно вытекают следующие утверждения:

1. *Внутренняя точка множества является внешней точкой его дополнения, и, наоборот, внешняя точка множества является внутренней точкой его дополнения. Поэтому справедливы соотношения*

$$\text{int } H = \text{ext } C_X H \text{ и } \text{ext } H = \text{int } C_X H. \quad (3)$$

2. *Каждая граничная точка множества является граничной точкой его дополнения, и наоборот, т. е. множество и его дополнение имеют одну и ту же границу:*

$$\partial H = \partial C_X H. \quad (4)$$

3. *Внутренними точками множества могут быть лишь точки этого множества, т. е.*

$$\text{int } H \subset H, \quad (5)$$

а внешними точками множества могут быть лишь точки, не принадлежащие этому множеству, т. е.

$$\text{ext } H \subset C_X H. \quad (6)$$

Легко привести примеры, которые показывают, что граничные точки некоторого множества могут как принадлежать этому множеству, так и не принадлежать ему (например, у круга на евклидовой плоскости точки его граничной окружности принадлежат кругу, а у открытого круга ее точки не принадлежат ему).

Если в одном и том же множестве X вводить разные топологии, то у каждого его подмножества H множества $\text{int } H$, $\text{ext } H$ и ∂H могут

сильно изменяться. Например, для тривиальной топологии (X, Φ_0) в случае, когда $H \neq X$ и $H \neq \emptyset$, множество X не имеет ни внутренних, ни внешних точек, и поэтому все его точки граничные, т. е. $\text{int } H = \emptyset$, $\text{ext } H = \emptyset$ и $\partial H = H$.

Если же в X ввести дискретную топологию, то любая точка множества H внутренняя, так как она сама является своей окрестностью, т. е. $H = \text{int } H$, $\text{ext } H = C_X H$ и $\partial H = \emptyset$.

На рисунке 4 показано, какими могут быть множества $\text{int } H$, $\text{ext } H$ и ∂H для различных случаев расположения квадрата H на плоскости R^2 , если в R^2 введена концентрическая топология (пример 4, п. 2, § 1).

Теорема 1. Для любого множества H множество его внутренних точек $\text{int } H$ открыто.

Доказательство. Для каждой точки $a \in \text{int } H$ выберем такую ее окрестность U_a , что $U_a \subset H$ (рис. 5). Поскольку открытое множество является окрестностью любой своей точки, то все точки множества U_a являются внутренними для H , т. е. $U_a \subset \text{int } H$. Так как множество

$$\text{int } H = \bigcup_{a \in \text{int } H} U_a,$$

то из аксиомы 1 п. 1 § 1 следует, что множество $\text{int } H$ открыто.

Из этой теоремы и второго из равенств (3) следуют теоремы 2 и 3.

Теорема 2. Для любого множества H множество $\text{ext } H$ открыто.

Теорема 3. Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало с множеством своих внутренних точек.

Доказательство. Необходимость. Так как открытое множество является окрестностью любой своей точки, то $H \subset \text{int } H$. Из этого включения и включения (5) получаем, что $H = \text{int } H$.

Достаточность вытекает из теоремы 1.

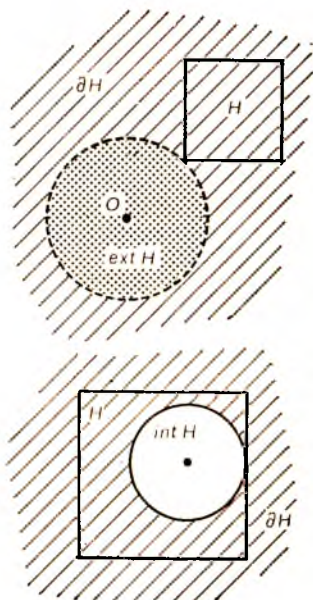


Рис. 4

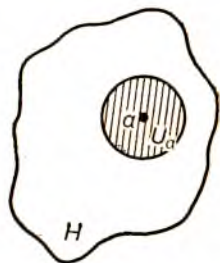


Рис. 5

§ 4. ЗАМЫКАНИЕ

Точка a называется *точкой прикосновения множества H* , если каждая окрестность точки a имеет с H хотя бы одну общую точку.

Из этого определения следует, что точками прикосновения множества являются его внутренние и граничные точки, а внешние точки множества не являются его точками прикосновения.

Множество всех точек прикосновения множества H называется *замыканием множества H* и обозначается \bar{H} . Из этого определения и сказанного о точках прикосновения следует справедливость равенств:

$$\bar{H} = \text{int } H \cup \partial H = C_X(\text{ext } H). \quad (1)$$

Так как каждая точка множества является его точкой прикосновения, то

$$H \subset \bar{H}. \quad (2)$$

Поэтому переход от множества к его замыканию состоит в том, что множество пополняется теми своими граничными точками, которые не принадлежат данному множеству, т. е.

$$\bar{H} = H \cup \partial H. \quad (3)$$

Поскольку множество \bar{H} является дополнением к открытому множеству $\text{ext } H$, то \bar{H} замкнуто. Итак, имеет место теорема.

Теорема 1. *Замыкание любого множества замкнуто.*

Теорема 2. *Для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть H замкнуто. Покажем, что $H = \bar{H}$. Поскольку $C_X H$ открыто, то по теореме 3 § 3 $C_X H = \text{int } C_X H$. Это равенство и второе из равенств (3) § 3 дает равенство $C_X H = \text{ext } H$. Но тогда $H = C_X(\text{ext } H)$, т. е., учитывая равенство (1), получаем, что $H = \bar{H}$.

Достаточность вытекает из теоремы 1.

Следствие. *Двукратное замыкание совпадает с однократным, т. е. для любого множества*

$$\overline{(\bar{H})} = \bar{H}. \quad (4)$$

Действительно, поскольку множество \bar{H} замкнуто, то $\overline{(\bar{H})} = \bar{H}$.

В предыдущем параграфе было доказано, что множества $\text{int } H$ и $\text{ext } H$ открыты. Этот результат дополняет следующая теорема.

Теорема 3. *Граница любого множества замкнута.*

Доказательство. Из равенств (1) и (2) § 3 следует, что ∂H будет дополнением к множеству $\text{int } H \cup \text{ext } H$, которое открыто как объединение открытых множеств. Поэтому ∂H замкнуто.

Операция замыкания обладает важным свойством аддитивности. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Замыкание объединения двух множеств равно объединению их замыканий, т. е. имеет место равенство*

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (5)$$

Доказательство. Равенство (5) равносильно равенству

$$C_x \overline{(A \cup B)} = C_x (\overline{A} \cup \overline{B}), \quad (6)$$

а оно в силу равенства (4), § 2 равносильно равенству

$$C_x \overline{(A \cup B)} = (C_x \overline{A}) \cap (C_x \overline{B}). \quad (7)$$

Применяя к (7) соотношение (1), получаем равенство

$$\text{ext } \overline{(A \cup B)} = \text{ext } \overline{A} \cap \text{ext } \overline{B}, \quad (8)$$

равносильное равенству (5). Поэтому достаточно доказать (8).

Пусть точка $a \in \text{ext } \overline{(A \cup B)}$. Тогда найдется такая окрестность U точки a , что $U \cap \overline{(A \cup B)} = \emptyset$. Поэтому $U \cap \overline{A} = \emptyset$ и $U \cap \overline{B} = \emptyset$, т. е. точка a будет внешней для \overline{A} и для \overline{B} . Следовательно,

$$\text{ext } \overline{(A \cup B)} \subset \text{ext } \overline{A} \cap \text{ext } \overline{B}. \quad (9)$$

Пусть точка $a \in \text{ext } \overline{A} \cap \text{ext } \overline{B}$. Тогда найдутся такие окрестности U и V точки a , что $U \cap \overline{A} = \emptyset$ и $V \cap \overline{B} = \emptyset$ (рис. 6). Множество $W = U \cap V$ будет окрестностью точки a , причем $W \cap \overline{(A \cup B)} = \emptyset$, т. е. точка $a \in \text{ext } \overline{(A \cup B)}$. Следовательно,

$$\text{ext } \overline{A} \cap \text{ext } \overline{B} \subset \text{ext } \overline{(A \cup B)}. \quad (10)$$

Из соотношений (9) и (10) вытекает соотношение (8). ■

§ 5. БАЗИС

Часто топологию в пространстве вводят, не задавая сразу все семейство открытых множеств, а определяя сначала лишь часть из этого семейства, называемого базисом, а затем из этих базисных открытых множеств с помощью операции объединения получают уже все открытые множества.

Так поступают, например, на евклидовой плоскости, где открытые множества получают из открытых кругов.

Перейдем к точным определениям.

Пусть (X, Φ) — топологическое пространство, и пусть $B = \{B_\beta\}$ — некоторое семейство открытых множеств в этом пространстве. Если любое открытое множество в (X, Φ) представимо в виде объединения некоторых множеств семейства B , то B называется *базисом* (или *базой*) топологического пространства (X, Φ) .

Теорема 1. *Для того чтобы семейство $B = \{B_\beta\}$ было базисом топологического пространства (X, Φ) , необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $a \in X$ и любой*

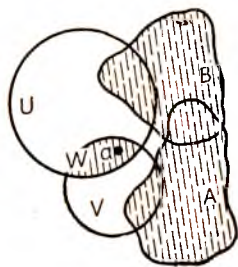


Рис. 6

окрестности U точки a существовало множество $B_{\beta_a} \in \mathcal{B}$, такое, что $a \in B_{\beta_a}$ и $B_{\beta_a} \subset U$.

Доказательство. Необходимость. Пусть a — произвольная точка и U — любая ее окрестность. Так как $U \in \Phi$, то U есть объединение некоторой системы множеств из базиса \mathcal{B} . Поскольку $a \in U$, то найдется множество B_{β_a} из этой системы, содержащее точку a . Следовательно, $a \in B_{\beta_a} \subset U$.

Достаточность. Пусть множество $G \in \Phi$. Тогда для любой точки $a \in G$ найдется такое множество $B_{\beta_a} \in \mathcal{B}$, что $a \in B_{\beta_a} \subset G$ (рис. 7). Отсюда следует, что $G = \bigcup_{a \in G} B_{\beta_a}$.

С помощью теоремы 1 легко убедиться, что в пространстве E^2 в качестве базиса можно выбрать семейство всех открытых прямоугольников с соответственно параллельными сторонами или семейство всех открытых кругов, добавляя в обоих случаях пустое множество. Аналогично из теоремы 1 вытекает, что в метрическом пространстве с топологией, индуцированной метрикой, базисом является семейство всех открытых шаров, к которому добавлено пустое множество, а в пространстве с дискретной топологией базисом является семейство, состоящее из пустого множества и всех одноточечных множеств.

Часто топологическую структуру в некотором множестве X вводят, указывая вначале семейство не всех открытых множеств, а лишь семейство тех множеств, которые станут базисом искомой топологии. Такой способ введения топологической структуры основан на следующей теореме.

Теорема 2. Пусть семейство подмножеств $\mathcal{B} = \{B_\beta\}$ множества X удовлетворяет следующим условиям: 1) $X = \bigcup_{\beta} B_\beta$; 2) $\emptyset \in \mathcal{B}$; 3) каковы бы ни были B_1 и $B_2 \in \mathcal{B}$ и точка $a \in B_1 \cap B_2$, существует такое множество $B_3 \in \mathcal{B}$, что $B_3 \ni a$ и $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Тогда в X существует топология, для которой семейство \mathcal{B} является базисом. Такая топология единственна.

Доказательство. Рассмотрим семейство Φ множеств G_α , являющихся всевозможными объединениями множеств $B_\beta \in \mathcal{B}$. Легко видеть, что аксиомы 1, 3 и 4, п. 1, § 1 непосредственно следуют из построения множеств G_α и первых двух условий теоремы. Остается показать, что выполняется аксиома 2, т. е. для любых двух G_1 и G_2 из Φ множество $G = G_1 \cap G_2$ также принадлежит Φ .

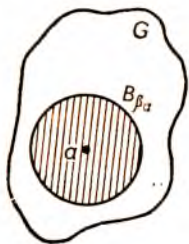


Рис. 7

Пусть a — произвольная точка множества $G_1 \cap G_2$ (рис. 8). Существуют такие множества $B'_a \in \mathcal{B}$ и $B''_a \in \mathcal{B}$, что $a \in B'_a \subset G_1$ и $a \in B''_a \subset G_2$. В силу условия 3 теоремы в \mathcal{B} существует множество B_a , такое, что $a \in B_a$ и $B_a \subset B'_a \cap B''_a \subset G_1 \cap G_2$. Множество $G_1 \cap G_2$ является объеди-

пением множеств $B_\alpha \in \mathcal{B}$, а значит, принадлежит Φ . Единственность построенной топологии очевидна.

Важным классом топологических пространств являются топологические пространства со счетным базисом. Евклидово пространство E^n будет пространством со счетным базисом. Такой базис в E^n образуют, например, все открытые шары с центрами в точках с рациональными координатами и с рациональными радиусами. Простым примером пространства, не имеющего счетного базиса, будет любое несчетное множество с дискретной топологией.

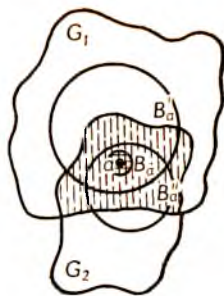


Рис. 8

§ 6. ПОДПРОСТРАНСТВО

Топологическое пространство обладает замечательным свойством: любое множество в таком пространстве само естественным образом становится топологическим пространством.

Пусть (X, Φ) — топологическое пространство, и пусть Y — подмножество X . Тогда легко проверить, что на множестве Y порождается топология $\Psi = \{G_\alpha \cap Y, G_\alpha \in \Phi\}$. Эта топология называется *индуцированной на Y топологией Φ* , а топологическое пространство (Y, Ψ) — *подпространством топологического пространства (X, Φ)* .

Из определения подпространства (Y, Ψ) следует, что если $H \subset Y$ и открыто или замкнуто в (X, Φ) , то H соответственно открыто или замкнуто в (Y, Ψ) . Обратное, вообще говоря, неверно, в чем легко убедиться хотя бы на примере, в котором (X, Φ) есть E^3 , а H — плоскость в E^3 .

Строение замкнутых множеств подпространства описывают следующие теоремы.

Теорема 1. *Множество F в подпространстве (Y, Ψ) будет замкнутым тогда и только тогда, когда оно является пересечением Y с замкнутым подмножеством из (X, Φ) .*

Доказательство. Пусть $F = Y \cap H$, где множество H замкнуто в (X, Φ) . Тогда множество $Y \setminus F = Y \cap (X \setminus H)$ будет открытым в (Y, Ψ) , так как $X \setminus H$ открыто в (X, Φ) . Следовательно, F замкнуто в (Y, Ψ) .

Обратно, пусть F замкнуто в (Y, Ψ) . Тогда множество $G = Y \setminus F$ открыто в (Y, Ψ) . Поэтому $G = Y \cap G_0$, где $G_0 \in \Phi$. Но тогда $F = Y \cap F_0$, где $F_0 = X \setminus G_0$ замкнуто в (X, Φ) .

Предоставляем читателю провести самому доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Если семейство $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ — базис в пространстве (X, Φ) , то семейство $\mathcal{B}' = \{Y \cap B_\alpha\}$ является базисом в подпространстве (Y, Ψ) .*

§ 7. СВЯЗНОСТЬ

Топологическое пространство X называется *несвязным*, если существуют такие два непустых открытых множества U и V , что $U \cup V = X$ и $U \cap V = \emptyset$, т. е. X может быть разбито на два непустых открытых множества, не имеющие общих точек.

Пространство X называется *связным*, если такого разбиения не существует.

Несвязным пространством является, например, пространство X с дискретной топологией (пример 2, п. 2, § 1), в котором более одной точки. Взяв любое непустое множество $U \neq X$ в этом пространстве и его дополнение $V = X \setminus U$, мы получим разбиение X на два непустых открытых множества.

Заметим, что если несвязное пространство X разбито на два непустых открытых множества U и V , не имеющие общих точек, то $U = CV$ и $V = CU$. Поэтому можно дать другое определение связного пространства: *пространство X называется связным, если в нем одновременно открытым и замкнутым множеством является лишь само пространство или пустое множество.*

Множество H в топологическом пространстве X называется связным, если оно является связным пространством относительно индуцированной топологии. Другими словами, множество H в топологическом пространстве X называется связным, если нельзя найти двух открытых в X множеств G_1 и G_2 , таких, что

$$\begin{aligned} H &\subset G_1 \cup G_2, \\ (H \cap G_1) \cap (H \cap G_2) &= \emptyset, \\ H \cap G_1 \neq \emptyset, \quad H \cap G_2 &\neq \emptyset. \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 1. Пусть $\{H_\alpha\}$ — совокупность связных подмножеств пространства X , имеющих общую точку. Тогда множество $H = \bigcup_{\alpha} H_\alpha$ также будет связным в X .

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют открытые в X множества U и V , такие, что

$$\begin{aligned} H &\subset U \cup V, & (2) \\ (U \cap H) \cap (V \cap H) &= \emptyset, & (3) \\ U \cap H \neq \emptyset, \quad V \cap H &\neq \emptyset. & (4) \end{aligned}$$

Очевидно, что при любом α

$$H_\alpha = (H_\alpha \cap U) \cup (H_\alpha \cap V). \tag{5}$$

Множества $H_\alpha \cap U$ и $H_\alpha \cap V$ открыты в H_α , и их пересечение пусто поскольку

$$(H_\alpha \cap U) \cap (H_\alpha \cap V) \subset (H \cap U) \cap (H \cap V) = \emptyset. \tag{6}$$

Так как H_α связно в X , то одно из двух множеств $H_\alpha \cap U$ или $H_\alpha \cap V$ пусто. Поэтому каждое H_α содержится либо в U , либо в V .

Допустим сначала, что нашлись такие различные α_1 и α_2 , для которых $H_{\alpha_1} \subset V$, а $H_{\alpha_2} \subset U$. Тогда в силу (3)

$$H_{\alpha_1} \cap H_{\alpha_2} \subset (H \cap U) \cap (H \cap V) = \emptyset,$$

что невозможно, так как H_{α_1} и H_{α_2} по условиям теоремы имеют общую точку.

Остается только одна из двух возможностей: при любом α либо все $H_\alpha \cap U = \emptyset$, либо все $H_\alpha \cap V = \emptyset$. Допустим для определенности, что выполнена первая возможность. Тогда

$$H \cap U = \bigcup_{\alpha} (H_\alpha \cap U) = \emptyset,$$

что противоречит (4).

Пусть теперь a — произвольная точка топологического пространства X . Согласно теореме 1 среди всех связных подмножеств X , содержащих a , всегда имеется наибольшее, т. е. такое, которое содержит любое связное подмножество, содержащее точку a . Это наибольшее связное подмножество, содержащее точку a , называется *компонентой точки a в X* .

Если H_a и H_b — компоненты точек a и b и $H_a \cap H_b \neq \emptyset$, то из теоремы 1 и определения компоненты следует, что $H_a \cup H_b = H_a = H_b$. Поэтому справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Компоненты двух различных точек либо не пересекаются, либо совпадают.*

Из теоремы 2 вытекает, что всякое топологическое пространство разбивается в сумму попарно не пересекающихся компонент его точек. Компоненты связности отдельных точек пространства X обычно просто называют *компонентами X* .

Аналогично с помощью индуцированной топологии вводятся и изучаются компоненты любых множеств H в пространстве X .

Область называется непустое открытое связное множество. *Замкнутой областью* называется такое замкнутое множество, которое является замыканием области.

§ 8. АКСИОМА ОТДЕЛИМОСТИ

Топологические пространства, определенные в п. 1 § 1, могут по своим свойствам сильно отличаться от пространств, которые наиболее часто используются в математике и ее приложениях. Наличие многих свойств пространства, аналогичных свойствам евклидова пространства, зависит от возможности отделить одну точку от другой с помощью их окрестностей. Поэтому обычно рассматривают такие топологические пространства, которые удовлетворяют тем или иным дополнительным условиям, так называемым аксиомам делимости.

Существует целый ряд различных аксиом делимости. Мы будем

рассматривать пространства, удовлетворяющие аксиоме отделимости Хаусдорфа.

Аксиома Хаусдорфа. *Для любых двух различных точек пространства существуют их непересекающиеся окрестности.*

Пространства, удовлетворяющие этой аксиоме отделимости, называются *хаусдорфовыми*. Читателю предлагается выяснить, какие из топологических пространств, рассмотренных в п. 2 § 1, являются хаусдорфовыми.

Отметим, что *подпространство хаусдорфова пространства будет хаусдорфовым*. Это непосредственно вытекает из определений соответствующих понятий. Отметим также, что метрическое пространство является хаусдорфовым относительно топологии, индуцированной метрикой, так как любые две различные точки можно отделить шаровыми окрестностями с центрами в этих точках и с радиусами, меньшими половины расстояния между ними.

Понятия сходящейся последовательности точек и предела сходящейся последовательности определяются для произвольного топологического пространства. Но понятие предела удобно лишь в том случае, если выполняются условия, при которых сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Условие хаусдорфовости пространства является в известном смысле необходимым и достаточным условием единственности предела (см. [4], гл. I, § 6 или [6], гл. II). Ниже мы установим лишь достаточность этих условий. Перейдем к их определениям.

Пусть в топологическом пространстве X дана последовательность точек a_1, \dots, a_n, \dots . Точка a называется пределом последовательности a_n , если для любой окрестности U точки a найдется такой номер n_0 , что при всех $n > n_0$ точки $a_n \in U$. Последовательность a_n называется при этом сходящейся к точке a .

Т е о р е м а. *В хаусдорфовом пространстве X сходящаяся последовательность точек a_n имеет единственный предел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что a_n имеет два различных предела a и b . Точки a и b имеют непересекающиеся окрестности U и V . По определению предела все члены последовательности a_n , начиная с некоторого номера, должны одновременно лежать в U и V , что невозможно, так как $U \cap V = \emptyset$. Получили противоречие.

§ 9. КОМПАКТНОСТЬ

в произвольных топологических пространствах есть понятие открытого множества, но нет понятия ограниченности множества. Рассматриваемое в этом параграфе понятие компактности обобщает одновременно понятия ограниченности и замкнутости для любых топологических пространств и множеств в них.

Совокупность $\Sigma = \{G_\beta\}$ открытых множеств топологического пространства (X, Φ) называется *открытым покрытием*, если объединение множеств семейства Σ совпадает с X .

Топологическое пространство X называется *компактным* или

компактом, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное покрытие.

Множество M в топологическом пространстве называется компактным, если оно является компактным топологическим пространством относительно индуцированной топологии.

Пользоваться этим определением компактности множества не очень удобно, так как оно требует построения в множестве индуцированной топологии. Но следующая теорема показывает, что это построение можно и не проводить, а рассматривать покрытие из открытых множеств исходного пространства.

Теорема 1. *Для того чтобы множество M в топологическом пространстве X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы из любого открытого покрытия множества M в X можно было выделить конечное покрытие.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть M компактно в (X, Φ) . Возьмем любое его покрытие $\Sigma = \{G_\beta\}$, где $G_\beta \in \Phi$. Тогда $\Sigma' = \{G_\beta \cap M\}$ будет открытым покрытием M в смысле индуцированной топологии. Выбирая из Σ' конечное подпокрытие, получаем из соответствующих ему множеств в Σ искомое конечное подпокрытие.

Достаточность доказывается аналогично.

Покажем, что в хаусдорфовых пространствах компактные множества замкнуты. Сначала докажем лемму.

Лемма. *Пусть M — компактное подмножество хаусдорфова пространства X и точка $a \notin M$. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества $G_1 \supset M$ и $G_2 \ni a$*

Доказательство. Для любой точки $x \in M$ существуют непересекающиеся окрестности $\Omega_x \ni x$ и $U_x \ni a$ (рис. 9). Система $\Sigma = \{\Omega_x\}$ есть открытое покрытие M . Так как M компактно, то из Σ можно выбрать конечное подпокрытие $\Omega_{x_1}, \dots, \Omega_{x_k}$. Открытые

множества $G_1 = \bigcup_{i=1}^k \Omega_{x_i}$ и $G_2 = \bigcap_{i=1}^k U_{x_i}$, очевидно, будут искомыми.

Теорема 2. *Компактное множество M хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Возьмем любую точку $y \notin M$. Тогда по лемме существуют непересекающиеся открытые множества $G_y \supset M$ и $H_y \ni y$. Так как $H_y \cap M = \emptyset$, то замкнутое множество $C_x H_y \supset M$.

Но множество

$$M = \bigcap_{y \notin M} C_x H_y,$$

так как пересечение множеств $C_x H_y$ не содержит ни одной из точек $y \notin M$, но содержит M , так как $M \subset C_x H_y$ для каждого $y \notin M$. Как пересечение семейства замкнутых множеств $C_x H_y$, множество M замкнуто.

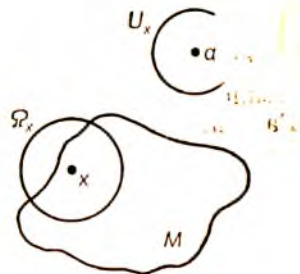


Рис. 9
 20474

Теперь решим важный вопрос о компактности множеств в евклидовых пространствах.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы в n -мерном евклидовом пространстве E^n множество M было компактным, необходимо и достаточно, чтобы M было замкнуто и ограничено.*

(Ограниченность M означает, что M лежит внутри некоторого шара.)

Достаточность условий теоремы 3 устанавливается в известной лемме Гейне — Бореля, которая обычно доказывается в курсах математического анализа. Мы не будем его повторять. Проверим необходимость условий теоремы.

Пусть M — компактное множество в E^n . Допустим, что M не ограничено. Из покрытия множества M семейством открытых концентрических шаров с центром в фиксированной точке нельзя выбрать никакого конечного подпокрытия. Получили противоречие. Следовательно, M ограничено.

Покажем, что M замкнуто. Допустим противное. Тогда найдется точка прикосновения a множества M , не принадлежащая M . Через $U(r)$ обозначим открытый шар в E^n радиуса $r > 0$ с центром в точке a . Внутри любого $U(r)$ лежит бесконечное множество точек из M . Поэтому можно выбрать последовательность точек $a_k \in M$, сходящуюся к a . Обозначим через r_k расстояние между a и a_k . Можно считать, что $r_k > r_{k+1} > 0$ при всех k . Положим, $V_0 = E^n \setminus \bar{U}(r_2)$ и $V_i = U(r_i) \setminus \bar{U}(r_{i+2})$. Система открытых множеств $V_0, V_1, \dots, V_k, \dots$ покрывает множество $E^n \setminus a$ и тем более множество M . Но из нее нельзя выбрать конечное покрытие множества M , что противоречит компактности M . Следовательно, M замкнуто. Необходимость условий теоремы доказана.

Из доказанной теоремы следует, например, что отрезок, квадрат, шар, сфера в евклидовом пространстве компактны, а любое непустое открытое множество в евклидовом пространстве некомпактно.

§ 10. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть даны топологические пространства X и Y и отображение $f: X \rightarrow Y$. Отображение f называется непрерывным в точке $a \in X$, если для каждой окрестности V точки $f(a)$ существует такая окрестность U точки a , что $f(U) \subset V$ (рис. 10).

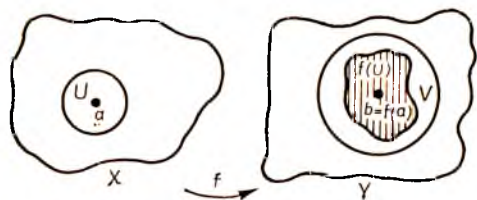


Рис. 10

Отображение f называется непрерывным на множестве $H \subset X$, если f непрерывно в каждой его точке. Ниже слова «непрерывное отображение» означают, что это отображение непрерывно во всех точках.

Если X есть открытое множество в E^n , а Y совпадает с

ж. то данное определение непрерывности есть известное в анализе определение непрерывности функции на языке « $\varepsilon - \delta$ ».

Теорема 1. *Для того чтобы отображение $f: X \rightarrow Y$ было непрерывным на X , необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого открытого (замкнутого) множества был открытым (замкнутым) множеством.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, V — открытое множество в Y , а $U = f^{-1}(V)$. Докажем, что U открыто в X .

Пусть a — любая точка из U и $b = f(a)$. Множество V является окрестностью точки b . Так как f непрерывно, то найдется окрестность U_a точки a , такая, что $f(U_a) \subset V$. Очевидно, $U_a \subset f^{-1}(V) = U$. Так как $U = \bigcup_{a \in U} U_a$, то U открыто.

Достаточность. Возьмем любую точку $a \in X$, и пусть $b = f(a)$. Если V — произвольная окрестность точки b , то $U = f^{-1}(V)$ открыто и является окрестностью точки a . Поскольку $f(U) = V$, то f непрерывно в точке a , что и требовалось доказать.

Для замкнутых множеств теорема доказывается переходом к дополнительным множествам.

Отметим, что образ замкнутого (открытого) множества при непрерывном отображении может быть и не замкнутым (не открытым) множеством. Например, отображение $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ плоскости X с координатами (x, y) в плоскость U с координатами (u, v) отображает полупрямую $x \leq 0, y = 0$, являющуюся замкнутым множеством в X , на множество $0 < u \leq 1, v = 0$, которое уже не является замкнутым в U .

Постоянное отображение, т. е. отображение, при котором образы всех точек совпадают, дает, как правило, пример, в котором образ открытого множества не будет открытым.

Теорема 2. *Пусть X, Y и Z — топологические пространства. Если отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ непрерывны, то отображение $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ также непрерывно.*

Доказательство. Пусть W — любое открытое множество в Z . Тогда в силу теоремы 1 множества $V = g^{-1}(W)$ и $U = f^{-1}(V)$ открыты. Поскольку $U = h^{-1}(W)$, то, применяя теорему 1, получаем, что h непрерывно.

Теорема 3. *Если X — компактное топологическое пространство и $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение X в Y , то $f(X)$ компактно в Y .*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{G_\beta\}$ — покрытие $f(X)$ открытыми множествами $G_\beta \subset Y$. В силу теоремы 1 каждое множество $U_\beta = f^{-1}(G_\beta)$ открыто в X . Система $\Sigma' = \{U_\beta\}$ будет открытым покрытием X . Выбирая из Σ' конечное подпокрытие $U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_k}$, получим подпокрытие $G_{\beta_1}, \dots, G_{\beta_k}$ множества $f(X)$. В силу теоремы 1 $\emptyset \neq f(X)$ компактно.

Теорема 4. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение и $f(X) = Y$. Тогда если X связно, то Y связно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие непустые одновременно открытые и замкнутые множества U_1 и U_2 , что $U_1 \cup U_2 = Y$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Так как f непрерывно, то непустые множества $V_1 = f^{-1}(U_1)$ и $V_2 = f^{-1}(U_2)$ одновременно открыты и замкнуты. Так как $V_1 \cup V_2 = X$, а $V_1 = X \setminus V_2$, то X несвязно. Получили противоречие.

§ 11. ГОМЕОМОРФИЗМ

Пусть даны топологические пространства X и Y . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *топологическим* или *гомеоморфизмом*, если f обратимо и отображения f и f^{-1} непрерывны. Из этого определения и теоремы 10.1 непосредственно вытекает следующее утверждение: *для того чтобы взаимно однозначное отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y было гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы образ любого открытого множества из X был открытым множеством в Y и чтобы прообраз любого открытого множества из Y был открытым множеством в X .*

Всякое тождественное преобразование $1_X: X \rightarrow X$, очевидно, гомеоморфизм. Далее, если X, Y, Z — топологические пространства, а отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ — гомеоморфизмы, то их композиция также будет гомеоморфизмом.

Говорят, что топологическое пространство X гомеоморфно топологическому пространству Y , если существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow Y$. Очевидно, что если X гомеоморфно Y , то и в свою очередь Y гомеоморфно X ; при этом соответствующим гомеоморфизмом будет отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$. Из приведенных выше свойств гомеоморфизмов вытекает, что отношение гомеоморфности топологических пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. оно является отношением эквивалентности.

Поэтому про гомеоморфные пространства X и Y также говорят, что они топологически эквивалентны, обозначая это следующим образом: $X \stackrel{\text{top}}{=} Y$. В связи с этим свойства фигур в пространствах, имеющих, кроме топологической, и другие структуры, которые сохраняются при гомеоморфизмах, называют топологическими.

Приведем примеры гомеоморфных пространств и гомеоморфизмов.

1. Любые два интервала (a, b) и (c, d) гомеоморфны. Гомеоморфизм между ними устанавливается, например, линейной функцией $y = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c$, где $x \in (a, b)$, а $y \in (c, d)$ (рис. 11).

2. Интервал (a, b) и числовая ось \mathbf{R} гомеоморфны. Гомеоморфизм между ними устанавливается, например, функцией

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{рис. 12}).$$

3. Сфера гомеоморфна поверхности куба. Для того чтобы установить гомеоморфизм между ними, достаточно поместить их центры в одну точку и произвести из нее центральное проектирование (рис. 13).

4. Сфера, из которой удалена («выколота») одна точка, гомеоморфна плоскости. Гомеоморфизм устанавливается центральным проектированием сферы из выколотой точки на плоскость, касающуюся сферы в точке, диаметрально противоположной выколотой точке (рис. 14).

Приведем пример, который показывает, что не обязательно взаимно однозначное и непрерывное отображение топологического пространства X на топологическое пространство Y будет гомеоморфизмом, т. е. обратное ему отображение не обязано быть непрерывным. Рассмотрим отображение φ интервала $X = (0, 1)$ в плоскость E^2 (рис. 15). Положим, $Y = \varphi(X)$, и введем в Y топологию, индуцированную топологией плоскости E^2 . Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ таково, что $f(x) = \varphi(x)$ для любого $x \in (0, 1)$. Отображение f непрерывно и обратимо, но обратное ему отображение f^{-1} не имеет непрерывности в точке $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Действительно, если взять окрестность $V = \left(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta\right)$ точки $\frac{1}{2}$ в X , то никакая окрестность U точки a в Y не переводится отображением f^{-1} в V .

Определим еще два вида непрерывных отображений, опирающихся на понятие гомеоморфизма. Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$, и пусть $f_0: X \rightarrow f(X)$ — приведение отображения f , т. е. такое отображение, что $f_0(x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Если f_0 — гомеоморфизм, то f называется вложением X в Y . Если $f(X) = Y$, то $f_0 = f$, и в этом случае вложение f является гомеоморфизмом.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется погружением X в Y , если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность U , такая, что отображение $f|_U$ является вложением, т. е. погружение есть локальное вложение. Всякое вложение, очевидно, есть погружение. Далее очевидно, что неинъективное погружение не является вложением. То, что инъ-

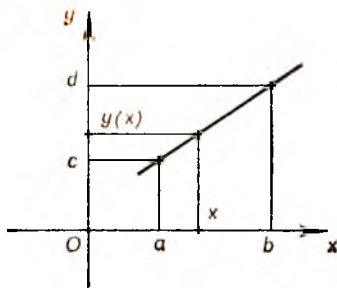


Рис. 11

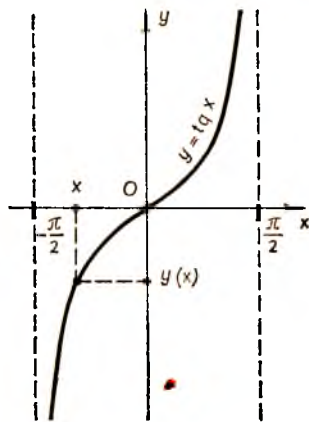


Рис. 12

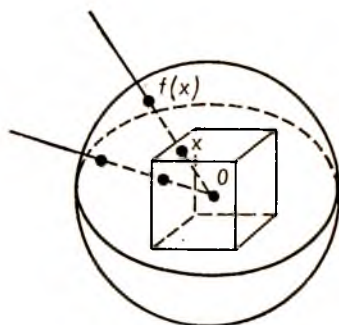


Рис. 13

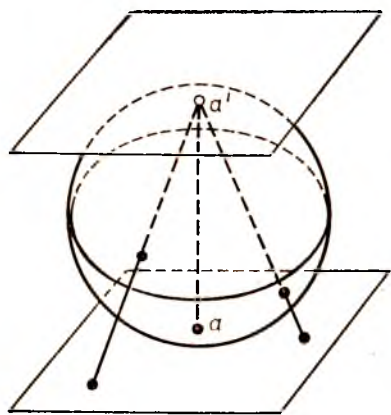


Рис. 14

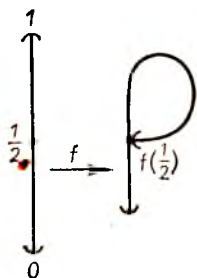


Рис. 15

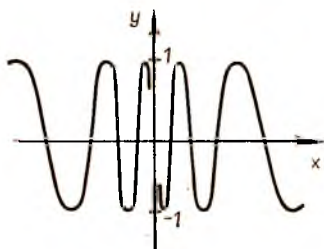


Рис. 16

активное погружение может не быть вложением, показывает приведенный выше пример отображения $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (см. рис. 15).

§ 12. ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ

Пусть X — топологическое пространство. Путем l в X называется непрерывное отображение $l : [a, b] \rightarrow X$ какого-нибудь отрезка $[a, b]$ в X . Говорят, что две точки x и y можно соединить путем в X , если существует такой путь $l : [a, b] \rightarrow X$ в X , что $l(a) = x$, $l(b) = y$.

Топологическое пространство, любые две точки которого можно соединить путем, называется *линейно связным*.

Связное топологическое пространство не обязательно будет линейно связным. Например, рассмотрим в \mathbb{R}^2 множество M , состоящее из графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ и отрезка $[-1, 1]$ на оси y (рис. 16). Множество M будет связно относительно индуцированной топологии, но оно не линейно связно: никакие две точки в M , имеющие абсциссы различных знаков, нельзя соединить путем в M .

Напротив, из линейной связности пространства вытекает его связность. Этот факт основан на связности отрезка $[0, 1]$. А именно имеет место теорема.

Теорема 1. *Отрезок $I = [0, 1]$ является связным.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие непустые одновременно

открытые и замкнутые множества U и V , что $U \cup V = I$ и $U \cap V = \emptyset$. Пусть функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ определена равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in U, \\ 1 & \text{при } x \in V. \end{cases}$$

Функция f непрерывна, так как полный прообраз любого (в том

чисел и открытого) множества $G \subset \mathbf{R}^1$ будет открыт в I , поскольку он может быть только одним из следующих четырех множеств: \emptyset , U , V и I . По теореме Коши функция f должна принимать все промежуточные значения между 0 и 1. Получили противоречие.

Теорема 2. *Линейно связное пространство X связно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся два непустые одновременно открытые и замкнутые множества U и V , что $U \cup V = X$ и $U \cap V = \emptyset$. Пусть точка $a \in U$, точка $b \in V$ и путь $l: I \rightarrow X$ соединяет a и b . В силу теоремы 4 § 10 множество $l(I)$ связно. С другой стороны, непустые множества $l_U = l(I) \cap U$ и $l_V = l(I) \cap V$ одновременно открыты и замкнуты в индуцированной топологии и $l_U \cup l_V = l(I)$, а $l_U \cap l_V = \emptyset$. Получили противоречие.

Пусть X — некоторое топологическое пространство. Если два линейно связных пространства $X_1, X_2 \subset X$ имеют общую точку, то, очевидно, подпространство $X_1 \cup X_2$ также линейно связно. Отсюда вытекает, что X представимо в виде объединения попарно пересекающихся линейно связных подпространств. Эти подпространства называются *компонентами линейной связности* пространства X . Каждая компонента линейной связности представляет собой множество точек, связных с некоторой (любой) точкой этой компоненты.

Из приведенных определений вытекает теорема.

Теорема 3. *Если X — связанное топологическое пространство и каждая точка обладает линейно связной окрестностью, то X линейно связно.*

Доказательство. Пусть точка $a \in X$ и U — компонента линейной связности точки a . Из условия теоремы следует, что U и $X \setminus U$ — открытые множества. Поэтому они также замкнуты. В силу связности X и непустоты U имеем, что $U = X$, т. е. X линейно связно.

Топологические многообразия

§ 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Хаусдорфово топологическое пространство W^n со счетным базисом называется n -мерным топологическим многообразием, если каждая его точка имеет окрестность, гомеоморфную открытому множеству в R^n . Число n называется размерностью многообразия W^n и обозначается $\dim W^n$. В дальнейшем топологическое многообразие будем просто называть многообразием.

Согласно данному определению для каждой точки $a \in W^n$ существует пара (U, φ) , состоящая из ее окрестности U и гомеоморфизма φ этой окрестности на некоторое открытое множество $G \subset R^n$ (рис. 17). Так как в R^n точка $b = \varphi(a) \in G$ имеет некоторую шаровую окрестность $V \subset G$ и $\varphi^{-1} : G \rightarrow U$ является гомеоморфизмом, то отображение $\varphi^{-1}|_V : V \rightarrow \varphi^{-1}(V)$ также является гомеоморфизмом. Но тогда точка a имеет в W^n окрестность $U_1 = \varphi^{-1}(V)$, которая гомеоморфна открытому шару $V \subset R^n$: гомеоморфизмом является сужение φ на U_1 . Итак, в определении топологического многообразия требование существования окрестности, гомеоморфной открытому множеству в R^n , равносильно требованию существования окрестности, гомеоморфной открытому шару в R^n . А поскольку открытый шар в R^n гомеоморфен как R^n , так и открытому кубу в R^n , то это равносильно существованию окрестности, гомеоморфной R^n или кубу в R^n .

Определение размерности многообразия было бы некорректно, если бы нашлось такое многообразие W , некоторая точка которого имела бы окрестность, гомеоморфную одновременно R^n и R^m при $n \neq m$. Но тогда оказались бы гомеоморфны для некоторых различных m и n пространства R^m и R^n . Это невозможно в силу следующей известной теоремы Л. Брауэра.

Т е о р е м а 1. *Если евклидовы пространства R^n и R^m гомеоморфны, то $n = m$.*

Доказательство теоремы Брауэра сложно, и мы не будем его проводить. Читатель может ознакомиться с ним в книге [9]. В силу теоремы Брауэра размерность топологического многообразия является его топологическим инвариантом.

Приведем примеры многообразий.

П р и м е р 1. Пространство R^n является n -мерным многообразием. Любое открытое множество в R^n также является n -мерным многообразием.

П р и м е р 2. Сфера $S^n \subset R^{n+1}$ является n -мерным многообразием. Она является хаусдорфовым пространством со счетным базисом как подпространство пространства R^{n+1} , обладающего этими свойствами. Если точка $a \in S^n$ и a' — диаметрально противоположная точка a , то окрест-

ность $U_a = S^n \setminus \{a'\}$ гомеоморфна касательной плоскости R_a^n к S^n в точке a . Гомеоморфизм устанавливается центральным проектированием из точки a' (см. рис. 14).

Известна модель n -мерного проективного пространства P^n как сферы S^n в R^{n+1} , у которой попарно отождествлены («склеены») диаметрально противоположные точки.

Пример 3. Проективное пространство P^n является n -мерным топологическим многообразием. Каждая точка P^n , т. е. пара отождествленных точек пространства $S^n \subset R^{n+1}$, имеет окрестность, гомеоморфную R^n , — пару диаметрально противоположных открытых шаровых окрестностей на S^n с центрами в соответствующих точках.

Тором T^2 в пространстве E^3 называется множество точек, образованное вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и не пересекающей окружности (рис. 18).

Пример 4. Тор T^2 является двумерным многообразием. Проверку этого утверждения предоставляем читателям.

Из определения n -мерного многообразия вытекает, что каждая его точка имеет линейно связную окрестность. Поэтому в силу теоремы 3 из связности многообразия вытекает его линейная связность. Каждая связная компонента n -мерного многообразия сама является n -мерным многообразием. Ниже, как правило, рассматриваются связные многообразия. Сразу отметим, что нульмерным связным многообразием является лишь одноточечное множество.

Часто компактные многообразия называют *замкнутыми многообразиями*, а некомпактные многообразия — *открытыми многообразиями*.

Целью этой главы является топологическая классификация (без доказательств) одномерных и двумерных компактных многообразий. Для связных одномерных многообразий классификация очень проста. Ее дает следующая теорема.

Теорема 2. Любое связное одномерное компактное (замкнутое) топологическое многообразие гомеоморфно окружности S^1 .

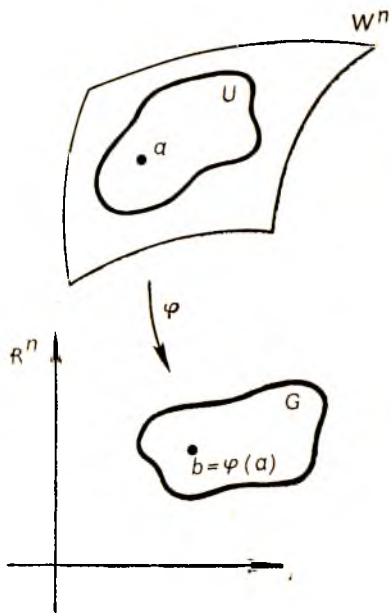


Рис. 17

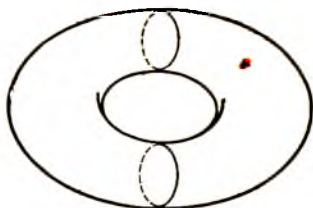


Рис. 18

Любое связное одномерное некомпактное (открытое) топологическое многообразие гомеоморфно R^1 .

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [8], с. 136—139. Здесь лишь отметим, что это доказательство существенно опирается на тот факт, что в R^1 связное открытое множество является интервалом, открытым лучом или R^1 , т. е. всегда гомеоморфно R^1 .

Классификация компактных двумерных многообразий значительно сложнее, и, чтобы сформулировать основной результат, нам потребуется ввести ряд новых понятий.

§ 14. МНОГООБРАЗИЕ С КРАЕМ

Фиксируем в R^n некоторое замкнутое полупространство R_+^n , ограниченное гиперплоскостью P . Многообразием с краем W^n размерности n называется топологическое хаусдорфово пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную R_+^n или R_+^n . Те точки многообразия с краем W^n , которые имеют окрестности, гомеоморфные R^n , называются *внутренними точками*, а те точки W^n , которые имеют окрестности, гомеоморфные R_+^n , называются *точками края*. Естественно поставить вопрос: не может ли быть некоторая точка $a \in W^n$ одновременно внутренней точкой и точкой края? Доказано, что это невозможно (см., например, [8]), т. е. определения внутренних и краевых точек корректны. Множество всех внутренних точек многообразия с краем W^n обозначается ниже через $\text{int } W^n$. Легко видеть, что множество $\text{int } W^n$ будет открытым в

W^n множеством и само является n -мерным топологическим многообразием. Поэтому множество точек края в W^n замкнуто; его называют краем W^n и обозначают ∂W^n . Отметим еще, что ∂W^n является границей в W^n множества $\text{int } W^n$, а также что n -мерное топологическое многообразие является частным случаем многообразия с краем, край которого пуст. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. Если край ∂W^n n -мерного многообразия с краем W^n не пуст, то он является многообразием размерности $n-1$. Если W^n компактно, то его край компактное (замкнутое) многообразие.

Доказательство этой теоремы содержится, например, в книге [8].

Приведем примеры, иллюстрирующие изложенное выше.

П р и м е р 1. Замкнутое полупространство R_+^n при $n \geq 1$ является многообразием с краем. Его край $\partial R_+^n = R^{n-1}$. Если $n = 1$, то R_+^1 — луч, а ∂R_+^1 — точка. Если $n = 2$, то R_+^2 — полуплоскость, а ∂R_+^2 — прямая.

П р и м е р 2. Замкнутый шар D^n в R^n ($n \geq$

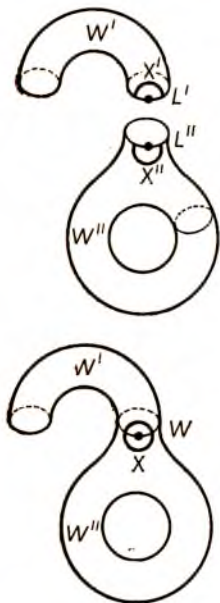


Рис. 19

≥ 1) является многообразием с краем. Его край ∂D^n является сферой S^{n-1} . Если $n = 1$, то D^1 — отрезок, а S^0 — состоит из двух точек — концов отрезка. Если $n = 2$, то D^2 — круг, а $\partial D^2 = S^1$ — ограничивающая его окружность.

Следующие примеры, используемые затем для классификации двумерных многообразий, строятся с помощью так называемой операции «склеивания». Она заключается в следующем. Берутся два двумерных многообразия с краем W' и W'' и на их краях $\partial W'$ и $\partial W''$ выделяются некоторые гомеоморфные части L' и L'' (рис. 19). Соответствующие (по некоторому гомеоморфизму f) точки $X' \in L'$ и $X'' \in L''$ отождествляются (склеиваются) в одну точку X . Склеенные окрестности точек X' и X'' становятся окрестностями точки X . Получается новое многообразие с краем W , склеенное из W' и W'' (посредством гомеоморфизма f). Так, например, многогранную поверхность можно считать склеенной из ее граней (рис. 20), а поверхность цилиндра вращения — склеенной из ее боковой поверхности и двух оснований.

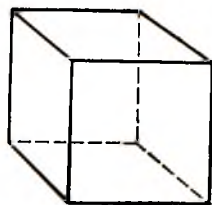
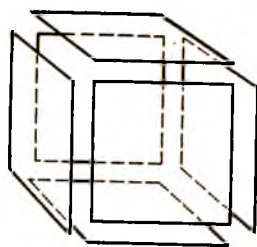


Рис. 20

Пример 3. Рассмотрим в плоскости R^2 квадрат $I^2 = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Отождествим в I^2 точки вида $(0, y)$ и $(1, y)$, т. е. склеим две противоположные стороны квадрата I^2 (рис. 21). Получим двумерное многообразие с краем C^2 , гомеоморфное кольцу или боковой поверхности цилиндра. Его край ∂C^2 состоит из двух окружностей S_0^1 и S_1^1 .

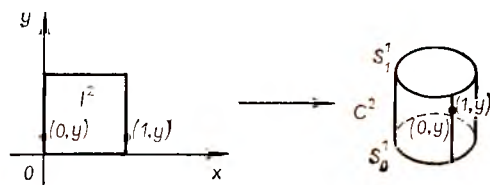


Рис. 21

Пример 4. В том же квадрате I^2 , рассмотренном в предыдущем примере, отождествим точки вида $(0, y)$ и $(1, 1 - y)$. Многообразие M^2 , полученное склеиванием таких точек квадрата I^2 , называется «листом Мёбиуса». Если в примере 3 C^2 получено из I^2 склеиванием двух противоположных сторон «без перекручивания» квадрата I^2 , то лист Мёбиуса M^2 получается из I^2 склеиванием двух противоположных сторон после однократного «перекручивания» квадрата I^2 (рис. 22).

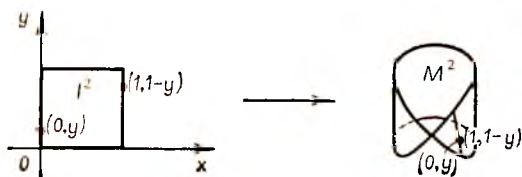


Рис. 22

Лист Мёбиуса M^2 является многообразием с краем

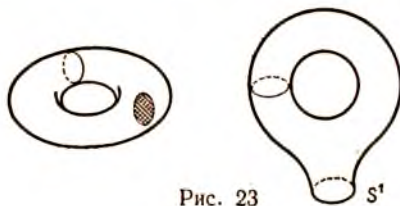


Рис. 23

ем, край которого ∂M^2 гомеоморфен окружности S^1 , поэтому лист Мёбиуса не гомеоморфен кольцу, у которого край состоит из двух окружностей.

Пример 5. Если из тора T^2 удалить («вырезать») множество, гомеоморфное открытому кругу, то оставшаяся часть тора N^2 является

двумерным многообразием с краем, край которого есть окружность S^1 . Оно называется «ручкой» (рис. 23).

§ 15. ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА

1. Клеточное разбиение двумерного многообразия с краем. *Простой дугой* называется гомеоморфный образ отрезка, а *простой замкнутой кривой* или *одномерным циклом* — гомеоморфный образ окружности (рис. 24).

Пусть W — компактное двумерное многообразие с краем. Тогда если его край ∂W не пуст, то каждая его компонента — простая замкнутая кривая и число таких компонент конечно.

Сетью Σ на W назовем любой набор конечного числа точек A_1, \dots, A_m и конечного числа простых дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, которые имеют концы в точках A_1, \dots, A_m и не пересекаются друг с другом во внутренних точках. Точки A_1, \dots, A_m называются *вершинами сети*, дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — *ребрами сети*. *Областями сети* Σ назовем компоненты множества

$$W \setminus ((\cup_i A_i) \cup (\cup_j \gamma_j)).$$

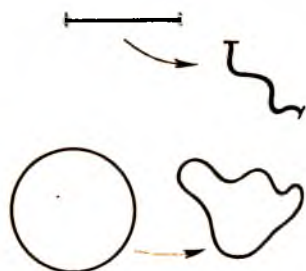


Рис. 24

Если каждая область сети Σ гомеоморфна открытому кругу, то говорят, что сеть Σ задает *клеточное разбиение многообразия с краем* W . В этом случае вершины сети называются *нульмерными клетками* клеточного разбиения, ребра сети с исключенными концами — его *одномерными клетками*, а области сети — *двумерными клетками* разбиения.

Приведем примеры сетей и клеточных разбиений.

1. Сеть на сфере S^2 , состоящая из одной точки A , задает клеточное разбиение сферы, состоящее из одной нульмерной и одной двумерной клетки (рис. 25).

2. Параллель и меридиан разбивают двумерный тор T^2 на одну нульмерную клетку — точку пересечения параллели

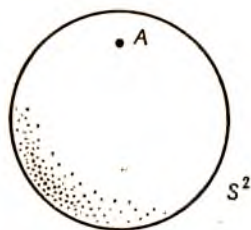


Рис. 25

и меридиана, две одномерные и одну двумерную клетку (рис. 26).

3. Клеточное разбиение проективной плоскости P^2 можно построить следующим образом: в P^2 возьмем проективную прямую P^1 и точку $P^0 \in P^1$. Клетки определяются так: одна нульмерная P^0 , одна одномерная $P^1 \setminus P^0$ и одна двумерная $P^2 \setminus P^1$.

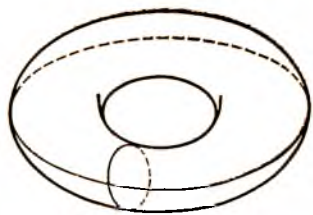


Рис. 26

4. Клеточное разбиение листа Мёбиуса M^2 получим, если в квадрате I^2 проведем диагональ d из вершины $(0, 0)$ в вершину $(1, 1)$. Так как эти вершины отождествляются при склеивании, то клеточное разбиение M^2 состоит из одной нульмерной клетки e^0 , полученной из точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$, двух одномерных клеток — диагонали d и края $S^1 = \partial M^2$, из которого выколота точка e^0 , и одной двумерной клетки — множества внутренних точек квадрата I^2 .

2. **Определение эйлеровой характеристики.** Можно доказать, что каждое двумерное многообразие W с краем допускает клеточное разбиение. Если W компактно, то для любого его клеточного разбиения Σ число клеток каждой размерности в этом разбиении конечно. Обозначим через α_i число клеток размерности i , где $i = 0, 1, 2$. Число

$$\chi(W) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \quad (1)$$

называется *эйлеровой характеристикой* двумерного компактного многообразия с краем W .

Корректность определения эйлеровой характеристики, т. е. независимость $\chi(W)$ от клеточного разбиения, может быть доказана. Ниже проведем это доказательство для двумерной сферы S^2 , а сначала найдем эйлеровы характеристики для рассмотренных в предыдущем пункте двумерных многообразий с краем. При этом воспользуемся построенными клеточными разбиениями.

1) Сфера S^2 ; $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$.

$$\chi(S^2) = 1 + 1 = 2.$$

2) Тор T^2 ; $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.

$$\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

3) Проективная плоскость P^2 ; $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

$$\chi(P^2) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

4) Лист Мёбиуса M^2 ; $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.

$$\chi(M^2) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

5) Круг D^2 . На границе круга — окружности S^1 возьмем любую точку A . Получим клеточное разбиение D^2 , состоящее из одной нуль-

мерной клетки A , одной одномерной клетки $S^1 \setminus A$ и одной двумерной клетки $D^2 \setminus S^1$. Поэтому $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и

$$\chi(D^2) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

3. Аддитивность эйлеровой характеристики. Эйлерова характеристика обладает важным свойством аддитивности.

Теорема 1. Пусть W_1, \dots, W_s — компактные многообразия с краем, и пусть заданы гомеоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ между некоторыми парами компонент краев $\partial W_1, \dots, \partial W_s$, причем каждая компонента попадает лишь в одну пару. Если многообразие с краем W получено из W_1, \dots, W_s приклеиванием по отображениям $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ то

$$\chi(W) = \chi(W_1) + \dots + \chi(W_s). \quad (2)$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что, добавляя в клеточном разбиении внутри любой одномерной клетки нульмерную клетку, снова получаем клеточное разбиение. Сумма (1) при этом не меняется, так как каждое такое добавление увеличивает на единицу и число одномерных клеток. Поэтому можно считать, что построены такие клеточные разбиения $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ многообразий с краями W_1, \dots, W_s , что гомеоморфизмы $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ каждую нульмерную клетку склеивают с нульмерной, а одномерную — с одномерной. Эти клеточные разбиения Σ_i определяют на W клеточное разбиение Σ . Пусть α_i^j — число клеток размерности i ($i = 0, 1, 2$) в разбиении Σ_i (Σ). Так как число сторон замкнутого многоугольника равно числу его вершин, то при склеивании одномерных циклов число нульмерных клеток после склеивания уменьшится на столько же, на сколько уменьшится число одномерных клеток. Поэтому

$$\alpha_0^1 + \dots + \alpha_0^s - \alpha_0 = \alpha_1^1 + \dots + \alpha_1^s - \alpha_1. \quad (3)$$

Кроме того,

$$\alpha_2^1 + \dots + \alpha_2^s = \alpha_2. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) вытекает равенство (2).

Следствие 1. Эйлерова характеристика многообразия с краем $S_{p,r}^2$, полученного из сферы S^2 удалением p непересекающихся областей Q_1, \dots, Q_p , гомеоморфных открытому кругу (сферы с p «дырами»), равна $2 - p$.

Следствие 2. Эйлерова характеристика ручки (пример 5, § 14) равна -1 .

Доказательство независимости суммы в равенстве (1) от выбора клеточного разбиения для сферы S^2 основано на следующей теореме К. Жордана.

Теорема 2. Любой цикл на сфере разбивает ее на две области и является их общей границей.

Доказательство этой теоремы читатель может найти, например, в книге [2], с. 172.

Имеет место следующее обобщение теоремы Эйлера для сети на сфере.

Теорема 3. Пусть Σ — сеть на сфере S^2 , α_0 — число вершин сети, α_1 — число ребер, α_2 — число областей сети и l — число ее связных компонент. Тогда

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l = 1. \quad (5)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что для пустой сети Σ_0 формула (5) верна, так как в этом случае $\alpha_0 = \alpha_1 = l = 0$, а $\alpha_2 = 1$. Теперь от любой сети Σ перейдем к пустой сети Σ_0 , удаляя вершины и ребра и проверяя каждый раз, что выражение $\lambda(\Sigma) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l$ не меняется при соответствующих удалениях. Поскольку в конечный момент для пустой сети $\lambda(\Sigma_0) = 1$, то и для исходной сети $\lambda(\Sigma) = 1$. В этом и состоит доказательство теоремы. Перейдем к описанию этих операций.

1. Сеть Σ' получается из Σ удалением изолированной вершины сети. Тогда числа α_0 и l уменьшаются каждое на единицу, а α_1 и α_2 не изменяются. Поэтому $\lambda(\Sigma') = \lambda(\Sigma)$.

2. Считая, что все изолированные вершины удалены, допустим, что сеть Σ имеет вершину A_i , в которую идет лишь одно ребро γ_j — «свободный конец» (рис. 27). Удаляя эту вершину A_i и ребро γ_j , но оставляя другой конец ребра γ_j , получаем сеть Σ' . Для нее α_0 и α_1 уменьшаются на единицу, а α_2 и l не меняются. Поэтому $\lambda(\Sigma') = \lambda(\Sigma)$.

3. Последовательно применяя операции 1 и 2, получим сеть Σ , у которой нет изолированных вершин и «свободных концов». Если эта сеть не пуста, то из ее ребер можно составить хотя бы один цикл δ (рис. 28). В силу теоремы 2 каждое ребро γ_i , входящее в состав этого цикла, лежит на границе двух различных областей сети Σ . Поэтому, удаляя γ_j и не удаляя его концов, от сети Σ перейдем к сети Σ' , у которой α_1 и α_2 уменьшаются на единицу, а α_0 и l не изменяются. Поэтому снова $\lambda(\Sigma') = \lambda(\Sigma)$.

С помощью операций 1, 2, 3 можно от Σ перейти к пустой сети, не меняя $\lambda(\Sigma)$.

Так как каждая область сети Σ , определяющей клеточное разбиение сферы S^2 , гомеоморфна открытому кругу, то для такой сети $l = 1$, поскольку такая сеть содержит лишь одну компоненту (в противном случае среди областей сети нашлась бы область, граница которой держала бы по крайней мере две компоненты, что невозможно, так как каждая область гомеоморфна кругу и ее граница состоит из одной



Рис. 27



Рис. 28

компоненты). Поэтому из теоремы 3 вытекает, что для любого клеточного разбиения сферы

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \quad (6)$$

т. е. эйлерова характеристика сферы S^2 определена корректно.

Отметим еще, что для любого замкнутого многогранника P , гомеоморфного сфере S^2 , набор его вершин, ребер и граней задает его клеточное разбиение. Поэтому для P в равенстве (6) α_0 означает число вершин P , α_1 — число его ребер, а α_2 — число граней. В этом и состоит известная теорема Эйлера для многогранника.

§ 16. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ И НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Клеточное разбиение T двумерного многообразия с краем W называется *триангуляцией* W , если в T граница каждой двумерной клетки $t_i \in T$ состоит из трех различных одномерных клеток $\tau_1^i, \tau_2^i, \tau_3^i$ разбиения T , а концы каждой одномерной клетки $\gamma \in T$ лежат в двух различных нульмерных клетках разбиения T . В этом случае нульмерные клетки триангуляции T именуются ее вершинами, одномерные клетки — ребрами, а двумерные клетки вместе с их границами — топологическими треугольниками (иногда термин «топологический» часто опускается).

Аналогом триангуляции для размерностей выше двух являются *симплициальные* разбиения, т. е. такие клеточные разбиения, которые состоят из топологических симплексов, причем соседние симплексы прилегают друг к другу по граням меньших размерностей. Вопрос о возможности симплициальных разбиений топологических многообразий для размерностей выше трех пока еще не решен. Но для двумерных и трехмерных многообразий доказана возможность их симплициального разбиения. С доказательством теоремы Т. Радо о том, что *любое двумерное многообразие триангулируемо*, можно ознакомиться в книге [9].

Пусть γ — ребро триангуляции T многообразия с краем W с концами в точках A и B . Ориентацией ребра γ называется порядок в паре его вершин. Ребро γ имеет две ориентации (A, B) и (B, A) . Они именуются противоположными. Ребро γ называется *ориентированным*, если выбрана одна из двух его ориентаций.

Рассмотрим теперь топологический треугольник $t \in T$ с вершинами A, B и C . *Ориентацией* (или *обходом*) треугольника t называется порядок в тройке его вершин, причем ориентации считаются одинаковыми (эквивалентными), если они получаются друг из друга в результате циклической перестановки, т. е. $(A, B, C) \sim (B, C, A) \sim (C, A, B)$ и $(C, B, A) \sim (B, A, C) \sim (A, C, B)$. Итак, треугольник t имеет две ориентации. Треугольник называется *ориентированным*, если выбрана его ориентация.

Ориентация треугольника t порождает (индуцирует) ориентацию каждой из его сторон следующим образом: надо взять тот порядок

его вершин из эквивалентных друг другу порядков, где обе вершины выбранной стороны стоят на первых двух местах, и отбросить третью вершину — оставшиеся две упорядоченные точки определяют ориентацию стороны, индуцированную ориентацией треугольника. Например, порядок (A, B, C) вершин треугольника t порождает ориентации (A, B) , (B, C) и (C, A) его сторон (рис. 29).

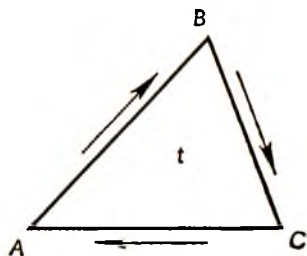


Рис. 29

Говорят, что два ориентированных соседних треугольника в T , т. е. треугольники с общей стороной, имеют *согласованные ориентации*, если на общей стороне они индуцируют противоположные ориентации (рис. 30).

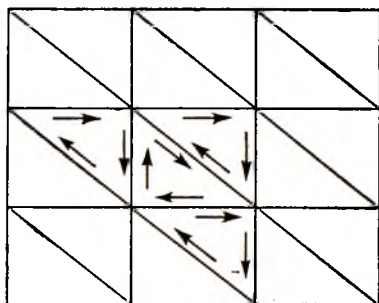


Рис. 30

Двумерное многообразие с краем W называется *ориентируемым*, если существует такая его триангуляция T , все треугольники которой можно ориентировать так, что ориентации любых двух соседних треугольников согласованы. Если такой ориентации не существует, то многообразие называется *неориентируемым*.

Можно доказать (см., например, [1] или [9]), что определение ориентируемого многообразия корректно в том смысле, что если для некоторой триангуляции T многообразия W все ее треугольники можно согласованно ориентировать, то это можно сделать и для любой другой триангуляции T' многообразия W .

Приведем примеры ориентируемых и неориентируемых двумерных многообразий, иллюстрируя их рисунками.

1. Евклидова плоскость E^2 и сфера S^2 ориентируемы. Соответствующие триангуляции и ориентации треугольников указаны на рисунке 31. Сфера S^2 разбита на два топологических треугольника t_1 и t_2 , из которых первый — верхняя полусфера, а второй — нижняя.

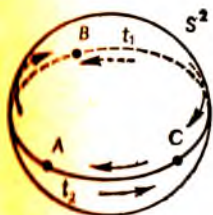


Рис. 31

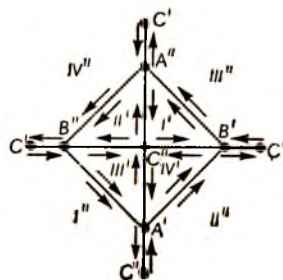
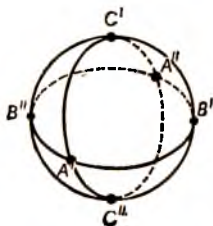


Рис. 32

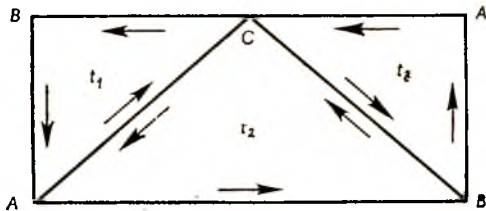


Рис. 33

ждествлением диаметрально противоположных точек). Три прямые a, b, c разбивают P^2 на четыре треугольника (рис. 32), общими вершинами которых являются три точки $A = b \cap c, B = a \cap c$ и $C = a \cap b$ (на чертеже точка A плоскости P^2 — это пара точек A' и A'' сферы S^2 и т. д.). Спроецируем из точки C' сферу S^2 на касательную плоскость к S^2 в точке C'' . Если задать согласованные ориентации треугольников I, II, III, IV, то на сторонах их «дублей» — треугольников I, II, III, IV — обходы сторон зададутся однозначно, и тогда ориентации любой пары соседних треугольников, один из которых отмечен знаком «штрих», а другой — знаком «два штриха», окажутся несогласованными. Это и означает неориентируемость проективной плоскости P^2 , так как при согласованности ориентаций в парах соседних треугольников (I, II), (II, III), (III, IV) и (IV, I) нарушается согласованность ориентаций в других парах (тоже соседних!) треугольников (I, III) и (II, IV).

3. Лист Мёбиуса неориентируем. В этом легко убедиться, разбивая на три треугольника t_1, t_2, t_3 (рис. 33) и замечая, что при согласованности ориентаций в парах (t_1, t_2) и (t_2, t_3) ее нет в паре (t_1, t_3) на общей стороне AB .

4. Если в квадрате $I^2 = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ считать эквивалентными точки вида $(x, 0)$ и $(1 - x, 1)$, а также точки $(0, y)$ и $(1, y)$, то многообразие, склеенное из I^2 по этому отношению эквивалентности, является замкнутым двумерным неориентируемым многообразием, которое называется «бутылкой Клейна». Представление о строении этого многообразия дает рисунок 34.

Неориентируемость многообразия связана с особыми свойствами некоторых простых замкнутых кривых на неориентируемых многообразиях. Опишем эти свойства, поступаясь иногда точностью в це-

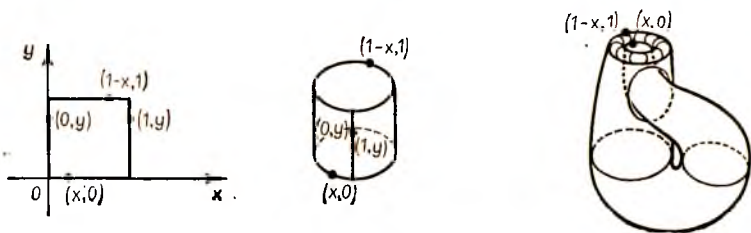


Рис. 34

лях большей наглядности (выражения, требующие уточнения, берем в кавычки).

Пусть γ — простая замкнутая кривая (цикл) на двумерном многообразии с краем \mathcal{W} , не имеющая с краем $\partial\mathcal{W}$ общих точек.

Возьмем некоторую

«достаточно узкую» окрестность G кривой γ . Ее можно построить, покрывая каждую точку $X \in \gamma$ «достаточно малой круговой» окрестностью $\omega(X)$ и выбирая затем конечное число таких окрестностей, покрывающих γ , что возможно в силу компактности γ . Если множество $G \setminus \gamma$ состоит из двух компонент, то γ называется *двусторонней* (или *двубережной*) кривой, а каждую из этих компонент можно назвать «стороной кривой γ ». Если $G \setminus \gamma$ для любой области $G \supset \gamma$ состоит из одной компоненты, то γ называется *односторонней* (или *однобережной*) кривой. Такой, например, является средняя линия листа Мёбиуса: у нее «одна сторона». Разные стороны двусторонней кривой могут быть «окрашены разными красками». Для односторонней кривой такая «окраска» невозможна (рис. 35).

Может быть доказана следующая теорема (см. [9]).

Теорема. *Двумерное многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда каждая простая замкнутая кривая на нем двусторонняя.*



Рис. 35

§ 17. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть \mathcal{W} — многообразие или многообразие с краем. Число p называется *родом* \mathcal{W} , если в \mathcal{W} существует система из p циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, которые, во-первых, попарно не имеют общих точек, во-вторых, не пересекают край $\partial\mathcal{W}$ и, в-третьих, не разбивают \mathcal{W} (т. е. $\mathcal{W} \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_p)$ связно), и не существует системы из $p + 1$ цикла с такими тремя свойствами.

Из теорем § 15 следует, что род сферы S^2 , а также род плоскости E^2 равны нулю. Можно убедиться, что тор и проективная плоскость имеют род, равный единице. Можно доказать, что род $g(\mathcal{W})$ компактного многообразия \mathcal{W} всегда конечен. Для некомпактного многообразия возможно, что его род будет бесконечен. Примером ориентируемого многообразия рода p является так называемая «сфера с p ручками», т. е. многообразие Φ_p , которое получено из сферы с P_1 дырами, по краям которых приклеено p ручек (рис. 36).

Изображенные на рисунке циклы $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, лежащие на ручках, не разбивают Φ_p .

Неориентируемое многообразие Ψ_p рода p получается заклеива-



Рис. 36

нием всех дыр в S^2_p листами Мёбиуса. Напомним, что край листа Мёбиуса гомеоморфен окружности S^1 и потому он может быть подклеен к дыре в сфере.

Проективная плоскость P^2 получается заклеиванием в сфере S^2 одной дыры листа Мёбиуса, а бутылка Клейна — заклеиванием в S^2 двух дыр листами Мёбиуса.

Поскольку $\chi(S^2_p) = 2 - p$, $\chi(M^2) = 0$ и эйлерова характеристика ручки равна -1 , то из аддитивности эйлеровой характеристики следует, что

$$\chi(\Phi_p) = (2 - p) - p = 2(1 - p), \quad (1)$$

$$\chi(\Psi_p) = 2 - p. \quad (2)$$

Оказывается, что приведенными выше примерами исчерпываются все топологические типы связных компактных двумерных многообразий. А именно имеет место следующая теорема К. Жордана.

Теорема 1. *Для того чтобы два связных компактных двумерных многообразия были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый род и были одновременно ориентируемы или неориентируемы.*

Из равенств (1) и (2), связывающих род и эйлерову характеристику, вытекает, что теорема 1 может быть сформулирована так:

Теорема 2. *Для того чтобы два связных компактных двумерных многообразия были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы они были одновременно ориентируемы или неориентируемы и чтобы их эйлеровы характеристики были равны.*

С доказательством этих теорем читатель может ознакомиться в книгах [8], [9].

§ 18. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Формула Эйлера для замкнутых многогранников позволяет дать классификацию топологически правильных многогранников.

Гомеоморфный сфере многогранник P в E^3 назовем *топологически правильным* (ниже для краткости просто «правильный»), если все его грани имеют одно и то же число ребер (обозначим его через m) и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер (обозначим его через n). Очевидно,

$$m \geq 3, n \geq 3. \quad (1)$$

Пусть e — число вершин многогранника P , k — число его ребер и f — число его граней. Так как в каждую вершину P входит n ребер многогранника и каждое ребро соединяет две вершины, то

$$ne = 2k. \quad (2)$$

Аналогично поскольку к каждому ребру многогранника P подходят две грани, то

$$mf = 2k. \quad (3)$$

Подставляя в формулу Эйлера

$$e - k + f = 2 \quad (4)$$

выражения для e и f из равенств (2) и (3), получаем:

$$\frac{2k}{n} - k + \frac{2k}{m} = 2, \quad (5)$$

откуда

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Неравенства (1) и (6) имеют следующие пять пар решений в целых числах m и n : 1) $m = 3, n = 3$; 2) $m = 3, n = 4$; 3) $m = 3, n = 5$, 4) $m = 4, n = 3$; 5) $m = 5, n = 3$.

Из равенств (2) — (5) получаем для этих случаев такие значения e, k и f :

m	n	e	k	f	
3	3	4	6	3	Тетраэдр
3	4	6	12	8	Октаэдр
3	5	12	30	20	Икосаэдр
4	3	8	12	6	Куб
5	3	20	30	12	Додекаэдр

Известно, что эти пять типов топологически правильных многогранников реализуются метрически правильными многогранниками, т. е. в евклидовом пространстве E^3 существуют многогранники, у которых все грани — правильные многоугольники и во всех вершинах правильные многогранные углы. Проведенные выше рассуждения показывают, что других типов правильных многогранников не может быть в силу препятствий топологического характера.

Понятие кривой и поверхности

§ 19. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВА

1. C^p -отображения открытых множеств пространства \mathbf{R}^n в пространство \mathbf{R}^m . Пусть G — открытое множество пространства \mathbf{R}^n (в частности, G может совпадать с \mathbf{R}^n). Рассмотрим отображение $f: G \rightarrow \mathbf{R}^m$, заданное системой равенств:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$. Будем говорить, что отображение f является дифференцируемым отображением класса C^p ($p \geq 1$), если функции f_1, \dots, f_m обладают всеми непрерывными частными производными до порядка p включительно.

Впредь всегда будем считать, что $n \leq m$, $p \geq 1$.

Пусть φ — гомеоморфизм между открытыми множествами G и G' пространства \mathbf{R}^n ; φ называется C^p -диффеоморфизмом, если φ и φ^{-1} являются C^p -отображениями. Множества G и G' при этом называются C^p -диффеоморфными. C^p -диффеоморфизм между множествами G и G' задается системой равенств

$$\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ x'_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2)$$

где $(x_1, \dots, x_n) \in G$ и $(x'_1, \dots, x'_n) \in G'$. Из курса математического анализа известно (см., например, [10], [11]), что якобиан отображения φ $I(\varphi) \neq 0$. Известно также, что если отображение φ , задаваемое системой равенств (2), принадлежит классу C^p и в каждой точке $x \in G$ якобиан $I(\varphi) \neq 0$, то у каждой точки $x \in G$ есть такая окрестность U_x , что сужение отображения φ на эту окрестность является C^p -диффеоморфизмом между U_x и $\varphi(U_x)$. Кроме того, отметим, что суперпозиция C^p -диффеоморфизмов является C^p -диффеоморфизмом.

Пусть C^p -отображение f открытого множества $G \in \mathbf{R}^n$ в \mathbf{R}^m задается системой равенств

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \dots \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (3)$$

$n \leq m, p \geq 1$. Как известно из курса математического анализа, одной из важнейших характеристик дифференцируемого отображения является ранг якобиевой матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

А именно имеет место следующее утверждение: *если ранг якобиевой матрицы (4) равен n , то у каждой точки $x \in G$ существует окрестность U_x , такая, что сужение отображения f на U_x есть гомеоморфное отображение класса C^p множества U_x на множество $f(U_x)$* . Это утверждение доказано, например, в книге [11], но в курсах математического анализа для педагогических институтов оно обычно не приводится. Поэтому остановимся на краткой схеме доказательства указанного утверждения. Для простоты рассмотрим случай $n = 2, m = 3$.

Не нарушая общности, будем считать, что отличен от нуля в точке $x \in G$ определитель второго порядка, стоящий в левом верхнем углу матрицы (4). Поскольку этот определитель является якобианом системы функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (5)$$

то по упомянутой выше теореме эта система допускает обращение

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2), \\ x_2 = g_2(y_1, y_2) \end{cases} \quad (6)$$

в окрестности U_x точки $x \in G_p$, причем отображение f^* , задаваемое равенствами (5), является C^p -диффеоморфизмом между множествами U_x и $f^*(U_x)$. Подставляя в $f_3(x_1, x_2)$ вместо x_1, x_2 их выражения через y_1, y_2 по формулам (6), получим, что множество $f(U_x)$ является множеством точек вида

$$(y_1, y_2, \tilde{f}_3(y_1, y_2)),$$

где функция $\tilde{f}_3 \equiv f_3(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2))$ принадлежит классу C^p . Отсюда видно, что отображение \tilde{f}_* , ставящее в соответствие точкам $(y_1, y_2) \in f^*(U_x)$ точки $(y_1, y_2, \tilde{f}_3(y_1, y_2)) \in f(U_x)$, является гомеоморфным отображением класса C^p множества $f^*(U_x)$ на множество $f(U_x)$. Но тогда и отображение $f = \tilde{f}_* \cdot f^* : U_x \rightarrow f(U_x)$ является гомеоморфным отображением класса C^p .

C^p -отображение $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$, где $G \subset \mathbf{R}^n, n \leq m, p \geq 1$, будем называть *погружением класса C^p* , или C^p -погружением, если ранг матрицы (4) для всех точек $x \in G$ равен n . В силу доказанного выше утверждения C^p -погружение $f : G \rightarrow \mathbf{R}^m$ является погружением в смысле определения, приведенного в § 11.

C^p -погружение f называется C^p -вложением, если f является гомеоморфизмом между G и $f(G)$ (топология на $f(G)$ индуцирована пространством R^m).

2. Векторнозначные функции. С понятием дифференцируемого отображения тесно связано постоянно используемое в дифференциальной геометрии понятие векторнозначной функции одного, двух и нескольких скалярных аргументов со значениями в множестве векторов евклидова пространства.

Пусть I — числовой интервал (случай бесконечных пределов не исключается), и пусть для каждого $t \in I$ определен вектор $\bar{r}(t)$ из множества V^m векторов евклидова пространства E^m . Тогда говорят, что на I задана векторнозначная функция, или *вектор-функция* одного скалярного аргумента.

Если в пространстве E^m ввести декартову систему координат O, x_1, \dots, x_m и вектор $\bar{r}(t)$ откладывать от точки O , то вектор-функция $\bar{r}(t)$ задаст отображение, ставящее в соответствие каждому $t \in I$ конец радиус-вектора $\overline{OM} = \bar{r}(t)$. Это отображение в координатах x_1, \dots, x_m задается равенствами

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_m = x_m(t) \quad (7)$$

и является, очевидно, C^p -отображением, если функции $x_i(t) \in C^p, i = 1, \dots, m$.

Поскольку V^m является линейным метрическим пространством, то для вектор-функций $\bar{r}(t)$ обычным образом определяются такие понятия, как предел в точке, непрерывность, дифференцируемость и т. п., необходимые для изучения дифференциальной геометрии. Остановимся на определении производной вектор-функции и ее свойствах.

Говорят, что вектор-функция $\bar{r}(t)$ дифференцируема в точке $t \in I$, если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Этот предел называют производной вектор-функции $\bar{r}(t)$ в точке $t \in I$ и обозначают через $\bar{r}'(t)$ или $\frac{d\bar{r}}{dt}$. Подобно тому как это делается для скалярных функций, легко доказать, что если вектор-функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке. Если $\bar{r}(t)$ дифференцируема в каждой точке $t \in I$, то говорят, что она дифференцируема на I . Если $\bar{r}(t)$ и $\bar{g}(t)$ дифференцируемы в точке t , а $\lambda(t)$ — дифференцируемая в этой точке скалярная функция, то $\lambda(t)\bar{r}(t), \bar{r}(t) \pm \bar{g}(t)$, скалярное и векторное произведения вектор-функций $\bar{r}(t)$ и $\bar{g}(t)$ дифференцируемые в этой точке функции и имеют место равенства

$$\begin{aligned}
 (\lambda \bar{r})' &= \lambda' \bar{r} + \lambda \bar{r}', \\
 (\bar{r} \pm \bar{g})' &= \bar{r}'(t) \pm \bar{g}'(t), \\
 (\bar{r}, \bar{g})' &= (\bar{r}', \bar{g}) + (\bar{r}, \bar{g}'), \\
 ([\bar{r}, \bar{g}])' &= [\bar{r}', \bar{g}] + [\bar{r}, \bar{g}'].
 \end{aligned}$$

Докажем, например, третье равенство. Имеем:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\bar{r}(t + \Delta t), \bar{g}(t + \Delta t)) - (\bar{r}(t), \bar{g}(t))}{\Delta t} = \\
 &= \frac{(\bar{r}(t + \Delta t), \bar{g}(t + \Delta t)) - (\bar{r}(t), \bar{g}(t + \Delta t))}{\Delta t} + \\
 &+ \frac{(\bar{r}(t), \bar{g}(t + \Delta t)) - (\bar{r}(t), \bar{g}(t))}{\Delta t} = \left(\frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}, \bar{g}(t + \Delta t) \right) + \\
 &+ \left(\bar{r}(t), \frac{\bar{g}(t + \Delta t) - \bar{g}(t)}{\Delta t} \right).
 \end{aligned}$$

Так как $\bar{r}(t)$ и $\bar{g}(t)$ дифференцируемы в точке t и $\bar{g}(t)$ в этой точке непрерывна, то, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим доказываемое равенство. Аналогично доказываются и остальные равенства.

Если в E^m ввести декартовы координаты O, x_1, \dots, x_m , соответствующие ортонормированному базису $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ в V^m , то

$$x_i = (\bar{r}(t), \bar{e}_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Отсюда, учитывая правило дифференцирования скалярного произведения и тот факт, что производная постоянного вектора равна нулевому вектору, получаем равенства

$$x_i'(t) = (\bar{r}'(t), \bar{e}_i), \quad \dots, \quad x_m'(t) = (\bar{r}'(t), \bar{e}_m).$$

Следовательно,

$$\bar{r}'(t) = x_1'(t)\bar{e}_1 + \dots + x_m'(t)\bar{e}_m. \quad (8)$$

Таким образом, вектор-функция дифференцируема тогда и только тогда, когда дифференцируемы ее координаты, причем имеет место (8).

Производная вектор-функции $\bar{r}'(t)$ называется *второй производной* вектор-функции. Аналогично определяются производные любых порядков $\bar{r}^{(k)}(t)$.

Говорят, что $\bar{r}(t)$ принадлежит классу $C^p(I)$, $p \geq 1$, если она обладает на I непрерывными производными всех порядков до p включительно. Подобно тому как это было сделано выше для первой производной, легко показать, что вектор-функция $\bar{r}(t)$ принадлежит классу $C^p(I)$ тогда и только тогда, когда ее координаты $x_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, принадлежат классу $C^p(I)$. Отметим, что C^p -отображение (7), задаваемое вектор-функцией $\bar{r}(t)$, является C^p -погружением интервала I в R^m тогда и только тогда, когда $|\bar{r}'(t)| \neq 0$ для всех точек $t \in I$. Это следует из того, что якобиева матрица в этом случае имеет вид:

$$(x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_m(t)),$$

а ее ранг равен 1 в том и только в том случае, когда $x'_1 \neq 0 \vee \dots \vee x'_m \neq 0$.

Перейдем к рассмотрению вектор-функций двух скалярных аргументов. Пусть G — открытое множество в пространстве R^2 , и пусть определено отображение множества G в V^m (в дальнейшем в качестве G чаще всего будем рассматривать открытый прямоугольник $D = \{(u, v) \mid a < u < b, c < v < d\}$). Это отображение называется *вектор-функцией двух скалярных аргументов*.

Если в E^m ввести декартовы координаты $O, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ и откладывать вектор $\bar{r}(u, v)$ в точке O , то вектор-функция $\bar{r}(u, v)$ задаст отображение, ставящее в соответствие точке $(u, v) \in G$ конец радиус-вектора $\overline{OM} = \bar{r}(u, v)$. Это отображение в координатах задается равенствами

$$x_1 = x_1(u, v), x_2 = x_2(u, v), \dots, x_m = x_m(u, v) \quad (9)$$

и является C^p -отображением, если функции $x_i(u, v) \in C^p(G)$. Для $\bar{r}(u, v)$ понятия предела, непрерывности, частных производных и т. д. вводятся так же, как для вектор-функции одного аргумента. Не останавливаясь на этом подробно, запишем:

$$\bar{r}_u = \frac{\partial x_1}{\partial u} \bar{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u} \bar{e}_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial u} \bar{e}_m,$$

$$\bar{r}_v = \frac{\partial x_1}{\partial v} \bar{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial v} \bar{e}_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial v} \bar{e}_m$$

(здесь $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \frac{\partial x_i}{\partial u}, \frac{\partial x_i}{\partial v}, i = 1, \dots, m$, — частные производные соот-

ветствующих функций по переменным u и v). Наконец, вектор-функция $\bar{r}(u, v)$ принадлежит классу $C^p(G)$ тогда и только тогда, когда ее координаты $x_i(u, v), i = 1, \dots, m$, принадлежат классу $C^p(G)$.

Отметим, что C^p -отображение (9), заданное вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, является C^p -погружением открытого множества G в R^m тогда и только тогда, когда векторы \bar{r}_u и \bar{r}_v неколлинеарны для всех $(u, v) \in G$. Это следует из того, что якобиева матрица в этом случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{1u} & x_{2u} & \dots & x_{mu} \\ x_{1v} & x_{2v} & \dots & x_{mv} \end{pmatrix},$$

а ее ранг равен 2 в том и только в том случае, когда строки матрицы линейно независимы, т. е. $\bar{r}_u \nparallel \bar{r}_v$.

Аналогично вводятся вектор-функции класса C^p любого числа скалярных аргументов.

§ 20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ n -МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

У каждого человека имеется некоторое интуитивное представление о кривой или поверхности. В механике, говоря о движении по кривой, понимаем под кривой траекторию движения материальной точки.

Дадим строгое определение понятий кривой и поверхности. Чтобы были понятны следующие построения, сделаем пояснение, которое для простоты отнесем к понятию кривой (хотя на самом деле оно относится и к поверхности).

Понимание кривой как механической траектории дает рассмотрение отображения интервала I в пространство E^3 (или плоскость E^2), задаваемого вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(t)$, которое имеет следующее наглядное представление: когда параметр t «пробегает» интервал I , то конец радиус-вектора $\bar{r}(t)$, отложенного от точки O , описывает некоторую траекторию в пространстве E^3 (или E^2). При этом параметр t обычно понимают как время. Однако в геометрии представление о кривой как механической траектории является неудовлетворительным. Поясним это на следующем примере. Рассмотрим открытую полуокружность (рис. 37). Она может быть задана аналитически различными способами, например каждой из следующих вектор-функций:

$$\bar{r}(t) = \{\cos t, \sin t\}, t \in]0; \pi[;$$

$$\bar{g}(\tau) = \{\cos 2\tau, \sin 2\tau\}, \tau \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[;$$

$$\bar{h}(\alpha) = \{\cos(\pi - \alpha), \sin(\pi - \alpha)\}, \alpha \in]0; \pi[.$$

Множество точек, описываемое концом радиус-вектора, в каждом из указанных способов задания, одно и то же — полуокружность S_1^+ , но механические траектории, задаваемые вектор-функциями $\bar{r}(t)$, $\bar{g}(\tau)$, $\bar{h}(\alpha)$, различны (вторая отличается от первой скоростью прохождения, а третья — направлением). Для геометрии существенно лишь то, что S_1^+ — полуокружность и не существенно, с какой скоростью и в каком направлении обходится она текущей точкой при том или ином задании. Всякий раз, когда изучается кривая, она задается аналитически с помощью вектор-функции и тем самым описывается как механическая траектория. Но если хотим прийти к понятию кривой в «чистом» виде, то необходимо отвлечься от механических свойств траекторий, т. е. от свойств, связанных со способом аналитического задания кривой. Это достигается с помощью введения некоторого отношения эквивалентности в классе соответствующих погружений.

Итак, рассмотрим всевозможные погружения n -мерных многообразий в некоторое фиксированное многообразие W^m , $n \leq m$. Будем говорить, что погружение $f: M^n \rightarrow W^m$ эквивалентно погружению $g: N^n \rightarrow W^m$, если существует такой гомеоморфизм $\varphi: M^n \rightarrow N^n$, что имеет место равенство $f = g \varphi$ (рис. 38).

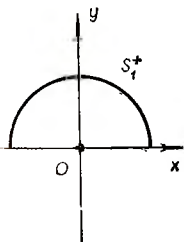


Рис. 37

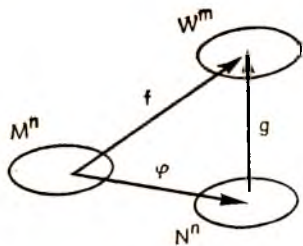


Рис. 38

Введенное отношение является отношением эквивалентности на множестве указанных погружений. Действительно, рефлексивность отношения выполняется, поскольку в качестве указанного выше гомеоморфизма можно взять тождественное отображение, симметрия отношения следует из того, что обратный гомеоморфизм $\varphi^{-1} : N^n \rightarrow M^n$ удовлетворяет равенству $f\varphi^{-1} = g$. Наконец, транзитивность отношения вытекает из того, что произведение гомеоморфизмов есть гомеоморфизм.

Введенное отношение эквивалентности разбивает множество указанных погружений на классы эквивалентности.

Каждый такой класс называется *n-мерной поверхностью* в многообразии W^m . Каждое погружение из этого класса называется *параметризацией* или *параметрической поверхностью*.

Ясно, что поверхность задается какой-либо одной своей параметризацией. Каждая параметризация поверхности F^n в многообразии W^m — это пара (M^n, f) , состоящая из погружаемого *n*-мерного многообразия и погружения f .

Если (M^n, f) и (N^n, g) — две параметризации поверхности F^n , то, как это следует из определения эквивалентных погружений, имеет место равенство $f(M^n) = g(N^n)$, т. е. эквивалентные погружения имеют своим образом одно и то же множество в многообразии W^m .

Возвращаясь к рассмотренному ниже примеру, видим, что вектор-функции $\bar{r}, \bar{g}, \bar{h}$ задают эквивалентные параметризации одной и той же кривой S_1^+ .

Точкой параметрической поверхности называется пара $(x, f(x))$. Простой пример убеждает в том, что нельзя называть точкой параметрической поверхности только точку образа $f(M^n)$ без указания ее прообраза. В самом деле, пусть параметрическая кривая l есть отображение f интервала $I = (a, b)$ в плоскость E^2 , при котором образ $f(I)$ есть фигура, изображенная на рисунке 39 (точке A отвечают два значения параметра t : t_1 и t_2). Если под точкой параметрической кривой l понимать лишь точку указанной фигуры без указания ее прообраза, то информация об l становится неопределенной, ибо при изменении параметра t от a до b точка $f(t)$ может двигаться по фигуре по двум различным траекториям: $C_1AK_1K_2AC_2$ и $C_1AK_2K_1AC_2$.

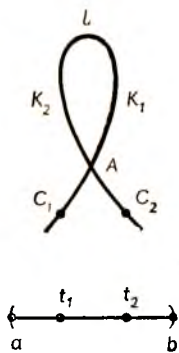


Рис. 39

Понятно, что подобные примеры могут быть построены лишь в том случае, когда нет гомеоморфизма между M^n и $f(M^n)$, т. е. когда f не является вложением. Если f — вложение, то $f(M^n)$ является многообразием, гомеоморфным M^n , и в этом случае параметрическую поверхность можно отождествить

с образом $f(M^n)$. Поскольку все эквивалентные погружения в этом случае тоже являются вложениями, а образы при всех этих вложениях совпадают, то под поверхностью F^n можно понимать множество $f(M^n)$, где f — какая-нибудь параметризация из класса F^n . При этом точками поверхности F^n называют точки множества $f(M^n)$. Такая точка зрения на поверхность, как множество точек, отвечает нашим наглядным представлениям.

Допуская некоторую вольность речи, мы часто называем поверхностью F^n образ многообразия M^n при погружении его в многообразии W^m , хотя в этом случае $f(M^n)$ может не являться многообразием и может иметь различные особенности (например, как на рисунке 39, самопересечение).

Так как погружение есть локальное вложение, то, изучая те свойства поверхности, которые носят локальный характер, т. е. зависят от малой окрестности точки, мы можем всегда считать, что поверхность задана вложением, и отождествлять ее с образом. Именно так будем поступать при изучении дифференциальной геометрии.

Одномерная поверхность в W^m называется *кривой*, а $(m-1)$ -мерная — *гиперповерхностью*. В нашем курсе дифференциальной геометрии будем рассматривать в качестве многообразия W^m евклидово трехмерное пространство E^3 и изучать в этом пространстве кривые и гиперповерхности, которые в этом случае называются просто поверхностями. Кроме того, будут рассматриваться кривые на плоскости E^2 .

Рассмотрим примеры кривых и поверхностей. Для этого требуется привести примеры параметрических кривых и поверхностей, поскольку они полностью определяют соответствующие классы эквивалентности.

Пример 1. Открытая полуокружность, рассмотренная на с. 43, заданная любой из трех приведенных параметризаций f, g, h , является кривой на плоскости E^2 .

Пример 2. Окружность S является кривой на плоскости E^2 (или в пространстве E^3). Одной из ее параметризаций будет включение $i: S^1 \rightarrow E^2$, являющееся вложением одномерного замкнутого многообразия S^1 в многообразии E^2 (или E^3). Если ввести на плоскости E^2 декартову систему координат Oxy с началом в центре окружности S^1 и положение точки на S^1 задавать центральным углом t , отсчитываемым от положительного направления оси Ox , то указанное вложение задается вектор-функцией

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \equiv \cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}, t \in [0, 2\pi].$$

Пример 3. На рисунке 40 изображена кривая, называемая строфоидой, которая определена погружением числовой прямой R^1 в пространство E^2 . Это погружение в декартовой системе координат на плоскости E^2 задается вектор-функцией

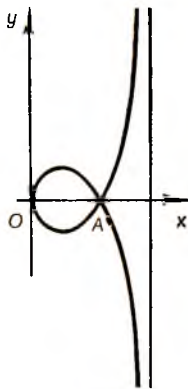


Рис. 40

$$\bar{r} = r(t) \equiv \frac{2at^2}{1+t^2} \bar{i} + \frac{at(t^2-1)}{1+t^2} \bar{j}, \quad a = \text{const} > 0, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Пример 4. Сфера S^2 есть поверхность в трехмерном пространстве E^3 . Одной из ее параметризаций будет включение $i: S^2 \rightarrow E^3$, которое является вложением двумерного многообразия S^2 в E^3 .

Пример 5. Граница P замкнутого выпуклого многогранника является поверхностью в E^3 . Действительно, P , очевидно, является двумерным многообразием. Следовательно, в качестве одной из параметризаций можно взять включение $i: P \rightarrow E^3$, которое является вложением двумерного многообразия P в E^3 .

Пример 6. Рассмотрим отображение $f: R^2 \rightarrow E^3$, заданное равенствами

$$x = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad y = \frac{u(u^2 - 1)}{u^2 + 1}, \quad z = v,$$

где u, v — декартовы координаты на плоскости R^2 , а x, y, z — декартовы координаты в пространстве E^3 . Легко проверить, что f является погружением двумерного многообразия R^2 в трехмерное многообразие E^3 . Это погружение задает поверхность. Нетрудно убедиться в том, что $f(R^2)$ представляет собой цилиндрическую поверхность, направляющая которой — строфоида, лежащая в плоскости x, y , а образующая параллельна оси z (рис. 41).

Легко показать, что плоскость, эллипсоид, гиперболоиды и параболоиды являются поверхностями в пространстве E^3 . В дальнейшем будут приведены еще примеры кривых и поверхностей. Введенное понятие n -мерной поверхности является весьма общим и для нужд классической дифференциальной геометрии, в которой кривые и поверхности изучаются методами математического анализа, вообще говоря, не требуется. Чтобы это пояснить, рассмотрим, например, кривую в E^3 , заданную погружением интервала I в E^3 . Это погружение задается равенствами $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, причем функции $x(t), y(t), z(t)$ могут быть только непрерывными и не иметь даже первых производных. Ясно, что изучение таких функций, а следовательно, и кривой, методами математического анализа невозможно.

Поэтому в дальнейшем будем иметь дело с более узким классом кривых и поверхностей — гладкими кривыми и поверхностями.

§ 21. ГЛАДКИЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ В E^3

Для простоты ограничимся лишь случаем кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Кроме того, сделаем еще одно упрощающее предположение. Поскольку в дифференциальной геометрии, как правило,

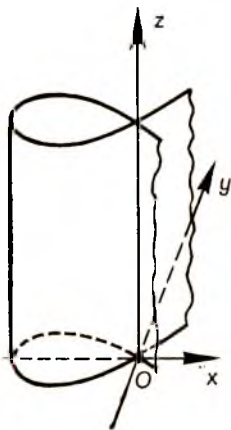


Рис. 41

изучаются лишь те свойства кривых и поверхностей, которые зависят от достаточно малой окрестности точки кривой или поверхности, то можем ограничиться лишь этой окрестностью. Но в таком случае при определении кривой или поверхности в качестве погружаемых многообразий можно рассматривать лишь числовые интервалы при определении кривой и открытые прямоугольники или круги при определении поверхности. При этом, конечно, сужаем множество кривых и поверхностей. Например, окружность уже не войдет в рассматриваемое множество. Однако если из окружности выбросить одну точку, то такая кривая уже войдет в рассматриваемый класс кривых, так как окружность с выколотой точкой гомеоморфна интервалу. То же можно сказать о сфере.

1. Гладкие кривые в E^3 . При определении гладкой кривой пользуемся теми же конструкциями, что и при определении общей кривой, с той разницей, что все встречающиеся отображения заменяем C^p -отображениями ($p \geq 1$).

C^p -погружения $f: (a, b) \rightarrow E^3$ и $g: (\alpha, \beta) \rightarrow E^3$ назовем C^p -эквивалентными, если существует C^p -диффеоморфизм φ между интервалами (a, b) и (α, β) , такой, что имеет место равенство $f = g\varphi$. Пусть погружение f задается вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(t)$ класса C^p , а погружение g — вектор-функцией $\bar{g} = \bar{g}(\tau)$ класса C^p . C^p -диффеоморфизм $\varphi: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$, очевидно, должен задаваться строго возрастающей или убывающей функцией $\tau = \tau(t)$ класса C^p ; в первом случае $\tau'(t) > 0$ и $\tau(a) = \alpha$, $\tau(b) = \beta$, во втором случае $\tau'(t) < 0$ и $\tau(a) = \beta$, $\tau(b) = \alpha$. В силу равенства $f = g\varphi$ эквивалентность погружений f и g означает, что

$$\bar{r}(t) = \bar{g}(\tau(t)). \quad (1)$$

Имеет место и равенство

$$\bar{g}(\tau) = \bar{r}(t(\tau)), \quad (2)$$

где $t(\tau)$ задает обратный диффеоморфизм φ^{-1} . Напомним, что поскольку f и g — C^p -погружения, то $|\bar{r}'(t)| \neq 0$ и $|\bar{g}'(\tau)| \neq 0$.

Рассмотрим всевозможные C^p -погружения интервалов в трехмерное евклидово пространство E^3 (здесь p ($p \geq 1$) — фиксированное число). Введенное выше отношение C^p -эквивалентности является отношением эквивалентности на множестве указанных погружений, т. е. удовлетворяет условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности. Проверку этих условий предоставляем читателям в качестве упражнения.

Введенное отношение на указанном выше множестве разбивает его на классы эквивалентности. Каждый такой класс называется C^p -гладкой кривой или гладкой кривой класса C^p в пространстве E^3 .

Каждое погружение из этого класса называется параметризацией или параметрической кривой класса C^p . Ясно, что C^p -гладкая кривая задается какой-либо одной своей параметризацией класса C^p .

Таким образом, C^p -гладкие кривые выделяются из множества кривых, определенных в предыдущем параграфе, тем, что всякая их па-

раметризация задается вектор-функцией, обладающей непрерывными производными всех порядков до порядка p ($p \geq 1$) включительно. Что же касается понятия точки параметрической кривой, возможности отождествить кривую и множество точек $f(I)$, где $f: I \rightarrow E^3$ — некая параметризация, то все сказанное в предыдущем параграфе остается в силе.

В первых трех примерах кривых, рассмотренных в предыдущем параграфе, приведены гладкие кривые класса C^∞ , так как вектор-функции, задающие их параметризации, обладают непрерывными производными всех порядков.

2. Гладкие поверхности в E^3 . Рассмотрим множество всех C^p -погружений, гомеоморфных открытому кругу областей $G \subset R^2$, в трехмерное евклидово пространство E^3 . Пусть $f: G \rightarrow E^3$ и $g: G' \rightarrow E^3$ — два каких-либо погружения из этого множества. Они называются *C^p -эквивалентными*, если существует C^p -диффеоморфизм φ между областями G и G' , такой, что имеет место равенство $\bar{f} = g\varphi$.

Пусть погружение f задается вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ класса $C^p(G)$, а погружение g — вектор-функцией $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{u}, \bar{v})$ класса $C^p(G')$. C^p -диффеоморфизм φ между областями G и G' задается равенствами

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v), \quad (3)$$

где функции \bar{u}, \bar{v} принадлежат классу C^p , причем, как известно, якобиан системы (3) отличен от нуля в каждой точке области G :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Напомним, что поскольку f является C^p -погружением, то $\bar{r}_u \nparallel \bar{r}_v$. То же можно сказать и о g . В силу равенства $\bar{f} = g\varphi$ имеет место соотношение

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\rho}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v)), \quad (4)$$

а также и равенство

$$\bar{\rho}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{r}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v})), \quad (5)$$

где система равенств $u = u(\bar{u}, \bar{v}), v = v(\bar{u}, \bar{v})$ задает обратный диффеоморфизм φ^{-1} .

Введенное выше отношение C^p -эквивалентности на множестве указанных C^p -погружений удовлетворяет условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности и является отношением эквивалентности. Следовательно, оно разбивает множество всех указанных погружений на классы эквивалентности. Каждый такой класс называется *C^p -гладкой поверхностью* или *гладкой поверхностью класса C^p* в пространстве E^3 .

Каждое погружение из этого класса называется *параметризацией* или *параметрической поверхностью* класса C^p . Ясно, что C^p -гладкая поверхность задается какой-либо одной своей параметризацией класса C^p . Таким образом, гладкая поверхность класса C^p задается вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ класса C^p с условием: в каждой точке области G выполнено соотношение

$$\bar{r}_u \nparallel \bar{r}_v, \text{ т. е. } |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| \neq 0. \quad (6)$$

Все, что касается понятия точки гладкой поверхности, читатель может найти в предыдущем параграфе.

Примеры гладких поверхностей:

1. График функции $z = f(x, y)$ (рис. 42), где функция $f(x, y)$ принадлежит классу C^p , является поверхностью класса C^p . Соответствующее C^p -погружение (на самом деле вложение) имеет вид: $x = x, y = y, z = f(x, y)$, т. е. задается вектор-функцией. Видно, что

$$|\bar{r}_x \times \bar{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \neq 0.$$

2. Пусть S^2 — единичная сфера в трехмерном евклидовом пространстве E^3 . Введем в E^3 декартову систему координат с началом в центре сферы S^2 (рис. 43). Обозначим через \mathcal{E} экватор сферы, лежащий в плоскости x, y , через N, S соответственно северный и южный полюсы. Пусть M — точка пересечения положительной полуоси x с экватором \mathcal{E} . Выбросим из множества точек сферы меридиан NMS , т. е. рассмотрим открытое множество $U = S^2 \setminus NMS$. Пусть P — любая точка этого множества, а P_1 — точка пересечения меридиана NPS с экватором \mathcal{E} . Поставим в соответствие точке P пару чисел (u, v) , где u — величина угла между лучами $[OM]$ и $[OP_1]$, а v — величина угла между лучами $[OP_1]$ и $[OP]$, причем будем считать, что $u \in (0, 2\pi)$, а $v \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (в полусфере, где $z < 0, v < 0$). Легко видеть, что описанное соответствие является гомеоморфизмом области $U \subset S^2$ на открытый прямо-

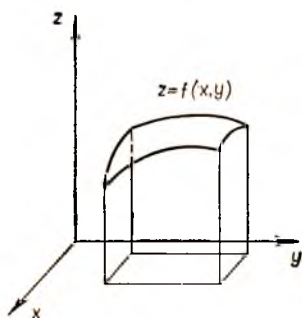


Рис. 42

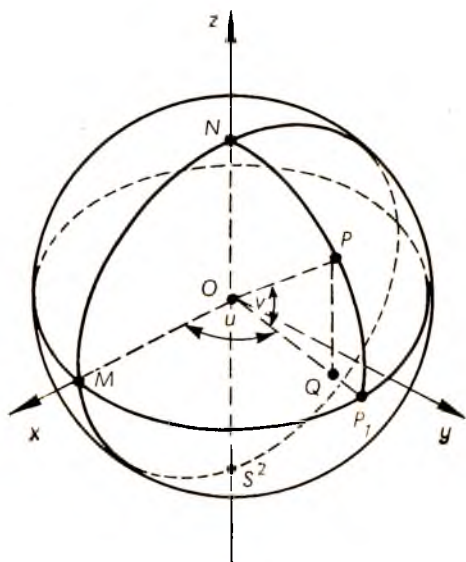


Рис. 43

угольник $D = \left\{ (u, v) \mid u \in (0, 2\pi), v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$. Координаты u, v часто называют географическими координатами на сфере S^2 . (На самом деле эти координаты введены не на всей сфере, а на ее части U ; всю сферу невозможно отобразить на множество пространства \mathbb{R}^3 гомеоморфно.) Пусть Q — проекция точки $P \in U$ на плоскость x, y . Тогда для координат x, y, z точки P имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} x &= |OQ| \cos u = \cos u \cos v, & y &= |OQ| \sin u = \sin u \cos v, \\ & & z &= \sin v. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенства (7) задают вложение класса C^∞ (x, y и z — бесконечно дифференцируемые функции от u, v) двумерного многообразия D в E^3 . Множества $f(D)$ и U совпадают. Вложение f является одной из параметризаций поверхности $U = S^2 \setminus NMS$ класса C^p .

3. Поверхность из примера 6 в § 20 является гладкой, а из примера 5 не является гладкой.

4. Пусть M — множество точек пространства E^3 , заданное в декартовых координатах x, y, z уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (8)$$

причем для каждой точки $P \in M$ выполнены условия: 1) $F'_x, F'_y, F'_z \in C^{p-1}$ ($p \geq 1$) и 2) $F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z > 0$. Пусть для определенности в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ производная $F'_x(P_0)$ отлична от нуля. Тогда по известной теореме математического анализа существует такая окрестность U_{P_0} точки $P_0 \in M$, что множество $M \cap U_{P_0}$ задается явным уравнением $z = f(x, y) \in C^p(D)$, где D — некоторая окрестность точки $P'_0(x_0, y_0, 0)$ — проекции точки P_0 на плоскость x, y . Следовательно, множество $M \cap U_{P_0}$ есть образ при C^p -вложении области D в E^3 , т. е. является гладкой поверхностью класса C^p . Аналогичные рассуждения проводятся в случае $F'_x(P_0) \neq 0$ или $F'_y(P_0) \neq 0$. Таким образом, при выполнении указанных выше условий 1—2 в достаточно малой окрестности U любой точки M множество $M \cap U$ является гладкой поверхностью. (На самом деле множество M в целом является поверхностью в смысле определения, данного в § 20. M не является поверхностью в смысле определения, данного в п. 2, § 21, из-за того, что, стремясь упростить весьма громоздкое определение гладкой поверхности, мы сузили класс погружаемых многообразий, рассматривая лишь гомеоморфные открытому кругу области.)

Теория кривых

§ 22. КАСАТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ

Пусть L — некоторая кривая и X — точка кривой L . Возьмем на L другую точку Y , отличную от X , и проведем прямую l_{XY} через точки X и Y (рис. 44). Если прямые l_{XY} сходятся к некоторой прямой l_X , когда Y стремится к X , то прямая l_X называется *касательной прямой* к кривой L в точке X . При этом считаем, что прямые l_{XY} сходятся к l_X , если угол между ними стремится к нулю, когда $Y \rightarrow X$, и пишем $l_{XY} \rightarrow l_X$ или $l_X = \lim_{Y \rightarrow X} l_{XY}$.

Из данного определения следует, что в каждой своей точке любая кривая имеет не более одной касательной прямой, т. е. если касательная прямая существует, то она единственна. Вопрос о существовании касательной прямой решается следующей теоремой.

Теорема. *В каждой точке C^1 -гладкой кривой L существует касательная прямая к L . Если $r = \bar{r}(t)$ — некоторая C^1 -гладкая параметризация кривой L , то касательная к L -прямая l_X в точке $X(t_0)$ кривой L параллельна вектору производной $\bar{r}'(t_0)$ в этой точке* (рис. 45).

Доказательство. Если $\bar{r}(t)$ — C^1 -гладкая параметризация кривой L , то производная этой вектор-функции в любой точке отлична от нуля; в частности, и в рассматриваемой точке $X(t_0)$ вектор $\bar{r}'(t_0) \neq 0$. Поэтому через точку $X(t_0)$ можно провести единственную прямую l_X , параллельную вектору $\bar{r}'(t_0)$. Покажем, что l_X — касательная прямая к L в точке $X(t_0)$.

Возьмем на L точку $Y(t_0 + \Delta t)$, отличную от $X(t_0)$, и проведем через X и Y прямую l_{XY} . Вектор $\overline{XY} = \Delta \bar{r} = \bar{r}(t_0 + \Delta t) - \bar{r}(t_0)$ будет направляющим вектором прямой l_{XY} . Следовательно, угол α между прямыми l_X и l_{XY} равен углу между их ненулевыми направляющими векторами $\bar{r}'(t_0)$ и $\Delta \bar{r}$. Поэтому имеем, что

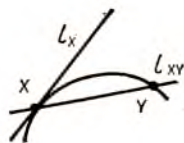


Рис. 44

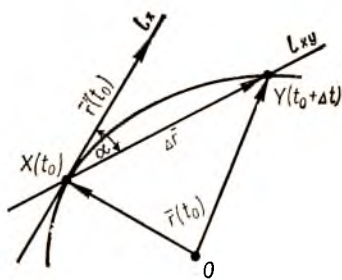


Рис. 45

$$\sin \alpha = \frac{|\Delta \bar{r} \times \bar{r}'(t_0)|}{|\Delta \bar{r}| |\bar{r}'(t_0)|} = \frac{\left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \times \bar{r}'(t_0) \right|}{\left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right| |\bar{r}'(t_0)|} \rightarrow \frac{|\bar{r}'(t_0) \times \bar{r}'(t_0)|}{|\bar{r}'(t_0)|^2} = 0,$$

т. е. прямые l_{XY} сходятся к l_X при $Y \rightarrow X$. Итак, l_X — касательная к кривой L в точке X .

Эта теорема позволяет написать уравнение касательной прямой. Точка Z лежит на l_X тогда и только тогда, когда векторы \overline{XZ} и $\bar{r}'(t_0)$ коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда $\overline{XZ} = \bar{\lambda} \bar{r}'(t_0)$, где λ — вещественное число. Поэтому если $\bar{\rho} \bar{\lambda} = \overline{OZ}$, то $\bar{\rho}(\lambda) = \overline{OX} + \overline{XZ}$ и вектор-функция

$$\bar{\rho}(\lambda) = \bar{r}(t_0) + \lambda \bar{r}'(t_0) \quad (1)$$

задает касательную прямую l_X .

Введем в пространстве декартовы координаты X, Y, Z с началом в точке O , и пусть $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$. Тогда направляющий вектор $\bar{r}'(t_0)$ касательной прямой l_X в этой системе имеет координаты $x'(t_0), y'(t_0)$ и $z'(t_0)$, и потому каноническое уравнение касательной прямой l_X пишем как уравнение прямой, проходящей через точку $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ в направлении вектора $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \quad (2)$$

Для случая плоской кривой, заданной явно уравнением $y = y(x)$, из уравнений (2), учитывая, что $x = t$ и что участвуют лишь переменные x и y , получаем:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0). \quad (3)$$

З а м е ч а н и е. Можно определить касательную прямую l к кривой L в точке X следующим образом. Пусть Y — некоторая точка кривой L , отличная от X , d — расстояние между X и Y (в пространстве, т. е. $d = |XY|$). Тогда прямая l называется касательной, если отношение расстояния h от Y до l к расстоянию $d = |XY|$ стремится к нулю, когда $Y \rightarrow X$ (рис. 46). Из этого определения, во-первых,

следует, что $h \rightarrow 0$, если l — касательная прямая, т. е. l проходит через X . И во-вторых, замечая, что $\frac{h}{d} = \sin \alpha$, где α — угол

между l и секущей прямой XY , убеждаемся в равносильности этого подхода к определению касательной к данному ранее. Отмеченное свойство касательной прямой показывает, что в окрестности точки касания кривая отклоняется от своей касательной прямой на расстояния, порядок которых выше порядка бесконечно малой величины $d = |\Delta \bar{r}|$.

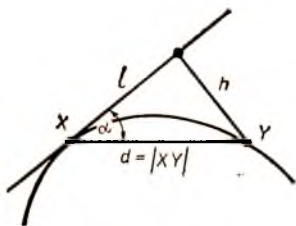


Рис. 46

§ 23. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

1. Порядок точек на кривой. Пусть L — незамкнутая кривая в E^3 , т. е. класс эквивалентных между собой погружений в E^3 числового интервала. Для трех различных точек X, Y, Z кривой L естественным образом определяется отношение «между». А именно говорим, что X лежит между Y и Z , если для некоторой параметризации кривой L значение параметра, соответствующего точке X , лежит между значениями параметров, соответствующих точкам Y и Z . Напомним, что переход от одной параметризации кривой L к любой другой ее параметризации всегда осуществляется с помощью строго монотонной замены параметра — гомеоморфизма числового интервала на числовой интервал. Поскольку такая замена сохраняет отношение «между» для троек точек числовых интервалов, то введенное выше с помощью конкретной параметризации кривой L отношение «между» для троек точек на этой кривой не зависит от выбранной ее параметризации, а зависит лишь от данной тройки различных точек на кривой L .

Из сказанного выше следует, что отношение «между» для троек различных точек незамкнутой кривой обладает теми же свойствами, какими оно обладает для троек различных точек на евклидовой прямой, а потому упорядоченность точек незамкнутой кривой такая же, как упорядоченность точек на евклидовой прямой. В частности, на незамкнутой кривой можно ввести ровно два направления.

Не давая точных определений, отметим, что аналогичные рассуждения для замкнутой кривой, которая есть класс эквивалентных погружений окружности в E^3 , показывают, что упорядоченность точек замкнутой кривой такая же, как упорядоченность точек окружности.

2. Дуга кривой. Пусть L — незамкнутая кривая в E^3 , а X и Y — две различные точки кривой L . *Дугой кривой L* с концами в точках X и Y называется множество точек кривой L , состоящее из всех точек, лежащих между X и Y , а также содержащее точки X и Y . Дугу кривой L с концами в точках X и Y обозначаем так: $L[XY]$. Если L — замкнутая кривая, то любые две различные точки X и Y определяют на L две дуги с концами в точках X и Y подобно тому, как две точки окружности определяют на ней две дуги с концами в этих точках.

Из определения дуги $L[XY]$ кривой L следует, что для каждой параметризации кривой L точкам ее дуги $L[XY]$ в области параметров соответствует числовой отрезок. Поэтому дуга параметрической кривой является путем, а дуга кривой — класс соответствующих эквивалентных путей. Напомним, что путь в произвольном топологическом пространстве — это непрерывное отображение числового отрезка в это пространство. Когда же рассматриваем дугу параметрической кривой в E^3 , то соответствующий ей путь является погружением в E^3 числового отрезка из области параметров, как сужение погружения, которое определяет всю параметрическую кривую.

3. Длина дуги кривой. Пусть $L[XY]$ — дуга кривой L . Возьмем на $L[XY]$ монотонную конечную последовательность точек $X_0 = X$,

$X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = Y$. (Говоря, что последовательность монотонна, имеем в виду, что каждая точка X_i лежит между X_{i-1} и X_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$.) Ломаную с вершинами в точках X_0, X_1, \dots, X_n будем называть правильно вписанной в дугу $L[X_0Y]$. Теперь можно дать следующее определение: *длиной дуги кривой* называется точная верхняя граница длин всевозможных правильно вписанных в нее ломаных. Если длина дуги кривой конечна, то эта дуга называется *спрямляемой*. Кривая называется *спрямляемой*, если любая ее дуга спрямляема.

Любая ломаная, правильно вписанная в дугу кривой, является такой же правильно вписанной ломаной одновременно для всех путей, задающих данную дугу. Поэтому длина дуги кривой есть одновременно длина всех путей, представляющих данную дугу кривой. Тем самым вопросы о спрямляемости дуги кривой и о нахождении ее длины сводятся к вопросам о спрямляемости пути и его длине. Эти вопросы, как известно, решаются в курсе математического анализа, и поэтому приведем лишь формулировку соответствующей теоремы, отсылая читателей за ее доказательством к любому курсу математического анализа.

Теорема. *Любая дуга C^1 -гладкой кривой L спрямляема. Если $\vec{r} = \vec{r}(t)$ — C^1 -гладкая параметризация кривой L , а $X(t)$ — точка кривой L , соответствующая значению t в этой параметризации, то длина любой дуги $L[X(t_1)X(t_2)]$ кривой L , где $t_1 < t_2$, вычисляется по формуле*

$$s(L[X(t_1)X(t_2)]) = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}'(t)| dt, \quad (1)$$

или, что то же самое для координатного представления $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$, по формуле

$$s(L[X(t_1)X(t_2)]) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (2)$$

З а м е ч а н и е. Для длины дуги графика функции $y = y(x)$ из (2) вытекает частный случай этой формулы

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (3)$$

4. Естественный параметр. Среди класса всех эквивалентных друг другу параметризаций заданной C^1 -гладкой кривой выделяются те, в которых параметром является длина переменной дуги (со знаком), отсчитываемая от фиксированной точки кривой. Такие параметризации и параметр называются *естественными*. Через них удобно выражаются геометрические свойства кривой, и они сами выражают одно из таких свойств — являются длиной переменной дуги со знаком, один конец которой фиксирован. Перейдем к точным определениям.

Пусть L — C^1 -гладкая незамкнутая кривая, а вектор-функция

$\bar{r} = \bar{r}(t)$, заданная на интервале (α, β) , является ее C^1 -гладкой параметризацией (не исключено, что $\alpha = -\infty$, или $\beta = +\infty$). Через $X(t)$ обозначим точку кривой L , которая соответствует значению параметра t в этой параметризации. Фиксируем некоторую точку $X(t_0)$ кривой L и положим для любого $t \in (\alpha, \beta)$

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\bar{r}'(t)| dt. \quad (4)$$

Функция $s(t)$ определена для всех $t \in (\alpha, \beta)$. Она непрерывно дифференцируема и строго монотонно возрастает, так как

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t |\bar{r}'(t)| dt \right) = |\bar{r}'(t)| > 0. \quad (5)$$

Из равенств (1) и (4) следует, что значение функции $s(t)$ равно длине дуги кривой $L [X(t_0)X(t)]$ при $t > t_0$, равно нулю при $t = t_0$ и равно минус длине дуги кривой $L [X(t)X(t_0)]$ при $t < t_0$, т. е. равно длине со знаком переменной дуги кривой L , один конец которой фиксирован в точке $X(t_0)$, а другой совпадает с точкой $X(t)$.

Функция $s(t)$ диффеоморфно отображает интервал (α, β) на интервал (γ, δ) , где $\gamma = \lim_{t \rightarrow \alpha} s(t)$, а $\delta = \lim_{t \rightarrow \beta} s(t)$; может быть $\gamma = -\infty$, а $\delta = +\infty$. Поэтому существует обратная для $s(t)$ функция $t = t(s)$, определенная на интервале (γ, δ) . Параметризация кривой

$$\bar{\rho}(s) = \bar{r}(t(s)), \quad s \in (\gamma, \delta), \quad (6)$$

полученная из ее параметризации $\bar{r}(t)$ заменой параметра t на параметр s , называется *естественной параметризацией кривой L* , а параметр s называется *естественным параметром кривой L* .

Отметим некоторые простые свойства, связанные с естественной параметризацией.

Л е м м а 1. Если $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$ — естественная параметризация C^1 -гладкой кривой L , то вектор $\frac{d\bar{\rho}}{ds}$ единичный, т. е. $\left| \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя равенство (6), получаем

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}. \quad (7)$$

Так как функции $t(s)$ и $s(t)$ взаимно обратны, то из (5) следует, что

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\bar{r}'(t)|}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и переходя в (7) к равенствам модулей, получаем:

$$\left| \frac{d\bar{\rho}}{ds} \right| = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| \cdot \frac{1}{|\bar{r}'(t)|} = 1.$$

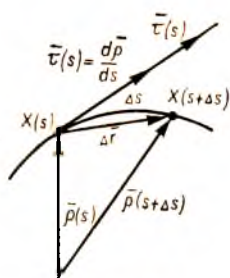


Рис. 47

В силу результатов § 22 вектор $\frac{d\bar{\rho}}{ds}$, отложенный из соответствующей точки $X(s)$ кривой L , является вектором касательной к кривой L в этой точке. В дальнейшем он именуется единичным вектором касательной к L и обозначается через $\bar{\tau}(s)$ (рис. 47).

Из равенства (4) (или, что то же самое, из леммы 1 и инвариантности формы первого дифференциала) непосредственно вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 2. *Для любой параметризации $\bar{r}(t)$ C^1 -гладкой кривой L имеет место равенство*

$$|d\bar{r}| = |ds|. \quad (9)$$

Если теперь вспомнить о том, что первый дифференциал эквивалентен приращению функции, то из равенства (9) вытекают следующие соотношения эквивалентности:

$$|\Delta\bar{r}| \sim |d\bar{r}| = |ds| \sim |\Delta s|. \quad (10)$$

Соотношения (10) означают, что у гладкой кривой длина бесконечно малой дуги $|\Delta s|$ или, если параметр считать естественным, $|ds| = |\Delta s|$, эквивалентна длине стягивающей ее хорды, т. е. модулю вектора $\Delta\bar{r}$ (см. рис. 47). Эту эквивалентность мы в дальнейшем неоднократно используем.

П р и м е р. Найдем натуральную (естественную) параметризацию кривой, которая задана параметризацией: $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$. Фиксируем на кривой точку, для которой значение параметра $t = 0$. Эта точка является, как видно, началом координат O . Найдем длину переменной дуги OM кривой (точке M отвечает параметр t). Для этого подсчитаем длину вектора

$$|\bar{r}'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Имеем:

$$x' = 1 - \cos t, \quad y' = \sin t, \quad z' = 2 \cos \frac{t}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} |\bar{r}'(t)| &= \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} = \\ &= \sqrt{2(1 - \cos t) + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$s = s(\sphericalangle OM) = s(t) = \int_0^t 2 \cdot dt = 2t, \quad \text{или } t = \frac{s}{2}.$$

Получаем естественную параметризацию указанной выше кривой:

$$x = \frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2}, \quad y = 1 - \cos \frac{s}{2}, \quad z = 4 \sin \frac{s}{4}.$$

Легко подсчитать, что $\left| \frac{d\bar{r}}{ds} \right| = 1$.

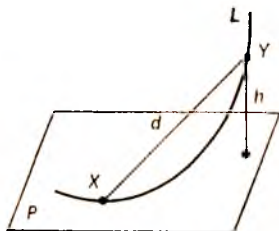


Рис. 48

§ 24. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ

Пусть L — некоторая кривая, X — фиксированная точка этой кривой, Y — произвольная точка кривой L , $d = |XY|$ — расстояние между X и Y , P — некоторая плоскость и h — расстояние от Y до плоскости P (рис. 48).

Плоскость P называется *соприкасающейся* плоскостью кривой L в точке X , если отношение $\frac{h}{d^2}$ стремится к нулю, когда точка $Y \rightarrow X$.

Во-первых, из этого определения следует, что если P — соприкасающаяся плоскость кривой L в точке X , то $h \rightarrow 0$, т. е. P проходит через X .

Во-вторых, из данного определения вытекает, что точки кривой L в окрестности точки X удалены от ее соприкасающейся плоскости P в этой точке на бесконечно малую величину h , порядок которой выше второго относительно величины $d = |\Delta\bar{r}|$.

Сравните этот вывод с подходом к определению касательной прямой, данным в замечании в § 22.

Из данного определения следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то эта плоскость является соприкасающейся для этой кривой в любой ее точке. Например, плоскость, в которой лежит окружность, является ее соприкасающейся плоскостью в любой точке окружности, а также любая плоскость, проходящая через прямую, является соприкасающейся плоскостью этой прямой в любой точке ее. Приведенный пример показывает, что кривая в одной и той же точке может иметь не единственную соприкасающуюся плоскость. Следующая ниже теорема полностью выясняет условия существования и единственности соприкасающейся плоскости. При ее доказательстве, а также в ряде других случаев будет полезна следующая лемма.

Л е м м а. *Коллинеарность, а также неколлинеарность векторов первой и второй производных в данной точке любой C^2 -гладкой параметризации одной и той же C^2 -гладкой кривой не зависит от выбора параметризации, а зависит лишь от выбора точки кривой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{r}(t)$ и $\bar{\rho}(s)$ — две C^2 -гладкие параметризации C^2 -гладкой кривой L , а $t = t(s)$ — тот диффеоморфизм класса C^2 , при котором $\bar{r}(t(s)) = \bar{\rho}(s)$. Дважды дифференцируя последнее равенство, получаем:

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad (1)$$

и

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}. \quad (2)$$

Поэтому векторное произведение

$$\frac{d\bar{\rho}}{ds} \times \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right) \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^3. \quad (3)$$

Так как везде $\frac{dt}{ds} \neq 0$, то из равенства (3) следует, что $\frac{d\bar{\rho}}{ds} \times \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} = 0$ тогда и только тогда, когда $\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 0$, т. е. $\frac{d\bar{\rho}}{ds} \parallel \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}$ тогда и только тогда, когда $\frac{d\bar{r}}{dt} \parallel \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

Т е о р е м а. В каждой точке C^2 -гладкой кривой L существует соприкасающаяся плоскость. Если $\bar{r}(t)$ — некоторая C^2 -гладкая параметризация кривой L , то соприкасающаяся плоскость кривой L в ее точке $X(t)$ параллельна векторам $\bar{r}'(t)$ и $\bar{r}''(t)$.

Следовательно, эта плоскость единственна тогда и только тогда, когда векторы $\bar{r}'(t)$ и $\bar{r}''(t)$ неколлинеарны. Если в точке $X(t)$ векторы $\bar{r}'(t)$ и $\bar{r}''(t)$ коллинеарны, то любая плоскость, проходящая через касательную прямую к L в точке $X(t)$, является соприкасающейся плоскостью кривой L в точке $X(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{r}(t)$ — некоторая C^2 -гладкая параметризация кривой L и $X(t)$ — некоторая точка кривой L . Проведем через точку $X(t)$ некоторую плоскость P и обозначим через \bar{n} вектор единичной нормали к плоскости P (рис. 49). Из произвольной точки $X(t + \Delta t)$ кривой L опустим на P перпендикуляр $X(t + \Delta t)Z$. Длину его обозначим через h , а также положим $d = |X(t)X(t + \Delta t)|$.

Вычислим d^2 и h .

Так как $\overline{X(t)X(t + \Delta t)} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) = \Delta\bar{r}$, то $d^2 = |\Delta\bar{r}|^2 = (\Delta\bar{r}, \Delta\bar{r})$. Далее, поскольку векторы \bar{n} и $\overline{ZX(t + \Delta t)}$ коллинеарны и $|\bar{n}| = 1$, то $h = |ZX(t + \Delta t)| = |\text{пр.}_{\bar{n}} \overline{X(t)X(t + \Delta t)}| = |\text{пр.}_{\bar{n}} \Delta\bar{r}| = |(\Delta\bar{r}, \bar{n})|$.

Итак,

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|(\Delta\bar{r}, \bar{n})|}{(\Delta\bar{r}, \Delta\bar{r})}. \quad (4)$$

По формулам Тейлора имеем:

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}'(t) \Delta t + \bar{\varepsilon}_1(t, \Delta t) \Delta t \quad (5)$$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}'(t) \Delta t + \frac{1}{2} \bar{r}''(t) (\Delta t)^2 + \bar{\varepsilon}_2(t, \Delta t) (\Delta t)^2, \quad (6)$$

где

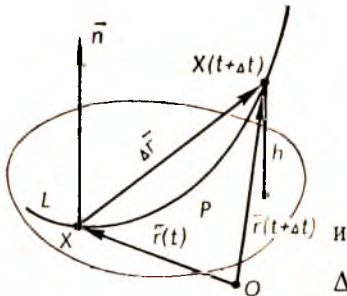


Рис. 49

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_1(t, \Delta t) = 0 \text{ и } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\varepsilon}_2(t, \Delta t) = 0. \quad (7)$$

Подставляя равенство (5) в знаменатель равенства (4), а (6) — в его числитель, получаем:

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|\bar{r}', \bar{n}\rangle \Delta t + \frac{1}{2} \langle \bar{r}'', \bar{n} \rangle (\Delta t)^2 + \langle \bar{\varepsilon}_2, \bar{n} \rangle (\Delta t)^2|}{\langle \bar{r}', \bar{r}' \rangle (\Delta t)^2 + 2 \langle \bar{r}', \bar{\varepsilon}_1 \rangle (\Delta t)^2 + \langle \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_1 \rangle (\Delta t)^2}, \quad (8)$$

или, разделив числитель и знаменатель в равенстве (8) на $(\Delta t)^2 \neq 0$, получаем:

$$\frac{h}{d^2} = \frac{|\bar{r}', \bar{n}\rangle \cdot \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \langle \bar{r}'', \bar{n} \rangle + \langle \bar{\varepsilon}_2, \bar{n} \rangle}{\langle \bar{r}', \bar{r}' \rangle + 2 \langle \bar{r}', \bar{\varepsilon}_1 \rangle + \langle \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_1 \rangle}. \quad (9)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ в правой части равенства (9) знаменатель стремится к $\langle \bar{r}', \bar{r}' \rangle = |\bar{r}'|^2 > 0$. Поэтому $\frac{h}{d^2} \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда числитель в правой части (9) стремится к нулю. Так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \bar{\varepsilon}_2, \bar{n} \rangle = 0$, то это имеет место тогда и только тогда, когда одновременно $\langle \bar{r}', \bar{n} \rangle = 0$ и $\langle \bar{r}'', \bar{n} \rangle = 0$, т. е. векторы \bar{r}' и \bar{r}'' одновременно ортогональны нормали \bar{n} плоскости P , т. е. одновременно параллельны плоскости P . Именно в этом случае $\frac{h}{d^2} \rightarrow 0$, т. е. плоскость P является соприкасающейся. Если $\bar{r}' \nparallel \bar{r}''$, то соприкасающаяся плоскость единственная. Если $\bar{r}' \parallel \bar{r}''$, то в точке $X(t)$ кривая L имеет пучок соприкасающихся плоскостей, проходящих через касательную прямую к L в точке $X(t)$.

Из доказанной теоремы вытекает, что в точке $X(t)$ кривой L , где $\bar{r}' \nparallel \bar{r}''$, вектор $\bar{r}' \times \bar{r}''$ является нормалью к соприкасающейся плоскости. Поэтому если обозначить через \bar{R} радиус-вектор произвольной точки соприкасающейся плоскости, то ее уравнение можно записать через скалярное произведение векторов $\bar{R} - \bar{r}$ и $\bar{r}' \times \bar{r}''$:

$$\langle \bar{R} - \bar{r}, \bar{r}' \times \bar{r}'' \rangle = 0, \quad (10)$$

или, что то же самое, через смешанное произведение векторов $\bar{R} - \bar{r}$, \bar{r}' и \bar{r}'' :

$$\langle \bar{R} - \bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'' \rangle = 0. \quad (11)$$

В координатах последнее равенство запишется так:

$$\begin{vmatrix} x - x(t) & y - y(t) & z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Пример. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости кривой, рассмотренной в § 23, в точке O ($t = 0$). Имеем:

$$x'' = \sin t, y'' = \cos t, z'' = -\sin \frac{t}{2}.$$

В точке O $x = y = z = 0$, $x' = y' = 0$. Подставляя эти значения в уравнение соприкасающейся плоскости (12), получим:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или $x = 0$. Таким образом, соприкасающаяся плоскость к данной кривой в точке O — это координатная плоскость $x = 0$.

§ 25. ТРЕХГРАННИК ФРЕНЕ

В тех точках кривой L , где ее соприкасающаяся плоскость единственна, определяются три взаимно перпендикулярные прямые и три проходящие через них плоскости, носящие название трехгранника Френе. Если эти прямые выбрать за оси координат, то в окрестности начала координат параметрические уравнения кривой можно записать достаточно просто. Определим элементы трехгранника Френе.

Любая прямая, проходящая через точку X кривой L и перпендикулярная ее касательной в этой точке, называется нормалью кривой L в точке X . Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью* кривой. Нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью* кривой. Итак, касательная прямая, главная нормаль и бинормаль являются осями трехгранника Френе (рис. 50). Плоскость, в которой лежат все нормали кривой, называется *нормальной плоскостью*. Плоскость, проходящая через касательную и бинормаль, называется *спрямляющей*. Напомним, что через касательную прямую и главную нормаль проходит соприкасающаяся плоскость.

Зная уравнения касательной прямой

$$\frac{X - X(t)}{X'(t)} = \frac{Y - Y(t)}{Y'(t)} = \frac{Z - Z(t)}{Z'(t)} \quad (1)$$

и соприкасающейся плоскости

$$\begin{vmatrix} X - X(t) & Y - Y(t) & Z - Z(t) \\ X'(t) & Y'(t) & Z'(t) \\ X''(t) & Y''(t) & Z''(t) \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

в произвольной декартовой системе координат, легко написать уравнения остальных элементов трехгранника

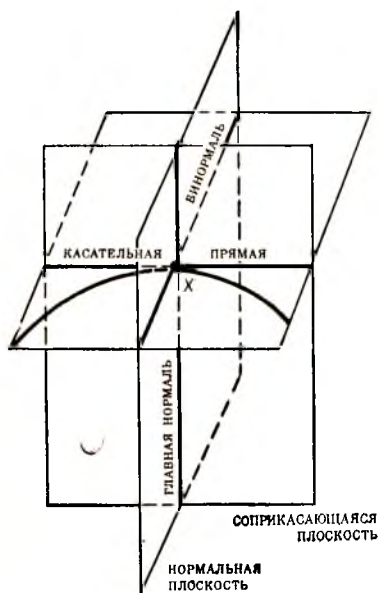


Рис. 50

Френе. Так как вектор $\vec{r}'(t) = X'(t)\vec{i} + Y'(t)\vec{j} + Z'(t)\vec{k}$ является нормалью нормальной плоскости, то уравнение нормальной плоскости имеет вид:

$$X'(t)(X - X(t)) + Y'(t)(Y - Y(t)) + Z'(t)(Z - Z(t)) = 0. \quad (3)$$

Далее, вектор $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ является нормалью соприкасающейся плоскости, т. е. направляющим вектором бинормали. Поэтому уравнение бинормали имеет вид:

$$\frac{x - x(t)}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{y - y(t)}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{z - z(t)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}. \quad (4)$$

Наконец, нормалью спрямляющей плоскости, а также направляющим вектором главной нормали является вектор $\vec{r}' \times (\vec{r}' \times \vec{r}'')$. Предоставим читателю самостоятельно написать уравнения главной нормали и спрямляющей плоскости.

Далее выясним расположение кривой относительно плоскостей трехгранника Френе.

§ 26. КРИВИЗНА КРИВОЙ

1. Кривизна кривой. Перейдем к изучению числовых характеристик регулярной кривой. Их всего две. Первой из них является кривизна кривой, о которой можно сказать, что она характеризует скорость поворота касательной прямой при движении точки вдоль кривой. Перейдем к точным определениям.

Пусть L — кривая (спрямляемая). Обозначим через $l(X)$ и $l(Y)$ касательные прямые к L в точках X и Y соответственно, а через $\varphi(X, Y)$ угол между $l(X)$ и $l(Y)$ и через $s(X, Y)$ длину дуги кривой L между точками X и Y (рис. 51). Если существует предел отношения $\varphi(X, Y)$ и $s(X, Y)$, когда Y стремится к X :

$$k(X) = \lim_{Y \rightarrow X} \frac{\varphi(X, Y)}{s(X, Y)}, \quad (1)$$

то этот предел называется *кривизной* кривой L в точке X . Из этого определения следует, что кривизна кривой всегда неотрицательна.

Рассмотрим примеры. Очевидно, кривизна прямой в любой ее точке равна нулю. Рассмотрим окружность L радиуса R (рис. 52). Если X и Y — две точки окружности L , то угол $\varphi(X, Y)$ между касательными к L в точках X, Y равен углу φ между радиусами OX и OY . Как известно, длина дуги окружности $s(X, Y) = R\varphi$, и потому для окружности

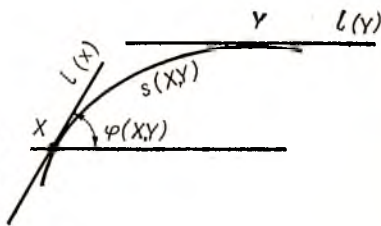


Рис. 51

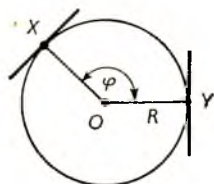


Рис. 52

$$\frac{\varphi(X, Y)}{s(X, Y)} = \frac{\varphi}{R_{\varphi}} = \frac{1}{R} = \text{const} > 0,$$

т. к. кривизна окружности постоянна и равна величине, обратной ее радиусу.

И в общем случае величина, обратная кривизне кривой в точке, называется *радиусом кривизны* в этой точке. Итак, радиус кривизны окружности равен ее радиусу.

Теорема. В каждой точке C^2 -гладкой кривой L существует кривизна. Если $\bar{r}(s)$ — естественная параметризация кривой L , то ее кривизна $k(s)$ в точке $X(s)$ вычисляется по формуле

$$k(s) = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $\bar{r}(s)$ — естественная параметризация кривой L , $X(s)$ и $X(s + \Delta s)$ — две точки кривой L , $\bar{\tau}(s) = \frac{d\bar{r}(s)}{ds}$ и $\bar{\tau}(s + \Delta s) = \frac{d\bar{r}(s + \Delta s)}{ds}$ — единичные векторы касательных к L в точках $X(s)$ и $X(s + \Delta s)$. Тогда угол $\varphi(X(s), X(s + \Delta s))$ равен углу φ между векторами $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\tau}(s + \Delta s)$ (рис. 53), а длина дуги между $X(s)$ и $X(s + \Delta s)$ равна $|\Delta s|$. Откладываем векторы $\overline{OA} = \bar{\tau}(s)$ и $\overline{OB} = \bar{\tau}(s + \Delta s)$ (рис. 54) и, рассматривая равнобедренный треугольник OAB , находим, что

$$|\bar{\tau}(s + \Delta s) - \bar{\tau}(s)| = |\overline{AB}| = 2 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (3)$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(X(s), X(s + \Delta s))}{|\Delta s|} &= \frac{\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{|\bar{\tau}(s + \Delta s) - \bar{\tau}(s)|}{|\Delta s|} = \\ &= \frac{\varphi}{2} \cdot \left| \frac{\frac{d\bar{r}(s + \Delta s)}{ds} - \frac{d\bar{r}(s)}{ds}}{\Delta s} \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

Оба множителя в правой части равенства (4) имеют пределы при $\Delta s \rightarrow 0$: первый из них стремится к единице, второй — к $\left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|$.

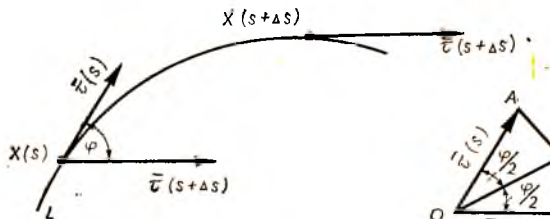


Рис. 53

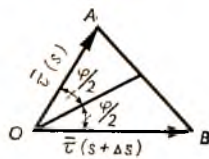


Рис. 54

Поэтому отношение слева в (4) имеет предел, равный $\left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|$, т. е. кривизна $k(s)$ существует и $k(s) = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|$.

2. Первая формула Френе. В дифференциальной геометрии очень часто используется следующее утверждение.

Лемма. Если вектор-функция $\bar{a}(t)$ дифференцируема и $|\bar{a}(t)| = \text{const}$, то векторы $\bar{a}(t)$ и $\frac{d\bar{a}(t)}{dt}$ ортогональны при всех t .

Доказательство. Так как $|\bar{a}(t)| = \text{const}$, то $(\bar{a}(t), \bar{a}(t)) = \text{const}$. Дифференцируя последнее равенство, получаем $2\left(\bar{a}(t), \frac{d\bar{a}(t)}{dt}\right) = 0$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Применим эту лемму к единичному вектору касательной $\bar{\tau}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds}$ C^2 -гладкой кривой L , имеющей вектор-функцию $\bar{r}(s)$ своей естественной параметризацией. Вектор $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$, во-первых, ортогонален единичному вектору касательной $\bar{\tau}(s)$ и поэтому направлен по нормали кривой L и, во-вторых, параллелен соприкасающейся плоскости и поэтому идет по главной нормали кривой L , если $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \neq 0$. В силу теоремы 1 модуль вектора $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ равен кривизне кривой L в соответствующей точке. Поэтому вектор $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ называется вектором кривизны кривой L .

Легко видеть, что ортогональные друг другу векторы $\frac{d\bar{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ неколлинеарны тогда и только тогда, когда $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \neq 0$, т. е. когда $k(s) = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| > 0$. Итак, соприкасающаяся плоскость единственна в тех и только тех точках кривой, где ее кривизна положительна.

Если вектор $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \neq 0$, то единичный вектор $\bar{v}(s) = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right|^{-1} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ называется вектором главной нормали кривой L в точке $X(s)$. Из этого определения следует, что $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = k\bar{v}(s)$, и поскольку $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$, то

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{v}(s). \quad (5)$$

Равенство (5) называется первой формулой Френе.

Через единичные векторы касательной $\bar{\tau}$ и главной нормали \bar{v} определяется единичный вектор бинормали $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{v}$. Единичные векторы $\bar{\tau}$, \bar{v} , $\bar{\beta}$ в трехграннике Френе образуют ортонормированную правую тройку.

3. Вычислительная формула для кривизны. Найдем, как вычисляется кривизна C^2 -гладкой кривой L , заданной произвольной параметризацией $\bar{r}(t)$. Если $\bar{\rho}(s)$ — естественная параметризация этой же кривой, то $k(s) = \left| \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} \right|$. Из равенства (3) § 24 имеем:

$$\left| \frac{d\bar{\rho}}{ds} \times \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right|^3. \quad (6)$$

Так как $\frac{d\bar{\rho}}{ds}$ ортогонален $\frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2}$, то $\left| \frac{d\bar{\rho}}{ds^2} \times \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} \right|$. Кроме того, из равенства (8) § 23 имеем, что $\left| \frac{dt}{ds} \right| = \frac{1}{\left| \frac{ds}{dt} \right|} = \frac{1}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|}$. Подставляя послед-

ние два соотношения в (6) и учитывая, что $k = \left| \frac{d^2\bar{\rho}}{ds^2} \right|$, окончательно получаем:

$$k = \frac{|\bar{r}'_t \times \bar{r}''_{tt}|}{|\bar{r}'_t|^3}, \quad (7)$$

или в координатном виде:

$$k = \frac{\sqrt{\left| \frac{x'y'}{x''y''} \right|^2 + \left| \frac{y'z'}{y''z''} \right|^2 + \left| \frac{z'x'}{z''x''} \right|^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (8)$$

§ 27. КРУЧЕНИЕ

1. Абсолютное кручение. Пусть L — спрямляемая кривая, в каждой точке которой существует единственная соприкасающаяся плоскость. Пусть X и Y — две точки кривой L , P_X и P_Y — соприкасающиеся плоскости кривой L в точках X и Y соответственно, $s(X, Y)$ — длина дуги кривой L между X и Y , а $\psi(X, Y)$ — угол между плоскостями P_X и P_Y . Тогда если существует предел отношения $\frac{\psi(X, Y)}{s(X, Y)}$, когда $Y \rightarrow X$, то этот предел называется *абсолютным кручением* кривой L в точке X и обозначается через $|\kappa|(X)$, т. е.

$$|\kappa|(X) = \lim_{Y \rightarrow X} \frac{\psi(X, Y)}{s(X, Y)}. \quad (1)$$

Отметим один частный случай. Если L — плоская кривая, в каждой точке которой кривизна положительна, то плоскость, в которой лежит L , является единственной соприкасающейся плоскостью кривой L в любой ее точке. Поэтому абсолютное кручение кривой L равно нулю в любой ее точке.

Теорема 1. В каждой точке C^3 -гладкой кривой L , где кривизна положительна, существует абсолютное кручение. Если $\bar{r}(s)$ — естественная параметризация кривой L и $\bar{\beta}(s)$ — единичный вектор

бинормали кривой L , то в точке $X(s)$ кривой L , где кривизна $k(s) > 0$, абсолютное кручение $|\kappa|(s)$ вычисляется по формуле

$$|\kappa|(s) = \left| \frac{d\bar{\beta}(s)}{ds} \right|. \quad (2)$$

Доказательство. Так как кривизна $k(s)$ кривой L равна модулю второй производной вектор-функции $\bar{r}(s)$, а $\bar{r}(s) \in C^3$, то функция $k(s) \in C^1$. Поэтому если в точке $X(s)$ кривизна $k(s) > 0$, то она положительна и в некоторой окрестности Ω точки $X(s)$ на кривой L . И поэтому в этих точках выполнимы построения, которые проводились при определении абсолютного кручения. Возьмем в Ω точку $Y(s + \Delta s)$, отличную от $X(s)$. Угол $\psi(X, Y)$ между соприкасающимися плоскостями в точках $X(s)$ и $Y(s + \Delta s)$ равен углу между единичными векторами бинормалей $\bar{\beta}(s)$ и $\bar{\beta}(s + \Delta s)$ в этих точках (рис. 55), а $\rho(X, Y)$ — длина дуги кривой L между точками X и Y равна $|\Delta s|$.

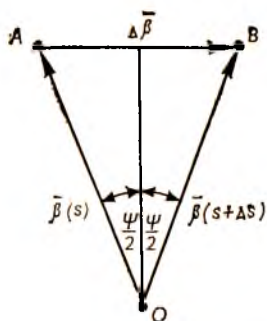


Рис. 55

Дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы из § 26, получаем, что

$$\frac{\psi(X, Y)}{|\Delta s|} = \frac{\frac{\psi(X, Y)}{2}}{2 \sin \frac{\psi(X, Y)}{2}} \cdot \frac{|\bar{\beta}(s + \Delta s) - \bar{\beta}(s)|}{|\Delta s|}. \quad (3)$$

Так как вектор-функция

$$\bar{\beta}(s) = \bar{\tau}(s) \times \bar{\nu}(s) = \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \quad (4)$$

$\bar{r}(s) \in C^3$ и $k(s) = \left| \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right| > 0$ в Ω , то $\bar{\beta}(s) \in C^1$ в Ω , и поэтому в равенстве (3) справа предел при $\Delta s \rightarrow 0$ существует и этот предел равен $\left| \frac{d\bar{\beta}}{ds}(s) \right|$, т. е. существует $|\kappa|(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\psi(X, Y)}{\Delta s} = \left| \frac{d\bar{\beta}}{ds}(s) \right|$.

2. Кручение. Третья формула Френе. Будем считать, что в каждой точке C^3 -гладкой кривой L , заданной естественной параметризацией $\bar{r}(s)$, кривизна $k(s) > 0$. Рассмотрим вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$, который задает поворот соприкасающейся плоскости при движении точки $X(s)$ по кривой L .

Во-первых, вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ ортогонален вектору $\bar{\beta}(s)$, во-вторых, так как $\bar{\beta}(s) = \bar{\tau}(s) \times \bar{\nu}(s)$, то

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \times \bar{\nu}(s) + \bar{\tau}(s) \times \frac{d\bar{\nu}}{ds} = k\bar{\nu} \times \bar{\nu} + \bar{\tau}(s) \times \frac{d\bar{\nu}}{ds} = \bar{\tau}(s) \times \frac{d\bar{\nu}}{ds}, \quad (5)$$

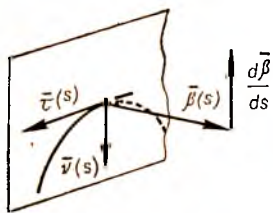


Рис. 56

а поэтому вектор $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ ортогонален вектору $\bar{\tau}(s)$. Из ортогональности $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ одновременно векторам $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\beta}(s)$ следует, что $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ коллинеарен вектору $\bar{\nu}(s)$, т. е.

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}(s) = \lambda(s) \bar{\nu}(s). \quad (6)$$

Равенство (5) показывает, что при движении точки $X(s)$ по кривой L соприкасающаяся плоскость вращается вокруг движущейся касательной прямой (рис. 56).

Так как $|\bar{\nu}| = 1$, то из (6) следует, что

$$\left| \frac{d\bar{\beta}}{ds} \right| = |\lambda|, \quad (7)$$

т. е. из равенств (2) и (7) следует, что абсолютное кручение

$$|\kappa|(s) = |\lambda(s)|. \quad (8)$$

Назовем величину $-\lambda(s)$ *кручением* $\kappa(s)$ кривой L в точке $X(s)$, т. е. по определению положим $\kappa(s) = -\lambda(s)$. Тогда из этого определения и равенства (6) следует, что

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}(s) = -\kappa(s) \bar{\nu}(s). \quad (9)$$

Равенство (9) называется третьей формулой Френе. Из рисунков 57 и 58 видно, что кручение $\kappa(s)$ положительно, когда вращение соприкасающейся плоскости при движении точки $X(s)$ вокруг касательной прямой образует правый винт, и что кручение кривой $\kappa(s)$ отрицательно, если это вращение образует левый винт. Этими свойствами можно было бы определить знак кручения.

3. Вычислительные формулы для кручения. Сначала вычислим кручение для естественной параметризации $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Из третьей формулы Френе (9) имеем:

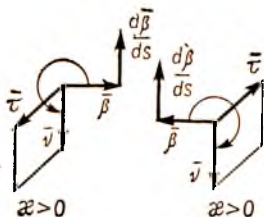


Рис. 57

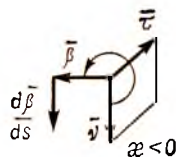


Рис. 58

$$\kappa(s) = - \left(\frac{d\bar{\beta}}{ds}, \bar{\nu} \right). \quad (10)$$

Дифференцируя равенство (4), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\beta}}{ds} &= \frac{1}{k} \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \times \frac{d\bar{r}}{ds^2} + \frac{1}{k} \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} + \left(\frac{1}{k} \right)'_s \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \\ &= \frac{1}{k} \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} + \left(\frac{1}{k} \right)'_s \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя в (10) выражение для $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ из (11) и выражение $\bar{\nu} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}$ и учитывая, что смешанное произведение коллинеарных векторов равно нулю, получаем, что

$$\kappa(s) = - \frac{1}{k^2} \left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right) = \frac{\left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right)}{k^2}. \quad (12)$$

Для произвольной параметризации $\bar{r}(t)$ кривой L имеем:

$$\left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3} \right) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \quad (13)$$

(проверьте самостоятельно равенство (13)) и выражение для k^2 :

$$k^2 = \frac{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right|^3}. \quad (14)$$

Так как

$$\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{1}{\left| \frac{dt}{ds} \right|}, \quad (15)$$

то, подставляя равенства (13), (14) и (15) в равенство (12), получим:

$$\kappa = \frac{\left(\frac{d\bar{r}}{dt}, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}, \frac{d^3\bar{r}}{dt^3} \right)}{\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right|^2}. \quad (16)$$

Читатель самостоятельно может написать равенства (12) и (16) через координаты вектор-функции, задающей кривую L .

П р и м е р. Найдем кривизну и кручение кривой, рассмотренной в примере § 23, в точке O . Для вычисления кривизны, как видно из формулы (8), требуется знать значения производных первых двух порядков в точке O . Напомним, что $x' = 1 - \cos t$, $y' = \sin t$, $z' =$

$= 2 \cos \frac{t}{2}$, $x'' = \sin t$, $y'' = \cos t$, $z'' = -\sin \frac{t}{2}$. В точке O имеем $x' = y' = 0$, $z' = 2$, $x'' = z'' = 0$, $y'' = 1$. Подставляя эти значения в формулу (8), получаем, что

$$k = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2}{8}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Для вычисления кручения необходимо найти третьи производные: $x''' = \cos t$, $y''' = -\sin t$, $z''' = -\frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}$. В точке O имеем $x''' = 1$, $y''' = 0$, $z''' = -\frac{1}{2}$. В координатах числитель в выражении (16) для кручения имеет вид:

$$(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

В точке O этот определитель равен

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -2.$$

Знаменатель в формуле (16) равен произведению квадратов длин векторов \bar{r}' и \bar{r}'' на квадрат синуса угла между ними. В точке O эти векторы ортогональны, так как их скалярное произведение равно $0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$. Длины указанных векторов равны соответственно:

$$|\bar{r}'| = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2, \quad |\bar{r}''| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1.$$

Таким образом,

$$|\bar{r}' \times \bar{r}''|^2 = 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 2,$$

а кручение

$$\kappa = \frac{-2}{2} = -1.$$

В заключение докажем теорему, которая показывает, что кручение характеризует, насколько кривая «неплоская». А именно, имеет место теорема.

Теорема 2. *C^3 -гладкая кривая, кручение которой всюду равно нулю, плоская.*

Доказательство. Зададим кривую L , у которой всюду кручение κ равно нулю, естественной параметризацией $\bar{r}(s)$. Из третьей формулы Френе (9) следует, что вектор-функция $\frac{d\bar{\beta}}{ds} = 0$,

и поэтому вектор $\bar{\beta}(s) = \bar{\beta}_0$ const. Рассмотрим функцию $f(s) = (\bar{r}(s), \bar{\beta}_0)$. Дифференцируя ее, получаем, что

$$\frac{df}{ds} = \left(\frac{d\bar{r}}{ds}, \bar{\beta}_0 \right) + \left(\bar{r}(s), \frac{d\bar{\beta}_0}{ds} \right) = 0$$

Так как касательный вектор $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ ортогонален $\bar{\beta}_0$, а $\frac{d\bar{\beta}_0}{ds} = 0$, то $(\bar{r}(s), \bar{\beta}_0) = C_0 = \text{const}$. Это и означает, что кривая L лежит в плоскости, заданной уравнением $(\bar{r}, \bar{\beta}_0) = C_0$.

§ 28. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ. НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Формулы Френе. Выше были выведены первая и третья формулы Френе, в которых выражены производные вектор-функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\beta}(s)$ через кривизну, кручение и вектор-функцию $\bar{v}(s)$. В целом все формулы Френе (их будет всего три) дают выражение для первых производных направляющих орт $\bar{\tau}(s)$, $\bar{v}(s)$ и $\bar{\beta}(s)$ сопровождающего трехгранника S^3 -гладкой кривой L через эти орты, кривизну $k(s)$ и кручение $\kappa(s)$ кривой L . Остается вывести вторую формулу Френе для $\frac{d\bar{v}}{ds}$. Имеем $\bar{v}(s) = \bar{\beta}(s) \times \bar{\tau}(s)$, поэтому, учитывая первую и третью формулу Френе, запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{ds} &= \frac{d\bar{\beta}}{ds} \times \bar{\tau}(s) + \bar{\beta}(s) \times \frac{d\bar{\tau}}{ds} = -\kappa(s) (\bar{v}(s) \times \bar{\tau}(s)) + \\ &+ \bar{\beta}(s) \times (k(s) \bar{v}(s)) = -k(s) \bar{\tau}(s) + \kappa(s) \bar{\beta}(s). \end{aligned} \quad (1)$$

Итак, формулы Френе имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}}{ds} &= k(s) \bar{v}(s), \\ \frac{d\bar{v}}{ds} &= -k(s) \bar{\tau}(s) + \kappa(s) \bar{\beta}(s), \\ \frac{d\bar{\beta}}{ds} &= -\kappa(s) \bar{v}(s). \end{aligned} \quad (2)$$

Полезно запомнить, что матрица коэффициентов в формулах (2) кососимметрична:

$$\begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \kappa(s) \\ 0 & -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2. Расположение кривой относительно сопровождающего трехгранника. Имея формулы Френе, можно описать расположение S^3 -гладкой кривой L в окрестности точки, где кривизна положительна относительно плоскостей сопровождающего трехгранника. Эта задача решается построением проекций кривой на указанные плоскости.

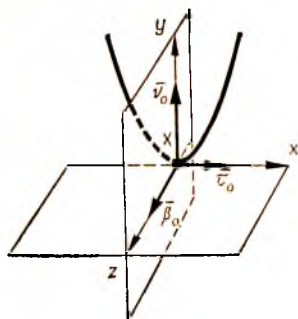


Рис. 59

Будем считать, что кривая L задана естественной параметризацией $\bar{r}(s)$, причем рассматриваемой точке X кривой L соответствует значение $s = 0$ и в этой точке кривая L имеет кривизну $k_0 > 0$ и кручение $\kappa_0 \neq 0$. Единичные векторы трехгранника Френе в этой точке обозначим через $\bar{\tau}_0, \bar{\nu}_0, \bar{\beta}_0$. Тогда, используя формулу Тейлора и формулы Френе, получаем:

$$\bar{r}(s) = \bar{r}'_s(0)s + \frac{1}{2}\bar{r}''_{ss}(0)s^2 + \frac{1}{6}\bar{r}'''_{sss}(0)s^3 + \dots;$$

$$\begin{aligned} \bar{r}'_s &= \bar{\tau}, \quad \bar{r}''_{ss} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\nu}, \quad \bar{r}'''_{sss} = \frac{d}{ds}(k\bar{\nu}) = \\ &= k'_s\bar{\nu} + k\bar{\nu}'_s = k'_s\bar{\nu} + k(-k\bar{\tau} + \kappa\bar{\beta}) = k'_s\bar{\nu} - k^2\bar{\tau} + k\kappa\bar{\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{r}(s) &= \left(s - \frac{1}{6}k_0^2s^3 + \dots\right)\bar{\tau}_0 + \left(\frac{1}{2}k_0s^2 + \frac{1}{6}k'_s(0)s^3 + \dots\right)\bar{\nu}_0 + \\ &+ \left(\frac{1}{6}k_0\kappa_0s^3 + \dots\right)\bar{\beta}_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Считая точку X началом координат, а векторы $\bar{\tau}_0, \bar{\nu}_0$ и $\bar{\beta}_0$ осями осей x, y, z соответственно и ограничиваясь лишь главными членами координатных функций, получаем, что в окрестности точки X кривая L задается такими приближенными равенствами:

$$x \approx s, \quad y \approx \frac{1}{2}k_0s^2, \quad z \approx \frac{1}{6}k_0\kappa_0s^3. \quad (6)$$

Поэтому ее проекция на соприкасающуюся плоскость x, y близка к параболе $y = \frac{1}{2}k_0x^2$ (рис. 59). Это означает, что кривая L ортогонально пересекает нормальную плоскость y, z и, касаясь спрямляющей плоскости x, z , лежит по одну сторону от нее — с той стороны, куда направлен вектор главной нормали $\bar{\nu}_0$.

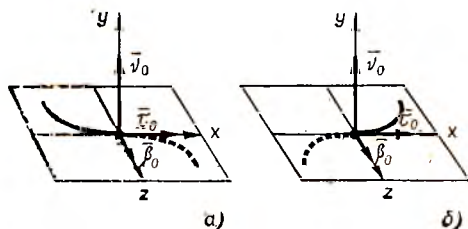


Рис. 60

Проекция кривой L на спрямляющую плоскость x, z близка к кубичной параболе $z = \frac{1}{6}k_0\kappa_0s^3$ (рис. 60). Это означает, что при $\kappa_0 \neq 0$ кривая L , касаясь в точке X соприкасающейся плоскости x, y , переходит в этой точке с одной стороны плоскости x, y на другую сторону. Двум возможным

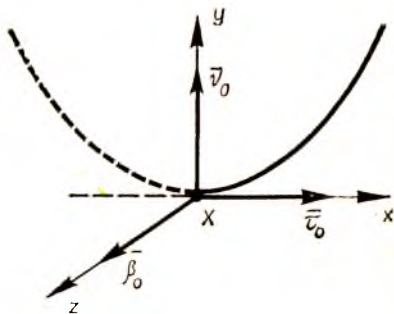
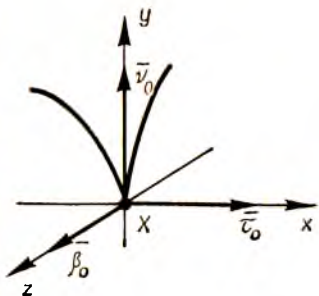


Рис. 61

знакам кручения соответствуют случаи а) и б), показанные на рисунке 60.

Наконец, проекция кривой L на нормальную плоскость y, z близка к «полукубической» параболе $y = Cz^{2/3}$, постоянный коэффициент C выражается через k_0 и κ_0 из равенств (6) (рис. 61). Дополнительной информации о поведении кривой L этот рисунок уже не дает.

3. Натуральные уравнения. Если продолжить рассуждения, приведшие к равенству (5), то можно убедиться, что для бесконечно дифференцируемой кривой все коэффициенты при различных степенях естественного параметра s выражаются через векторы $\vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0, \vec{\beta}_0$, а также функции кривизны $k(s)$, кручения $\kappa(s)$ и их производные различных порядков. Это соображение подсказывает, что заданием векторов $\vec{\tau}_0, \vec{\nu}_0, \vec{\beta}_0$ и двух функций $k(s)$ и $\kappa(s)$ можно однозначно определить кривую, для которой $k(s)$ и $\kappa(s)$ являются кривизной и кручением. Действительно, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 1. Если две регулярные кривые L_1 и L_2 имеют соответственно равные кривизны $k_1(s) = k_2(s)$ и кручения $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$ и для некоторого значения естественного параметра s совпадают и две соответствующие точки этих кривых, и единичные орты сопровождающего трехгранника данных кривых в этих точках, то кривые L_1 и L_2 совпадают.

Теорема 2. Пусть в некотором числовом интервале (a, b) заданы две непрерывные функции $k(s)$ и $\kappa(s)$, причем $k(s) > 0$. Тогда существует регулярная кривая L , для которой $k(s)$ и $\kappa(s)$ являются соответственно кривизной и кручением, а s — естественным параметром.

Равенства $k = k(s) > 0$ и $\kappa = \kappa(s)$, задающие кривизну и кручение как функции естественного параметра s , называются *натуральными уравнениями* кривой.

Часто эти две теоремы формулируются кратко в следующем виде: *регулярная кривая определяется своими кривизной и кручением однозначно, с точностью до положения в пространстве.*

Выражение «... с точностью до положения в пространстве...» означает, что две кривые, у которых в точках с одним и тем же значением параметра s совпадают кривизны и кручения, могут быть совмещены

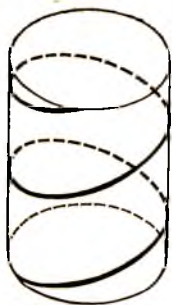


Рис. 62

движением. Для того чтобы их совместить, достаточно совместить движением пару их соответствующих точек и орты трехгранников Френе в этих точках. После этого по теореме кривые совпадут.

Подробные доказательства этих теорем, использующие теоремы существования и единственности теории дифференциальных уравнений, читатель может найти в [7], гл. III.

4. Винтовые линии. Винтовой линией называется кривая, заданная уравнениями вида

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (7)$$

где a и b постоянные. Мы будем считать, что $a \geq 0$.

Для $a > 0$ и $b \neq 0$ кривую можно считать образованной движением точки, проекция которой на плоскость x, y равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, а проекция на ось z равномерно движется по этой оси (рис. 62). Винтовая линия лежит на прямом круговом цилиндре. Если $a > 0$ и $b = 0$, то получаем «бесконечную обмотку» окружности, а если $a = 0$ и $b > 0$, то получаем прямую — ось z .

Для винтовой линии легко перейти к естественному параметру. Действительно,

$$s = \int_0^t \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t. \quad (8)$$

Поэтому из (7) и (8) получаем:

$$\vec{r}(s) = \left\{ a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}. \quad (9)$$

Вычисляя кривизну и кручение по формулам (2) § 26 и (12) § 27, получим, что

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad (10)$$

т. е. кривизна и кручение винтовой линии постоянны.

Решая уравнение (10) относительно a и b , находим, что

$$a = \frac{k}{k^2 + \kappa^2}, \quad b = \frac{\kappa}{k^2 + \kappa^2}. \quad (11)$$

По этим a и b можно построить винтовую линию, определяемую уравнениями (7), если заданы k и κ . Из теоремы 1 следует, что любая кривая с постоянными кривизной и кручением является винтовой линией.

Внешняя геометрия поверхностей

§ 29. КРИВЫЕ НА ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть S — гладкая поверхность класса C^r ($r \geq 1$) и $f: \bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^r(D)$ — ее параметризация (впредь D будет стандартно обозначать открытый прямоугольник пространства R^2 , заданный неравенствами $a < u < b$, $c < v < d$). Как уже отмечалось, поверхность S отождествляем с множеством точек, являющимся образом прямоугольника D при вложении f .

Пусть γ — некоторая кривая в пространстве. Будем говорить, что кривая γ лежит на поверхности S , если все точки γ принадлежат S . Рассмотрим множество $l = f^{-1}(\gamma) \subset D$. Покажем, что если l — C^r -гладкая кривая в D , то γ — C^r -гладкая кривая в пространстве. Действительно, пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$ ($\alpha < t < \beta$) — параметризация класса C^r кривой l . Это значит, что $u(t), v(t) \in C^r(\alpha, \beta)$ и $u'^2 + v'^2 > 0$. Поскольку $\gamma = f(l)$, то γ задается вектор-функцией $\bar{r}(t) \equiv \bar{r}(u(t), v(t))$.

Ясно, что $\bar{r}(t) \in C^r(\alpha, \beta)$ как суперпозиция функций класса C^r . Кроме того,

$$\bar{r}'(t) = \bar{r}'_u u' + \bar{r}'_v v' \neq \bar{0}, \quad (1)$$

поскольку $\bar{r}'_u \neq \bar{r}'_v$ и $u'^2 + v'^2 > 0$.

Таким образом, $\bar{r} = \bar{r}(t) \equiv \bar{r}(u(t), v(t))$ — C^r -гладкая параметризация кривой γ , и, стало быть, кривая γ принадлежит классу C^r .

Из сказанного ясно, как задаются C^r -гладкие кривые на поверхности S , параметризованной вектор-функцией $\bar{r}(u, v) \in C^r(D)$. Для этого рассматриваются всевозможные C^r -гладкие кривые $l \subset D$ и берутся сужения вектор-функции $\bar{r}(u, v)$ на l . Эти сужения являются параметрическими кривыми класса C^r , задающими C^r -гладкие кривые γ на S .

Параметрические уравнения $u = u(t)$, $v = v(t)$ ($\alpha < t < \beta$), задающие кривую $l \subset D$, называют *внутренними уравнениями* кривой γ на поверхности S .

Среди всевозможных кривых на поверхности S , параметризованной вектор-функцией $\bar{r}(u, v) \in C^r(D)$, важную роль играют два семейства кривых $\{\gamma_u\}$ и $\{\gamma_v\}$, внутренние уравнения которых соответственно

$$u = t, v = v_0 = \text{const}, t \in (a, b) \quad (2)$$

и

$$u = u_0 = \text{const}, v = t, t \in (c, d). \quad (3)$$

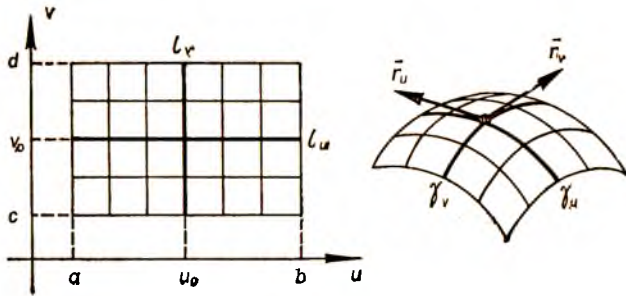


Рис. 63

Уравнения (2) и (3) задают в прямоугольнике D координатную сеть (рис. 63). Кривые γ_u и γ_v называют координатными линиями на S , кривые γ_u — линиями u (или линиями $v = \text{const}$), γ_v — линиями v (или линиями $u = \text{const}$). Оба семейства $\{\gamma_u\}$ и $\{\gamma_v\}$ образуют на поверхности S сеть координатных линий (см. рис. 63).

Ясно, что если от одной параметризации поверхности S перейти к другой эквивалентной параметризации, то сеть координатных линий на S , вообще говоря, изменится.

Пусть $X_0(u_0, v_0)$ — произвольная точка поверхности S , и пусть γ_u и γ_v — координатные линии, проходящие через X_0 . Очевидно, они являются C^r -гладкими кривыми, заданными вектор-функциями соответственно $\bar{r}(t, v_0)$ и $\bar{r}(u_0, t)$, а векторы $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ есть касательные векторы соответственно к координатным линиям γ_u и γ_v в точке $X_0(u_0, v_0)$ (см. рис. 63).

Отсюда в силу определения гладкой поверхности следует, что в каждой ее точке координатные линии γ_u и γ_v пересекаются под углом, отличным от нуля и π .

Примерами простейших сетей координатных линий на поверхности могут служить: а) сеть прямых $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ на плоскости с декартовыми координатами x, y ; б) сеть, состоящая из концентрических окружностей с центром в точке O и лучей с началом в точке O на плоскости с полярными координатами (полюс O исключается из рассмотрения); в) сеть меридианов и параллелей на поверхности вращения, в частности на сфере с географическими координатами.

§ 30. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ. СПЕЦИАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть S — C^1 -гладкая поверхность. *Контингентцией* поверхности S в точке $X \in S$ называется множество всех прямых, являющихся касательными в точке X ко всевозможным C^1 -гладким кривым на S , проходящим через точку X .

Если контингентция поверхности S в точке X является плоскостью, то эта плоскость называется *касательной* к S в точке X .

Теорема 1. В каждой точке C^1 -гладкой поверхности существует касательная плоскость. Если $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — некоторая C^1 -гладкая параметризация поверхности S , то касательная плоскость к S в точке $X(u_0, v_0)$ параллельна векторам $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^1(D)$ — некоторая параметризация поверхности S . Покажем, что контингенция поверхности S в любой точке $X \in S$ является плоскостью.

Пусть γ — произвольная C^1 -гладкая кривая на S , проходящая через точку $X(u_0, v_0)$, и пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$ — внутренние уравнения γ , причем точке X отвечает значение параметра $t = t_0$. Тогда вектор-функция $\bar{r}(t) \equiv \bar{r}(u(t), v(t))$ задает C^1 -гладкую параметризацию кривой γ , а касательный вектор к γ в точке X имеет вид:

$$\bar{r}'(t_0) = \bar{r}_u(u_0, v_0) u'(t_0) + \bar{r}_v(u_0, v_0) v'(t_0).$$

Отсюда следует, что касательная к γ лежит в плоскости π , проходящей через точку X и параллельной векторам $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$. Таким образом, контингенция к S в точке X содержится в плоскости π .

Теперь покажем, что всякая прямая m плоскости π , проходящая через точку X , принадлежит указанной контингенции, т. е. является касательной в точке X к некоторой C^1 -гладкой кривой на S , проходящей через X . Обозначим через \bar{s} направляющий вектор прямой m . Поскольку $\bar{r}_u(u_0, v_0) \nparallel \bar{r}_v(u_0, v_0)$, то

$$\bar{s} = \alpha \bar{r}_u(u_0, v_0) + \beta \bar{r}_v(u_0, v_0).$$

Рассмотрим в прямоугольнике D открытый отрезок l , заданный параметрическими уравнениями

$$u = u_0 + \alpha t, \quad v = v_0 + \beta t,$$

где $t \in (-\delta, \delta)$, а δ выбрано так, чтобы $l \subset D$. Вектор-функция $\bar{r}(t) \equiv \bar{r}(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$ задает C^1 -гладкую кривую γ , лежащую на поверхности S и проходящую через точку X , которой соответствует значение параметра $t = 0$. Так как

$$\bar{r}'(0) = \bar{r}_u(u_0, v_0)\alpha + \bar{r}_v(u_0, v_0)\beta = \bar{s},$$

то прямая m совпадает с касательной к кривой γ в точке X и, следовательно, принадлежит контингенции поверхности S в точке X .

Таким образом, контингенция к поверхности S в точке X является плоскостью, проходящей через точку X и параллельной векторам $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ (рис. 64). Теорема доказана.

Единичный вектор, перпендикулярный касательной плоскости к поверхности S в точке X , называют *нормалью* поверхности S в точке X . Очевидно, вектор

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}$$

является нормалью к S , если $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — некоторая C^1 -гладкая параметризация поверхности S .

Если в пространстве введены декартовы координаты x, y, z , то уравнение касательной плоскости к S в точке $X(u_0, v_0)$, очевидно, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0, v_0) & Y - y(u_0, v_0) & Z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

С касательной плоскостью связана некоторая специальная параметризация гладкой поверхности в окрестности любой ее точки. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть S — C^r -гладкая поверхность, и пусть точка $X \in S$ ($r \geq 1$). Введем в пространстве декартову систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой X , оси x и y лежали в касательной плоскости к S в точке X , а ось z была направлена по нормали к S в точке X . Тогда у точки X на поверхности S существует окрестность, которую можно задать уравнением $z = f(x, y)$, причем функция f в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ плоскости x, y принадлежит классу C^r и имеют место равенства

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^r(D)$ — некоторая параметризация поверхности S , и пусть (u_0, v_0) — внутренние координаты точки X . Пусть далее $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ — координаты вектор-функции $\bar{r}(u, v)$ в системе координат, введенной в условии теоремы. Так как векторы $\bar{r}_u(u_0, v_0)$ и $\bar{r}_v(u_0, v_0)$ лежат в плоскости x, y (рис. 64), то

$$\bar{r}_u(u_0, v_0) = \{x_u(u_0, v_0), y_u(u_0, v_0), 0\}$$

и

$$\bar{r}_v(u_0, v_0) = \{x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), 0\}.$$

Поскольку $\bar{r}_u \nparallel \bar{r}_v$, то

$$\begin{vmatrix} x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это означает, что в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) якобиан системы функций

$$x = x(u, v), y = y(u, v) \quad (3)$$

отличен от нуля. Тогда по известной теореме о неявной функции эта система допускает обращение в некоторой достаточно малой окрестности точки (u_0, v_0) , т. е. из системы (3) можно выразить u, v как функции от x, y :

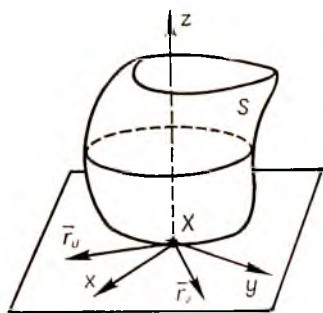


Рис. 64

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (4)$$

При этом функции (4) определены в некоторой достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) , где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, и принадлежат в ней классу C^1 . В этой окрестности всякая точка поверхности S с координатами $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ может быть задана также координатами $(x, y, z(u(x, y), v(x, y)))$.

Но это и означает, что найдена окрестность точки X на поверхности S , которую можно задать уравнением $z = f(x, y)$. Кроме того, очевидно, что функция f принадлежит классу C^1 . Так как поверхность S проходит через точку X , которая является началом координат, то $f(0, 0) = 0$.

Равенства $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ следуют из того, что касательные к сечениям поверхности S плоскостями x, z и y, z в точке X лежат в плоскости x, y . Теорема доказана.

§ 31. ПЕРВАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ПОНЯТИЯ

1. Первая квадратичная форма. Пусть S — C^1 -гладкая поверхность и $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^1(D)$ — некоторая ее параметризация. *Первой квадратичной формой поверхности S* называется квадрат полного дифференциала $d\bar{r}$ вектор-функции $\bar{r}(u, v)$. Поскольку

$$d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv,$$

то первая квадратичная форма имеет вид:

$$d\bar{r}^2 = \bar{r}_u^2 du^2 + 2(\bar{r}_u, \bar{r}_v) dudv + \bar{r}_v^2 dv^2. \quad (1)$$

Обозначив первую квадратичную форму поверхности римской цифрой I, перепишем (1) в виде

$$I = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2, \quad (2)$$

где

$$E = \bar{r}_u^2, \quad F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v), \quad G = \bar{r}_v^2. \quad (3)$$

(I является квадратичной формой относительно дифференциалов du и dv .) Отметим два свойства I.

1°. *Первая квадратичная форма поверхности является положительно определенной.*

Действительно, по определению $I = d\bar{r}^2$ и, следовательно, неотрицательна. Если же $I = 0$, то $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv = \bar{0}$, и тогда $du = dv = 0$, поскольку векторы \bar{r}_u и \bar{r}_v линейно независимы.

Отметим, что в положительной определенности формы I можно было бы убедиться, составив дискриминант I:

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 - (\bar{r}_u, \bar{r}_v)^2 = \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \bar{r}_u^2 \bar{r}_v^2 \sin^2 \varphi = \\ &= |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|^2, \end{aligned}$$

где φ — угол между векторами \bar{r}_u и \bar{r}_v . Поскольку векторы \bar{r}_u и \bar{r}_v неколлинеарны, то

$$EG - F^2 = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|^2 \neq 0. \quad (4)$$

2°. Первая квадратичная форма не зависит от выбора параметризации поверхности.

Действительно, переход от параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^1(D)$ поверхности S к эквивалентной параметризации $\bar{\rho} = \bar{\rho}(u', v') \in C^1(D')$ означает, что существует C^1 -диффеоморфизм

$$u = u(u', v'), v = v(u', v')$$

между прямоугольниками D и D' , такой, что

$$\bar{\rho}(u', v') = \bar{r}(u(u', v'), v(u', v')).$$

Из курса математического анализа известно свойство инвариантности первого дифференциала (то, что здесь не скалярная, а векторная функция, оказывается несущественным). Следовательно, $d\bar{\rho}^2 = d\bar{r}^2$, что и требовалось доказать.

Разумеется, вид коэффициентов I зависит от выбора параметризации, но значения формы в целом от параметризации поверхности не зависят.

Если ввести в пространстве декартовы координаты x, y, z , то коэффициенты E, F, G первой квадратичной формы вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= (\bar{r}_u, \bar{r}_v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \bar{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Примеры первых квадратичных форм.

Пример 1. Пусть S — плоскость, на которой введены декартовы координаты x, y . Тогда вектор-функция, задающая параметризацию S , имеет вид:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j},$$

откуда

$$I = d\bar{r}^2 = dx^2 + dy^2.$$

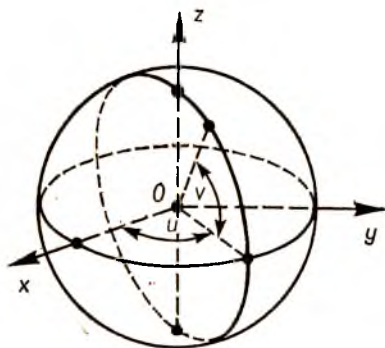


Рис. 65

Пример 2. S — плоскость с полярными координатами ρ, θ . Так как $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, где x, y — декартовы координаты, то

$$\begin{aligned} I &= dx^2 + dy^2 = \\ &= (d\rho \cos \theta - \rho \sin \theta d\theta)^2 + \\ &+ (d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta)^2 = \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2. \end{aligned}$$

Пример 3. Пусть S — сфера радиуса R с центром в начале координат (рис. 65). В качестве внутренних координат выбраны географические координаты u, v (см. пример 2,

п. 2 § 21). Уравнения сферы в этих координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= R \cos u \cos v, \\y &= R \sin u \cos v, \\z &= R \sin v.\end{aligned}$$

(Напомним, что географические координаты вводятся на сфере, из которой удален один меридиан.)

После вычислений находим, что

$$E = R^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = R^2.$$

Таким образом, первая квадратичная форма сферы в географических координатах имеет вид:

$$I = R^2 (\cos^2 v du^2 + dv^2).$$

Пример 4. Пусть C^1 -гладкая поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, т. е. S является графиком функции $f(x, y)$. В этом случае вектор-функция, задающая поверхность S , имеет вид:

$$\bar{r}(x, y) = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}.$$

Тогда

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2. \quad (6)$$

Следовательно, первая квадратичная форма поверхности, которая является графиком функции $f(x, y)$, имеет вид:

$$I = (1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2.$$

3. Длина дуги кривой на поверхности. Пусть γ — C^1 -гладкая кривая на C^1 -гладкой поверхности S , и пусть $u = u(t)$, $v = v(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) — внутренние уравнения дуги AB кривой γ (значение $t = \alpha$ соответствует точке A , $t = \beta$ — точке B). Если вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^1(D)$ задает поверхность S , то вектор-функция класса C^1

$$\bar{r}(t) \equiv \bar{r}(u(t), v(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

задает дугу AB в пространстве. Тогда длина дуги AB вычисляется по формуле (1) § 23:

$$s(\sphericalangle AB) = \int_{\alpha}^{\beta} |\bar{r}'(t)| dt.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}s(\sphericalangle AB) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\bar{r}_u u' + \bar{r}_v v'| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\bar{r}_u u' + \bar{r}_v v')^2} dt = \\&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt.\end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления длин дуг кривых на поверхности

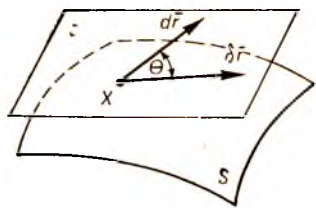


Рис. 66

достаточно знать первую квадратичную форму поверхности и внутренние уравнения кривых. Так как вдоль кривой γ

$$s'(t) = |\bar{r}'(t)|,$$

то вдоль любой C^1 -гладкой кривой $\gamma \subset S$

$$ds^2 = d\bar{r}^2 = I. \quad (7)$$

4. Угол между кривыми на поверхности. Пусть S — C^1 -гладкая поверхность, заданная параметризацией $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^1(D)$, и пусть $X(u, v)$ — произвольная точка на поверхности S . *Направлением* $(du : dv)$ в точке $X(u, v)$ на поверхности S называется направление вектора $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$. (Поскольку векторы \bar{r}_u и \bar{r}_v в данной точке X фиксированы, то направление вектора $d\bar{r}$ определяется отношением дифференциалов du и dv .) *Углом между направлениями* $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$ называется угол между векторами $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ и $\delta\bar{r} = \bar{r}_u \delta u + \bar{r}_v \delta v$ (рис. 66). Пусть θ — угол между направлениями $(du : dv)$ и $(\delta u : \delta v)$. Тогда

$$\cos \theta = \frac{(\bar{d}r, \delta\bar{r})}{|\bar{d}r| |\delta\bar{r}|}.$$

Так как

$$\begin{aligned} d\bar{r}^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \\ \delta\bar{r}^2 &= E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2, \\ (\bar{d}r, \delta\bar{r}) &= Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v, \end{aligned}$$

то

$$\cos \theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \quad (8)$$

Пусть γ — C^1 -гладкая кривая на C^1 -гладкой поверхности S . Говорят, что γ в точке $X \in \gamma$ имеет направление $(du : dv)$, если вектор $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$ есть касательный вектор к γ в точке X .

Ясно, что если $u = u(t)$, $v = v(t)$ — внутренние уравнения γ на S , то $du : dv = u'(t) : v'(t)$, где t соответствует точке X на γ .

Пусть кривые γ_1 и γ_2 на поверхности S проходят через точку X . *Углом между кривыми* γ_1 и γ_2 в точке X называют угол между направлениями этих кривых в точке X . Таким образом, угол между кривыми на поверхности — это угол между касательными к ним и потому не зависит ни от параметризации поверхности S , ни от параметризации кривых γ_1 и γ_2 .

Остановимся на одном частном случае. Вычислим угол между координатными линиями γ_u и γ_v на поверхности S . Линия γ_u имеет направление $(du : 0)$, а линия γ_v — $(0 : dv)$. Поэтому для угла θ между координатными линиями из (8) получаем формулу

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что координатная сеть на поверхности S будет ортогональной тогда и только тогда, когда $F = 0$.

В заключение параграфа сделаем одно замечание.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим первую квадратичную форму поверхности $I = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ вдоль координатных линий. Тогда вдоль линии u $I = Edu^2$, отсюда в силу равенства (7) $E = \left(\frac{ds}{du}\right)^2$ и аналогично $G = \left(\frac{ds}{dv}\right)^2$.

§ 32. ПЛОЩАДЬ ОБЛАСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ

1. Определение площади области на поверхности. Пусть S — C^1 -гладкая поверхность, заданная вложением f класса C^1 гомеоморфной открытому кругу области $W \subset \mathbb{R}^2$ в пространство E^3 , и пусть $Q \subset W^2$ — компактная область, а $P = f(Q)$. Будем считать, что граница P состоит из конечного числа C^1 -гладких дуг (кусочно-гладкая).

Разобьем область P на более мелкие области P_i с кусочно-гладкой границей. В каждой области P_i возьмем произвольную точку A_i и спроецируем ортогонально P_i на касательную плоскость T_i к поверхности S в точке A_i . Будем считать, что области P_i настолько малы, что это проецирование взаимно-однозначно. Обозначим через \bar{P}_i проекцию P_i . Область \bar{P}_i плоская и ограничена конечным числом C^1 -гладких дуг. Из курса математического анализа известно, что такая область \bar{P}_i квадратируема, т. е. имеет площадь $\sigma(\bar{P}_i)$.

Рассмотрим $\sum_i \sigma(\bar{P}_i)$, где суммирование проведено по всем областям P_i разбиения области P .

Площадью области P на поверхности S называется предел сумм $\sum_i \sigma(\bar{P}_i)$ при условии, что максимальный диаметр областей P_i стремится к нулю, если этот предел не зависит ни от способа разбиения области P , ни от выбора точек A_i .

Это определение площади поверхности отвечает наглядным представлениям об измерении площади «кривой» поверхности, при котором поверхность разбивают на достаточно мелкие части, которые можно считать почти плоскими.

2. Теорема существования площади. Покажем, что площадь области P на C^1 -гладкой поверхности S в смысле данного выше определения существует, и дадим формулу для ее вычисления.

Т е о р е м а. Пусть P — компактная область C^1 -гладкой поверхности S с кусочно-гладкой границей. Тогда существует площадь $\sigma(P)$ области P . Если $f: \bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C_D^1(D)$ — некоторая C^1 -гладкая параметризация поверхности S , то

$$\sigma(P) = \iint_Q |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv, \quad (1)$$

где $Q = f^{-1}(P) \subset D$; E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S .

Доказательство. Указанному в п. 1 § 32 разбиению области $P \subset S$ на области P_i соответствует разбиение области Q кусочно-гладкими кривыми на области Q_i . Самой области $P \subset S$ соответствует в области D параметров (u, v) область Q , ограниченная конечным числом C^1 -гладких дуг. Выбранным в каждой области P_i точкам A_i соответствуют точки $X_i \subset Q_i$. Вычислим площадь $\sigma(\bar{P}_i)$ плоской области \bar{P}_i , лежащей в касательной плоскости T_i к S в точке A_i (см. п. 1 § 29). Для этого введем местную систему координат x, y, z , приняв точку A_i за начало координат, касательную плоскость T_i за координатную плоскость x, y , направив ось z по нормали к S в точке A_i . В этой местной системе координат область P_i задается уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in Q_i, \quad (2)$$

а первые два из них устанавливают биективное отображение области Q_i на \bar{P}_i . Параметры (u, v) можно считать криволинейными координатами в области \bar{P}_i . Как известно из курса математического анализа, площадь плоской области \bar{P}_i в криволинейных координатах (u, v) вычисляется по формуле

$$\sigma(\bar{P}_i) = \iint_{Q_i} \left| I \left(\begin{matrix} x & y \\ u & v \end{matrix} \right) \right| dudv = \iint_{Q_i} \left| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right| dudv.$$

Вектор $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ направлен по нормали к поверхности, а так как в точке A_i нормаль направлена по оси z , то из трех координат вектора $\bar{r}_u \times \bar{r}_v$ отлична от нуля лишь проекция его на ось z , т. е.

$$\left| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right|.$$

Следовательно, в точке X_i

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|_{X_i} = \left| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right|_{X_i}. \quad (3)$$

В произвольной точке $X(u, v) \in Q_i$ равенство (3) не выполняется. Однако можем написать, что

$$\left| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right| = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| + \varepsilon_i(u, v), \quad (4)$$

где функция

$$\varepsilon_i(u, v) = \left| \begin{matrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{matrix} \right| - |\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$$

непрерывна и стремится к нулю при $X \rightarrow X_i$. Равенство (4) напомним в каждой области Q_i .

Поскольку, как было показано в п. 1 § 31,

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = \sqrt{EG - F^2},$$

то $|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|$, очевидно, не зависит от выбора местной системы координат x, y, z и является функцией исключительно внутренних координат (u, v) на S .

Так как в произвольной точке $X(u, v) \in Q_i$

$$\left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| |\cos \theta_i|,$$

где θ_i — угол между нормальными к S соответственно в точках A_i и $f(X)$, то

$$|\varepsilon_i| = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| (1 - |\cos \theta_i|). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение функцию $\theta(\bar{n}_X, \bar{n}_Y)$, выражающую величину угла между нормальными \bar{n}_X и \bar{n}_Y к поверхности S соответственно в точках $f(X)$ и $f(Y)$. Функция $\theta(\bar{n}_X, \bar{n}_Y)$ является непрерывной функцией, определенной на декартовом произведении $D \times D$, и, очевидно, не зависит от выбора местных систем координат x, y, z . Ясно, что $\theta_i = \theta(\bar{n}_X, \bar{n}_{X_i})$.

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Так как $|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ — непрерывная определенная в D функция, то на компакте $Q \subset D$

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v| \leq M,$$

где M — некоторое положительное число. Поскольку непрерывная функция $\theta(\bar{n}_X, \bar{n}_Y)$ на компакте $Q \times Q \subset D \times D$ равномерно непрерывна, то для заданного $\varepsilon > 0$ существует столь мелкое разбиение области Q на Q_i , что

$$1 - |\cos \theta_i| < \frac{\varepsilon}{M},$$

откуда в силу равенства (5) для любого i

$$|\varepsilon_i(u, v)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} \sum_i \sigma(\bar{P}_i) &= \sum_i \iint_{Q_i} \left| \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right| dudv = \sum_i \left(\iint_{Q_i} |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dudv + \right. \\ &+ \left. \iint_{Q_i} \varepsilon_i(u, v) dudv \right) = \iint_Q |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dudv + \sum_i \iint_{Q_i} \varepsilon_i(u, v) dudv. \end{aligned}$$

В силу (6)

$$\left| \sum_i \iint_{Q_i} \varepsilon_i(u, v) dudv \right| \leq \varepsilon \sigma(Q),$$

откуда

$$\left| \sum_i \sigma(\bar{P}_i) - \iint_Q |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dudv \right| \leq \varepsilon \sigma(Q). \quad (7)$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (7) следует, что существует предел $\Sigma \sigma(\bar{P}_i)$ при условии, что максимальный диаметр областей P_i стремится к нулю, и этот предел равен $\iint_Q |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| dudv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} dudv$.

Теорема доказана.

Если поверхность S есть график функции $z = z(x, y)$ класса C^1 , то (см. пример 4, п. 2 § 31)

$$EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

где $p = z_x$, $q = z_y$. Отсюда приходим к известной из курса математического анализа формуле площади области P на поверхности, заданной явным уравнением $z = z(x, y)$:

$$\sigma(P) = \iint_Q \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

где $Q \subset D$ — проекция области P на плоскость x, y .

3. Замечание к определению площади. На первый взгляд может показаться, что естественнее было бы определить площадь области P на поверхности S по аналогии с тем, как это делается при определении длины дуги кривой. А именно определить площадь области $P \subset S$ как предел, к которому стремятся площади поверхностей вписанных в P многогранников при условии, что максимум диаметров их граней стремится к нулю. Однако еще в прошлом веке была обнаружена несостоятельность такого определения. Рассмотрим следующий пример, принадлежащий Шварцу.

В прямой круговой цилиндр радиуса R с высотой H вписан многогранник следующим образом. Разделим цилиндр горизонтальными плоскостями на m равных цилиндров высотой $\frac{H}{m}$. В каждую из возникших при этом $m + 1$ окружностей впишем правильный n -угольник (n одно и то же для всех окружностей) так, чтобы вершины верхнего n -угольника находились над серединами дуг, стягиваемых сторонами нижнего n -угольника (рис. 67). Соединив вершины указанных многогранников, как показано на рисунке 67, получим многогранную поверхность, вписанную в исходный цилиндр. Эту поверхность часто называют «сапогом Шварца». Элементарный подсчет показывает, что площадь такой многогранной поверхности (при заданных m и n) равна



Рис. 67

$$\sigma_{m,n} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + R^2 m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2},$$

поскольку площадь одной грани, являющейся треугольником, равна

$$R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$$

(рис. 68), а всего таких граней $2nm$. Если теперь n и m устремить к бесконечности так, что m растет быстрее, чем n^2 , то выражение $\sigma_{m,n}$ стремится к бесконечности, а если n и m менять так, чтобы $\frac{m}{n^2} \rightarrow q$, где q — некоторое число, то

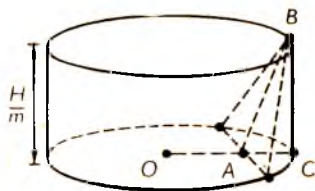


Рис. 68

$$\lim \sigma_{m,n} = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{\pi^2 R^2}{4} q^2}.$$

Подбирая q , можем получить в пределе любое число, большее или равное $2\pi RH$. Истинное значение площади боковой поверхности цилиндра $2\pi RH$ получим при $q = 0$.

Приведенный пример показывает, что попытка определить площадь поверхности с помощью вписанных многогранников неудачна даже для такой «простой» поверхности, как прямой круговой цилиндр.

§ 33. ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ПОНЯТИЯ

1. **Вторая квадратичная форма.** Пусть S — C^2 -гладкая поверхность и $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2(D)$ — некоторая ее параметризация. *Второй квадратичной формой* поверхности S называется скалярное произведение

$$\Pi = (d^2\bar{r}, \bar{n}),$$

где \bar{n} — нормаль к поверхности, а $d^2\bar{r}$ — второй дифференциал вектор-функции $\bar{r}(u, v)$. Так как

$$d^2\bar{r} = d(d\bar{r}) = d(\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv) = \bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} dudv + \bar{r}_{vv} dv^2,$$

то

$$\Pi = (\bar{r}_{uu}, \bar{n}) du^2 + 2(\bar{r}_{uv}, \bar{n}) dudv + (\bar{r}_{vv}, \bar{n}) dv^2.$$

Введем для коэффициентов Π следующие обозначения:

$$L = (\bar{r}_{uu}, \bar{n}), \quad M = (\bar{r}_{uv}, \bar{n}), \quad N = (\bar{r}_{vv}, \bar{n}). \quad (1)$$

Тогда

$$\Pi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2. \quad (2)$$

Поскольку $\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$, то имеют место следующие формулы:

$$L = \frac{(\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{(\bar{r}_{uv}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{(\bar{r}_{vv}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (3)$$

Если поверхность S является графиком функции $z = f(x, y)$ класса C^2 , то вектор-функция, задающая S , имеет вид:

$$\bar{r}(x, y) = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k},$$

и подсчет по формуле (3) дает следующие выражения для коэффициентов L, M, N :

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \quad (4)$$

2. Кривизна кривой на поверхности. Пусть S — поверхность из п. 1 и γ — C^2 -гладкая кривая на S , внутренние уравнения которой $u = u(s), v = v(s)$, где s — натуральный параметр на γ . Кривая γ задается вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(s) \equiv \bar{r}(u(s), v(s))$ класса C^2 . На γ возьмем произвольную точку $X(u, v)$. По первой формуле Френе

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = k\bar{v}, \quad (5)$$

где k — кривизна кривой γ в точке X , а \bar{v} — главная нормаль γ в точке X .

Умножив скалярно равенство (5) на нормаль \bar{n} к поверхности S в точке X , получим:

$$\left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \bar{n}\right) = k(\bar{v}, \bar{n}) = k \cos \psi, \quad (6)$$

где ψ — угол между векторами \bar{n} и \bar{v} (рис. 69). С другой стороны,

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\bar{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \bar{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \bar{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \bar{r}_v \frac{d^2v}{ds^2},$$

откуда

$$\left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \bar{n}\right) = \frac{(\bar{r}_{uu}, \bar{n}) du^2 + 2(\bar{r}_{uv}, \bar{n}) dudv + (\bar{r}_{vv}, \bar{n}) dv^2}{ds^2}.$$

Так как вдоль γ $ds^2 = I$, получаем с учетом (6)

$$k \cos \psi = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \frac{\Pi}{I}. \quad (7)$$

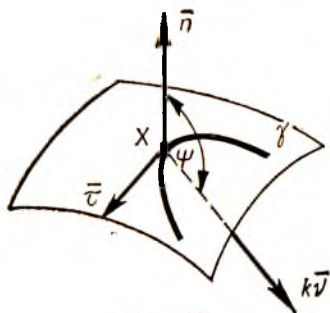


Рис. 69

Правая часть равенства (7) зависит только от направления кривой γ в точке X , так как в точке $X(u, v)$ коэффициенты L, M, N, E, F, G — некоторые фиксированные числа. Более того, для всех кривых на поверхности S , проходящих через точку X и имеющих в ней одно и то же направление (или, что то же самое, одну и ту же касательную), отношение $\frac{\Pi}{I}$ постоянно. Ясно, что $\frac{\Pi}{I}$ в каждой фиксированной точке поверхно-

сти зависит лишь от направления на поверхности в этой точке и является некоторой характеристикой поверхности. Это отношение называют *нормальной кривизной* поверхности в данной точке в данном направлении и обозначают k_n . Равенство (7) принимает вид:

$$k \cos \psi = k_n. \quad (8)$$

Равенство (8) часто называют *теоремой Менье*.

Из (8) вытекает наглядный смысл нормальной кривизны. Если пересечь поверхность S плоскостью, проходящей через ее нормаль в точке X , то в малой окрестности этой точки пересечение будет C^2 -гладкой кривой (это нетрудно доказать), которую называют *нормальным сечением* поверхности. Нормальное сечение γ в данной точке определяется исключительно направлением $(du : dv)$.

Пусть $\bar{\nu}$ — вектор главной нормали кривой γ в точке X . Ясно, что $\bar{\nu} = \pm \bar{n}$, поэтому $\cos \psi = \pm 1$. Но тогда из равенства (8) следует, что нормальная кривизна поверхности S в точке X в данном направлении (с точностью до знака) равна кривизне нормального сечения поверхности в точке X , проведенного в том же направлении.

3. Соприкасающийся параболоид поверхности. Пусть S — поверхность класса C^r ($r \geq 2$). Как уже отмечалось, в дифференциальной геометрии большей частью изучаются локальные свойства поверхностей, т. е. такие свойства, для изучения которых достаточно рассматривать малые окрестности данной точки. Поэтому мы можем воспользоваться специальной параметризацией поверхности, которая была введена в § 30 и является весьма удобной. В этой параметризации окрестность точки $X \in S$ задается уравнением

$$z = f(x, y),$$

где декартовы координаты x, y, z выбираются так, что начало координат совпадает с X , оси x и y лежат в касательной плоскости к S в точке X , а ось z направлена по нормали к S в точке X . Напомним, что для функции $f(x, y)$ выполнены в точке X равенства

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Разлагая функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора в точке $(0, 0)$, получим, воспользовавшись этими равенствами, что

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0) x^2 + 2f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0, 0) y^2) + \varepsilon(x, y) (x^2 + y^2), \quad (9)$$

где $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \varepsilon(x, y) = 0$.

Обозначим главную часть разложения (9) через $Z_0(x, y)$:

$$Z_0(x, y) = \frac{1}{2} (f_{xx}(0, 0) x^2 + 2f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0, 0) y^2). \quad (10)$$

График функции $Z_0(x, y)$ представляет собой параболоид. Этот параболоид называется *соприкасающимся параболоидом поверхности в точке X* .

Легко убедиться в том, что все первые и вторые производные функ-

ций $f(x, y)$ и $Z_0(x, y)$ в точке $(0, 0)$ совпадают. Поскольку коэффициенты первой и второй квадратичных форм выражаются только через первые и вторые производные функций, задающих поверхность, то в точке X у поверхности S и соприкасающегося параболоида совпадают первая и вторая квадратичные формы, а значит, и все те геометрические характеристики, которые через них выражаются. В частности, у поверхности S и соприкасающегося параболоида в точке X одни и те же нормальные кривизны по одинаковым направлениям.

4. Главные направления и главные нормальные кривизны. Из аналитической геометрии известно, что соответствующим поворотом осей координат в плоскости x, y можно уравнение параболоида (10) привести к каноническому виду:

$$Z_0(x', y') = \frac{1}{2}(k_1x'^2 + k_2y'^2). \quad (11)$$

Направления в точке X координатных осей Xx' и Xy' системы координат X, x', y' , в которой уравнение соприкасающегося параболоида имеет канонический вид (11), называются *главными направлениями поверхности S в точке X* .

Нормальные кривизны поверхности S в точке X , вычисленные в главных направлениях, называются *главными нормальными кривизнами поверхности S в точке X* .

Выясним геометрический смысл коэффициентов k_1 и k_2 в уравнении (11). Для этого вычислим нормальные кривизны соприкасающегося параболоида в точке X в направлении осей Xx' и Xy' . Впредь, чтобы не загромождать обозначений, опустим «штрих» в обозначении новых осей.

Найдем первую и вторую квадратичные формы соприкасающегося параболоида в точке X . Имеем:

$$E = 1 + Z_{0x}^{\prime 2} \Big|_{(0,0)} = 1 + k_1^2 x^2 \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$F = Z_{0x}^{\prime} Z_{0y}^{\prime} \Big|_{(0,0)} = k_1 k_2 x y \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$G = 1 + Z_{0y}^{\prime 2} \Big|_{(0,0)} = 1 + k_2^2 y^2 \Big|_{(0,0)} = 1,$$

$$L = \frac{Z_{0xx}^{\prime\prime}}{(1 + Z_{0x}^{\prime 2} + Z_{0y}^{\prime 2})^{1/2}} \Big|_{(0,0)} = k_1,$$

$$M = \frac{Z_{0xy}^{\prime\prime}}{(1 + Z_{0x}^{\prime 2} + Z_{0y}^{\prime 2})^{1/2}} \Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$N = \frac{Z_{0yy}^{\prime\prime}}{(1 + Z_{0x}^{\prime 2} + Z_{0y}^{\prime 2})^{1/2}} \Big|_{(0,0)} = k_2.$$

Таким образом, в точке X первая и вторая квадратичные формы соприкасающегося параболоида имеют соответственно вид:

$$I = dx^2 + dy^2, \quad (12)$$

$$II = k_1 dx^2 + k_2 dy^2. \quad (13)$$

Из сказанного в п. 3 следует, что в точке X на поверхности S первая и вторая квадратичные формы те же самые.

Нормальная кривизна соприкасающегося параболоида в точке X и поверхности S в той же точке равна

$$k_n = \frac{\Pi}{I} = \frac{k_1 dx^2 + k_2 dy^2}{dx^2 + dy^2}. \quad (14)$$

Отсюда нормальная кривизна в направлении оси x , т. е. в направлении $(dx : 0)$, равна k_1 , а в направлении оси y , т. е. в направлении $(0 : dy)$, равна k_2 .

Таким образом, коэффициенты k_1 и k_2 в уравнении (11) соприкасающегося параболоида есть главные нормальные кривизны поверхности S в точке X . Величины

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ и } K = k_1 k_2$$

называются соответственно *средней* и *гауссовой кривизнами поверхности S в точке X* .

5. Тип точки на поверхности. В зависимости от знака гауссовой кривизны точки поверхности S делятся на несколько типов. Поверхность S будем считать C^r -гладкой ($r \geq 2$).

1. Пусть в точке $X \in S$ гауссова кривизна $K > 0$. Тогда в этой точке главные нормальные кривизны k_1 и k_2 или обе положительны, или обе отрицательны. В обоих случаях соприкасающийся параболоид

$$Z_0(x, y) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$$

эллиптический. В первом случае он, касаясь плоскости x, y в своей вершине X , лежит над плоскостью x, y , а во втором, касаясь той же плоскости в X , лежит под ней. Достаточно малая окрестность точки X на поверхности S устроена в пространстве так же, как соприкасающийся параболоид. Это следует из формулы (9), поскольку функции $f(x, y)$ и $Z_0(x, y)$ отличаются в окрестности X на бесконечно малые выше второго порядка малости по отношению к $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. В малой окрестности точки X поверхность S имеет вид, изображенный на рисунке 70. Точки поверхности S , в которых гауссова кривизна $K > 0$, называются *эллиптическими*.

2. Пусть в точке $X \in S$ гауссова кривизна $K < 0$. Тогда в этой точке главные нормальные кривизны k_1 и k_2 отличны от нуля и имеют разные знаки. В этом случае соприкасающийся параболоид гиперболический и касательная плоскость пересекает его по паре прямых, пересекающихся под ненулевым углом. Окрестность точки X на гиперболическом параболоиде, как известно, имеет вид седла. Так же устроена и малая окрестность точки X на поверхности S . Касательная плоскость в точке X пересекает эту окрестность по паре кривых, пересекающихся в точ-



Рис. 70

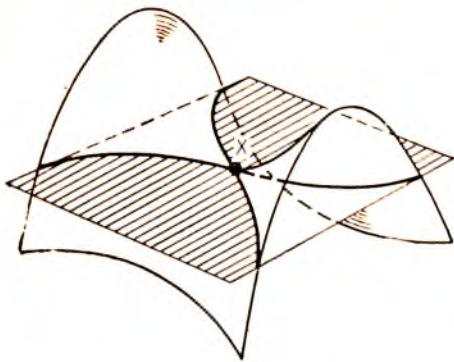


Рис. 71

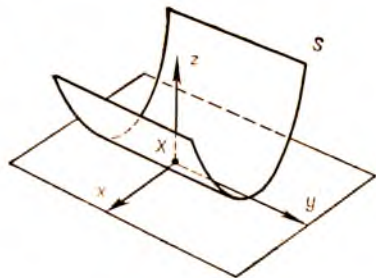


Рис. 72

ке X под ненулевым углом. Эта окрестность расположена по обе стороны от касательной плоскости в точке X (рис. 71). Точки поверхности S , в которых $K < 0$, называются *гиперболическими*.

3. Пусть в точке X гауссова кривизна $K = 0$. Точки поверхности S , в которых $K = 0$, называются *параболическими*. В параболической точке обращаются в нуль или одна главная нормальная кривизна, или обе. В первом случае малая окрестность точки X на поверхности S имеет вид, аналогичный виду куска параболического цилиндра:

$$Z_0(x, y) = \frac{1}{2} k_1 x^2$$

(если $k_2 = 0$, рис. 72). Во втором случае точка X называется *точкой уплощения*.

В малой окрестности точки уплощения поверхность может иметь весьма сложное строение. Его исследование связано с рассмотрением производных функции $f(x, y)$ третьего и более высоких порядков.

§ 34. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Пусть S — C^r -гладкая поверхность ($r \geq 2$), и пусть X — некоторая точка поверхности. Введем в окрестности точки X специальную параметризацию поверхности S , причем оси x и y направим по главным направлениям S в точке X . Тогда уравнение соприкасающегося параболоида имеет вид (см. п. 4 § 33):

$$Z_0(x, y) = \frac{1}{2} (k_1 x^2 + k_2 y^2).$$

В п. 4 § 33 найден вид первой и второй квадратичных форм поверхности S в точке X :

$$I = dx^2 + dy^2, \quad II = k_1 dx^2 + k_2 dy^2,$$

а также выражение нормальной кривизны k_n в точке X :

$$k_n = \frac{k_1 dx^2 + k_2 dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Из последнего равенства получаем:

$$k_n = k_1 \left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right)^2 + k_2 \left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right)^2. \quad (1)$$

Направление оси x будем называть *первым главным направлением*. Рассмотрим некоторое направление $(dx : dy)$ на поверхности S в точке X , составляющее угол φ с первым главным направлением. Тогда, очевидно, выполнены равенства (рис. 73)



Рис. 73

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \cos \varphi \quad \text{и} \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sin \varphi,$$

с учетом которых равенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Равенство (2) называется формулой Эйлера. Оно составляет содержание теоремы Эйлера.

Теорема 1. *Нормальная кривизна k_n в точке X поверхности в направлении, составляющем угол φ с первым главным направлением, равна:*

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где k_1 и k_2 — главные нормальные кривизны поверхности S в точке X .

Теорема Эйлера позволяет взглянуть на главные направления и главные нормальные кривизны поверхности с новой точки зрения. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Главные направления C^r -гладкой поверхности ($r \geq 2$) в данной точке X — это те направления, в которых нормальные кривизны достигают экстремумов.*

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) $k_1 \neq k_2$ и 2) $k_1 = k_2$.

В первом случае пусть для определенности $k_1 > k_2$. Тогда для направления, составляющего угол φ с первым главным направлением, имеем:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = k_1 - (k_1 - k_2) \sin^2 \varphi \quad \text{и} \\ k_n = k_2 + (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi.$$

Отсюда ясно, что k_n как функция от φ имеет ровно два экстремальных значения: наибольшее значение, равное k_1 , достигается при $\varphi = 0, \pi$; наименьшее, равное k_2 , достигается при $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

Во втором случае, когда $k_1 = k_2$, для любого направления имеем:

$$k_n = k_1 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k_1 = k_2,$$

т. е. все нормальные кривизны поверхности в данной точке равны. Любое направление можно считать главным. В точке, где $k_1 = k_2$, поверхность имеем нестрогий экстремум нормальной кривизны.

Теорема доказана.

Эта теорема дает способ отыскания на поверхности главных направлений и главных нормальных кривизн без привлечения громоздкой конструкции, связанной с построением соприкасающегося параболоида и приведением его уравнения к каноническому виду.

§ 35. ОТЫСКИВАНИЕ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ И ГЛАВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ КРИВИЗН

Пусть S — C^r -гладкая поверхность и $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^r(D)$ — некоторая ее параметризация. Пусть $X(u, v)$ — произвольная точка поверхности S . Будем искать в точке X главные направления и главные нормальные кривизны. Для произвольного направления $(du : dv)$ нормальная кривизна k_n поверхности S в точке X выражается формулой

$$k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Cdv^2}.$$

Ясно, что отыскание главных направлений сводится к нахождению отношения $(du : dv)$, для которого k_n как функция отношений $(du : dv)$ достигает экстремума.

Для удобства записи последующих выкладок введем на некоторое время следующие обозначения: $du = \xi$, $dv = \eta$.

Тогда формула для k_n примет вид:

$$k_n = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}.$$

На k_n можно смотреть как на функцию двух переменных ξ и η , принимающую равные значения в точках одной и той же прямой плоскости ξ, η , проходящей через начало координат. (При этом исключается из рассмотрения точка $(0, 0)$.) Каждое направление на поверхности S в точке X задается точкой (ξ, η) при условии $\xi^2 + \eta^2 \neq 0$. (Ясно, что этому направлению отвечает любая точка прямой, проходящей через (ξ, η) и начало координат.) Пусть нормальная кривизна поверхности S в точке X для некоторого направления принимает экстремальное значение. Это означает, что функция $k_n(\xi, \eta)$ принимает в некоторой точке (ξ, η) , отвечающей данному направлению, экстремальное значение. Тогда необходимо выполняются равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial k_n}{\partial \xi} = \frac{2(L\xi + M\eta)\text{I} - 2(E\xi + F\eta)\text{II}}{\text{I}^2} = 0, \\ \frac{\partial k_n}{\partial \eta} = \frac{(M\xi + N\eta)\text{I} - 2(F\xi + G\eta)\text{II}}{\text{I}^2} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} L\xi + M\eta = \frac{\Pi}{I} (E\xi + F\eta), \\ M\xi + N\eta = \frac{\Pi}{I} (F\xi + G\eta). \end{cases} \quad (2)$$

Исключая из (2) отношение $\frac{\Pi}{I}$, получим:

$$(L\xi + M\eta)(F\xi + G\eta) - (M\xi + N\eta)(E\xi + F\eta) = 0,$$

или

$$(LF - ME)\xi^2 + (LG - NE)\xi\eta + (MG - NF)\eta^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть уравнение второго порядка относительно отношения $(\xi : \eta)$, его корни дают главные направления поверхности в точке X .

Вернемся теперь к дифференциалам du, dv и перепишем уравнение (3) в виде определителя

$$\begin{vmatrix} -dv^2 & dudv & -du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Если в точке X $\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N}$, то определитель (4) тождественно равен нулю, и, следовательно, все направления главные. Если в точке X это условие не выполняется, то в квадратном уравнении (3) хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, и, следовательно, оно имеет ровно два корня (разумеется, вещественных, поскольку главные направления всегда существуют).

Таким образом, мы указали способ нахождения главных направлений поверхности S в точке X . Пусть теперь $(du : dv)$ — главное направление. Обозначим через k главную нормальную кривизну, соответствующую этому направлению. В силу (2)

$$\begin{cases} Ldu + Mdv = k(Edu + Fdv), \\ Mdu + Ndv = k(Fdu + Gdv), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (L - kE) du + (M - kF) dv = 0, \\ (M - kF) du + (N - kG) dv = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Однородная система (5) имеет ненулевое решение, поэтому

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение для определения главных нормальных кривизн поверхности S в данной точке:

$$(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - LG)k + (LN - M^2) = 0. \quad (6)$$

По формулам Виета из уравнения (6) находим выражения для гаус-

совой и средней кривизн через коэффициенты первой и второй квадратичных форм:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (7)$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2} \frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}. \quad (8)$$

Для поверхности, являющейся графиком функции $z = f(x, y)$ класса C^2 , выражения для гауссовой и средней кривизн имеют следующий вид:

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

§ 36. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Деривационные формулы. Аналогом формул Френе для поверхностей класса C^2 являются деривационные формулы. Они дают выражения для производных вектор-функций \bar{r}_u , \bar{r}_v и \bar{n} через эти векторы и коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Поскольку векторы \bar{r}_u , \bar{r}_v и \bar{n} некопланарны, то векторы \bar{r}_{uu} , \bar{r}_{uv} , \bar{r}_{vv} , \bar{n}_u , \bar{n}_v допускают следующие разложения:

$$\bar{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{11}^2 \bar{r}_v + a_{11} \bar{n}, \quad (1)$$

$$\bar{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{12}^2 \bar{r}_v + a_{12} \bar{n}, \quad (2)$$

$$\bar{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{22}^2 \bar{r}_v + a_{22} \bar{n}, \quad (3)$$

$$\bar{n}_u = \alpha_1 \bar{r}_u + \beta_1 \bar{r}_v + \gamma_1 \bar{n}, \quad (4)$$

$$\bar{n}_v = \alpha_2 \bar{r}_u + \beta_2 \bar{r}_v + \gamma_2 \bar{n}. \quad (5)$$

Целью является отыскание коэффициентов написанных разложений. Сразу же заметим, что $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, поскольку \bar{n} — единичный вектор, и, значит, производные \bar{n}_u , \bar{n}_v ортогональны \bar{n} , т. е. лежат в плоскости векторов \bar{r}_u , \bar{r}_v (см. п. 2, § 26, лемма 1).

Умножив скалярно (4) на \bar{r}_u и \bar{r}_v , получим систему для отыскания α_1 и α_2 :

$$\begin{cases} E\alpha_1 + F\beta_1 = (\bar{n}_u, \bar{r}_u), \\ F\alpha_1 + G\beta_1 = (\bar{n}_u, \bar{r}_v). \end{cases}$$

Так как $(\bar{r}_u, \bar{n}) = 0$, то $(\bar{r}_{uu}, \bar{n}) + (\bar{r}_u, \bar{n}_u) = 0$, откуда $(\bar{r}_u, \bar{n}_u) = -L$. Аналогично $(\bar{r}_v, \bar{n}_v) = -N$ и $(\bar{n}_u, \bar{r}_v) = -M$. Поэтому система для отыскания α_1 , β_1 имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E\alpha_1 + F\beta_1 = -L, \\ F\alpha_1 + G\beta_1 = -M, \end{cases}$$

откуда

$$\alpha_1 = \frac{MF - LG}{EG - F^2}, \quad \beta_1 = \frac{LF - ME}{EG - F^2}.$$

Аналогично получаем, что

$$\alpha_2 = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad \beta_2 = \frac{MF - NE}{EG - F^2}.$$

Умножая скалярно каждое из равенств (1), (2), (3) на \bar{n} , получаем:

$$a_{11} = L, \quad a_{12} = M, \quad a_{22} = N.$$

Покажем, как находятся коэффициенты Γ_{ij}^k . Умножив скалярно равенство (1) на \bar{r}_u и \bar{r}_v , получим систему

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = (\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u), \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = (\bar{r}_{uv}, \bar{r}_v). \end{cases}$$

Дифференцируя равенство $E = \bar{r}_u^2$ по u , получим, что

$$(\bar{r}_{uu}, \bar{r}_u) = \frac{1}{2} E_u.$$

Дифференцируя равенство $F = (\bar{r}_u, \bar{r}_v)$ по u , а равенство $E = \bar{r}_u^2$ по v , получим, что

$$(\bar{r}_{uv}, \bar{r}_v) = F_u - \frac{1}{2} E_v.$$

Окончательно система для отыскания Γ_{11}^1 и Γ_{11}^2 принимает следующий вид:

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} E_u, \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2} E_v. \end{cases}$$

откуда

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-E_uF + 2EF_v - EE_v}{2(EG - F^2)}.$$

Аналогичные выражения можно получить для Γ_{12}^1 , Γ_{12}^2 , Γ_{22}^1 и Γ_{22}^2 . Коэффициенты Γ_{ij}^k ($i, j, k = 1, 2$) называются коэффициентами Кристоффеля. Следует отметить, что коэффициенты Кристоффеля выражаются исключительно через коэффициенты первой квадратичной формы.

Таким образом, мы показали, как отыскиваются все коэффициенты в равенствах (1)–(5). Видим, что векторы \bar{r}_{uu} , \bar{r}_{uv} , \bar{r}_{vv} , \bar{n}_u , \bar{n}_v действительно выражаются через \bar{r}_u , \bar{r}_v , \bar{n} с помощью коэффициентов, за-

висящих только от коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Равенства (1)—(5) называются *дериационными формулами*.

В дальнейшем будем часто рассматривать случай, когда первая квадратичная форма поверхности имеет следующий частный вид:

$$I = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

В этом случае $E = 1$, $F = 0$, и поэтому коэффициенты Кристоффеля имеют простые выражения:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_u, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}. \quad (7)$$

2. Формулы Петерсона — Кодацци и Гаусса. Пусть S — C^r -гладкая поверхность ($r \geq 3$), заданная некоторой C^r -гладкой параметризацией $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Поскольку вектор-функция $\bar{r}(u, v)$ имеет непрерывные третьи производные, то, как известно, должны выполняться соотношения $(\bar{r}_{uu})_v = (\bar{r}_{uv})_u$, $(\bar{r}_{uv})_v = (\bar{r}_{vv})_u$. Кроме того, по той же причине $(\bar{n}_u)_v = (\bar{n}_v)_u$. Отсюда, если воспользоваться дериационными формулами, получим следующие три соотношения:

$$(\Gamma_{11}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{11}^2 \bar{r}_v + L \bar{n})_v - (\Gamma_{12}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{12}^2 \bar{r}_v + M \bar{n})_u = 0, \quad (8)$$

$$(\Gamma_{12}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{12}^2 \bar{r}_v + M \bar{n})_v - (\Gamma_{22}^1 \bar{r}_u + \Gamma_{22}^2 \bar{r}_v + N \bar{n})_u = 0, \quad (9)$$

$$\left(\frac{MF - LG}{EG - F^2} \bar{r}_u + \frac{LF - ME}{EG - F^2} \bar{r}_v \right)_v - \left(\frac{NF - MG}{EG - F^2} \bar{r}_u + \frac{MF - NE}{EG - F^2} \bar{r}_v \right)_u = 0. \quad (10)$$

Если в равенствах (8) — (10) провести указанное дифференцирование и векторы \bar{r}_{uu} , \bar{r}_{uv} , \bar{r}_{vv} , \bar{n}_u , \bar{n}_v , получившиеся в результате дифференцирования, снова заменить по дериационным формулам, то получим три векторных равенства:

$$A_1 \bar{r}_u + B_1 \bar{r}_v + C_1 \bar{n} = \bar{0};$$

$$A_2 \bar{r}_u + B_2 \bar{r}_v + C_2 \bar{n} = \bar{0};$$

$$A_3 \bar{r}_u + B_3 \bar{r}_v + C_3 \bar{n} = \bar{0},$$

где $A_1, \dots, B_1, \dots, C_1, \dots$ — некоторые выражения, составленные из коэффициентов первой и второй квадратичных форм и их производных. Поскольку векторы \bar{r}_u , \bar{r}_v , \bar{n} линейно независимы, то получают девять скалярных равенств:

$$A_1 = A_2 = A_3 = B_1 = B_2 = B_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Оказывается, что из этих девяти равенств различных только три. Приведем их, опустив громоздкие вычисления:

$$2(EG - F^2)(L_v - M_u) - (EN + GL - 2FM)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

$$2(EG - F^2)(M_v - N_u) - (EN + GL - 2FM)(F_v - G_u) +$$

$$+ \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u \right\}. \quad (13)$$

Первые два соотношения называются *уравнениями Петерсона — Кодацци*, третье — *формулой Гаусса*. Формула Гаусса показывает, что *гауссова кривизна поверхности выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности*. В следующей главе более подробно остановимся на этом замечательном факте.

3. Существование и единственность поверхности с заданными первой и второй квадратичными формами. Уравнения (11)—(13) показывают, что первая и вторая квадратичные формы гладкой поверхности класса C^3 не являются независимыми, между коэффициентами E , F , G и L , M , N имеется связь, выражаемая уравнениями Петерсона — Кодацци и Гаусса.

Оказывается, что других связей между I и II нет. А именно имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а (Бонне). Пусть в открытом прямоугольнике $D \subset R^2 = \{(u, v)\}$ заданы две любые квадратичные формы

$$E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2$$

и

$$L(u, v) du^2 + 2M(u, v) dudv + N(u, v) dv^2,$$

из которых первая положительно определенная и коэффициенты ее принадлежат классу C^2 , а коэффициенты второй формы принадлежат классу C^1 . Тогда если коэффициенты заданных форм удовлетворяют уравнениям Петерсона — Кодацци и Гаусса, то в каждой точке $(u_0, v_0) \in D$ найдется такая окрестность $\Omega \subset D$, что существует C^3 -вложение $f: \Omega \rightarrow E^3$, задающее поверхность класса C^3 , для которой данные квадратичные формы являются соответственно первой и второй квадратичными формами. Эта поверхность единственна с точностью до перемещения.

Доказательство теоремы сводится к теореме существования и единственности задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Внутренняя геометрия поверхностей

§ 37. ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Изометричные поверхности. Две поверхности S и S' называются *изометричными*, если между точками этих поверхностей можно установить такое биективное соответствие, при котором длины соответствующих кривых на поверхностях S и S' равны. Если две поверхности изометричны, то говорят, что каждая из них получена *изгибанием* другой. Другими словами, изгибание поверхности — это такая ее деформация, при которой не изменяются длины кривых на поверхности.

Легко представить себе изгибание плоскости в двугранный угол или в параболический цилиндр (рис. 74). Менее тривиальным примером является изгибание многогранного выпуклого угла, например трехгранного, в коническую поверхность, которая имеет такую же развертку и плоский угол, что и данный многогранный угол (рис. 75).

Наконец, приведем еще такой пример. Если от сферы S^2 отрезать плоскостью сферический сегмент и отразить его зеркально относительно плоскости края, то получим невыпуклую поверхность S^1 , имеющую ребро и изометричную сфере S^2 (рис. 76).

Для C^1 -гладких поверхностей справедлив следующий достаточный признак изометрии.

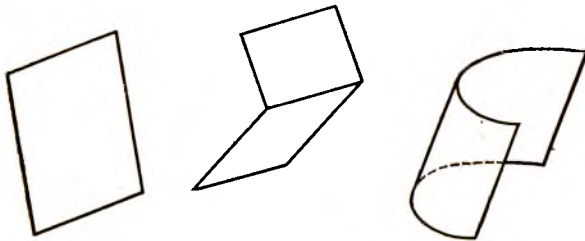


Рис. 74



Рис. 75

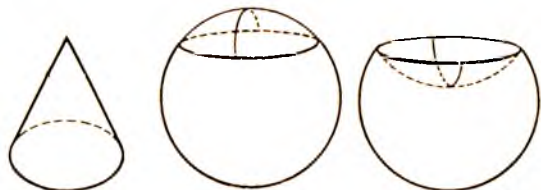


Рис. 76

Теорема 1. Пусть поверхности S_1 и S_2 заданы вектор-функциями $\vec{r}_1(u, v)$ и $\vec{r}_2(u, v)$ класса C^1 с одной и той же областью определения $D \subset R^2$. Если коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей S_1 и S_2 в области D равны, т. е. для всех $(u, v) \in D$

$$E_1(u, v) = E_2(u, v), F_1(u, v) = F_2(u, v), G_1(u, v) = G_2(u, v), \quad (1)$$

то S_1 и S_2 изометричны.

Доказательство. Установим следующее соответствие между точками поверхностей S_1 и S_2 : будем считать соответствующими точки $X_1 \in S_1$ и $X_2 \in S_2$ с одними и теми же координатами (u, v) . Пусть C^1 -гладкая кривая γ_1 на S_1 задается уравнениями

$$u = u(t), v = v(t), t_1 < t < t_2.$$

Тогда соответствующая ей кривая $\gamma_2 \subset S_2$ задается теми же уравнениями. В таком случае в силу (1)

$$\begin{aligned} s(\gamma_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E_1(u, v) u'^2 + 2F_1(u, v) u'v' + G_1(u, v) v'^2} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E_2(u, v) u'^2 + 2F_2(u, v) u'v' + G_2(u, v) v'^2} dt = s(\gamma_2), \end{aligned}$$

откуда и следует изометрия поверхностей S_1 и S_2 .

Теорема доказана.

Условия (1) являются в известном смысле и необходимыми условиями изометрии двух поверхностей. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть C^1 -гладкие поверхности S_1 и S_2 изометричны и допускают параметризации вектор-функциями $\vec{r}_1(u, v)$ и $\vec{r}_2(u, v)$, заданными в одной и той же области $D \subset R^2$. Тогда если точки, соответствующие по изометрии, имеют одинаковые внутренние координаты (u, v) , то имеют место равенства (1).

Доказательство. Пусть (u_0, v_0) — произвольная точка области D . Рассмотрим линии u на поверхностях S_i , заданными внутренними уравнениями $u = u_0 + t, v = v_0 + t, -\delta < t < \delta$, причем $\delta > 0$ возьмем столь малым, чтобы кривая на плоскости R^2 , заданная этими уравнениями, лежала в области D . Ясно, что точкам $X_i(u_0, v_0) \in S_i (i = 1, 2)$ отвечает параметр $t = 0$. В силу изометрии поверхностей S_1 и S_2 соответствующие дуги линий u на S_1 и S_2 имеют равные длины. Поэтому равенство

$$\int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{E_1(u_0 + t, v_0)} dt = \int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{E_2(u_0 + t, v_0)} dt \quad (2)$$

верно для любого $\tau \in (-\delta, \delta)$. Поскольку поверхности S_1 и S_2 принадлежат классу C^1 , то коэффициенты E_1 и E_2 первых квадратичных форм непрерывны. Применяя теорему о среднем, получим из (2) равенство

$$\sqrt{E_1(u_0 + \theta_1, v_0)} = \sqrt{E_2(u_0 + \theta_2, v_0)},$$

где θ_1, θ_2 — некоторые значения параметра t , лежащие в промежутке $[-\tau, \tau]$. Устремляя $\tau \rightarrow 0$, получим равенство

$$E_1(u_0, v_0) = E_2(u_0, v_0). \quad (3)$$

Совершенно аналогично, рассматривая линии v на S_1 и S_2 , проходящие через точки $X_1(u_0, v_0)$ и $X_2(u_0, v_0)$, получим, что

$$G_1(u_0, v_0) = G_2(u_0, v_0). \quad (4)$$

Наконец, если рассмотреть на S_1 и S_2 дуги кривых, заданных внутренними уравнениями

$$u = u_0 + t, v = v_0 + t, -\delta < t < \delta,$$

очевидно, проходящими соответственно через точки $X_1(u_0, v_0)$ и $X_2(u_0, v_0)$ (при $t = 0$), и воспользоваться изометрией S_1 и S_2 , то получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{E_1(u_0 + t, v_0 + t) + 2F_1(u_0 + t, v_0 + t) + G_1(u_0 + t, v_0 + t)} dt = \\ & = \int_{-\tau}^{\tau} \sqrt{E_2(u_0 + t, v_0 + t) + 2F_2(u_0 + t, v_0 + t) + G_2(u_0 + t, v_0 + t)} dt \end{aligned}$$

для любых значений $\tau \in [-\delta, \delta]$. Применив теорему о среднем и устремляя $\tau \rightarrow 0$, получим равенство:

$$\begin{aligned} & \sqrt{E_1(u_0, v_0) + 2F_1(u_0, v_0) + G_1(u_0, v_0)} = \\ & = \sqrt{E_2(u_0, v_0) + 2F_2(u_0, v_0) + G_2(u_0, v_0)}. \end{aligned}$$

Из этого равенства и равенств (3), (4) получим, что

$$F_1(u_0, v_0) = F_2(u_0, v_0). \quad (5)$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В теореме 2 равенства (1) для изометричных поверхностей доказаны при условии, что в соответствующих по изометрии точках совпадают значения внутренних координат u, v . Оказывается, что это условие для изометричных поверхностей класса C^2 всегда можно обеспечить, если рассматривать достаточно малые окрестности соответствующих по изометрии точек. Доказательство этого факта сложно, и не будем его приводить. Тем не менее, имея дело с изометричными поверхностями, будем считать, что указанное выше условие выполнено.

2. Понятие о внутренней геометрии поверхности. Рассмотрение двух поверхностей, полученных изгибанием, показывает, что многие их свойства одни и те же, хотя формы у них разные. Поэтому целесообразно изучать такие понятия и факты теории поверхностей, которые не меняются при изгибании. Эти понятия и факты составляют содержание *внутренней геометрии поверхности*.

Если поверхности принадлежат классу C^r ($r \geq 2$), то из сказанного в п. 1 следует, что внутренняя геометрия гладкой поверхности

изучает только такие понятия и факты, которые определяются исключительно первой квадратичной формой. Из результатов главы V вытекает, что к внутренней геометрии относятся длины кривых на поверхности, углы между кривыми, площади областей, коэффициенты Кристоффеля. Из уравнения Гаусса следует, что *гауссова кривизна поверхности есть объект внутренней геометрии* и, стало быть, *не меняется при изгибаниях поверхности*. Интересно отметить, что этот факт произвел на Гаусса столь сильное впечатление, что он назвал его «теоремой egregium» («блистательная теорема»).

В частности, из теоремы Гаусса следует, что *тип точки на поверхности не изменяется при изгибаниях*, т. е. *принадлежит внутренней геометрии поверхности*. Поэтому изгибанием нельзя, например, эллиптическую точку перевести в параболическую или гиперболическую.

Понятие внутренней геометрии поверхности ввел Гаусс. В настоящей главе будут введены новые понятия теории поверхностей, принадлежащие внутренней геометрии.

§ 38. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА КРИВОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

1. Определение геодезической кривизны. Пусть на поверхности S класса C^2 дана C^2 -гладкая кривая γ . Пусть $\bar{\tau}$ — единичный вектор касательной к γ в точке X , \bar{n} — нормаль к поверхности S в точке X , $k\bar{v}$ — вектор кривизны кривой γ в точке $X \in \gamma$, s — натуральный параметр кривой γ .

Рассмотрим в точке X ортонормированный базис $\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{n}_g$ (рис. 1), где

$$\bar{n}_g = \bar{n} \times \bar{\tau}.$$

Разложим вектор кривизны кривой γ в точке X по базису $\bar{n}, \bar{\tau}, \bar{n}_g$. Поскольку вектор $k\bar{v} \perp \bar{\tau}$, то это разложение имеет вид:

$$k\bar{v} = \alpha\bar{n} + \beta\bar{n}_g, \quad (1)$$

где, очевидно,
(см. п. 2 § 33) и

$$\alpha = (k\bar{v}, \bar{n}) = k \cos \psi = k_n \quad (2)$$

$$\beta = (k\bar{v}, \bar{n}_g). \quad (3)$$

Из формулы (2) видим, что введенная в п. 2, § 33, нормальная кривизна k_n поверхности S в точке X в направлении $\bar{\tau}$ есть проекция вектора кривизны $k\bar{v}$ кривой γ на направление нормали \bar{n} к поверхности S в точке X (отсюда термин «нормальная кривизна»).

Величина β называется *геодезической кривизной кривой γ* в точке $X \in \gamma$ и обозначается k_g . Таким образом,

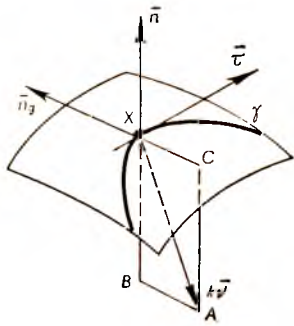


Рис. 77

$$k_g = (k\bar{v}, \bar{n}_g) = (k\bar{v}, \bar{n} \times \bar{\tau}).$$

Из первой формулы Френе получаем, что

$$k_g = \left(\bar{n}, \bar{\tau}, \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right) = \left(\bar{n}, \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \right). \quad (4)$$

Таким образом, вектор кривизны

$$\overline{XA} = \overline{XB} + \overline{XC},$$

где \overline{XB} называется вектором нормальной кривизны, а \overline{XC} — вектором геодезической кривизны. Длины этих векторов соответственно модули нормальной и геодезической кривизн кривой γ в точке X . Ясно, что

$$k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}. \quad (5)$$

Выясним геометрический смысл геодезической кривизны. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть γ — кривая класса C^2 на поверхности S класса C^2 , и пусть X — некоторая точка кривой γ . Пусть далее γ' — ортогональная проекция γ на касательную плоскость T_X к S в точке X . Тогда кривизна кривой γ' в точке X равна абсолютной величине геодезической кривизны кривой γ в точке X .

Доказательство. Поскольку в теореме идет речь о локальном факте, то рассмотрение можно ввести в столь малой окрестности точки X на S , что γ' является C^2 -гладкой кривой в плоскости T_X . Через кривую γ проведем цилиндрическую поверхность S_0 с образующими, параллельными нормали \bar{n} (рис. 78). Эта цилиндрическая поверхность в пересечении с касательной плоскостью T_X дает кривую γ_0 класса C^2 , которая является ортогональной проекцией кривой γ на плоскость T_X . Так как касательная плоскость к S_0 в точке X проходит через образующую, параллельную вектору \bar{n} и касательную \overline{XA} к кривой γ , то нормаль к S_0 пойдет по направлению \overline{XC} — вектора геодезической кривизны кривой γ в точке X . Очевидно, касательная к γ_0 в точке X совпадает с прямой XA , тем самым кривые γ и γ_0 , лежащие на цилиндрической поверхности S_0 , имеют общую касательную. В таком случае нормальные кривизны кривых γ и γ_0 на поверхности S_0 совпадают. Рассматривая γ как кривую на цилиндрической поверхности S_0 , видим, что ее вектор нормальной кривизны в точке X есть вектор \overline{XC} . В силу теоремы Менье, примененной к кривой γ_0 на поверхности S_0 , ее кривизна в точке X равна абсо-

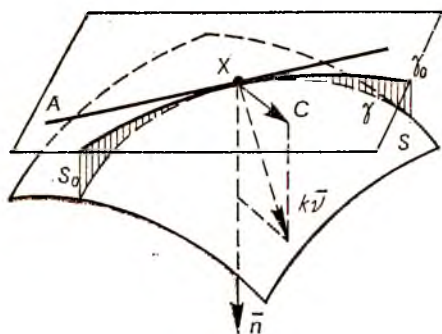


Рис. 78

лютой величине геодезической кривизны кривой γ_0 в точке X . Очевидно, касательная к γ_0 в точке X совпадает с прямой XA , тем самым кривые γ и γ_0 , лежащие на цилиндрической поверхности S_0 , имеют общую касательную. В таком случае нормальные кривизны кривых γ и γ_0 на поверхности S_0 совпадают. Рассматривая γ как кривую на цилиндрической поверхности S_0 , видим, что ее вектор нормальной кривизны в точке X есть вектор \overline{XC} . В силу теоремы Менье, примененной к кривой γ_0 на поверхности S_0 , ее кривизна в точке X равна абсо-

люточной величине нормальной кривизны поверхности S_0 в точке X в направлении \overline{XA} . Отсюда получаем, что кривизна кривой γ_0 в точке X равна модулю нормальной кривизны кривой γ в точке X , рассматриваемой как кривая на поверхности S_0 , т. е. $|XC|$. Но с другой стороны, $|XC|$ равна модулю геодезической кривизны кривой γ в точке X , рассматриваемой как кривая на S . Теорема доказана.

2. Геодезическая кривизна — объект внутренней геометрии. Пусть γ — кривая класса C^2 на C^2 -гладкой поверхности S , заданной параметризацией $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2(D)$. Пусть γ задана внутренними уравнениями $u = u(s)$, $v = v(s)$, где s — натуральный параметр на γ . Найдем формулу для вычисления геодезической кривизны кривой γ . Для этого воспользуемся формулой (4). Имеем вдоль γ :

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}_u \frac{du}{ds} + \bar{r}_v \frac{dv}{ds},$$

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{r}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\bar{r}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \bar{r}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \bar{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \bar{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Пользуясь дериационными формулами (1)–(3) § 36, получим:

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right) \bar{r}_u + \left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right) \bar{r}_v + C\bar{n},$$

где

$$A = \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$B = \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$C = L \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} k_g &= \left(\bar{n} \times \frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right) = \left(\bar{n} \times \bar{r}_u\right) \frac{du}{ds} + \left(\bar{n} \times \bar{r}_v\right) \frac{dv}{ds}, \\ &\left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right) \bar{r}_u + \left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right) \bar{r}_v + C\bar{n} = \left(\bar{n}, \bar{r}_u, \bar{r}_v\right) \times \\ &\times \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right) \frac{du}{ds} + \left(\bar{n}, \bar{r}_u, \bar{r}_v\right) \left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right) \frac{dv}{ds} = \left(\bar{n}, \bar{r}_u, \bar{r}_v\right) \times \\ &\times \left(\left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right) \frac{du}{ds} - \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right) \frac{dv}{ds}\right) = |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| \left(\frac{d^2v}{ds^2} \frac{du}{ds} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} + B \frac{du}{ds} - A \frac{dv}{ds}\right). \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$k_g = \sqrt{EG - F^2} \left(\frac{d^2v}{ds^2} \frac{du}{ds} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \right.$$

$$+ (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} + \left(\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1 \right) \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3. \quad (6)$$

Из равенства (6) вытекает следующая важная теорема.

Т е о р е м а 2. *Геодезическая кривизна есть объект внутренней геометрии поверхности.*

Таким образом, при изгибании поверхности геодезическая кривизна любой кривой на ней не меняется. Из формулы (5) следует, что кривизна кривой на поверхности при ее изгибании меняется лишь за счет изменения нормальной кривизны, т. е. за счет изменения формы поверхности.

§ 39. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ

1. Определение геодезической линии. Кривая на поверхности называется *геодезической линией*, если в каждой точке ее геодезическая кривизна равна нулю.

Ясно, что геодезические линии являются объектом внутренней геометрии поверхности. Очевидно, геодезические линии на плоскости — прямые. На геодезические линии поверхности можно смотреть как на естественные аналоги прямых на плоскости.

Отметим два простейших свойства геодезических линий.

1°. *Если две поверхности касаются друг друга вдоль некоторой кривой γ , которая является геодезической линией на одной из них, то она будет геодезической и на другой.*

Действительно, по определению геодезическая кривизна кривой является проекцией вектора кривизны на касательную плоскость, и так как касательная плоскость вдоль γ для обеих поверхностей одна и та же, то геодезическая кривизна для обеих поверхностей одна и та же.

2°. *Для того чтобы кривая γ на поверхности S была геодезической линией, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке кривой γ , где кривизна отлична от нуля, главная нормаль к γ была коллинеарна нормали поверхности.*

Действительно, вектор геодезической кривизны, очевидно, равен нулю тогда, когда вектор кривизны коллинеарен нормали к поверхности.

2. Примеры геодезических линий.

П р и м е р 1. Поверхность S — прямой круговой цилиндр. Его параметризацию можно задать уравнениями

$$x = R \cos \frac{u}{R}, \quad y = R \sin \frac{u}{R}, \quad z = v.$$

Первая квадратичная форма цилиндра в этих координатах u, v имеет вид:

$$I = du^2 + dv^2.$$

Тогда уравнение геодезических линий с учетом, что все $\Gamma_{ij}^k = 0$, принимает вид:

$$v''u' - u''v' = 0,$$

Решением этого уравнения являются прямые

$$u = as + b, v = cs + d,$$

которые определяют на S геодезические линии

$$x = R \cos \frac{as+b}{R}, \quad y = R \sin \frac{as+b}{R}, \quad z = cs + d,$$

являющиеся, как известно (см. п. 4, § 28) винтовыми линиями.

Пример 2. Поверхность — сфера S^2 . Геодезическими линиями являются окружности больших кругов, так как главные нормали к ним направлены по радиусу сферы и, следовательно, коллинеарны нормали к сфере (см. свойство 2⁰, п. 1).

3. Теорема существования геодезических линий.

Теорема. *Через каждую точку гладкой поверхности S класса C^2 в любом направлении можно провести, и притом единственную, геодезическую линию.*

Доказательство. Пусть поверхность S задана C^2 -гладкой параметризацией $\bar{r} = \bar{r}(u, v) \in C^2(D)$, и пусть $X(u_0, v_0)$ — произвольная точка поверхности S , а $(u'_0 : v'_0)$ — произвольное направление на S в точке X . Предположим сначала, что $u'_0 \neq 0$. Тогда направление $(u'_0 : v'_0)$ можно задать отношением $\left(1 : \frac{v'_0}{u'_0}\right)$. Обозначим

$\frac{v'_0}{u'_0}$ через f'_0 . Тогда заданное направление характеризуется числом f'_0 .

Так как в окрестности данной точки искомая геодезическая линия может быть задана параметризацией $v = f(u)$, то из (6) § 38 нетрудно получить следующее уравнение геодезической линии:

$$f'' + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f' + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) f'^2 - \Gamma_{22}^1 f'^3 + \Gamma_{11}^1 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $f(u)$. Согласно теореме существования решения дифференциального уравнения это уравнение в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) области $D \subset \mathbf{R}^2$ имеет единственное решение $v = f(u)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$f(u_0) = v_0, \quad f'(u_0) = f'_0.$$

Кривая на S , заданная внутренним уравнением $v = f(u)$, и является геодезической линией, проходящей через точку X в заданном направлении (и притом единственной).

Если же $u'_0 = 0$, то, очевидно, следует искать геодезическую линию на S , заданную внутренним уравнением $u = g(v)$. При этом рассматривается то же дифференциальное уравнение (1) относительно функции $u = g(v)$ при начальных условиях $g(v_0) = u_0$ и $g'(v_0) = -g'_0 = -\frac{u'_0}{v'_0}$. Применяя теорему существования решения дифферен-

циального уравнения, снова получим существование в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) единственной геодезической линии на S , проходящей через точку X в заданном направлении. Теорема доказана.

§ 40. ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

1. Полугеодезическая система координат. Система внутренних координат u, v на гладкой поверхности S класса C^2 называется *полугеодезической*, если в этой системе первая квадратичная форма имеет вид:

$$I = du^2 + G(u, v) dv^2. \quad (1)$$

Исследуем геометрические свойства такой координатной сети. Прежде всего отметим, что поскольку $F = 0$, то сеть линий u и v ортогональная.

Рассмотрим на S линии u . Тогда вдоль них $v = \text{const}$ и $dv = 0$. Следовательно, $ds^2 = du^2$, или $ds = \pm du$. Отсюда ясно, что координата u вдоль линии u является натуральным параметром. Ясно также, что линии $u = u_1$ и $u = u_2$ при любых u_1 и u_2 отсекают на всех линиях u дуги равной длины $|u_2 - u_1|$ (рис. 79). Докажем, что координатные линии u являются геодезическими.

Так как из (7) § 36 $\Gamma_{11}^2 = 0$, а $\frac{dv}{ds} = \frac{d^2v}{ds^2} = 0$, то правая часть формулы (6) § 38 обращается в нуль. Следовательно, линии u являются геодезическими линиями на S .

Итак, координатная сеть в полугеодезической системе координат на поверхности S устроена так: семейство линий u состоит из геодезических линий и u — натуральный параметр вдоль каждой из них, семейство линий v состоит из ортогональных траекторий к линиям u .

Из сказанного ясен способ построения полугеодезической системы координат на поверхности S . В окрестности точки $X \in S$ некоторая гладкая кривая γ , проходящая через X , выбирается в качестве линии

$u = 0$. В качестве линий u берутся геодезические линии, ортогонально пересекающие кривую γ (в каждой точке кривой γ такая геодезическая существует и единственная, см. п. 3 § 39). Вдоль линий u параметр u выбирается натуральным. Наконец, за линии v берутся ортогональные траектории семейства линий u .

Можно доказать, что этот способ построения полугеодезической системы координат всегда осуществим в достаточно малой окрестности любой точки X на C^2 -глад-

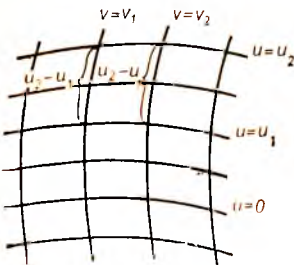


Рис. 79

кой поверхности S . Доказательство этого факта достаточно сложно, и не будем на нем останавливаться.

Наконец, отметим, что если в качестве кривой γ в указанном выше способе построения полугеодезических координат на S взять геодезическую линию, а параметр v на ней считать натуральным, то получим следующие два соотношения, необходимые нам в дальнейшем. А именно так как вдоль γ $u = 0$, то

$$ds^2 = G(0, v) dv^2,$$

а поскольку параметр v натуральный, то

$$G(0, v) = 1. \quad (2)$$

Далее, поскольку линия $u = 0$ геодезическая, то из формулы (6) и соотношений (7) § 36, следует, что

$$k_g = -\frac{1}{G} G_u,$$

т. е.

$$G_u(0, v) = 0. \quad (3)$$

2. Экстремальное свойство геодезической линии. Дуга кривой PQ на поверхности S с концами в точках P и Q называется кратчайшей, если дуга любой кривой на S с концами P и Q имеет длину не меньшую, чем PQ .

Теорема. *Если точки P и Q геодезической линии на поверхности S достаточно близки, то дуга PQ этой линии является кратчайшей среди дуг всевозможных кривых на S с концами P и Q .*

Доказательство. Введем на поверхности S полугеодезическую систему координат в достаточно малой окрестности точки P (считая, что точка Q попала в эту окрестность). При этом в качестве линии $v = 0$ берем геодезическую линию PQ , а в качестве линии $u = 0$ — геодезическую линию, проходящую через точку P и ортогональную дуге PQ (рис. 80). В этой системе координат на S точки P и Q имеют соответственно координаты $(0, 0)$ и $(u_0, 0)$, где u_0 — длина дуги PQ . Возьмем на S произвольную гладкую дугу с концами P и Q . Пусть она задается уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$. Для длины s этой дуги имеем:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \geq \int_a^b \left|\frac{du}{dt}\right| dt \geq \left|\int_a^b du\right| = |u(b) - u(a)|.$$

Поскольку всегда можно считать, что значение параметра $t = a$ отвечает точке P , а $t = b$ — точке Q , то $|u(b) - u(a)| = u_0 = s(PQ)$. Следовательно, длина произвольной гладкой дуги на S с концами P и Q не меньше длины дуги PQ , что и требовалось доказать.

Отметим, что требование близости точек P и Q на геодезической линии суще-

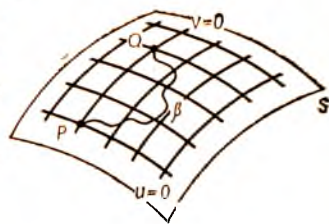


Рис. 80

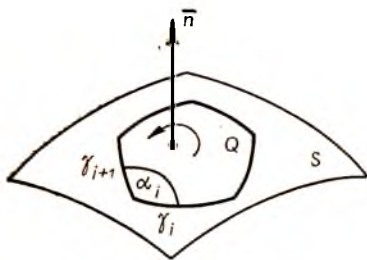


Рис. 81

ственно. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть две дуги большой окружности на сфере с общими концами P и Q , не являющимися диаметрально противоположными точками. Одна из этих дуг является кратчайшей, а другая нет.

§ 41. ТЕОРЕМА ГАУССА — БОННЕ

Рассмотрим на C^2 -поверхности S гомотопную кругу область Q , граница которой ∂Q состоит из конечного числа дуг C^2 -гладких кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Зададим на ∂Q направление обхода так, чтобы при обходе ∂Q в этом направлении с той стороны поверхности, куда направлена нормаль \bar{n} , область Q оставалась справа (рис. 81). Через α_i обозначим величины углов, образованных дугами γ_i и γ_{i+1} со стороны области Q . Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а.

$$\sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^m (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_Q K d\sigma, \quad (1)$$

где k_g — геодезическая кривизна кривых γ_i в точках гладкости, K — гауссова кривизна поверхности, ds — элемент длины кривых γ_i , $d\sigma$ — элемент площади поверхности S .

Доказательство теоремы 1 приводить не будем.

Из равенства (1), в частности, следует, что если ∂Q состоит из одной C^2 -гладкой кривой γ , то все α_i равны π , и мы получаем формулу

$$\oint_{\gamma} k_g ds = 2\pi - \iint_Q K d\sigma. \quad (2)$$

Отметим ряд важных следствий теоремы Гаусса — Бонне.

1. Если все дуги γ_i являются геодезическими линиями, то замкнутая область \bar{Q} называется *геодезическим многоугольником*. В этом случае формула (1) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^m (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_Q K d\sigma. \quad (3)$$

Если S — плоскость, то геодезический многоугольник превращается в простой многоугольник на плоскости, а $\pi - \alpha_i$ является величиной внешнего угла β_i этого многоугольника. Поскольку для плоскости $K = 0$, то из (3) получаем известную из курса элементарной геометрии формулу $\sum_{i=1}^m \beta_i = 2\pi$. В случае общей поверхности естественно назвать величину $\beta_i = \pi - \alpha_i$ *внешним углом* геодезического много-

угольника, а формулу (3) рассматривать как формулу для нахождения суммы внешних углов геодезического многоугольника:

$$\sum_{i=1}^m \beta_i = 2\pi - \iint_Q K d\sigma. \quad (4)$$

Величину $\iint_Q K d\sigma$ называют *интегральной кривизной области Q*.

Из (4) мы видим, что интегральная кривизна области Q на поверхности S в некотором смысле характеризует степень отклонения внутренней геометрии поверхности S от геометрии евклидовой плоскости.

2. Для геодезического треугольника T с углами α, β, γ формула (3) может быть записана так:

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_T K d\sigma.$$

Отсюда мы видим, что для поверхности, *изометричной плоскости, сумма внутренних углов геодезического треугольника равна π , больше π , если на поверхности $K > 0$, и меньше π , если $K < 0$.*

§ 42. ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

1. **Локальная изометричность поверхностей одной и той же постоянной гауссовой кривизны.** Пусть поверхность S имеет постоянную гауссову кривизну K . Возьмем на S произвольную точку X и фиксируем на S в этой точке некоторое направление $\bar{\tau}$. Проведем через точку X по указанному направлению геодезическую линию γ и введем в окрестности точки X полугеодезическую систему координат, приняв γ за линию $u = 0$, а параметр v вдоль нее будем считать натуральным. (Точке X соответствуют координаты $(0, 0)$.) Как отмечалось в п. 1 § 40, в этой системе координат первая квадратичная форма S имеет вид:

$$I = du^2 + G(u, v) dv^2,$$

причем выполнены соотношения

$$G(0, v) = 1 \text{ и } G_u(0, v) = 0. \quad (1)$$

Для гауссовой кривизны имеет место следующая формула:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G})_{uu}.$$

Отсюда получаем для коэффициента G дифференциальное уравнение

$$(\sqrt{G})_{uu} + K\sqrt{G} = 0 \quad (2)$$

при начальных условиях (1). Это уравнение по отношению к параметру u является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, его решения хорошо известны:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} A \cos(\sqrt{K}u) + B \sin(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ A + Bu, & \text{если } K = 0, \\ A \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u) + B \operatorname{sh}(\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где A и B — произвольные функции параметра v . В силу первого из соотношений (1) во всех трех случаях $A = 1$. Дифференцируя равенство (3) по u и используя второе из соотношений (1), получим во всех трех случаях $B = 0$. Таким образом, получаем:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \cos(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ 1, & \text{если } K = 0, \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0. \end{cases}$$

Следовательно, во введенной системе полугеодезических координат первая квадратичная форма поверхности S имеет вид:

$$I = \begin{cases} du^2 + \cos^2(\sqrt{K}u) dv^2, & \text{если } K > 0, \\ du^2 + dv^2, & \text{если } K = 0, \\ du^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}u) dv^2, & \text{если } K < 0. \end{cases}$$

Возьмем теперь другую поверхность S' с той же постоянной кривизной K . Фиксируем на ней произвольную точку X' и некоторое направление $\bar{\tau}'$ в этой точке. Введем полугеодезическую систему координат на S' , повторив все предыдущие построения. Тогда в некоторой окрестности точки X' во введенной системе координат первая квадратичная форма будет иметь вид:

$$I' = \begin{cases} du'^2 + \cos^2(\sqrt{K}u') dv'^2, & \text{если } K > 0, \\ du'^2 + dv'^2, & \text{если } K = 0, \\ du'^2 + \operatorname{ch}^2(\sqrt{-K}u') dv'^2, & \text{если } K < 0. \end{cases}$$

Установим между S и S' взаимно однозначное соответствие (в окрестностях точек X и X' , где введены указанные координаты) так, что соответствующие точки имеют одинаковые координаты $u = u'$, $v = v'$.

Легко видеть, что при таком соответствии первые квадратичные формы поверхностей S и S' равны, и, следовательно, S и S' изометричны. Кроме того, видно, что точке $(0, 0)$ и линии $u = 0$ на S соответствует точка $(0, 0)$ и линия $u' = 0$ на S' . Следовательно, точка X с направлением $\bar{\tau}$ переходит в точку X' с направлением $\bar{\tau}'$. Таким образом доказана теорема.

Т е о р е м а. Пусть S и S' — поверхности одной и той же постоянной гауссовой кривизны K , X и X' — произвольные точки соответственно на S и S' , $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}'$ — произвольные направления в этих точках соответственно на S и S' . Тогда существует изометрическое отображение некоторой окрестности точки X поверхности S на надлежаще выбранную окрестность точки X' поверхности S' , при котором точке X с направлением $\bar{\tau}$ соответствует точка X' с направлением $\bar{\tau}'$.

2. Простейшие поверхности постоянной гауссовой кривизны. Простейшей поверхностью постоянной положительной кривизны $K > 0$ является, очевидно, сфера радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Простейшей поверхностью постоянной нулевой гауссовой кривизны является плоскость.

Рассмотрим поверхность вращения, образованную вращением кривой

$$x = a \sin v, \quad z = a \left(\cos v + \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right),$$

расположенной в плоскости x, z , вокруг оси z . Кривая γ называется трактрисой.

Отличительным ее свойством является то, что длина отрезка касательной от точки касания до оси z постоянна.

Вид трактрисы изображен на рисунке 82. Параметр v представляет собой величину угла, образованного касательной к трактрисе с осью z . По уравнению меридиана легко написать уравнения поверхности вращения. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= a \sin v \cos u, \quad y = a \sin v \sin u, \\ z &= a \left(\cos v + \ln \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Простой подсчет гауссовой кривизны указанной поверхности по формуле (7) § 35, показывает, что $K = -\frac{1}{a^2}$. Поверхность, заданную уравнениями (4), называют *псевдосферой*. Как мы видим, это поверхность постоянной отрицательной кривизны.

Из теоремы пункта 1 вытекает, что у любой точки гладкой поверхности класса C^2 постоянной гауссовой кривизны K существует окрестность U , изометричная некоторой области на сфере радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$, если $K > 0$, или некоторой области на плоскости, если $K = 0$, или, наконец, некоторой области на псевдосфере с параметром $a = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, если $K < 0$.

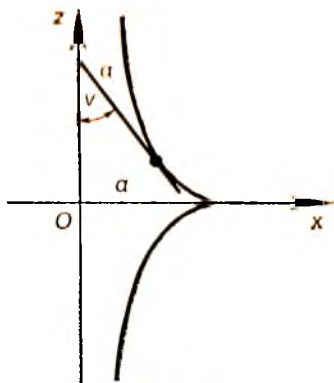


Рис. 82

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б. Геометрия. М., 1976, ч 2. — 447с.
2. Александров П. С. Введение в гомологическую теорию размерности. М., 1975. — 367 с.
3. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия. М., 1975, ч. 2.— 367 с.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М, 1958. — 324с.
5. Келли Дж. Общая топология. М., 1968. — 383 с.
6. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., 1980. — 439 с.
7. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М., 1969.—176 с.
- 7а. Погорелов А. В. Геометрия. М., 1983. — 288 с.
8. Рохлин В. А., Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М., 1977. — 488 с.
9. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М., 1964.— 227 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.—Л., 1951, т. I. — 690 с.
11. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М., 1972. — 622 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Топологическое пространство	
§ 1. Определение топологического пространства	4
§ 2. Замкнутые множества	6
§ 3. Внутренние, внешние, граничные точки	7
§ 4. Замыкание	10
§ 5. Базис	11
§ 6. Подпространство	13
§ 7. Связность	14
§ 8. Аксиома отделимости	15
§ 9. Компактность	16
§ 10. Непрерывные отображения	18
§ 11. Гомеоморфизм	20
§ 12. Линейная связность	22
Глава II. Топологические многообразия	
§ 13. Определение топологического многообразия	24
§ 14. Многообразие с краем	26
§ 15. Эйлера характеристика	28
§ 16. Ориентируемые и неориентируемые многообразия	32
§ 17. Топологическая классификация двумерных многообразий	35
§ 18. Классификация правильных многогранников	36
Глава III. Понятие кривой и поверхности	
§ 19. Дифференцируемые отображения евклидовых пространств в евклидовы пространства	38
§ 20. Определение n -мерной поверхности	43
§ 21. Гладкие кривые и поверхности в E^3	46
Глава IV. Теория кривых	
§ 22. Касательная прямая	51
§ 23. Длина дуги кривой	53
§ 24. Соприкасающаяся плоскость	57
§ 25. Трехгранник Френе	60
§ 26. Кривизна кривой	61
§ 27. Кручение	64
§ 28. Формулы Френе. Натуральные уравнения	69
Глава V. Внешняя геометрия поверхностей	
§ 29. Кривые на гладкой поверхности	73
§ 30. Касательная плоскость. Специальная параметризация поверхности	74
§ 31. Первая квадратичная форма поверхности и связанные с ней понятия	77
§ 32. Площадь области на поверхности	81
§ 33. Вторая квадратичная форма и связанные с ней понятия	85
§ 34. Теорема Эйлера. Экстремальные свойства главных направлений	90
§ 35. Отыскание главных направлений и главных нормальных кривизин	92
§ 36. Основные уравнения теории поверхностей	94
Глава VI. Внутренняя геометрия поверхностей	
§ 37. Изгибание поверхностей	98
§ 38. Геодезическая кривизна кривой на поверхности	101
§ 39. Геодезические линии на поверхности	104
§ 40. Полугеодезическая система координат. Экстремальное свойство геодезической линии	106
§ 41. Теорема Гаусса — Бонне	108
§ 42. Поверхности постоянной гауссовой кривизны	109
Литература	112

