M. RAISOV

MATEMATIK PROGRAMMALASH

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

M. RAISOV

MATEMATIK PROGRAMMALASH

Iqtisod yo‘nalishidagi oliy o‘quv yurtlari uchun o‘quv qo‘llanma

«VORIS» NASHRIYOT
TOSHKENT — 2009

22.18
R19

Taqrizchilar:

A.R. Artikov — Samarqand davlat universiteti professori, fizika-matematika fanlari doktori;

B.X. Xo'jayorov — Samarqand Iqtisodiyot va servis instituti professori, fizika-matematika fanlari doktori.

O'quv qo'llanma 810000 — „Xizmat ko'rsatish", 340000 — „Biznes va boshqaruv" sohalari bakalavriat yo'nalishlari bo'yicha tahsil olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

Mazkur o'quv qo'llanma Davlat ta'lim standartlari hamda o'quv dasturiga mos ravishda yozilgan bo'lib, u matematik programmalashning quyidagi bo'limlarini o'z ichiga oladi: chiziqli programmalash masalalari, chiziqli programmalashning maxsus masalalari, dinamik programmalash.

ISBN 978-9943-375-07-9

SO‘ZBOSHI

O‘zbekiston oliy o‘quv yurtlarida ko‘p bosqichli ta’lim tizimi joriy qilinib, bakalavriat va magistraturada mutaxassislar tayyorlash yo‘lga qo‘yilgan. Bu esa oliy o‘quv yurti o‘qituvchilaridan jahon andazalariga to‘la javob beradigan, mustaqillik talab va ehtiyojlariga javob beradigan bakalavr va magistrlar o‘quv rejasi, o‘quv rejaga to‘la mos keluvchi o‘quv dasturlari, oliy kasbiy ta’limning davlat standartlari asosida darslik, uslubiy qo‘llanma, o‘quv qo‘llanma kabi adabiyotlarning yaratilishini taqozo etadi. Ushbu qo‘llanmada matematik programmalash faniga tegishli masalalarni yechish usullari keltirilgan. O‘quv qo‘llanmada matematik modellarning optimal yechimlarini EHM ni qo‘llab topish mumkin.

Qo‘llanma kirish qismi va sakkizta bobdan iborat bo‘lib, I bobda chiziqli programmalash tushunchasi bayon etilgan. II bobda chiziqli programmalashning ikkilangan masalasi, III bobda esa transport masalasi o‘rganiladi, IV va V boblarda, mos ravishda, butun sonli va parametrik programmalashga oid tushunchalar bayon etilgan.

Qo‘llanmaning VI bobi dinamik programmalash masalalariga bag‘ishlangan. VII bob chiziqsiz programmalash masalasiga bag‘ishlangan bo‘lib, unda shu masalaning iqtisodiy va geometrik talqini, Lagranjning ko‘paytmalar usuli, qavariq va kvadratik programmalash masalalari o‘rganiladi. VIII bobda matritsali o‘yinlar nazariyasi masalalari va chiziqli dasturzlash bilan bog‘liq tushunchalar keltirilgan.

Har bir bobda ko‘plab masalalar yechib ko‘rsatilgan va bundan tashqari mustaqil yechish uchun ko‘plab masalalar berilgan

Ushbu o‘quv qo‘llanma bo‘yicha bildirilgan barcha taklif va fikrlar muallif tomonidan minnatdorchilik bilan qabul qilinadi.

KIRISH

Matematika fanining fundamental rivojlanishi boshqa fanlarning ham rivojlanishiga olib keldi. Hozirgi vaqtda matematika usullari qo'llanilmagan fan va texnikaning biror sohasi yo'q. Xalq xo'jaligini rejalashtirish va boshqarish masalalari juda murakkab bo'lib, bu masalalarni yechish uchun matematik modellarni qo'llashga to'g'ri keladi.

Ayniqsa bozor iqtisodiyotiga o'tish davrida va undan keyin barcha iqtisodiy masalalarni yechganda matematik modellashtirishning tatbiqi juda katta ahamiyatga ega bo'ladi. Shuning uchun o'quv qo'llanmada har bir masala iqtisodiy masala ekanligiga asosiy e'tibor beriladi. Qo'llanmada masalalar shunday tanlab olindiki, talabalar ularni yechganda ortiqcha tashvishga tushmasin. Har bir mavzuni boshlaganda bu mavzuda ishlatiladigan formulalar berildi. Shu bilan bir qatorda har bir mavzuga doir masalalar yechildi. Ayrim boblarda kerak bo'lgan nazariy qoidalar ham berildi. Masalalar tuzilganda, ularning soddaroq bo'lishiga harakat qilindi hamda ularni kelgusida EHM da hisoblash mumkin bo'lishiga e'tibor berildi. Masalalarni tanlashda juda ko'p adabiyotlardan foydalanildi.

„Matematik programmalash" fani quyidagi bo'limlarni o'z ichiga oladi: optimallashtirish metodlari, o'yinlar nazariyasi, stoxastik usullar, iqtisodiy usullar, chiziqli programmalash, modellar sezgilik darajasining tahlili, ikki taraflama baholash, egri chiziqli programmalash, Lagranjning ko'paytmalar usuli, qavariq programmalash masalalari, Kun-Taker nazariyasi, kvadratik programmalash masalalari va boshqa asosiy tushunchalar.

Xalq xo'jaligining iqtisodiy masalalarini yechishda yuqoridagi usullar keyingi vaqtda ko'p qo'llanilmoqda. Lekin shuni ham ta'kidlash lozimki, barcha ishlab chiqarish korxonalarining mablag' va xomashyo bilan ta'minlanishi chegaralangan. Shuni hisobga olib iqtisodiy masalalarni yechganda bu yechimlar ichida kerakli yechimlarni tanlashga to'g'ri keladi. Demak, har bir aniq iqtisodiy masalani yechish uchun harakat dasturini tuzish kerak.

Yuqoridagi usullarni tassavur qilish uchun bir nechta masalani yechib ko'rsatamiz.

1. Materiallarni optimal bichish masalasi

Yarimtayyor mahsulotlar korxonaga to'qilgan materiallar, temir, taxta va oyna varaqlari sifatida keltiriladi. Bu yarimtayyor mahsulotlardan iloji boricha ko'proq detallar komplekti tayyorlash talab etiladi. Shu bilan birga quyidagi shartlar bajarilishi lozim. Jami n partiya material bo'lib, i partiya q_i birlikka ega. Komplekt esa m xil turli detaldan iborat. Har bir komplektga esa k xil detaldan p_k ta kiradi. Yarimtayyor mahsulotlar birligi s ta turli usul bilan bichilishi mumkin.

Birinchi partiya yarimtayyor mahsulot j usul bilan bichilganda k xil detaldan a_{ikj} ta hosil bo'ladi deb faraz qilaylik.

x_{ij} bilan i partiyaning j usul bilan bichilgandagi sonini (miqdorini) belgilaylik. Bu usulda bichilgandagi k xil detal miqdori $a_{ikj}x_{ij}$ bo'ladi. Bichishning barcha usullaridan hosil bo'ladigan qanoatlantiruvchi k xil detal soni $\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij}$ ga teng. Har bir partiya material belgilangan k xil detalning k xil umumiy soni

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1kj}x_{1j} + \sum_{j=1}^{s} a_{2kj}x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{s} a_{nkj}x_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij}$$

ga teng bo'ladi.

Har bir komplekt k ta xil detaldan p_k taga ega. Shuning uchun k xil detal bilan ta'minlangan komplekt soni quyidagicha bo'ladi:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij} .$$

Komplekt barcha xil detallar bilan ta'minlangan bo'lishi shart, ya'ni materiallarni optimal bichish masalasida shunday x_{ij} sonlarni topish kerakki, ular Z_k nisbatining minimal qiymatiga maksimum qiymat bersin, ya'ni

$$Z_k > Z \qquad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{1}$$

shart bajarilganda Z ga maksimum qiymat berish talab qilinadi. Shu bilan bir qatorda

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} = q_i, \quad \left(i = \overline{1,n}\right) , \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \left(i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}\right). \tag{3}$$

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, (2) formuladagi shartlar, i partiya q_i birlik materialga ega bo'lganligini ko'rsatadi, (3) formula esa mahsulotlar sonining manfiy bo'lmasligini ko'rsatadi.

2. Transport masalasi

Samarqand viloyatining ikkita bazasidan uchta tumanga bir jinsli mahsulot tashish kerak bo'lsin. Mahsulotlar zaxirasi birinchi bazada 400 tonna, ikkinchi bazada 600 tonna bo'lsin. Birinchi tumanning mahsulotga ehtiyoji 350 tonna, ikkinchisi uchun 450 tonna va uchinchisi uchun 200 tonna bo'lsin. Har bir bazadan uchta tumangacha mahsulot tashish imkoniyati bo'lsin. Birinchi bazadan har bir tumangacha bir birlik mahsulotni olib borish uchun tashish xarajatlari, mos ravishda, 10, 20 va 30 so'm birligiga teng bo'lsin. Ikkinchi bazadan har bir tumangacha bir birlik mahsulotni olib borish uchun tashish xarajatlari, mos ravishda, 40, 50 va 60 so'm birligiga teng bo'lsin.

Yukni tashishni shunday rajalashtirish kerakki, hamma tumanlarning ehtiyojini qondirgan holda tashishni amalga ishirish uchun ketgan xarajat minimal bo'lsin.

Bu holda masala shartini quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin:

1-jadval

Bazalar	Mahsulot zaxiralari, t	Tumanlar		
		1	2	3
Jomboy	400	10 x_{11}	20 x_{12}	30 x_{13}
Juma	600	40 x_{21}	50 x_{22}	60 x_{23}
Mahsulotlarga bo'lgan talab	1000	350	450	200

Tumanlarning bazalardan olgan yuklari x_{ij} $\left(i = \overline{1,2}, \ j = \overline{1,3}\right)$ har xil taqsimlanishi mumkin. Misol uchun 1-bazadagi yuklarni quyidagicha taqsimlash mumkin: $x_{11} = 150, \quad x_{12} = 150, \quad x_{13} = 100$.

2-bazadagi yuklarni esa tumanlarga, mos ravishda, quyidagicha taqsimlaymiz: $x_{21} = 200, \quad x_{22} = 300, \quad x_{23} = 100$.

Bu taqsimot bo'yicha transport xarajati quyidagicha bo'ladi: $F_1 = 150 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 100 \cdot 30 + 200 \cdot 40 + 300 \cdot 50 + 100 \cdot 60 = 36500$ so'm (ta'riflar so'mlarda deb olindi).

Masalaning matematik modelini tuzamiz. i bazadan j tumanga rejalashtirilgan yukning miqdori x_{ij} yuk birligida teng bo'lganligi uchun tashish xarajati $c_{ij}x_{ij}$ ga teng bo'ladi. Butun rajalashtirish xarajati quyidagi yig'indidan iborat bo'ladi:

$$F = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 40x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23}. \tag{4}$$

Cheklash shartlari sistemasi quyidagicha bo'ladi:

a) hamma yuk tashilishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600 \end{cases}$$

tenglamalar yuqoridagi jadval satrlaridan olinadi;

b) hamma talablar qanoatlantirilishi kerak, ya'ni

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 350, \\ x_{12} + x_{22} = 450, \\ x_{13} + x_{23} = 200 \end{cases}$$

bu tenglamalar jadvaldagi ustunlardan olinadi.

Shunday qilib, yuqoridagi transport masalasining matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$F = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 40x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23}$ chiziqli funksiyaning

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600 \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 350, \\ x_{12} + x_{22} = 450, \\ x_{13} + x_{23} = 200 \end{cases} \tag{6}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = 1; \;\; 2; \qquad j = 1; \;\; 2; \;\; 3) \tag{7}$$

cheklash shartlari sistemasini qanoatlantiruvchi eng kichik qiymatini toping.

Bunda masalaning shartlarini qanoatlantiruvchi shunday musbat yechimlarini topish kerakki, (4) chiziqli forma (maqsad funksiyasi) minimum qiymatga ega bo'lsin.

3. Ratsion haqidagi masala

Faraz qilaylik, mahalliy sayyohning bir oylik ratsioni 12 kg birlik, ya'ni ratsion tarkibini tashkil etuvchi mahsulotlar 12 kg ni tashkil etsin. Sayyohning ratsioni go'sht, makoron mahsulotlari va sabzavotlardan iborat bo'lsin. Mahsulotlar tarkibi bo'yicha ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan:

2-jadval

Ko'rsatgichlar	Birlik o'lchovi	Sabzavotlar, x_1	Makaron mahsulotlari, x_2	Go'sht, x_3	Jami kerakli mahsulotlar
Oqsilning koeffitsiyent birligi	kg	0,18	0,24	1,2	12
Oqsil miqdori	g	10	8	200	1000
Vitaminlar	mg	15	1	1,5	450
1 kg ining narxi	Ming so'm	1	1,2	7,5	

Masalaning matematik modelini tuzing. Jadvalga asosan quyidagi modelni tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{r} 0,18x_1 + 0,24x_2 + 1,2x_3 \geq 12, \\ 10x_1 + 8x_2 + 200x_3 \geq 1000, \\ 15x_1 + 1 \cdot x_2 + 1,5x_3 \geq 450, \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \quad (9)$$

Chiziqli funksiya esa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1 \cdot x_1 + 1,2x_2 + 1,75x_3. \quad (10)$$

Shunday qilib, (6) sistemaning (9) shartni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, (10) maqsad funksiyasining qiymati minimum bo'lsin. Bunday masalalarni yechish hollarini kelgusida ko'ramiz.

I BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASH

1- §. Chiziqli programmalashning asosiy masalasi va chiziqli programmalash masalalarini asosiy masalaga keltirish

Chiziqli programmalashning asosiy masalasi ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

Bizga chiziqli funksiya (maqsad funksiyasi)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{1.1}$$

va n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{1.3}$$

berilgan bo'lsin.

Bu yerda (1.2) sistemaning shunday yechimlarini topish kerakki, (1.1) chiziqli funksiya (maqsad funksiyasi) eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat qabul qilsin.

Maqsad funksiyasining eng katta yoki eng kichik qiymatini topish masalaning qo'yilishiga bog'liq. Ishlab chiqarishda daromad olish talab etilsa, chiziqli funksiyaning eng katta (max) qiymati topiladi. Agar ishlab chiqarishda xarajatlarni rejalashtirish kerak bo'lsa, u holda chiziqli funksiyaning eng kichik (min) qiymatini topish talab etiladi.

Ko'p masalalarni yechganda $x_1, x_2, \ ... \ , \ x_n$ o'zgaruvchilarga qo'yilgan cheklovlar chiziqli tengsizliklar sistemasi ko'rinishida beriladi, ya'ni

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{array}\right| \qquad (1.4)$$

Har qanday (1.4) ko'rinishdagi shartlarni chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Haqiqatan ham, (1.4) sistemaning birinchi tengsizligiga y_1, ikkinchisiga y_2 va hokazo m-tengsizligiga y_m ni qo'shsak, (1.4) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{array}\right| \qquad (1.4')$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \quad ; \quad y_i \ge 0 \ , \quad i = \overline{1,m}.$$

Shuni qayd qilish kerakki, (1.4') chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimi (1.4) tengsizliklar sistemasini ham qanoatlantiradi yoki aksincha.

Tengsizliklar sistemasi quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{array}\right| \qquad (1.5)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n};$$

ko'rinishida bo'lganda ham masala yuqoridagi kabi yechiladi, ya'ni bu yerda musbat y_1, y_2, ..., y_m lar mos ravishda ayiriladi. Demak, chiziqli programmalash masalalarini asosiy masalaga keltirish mumkin. Shunday qilib, (1.2) sistemaning 0 ga teng yoki noldan katta yechimlarini topish kerakki, (1.1) chiziqli forma (maqsad funksiyasi) eng katta (max) yoki eng kichik (min) qiymat qabul qilsin.

Chiziqli programmalash masalasining umumiy qo'yilishini bir necha formalarda (shakllarda) yozish mumkin.

1. Vektorlar shaklida yozilishi. Ushbu belgilashlarni kiritamiz.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots\dots\dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bo‘lib, $CX = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ skalar ko‘paytma bo‘lsin. Bu holda chiziqli programmalash masalasini vektor ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$F = CX$$

chiziqli funksiya minimumga ega bo‘ladigan X vektorning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0, \quad X \geq 0 \qquad (1.6)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatini toping.

2. Matritsa shaklida yozilishi. $PX = P_0$, $X \geq 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $F = CX$ chiziqli funksiya minimum qiymatga ega bo‘ladigan X vektorning qiymatini toping, bunda $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ satr matrisa, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ustun matritsa va $P = (a_{ij})$ sistema matritsasi hamda $P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ ustun matritsa bo‘ladi.

3. Yig‘indi belgisi orqali yozilishi.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ chiziqli funksiya minimumga ega bo‘ladigan x_j o‘zgaruvchilarning qiymatini toping.

1 - t a ’ r i f. (1.2) va (1.3) shartlarni qanoatlantiruvchi $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor chiziqli programmalash masalasining *mumkin bo‘lgan yechimi* yoki qisqacha *rejasi* (plani) deyiladi.

2-t a ' r i f. (1.6) yoyilmaga kiruvchi x_i larning musbat hadli P_i $(i = 1,2,...,m)$ vektorlari chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ reja *tayanch reja* (yechim) deyiladi.

P_i $(i = 1,2,...,m)$ vektorlar m o'lchovli bo'lganligi uchun tayanch reja ta'rifidan ko'rinadiki, uning musbat hadli koeffitsiyentlari m dan katta bo'lmaydi.

3-t a ' r i f. Tayanch reja (yechim) m ta musbat komponentlarga ega bo'lsa, unga *maxsusmas*, aks holda *maxsus reja* deyiladi.

4-t a ' r i f. Chiziqli funksiya minimum (maksimum) qiymatga ega bo'ladigan reja (yechim)ga *chiziqli programmalash masalasining optimal rejasi* (yechimi) deyiladi.

Chiziqli programmalash masalasi yechimining ayrim xossalarini qaraymiz:

1) chiziqli programmalash masalasi cheklash shartlari sistemasining rejalari (mumkin bo'lgan yechimlari) to'plami bo'sh to'plamni yoki R^n fazoning qavariq to'plamini tashkil etadi;

2) chiziqli programmalash masalasining rejalari to'plami bo'sh to'plam bo'lmasa va maqsad funksiyasi bu to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, masala maksimum (minimum) optimal yechimga ega bo'ladi;

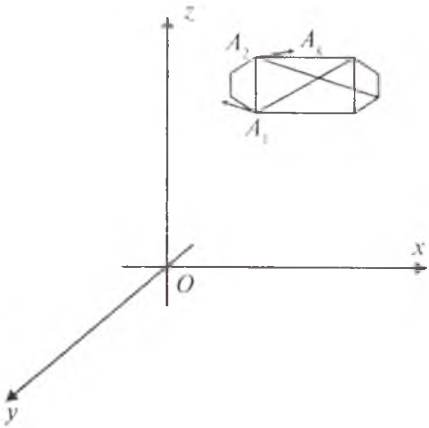
3) chiziqli programmalash masalasining optimal yechimi mavjud bo'lsa, bu yechim mumkin bo'lgan yechimlar to'plamining chegaraviy nuqtalarida bo'ladi.

Chiziqli programmalashning asosiy masalasini yechganda, odatda, simpleks usulidan foydalanamiz.

2- §. Simpleks usuli

Chiziqli programmalashning asosiy masalasini geometrik usul yordamida yechganda tenglamalar sistemasiga va maqsad funksiyasiga kiruvchi o'zgaruvchilar soni qancha kam bo'lsa, masalani yechish shuncha osonlashadi. Agar o'zgaruvchilar soni juda ko'p bo'lsa, masalan qavariq shakl uchlarining soni bir necha millionta bo'lsa, u holda maqsad funksiyasining eng katta (eng kichik) qiymatlarini topish hozirgi zamon hisoblash mashinalariga ham og'irlik qiladi.

Haqiqatan ham, $n!$ ta uchga ega bo‘lgan qavariq ko‘pyoq berilgan bo‘lsin (1.1-chizma). Masalani yechish uchun ko‘pyoq $n!$ ta uchining koordinatalarini topib, maqsad funksiyasining bu nuqtalardagi qiymatlarini taqqoslash kerak. Agar operatsiyalar soni $n > 15$ bo‘lsa, u holda masalaning zarur bo‘lgan yechimini topish hozirgi zamon hisoblash mashinalariga ham og‘irlik qiladi. Buni ko‘rsatish uchun ushbu formuladan foydalanamiz:

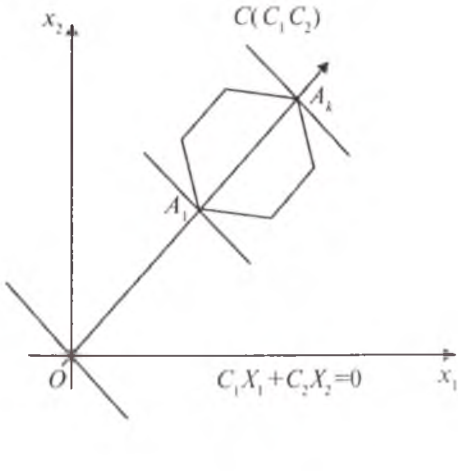


1.1- chizma.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n\,.$$

Agar qavariq ko‘pyoq uchlarining soni $n = 20$ bo‘lsa, masalaning shartlari $2 \cdot 10^{18}$ dan ham oshib ketadi. Bu yerda qavariq ko‘pyoqning lozim bo‘lgan uchi koordinatalarini tanlab olish uchun sekundiga 10 million operatsiyani bajaradigan hozirgi zamon hisoblash mashinalariga 5000 yil ham kamlik qiladi.

Yuqorida ko‘rsatilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, bunday masalalarni yechish uchun maxsus usullar ishlab chiqish lozimki, ko‘pyoqning uchlarini tanlash tartibsiz emas, balki maqsadli ravishda amalga oshirilsin. Masalan, ko‘pyoqning qirralari bo‘ylab shunday harakat qilish lozimki, har bir qadamda maqsad funksiyasi F ning qiymati maksimum (minimum) qiymatga tomon tartibli ravishda intilsin (1.2-chizma).



1.2- chizma.

Simpleks usuli birinchi bo'lib amerikalik olim D. Dansig tomonidan 1949- yili taklif etilib, keyinchalik 1956- yilda Dansig, Ford, Fulkeron va boshqalar tomonidan to'la rivojlantirildi. Lekin 1939- yilda rus matematigi L.V. Kantorovich va uning shogirdlari asos solgan yechuvchi ko'paytuvchilar usuli simpleks usulidan ko'p farq qilmaydi. „Simpleks" so'zi n o'lchovli fazodagi $n+1$ ta uchga ega bo'lgan oddiy qavariq ko'pyoqni ifodalaydi. Simpleks bu

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1$$

ko'rinishdagi tengsizliklarning yechimlari sohasidir.

Simpleks usuli yordamida chiziqli programmalashning ko'pgina masalalarini yechish mumkin. Bu usul yordamida chekli qadamlarda optimal yechimlarni topish mumkin. Har bir qadamda shunday mumkin bo'lgan yechimlarni topish kerakki, maqsad funksiyasining qiymati oldingi qadamdagi qiymatidan (miqdoridan) katta (kichik) bo'lsin. Bu jarayon maqsad funksiyasi optimal (maksimum yoki minimum) yechimga ega bo'lguncha davom ettiriladi.

Simpeks usulini tushintirish uchun quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

1.1- masala. Quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}\right| \tag{1.7}$$

tengsizliklar sistemasining manfiy bo'lmagan shunday $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$ yechimlari topilsinki, maqsad funksiyasi

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.8}$$

maksimum yoki minimum qiymatga ega bo'lsin.

Bu masalani yechish uchun (1.7) chiziqli tengsizliklar sistemasiga shunday $y_1, y_2, \ldots, y_n$ manfiy bo'lmagan o'zgaruvchilarni mos ravishda qo'shib, quyidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{array}\right| \quad (1.9)$$

bunda $x_j \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}$.

U holda maqsad funksiyasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$F(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n, \ y_1, \ y_2, \ldots, y_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + \\ +0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \ldots + 0 \cdot y_m. \quad (1.10)$$

Agar (1.9) da $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ deb olsak, birinchi mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami $y_i = b_i, \ i = \overline{1,m}, \quad x_j = 0, \quad j = \overline{1,n}$ hosil bo‘ladi. Bu holda maqsad funksiyasi 0 ga teng, ya’ni

$$F(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{n} \quad b_1, b_2, \ldots, b_m) = 0.$$

Simpleks usulini ishlatganda jadvallarni ketma-ket almashtirish ancha qulay bo‘ladi. Jadvalni tuzishga o‘tamiz:

1. Eng yuqoridagi $m+1$ satrga maqsad funksiyasining koeffitsiyentlarini joylashtiramiz

2. Jadvalning yuqoridagi ikkinchi satriga $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ o‘zgaruvchilarni yozamiz;

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning koeffitsiyentlari jadvalning asosiy qismini tashkil qiladi (asosiy matritsa), $y_1, y_2, \ldots, y_m$ o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlari esa bosh diagonal bo‘yicha yozilib, birlik matritsani tashkil etadi;

4. Jadvalning oxirgi satri indekslar satri deyiladi va bu satr maqsad funksiyasida qatnashuvchi o‘zgaruvchilarning koeffitsiyentlarini teskari ishora bilan olingan koeffitsiyentlari orqali to‘ldiriladi.

Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi:

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvali

$m+1$	I	II	III	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0	Maqsad funksiyasi satri
				x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	O'zga-ruvchilar satri
1	0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	[redacted]	1	0	...	[redacted]	
2	0	y_2	b_2	a_{21}	a_{21}	...	a_{2m}	0	1	...	0	Birlik matritsa
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	[redacted]	0	0	...	[redacted]	
In-deks satri			0	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	

Maqsad ustu O'zgarmaslar ustuni Asosiy matritsa

O'zgaruvchilar ustuni

Bu jadvalga asoslanib birinchi simpleks jadvalni tuzamiz. Dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tahlil qilamiz. Indekslar satrini tahlil qilganda satr elementlarining musbat va manfiyligiga e'tibor beramiz. Agar indeks satri elementlarining hammasi musbat bo'lsa, u holda mumkin bo'lgan yechimni o'zgartirib bo'lmaydi va bu yechim optimal yechim bo'ladi. Faraz qilaylik, indeks satri elementlarining ichida bir nechta manfiy sonlar mavjud va bu manfiy son $-c_1$ ga teng bo'lsin. $-c_1$ ni qora chiziqli to'rtburchak ichiga olamiz. Bu ustun *yechuvchi ustun* deyiladi. $-c_1$ joylashgan ustun elementlarini ham qora chiziq bilan chizilgan to'rtburchak ichiga olamiz. Bu yerda shuni ham aytish kerakki, agar bordi-yu indeks satrida bir-biriga teng bir necha kichik manfiy sonlar bo'lsa, u holda chap tomondan boshlab birinchi katakdagi manfiy sonni tanlaymiz. Yechuvchi satrni topish uchun o'zgaruvchilar ustunidagi sonlarni kalitli ustundagi mos musbat sonlarga bo'lib, ular ichidan eng kichik musbat sonni tanlab olamiz.

Faraz qilaylik, bu son $\frac{b_1}{a_{11}}$ bo'lsin, ya'ni

$$K=\min\left\{\frac{b_1}{a_{12}},\ \frac{b_2}{a_{21}},\ \ldots,\ \frac{b_m}{a_{m1}}\right\}=\frac{b_1}{a_{11}}.$$

Birinchi simpleks jadvalda $S_1, S_2, \ldots, S_{m+1}$ ning qiymatlari quyidagicha topiladi:

$$S_1=1+b_1+\sum_{i=1}^{n}a_{1i},\quad S_2=1+b_2+\sum_{i=1}^{n}a_{2i},\ \ldots,\ S_m=1+b_m+\sum_{i=1}^{n}a_{mi},$$

$$S_{m+1}=0-\sum_{i=1}^{n}c_i,\quad S=\sum_{i=1}^{m+1}S_i=m+1+\sum_{i=1}^{m}b_i+\sum_{i=1}^{m}a_{1i}+\sum_{i=1}^{m}a_{2i}+\ldots$$

$$+\sum_{i=1}^{m}a_{mi}-\sum_{i=1}^{n}c_i.$$

Ikkinchi simpleks jadvalni tuzishga o‘tamiz.

Ikkinchi simpleks jadvalda o‘zgaruvchilar ustuni o‘zgaradi. Bu ustunda yangi o‘zgaruvchi x_1 yechuvchi satrdagi y_1 ning o‘rnini egallaydi. Ya’ni yechuvchi ustundagi o‘zgaruvchi yechuvchi satrdagi o‘zgaruvchining o‘rnini egallaydi. Bundan keyingi jadvallarni tuzganda ham bu qoida saqlanadi. Birinchi simpleks jadvaldagi yechuvchi satr ikkinchi simpleks jadvalda *bosh satr* deb ataladi va bu satrdagi har bir katak quyidagi formula yordamida to‘ldiriladi

$$B_i=\frac{O_i}{K},$$

bu yerda K — yechuvchi son; O_i — oldingi son; B_i — bosh satr elementlari.

Ikkinchi simpleks jadvalida bosh satrlardagi kataklar $B_i=\dfrac{O_i}{K}$ formula yordamida to‘ldiriladi. Yechuvchi ustun bilan yechuvchi satr kesishgan kataklarda turgan $K=\dfrac{b_1}{a_{11}}$ son *yechuvchi son* deyiladi. Yechuvchi satrni ham qora chiziq bilan to‘rtburchak ichiga olamiz. Dastlabki berilganlar jadvalining oxirgi ustuniga tekshirish ustunini joylashtiramiz. Tekshirish ustunidagi har bir son o‘zgarmaslar ustunidan boshlab satrdagi sonlar yig‘indisiga tengdir. Tekshirish ustunidagi sonlar yechuvchi ustunni topishda qo'llanilmaydi. Natijada birinchi simpleks jadval hosil bo'ladi.

1- simpleks jadval

$m+1$	I	II	III	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0	
				x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	Tekshirish ustuni
1	0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	1	0	...	0	S_1 yechuvchi satr
2	0	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	S_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	S_m
Indeks satri	Maqsad ustuni		$F=0$	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	S_{m+1}

Yechuvchi ustun

Yechuvchi son

Boshqa satrdagi kataklar quyidagi formula yordamida to'ldiriladi:

$$A_{ij} = O_i - \frac{K_1 K_2}{K},$$

bu yerda O_i — oldingi son; K — yechuvchi son; K_1 — O_i ga mos bo'lgan yechuvchi satrdagi son; K_2 — O_i ga mos bo'lgan yechuvchi ustundagi son.

Yuqoridagi formulalar asosida yangi elementlarni birinchi simpleks jadval elementlari orqali hisoblab chiqsak, natijada ikkinchi simpleks jadval hosil bo'ladi. Bundan keyin maqsad satrini yozmasak ham bo'ladi, chunki bu satr elementlari keyingi jadvallarda qo'llanilmaydi.

$m+1$	I	II	III	x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	Tekshirish ustuni
1	0	x_1	F_1	$h_{11}=1$	h_{12}	...	h_{1n}	$1/a_{11}$	0	...	0	S_1' bosh satr
2	0	y_2	F_2	$h_{21}=0$	h_{22}	...	h_{2n}	d_{21}	d_{22}	...	d_{2m}	S_2'
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	y_m	F_m	$h_{m1}=0$	h_{m2}	...	h_{mn}	d_{m1}	d_{m2}	...	d_{mn}	S_m'
In-deks satri			F_1'	α_1	α_2	...	α_n	β_1	β_2	...	β_m	S_{m+1}'

Bu jadval kataklaridagi sonlar quyidagilarga teng:

$$S_1' = F_1 + \frac{1}{a_{11}} + \sum_{i=1}^{n} c_{1i} ,$$

$$S_2' = F_2 + \sum_{i=1}^{n} c_{2i} + \sum_{j=1}^{m} d_{2j} ,$$

....

$$S_m' = F_m + \sum_{i=1}^{n} c_{mi} + \sum_{j=1}^{m} d_{nj} ,$$

$$S_{m+1}' = F_1' + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j .$$

Bosh satr elementlari:

$$F_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad h_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, \quad h_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \ldots, \quad h_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}},$$

$$d_{11} = \frac{1}{a_{11}}, \quad d_{12} = \frac{0}{a_{11}} = 0, \quad \ldots, \quad d_{1n} = \frac{0}{a_{11}} = 0.$$

Ikkinchi satr kataklaridagi sonlar:

$$F_2 = b_2 - \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}}, \quad h_{21} = a_{21} - \frac{a_{11} a_{21}}{a_{11}} = 0, \quad ...., \quad h_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21} a_{1n}}{a_{11}}.$$

m- satr elementlari:

$$F_m = b_m - \frac{b_1 a_{m1}}{a_{11}}, \quad h_{m1} = a_{m1} - \frac{a_{m1} a_{11}}{a_{11}} = 0, \quad h_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{m1} a_{1n}}{a_{11}},$$

$$d_{m1} = 0 - \frac{a_{m1} \cdot 1}{a_{11}}, \quad ..., \quad d_{m2} = 1 - \frac{0 \cdot a_{m1}}{a_{11}}.$$

Indeks satri elementlari:

$$F_1' = 0 - \frac{(-c_1)\, b_1}{a_{11}}, \quad \alpha_1 = -c_1 - \frac{(-c_1)\, a_{11}}{a_{11}} = 0,$$

$$\alpha_2 = -c_2 - \frac{(-c_1)\, a_{12}}{a_{11}}, \quad ..., \quad \alpha_n = -c_n - \frac{(-c_1)\, a_{1n}}{a_{11}},$$

$$\beta_1 = 0 - \frac{1 \cdot (-c_1)}{a_{11}}, \quad ..., \quad \beta_m = 0 - \frac{0 \cdot (-c_1)}{a_{11}} = 0.$$

Agar ikkinchi simpleks jadvalning indeks satri kataklaridagi sonlarning hammasi musbat bo‘lsa, u holda bu jadvaldagi yechimlar *optimal yechimlar* deyiladi va maqsad funksiyasining optimal qiymati

$$F_1\,(F_1, 0, 0, ..., 0, \;\; 0, F_2, F_3, ..., F_m) = c_1 F_1 + c_2 \cdot 0 + ... + c_n \cdot 0 + 0 \cdot 0 +$$
$$+ F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0 + ... + F_m \cdot 0 = c_1 F_1$$

bo‘ladi, bu yerda

$$x_1 = F_1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad ..., x_n = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = F_2,$$
$$y_3 = F_3, \quad ..., \quad y_m = F_m.$$

Agar indeks satrida manfiy sonlar mavjud bo‘lsa, yuqoridagi yechimlar optimal yechim bo‘lmaydi. Shuning uchun yuqoridagi qoidalarni ikkinchi simpleks jadvalga qo‘llab, uchinchi simpeks jadvalni tuzamiz. Jadvallarni almashtirish (yaxshilash) indeks satrida hamma kataklardagi sonlar musbat bo‘lguncha davom ettiriladi.

Simpleks jadvallarni tuzganda asosiy e'tiborni quyidagi qoidalarga qaratish kerak:

1) agar yechuvchi ustunda nol bo'lsa, kelgusi jadvalda shu nol turgan satr o'zgarmaydi;

2) yechuvchi satrda nol bo'lsa, bu nol turgan ustun kelgusi jadvalda o'zgarmaydi;

3) har bir o'zgaruvchi ustun va mos o'zgaruvchi satr kesishgan katakdagi son 1 ga teng bo'lsa, bu ustunning boshqa kataklaridagi sonlar nolga teng bo'ladi.

Shu vaqtgacha maqsad funksiyasining maksimum qiymatini izlagan edik. Lekin ayrim masalalarda maqsad funksiyasining minimum qiymatlarini topish talab etiladi, yani

$$F_{\min} = -F_{\max} = -c_1x_1 - c_2x - \ldots - c_nx_n \text{ yoki}$$

$$F_{\max} = -F_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \ .$$

Bundan ko'rinadiki masalaning maksimumini topsak yetarli. Shunday qilib, har qanday maksimum qiymat talab qilingan masalalarni unga ekvivalent bo'lgan minimum qiymatni talab qilgan masalalar bilan almashtirish mumkin.

Yuqoridagi qoida va formulalardan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz.

1.2- masala. Korxonada ikki tur buyum ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlataladi. Birinchi tur buyum ishlab chiqarish uchun birinchi xil xomashyodan 6 kg, ikkinchi xil xomashyodan 3 kg, uchinchi xil xomashyodan 4 kg ishlatiladi. Agar korxona birinchi xomashyodan 600 kg, ikkinchi xil xomashyodan 520 kg, uchunchi xil xomashyodan 600 kg ta'min etilgan va birinchi xil buyumni sotganda har bir donasidan 6 so'm , ikkinchi xil buyumni sotganda esa 3 so'm foyda olganda, korxona ishlab chiqarishini shunday rejalashtirinki, olingan daromad maksimal bo'lsin.

Yechish. Faraz qilaylik, birnchi tur buyumdan x_1 dona, ikkinchi tur buyumdan x_2 dona ishlab chiqarilsin.

Masalaning shartini x_1 va x_2 o'zgaruvchilarni o'z ichiga olgan quyidagi tengsizliklar sistemasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\le 600, \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 520, \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 600, \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 .$$

U holda maqsad funksiyasi

$$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 3x_2 \tag{1.12}$$

bo'ladi.

Demak, (1.12) chiziqli tengsizliklar sohasida shunday manfiy bo'lmagan yechimlarni topish kerakki, maqsad funksiyasi $F(x_1, x_2)$ maksimal qiymatga ega bo'lsin.

Masalani simpleks usuli bilan yechish uchun (1.11) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + y_1 &= 600, \\ 4x_1 + 3x_2 + y_2 &= 520, \\ 3x_1 + 4x_2 + y_3 &= 600, \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Maqsad funksiyasi esa quyidagicha bo'ladi:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3. \tag{1.14}$$

Agar (1.13) dan $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ deb olsak, u holda $y_1 = 600$, $y_2 = 520$, $y_3 = 600$ bo'ladi. Demak, birinchi bazisli yechimlar $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 600$, $y_2 = 520$, $y_3 = 600$ bo'ladi. Endi maqsad funksiyasining bu yechimlarga mos qiymatini topamiz:

$$F(0;\ 0;\ 600;\ 520;\ 600) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 600 \cdot 0 + 520 \cdot 0 + 600 \cdot 0 = 0.$$

Bundan ko'rinib turibdiki, ishlab chiqarish hali boshlanmagan. Simpleks usuli qoidalaridan foydalanib, dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz.

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvali

	I	II	III	6	3	0	0	0	Maqsad satri
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	O'zgaruvchilar satri
1	0	y_1	600	6	[redacted]	1	[redacted]	0	Asosiy matritsa
2	0	y_2	520	4	[redacted]	0	[redacted]	0	Birlik matritsa

3	0	y_3	600	3	4	0	0	1	
Indeks satri	Maq-sad ustuni	O'zga-ruv-chilar ustuni	F=0	−6	−3	0	0	0	

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvaliga asoslanib, birinchi simpleks jadvalni tuzamiz:

1- simpleks jadval

	I	II	III	6	3	0	0	0	Tekshirish ustuni
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1	0	y_1	600	6	2	1	0	0	609 kalitli satr
2	0	y_2	520	4	3	0	1	0	528
3	0	y_3	600	3	4	0	0	1	608
Indeks satri		Maqsad ustuni	F_0=0	−6	−3	0	0	0	

Yechuvchi ustun Yechuvchi son

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, indeks satrida manfiy sonlar bor. Bu sonlar ichidan eng kichigini topamiz. Eng kichigi $\{-6; -3\} = -6$ bo'lgani uchun bu ustun yechuvchi ustundir. O'zgarmaslar ustunidagi sonlarni mos ravishda yechuvchi ustundagi sonlarga bo'lib, ular ichidan eng kichigini topamiz:

$$\min\left\{\frac{600}{6};\quad \frac{520}{4};\quad \frac{600}{3}\right\} = \frac{600}{6} = 100\ .$$

Bu satr *yechuvchi satr* deyiladi. Yechuvchi ustun va yechuvchi satr kesishgan katakda joylashgan K= 6 son *yechuvchi son* deyiladi.

Simpleks jadval tuzish qoida va formulalardan foydalanib, ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

2- simpleks jadval

	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Tekshirish ustuni
1	6	x_1	100	1	1/3	1/6	0	0	$101\frac{1}{2}$ bosh satr
2	0	y_2	120	0	5/3	−2/3	1	0	122 yechuvchi satr
3	0	y_3	300	0	3	−1/2	0	1	$303\frac{1}{2}$
Indeks satri			F_1=600	0	1	1	0	0	600

Yechuvchi ustun Yechuvchi son

Indeks satrida manfiy son mavjud bo'lgani uchun ikkinchi simpleks jadval tuzilgani kabi uchinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

3- simpleks jadval

	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Tekshirish ustuni
1	6	x_1	76	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0	$77\frac{1}{10}$
2	0	x_2	72		1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$73\frac{1}{5}$ bosh satr
3	0	y_3	272		0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{9}{5}$	1	$272\frac{3}{5}$
Indeks satri			F_2=672		0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$673\frac{1}{5}$

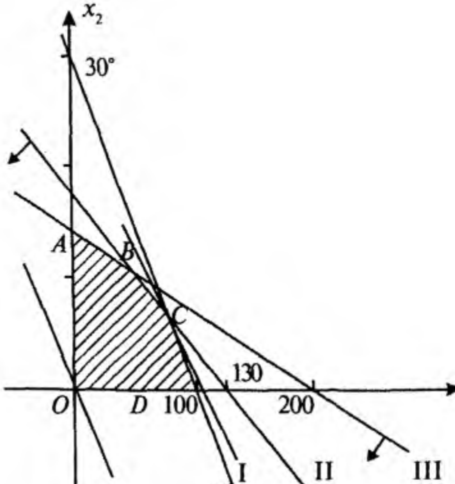
Shunday qilib, uchinchi simpleks jadvalning indeks satrida manfiy sonlar yo‘q. Shuning uchun bu jadval optimal dasturdir. Optimal yechim esa $x_1 = 76, \quad x_2 = 72, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 272$ bo‘ladi. Bu yechimni (1.14) formulaga qo‘ysak, quyidagi hosil bo‘ladi:

$$F(76;\ 72;\ 0;\ 0;\ 272) = 6 \cdot 76 + 3 \cdot 72 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 272 =$$
$$= 6 \cdot 76 + 3 \cdot 72 = 672, \ F_{max} = 672 \text{ so‘m}.$$

Demak, maksimum daromad olish uchun birinchi tur buyumdan $x_1 = 76$ dona, ikkinchi tur buyumdan esa $x_2 = 72$ dona ishlab chiqarish kerak ekan. Endi simpleks usul bilan yechilgan yuqoridagi masalaning geometrik talqinini beramiz. Oldin (1.11) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi sohani chizamiz. Buning uchun (1.11) tengszliklar sistemasini tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozamiz ($x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}$):

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &= 600, \\ 4x_1 + 3x_2 &= 520, \\ 3x_1 + 4x_2 &= 600, \end{aligned}\right| \begin{aligned} &(I) \\ &(II) \\ &(III) \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Bu sistemaga kiruvchi to‘g‘ri chiziqlarni chizib, yarimtekisliklar tashkil qilgan sohani topamiz.



1.3- chizma.

OABCD ko'pburchak uchlarining koordinatalari to'plami optimal yechimlar to'plamiga kiradi (1.3-chizma): $O(0;\,0)$, $B(14;\,119{,}5)$, $C(76;\,72)$, $D(100;\,0)$, $A(0;\,150)$.

Endi maqsad funksiyasining *OABCD* ko'pburchakning uchlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$F_O(0;\,0) = 0$ so'm,
$F_A(0;\,150) = 6\cdot 0+3\cdot 150 = 450$ so'm,
$F_B(14;\,119{,}5) = 6\cdot 14+3\cdot 119{,}5 = 84+358{,}5 = 442{,}5$ so'm,
$F_C(76;\,72) = 6\cdot 76+3\cdot 72 = 456+216 = 672$ so'm,
$F_D(100;\,0) = 6\cdot 100+3\cdot 0 = 600$ so'm.

Demak,

$$F_{\text{ma}}x = \max\{F_O,\ F_A,\ F_B,\ F_K,\ F_D\} = 672 \text{ so'm}.$$

Agar satr chizig'i $6x_1+3x_2=K$ bo'lsa, K ga 0,1,2, ... qiymatlar berib $\vec{C}=(6;\ 3)$ vektori yo'nalishini o'zgartirmasdan siljitib borsak, u tayanch chizig'i bilan S nuqtada urinib o'tadi. Maqsad funksiyasi shu nuqtada optimal yechimga ega bo'ladi. Tayanch chizig'ining tenglamasi: $x_2-72=-2(x_1-76)$. $F(76;\,72)=672$ so'm maksimum daromad bo'lib, u simpleks usul yordamida topilgan optimal yechimga mos keladi.

1.3- masala. Quyidagi masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishda yozing:

$$\left.\begin{aligned}
&2x_1+x_3-x_4+x_5\le 2,\\
&x_1-x_3+2x_4+x_5\le 3,\\
&2x_2+x_3-x_4+2x_5\le 6,\\
&x_1+x_4-5x_5\ge 8,
\end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\ge 0,$$

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=3x_1-2x_2-5x_4+x_5\to\max.$$

Yechish. Bu masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishida yozish uchun musbat bazisli o'zgaruvchilar x_6, x_7, x_8, x_9 larni „≤" belgi bo'lgan tengsizliklarning chap tarafiga qo'shamiz yoki „≥" ishorasi bo'lgan tengsizliklarning chap tarafidan ayiramiz. U holda quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0.$$

Shunday qilib, bu masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishda yozish mumkin.

$$F(x_1, x_2, ..., x_9) = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0.$$

1.4- masala. Quyidagi masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishda yozing:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \to \min.$$

Yechish. Bu masalada maqsad funksiyasining minimum qiymatini topish talab etilyapti. Shuning uchun maqsad funksiysining minimum qiymatini topish o'rniga $F_1 = -F$ ning maksimum qiymatini yuqoridagi shartlar bo'yicha topamiz.

Demak, masala quyidagicha qo'yiladi:

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_7) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 0 = 15, \end{cases}$$

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashning asosiy masalasiga keltiring:

1.5. $\left.\begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + 8x_2 \le 3, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = x_1 + 4x_2 \to \max.$

1.6. $\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \le 24, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 2, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min.$

1.7. $\left.\begin{array}{l} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$

1.8. $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$

1.9. $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 4, \\ 8x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$

1.10. $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 5x_1 + 4x_2 \ge 22, \\ 2x_1 + 7x_2 \ge 28, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 7x_1 + 4x_2 \to \min.$

1.11. $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 3x_1 + 8x_2 \to \min.$

1.12. $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 2, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 3x_1 + 8x_2 \to \min.$

1.13. $\left.\begin{array}{l} 18x_1 + 9x_2 \le 720, \\ 8x_1 + 28x_2 \le 56, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 11x_1 + 7x_2 \to \min.$

1.14. $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 70, \\ 15x_1 + 12x_2 \le 36, \\ 7x_1 + 13x_2 \ge 200, \end{array}\right\}$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$
$F = 27x_1 + 50x_2 \to \max.$

3- §. Sun'iy bazis usuli

Yuqorida ko'rgan edikki, chiziqli programmalashning asosiy masalasida P_i vektorlar ichida m ta birlik vektor mavjud bo'lsa, u holda tayanch yechimni topish mumkin. Lekin chiziqli programmalashning ko'p masalalari chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishida berilgan bo'lib, tayanch yechimi mavjud bo'lsada, P_i vektorlar ichida hamma vaqt m ta birlik vektorlar bo'lmaydi. Bunday hollarda quyidagi masalani sun'iy bazis usulidan foydalanib yechamiz:

1.15- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.15}$$

$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}) \quad b_i \geq 0 \quad (i = 1, m), \quad m < n$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.16}$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \quad \ldots\ldots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

P_j vektorlar ichida m ta birlik vektorlar yo'q.

T a' r i f. Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,\ n+m}) \tag{1.17'}$$

chegaraviy shartlarda

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \tag{1.18}$$

funksiyaning maksimum qiymatini topish (1.17) — (1.18) *masalaga nisbatan kengaytirilgan masala* deyiladi.

Bu yerda M — oldindan berilmagan yetarlicha katta musbat son. Kengaytirilgan masala $X = (\underbrace{0; 0;, ..., 0}_{n}; b_1, b_2, ..., b_m)$ ko'rinishdagi tayanch yechimga ega bo'lib, $P_{n+1}, P_{n+2}, ..., P_{n+m}$ birlik vektorlar sistemasi orqali aniqlanadi va bu bazis m o'lchovli vektor fazosini tashkil qiladi. Tashkil bo'lgan bazis *sun'iy bazis* deyiladi.

Shunday qilib, kengaytirilgan masala tayanch yechimga ega bo'lgani uchun, bu masalani simpleks usuli bilan yechish mumkin bo'ladi.

Bu yerda quyidagi teorema o'rinlidir

1.1 teorema. *Agar kengaytirilgan* (1.17) — (1.18) *masalaning* $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x^*_{n+1}, x_{n+m})$ *optimal rejasida* $x_{n+i} = 0$ $(i = 1, ..., m)$ *bo'lsa, u holda* $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *reja* (1.15) — (1.16) masalaning *optimal rejasi bo'ladi.*

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Shunday qilib, kengaytirilgan masalaning optimal rejasining sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lganidan dastlabki masalaning optimal rejasi kelib chiqadi.

Masalaning tayanch yechimi $X = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, b_1, b_2, ..., b_m)$ bo'lganidan kengaytirilgan masala uchun chiziqli forma quyidagicha bo'ladi: $F_0 = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$ ва $\Delta_j = z_j - c_j$ ning qiymati $-M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$ ga teng.

Demak, F_0 va $z_j - c_j$ ayirma bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikkita qisimdan iborat bo'lib, birinchisi M ga bog'liq, ikkinchisi M ga bog'liq emas.

F_0 va Δ_i larning qiymatlari hisoblangandan keyin, kengaytirilgan masalaning dastlabki berilganlarini jadvalga kiritamiz. Hosil bo'lgan simpleks jadvalning faqat satrlari soni bittaga ko'payadi.

Shu bilan bir qatorda, $(m+2)$ satrga M ning koeffitsiyentlari kiritiladi, $(m+1)$ satr esa M qatnashmagan qo'shiluvchilarga asosan to'ldiriladi. Endi $(m+2)$ satrdagi eng kichik manfiy songa mos bo'lgan vektorni bazisga kiritamiz va tayanch rejani yaxshilaymiz. Simpleks jadvallarni hisoblash simpleks jadvallarni tuzishning umumiy qoidalariga asoslanadi.

Shuni ham aytish kerakki, (m+2) satrga asoslangan iteratsiya jarayoni quyidagicha bo'lguncha davom ettiriladi:

1) hamma su'niy vektorlar man etilmagan hol;

2) qisman su'niy vektorlar man etilmagan bo'lib, (m+2) satrdagi P_1, P_2 ..., P_{n+m} ga mos bo'lgan ustunlarda manfiy sonlar bo'lmagan hol.

Birinchi holda bazis dastlabki masalaning bironta tayanch rejasiga javob beradi va masalaning optemal rejasini topish (m+1) satrga asoslanib davom ettiriladi.

Ikkinchi holda esa (m+2) satrdagi P_0 vektorga mos bo'lgan son manfiy, bu holda masala yechimga ega emas deyiladi. Agar $P_0 < 0$ bo'lsa, topilgan tayanch reja dastlabki masalaning paydo bo'lgan rejasi bo'ladi, bazisda esa su'niy vektorlarning hech bo'lmaganda birortasi qatnashadi.

Agar dastlabki masalada bironta vektor birliklar qatnashsa, u holda bu vektorlarni su'niy bazisga kiritish kerak.

Shunday qilib, (1.15) — (1.16) masalani su'niy bazis usuli bilan yechish uchun quyidagi qadamlarni bajarish kerak:

1) (1.17) — (1.18) kengaytirilgan masala tuziladi;

2) kengaytirilgan masalaning tayanch rejasi topiladi;

3) simpleks usulini qo'llab, su'niy vektorlar bazisdan chiqariladi (man etiladi). Natijada (1.15) — (1.16) masalaning tayanch rejasi topiladi yoki bo'lmasa masalani yechish mumkin emasligi ko'rsatiladi;

4) (1.15) — (1.16) masalaning tayanch rejasiga asoslanib, dastlabki masalaning optimal rejasi topiladi yoki bo'lmasa masalani yechish mumkin emasligi ko'rsatiladi.

1.16- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le \ 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge \ 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

chegaraviy shartlarda $F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Yechish. Masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko‘rinishiga keltiramiz:

Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,6})$$

chegaraviy shartlarda $F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Masalaning oxirgi sistemasidagi no‘malumlarning koeffitsiyentlaridan tuzilgan vektorlarni ko‘rib chiqaylik:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 va P_6 vektorlar ichida faqat ikkita birlik vektor mavjud (P_4 va P_5). Shuning uchun sistemadagi 3-tenglamaning chap qismiga musbat qo‘shimcha o‘zgaruvchi x_7 ni kiritamiz va kengaytirilgan masalani yechamiz:

Ya’ni quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,7})$$

chegaraviy shartlarda $F(X) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$ funksiyaning maksimum qiyma- tini topamiz. Bu yerda $P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Kengaytirilgan *masalaning* P_4, P_5 va P_6 birlik vektorlar orqali aniqlangan tayanch yechimi $X=(0;\ 0;\ 0;\ 24;\ 22;\ 0;\ 10)$ bo'ladi.

Dastlabki berilganlarga qarab quyidagi jadvalni tuzamiz:

1- jadval

	Bazis	S_0	P_0	2	−3	6	1	0	0	−M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	−2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	−M	10	1	−1	2	0	0	−1	1
4			24	0	4	−8	0	0	0	0
5			−10	−1	1	−2	0	0	1	0

Bu jadvalning 4 va 5 ($m+1$, $m+2$) satrlarini to'ldirish uchun $F(x_0)=-M\sum_{i=1}^{m} b_i$ va $\Delta_j = c_{i_1}x_{i_1 j}+c_{i_2}x_{i_2 j}+...+c_{i_m}x_{i_m j}-c_j$, bu yerda $i_1,\ i_2,\ ...,\ i_m$ bazis vektorlarning tartib raqamlari, $x_{i_1 j},\ x_{i_2 j},...,x_{i_m j}$ esa P_{ij} vektor yoyilmasining koeffitsiyentlari, bazis vektorlarga mos bo'lgan X_j $(j=\overline{1,\ 7})$ ni yozib olamiz. U quyidagicha bo'ladi:

$X_1=(0;\ 0;\ 0;\ 2;\ 1;\ 0;\ 1)$; $X_5=(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0)$;
$X_2=(0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 2;\ 0;-\ 1)$; $X_6=(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ -1)$;
$X_3=(0;\ 0;\ 0;\ -2;\ 4;\ 0;\ 2)$; $X_7=(0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1)$.
$X_4=(0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0)$;

Yuqoridagi tayanch yechimlarga mos bo'lgan $F_0(x)$ va $Z_j(x_j)$ $(j=\overline{1,\ 7})$ larning qiymatlarini hisoblab chiqamiz:

$F_0(x)=24-10M$; $Z_4(X_4)=1+0\cdot M$;
$Z_1(X_1)=2-M$; $Z_5(X_5)=0+0\cdot M$;
$Z_2(X_2)=1+M$; $Z_6(X_6)=0+M$;
$Z_3(X_3)=-2-2M$; $Z_7(X_7)=0-M$.

Endi $\Delta_j = z_j - c_j$ ayirmalarni hisoblab chiqamiz:

$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 - M;$

$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 4 + M;$

$\Delta_3 = z_3 - c_3 = -8 - 2M;$

$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 1 - 1 = 0;$

$\Delta_5 = z_5 - c_5 = 0 - 0 = 0;$

$\Delta_6 = z_6 - c_6 = 0 + M;$

$\Delta_7 = z_7 - c_7 = -M + M = 0.$

Bu yerda F_0 va Δ_i larning tarkibiy qismlari ikkita yig'indidan iborat. Shuning uchun bu yig'indilarning M ga bog'liq bo'lmaganlarining koeffitsiyentlarini 4-satrga, bog'liq bo'lganlarining koeffitsiyentlarini 5-satrga yozamiz. Bunday yozish jadvallarni almashtirishni osonlashtiradi (1-jadvalga qarang).

1-jadvalning 5-satrida ikkita manfiy son mavjud: $\{-1;\ -2\}$. Bu shuni ko'rsatadiki, kengaytirilgan masalaning rejasi optimal emas. Simpleks usulni qo'llab, bu rejani yaxshilaymiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

2- jadval

i	Bazis	S_0	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1
2	P_5	0	2	–1	4	0	0	1	2
3	P_3	0	5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
4	indeks		64	4	0	0	0	0	–4

Bu jadvalda 4 ta satr mavjud, chunki su'niy bazis P_7 vektor bazisdan chiqarildi. 2- javdaldan ko'rinib turibdiki $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 34$, $x_5 = 2$ dastlabki masalaning tayanch yechimlaridir. $X = (0;\ 0;\ 5;\ 34;\ 2)$ esa tayanch rejadir. $F(0;\ 0;\ 5;\ 34;\ 2) = 64$ maqsad funksiyasining bu rejaga mos bo'lgan qiymatidir.

2- jadvalning indeks satrida P_6 vektor ustunida (–4) manfiy son mavjud. Shuning uchun P_6 vektorni bazisga kiritib, P_5 vektorni bazisdan chiqaramiz va simpleks jadval tuzamiz.

i	Bazis	S_0	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35		2	0	1	1/2	0
2	P_5	0	1		2	0	0	1/2	1
3	P_7	6	11/2		1/2	1	0	1/4	0
4	Indeks satri		F=68	2	8	0	0	2	0

Jadvalda $\Delta_j = z_j - c_j$ lar ichida manfiy sonlar yo'q. Shuning uchun bu jadvalga asosan topilgan yangi tayanch reja optimaldir. Demak, dastlabki masalaning tayanch rejasi $X^* = (0;\ 0;\ \frac{11}{2};\ 0;\ 1)$ optimal rejadir. Bu rejaga asosan maqsad funksiyasining qiymati $F_{\max} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 6\cdot\frac{11}{2} + 1\cdot 35 = 68.$

1.17- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Ma'lumki, sistemada birlik matritsa mavjud emas. Har bir tenglamaga bittadan manfiy bo'lmagan, mos ravishda, $x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$ sun'iy bazisli o'zgaruvchilarni kiritamiz. Natijada berilgan masalaga nisbatan kengaytirilgan masala deb ataluvchi masalaga o'tamiz.

Quyidagi

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_6=3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1;\ 6})$$

shartlar bajarilganda

$$F=5x_1+3x_2+4x_3-x_4-Mx_5-Mx_6$$

maqsad funksiyasining maksimum qiymatini toping (bunda M — yetarlicha kichik manfiy son, masala minimumga yechilayotgan bo'lsa, yetarlicha katta musbat son deb ataladi). Shartlarni vektor shaklida yozamiz:

$$P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+P_4x_4+P_5x_5+P_6x_6=P_0\ ,$$

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$P_4=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ P_5=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

x_5, x_6 o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar bo'lsin. U holda birinchi tayanch yechim $X_0=(0;0;0;0;3;3)$ hosil bo'ladi. Simpleks usulni qo'llab optimal yechimni topamiz.

1-simpleks jadvalni tuzamiz:

Jadvalning 3- va 4- satrlarini to'ldirishda

$$F(X_0)=C_6X_0=-M\cdot 3=M\cdot 3+0=0-6M$$

bazisli vektorlarga mos bo'lgan $X_j \quad (j=\overline{1,6})$ larni va $Z_j \quad (X_j)$ larni hisoblab chiqamiz:

$X_1=(0;0;0;0;1;2)\ ,\quad Z_1(X_1)=-3M,$

$X_2=(0;0;0;0;2;3)\ ,\quad Z_2(X_2)=-5M,$

$X_3=(0;0;0;0;2;1)\ ,\quad Z_3(X_3)=-3M,$

$X_4=(0;0;0;0;2;1)\ ,\quad Z_4(X_4)=-3M,$

$X_5 = (0;0;0;0;1;0)$, $Z_5(X_5) = 0 \cdot M$,

$X_6 = (0;0;0;0;0;1)$, $Z_1(X_1) = 0 \cdot M$.

Endi $\Delta_j = z_j - c_j$ ayirmani hisoblab chiqamiz:

$\Delta_1 = -5 - 3M;$ $\Delta_4 = 1 - 3M;$

$\Delta_2 = -3 - 5M;$ $\Delta_5 = 0 + 0 \cdot M;$

$\Delta_3 = -4 - 3M;$ $\Delta_6 = 0 + 0 \cdot M.$

Hisoblashlarni bajarib, $z_j - c_j$ qiymatlarni topamiz va M ning chiziqli funksiya ekanligini aniqlaymiz.

Bu yerda F_0 va Δ_j larning tarkibiy qismlari ikkita yig'indidan iborat. Shuning uchun bu yig'indilarning M ga bog'liq bo'lganlarini 1-simpleks jadvalning 3-satriga ($m + 1$ satriga), M ga bog'liq bo'lmaganlarini 4-satriga yozamiz. Natijada 1- simpleks jadval kataklari to'ladi.

1- simpleks jadval

i	Bazislar	Bazis koeffitsiyentlar	P_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	$-M$	3	1	3	2	2	1	0
2	P_6	$-M$	3	2	2	1	1	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		0	-5	-3	-4	1	0	0
$m+2$	$z_j - c_j$		-6	-3	-5	-3	-3	0	0

Jadvalning ($m + 2$) satrida manfiy sonlarning mavjudligi tayanch yechimning optimal emasligini bildiradi va uni yaxshilash mumkin bo'ladi. Jadvalning ($m + 2$) satrida eng kichik son (-5) P_2 vektor bahosi bo'lganligi uchun kalit ustun P_2 ustuni bo'ladi. $\min\{\frac{3}{3}; \frac{3}{2}\} = 1$ ularning kesishmasidagi 3 element bo'lganligi uchun P_5 vektor satri kalit satr, 3 yechuvchi (kalit) element bo'ladi. Demak, P_5 ni bazisdan chiqarib, o'rniga P_2 vektorni bazisga kiritamiz. 2-simpleks jadvalni tuzamiz.

2- simpleks jadval

i	Bazis-lar	Bazis koeffitsi-yentlar	P_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	P_6	$-M$	1	1/3	0	−1/3	−1/3	−2/3	1
$m+1$	$z_j - c_j$		3	−4	0	−2	3	1	0
$m+2$	$z_j - c_j$		−1	−4/3	0	1/3	1/3	513	0

2-simpleks jadvalining ($m + 2$) satri asosiy qismida ($-\frac{4}{3}$) manfiy son bo‘lganligi uchun P_1 vektor ustuni kalit ustun, P_6 vektor satri kalit satr, $\frac{4}{3}$ yechuvchi (kalit) element bo‘ladi. Bazisdan P_6 sun’iy vektorni chiqarib, P_1 vektorni bazisga kiritib, 2-simpleks jadvaldagidek, 3-simpleks jadvalni hosil qilamiz:

3- simpleks jadval

i	Bazis-lar	Bazis koeffitsi-yentlar	P_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0
1	P_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	−1/4
2	P_6	5	3/4	1	0	−1/4	−1/4	−1/2	3/4
$m+1$	$z_j - c_j$		6	0	0	−3	2	−1	3
$m+2$	$z_j - c_j$		0	0	0	0	0	1	1

2- jadvalda ($m + 2$) satrda sun’iy bazis qiymatlaridan tashqari hamma qiymatlar 0 ga teng bo‘ladi:

M sonining tanlanishiga asosan, P_5 va P_6 vektorlar endi bazisga tushmaydi.

$X^* = (\frac{3}{4};\ \frac{3}{4};\ 0;\ 0;\ 0)$ yechim berilgan masalaning yechimi bo'ladi, lekin u optimal emas, chunki $(m+1)$ satrda manfiy qiymat mavjud. Endi yechimni yaxshilash $(m+1)$ satr bo'yicha olib boriladi. $z_3 - c_3 = -3 < 0$ bo'lganligi uchun P_3 vektor ustuni kalit ustun, P_2 vektor satri kalit satr, $\frac{3}{4}$ yechuvchi (kalit) element bo'lib, $(m+2)$ satr endi hisobga olinmaydi. Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan 4-simpleks jadvalni tuzamiz:

4- simpleks jadval

i	Bazislar	Bazis koeffitsiyentlar	P_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	$-1/3$
2	P_1	5	1	1	1/3	0	0	$-1/3$	2/3
$m+1$	$z_j - c_j$		9	0	4	0	5	$1+M$	$2+M$

3-simpleks jadvaldan qo'yilgan masalaning optimal yechimi $\overline{X} = (1;0;1;0;0)$ bo'lib, $Z_{\max}(\overline{X}) = 9$ bo'ladi. Birinchi va ikkinchi satrlarni o'zaro almashtirib, P_5 va P_6 vektorlar ustunida teskari matritsani hosil qilamiz.

II BOB. CHIZIQLI PROGRAMMALASHNINIG IKKILANISH MASALALARI

1- §. Ikkilangan masalalar haqida asosiy tushunchalar

Bizga chiziqli programmalash masalasi berilgan bo'lsin. Quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{array}\right| \tag{2.1}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

shartlar bilan berilgan

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{2.2}$$

maqsad funksiyasining maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Har qanday chiziqli programmalash masalasining ikkilangan masala deb ataluvchi masala bilan uzviy bog'liq ekanligini ko'rsatish mumkin.

T a ' r i f. Quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{array}\right| \tag{2.3}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \ge 0$$

shartlar qanoatlantirilganda

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{2.4}$$

funksiyaning minimum qiymatini topish (2.1), (2.2) chiziqli *programmalash masalasining ikkilangan masalasi* deyiladi.

Bu masalalarning optimal yechimlari o‘zaro quyidagi teorema asosida bog‘langan.

Teorema. ***Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masalalardan birortasi optimal yechimga ega bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo‘ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funksiyalarning ekstremal qiymatlari o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni***

$$F_{\max} = F^*_{\min}.$$

Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ yoki $F^*(y_1, y_2, ..., y_n)$ chiziqli funksiyalardan birontasi chegaralanmagan bo‘lsa, u holda masala hech qanday yechimga ega bo‘lmaydi.

Ikkilanganlik masalalari simmetrik va simmetrik bo‘lmagan masalalarga bo‘linadi. Yuqoridagi teorema simmetrik bo‘lmagan masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Shuni ham aytish kerakki, tengsizliklar sistemasini qo‘shimcha o‘zgaruvchilar yordamida tenglamalar sistemasi ko‘rinishiga keltirish mumkin. Demak, simmetrik ikkilanmalik masalalarni simmetrik bo‘lmagan ikkilanmalik masalalarga keltirish mumkin. Shuning uchun simmetrik bo‘lmagan ikkilanish masalalarining optimal yechimlari haqidagi teorema simmetrik ikkilangan masalalar uchun ham o‘rinlidir.

2.1- masala. Quyidagi shartlar bilan berilgan masalani ikkilangan masalaga keltiring:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 7x_2 - 4x_3 \le -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3, \end{array}\right\}$$

$$x_1,\ \ x_2,\ \ x_3 \ge 0,$$
$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min.$$

Masalani ikkilangan masalaga keltirish uchun oldin chegaralovchi shartlarni bir xil ko‘rinishdagi tengsizliklarga keltiramiz. Buning uchun birinchi tengsizlikni teskari ko‘rinishga keltiramiz:

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 7x_2 + 4x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \end{array}\right\}$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0,$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min.$$

Hosil bo‘lgan masalaga ikkilangan masala quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{l} -y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ 7y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 2, \\ 4y_1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4 \leq 4, \end{array}\right\}$$

$$y_1, y_2, \quad y_3, \quad y_4 \geq 0,$$

$$F^* = 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 \rightarrow \max.$$

Ikkilangan masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasiga keltirib simpleks usuli bilan yechish mumkin.

2- §. Ikkilangan simpleks usuli

Bu usul oldin akademik L.V. Kantorovich tomonidan ko‘rsatilgan edi. Lekin bu usulni boshqa ko‘rinishda Lemks degan olim ko‘rsatgan. Shuni ham aytish kerakki, agar bironta chiziqli programmalash masalasini yechish kerak bo‘lsa, uning o‘rniga ikkilangan masalani yechish mumkin. Agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo‘lsa, u holda dastlabki berilgan masala ham optimal yechimga ega bo‘ladi.

Dastlab A matritsaga A^T — transponirlangan matritsani yozib olamiz. Matritsaga transponirlangan matritsani yozganda ustunlar va satrlarning roli o‘zgaradi, ya’ni berilgan masalaning satri to‘g‘risida so‘z ketsa, u ustunga o‘tadi.

Xususiy holda simpleks jadvallarning indeks satri to‘g‘risida gap ketsa, ikkilangan masalalarda ozod hadlar ustuni to‘g‘risida gap ketadi. Buni quyidagi ikkita masalada ko‘ramiz.

2.2 - masala. Quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \leq 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

shartlarda $F = 3x_1 + 4x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Simpleks usuli qoidalaridan foydalanib, dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz:

1- jadval

	I	$-x_1$	$-x_2$	Tekshirish ustuni
y_1	56	4	9	69
y_2	37	5	3	45
y_3	2	-1	2	3
F	0	-3	-4	-7

1. Indeks satridan F dan absolut qiymat bo'yicha eng katta manfiy sonni olamiz. Bu son yechuvchi ustunni ko'rsatadi.

2. Ozod hadlarni mos ravishda yechuvchi ustundagi musbat sonlarga bo'lib, ularning eng kichigini tanlaymiz. Bu satr yechuvchi satr deyiladi : $\left\{\frac{56}{9};\ \frac{37}{3};\ \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1.$

3. Yechuvchi ustun va yechuvchi satr kesishgan katakdagi son *yechuvchi son* deyiladi.

4. Simpleks jaldvallarni to'ldirish formulalaridan foydalanib, qolgan kataklarni to'ldiramiz. Natijada 2- jadval hosil bo'ladi. Bu jadvalda x_2 ni asosiy o'zgaruvchilar safiga o'tkazamiz, y_3 ni esa qo'shimcha o'zgaruvchilar safiga o'tkazamiz.

2- jadval

	I	$-x_1$	$-y_3$	Tekshirish ustuni
y_1	47	$\frac{7}{2}$	$-\frac{9}{2}$	51
y_2	34	$\frac{13}{2}$	$-\frac{3}{2}$	39
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
F	4	-5	2	1

F indeks satrida manfiy son (—5) bo'lgani uchun 3- simpleks jadvalni tuzamiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

3- jadval

	I	$-y_2$	$-y_3$
y_1	$\frac{33}{13}$	$-\frac{17}{13}$	$-\frac{33}{13}$
x_1	$\frac{68}{13}$	$\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{13}$
x_2	$\frac{47}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$
F	$\frac{392}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{11}{13}$

F indeks satri hadlarining hammasi musbat bo'lgani uchun quyidagi

$$y_1 = \frac{33}{13}; \quad x_1 = \frac{68}{13}; \quad x_2 = \frac{47}{13}; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0$$

yechim optimal yechim bo'ladi. Unga maqsad funksiyasining quyidagi qiymati mos keladi:

$$F_{\max} = \frac{10}{13}(-y_2) + \frac{11}{13}(-y_3) + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}.$$

2.3- masala. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} 4u_1 + 5u_2 - u_3 \ge 3, \\ 9u_1 + 3u_2 + 2u_3 \ge 4, \end{aligned}\right\}$$

$$u_1, u_2, u_3 \ge 0$$

shartlarda $F' = 56u_1 + 37u_2 + 2u_3$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Simpleks usuli qoidalaridan foydalanib, berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz:

1-jadval

	I	u_1	u_2	u_3
v_1	-3	4	5	-1
v_2	-4	9	3	2
F	0	56	37	2

1. Ozod hadlar ustunidan manfiy sonlar ichida eng kichik manfiy sonni olamiz. Bu son turgan satr yechuvchi satrni ko'rsatadi.

2. F satr hadlarini mos ravishda yechuvchi satrdagi sonlarga bo'lib, eng kichigini olamiz: $\min\left\{\frac{56}{9};\ \frac{37}{3};\ \frac{2}{2}\right\}=\frac{2}{2}$.

Bu ustun *yechuvchi ustun* deyiladi.

3. Yechuvchi satr va yechuvchi ustun kesishgan katakdagi son *yechuvchi son* deyiladi.

4. Qo'shimcha o'zgaruvchi u_3 ni v_2 asosiy o'zgaruvchi sifatida bazisga kiritamiz. Simpleks jadvallarni tuzish formulalaridan foydalanib, 2- simpleks jadvalni tuzamiz:

2- jadval

	I	u_1	u_2	v_2	Tekshirish ustuni
v_1	-5	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{91}{2}$
u_3	2	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
F^*	4	47	34	1	83

O'zgarmaslar ustunida manfiy son (—5) bo'lgani uchun bu jadvalni ham yuqoridagi kabi almashtiramiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

3-jadval

	1	u_1	v_1	v_2
u_2	$\frac{10}{13}$	$-\frac{17}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$
u_3	$\frac{11}{13}$	$-\frac{33}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$
F^*	$\frac{392}{13}$	$\frac{33}{13}$	$\frac{68}{13}$	$\frac{47}{13}$

Erkin hadlar ustunida hamma hadlar musbat bo'lgani uchun quyidagi yechim optimal bo'ladi:

$$u_2 = \frac{10}{13}; \quad u_3 = \frac{11}{13}; \quad u_1 = 0; \quad v_1 = 0; \quad v_2 = 0,$$

$$F_{\min} = \frac{33}{13}u_1 + \frac{68}{13}v_1 + \frac{47}{13}v_2 + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}.$$

Shunday qilib ikkilangan simpleks usul orqali masala yechildi.

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashning ikkilangan masalasiga keltiring va ikkilangan simpleks usul bilan yeching:

2.4. $$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &\le 52, \\ x_2 &\le 2, \\ 10x_1 + 4x_2 &\le 70, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max.$

2.5. $$\left.\begin{aligned} 9x_1 + 11x_2 &\le 46, \\ 5x_1 + x_2 &\le 42, \\ x_1 + 13x_2 &\le 4, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 5x_1 + x_2 \to \max.$

2.6. $$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 &\le 90, \\ 2x_2 &\le 6, \\ x_1 + 6x_2 &\le 60, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 9x_1 + 5x_2 \to \max.$

2.7. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 11x_2 &\le 11, \\ 3x_1 + x_2 &\le 28, \\ 2x_1 + 13x_2 &\le 11, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 8x_1 + 2x_2 \to \max.$

2.8. $$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 2, \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 35, \\ 5x_1 + 13x_2 &\le 18, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 7x_1 + x_2 \to \max.$

2.9. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 1, \\ 5x_1 + x_2 & 42, \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 11, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 7x_1 + 5x_2 \to \max.$

2.10. $$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 14x_2 &\le 14, \\ 13x_1 + 5x_2 &\le 100, \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 5, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max.$

2.11. $$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\le 1, \\ 17x_1 + x_2 &\le 152, \\ 5x_1 + 14x_2 &\le 13, \end{aligned}\right\}$$
$x_1, x_2 \ge 0,$
$F = 13x_1 + 3x_2 \to \max.$

3- §. Ikkilangan masalalarning geometrik talqini

Agar berilgan va unga ikkilangan masalalarda o'zgaruvchilar soni ikkiga teng bo'lsa, chiziqli programmalash masalalarining geometrik tahlilini berish osonlashadi. Bu holda bir-birini istisino qiluvchi quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin: 1) ikkala masala ham optimal yechimga ega; 2) faqat bitta masala optimal yechimga ega; 3) ikkala masalaning optimal rejalari bo'sh to'plamni tashkil qiladi.

2.12- masala. Quyidagi shartlar bo'yicha

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 14, \\ x_1 + x_2 &\le 8, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0,$$

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to \max$$

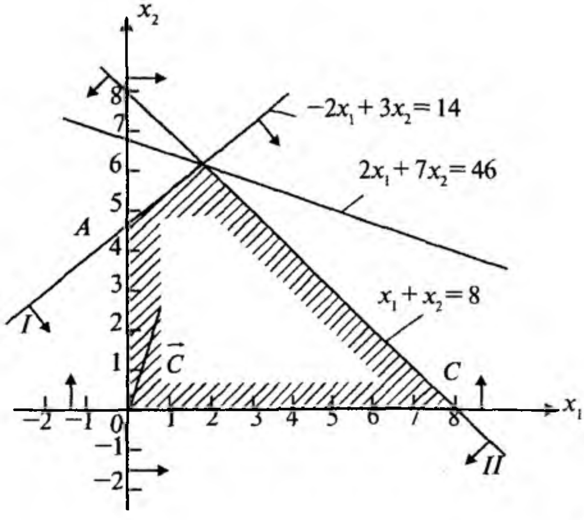
masalani ikkilangan masalaga keltiring va ikkala masalaning yechimlarini toping.

Yechish. Bu masalaga ikkilangan masala $F^* = 14y_1 + 8y_2$ funksiyaning

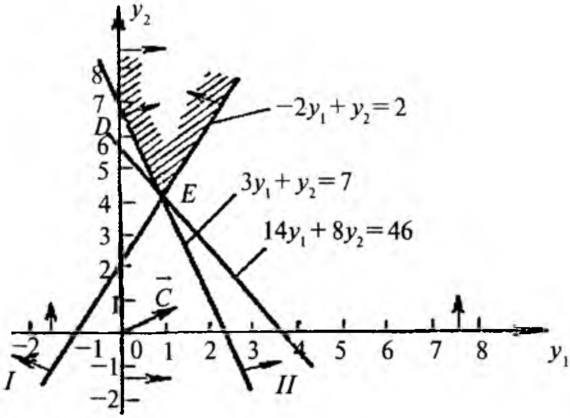
$$\left.\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &\ge 2, \\ 3y_1 + y_2 &\ge 7, \end{aligned}\right\}$$

$$y_1, \quad y_2 \ge 0$$

shartlarda minimum qiymatini topishdan iborat bo'ladi.



2.1- chizma.



2.2- chizma.

Berilgan va unga ikkilangan masalada ham noma'lumlar soni ikkita (x_1 va x_2), (u_1 va u_2), uni geometrik usul bilan yechish mumkin. Dastlabki masalada maqsad funksiyasi B nuqtada maksimum qiymatga ega. Shuning uchun $B(2;\ 6)$ nuqtada $F(2;\ 6) = 46$ maqsad funksiyasi optimal rejaga (planga) ega (2.1-chizma). Ikkilangan masala esa $E(1;\ 4)$ nuqtada minimum qiymatga (2.2-chizma) ega. Shuning uchun $F^*(1;\ 4) = 46$ maqsad funksiyasining minimal qiymatidir.

2.13- masala. Ikkilangan masalalar juftligining yechimlarini toping.

Dastlabki masala

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1,\quad x_2 \geq 0,$$

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to \min,$$

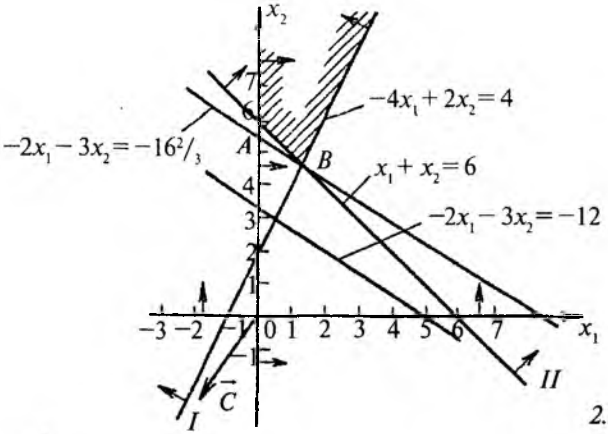
ikkilangan masala

$$\left.\begin{aligned} -4y_1 + y_2 &\leq -2, \\ 2y_1 + y_2 &\leq -3, \end{aligned}\right\}$$

$$y_1,\quad y_2 \geq 0,$$

$$F' = 4y_1 + 6y_2 \to \max .$$

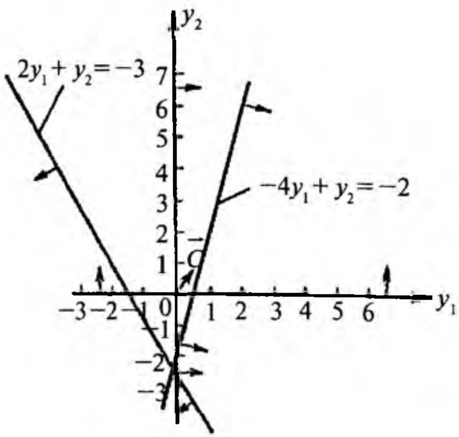
Yechish. Dastlabki masala va unga ikkilangan masala ham ikkitadan o'zgaruvchiga ega. Shuning uchun ularni geometrik usul bilan



2.3- chizma.

yechamiz. Ikkala masala uchun ham shakllarni chizamiz (2.3 va 2.4-chizmalar).

2.3 -chizmadan ko'rinib turibdiki, dastlabki masala yechimga ega emas. Chunki maqsad funksiyasi $F = -2x_1 - 3x_2$ mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida quyidan chegaralanmagan. 2.4- chizmadan ko'rinib turibdiki, ikkilangan masalaning ham optimal rejalari yo'q, chunki yechimlar ko'pburchagi bo'sh to'plamni tashkil qiladi. Shunday qilib, dastlabki masala optimal rejaga ega bo'lmasa (maqsad funksiyasi mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida chegaralanmagan bo'lgani uchun), unga ikkilangan masala ham optimal rejaga ega bo'lmaydi.



2.4- chizma.

III BOB. TRANSPORT MASALASI

1- §. Taqsimot usuli

Faraz qilaylik, m ta ishlab chiqarish korxonasi berilgan bo'lsin. Bu korxonalarda, mos ravishda, a_1, a_2, ..., a_m tonnadan bir jinsli mahsulotlar ishlab chiqarilgan bo'lib, $B_1, B_2, ..., B_n$ iste'molchilarga, mos ravishda, $b_1, b_2, ..., b_n$ tonnadan tarqatish kerak. A_j ishlab chiqarish korxonasidan B_i iste'molchilargacha mahsulotlarni tashish bahosi quyidagi tarif matritsasi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Yuqoridagilarga asosan quyidagi jadvalni tuzish mumkin:

1- jadval

Ishlab chiqarish korxona-lari	Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna hisobida)	Iste'molchilar va ularning talabi				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
		b_1	b_2	b_3	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

Agar ishlab chiqarish korxonasidagi jami bir jinsli mahsulotlar miqdori iste'molchilarning talabini to'la qondirsa, ya'ni

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$
$$b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$
$$a = b$$

bo'lsa, yuqoridagi jadvalga asoslanib tuzilgan model *yopiq matematik model* deyiladi.

Agar, masalan, $a > b$ bo'lsa, tuzilgan matematik model *ochiq model* deyiladi.

Iste'molchilar safiga soxta iste'molchi B_{n+1} ni kiritamiz. Soxta iste'molchi mahsulot joylashgan korxona bo'lgani uchun mahsulotlarni tashish bahosi 0 ga teng.

Shunday qilib, ochiq matematik modelni yopiq matematik modelga keltirsa bo'ladi.

Jadvalni quyidagicha tushuntirish mumkin: $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ lar A_1 ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotning, mos ravishda, B_j $(j = \overline{1, \ n})$ iste'molchilarga tarqatiladigan miqdori, $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ lar A_2 ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotning, mos ravishda, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iste'molchilarga tarqatiladigan miqdori va hokazo. c_{ij} lar esa 1 tonna mahsulotni i- ishlab chiqarish korxonasidan iste'molchigacha tashish bahosi, ya'ni tarif.

Shunday qilib, transport masalasining shartini, berilgan jadvalga asoslanib, x_{ij} larni o'z ichiga olgan quyidagi $n + m$ ta tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2, \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m, \end{array}\right\} \quad (a) \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} = b_n, \end{array}\right\} \quad (b) \end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, m}.$$

Transport xarajatlari (maqsad funksiyasi) esa quyidagiga teng:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} \\ + \cdots + c_{n1}x_{n1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn}. \tag{3.2}$$

Demak, (3.1) chiziqli tenglamalar sistemasida shunday 0 va musbat yechimlarni topish kerakki, (3.2) maqsad funksiyasi minimum qiymat qabul qilsin.

(3.1) tenglamalar sistemasini va (3.2) tenglikni quyidagi ko‘rinishda ixcham yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i, \quad (i = \overline{1,m}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, \quad (j = \overline{1,n}) \end{aligned}\right\} \tag{3.1'}$$

va

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{3.2}$$

Shuni ham aytish kerakki, (3.1) tenglamalar sistemasining hamma tenglamalari bir-biri bilan chiziqli bog‘liq yoki chiziqli bog‘liq emas bo‘lishi mumkin. Chiziqli bog‘liq bo‘lmaganlari soni $m + n - 1$ dan kichik yoki teng bo‘ladi.

Taqsimot usulining umumiy holdagi algoritmini tushuntirish ancha og‘ir.

1. Shimoliy-g‘arb burchak usuli

„Shimoliy-g‘arb burchak“ usulining umumiy qoidasi quyidagilardan iborat. Eng avval dastlabki berilganlarning jadvalidan „Shimoliy-g‘arbida joylashgan x_{11} no‘malumning qiymatini aniqlaymiz“:

$$x_{11} = \min(a_1; \ b_1).$$

Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) $a_1 \le b_1$ bo‘lsa, $x_{11} = a_1$ va $x_{1j} = 0 \ (j = \overline{2,n})$; $b_1^1 = b_1 - a_1$;

2) $a_1 \ge b_1$ bo‘lsa, $x_{11} = b_1$ va $a_1^1 = a_1 - b_1$.

Agar birinchi hol bajarilsa, birinchi qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_2-a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}.$$

Endi ikkinchi qatordagi birinchi elementni topamiz.

Bu yerda ham ikki hol bo'lishi mumkin:

1) agar $a_2 \geq b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21} = b_1 - a_1$ va $x_{2j} = 0,\ j = \overline{2,m}$; $a_2^1 = a_2 - (b_1 - a_1)$;

2) agar $a_2 \leq b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21} = a_2$, va $b_1^1 = b_1 - a_1 - a_2$.

Agar bu yerda ham birinchi hol bajarilsa, u holda ikkinchi qadamdan so'ng yangi matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} x_{11}=a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21}=b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2^1=a_2-(b_1-a_1) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & a_{3n} & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_1^1=b_1-a_1-a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}.$$

Bu jarayon qadam-baqadam barcha a_i va b_j lar nolga aylanguncha davom ettiriladi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati a_i va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordamida topiladi. Shundan keyin (3.2) formula orqali transport xarajatlari hisoblanadi.

2. Minimal xarajatlar usuli

Minimal xarajatlar usulining qoidasi quyidagicha:

1. Transport masalasi xarajatlaridan tashkil topgan ta'rif matritsasi belgilab olinadi:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. T matritsaning minimal elementini topamiz:

$$\min\{c_{ij}\} = k.$$

Faraz qilaylik, bu element

bo'lsin. U holda $$C_{i_1 j_2} = k.$$

$$x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}; b_{j_1}).$$

Berilganlarga asosan quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $a_{i_1} \leq b_{j_1}$,

2) $a_{i_1} > b_{j_1}$.

Birinchi holda i_1 satrning barcha elementlari $x_{i_1 j} = 0 \quad (j \neq j_1)$ bo'ladi, bunday holda i_1 satr elementlarini o'chiramiz.

Ikkinchi holda j_1 ustunning barcha elementlari $x_{ij_1} = 0 \quad (i \neq i_1)$ va bu holda barcha j_1 ustun elementlari o'chiriladi.

Ustun va satr elementlarini o'chirish natijasida hosil bo'lgan yangi matritsaning ustun va satrlari soni T matritsaga nisbatan bittaga kamayadi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi jarayon yangi matritsa uchun yana bajariladi. Shunday qilib, qo'yilgan masalaning boshlang'ich optimal planini topish uchun minimal xarajatlar usulida $n + m - 1$ ta qadamni bajarish kerak.

Endi quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Masala. Samarqand viloyatining Jomboy va Juma bazasidan Kattaqo'rg'on, Ishtixon va Narpay tumanlariga bir jinsli tovarlarni tashish kerak. Tovarlar zaxirasi Jomboy bazasida 400 tonna, Juma bazasida esa 600 tonna. Kattaqo'rg'on tumanining tovarga ehtiyoji 350 tonna, Ishtixon tumaniniki 450 tonna va Narpay tumaniniki esa 200 tonna. Jomboy bazasidan uchta tumangacha bo'lgan masofalar, mos ravishda, 100 km, 60 km va 110 km. Juma bazasidan uchta tumangacha bo'lgan masofalar, mos ravishda, 40 km, 70 km va 50 km ga teng. Tumanlarga tovar tashishning optimal variantini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan quyidagi jadvalni tuzamiz:

2- jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar		
		Kattaqo‘rg‘on	Ishtixon	Narpay
Jomboy I	400	100 x_{11}	60 x_{12}	110 x_{13}
Juma II	600	40 x_{21}	70 x_{22}	50 x_{23}
Tovarlarga bo‘lgan talab	1000	350	450	200

Bu masalada bazalar soni $m = 2$, iste’molchilar soni esa $n = 3$ ta.

Shuning uchun mahsulotlarni taqsimlagandan keyin to‘ldirilgan kataklar soni $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$ ta bo‘lishi kerak.

2- jadvalga asoslanib 3- jadvalni tuzamiz:

3- jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar va ularning tovar mahsulotlariga talabi		
		Kattaqo‘rg‘on 350	Ishtixon 450	Narpay 200
Jomboy I	400	100 350	60 50	110 0
Juma II	600	40 0	70 400	50 200

Transport xarajatlarini 3- jadvalga asoslanib hisoblasak,

$$f_1 = 350 \cdot 100 + 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$$

$$= 35000 + 3000 + 28000 + 10000 = 76000 \text{ t. km}$$

ni tashkil etadi. 3- jadvalning optimalligini tekshiramiz. Buning uchun bo‘sh kataklarga nisbatan zanjirlar tuzamiz.

Bunday zanjirlar Δ_{13} va Δ_{21} lardan iborat. Δ_{13} zanjir quyidagi ko‘rinishga ega. Bo‘sh katak indeksining ishorasini musbat ishora bilan olamiz. Qolgan indekslar ishorasi almashib turadi.

60 110

− +

$\Delta_{13} = 110 - 60 + 70 - 50 = 70$

+ −

70 50

Bu zanjir musbat, shuning uchun boshqa bo'sh zanjirni, ya'ni Δ_{21} ni tekshiramiz.

Δ_{21} zanjirning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

350 60

− +

$\Delta_{21} = 40 - 100 + 60 - 70 = -70$

+ −

0 400

Demak, Δ_{21} zanjir manfiy ishoraga ega, shuning uchun bu zanjirni yaxshilaymiz. Manfiy uchlarda joylashgan yuklarning eng kichigini olamiz, ya'ni $\min\{350;\ 400\} = 350$.

Bundan keyin 350 ni manfiy uchlardagi yuklardan ayiramiz va musbat uchlarda turgan yuklarga qo'shamiz.

$350 - 350 = 0$ $50 + 350 = 400$

− +

+ −

$0 + 350 = 350$ $400 - 350 = 50$

Δ_{21} zanjirdagi o'zgarishlarni hisobga olib, 4- jadvalni tuzamiz.

4- jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar va ularning tovar mahsulotlariga talabi		
		Kattaqo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200
Jomboy I	400	100 0+	60 400	110 0
Juma II	600	40 350	70 50	50 200

4- jadvaldagi programma bo'yicha transport xarajatlari

$$f_2 = 100 \cdot 0 + 400 \cdot 60 + 110 \cdot 0 + 350 \cdot 40 + 50 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$$

$$= 0 + 24000 + 0 + 14000 + 3500 + 10000 = 51500 \text{ t.km.}$$

ni tashkil etadi.

3 va 4- jadvalga joylashtirilgan programmalarning farqi

$$f_1 - f_2 = 76000 - 51500 = 24500 \text{ t . km}$$

ni tashkil etadi. Demak, iqtisodiy tejash 24500 tonna km ni tashkil etadi.

Endi 4- jadvaldagi bo'sh kataklarga nisbatan tuzilgan zanjirlarning ishorasini yuqoridagi kabi tekshirib chiqsak, Δ_{11}, Δ_{13} larnining ishoralari musbat ekanligini ko'ramiz. Shuning uchun 4- jadvalga joylashtirilgan programma optimal programma bo'lib, bu programma bo'yicha: Kattaqo'rg'on tumani Juma bazasidan 350 tonna yuk olishi kerak bo'lib, transport xarajatlari $F_1 = 0 \cdot 100 + 350 \cdot 40 = 14000$ t.km ni tashkil etadi. Ishtixon tumani 400 tonna yukni Jomboy bazasidan, 50 tonna yukni esa Juma bazasidan olganda transport xarajatlari

$$F_2 = 400 \cdot 60 + 50 \cdot 70 = 24000 + 3500 = 27500 \text{ t.km}$$

ni tashkil etadi. Narpay tumani 200 tona yukni Juma bazasidan oladi va transport xarajatlari $F_3 = 0 \cdot 110 + 200 \cdot 50 = 10000$ t.km ni tashkil etadi.

Jami transport xarajatlari $f_2 = F_1 + F_2 + F_3 = 14000 + 27500 +$ $+10000 = 5150$ t.km ni tashkil etadi.

3- jadvalga joylashtirilgan programma bo'yicha transport xarajatlari tumanlar bo'yicha:

Kattaqo'rg'on: $f_1 = 100 \cdot 3500 = 35000$ t.km;

Ishtixon: $f_2 = 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 = 3000 + 28000 = 31000$ t.km;

Narpay: $f_3 = 200 \cdot 50 = 10000$ t.km;

Jami: $f_1 + f_2 + f_3 = 76000$ t.km.

Tumanlar bo'yicha tejalgan transport xarajatlari:

Kattaqo'rg'on: $f_1 - F_1 = 35000 - 14000 = 21000$ t.km;

Ishtixon: $f_2 - F_2 = 3100 - 27500 = 4500$ t.km;

Narpay: $f_3 - F_3 = 10000 - 10000 = 0$ t.km.

Shunday qilib, 1 tonna yukni 1 km ga tashish uchun 100 so'm mablag' sarflanganda tumanlar bo'yicha iqtisodiy tejash:

Kattaqo'rg'on: $21000 \cdot 100 = 2100000 = 2_{\text{mln}}$ 100 ming so'm;

Ishtixon: $4500 \cdot 100 = 450000 = 450$ ming so'mni tashkil etadi.

Jami viloyat bo'yicha iqtisodiy tejash 4- jadvaldagi programma bo'yicha 2 million 550 ming so'mni tashkil etadi.

2- jadvalga asoslanib, quyidagi modelni tuzib olishimiz mumkin:

$$\left.\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600, \\ &x_{11} + x_{21} = 350, \\ &x_{12} + x_{22} = 450, \\ &x_{13} + x_{23} = 200, \end{aligned}\right|$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$f = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40x_{21} + 70 \cdot x_{22} + 50 \cdot x_{23}.$$

Yuqoridagi sistemani yechsak:

$$x_{11} = 0, \qquad x_{21} = 350,$$
$$x_{12} = 400, \qquad x_{22} = 50,$$
$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 200$$

bo'ladi.

$$f = 100 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 110 \cdot 0 + 40 \cdot 50 + 70 \cdot 50 + 50 \cdot 200 = 51500$$

tonna km.

Yuqoridagi optimal programma matematik model yechimlari bilan mos keldi.

Shuni ham aytish kerakki, masalalar yechganda D_{ij} larning bir nechtasi manfiy bo'ladi. U holda manfiy D_{ij} lar ichidan eng kichik zanjir tanlanadi va u yaxshilanadi.

Agar zanjirlarda bir nechta o'zaro teng manfiy sonlar paydo bo'lsa, u holda birinchi (istalgan) manfiy zanjir yaxshilanadi. Ayrim vaqtda to'ldirilgan kataklar soni $n + m - 1$ dan kam bo'ladi. Shuning uchun bironta katakka 0 qo'yib, u katak yuk bilan ta'minlanadi va to'ldirilgan kataklar soni $n + m - 1$ ga teng bo'ladi. Bo'sh katakka 0 qo'yishda katakni shunday tanlash kerakki, u katak bilan tuzilgan barcha zanjirlarda D_{ij} lar musbat bo'lsin.

Minimal xarajatlar usul bilan masalalar yechishni talabalarning o'zlariga tavsiya qilamiz.

2- §. Transport masalasini potensiallar usuli bilan yechish

Faraz qilaylik, transport masalasi quyidagi jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin:

5- jadval

Ishlab chiqarish korxona-lari	Korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna)	Iste’molchilar va ularning talabi				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
		b_1	b_2	b_3	...	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

Bu jadval „shimoliy-g‘arb burchak“ usulidan foydalangandan keyin boshlang‘ich tayanch reja bo‘lsin, x_{ij} — taqsimlangan yuklar (zaxiralar) c'_{ij} – yuklar bo‘lmagan, ya’ni to‘ldirilmagan kataklar, c_{ij} lar esa to‘ldirilgan kataklar bo‘lsin.

Boshlang‘ich tayanch rejaga asosan transport xarajatlari quyidagicha bo‘ladi:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m3}x_{m3} + \cdots + c_{mn}x_{mn}.$$

5- jadvalga $A_1, A_2, ..., A_m$ korxonalarga, mos ravishda, $u_1, u_2, ..., u_m$ shartli variantalar kiritamiz (potensiallar), $B_1, B_2, ..., B_n$ iste’molchilarga, mos ravishda, v_1, v_2, ..., v_n — shartli variantalar (potensialar) kiritamiz. Demak, A_i korxonaning potensiali (shartli variantasi) u_i miqdor, B_j iste’molchining potensiali (shartli variantasi) v_j miqdor $(i = \overline{1, m};\ \ j = \overline{1, n})$.

Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi:

Kor-xona-lar	Korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna)	Iste'molchilar va ularning talabi					
		B_1	B_2	B_3	...	B_n	u_i variant sharti
		b_1	b_2	b_3	...	b_n	
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	u_1
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	u_2
A_3	a_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}	u_3
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	u_m
v_j	Shartli variant	v_1	v_2	v_3	...	v_n	

u_i va v_j sonlarini shunday tanlab olish kerakki, ularning yig'indisi to'ldirilgan katakdagi tarif c_{ij} ga teng bo'lsin. U holda yuqoridagi jadvalga asosan quyidagi $n+m-1$ ta, hozircha noma'lum bo'lgan, u_i va v_j larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{ll} u_1+v_1=c_{11}, & u_3+v_2=c_{32}, \\ u_1+v_2=c_{12}, & u_3+v_3=c_{33}, \\ u_1+v_3=c_{13}, & \\ u_2+v_3=c_{23}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2+v_3=c_{23}, & u_m+v_n=c_{mn}. \end{array}\right\}$$

Bu sistemada no'malumlar soni $n+m$ ta. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birontasini ixtiyoriy qiymatga tenglashtirib (masalan 0 ga) olib, qolgan u_i va v_j larni birin-ketin topamiz.

Endi bo'sh kataklar uchun jadvalga asoslanib, yuqoridagi kabi chiziqli tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + v_3 = c'_{13}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 + v_n = c'_{1n}, \\ u_2 + v_1 = c'_{21}, \\ u_2 + v_2 = c'_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m + v_1 = c'_{n1}, \\ u_m + v_2 = c'_{m2}. \end{array}\right\}$$

c'_{ij} lar *bilvosita tariflar* deyiladi.

u_i va v_j larning qiymatlarini qo'yib, bilvosita tariflar c'_{ij} ni hisoblab chiqamiz.

Agar birinchi programmada quyidagi hamma ayirmalar $c'_{ij} - c_{ij} < 0$ bo'lsa, u holda bu rejaga optimal reja bo'ladi.

Agar ayirmaning birortasi $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ bo'lsa u holda optimal yechim hali topilmagan bo'ladi.

Demak, birinchi programmani yaxshilash kerak.

Buning uchun $\max\{(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\}$ topib olamiz va shu zanjirni taqsimot usuli bilan o'zgartiramiz (yaxshilaymiz). Natijada yangi reja hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan reja uchun transport xarajatlarini hisoblab chiqamiz.

Ikkinchi rejaga ham potensiallar usulini qo'llaymiz. Potensiallar usulini qo'llash jarayoni barcha $c'_{ij} - c_{ij} < 0$ bo'lguncha davom ettiriladi.

Shunday qilib, potensiallar usuli yordamida boshlang'ich tayanch rejadan boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi tayanch rejaga o'tamiz va chekli sondagi almashtirishlardan (iteratsiyalardan) so'ng masalaning optimal yechimini topamiz.

Potensiallar usulining algoritmi quyidagilardan iborat:

1. Shimoliy-g'arb burchak yoki minimal xarajatlar usulini qo'llab, boshlang'ich tayanch reja (birinchi bazisli yechim) topiladi.

2. Ishlab chiqaruvchilar va iste'molchilarning potensiallari hisoblanadi (u_i va $v_j$lar).

3. c'_{ij} bilvosita tariflar topiladi.

4. Hamma $c'_{ij} - c_{ij}$ ayirmalar hisoblaniladi. 1) Agar $c'_{ij} - c_{ij} \leq 0$ bo'lsa, tuzilgan reja optimal reja bo'ladi va bu rejaga asosan transport xarajatlari hisoblanadi. 2) $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ bo'lsa u holda bularning ichidan $\max\{(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\}$ ni topib olib, bu zanjirni yaxshilaymiz. Ya'ni yangi bazisli o'zgaruvchi x_{kl} ni kiritamiz, yangi tayanch reja tuzamiz.

Masala. Taqsimot usulidagi masalaning birinchi tayanch rejasi berilgan bo'lsin. Bu jadvalga shartli variantlarni kiritib, quyidagi ko'rinishda yozamiz.

7- jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxirasi (tonna)	Tumanlar va ularning tovarlarga talabi. Birinchi tayanch reja (1 tn.hisobi).			
		Katta-qo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200	
A_1	400	100 350	60 50	110	u_1
A_2	600	40	70 400	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_1 = 76000$ t.km — transport xarajati.

To'ldirilgan kataklar uchun quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 100, \\ u_1 + v_2 &= 60, \\ u_2 + v_2 &= 70, \\ u_2 + v_3 &= 50. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemada 5 ta no'malum bor. Shuning uchun noma'lumlardan birortasini 0 ga tenglashtiramiz. Faraz qilaylik, $u_1 = 0$ bo'lsin. U holda, sistema quyidagi yechimlarga ega:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= 100, \\ v_2 &= 60, \\ u_2 &= 10, \\ v_3 &= 40. \end{aligned}\right| \qquad \text{(A)}$$

Bo‘sh kataklar uchun u_i va v_j potensiallarga asoslanib, quyidagi sistemani tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_3 &= c'_{13}, \\ u_2 + v_1 &= c'_{21}. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaga (A) yechimlarni qo‘ysak, bilvosita tariflar kelib chiqadi:

$$c'_{13} = 110, \; c'_{21} = 40.$$

Endi $c'_{ij} - c_{ij}$ ayirmalarni hisoblaylik:

$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0,$$
$$c'_{21} - c_{21} = 110 - 40 = 70 > 0.$$

$c'_{21} - c_{21} = 70 > 0$ bo‘lgani uchun bu zanjirni yaxshilaymiz. Oldin zanjirning ko‘rinishini chizib olamiz:

$$\begin{array}{ccc} 350 & & 50 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{-} & & \multicolumn{1}{c|}{+} \\ \multicolumn{1}{|c}{} & \Delta_{21} = -110 & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \multicolumn{1}{|c}{+} & & \multicolumn{1}{c|}{-} \\ \hline 0 & & 400 \end{array}$$

Bu zanjirdagi yuklarni 1-§ da qaytadan taqsimlagan edik. Uning ko‘rinishi quyidagicha:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 400 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{-} & & \multicolumn{1}{c|}{+} \\ \multicolumn{1}{|c}{} & & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \multicolumn{1}{|c}{+} & & \multicolumn{1}{c|}{-} \\ \hline 350 & & 50 \end{array}$$

Yuqoridagi o‘zgarishlarga asoslanib, tayanch rejaning jadvalini tuzamiz:

Bazalar	Bazalardagi yuk zaxirasi	Iste'molchilar va ularning talabi			
		Katta-qo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200	u_i
A_1	400	100	60 400	110	u_1
A_2	600	40 350	70 50	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_2 = 51500$ t. km — transport xarajatlari.

To'ldirilgan kataklar uchun quyidagi sistemani u_i va v_j potensiallarni qo'llab tuzamiz.

Yuqoridagi kabi $u_1 = 0$ deb olsak,

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 60,\\ u_2 + v_1 &= 40,\\ u_2 + v_2 &= 70,\\ u_2 + v_3 &= 50. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u_1 &= 0,\\ u_2 &= 60,\\ u_2 &= 10,\\ u_1 &= 30,\\ v_3 &= 40. \end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Bo'sh kataklar uchun $u_i + v_j = c'_{ij}$ larni hisoblaymiz:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= c'_{11},\\ u_1 + v_3 &= c'_{13}. \end{aligned}\right\}$$

u_i va v_j larni (B) dan bu sistemaga qo'ysak, $c'_{11} = 30, c'_{13} = 40$ kelib chiqadi.

Endi $c'_{ij} - c_{ij}$ ayirmalarni hisoblaylik:

$$c'_{11} - c_{11} = 30 - 100 = -70 < 0,$$
$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0.$$

Bu reja optimal reja hisoblanadi, chunki $c'_{ij} - c_{ij} < 0$.

Optimal yechimlar (tonna hisobida):

$$x_{11} = 0, \quad x_{21} = 330,$$
$$x_{12} = 400, \quad x_{22} = 50,$$
$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 200.$$

Bu yechim uchun

$$f_{\text{tayanch}} = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40x_{21} + 70x_{22} +$$
$$+50x_{23} = 51500 \text{ t.km},$$
$$f_1 - f_{\text{tayanch}} = 76000 - 51500 = 24500 \text{ t.km}.$$

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi transport masalalarini yeching. (**3.1—3.8**).

Masala. Viloyatning uchta A_1, A_2 va A_3 korxonalarida bir jinsli mahsulotlar ishlab chiqarilib, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni beshta B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 iste'molchilarga jo'natish kerak. A_1, A_2 va A_3 korxonalarda, mos ravishda, a_1, a_2, a_3 tonna bir jinsli ishlab chiqarilgan mahsulotni B_1, B_2, B_3, B_4 va B_5 iste'molchilarga, mos ravishda, b_1, b_2, b_3, b_4 va b_5 tonnadan jo'natish kerak.

Ishlab chiqarish korxonalaridan iste'molchilargacha bo'lgan masofalar quyidagi T matritsada berilgan:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}.$$

Ishlab chiqarish korxonalaridan mahsulotlarni iste'molchilarga tashish xarajatlarining minimal variantini toping:

3.1. $a_1 = 330, \quad b_1 = 220,$
$a_2 = 270, \quad b_2 = 170,$
$a_3 = 350, \quad b_3 = 150,$
$b_4 = 150,$
$b_5 = 200.$

$$T = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 34 \end{pmatrix}.$$

3.2. $a_1 = 260,\quad b_2 = 70,$
$a_2 = 150,\quad b_3 = 130,$
$a_3 = 200,\quad b_4 = 110,$
$b_1 = 100,\quad b_5 = 200.$

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 12 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 68 & 62 \end{pmatrix}.$$

3.3. $a_1 = 200,\quad b_2 = 130,$
$a_2 = 350,\quad b_3 = 100,$
$a_3 = 300,\quad b_4 = 190,$
$b_1 = 270,\quad b_5 = 110.$

$$T = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 20 & 10 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}.$$

3.4. $a_1 = 250,\quad b_2 = 135,$
$a_2 = 300,\quad b_3 = 120,$
$a_3 = 200,\quad b_4 = 150,$
$b_1 = 135,\quad b_5 = 210.$

$$T = \begin{pmatrix} 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.5. $a_1 = 300,\quad b_2 = 150,$
$a_2 = 350,\quad b_3 = 190,$
$a_3 = 200,\quad b_4 = 150,$
$b_1 = 110,\quad b_5 = 250.$

$$T = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

3.6. $a_1 = 170,\quad b_2 = 110,$
$a_2 = 250,\quad b_3 = 160,$
$a_3 = 230,\quad b_4 = 90,$
$b_1 = 150,\quad b_5 = 140.$

$$T = \begin{pmatrix} 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \\ 49 & 26 & 27 & 16 & 38 \\ 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \end{pmatrix}.$$

3.7. $a_1 = 200,\quad b_2 = 110,$
$a_2 = 250,\quad b_3 = 100,$
$a_3 = 200,\quad b_4 = 120,$
$b_1 = 130,\quad b_5 = 190.$

$$T = \begin{pmatrix} 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \end{pmatrix}.$$

3.8. $a_1 = 300,\quad b_2 = 195,$
$a_2 = 200,\quad b_3 = 200,$
$a_3 = 350,\quad b_4 = 140,$
$b_1 = 145,\quad b_5 = 170.$

$$T = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \end{pmatrix}.$$

IV BOB. BUTUN SONLI PROGRAMMALASH

Bizga quyidagi n no‘malumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

va maqsad funksiyasi

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

berilgan bo‘lsin.

Bu yerda x_j — ishlab chiqarilgan mahsulotlar birligi. x_j o‘zgaruvchilar har qanday musbat son bo‘lishi mumkin.

Chiziqli programmalashning ko‘pgina masalalarini yechganda x_j o‘zgaruvchilarga butun sonli bo‘lish sharti qo‘yiladi. Bunday masalalar *butun sonli programmalash masalalari* deb ataladi. Butun sonli programmalash materiallarni optimal bichish, transport masalalarini marshurutlarga optimal taqsimlash, bo‘linmaydigan mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalarning ishini optimal rejalashtirish kabi masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Yuqoridagilarni yaxshi anglab olish uchun quyidagi masalani ko‘rib chiqamiz.

1- §. Marketolog haqidagi masala

Faraz qilaylik, A_i shaharda yashovchi marketolog n ta $A_1, A_2, ..., A_n$ shaharlarda bir martadan bo‘lib, minimal vaqt ichida A_i shaharga qaytib kelishi kerak bo‘lsin. Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida marketologning A_i shahardan A_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini $t_{ij}(i, j = \overline{1, n})$ bilan hamda uning har bir A_i shahardan A_j shaharga borishi ko‘rsatgichini x_{ij} bilan belgilab olsak, u holda marketolog A_i shahardan A_j shaharga borsa $x_{ij} = 1$, bormasa, $x_{ij} = 0$ bo'ladi.

Yuqoridagi masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (j = \overline{1,n}), \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad (i = \overline{1,n}), \tag{4.2}$$

$$x_{ij} = 0, \quad \text{yoki } x_{ij} = 1. \tag{4.3}$$

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}. \tag{4.4}$$

Butun sonli programmalash masalalaridagi x_{ij} larning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar *to'liq butun sonli programmalash masalalari*, agar ularning ma'lum bir qismi uchun bu shart qo'yilsa, *qisman butun sonli programmalash masalalari* deyiladi.

Agar (4.3) ko'rinishdagi shartlar butun sonli programmalash masalalaridagi o'zgaruvchilarga qo'yilgan bo'lsa, u holda bunday masala Bul programmalash masalasi deyiladi.

Butun sonli programmalash masalalarni yechish uchun ularning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan. Ulardan biri amerika olimi R. Gomori tomonidan yaratgan bo'lib, optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi.

R. Gomori usuli quyidagidan iborat.

Oldin chiziqli programmalash masalasi simpleks usul bilan yechiladi.

Agar $x_i (i = \overline{1,n})$ yechim butun sonli bo'lsa, u butun sonli programmalash masalasining ham yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik, p_{i-1} masala simpleks usul bilan yechilgan va uning yechimi x_{i-1} butun bo'lish shartini qanoatlantirmaydi. Yuqoridagilarni hisobga olib, quyidagilarni belgilab olaylik:

$\{a\} - x_i = a$ yechimning kasr qismi;

k — oxirgi simpleks jadvaldagi erkli o'zgaruvchilarning indeksi;

$s - \{a_{s0}\}$ larning jadvaldagi eng kattasi joylashgan satr.

U holda R. Gomori x_i noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va „*kesuvchi tenglama*“ deb ataluvchi qo‘shimcha tenglama tuzadi.

Bu holda to‘liq butun sonli masalani yechish uchun Gomorining I kesimini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \le 0. \tag{4.5}$$

Qisman butun sonli masalani yechish uchun Gomorining II kesimini (bu kesimni to‘liq butun sonli masalani yechish uchun ham qo‘llasa bo‘ladi) quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\{a_{s0}\} - \sum \{a_{sk}\} x_k \le 0, \tag{4.6}$$

bu yerda a_{sk} koeffitsiyentlar quyidagi nisbatlarda topiladi.

1) x_k lar butun son bo‘lishi talab qilinmagan holda

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{агар} \quad a_{sk} \ge 0. \\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1-\{a_{s0}\}}\{a_{sk}\}, & \text{агар} \quad a_{sk} < 0; \end{cases}$$

2) x_k larga butun son bo‘lishi talab qilingan holda

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{агар} \quad \{a_{sk}\} \le \{a_{s0}\}, \\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1-\{a_{so}\}}(1-\{a_{sk}\}, & \text{агар} \quad \{a_{sk}\} > \{a_{so}\}. \end{cases}$$

To‘liq yoki qisman butun sonli masalalarni yechish uchun jadvallarni ketma-ket almashtirish jarayonlarini bajarish quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1) p_{i-1} masala yechilib, optimal yechimlar topiladi;

2) agar x_{i-1} yechimlar butun sonli bo‘lsa, simpleks jadvallar tuzish to‘xtatiladi;

3) agar p_{i-1} masalada x_{i-1} yechimlar butun sonli bo‘lmasa, u holda Gomorining I yoki II kesimlari tuziladi;

4) p_{i-1} masalaga 3) holdagi shartlar to‘ldirilib, p_i masala tuziladi va yana 1) holni bajarishga to‘g‘ri keladi.

2- §. To'la butun sonli programmalash masalalari

1. Quyidagi shartlarda butun sonli masalani yeching:

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + y_1 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,$$

bu yerda $x_k (k = 1, 2)$ lar butun sonlar.

Yechish. Masalani dastlab butun sonli yechimlari bo'lishini talab qilmasdan simpleks usul bilan yechamiz:

1- simpleks jadval

№	$c_б$	Bazisli o'zgaruv-chilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1	0	y_1	2	–1	2	1	0	1
2	0	y_2	6	3	2			3
3		F	$F = 0$	–1	–4	0	0	

2- simpleks jadval

№	$c_б$	Bazisli o'zgaruv-chilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1	4	x_1	1	–1/2	1	1/2	0	
2	0	y_1	4	2	0	–1	1	
3		F	$F = 4$	–3	0	2	0	

3- simpleks jadval

№	$c_б$	Bazisli o'zgaruv-chilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	
2	1	x_1	2	1	0	–1/2	1/2	
3		F	$F = 7$	0	0	5/4	3/4	

3- simpleks jadvaldan ko‘rinib turibdiki, masalaning optimal yechimi $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ bo‘ladi. Bu yechimlar ichida $x_2 = 3/2$ kasr son. Shuning uchun yuqoridagi 3 va 4 hollarni qo‘llab, quyidagi masalani tuzamiz. 3- simpleks jadvalda yagona 1- satrda kasr yechimlar bor (birinchisi $-a_{i0}$, $s = 1$).

U holda Gomorining birinchi kesimini quydagicha yozamiz:

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{\frac{3}{8}\right\} y_2 + \left\{\frac{1}{8}\right\} y_2\right) \le 0 \text{ yoki}$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8} y_1 + \frac{1}{8} y_2\right) \le 0.$$

Bu tengsizlikka bazisli o‘zgaruvchi y_3 ni kiritib, quyidagi tenglama ko‘rinishida yozamiz:

$$\frac{3}{8} y_1 + \frac{1}{8} y_2 - y_3 = \frac{1}{2}.$$

Bu tenglamani oldingi 2- tenglamalar safiga birlashtirib yozsak, u holda $\overline{P_1}$ masala hosil bo‘ladi.

Oxirgi simpleks jadval $\overline{P_1}$ masalasi uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $\frac{3}{8} y_1 + \frac{1}{8} y_2 - y_3 = \frac{1}{2}$. Tenglamada y_3 o‘zgaruvchi bazisli o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin, lekin uning oldidagi koeffitsiyenti manfiy son. Shuning uchun p_1 masala uchun tuzilgan 4- jadvaldagi yechimlar optimal yechimlar bo‘la olmaydi, ($y_3 = -1/2$). Demak, 4- simpleks jadvalni yana almashtirish (yaxshilash) kerak.

4- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o‘zgaruvchilar	O‘zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	0	4	12
2	1	x_1	2	1	0	−1/2	1/2	0	0	0
3	0	y_3	1/2	0	0	3/8	1/8	−1	4/3	4
4		F	$F = 7$	0	0	5/4	3/4	0	0	0

4- jadvalning 3- satrini kalitli satr deb tanlab (3- va 4- shartlarni qo'llab), $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$ ni topamiz. U holda $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$ joylashgan uchinchi ustun kalitli ustun bo'ladi.

Agar bunday ustun topilmasa, u holda kalitli ustun deb tanlangan satrdagi eng kichik elementga ega bo'lgan ustun tanlab olinadi (ya'ni $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$). Bundan keyin y_3 ni bazisga kiritib, 5- simpleks jadvalni tuzish mumkin. Bu yerda tanlangan satr va ustun yuqoridagi talabga javob beradi.

5- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1	4	x_2	1	0	1	0	0	1		
2	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	–2/3		
3	0	y_1	4/3	0	0	1	1/3	–8/3		
4		F	16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Bu jadvaldagi yechimlar ham optimal yechimlar bo'lib, quyidagilarga teng:

$$x_1 = 4/3,\ x_2 = 1,\ y_1 = 4/3,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0.$$

Lekin bu yechim ham butun sonli emas. Shuning uchun p_2-masalani tuzishga kirishamiz. Mos kesimlar quyidagicha bo'ladi:

$$\left\{\frac{4}{3}\right\} - \left(\left\{\frac{1}{3}\right\}y_2 + \left\{\frac{-2}{3}\right\}y_3\right) \le 0.$$

Bu yerda

$$\left\{\frac{4}{3}\right\} = \frac{1}{3},\ \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} \text{ va } \left\{\frac{-2}{3}\right\} = \frac{-2}{3} - \left[\frac{-2}{3}\right] = \frac{-2}{3} - (-1) = \frac{1}{3}$$

bo'lgani uchun kesuvchi tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 - y_4 = \frac{1}{3},$$

u holda 5- jadvaldagi 4- satrni bu tenglamaga asosan yozsak, quyidagi jadval hosil bo'ladi:

6- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	4	x_2	1	0	1	0	0	0	0	4	
2	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	—1/3	0	4	1
3	0	y_1	4/3	0	0	1	1/3	—8/3	0	1	
4		y_4	1/3	0	0	0	1/3	1/3	—1		
5		F	F=16/3	0	0	0	1/3	10/3			

Bu jadvaldan kalitli ustun, kalitli satr va kalitli sonni topib almashtirsak (yaxshilasak), quyidagi jadval hosil bo'ladi:

7- simpleks jadval

№		Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1	4	x_2	1	0	1	0	0	1	0		
2	1	x_1	1	1	0	0	0	—1	1		
3	0	y_1	1	0	0	1	0	−3	1		
4		y_2	1	0	0	0	1	1	−3		
5	indeks satri	F	F=5	0	0	0	0	3	1		

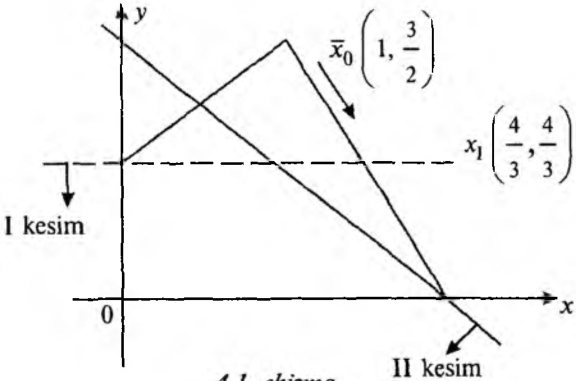
Indeksi satrida hamma sonlar butun sonlar bo'lgani uchun bu jadval optimal yechimni beradi:

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ y_1 = 1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$ va

$$f_{max} = 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 =$$
$$= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 5.$$
$$f_{max} = 5.$$

Agar indeks satrida manfiy sonlar bo‘lsa, simpleks jadvallar tuzish davom ettirilardi.

Masalaning geometrik izohi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi. Oldin p_0- masalaning optimal yechimi shaklini chizamiz.



4.1- chizma.

p_1- masalani yechganda I kesimni quyidagi tengsizlik orqali kiritgan edik: $\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 \geq \frac{1}{2}$. Bu tengsizlikka dastlabki tengsizliklarni qo‘llab, y_1 va y_2 larni qisqartirsak, $x_2 \leq 1$ kelib chiqadi. Shuning uchun bu tengsizlikka $x_2 = 1$ to‘g‘ri chiziq mos keladi. $x_2 = 1$ chiziq butun sonli bo‘lmagan optimal yechimlarni $x_0(1; \frac{3}{2})$ ajratadi, lekin hamma butun sonli yechimlar sohasini (0; 1), (1; 1), (1; 0), (2; 0) saqlab qoladi. p_1- masalada yangi optimal yechimlar: $\bar{x}_1(4/3,\ 1,\ 0,\ 4/3)$ sohasi hosil bo‘ladi. Endi $\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4 \geq \frac{1}{2}$ – II kesimni kiritib, p_2- masalani tuzamiz. Bu masaladan yuqoridagi kabi bazisli o‘zgaruvchilarni qisqartirsak, $x_1 = x_2 \leq 2$ hosil bo‘ladi. Yangi soha butun sonli optimal soha bo‘ladi (4.1- chizmaga qarang).

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi masalalarning to'liq butun sonli yechimlarini toping va geometrik izohini (mumkin bo'lgan joyda) bering (bu yerda $x_k \geq 0$) :

4.1. $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 36, \\ x_2 &\leq 13, \end{aligned}\right\}$

$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max.$

4.2. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10, \end{aligned}\right\}$

$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max.$

4.3. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 5, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 2, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 + x_2 \to \max.$

4.4. $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 &= 24, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 \to \max.$

4.5. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 &= 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 &= 6, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 \to \max.$

4.6. $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_4 &= 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5, \\ 3x_1 + x_4 + x_5 &= 4, \end{aligned}\right\}$

$F = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max.$

4.7. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 8, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max.$

4.8. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min.$

4.9. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9, \end{aligned}\right\}$

$F = 2x_1 + 2x_2 + 10 \to \max.$

4.10. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 + x_2 \to \max.$

4.11. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_6 &= 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 &= 6, \end{aligned}\right\}$

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 -$
$- x_5 - x_6 \to \min.$

4.12. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8, \\ x + 4x_2 + x_4 &= 10, \end{aligned}\right\}$

$F = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \to \max.$

3- §. Qisman butun sonli programmalash masalalari

Quyidagi shartlarda qisman butun sonli masalani yeching:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 0,16x_1 + x_2 \le 1,9, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0$$

va x_k butun sonlar $(k = 1;2)$.

$$f = x_1 + 8x_2 \to \max .$$

Yechish. Bu masala to'liq butun sonli masala emas, chunki sistemadagi ikkinchi tengsizlikni kanonik ko'rinishga keltirsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi: $0,16x_1 + x_2 + y_2 = 1,9$. Bu tenglamada y_2 ning butun qiymatlarida x_1 va x_2 butun sonli qiymatlarni qabul qilmaydi. Shuning uchun bu masala *qisman butun sonli masala* deyiladi. Masalani yechish uchun oldin p_0 masalani simpleks usulni qo'llab yechamiz.

1- simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	Bazisli yechimlar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1	0	y_1	9	1	1	1	0	9
2	0	y_2	1,9	0,16	1	0	1	1,9
3	indeks satri		$F=0$	−1	−8	0	0	

Bu jadvalning indeks satrida manfiy sonlar bo'lgani uchun simpleks usulini qo'llab, ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

2- simpleks jadval

№	c_δ	Bazisli yechimlar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1	0	y_1	7,1	2,84	0	1	−1	
2	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	
3	indeks satri	F	$F=15,2$	0,28	0	0	8	

Ikkinchi satrda manfiy sonlar yo'q. Demak, birinchi almashtirishdan (yaxshilashdan) keyin optimal yechimlar quyidagidan iborat:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1{,}9;\ y_1 = 7{,}1,\quad y_2 = 0.$$

Optimal yechimlar ichida $y_1 = 7{,}1$ butun sonli yechim emas. Shuning uchun p_1- masalani tuzish kerak. (6.6) formuladan foydalanib, 2- satrga asoslanib ($s = 2$), p_1 masala uchun Gomorining kesimini tuzamiz. U holda jadvaldan quyidagi hosil bo'ladi:

$$\{a_{20}\} - (a_{21}x_1 + a_{24}y_2) \geq 0.$$

Yuqorida ko'rdikki, x_1 butun sonli o'zgaruvchi va $\{a_{21}\} < \{a_{20}\}$ bo'lgani uchun

$$\{a_{21}\} < \{a_{21}\} = 0{,}16. \qquad (4.7)$$

(4.7) tenglikdan foydalanib, a_{24} ni topamiz (1- kesimdan foydalanib). y_2 ga butun sonli bo'lishi talab qilinmagani va $a_{24} > 0$ bo'lgani uchun yuqoridagi kesimdan foydalansak, bu kesim quyidagicha bo'ladi: $a_{24} = 1$,

$$0{,}16x_1 + y_2 - y_3 = 0{,}9.$$

Bu tenglamani yuqoridagi jadvalga kiritsak p_1- masala chiqadi.

p_1- masalada simpleks jadvallarni ikki marta almashtirgandan keyin optimal yechim quyidagicha bo'ladi: $x_1 = 8/3$, $x_2 = 1$; $y_1 = 0$, $y_2 = 71/150$. Optimal yechim ichida birinchi satrdagi $x_1 = 8/3$ butun son emas. Shuning uchun yuqoridagi qoidalardan foydalanib, yangi kesimni tuzib, butun optimal yechimni topamiz

p_1- masala uchun tuzilgan simpleks jadvallar quyidagicha:

1- simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1	0	y_1	7,1	2,84	0	1	−1	0	0
2	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	0	1,9
3	0	y_3	0,9	0,16	0	0	1	−1	0,16
4	indeks satri		$F = 15{,}2$	0,28	0	0	8	0	

2- simpleks jadval

№	$\overline{C}_\sigma$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1	0	y_1	8	3	0	1	0	−1	8/3
2	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0
3	0	y_2	0,9	0,16	0,16	0	0	1	90/16
4	indeks satri		$F=8$	−1	0	0	0	8	

3- simpleks jadval

№	$\overline{C}_\sigma$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1	1	y_1	8/3	1	0	1/3	0	−1/3	
2	8	x_2	1	0	1	0	0	1	
3	0	y_2	71/150	0	0	−4/7	1	71/75	
4	indeks satri	F	F=32/3	0	0	1/3	0	23/3	

3- jadvalning birinchi satridan ko'rinadiki, $x_1 = 8/3$ optimal yechim butun sonli emas. Shuning uchun birinchi satrga asoslanib Gomorining kesimini tuzamiz:

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} - (a_{13}y_1 + a_{15}y_3) \geq 0, \text{ bu yerda}$$

$$a_{12} = \frac{1}{3}, \quad a_{15} = \frac{\left\{\frac{8}{3}\right\}}{1-\left\{\frac{8}{3}\right\}}\{a_{15}\} = \frac{2}{3}.$$

Yuqoridagilardan quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$y_1 + 2y_3 - y_4 = 2.$$

Bu tenglamani 3- jadvalga kiritsak, p_2- masala hosil bo'ladi. p_2- masalani simpleks usul bilan yechamiz.

1- simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	Bazisli o‘zgaruvchilar	O‘zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	8	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	0	0	8
2	8	x_2	1	0	1	0	0	0	0	0
3		y_3	71/150	0	0	−4/75	1	71/75	0	0
4		y_4	2	0	0	1	0	2	−1	2
5	ind. satr		$F = 32/3$	0	0	1/3	0	23/3	0	0

2- simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	Bazisli o‘zgaruvchilar	O‘zgarmaslar ustuni, a_{i0}	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1	1	x_1	2	1	0	0	0	−1	1/3	0
2	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0	0
3		y_3	0,58	0	0	0	1	0,84	−4/75	0
4		y_4	2	0	0	1	0	2	0	0
5	ind. satr		$F = 10$	0	0	0	0	7	1/3	0

Ikkichi simpleks jadvaldan ko‘rinadiki, qisman optimal yechimlar quyidagiga teng:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1\ y_3 = 0{,}58,\ y_4 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0.$$

Bu yechimlar ichida $y_3 = 0{,}58$, lekin bu yechimni ham to‘liq butun songa keltirish mumkin. Xususan, sistemadagi 2- tengsizlikni 100 ga ko‘paytirib, bazisli o‘zgaruvchi kiritsak, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi: $16x_1 + 100x_2 + y_3 = 190$. Bu tenglamadan ko‘rinib turibdiki, y_3 butun bo‘lganida x_1 va x_2 lar butun qiymatlarida butun qiymat qabul qilishi mumkin.

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi shartlarda qismanbutun sonli masalani yeching (shart bajarilganda).

4.13. $$\left.\begin{array}{l} -2{,}9x_1 + 6x_2 \le 17{,}4, \\ 3x_1 - x_2 \le 1, \end{array}\right\}$$
x_1 va x_2 – butun sonlar,
$F = 6x_1 + x_2 \to \max$.

4.14. $$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 8x_2 \le 24, \end{array}\right\}$$
x_1 – butun son,
$F = x_1 \to \max$.

4.15. $$\left.\begin{array}{l} 0{,}5x_1 + x_2 \le 1{,}75, \\ x_1 + 0{,}3x_2 \le 1{,}5, \end{array}\right\}$$
x_1 va x_2 – butun son,
$F = 0{,}25x_1 + x_2 \to \max$.

4.16. $$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{array}\right\}$$
x_1 va x_2 – butun sonlar,
$F = x_1 + x_2 \to \max$.

V BOB. PARAMETRIK PROGRAMMALASH

Xalq xo'jaligini boshqarish va rejalashtirish jarayonida iqtisodda quyidagi xususiyatlarga ega bo'lgan masalalarga duch kelinadi:

1) izlanayotgan miqdorlarning juda ko'p parametrlarga bog'liqligi.

2) yechilayotgan masala cheksiz yechimga ega bo'lib, ulardan optimal yechimni tanlab olish.

Optimalashtirish masalalarini chiziqli programmalash usullari bilan to'liq yechish uchun bu masalalarda qatnashayotgan koeffitsiyentlar aniq qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilinadi. Lekin amalda ko'pchilik masalalarda bu koeffitsiyentlarning taqribiy qiymatlari yoki ularning mavjud bo'lish oralig'i ma'lum bo'ladi. Shuning uchun chiziqli programmalash masalasining optimal yechimi har bir qatnashayotgan koeffitsiyentning mavjud bo'lish oralig'ida o'zgarishiga qanchalik bog'liqligiga, ya'ni masaladagi koeffitsiyentlarning o'zgarishi uning yechimlar to'plamiga qanday ta'sir qilishini aniqlash masalasini o'rganish talab etiladi.

Ana shunday qo'yilgan masalalarni hal qilish parametrik programmalashning predmetini tashkil etadi.

1- §. Parametrik programmalash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Chiziqli programmalashning asosiy masalasini ko'rib chiqaylik:

$$AX = B, \text{ bu yerda } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$X \geq 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad F(X) = CX \to \max.$$

Keltirilgan masalada A matritsaning a_{ij} elementlari, B va C vektorlarning tarkibiy qismlari qandaydir t parametrga bog'liq holda o'zgarishi mumkin. Bunday masalalar *parametrik programmalash masalalari* deyiladi.

Agar faqat C vektorning tarkibiy qismlari t parametrga bog'liq bo'lsa, ya'ni $C' = C' + C''t$, $t \in [\alpha, \beta]$, berilgan masala *maqsad funksiyasi parametriga bog'liq bo'lgan masala* deyiladi.

Agar B vektorning tarkibiy qismlari t parametrga bog'liq bo'lsa, ya'ni $B = B' + tB''$, $t \in [\alpha', \beta']$, u holda bu masala *ozad hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala* deyiladi. Bu yerda α, β, α', β' ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Demak, t parametrning o'zgarish sohasida F maqsad funksiyasining maksimum (minimum) qiymatini topish kerak.

Agar bordi-yu maqsad funksiyasining koeffitsiyentlari va ozod hadning tarkibiy qismlari t parametrga chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b'_i + b''_i t \quad (i = \overline{1, m}), \tag{5.1}$$

$$X_i \geq 0, \ (i = \overline{1, n}) \tag{5.2}$$

shartlarda maqsad funksiyasi

$$F = \sum_{i=1}^{n} (c'_i + c''_i t) x_i \tag{5.3}$$

ning maksimum (minimum) qiymatini $t \in [a, b]$ oraliqda topish kerak.

Yuqorida ko'rilgan masalalarni umumlashtiruvchi masala parametrik programmalashning *umumiy masalasi* deyiladi. Boshqacha aytganda, quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij} t) x_i = b'_j + b''_j t \quad (j = \overline{1, m}),$$

$$X_j \geq 0, \ (i = \overline{1, n})$$

t ning $[\alpha; \beta]$ oraliqdagi o'zgarish sohasida $F = \sum_{i=1}^{n} (c'_i + c''_i t) x_i$

ning maksimum (minimum) qiymatini topish *parametrik programma-lashning umumiy masalasi* deyiladi.

Yuqoridagi kabi masalalarni chiziqli programmalash usullari bilan yechish mumkin.

Kelgusida bunday masalalarni to'la o'rganamiz.

Endi (5.1) — (5.3) masalaning geometrik talqinini ko'ramiz.

Faraz qilaylik (5.1) sistemaning musbat yechimlar to'plami (qavariq yechimlar to'plami: ko'pburchak, ko'pyoq uchlarining koordinatalari to'plami) bo'sh to'plam bo'lmasin va bu nuqtalar soni birdan ortiq bo'lsin. U holda berilgan t parametrning $[\alpha; \beta]$ da joylashgan qavariq to'plamdagi ko'pyoq uchlarining koordinatalarida (5.3) maqsad funksiyasini maksimum qiymatga erishtiradigan nuqtaning koordinatalarini topishga to'g'ri keladi.

Bu nuqtani topish uchun t ga $t = t_0$ qiymat berib, masalani chiziqli programmalashning geometrik uslubi bilan yechamiz. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1. Ko'pyoq uchlari koordinatalarining birortasida F optimal qiymat qabul qiladi.

2. $t = t_0$ da yechish mumkin bo'lmasligi aniqlanadi.

Agar birinchi shart bajarilsa, u holda F maqsad funksiyasi maksimum qiymatga ega bo'ladigan nuqtani topamiz.

Endi t ning yangi $t = t_1$ qiymatini olamiz va yana yuqoridagi kabi yechishni davom ettiramiz. Chekli qadamlardan keyin t parametrning $[\alpha, \beta]$ qiymatlarida F maqsad funksiyasining optimal rejasi topiladi.

Yuqoridagi qoida va formulalardan foydalanib, quyidagi masalalarni yechamiz.

5.1- masala. Korxonada ikki tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga ketadigan xomashyo me'yori va xomashyo zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan:

Xomashyo xillari	Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori		Xomashyo zaxirasi
	1- tur	2- tur	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Shu bilan birga birinchi tur mahsulotlarni realizatsiya qilganda narxi 2 so'mdan 12 so'mgacha, ikkinchi xil mahsulotlarni realizatsiya qilganda narxi 13 so'mdan 3 so'mgacha o'zgarib, bu o'zgarishlar quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi: $c_1 = 2 + t,\ c_2 = 13 - t,\ 0 \le t \le 10.$

Ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi yuqorida ko'rsatilgan oraliqlarda o'zgarganda ishlab chiqarishdan maksimum daromad olish rejasini toping?

Yechish. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulotdan x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulotdan x_2 birlik ishlab chiqarish kerak bo'lsin. U holda $t \in [0;\ 10]$ oraliqda o'zgarganda quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36. \end{cases} \qquad (5.4)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (5.5)$$

shartlarda

$$F(x_1, x_2) = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 \qquad (5.6)$$

ning maksimum qiymatini topish talab etiladi. Endi (5.4)—(5.6) masalaning yechimini topish uchun (5.4) sistemaga asoslanib, yechimlar to'plamini izohlovchi ko'pburchak shaklini chizamiz (5.1-chizma).

Agar [0; 10] oraliqda t ning qiymatini $t = 0$ deb olib, $2x_1 + 13x_2 = k$ (bu yerda $k = 0, 1, 2, ..., 26$) shaklini chizsak va uni $\overline{C}(2; 13)$ vektor bo'yicha $OABCD$ ko'pburchak tomon harakatlantirsak, bu to'g'ri chiziq $A(0;\ 11)$ nuqtada ko'pburchakka urinadi.

Shunday qilib, $t = 0$ bo'lganda birinchi qadamda $x_1 = 0$, $x_2 = 11$ optimal yechim bo'ladi.

Bu yechimga asosan, birinchi tur mahsulot narxi $2 + 0 = 2$ so'mni, ikkinchi tur mahsulot narxi esa $13 - 0 = 13$ so'mni tashkil etadi. Optimal rejada maqsad funksiyasining qiymati

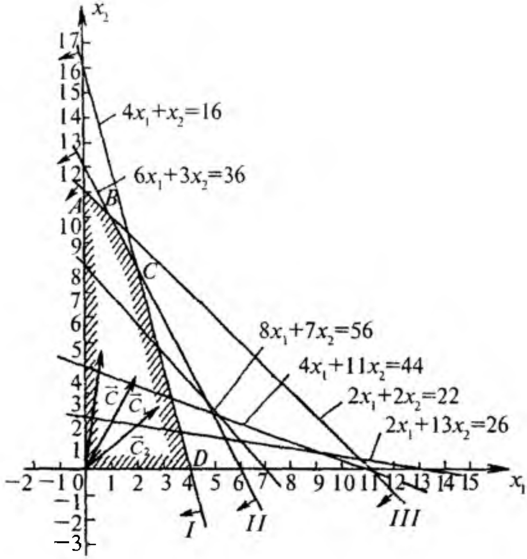
$$F_{1\max} = (2 + 0) \cdot 0 + (13 - 0) \cdot 11 = 13 \cdot 11 = 146 \text{ so'm}$$

bo'ladi.

Agar $t = 2$ deb olsak, sath chizig'i quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(2 + 2)x_1 + (13 - 2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = k,$$

k ga qiymatlar berib $\overline{C}(4;\ 11)$ vektor bo'yicha siljitsak, $k = 44$ bo'lganda



5.1- chizma.

OABCD ko'pburchakka A (0; 11) nuqtada urinadi. Demak, A nuqtada F maqsad funksiyasi maksimum qiymatga ega bo'ladi va $x_1 = 0$, $x_2 = 11$ lar optimal yechimlar bo'ladi. Bu yechimga asosan birinchi tur mahsulot narxi $2 + 2 = 4$ so'mni, ikkinchi tur mahsulot narxi $13 - 2 = 11$ so'mni tashkil etadi. Demak, $F_{\max} = (2+2)\cdot 0 +$ $+(13-2)\cdot 11 = 121$ so'm.

Yuqoridagi 5.1-chizmadan ko'rinib turibdiki, mahsulotlarni ishlab chiqarish t ning har qanday qiymatida optimal bo'ladi, toki $2x_1 + 2x_2 = 22$ to'g'ri chiziq $\frac{2+t}{2} = \frac{13-t}{2}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa. Agarda $t = 5{,}5$ bo'lsa, bu shart bajariladi. t ning bu qiymatida AB kesmaning istalgan nuqtasi optimal rejani beradi.

Shunday qilib, t ning $t \in [0; 5{,}5]$ oraliqdagi barcha qiymatlarida $x_1 = 0$, $x_2 = 11$ optimal yechim bo'ladi va maqsad funksiyasining maksimum qiymati $F_{1\max} = 143 - 11t$ bo'ladi.

Endi t ning qiymatini 5,5 dan katta qilib olsak, masalan, $t = 6$ bo'lganda berilgan masalaning yechimini topish uchun $(2+6)x_1 + (13-6)x_2 = k$ to'g'ri chiziqni tuzamiz (bu yerda $k = 0,1,2,...$).

Misol uchun $k = 56$ bo'lganda bu to'g'ri chiziq quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $8x_1 + 7x_2 = 56$.

Bu to'g'ri chiziqni $\bar{C}(8;7)$ vektor bo'yicha siljitsak, u $OABCD$ ko'pburchak bilan eng chetki $B(1;\ 10)$ nuqtada urinadi. Shunday qilib, $t = 6$ bo'lganda uchinchi qadamda $x_1 = 2 + 6 = 8$ so'm, $x_2 = 13 - 6 = 7$ so'm optimal yechim bo'ladi va ishlab chiqarish natijasida maqsad funksiyasi $F_{\max} = 8 \cdot 1 + 7 \cdot 10 = 78$ so'mga teng.

5.1- chizmadan ko'rinib turibdiki, $B(1,\ 10)$ nuqtaning koordinatalari $t > 5{,}5$ qiymatida optimal yechim bo'ladi, toki $2x_1 + 13x_2 + (x_1 - x_2)t = k$ to'g'ri chiziq $6x_1 + 3x_2 = 36$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lguncha.

Agar $\dfrac{2+t}{6} = \dfrac{13-t}{3}$ bo'lsa, ya'ni $t = 5{,}5$ bo'lganda bu shart bajariladi. t ning bu qiymatida AB kesmaning istalgan nuqtasi optimal rejani beradi.

Shunday qilib, t ning $t \in [5{,}5;\ 8]$ oraliqdagi barcha qiymatlarida $x_1 = 0$; $x_2 = 10$ yechim optimal reja bo'ladi. Shu bilan birga, $t \in [5{,}5;\ 8]$ oraliqda AB kesmaning barcha koordinatalari optimal yechim bo'ladi, ya'ni $F_{2\max} = (2+t)1 + (13-t)10 = 132 - 9t$ bo'ladi.

Yuqoridagi kabi, $t \in [8;\ 10]$ oraliqda $x_1 = 2$; $x_2 = 8$ optimal yechimni topamiz (5.1- chizmaga qarang). Demak, birinchi tur mahsulotning bahosi 10 so'mdan 12 so'mgacha, ikkinchi tur mahsulotning bahosi 3 so'mdan 5 so'mgacha o'zgaradi, birinchi tur mahsulotlar 2 birlik, ikkinchi tur mahsulotlar 12 birlik ishlab chiqariladi.

Shu bilan birga, t ning $t \in [8;\ 10]$ oraliqdagi qiymatlarida ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi $F_{3\max} = 108 - 6t$ bo'ladi.

Shunday qilib, masalaning geometrik talqinidan quyidagi optimal yechimlarni topdik:

1) $t \in [0;\ 5{,}5]$ oraliqda $x_1 = 0$; $x_2 = 11$, $F_{1\max} = 143 - 11t$;

2) $t \in [5{,}5;\ 8]$ oraliqda $x_1 = 1$; $x_2 = 10$, $F_{2\max} = 132 - 9t$;

3) $t \in [8;\ 10]$ oraliqda $x_1 = 2$; $x_2 = 8$, $F_{3\max} = 108 - 6t$.

2- §. Maqsad funksiyasi parametrga bog‘liq bo‘lgan masalalarni yechish

Birinchi paragrafda ko‘rib chiqilgan (5.1) — (5.3) masalalar berilgan bo‘lsin. $[\alpha; \beta]$ oraliqda t parametrning birorta $t = t_0$ qiymatini olib, bu masalani simpleks usuli bilan yechamiz. Bu yerda ikki hol bo‘lish mumkin:

1) $t = t_0$ nuqtada masala optimal rejaga ega bo‘ladi;

2) $t = t_0$ nuqtada masalani yechish mumkin emasligi aniqlanadi.

Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilgan bo‘lsin. U holda oxirgi simpleks jadvalning $(N+1)$ (indekis satridan) satridan $J_i(t_0) = J'_i + t_0 J''_i$ ni yozib olamiz. Bundan quydagilarni topamiz:

$$T_0 = \begin{cases} \max\left(-\dfrac{J'_i}{J''_i}\right), & \text{agar } J''_i > 0, \\ -\infty, & \text{agar } J''_i \le 0 \end{cases} \quad \text{mavjud bo‘lsa,}$$

$$T = \begin{cases} \min\left(-\dfrac{J'_i}{J''_i}\right), & \text{agar } J''_i < 0, \\ \infty, & \text{agar jami } J''_i \ge 0 \end{cases} \quad \text{mavjud bo‘lsa.}$$

U holda $T_0 \le t \le T$ da berilgan masala (barcha t lar uchun) $t = t_0$ qiymatda bir xil optimal rejaga ega bo‘ladi.

Agar $t = t_0$ qiymatda masalani yechish mumkin bo‘lmasa va oxirgi simpleks jadvalning $N+1$ satrida uning yechimi $J_k = J'_k + t_0 J''_k$, $(x_{ik} < 0,\ i = \overline{1, m})$ songa teng bo‘lsa, u holda:

1) $J''_k = 0$ bo‘lganda berilgan masalani istalgan t uchun yechish mumkin emas;

2) agar $J''_k < 0$ bo‘lsa, berilgan masalani $t < t_1 = -\dfrac{j'_k}{j''_k}$ larning barchasi uchun yechish mumkin emas;

3) agar $J''_k > 0$ bo‘lsa, berilgan masalani barcha $t > t_1$ lar uchun yechish mumkin emas;

4) birinchi qadamda t ning o‘zgarish sohasini aniqlaymiz, yuqoridagi qadamni $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda t ning boshqa qiymatini olib, yana simpleks usulini qo‘llaymiz;

5) chekli almashtirishlar natijasida masalaning optimal rejasini topamiz yoki masalani yechish mumkin emasligini aniqlaymiz.

5.2 masala. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 10, \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 6, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F(x_1, x_2) = 2x_1 + (3+4t)x_2 \tag{5.8}$$

maqsad funksiysiasining t ning $t \in (-\infty,\ +\infty)$ oraliqdagi barcha qiymatlari uchun maksimum qiymatini toping.

Yechish. Berilgan oraliqda t parametrning istalgan qiymatini olishimiz mumkin.

Oldin dastlabki berilganlarga asoslanib, birinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

1- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	x_3	12	1	1	1	0	0
2	0	x_4	10	1	−1	0	1	0
3	0	x_5	6	−1	1	0	0	1
4	indeks satri		$F = 0$	−2	$-3-4t$	0	0	0

Bu jadvalga asoslanib, ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

2- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	$C(t)$ o'zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	x_3	6	2	0	1	0	−1
2	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3	3+4t	x_2	6	–	1	0	0	1
4	indeks satri		$F=18+24t$	$-5-4t$	0	0	0	3+4t

2- jadvalning indeks satrida manfiy miqdorlar bo'lgani uchun 3- simpleks jadvalni tuzamiz:

3- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o‘zgaruvchilar	$C(t)$ o‘zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/2
2	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3	3+4t	x_2	9	0	1	1/2	0	1/2
4	indeks satri		F=33+36t	0	0	2,5+2t	0	0,5+2t

Bu jadvalga $t = 0$ qiymatni indeks satridagi t ning o‘rniga qo‘ysak, $x_1 = 3,\ x_2 = 9,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0$ optimal yechim bo‘ladi va maqsad funksiyasi $F_{1\max} = 2 \cdot 3 - (3 + 4 \cdot 0) \cdot 9 = 6 + 27 = 33$ qiymatga ega bo‘ladi.

Endi F_1 ning qiymatiga asoslanib, t ning qiymatini topamiz.

3- simpleks jadvalning indeks satri elementlari musbat bo‘lishi uchun $2,5 + 2t \geq 0$ va $0,5 + 2t \geq 0$ bo‘lishi kerak. Bu tengsizliklardan $t \geq -0,25$ kelib chiqadi. Demak, t ning $t \in [-0,25;\ +\infty)$ oraliqdagi barcha qiymatlarida $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ yechim optimal yechim bo‘ladi va $F_{1\max} = 33 + 36t$ bo‘ladi.

Ikkinchi qadamda t ning −0,25 dan kichik qiymatini olib, 3- simpeks jadvalning indeks satridan x_5 ni bazisli yechimlar safiga o‘tkazamiz, u holda x_4 qo‘shimcha o‘zgaruvchilar safiga o‘tadi. Natijada 4- simpleks jadval hosil bo‘ladi (3- simpleks jadvalni almashtirgandan keyin).

4- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o‘zgaruvchilar	$C(t)$ o‘zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	2	x_1	11	1	0	0,5	0,5	0
2	0	x_5	16	16	0	0	1	1
3	3+4t	x_2	1	0	1	0,5	−0,5	0
4	indeks satri		F=25+4t	0	0	2,5+2t	−0,5−2t	0

Bu jadvalga asosan, $x_1 = 11$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 16$ yechim $2,5 + 2t \geq 0$ va $-0,5 - 2t \geq 0$ bo'lganda berilgan masala uchun optimal yechim bo'ladi. Demak, $t \in [-1,25;\ -0,25]$ da $F_{\max} = 25 + 4t$ bo'ladi. Uchinchi qadamda $t \leq -1,25$ bo'lganda x_3 indeks satridagi qiymat manfiy bo'ladi. Shuning uchun simpleks usulni qo'llab, 4-jadvaldan 5- jadvalga o'tamiz.

5- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	$C(t)$ o'zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	2	x_1	10	1	−1	0	1	0
2	0	x_5	16	0	0	0	1	1
3	0	x_3	2	0	2	1	−1	0
4	indeks satri		$F = 20$	0	$-5-4t$	0	2	0

Bu jadvalda bazis yechim: $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, $x_5 = 16$ optimal yechimlar bo'ladi va $t \in (-\infty,\ -1,25]$ da $F_{\max} = 20$.

Shunday qilib, yuqoridagi jadvallardan quyidagi optimal rejani yozish mumkin:

1) $t \in [-\infty,\ -1,25]$ oraliqda $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 16$. $F_{\max} = 20$;

2) $t \in [-1,25;\ -0,25]$ oraliqda $x_1 = 11$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 16$. $F_{\max} = 25 + 4t$;

3) $t \in [-0,25;\ -\infty]$ oraliqda $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 0$, $x_4 = 16$, $x_5 = 0$. $F_{\max} = 33 + 36t$.

5.3- masala. Korxonada uch tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot birligiga ketadigan xomashyo me'yori va narxi, xomashyo zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan:

Xomashyo xillari	Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori		
	1-tur buyum	2-tur buyum	3-tur buyum
1	18	15	12
2	6	4	8

3	5	3	3
Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot narxi (so‘m)	9	10	16
Xomashyo zaxirasi	360 kg	192 kg	180 kg

Shu bilan birga ishlab chiqarilgan mahsulotlarni to‘la sotish ta’min etilgan. Ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzingki, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotish uchun tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olinsin. Shu bilan birga narx-navoning o‘zgarishini hisobga olib, optimal reja turg‘unligining tahlilini bering.

Yechish. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik, uchunchi tur mahsulot x_3 birlik ishlab chiqarilishi kerak bo‘lsin. U holda masalaning matematik modelini ushbu ko‘rinishda yozsa bo‘ladi.

Quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{array}\right\} \tag{5.9}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{5.10}$$

shartlarda $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

(5.9) tengsizliklar sistemasiga y_1, y_2, y_3 bazis o‘zgaruvchilarni kiritib, uni tenglamalar sistemasi ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left.\begin{array}{l} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + y_1 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + y_2 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + y_3 \le 180, \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,$$

$$y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ y_3 \ge 0.$$

U holda (5.10) maqsad funksiyasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 . \tag{5.12}$$

Bunda $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ deb olsak, $F = 0$ bo‘ladi (simpleks usulga qarang).

(5.11) — (5.12) larga asoslanib, birinchi simpleks jadvalni tuzamiz va simpleks jadvallarni ketma-ket almashtirib, masalaning optimal yechimlarini topamiz.

1- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruv-chilar	O'zgarmas koeffitsi-yentlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	0	y_1	360	18	16	12	1	0	0
2	0	y_2	196	6	4	8	0	1	0
3	0	y_3	180	5	3	3	0	0	1
4	indeks satri		$F = 0$	−9	−10	−16	0	0	0

2- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruv-chilar	O'zgarmas koeffitsi-yentlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	0	y_1	72	9	9	0	1	−3/2	0
2	16	x_3	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	0	y_3	180	11/4	3/2	0	0	−3/8	1
4	indeks satri		$F = 384$	3	−2	0	0	2	0

3- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruv-chilar	O'zgarmas koeffitsi-yentlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	10	x_2	8	1	1	0	1/9	−1/6	0
2	16	x_3	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3	0	y_3	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4	indeks satri		$F = 400$	5	0	0	2/9	5/3	0

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, birinchi tur mahsulotlar $x_1 = 0$ dona, ikkinchi tur mahsulotlar $x_2 = 8$ dona, uchinchi tur mahsulotlar $x_3 = 20$ dona ishlab chiqariladi.

Bu reja optimal reja bo‘lib, daromad $F_{1\max} = 9 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 16 \cdot 20 +$ $+0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot 96 = 80 + 320 = 400$ so‘mni tashkil etadi.

Endi yuqoridagi optimal rejaga asoslanib, ishlab chiqarilgan mahsulot turlari bahosining o‘zgarish chegaralarini aniqlaymiz.

Oldin birinchi tur mahsulotdan boshlaymiz. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulotning qiymati $c_1 = 9$ so‘m emas, balki $c_1 = (9 + t_1)$ so‘m bo‘lsin.

Bu yerda t_1 parametr $t_1 \in (9;\ \infty)$ oraliqda o‘zgarishi mumkin, u holda yuqoridagi optimal rejaga asoslanib, masalaning shartiga ko‘ra $F = (9 + t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3$ maqsad funksiyasining maksimum qiymatini topish talab etiladi. Maqsad funksiyasining bu qiymatini hisobga olib 3- simpleks jadvalni quyidagicha yozish mumkin:

4- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o‘zgaruvchilar	O‘zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	$9+t_1$	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	10	x_2	8	1	1	0	1/2	−1/6	0
2	16	x_3	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3	0	y_3	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4	indeks satri		$F = 400$	$5-t_1$	0	0	2/9	5/3	0

Bu jadvaldan ko‘rinib turibdiki $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 20$ yechimlar parametrik programmalashning optimal rejasi bo‘ladi, agarda $5 - t_1 \geq 0$ bo‘lsa ($t \leq 5$). Demak, birinchi tur mahsulotning qiymati $c_1 \leq 14$ so‘m bo‘lsa, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 20$ optimal yechim bo‘ladi. Ishlab chiqarish korxonasi birinchi tur mahsulotning qiymati 14 so‘mdan oshmasligidan manfaatdor emas. Shu bilan birinchi tur mahsulotning qiymati o‘zgarganda, ikkinchi va uchunchi tur mahsulotning qiymati berilgan masalaning shartlarida o‘zgarmaydi deb hisoblaymiz. Xuddi shunday, ikkinchi tur mahsulotlarning qiymati $8 \leq c_2 \leq 20$ oraliqda o‘zgarganda masalaning dastlabki shartlarida ikkinchi tur mahsulotning qiymati $x_2 = 8$ so‘mni, uchunchi tur mahsulotning qiymati 20 so‘mni tashkil etadi va bu reja optimal reja bo‘ladi. Lekin shuni ham aytish kerakki, ko‘rsatilgan reja optimal bo‘lishiga qaramasdan c_2 ning har xil qiymatlarida maqsad funksiyasi har xil qiymatlar qabul qiladi.

Agar uchinchi tur mahsulotning narxi $8 \leq c_2 \leq 20$ oraliqda o'zgarganda ham ikkinchi tur mahsulotning narxi 8 so'mni, uchunchi tur mahsulotning narxi 20 so'mni tashkil etadi va bu reja optimal reja bo'ladi. Shunday qilib, berilgan masalani maqsad funksiyasining bitta koeffitsiyentiga parametr kiritib optimal rejaning sezgirlik darajasini tahlil qildik.

Xuddi shunday optimal rejaning sezgirlik darajasini hamma tur mahsulotlarning qiymatlari o'zgarganda ham tahlil qilish mumkin.

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi 5.7—5.14 parametrik programmalash masalalarining $t \in (-\infty, +\infty)$ oraliqdagi optimal rejasini toping.

5.4. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5},$$

$$F = (t-1)x_1 + (4-t)x_2 + (t-2)x_3 + (2-t)x_4 + (2t-3)x_5 \to \max.$$

5.5. $$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 20, \\ -1/2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 24, \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5},$$

$$F = 6x_1 - (4+t)x_2 + (12-t)x_4 \to \max.$$

5.6. $$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 - 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 &= 8 - 3t, \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5},$$

$$F = 6x_1 + 5x_2 \to \max.$$

5.7. $$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 - 2t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 2 + t, \\ 3x_1 + x_5 &= 3 - t, \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,5},$$

$$F = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max.$$

VI BOB. DINAMIK PROGRAMMALASH

1- §. Dinamik programmalash masalalarining umumiy xususiyatlari

Chiziqli programmalash masalalarini yechganda vaqtga bog'liq bo'lmagan statik va iqtisodiy jarayonlarni ko'rgan edik. Masalalarning optimal yechimlarini topganda bu yechimlar vaqtga bog'liq bo'lmagan bir bosqichli optimal yechimlardan iborat deb hisobladik. Shuning uchun vaqtga bog'liq bo'lmagan bunday masalalarni bir bosqichli masalalar deb ataymiz. Lekin ko'p iqtisodiy masalalarni yechish jarayonida bu masalalar o'z-o'zidan bir nechta bosqichlarga bo'lingan bo'ladi. Shu bilan birga iqtisodiyotning rivojlanish jarayoni, ayniqsa bozor iqtisodiyotiga o'tish davrida, ko'p omillarga bog'liqdir. Shuning uchun bunday masalalarning yechimi yagona bo'lmaydi. Balki har bir bosqichga mos keluvchi yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi. Bu yechimlar to'plamidan eng maqbulini tanlab olish *optimal strategiya* deyiladi.

Dinamik programmalash iqtisodiyotda uchraydigan ko'p masalalarni bosqichma-bosqich yechish uchun ishlatiladi.

Bunga misol sifatida quyidagi masalalar kiradi: yuklarni optimal joylashtirish; eng qisqa yo'lni aniqlash; tezlikka bog'liq bo'lgan masalalarda optimal tezlikni topish; sarmoyalarni optimal joylashtirish; optimal rejalashtirish masalalari.

Demak, dinamik programmalash quyidagi xususiyatga ega bo'lgan masalalarni yechadi:

1) ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonning birdan bir yagona yechimini emas, har bir qadamga mos keluvchi va asosiy manfaatni ko'zlovchi yechimlar to'plamini topishga yordam beradi;

2) dinamik programmalash uslub va usullari yordamida yechilayotgan ko'p bosqichli masalaning ma'lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog'liq bo'lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi omillar nazarga olinadi;

3) dinamik programmalash yordamida ko‘p bosqichli masalani yechish jarayonida har bir bosqichda asosiy maqsadni ko‘zlovchi yechimni aniqlash kerak, yana yechimlar to‘plami orasidan asosiy maqsadga erishishga maksimal ulush qo‘shuvchi yechimni tanlab olishga to‘g‘ri keladi.

Dinamik programmalashning asosiy usul va uslublari amerikalik matematik R. Bellman va uning shogirdlari tomonidan asoslangan bo‘lib, optimallik prinsipiga amal qiladi. Endi dinamik programmalash uslub va usullari bilan yechiladigan ba’zi iqtisodiy masalalarni ko‘rib chiqamiz.

2- §. Yuklarni optimal joylashtirish haqidagi masalalar

6.1- masala. Muzxonaga N ta har xil xomashyoni joylashtirish kerak. Muzxonaga jami W tonna xomashyoni joylashtirish mumkin. Xomashyolar to‘g‘risida quyidagi ma’lumotlar mavjud:

P_i — i xildagi xomashyoning massasi;

V_i — i xildagi xomashyoning bahosi (narxi);

X_i — muzxonaga joylashtiriladigan i xildagi xomashyoning soni.

Muzxonaga xomashyolarni shunday joylashtiringki, unga maksimum qiymatga ega bo‘lgan xomashyolar joylashsin.

Demak, bu masalani umumiy holda quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin.

Quyidagi

1) $\sum_{i=1}^{N} X_i P_i \le W;$

2) $X_i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. (konteynerlarga joylashgan xomashyolar soni yoki yashiklar soni) shartlarda

$f(W) = \sum_{i=1}^{N} X_i V_i$ ning maksimum qiymatini toping.

Masalada X_i xomashyolar butun qismlardan iborat.

Agar 2- shart bo‘lmaganda edi u holda masalani chiziqli programmalash masalasi ko‘rinishida yechish mumkin edi. Shuning uchun masalani quyidagi ko‘rinishda yechamiz.

1. Oldin muzxonaga birinchi xil xomashyolarni joylashtiramiz. Joylashtirilgan yuklarning qiymatini $f_1(W)$ deb belgilasak, u holda

$$f_1(W) = \max\{X_i W\}, \tag{6.1}$$

ning qiymatini quyidagi

$$1)\ X_1 P_1 \le W; \qquad (6.2)$$

$$2)\ X_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

shartlar bajarilganda topish kerak bo'ladi. Bu yerda (6.2) tengsizlikdan $X_1 \le \frac{W}{P_1}$ bo'lgani uchun $f_1(W) = \left\{\frac{W}{P_1}\right\} V_1$ kelib chiqadi.

Bu funksiyaning grafigi 6.1-chizmada ko'rsatilgan. Shunday qilib, muzxona birinchi xil xomashyo bilan to'ldirilganda $f_1(W)$ uning qiymatini topdik. Endi muzxonaga x_1 va x_2 xil xomashyolar joylashtirilganda $f_2(W)$ ning maksimum qiymatini topaylik.

Agar ikkinchi xil xomashyodan x_2 dona joylashtirilgan bo'lsa, u holda muzxonaning hajmini hisobga olsak, birinchi xil xomashyodan $W - X_2 P_2$ tonna olish mumkin va uning qiymati $f_1(W - X_2 P_2)$ so'mga teng bo'ladi. Umumiy qiymat esa $X_2 V_2 + f_1(W - X_2 P_2)$ ga teng bo'ladi. Bularga asoslanib faqat x_2 ning qiymatini topsak bas. Shunday qilib, muzxonaga joylashtirilgan birinchi va ikkinchi xil xomashyolarning maksimum qiymati quyidagicha bo'ladi:

$$f_2(W) = \max\{X_2 V_2 + f_1(W - X_2 P_2)\},$$

bu yerda $0 < X_2 < \left\{\frac{W}{P_2}\right\}$.

Ketma-ket yuqoridagi usulni qo'llasak, quyidagini hosil qilamiz:

$$f_N(W) = \max\{X_N V_N + f_{N-1}(W - X_N P_N)\},$$

bu yerda $0 < X_N < \left\{\frac{W}{P_N}\right\}$.

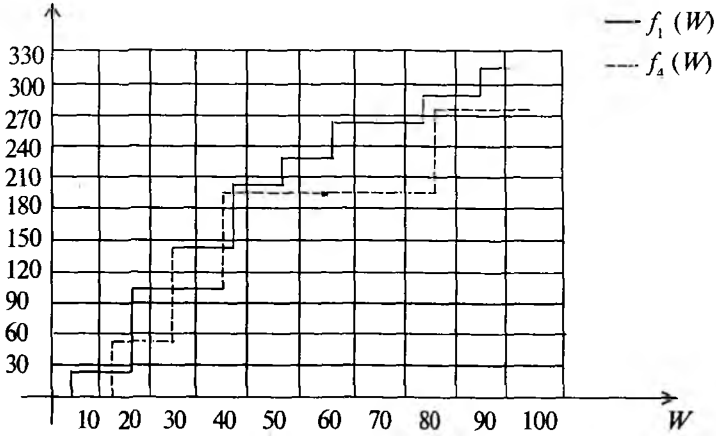
Bu yerda $f_N(W)$ — muzxonaga joylashtirilgan N xil yuklarning maksimum narxi;

$X_N V_n$ — N xil joylashtirilgan mahsulotning qiymatini;

$f_{N-1}(W - X_N P_N)$ — umumiy massasi $W - X_N P_N$ tonnadan ko'p bo'lmaydigan $(N - 1)$ xil yuklarning maksimum qiymati.

Bu yerda $\left\{\frac{W}{P_i}\right\}$ soni $\frac{W}{P_i}$ dan oshmaydigan butun son.

Yuqorida topilgan rekurrent formulalardan ketma-ket $f_1(W)$, $f_2(W)$, ... $f_N(W)$ funksiyalarning qiymatlarini topish mumkin.



6.1- chizma.

6.2- masala. Muzxonasining umumiy hajmi $v = 83$ m^3 bo'lgan firmaga hajmlari $p_1 = 24$ m^3, $p_2 = 22$ m^3, $p_3 = 16$ m^3, $p_4 = 10$ m^3 bo'lgan konteynerlar bilan yuk olib kelindi.

Bu yuklarning har birining narxi, mos ravishda, $v_1 = 96$ ming so'm, $v_2 = 85$ ming so'm, $v_3 = 50$ ming so'm va $v_4 = 20$ ming so'mni tashkil etadi. Konteynerlar ochmasdan saqlanishi kerak. Muzxonaga konteynerlarni shunday joylashtirish kerakki, joylashgan yuklar maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Yechish. Masalani yechish uchun $f_N(W)$ ni N ning har xil qiymatida hisoblashimiz kerak:

$f_4(83)$ ni hisoblash uchun $f_3(83 - x_4 p_4)$ ni topish kerak. Shuning uchun pog'onama pog'ona W ning har qanday qiymatlarida har xil yuklarni muzxonaga bittama-bitta hisoblab joylashtiramiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi:

6.1- jadval

W	$f_1(W)$ funksiya	x_1
0—23	0	0
24—47	96	1
48—71	192	2
72—87	288	3

Birinchi xil yukni joylashtirish uchun (x_1) 0—23 tonnaga x_1 yo'q. 24—47 tonnagacha yuklarni joylashtirsak, $x_1 = 1$ dona bo'ladi va uning qiymati 96 ming so'mni tashkil etadi 48—71 tonnagacha yuklarni joylashtirsak, $x_1 = 2$ dona bo‘ladi va uning qiymati 192 ming so‘mni tashkil etadi. 72—87 tonnagacha yuklarni joylashtirsak, $x_1 = 3$ dona bo‘ladi va uning qiymati $f = 288$ ming so‘mni tashkil etadi.

Endi $f_2(W)$, $f_3(W)$ va $f_4(W)$ funksiyalar uchun jadvallar tuzamiz:

6.2- jadval

W	$f_2(W)$ funksiya	x_2
0—21	0	0
22—23	85	1
24—45	96	0
46—47	181	1
48—69	192	0
70—71	277	1
72—87	288	0

6.3- jadval

W	$f_3(W)$ funksiya	x_3
0—15	0	0
16—21	50	1
22—23	85	0
24—37	96	0
38—39	135	1
40—45	146	1
46—47	181	0
48—63	192	0
64—69	242	1
70—71	277	0
72—87	288	0

6.4- jadval

W	$f_4(W)$ funksiya	x_4
0—9	0	0
10—15	20	1
16—21	50	0
22—23	85	0
24—33	96	0
34—37	116	1
38—39	135	0
40—45	146	0
46—47	181	0
48—57	192	0
58—63	212	1
64—69	242	0
70—71	277	0
72—81	288	0
81—87	308	1

Quyidagi

$$f_2(W) = \max\{X_2V_2 + f_1(W - X_2P_2)\}$$

(bu yerda $0 < X_1 < \left\{\frac{W}{P_1}\right\}$) tenglikdan foydalanib, $f_2(W)$ funksiyani hisoblash yo'lini ko'rsatamiz. x_2 miqdor 0,1,2,3 qiymatlar qabul qilishi mumkin bo'lgani uchun 6.1- jadvaldan foydalanib, $\{X_2 \cdot 85 + f_1(70 - x_2 \cdot 22)\} = f_2(W)$ funksiyani hisoblaymiz:

$$x_2 = 0; \qquad f_1(70) = 192; \qquad f_2(W) = 192;$$
$$x_2 = 1; \qquad f_2(70) = 85 + f_1(48) = 277;$$
$$x_2 = 2; \qquad f_2(70) = 2 \cdot 85 + f_1(26) = 266;$$
$$x_3 = 3; \qquad f_2(70) = 3 \cdot 85 + f_1(4) = 255.$$

Hisoblash shuni ko'rsatdiki, $x_2 = 1$ bo'lganda $f_2(70) = 277$ eng katta qiymatga ega. Xuddi yuqoridagi kabi, $f_3(W)$ va $f_4(W)$ funksiyalarning qiymatini hisoblab, 6.3; 6.4- jadvallarni tuzish mumkin.

6.4- jadvalga asosan $f_4(83) = 308$ ming so'mga teng. Demak, 4 xil konteynerdan $x_4 = 1$ donasini muzxonaga joylashtirish mumkin. $P_4 = 10$ tonna bo'lgani uchun muzxonaga yana 83 — 10 = 73 tonna yuk joylashtirish talab etiladi. 6.3 va 6.2- jadvallardan ko'rinib turibdiki, $W = 73$ bo'lganda yukning soni $x_3 = 0$; $x_1 = 0$ donaga teng. 6.1- jadvaldan ko'rinadiki, $x_3 = 3$ dona konteyner joylashtirish mumkin. Demak,

$$f_{4\max} = 96 \cdot x_1 + 20 \cdot x_4 = 96 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 288 + 20 = 308 \text{ ming so'm.}$$

3- §. Dinamik programmalash usullarining iqtisodiy masalalarni yechishdagi tahlili. Optimal rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik, viloyatda n ta korxonani o'z ichiga olgan sanoat birlashmasining T yillik rejasini tuzish masalasi o'rtaga qo'yilgan bo'lsin. Rejalashtirilayotgan T davrning boshida birlashmaga K_0 miqdorda mablag' ajratilgan. Bu mablag' n ta korxonaga taqsimlanadi. Taqsimlanayotgan mablag' korxonalarda to'la yoki qisman ishlatilishi mumkin va shunga qarab ma'lum miqdorda foyda (daromad) olish mumkin. Keyingi qadamlarda mablag'lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin. Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi. Korxonalararo K mablag'ni qadam-baqadam shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki, birlashmaning T yil davomida olgan daromadlar yig'indisi maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Har bir ishlab chiqarish boshqariluvchi jarayon hisoblanadi va bu jarayon ajratilayotgan xomashyo, mablag', uskunalarning yangilanishi kabi muammolarga bog'liqdir. Bu muammolarni hal qilishni qadam-baqadam tashkil qilish *boshqarish* deyiladi.

Demak, t bosqichdagi boshqarish

$$U^t = (u_1^t, u_2^t, \dots, u_n^t)$$

vektor funksiya kabi ifodalanadi. Bu yerda U_j^t $j(j = \overline{1,n})$ korxona uchun qadamning boshida ajratilgan xomashyo, mablag' va hokazolarning miqdorini ko'rsatuvchi vektor.

Jami korxonalar birlashmasining T davr ichida boshqarilishini $U = (u^1, u^2, \dots, u^T)$ vektor funksiya orqali ifodalash mumkin.

Birlashmadagi korxonalarning taraqqiyot dinamikasini ifodalash uchun ularning holat darajasini ko'rsatuvchi $X_i = (X_i^1, X_i^2, \dots, X_i^T)$ vektorni kiritamiz, bu yerda X_i^t $t(t = \overline{1,T})$ qadam boshida korxonalarning moddiy va moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatuvchi ko'rsatkich bo'lib, uning tarkibiy qismlari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatadi, ya'ni $X_i^t = (X_{i1}^t, X_{i2}^t, \dots, X_{ik}^t)$.

Shunday qilib, yuqoridagidan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori korxonalarning qadamning boshidagi holatini ko'rsatuvchi vektordir, ya'ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Demak, sistemaning boshlang'ich halati X^0 berilgan bo'ladi. Maqsad funksiyasi sifatida korxonalar birlashmasining T davr ichida oladigan daromadlar yig'indisini ifodalavchi $Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max$ funksiyani kiritamiz.

Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga ma'lum bir chegaralovchi shartlar qo'yiladi. Bu shartlar birlashmasini G bilan belgilaymiz va uni *mumkin bo'lgan* *boshqarishlar to'plami* deb ataymiz. Natijada quyidagi dinamik programmalash masalasiga ega bo'lamiz:

$$U^t \in G, \tag{6.3}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{T} Z^t \to \max. \tag{6.4}$$

Hosil bo'lgan (6.3), (6.4) model *ishlab chiqarishning dinamik modeli* deyiladi.

6.3- masala. Katta talabga ega bo'lgan mahsulotni ishlab chiqarish maqsadida korxonalarga kapital qurilish uchun S ming so'mlik mablag' ajratildi. Bu mablag'dan i korxona X_i ming so'm ishlatganda $f_i(x_i)$ (egri chiziqli funksiya) ko'rinishdagi o'sishga ega bo'ladi.

Kapital qurilishga ajratilagan mablag'ni korxonalar o'rtasida shunday taqsimlangki, korxonalar ishga tushganda maksimal daromad beruvchi mahsulotlar ishlab chiqarish qobiliyatiga ega bo'lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Demak, quyidagi

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = S,$$

$$X_i \geq 0, \ (i = \overline{1,n})$$

shartlarda $F = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ funksiyaning eng katta qiymatini topish kerak. Agar funksiya qavariq yoki botiq funksiya bo'lsa, u holda bu masalani egri chiziqli programmalashdagi Lagranjning ko'paytmalar usulini qo'llab yechish mumkin. Agar F funksiya qavariq yoki botiq bo'lmasa, u holda bu masalani dinamik programmalash usulidan foydalanib yechamiz.

Har bir korxonaga ajratilgan mablag'ni qadam-baqadam qanday samara berishini hisoblab chiqamiz va bularning ichidan optimal strategiyani tanlab olamiz.

6.4- masala. Ishlab chiqarish jarayonini tashkil qilish uchun korxonani yangi uskunalar bilan jihozlash kerak. Uskunalarning ish unimdorligi vaqt o'tishiga bog'liq bo'lib, unga ketadigan xarajatlar quyidagi jadval ko'rinishida berilgan:

	Uskunalarning ishlash vaqti (yil hisobida)					
	0	1	2	3	4	5
Bir yilda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi (qiymati), $R(Y)$ (ming so'm hisobida)	80	75	65	60	60	55
Uskunalarni ta'mirlash va saqlash uchun ketadigan xarajatlar, $Z(Y)$ (ming so'm hisobida)	20	25	30	35	45	55

Korxonani yangi uskunalar bilan jihozlash uchun 40 ming so'm ketganini hisobga olib, uskunalarning xizmatini o'taganlarini hisobdan chiqarishning besh yillik rejasini shunday tuzinki, korxona maksimum umumiy daromad olsin.

Yechish. Bu masalani yechish uchun boshqaruv jarayonini ikkiga bo'lib ko'ramiz:

a) U_1 — uskunalarning ishlab chiqarish qobiliyatini saqlovchi yechimlar to'plami bo'lsin;

b) U_2 — ishlash qobiliyati tamom bo'lgan uskunalarni almashtiruvchi yechimlar to'plami bo'lsin.

Birinchi bosqichda beshinchi besh yillikning boshidan, birinchi yilning boshiga qadar uskunalarning holatini shartli optimal boshqaruvchi yechimlar to'plamini topamiz. Ikkinchi bosqichda ishlab chiqarish harakatini birinchi yilning boshlanish qismidan, beshinchi yilning boshlanish qismigacha, har yil uchun tuzilgan shartli optimal yechimlarga asosan uskunalarni almashtirish besh yillik optimal rejasini tuzamiz.

Shartli optimal yechimlar to'plamini tuzish uchun oldin bu masalaga moslashtirib Bellmanning funksional tenglamasini tuzib olamiz.

Har bir yil boshida (k- yil, $k=\overline{1,5}$) ikkita holatdan bittasi bo'ladi: uskunalar kerakmi yoki yo'qmi?

U holda k- ($k=1, 2, 3, 4, 5$) yilda korxonaning daromadi quyidagicha bo'ladi:

$$F_k\left(Y^{(k)},\ U_k\right)_k=\begin{cases} R\left(Y^{(k)}\right)-Z\left(Y^{(k)}\right), & U_1 \\ R\left(Y^{(k)}=0\right)-Z\left(Y^{(k)}=0\right)-C_n, & U_2 \end{cases}$$ bo'lganda,

bu yerda $Y^{(k)}$ — uskunalarning k- yil boshidagi ishlagan yillar soni (yoshi), U_k — k- yil boshidagi boshqaruv vektori; S_n — yangi uskunalarning qiymati, $k=1,2,\ldots, 5$.

Shunday qilib, bu holda Bellmaning funksional tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$F_k\left(Y^{(k)}\right)=\max_{Y}\begin{cases} R\left(Y^{(k)}\right)-Z\left(Y^{(k)}\right)+F_{k+1}\left(Y^{(k+1)}\right), \\ R\left(Y^{(k)}=0\right)-Z\left(Y^{(k)}=0\right)-C_n+F_{k+1}\left(Y^{(k)}=1\right). \end{cases} \quad (6.5)$$

Endi (6.5) tenglamani qo‘llab, dastlabki masalaning yechimini topamiz. Besh yillikning boshida hamma uskunalar yangi bo‘lgani uchun $Y^{(1)}=0$ bo‘ladi. Beshinchi yilning boshlanishida esa uskunalardan foydalanish muddati 1, 2, 3, 4 bo‘lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo‘lgan holati quyidagicha bo‘ladi:

$$Y_1^{(5)}=1, \quad Y_2^{(5)}=2, \quad Y_3^{(5)}=3, \quad Y_4^{(5)}=4.$$

Bu holatlarning har biriga, mos ravishda, shartli optimal yechimlarni va ularga mos bo‘lgan $F_5(Y^{(5)})$ funksiyaning qiymatlarini aniqlaymiz. Endi (6.3) tenglamadan foydalanib, $F_5\left(Y^{(k+1)}\right)=0$ ni hisobga olgan holda quyidagini topamiz:

$$F_5\left(Y^{(5)}\right)=\max\begin{cases} R\left(Y^{(5)}\right)-Z\left(Y^{(5)}\right), \\ R\left(Y^{(5)}=0\right)-Z\left(Y^{(5)}=0\right)-C. \end{cases} \quad (6.6)$$

(6.6) formulaga $Y^{(5)}=1$ va 6.5-jadvaldagi berilganlarni qo‘ysak, quyidagi hosil bo‘ladi:

$$F_5\left(Y_1^{(5)}\right)=\max\begin{Bmatrix} R\left(Y_1^{(5)}=1\right)-Z\left(Y_1^{(5)}=1\right) \\ R\left(Y_1^{(5)}=0\right)-Z\left(Y_1^{(5)}=0\right)-C_n \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 75-25 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=50,$$

$$U^0=U_1$$

Demak, bu holda shartli optimal yechim $U^0=U_1$ bo‘ladi.

Xuddi shunday hisoblarni 5- yil boshida boshqa holatlar uchun ham yuqoridagi kabi bajaramiz:

$$F_5(Y_2^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 35, \quad U^0 = U_1,$$

$$F_5(Y_3^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 66-35 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 25, \quad U^0 = U_2,$$

$$F_5(Y_4^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 60-45 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 20, \quad U^0 = U_3.$$

Hosil bo'lgan bu qiymatlarni quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin:

6.6- jadval

Uskunalardan foydalanish muddati (yil)	$F_5\,(Y^{(5)})$ funksiyaning qiymatlari (ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlar, U^0
1	50	U^0
2	35	U_1
3	25	U_2
4	20	U_3

To'rtinchi yilning boshlanishida uskunalardan foydalanish muddati 1,2,3 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati quyidagicha bo'ladi: $Y_1^{(4)} = 1, \;\; Y_2^{(4)} = 2, \;\; Y_3^{(4)} = 3.$

Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal yechimlar to'plamini va ularga mos bo'lgan $F_n(Y^{(4)})$ uckunaning qiymatlarini yuqoridagi kabi 6.5 va 6.6- jadvallardan foydalanib hisoblaymiz:

$$F_4(Y_1^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} R(Y^{(4)}=1) - Z(Y^{(4)}=1) + F_5(Y^{(5)}=2) \\ R(Y^{(4)}=0) - Z(Y^{(4)}=0) - C_n + F_5(Y^{(5)}=1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75-25+35 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 85, \quad U^0 = U_1,$$

$$F_4(Y_2^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30+25 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = 70, \quad U^0 = U_2,$$

$$F_4(Y_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix}60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50\end{Bmatrix} = 70,\ U^0 = U_2.$$

Hosil bo'lgan natijalarga asoslanib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

6.7- jadval

Uskunalardan foydalanish muddati (yil), $Y^{(4)}$	$F_4(Y^{(4)})$ funksiyaning qiymati(ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlari, U^0
1	85	U_1
2	70	U_2
3	70	U_3

Uchinchi yilning boshida uskunalardan foydalanish muddati 1,2 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati $U_1^{(3)} = 1$, $U_2^{(3)} = 2$ bo'ladi. Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal chimlar to'plamini va ularga mos bo'lgan $F_3(Y^{(3)})$ funksiyaning qiymatlarini yuqoridagi kabi (6.5) formuladan foydalanib hisoblaymiz:

$$F_3(Y_1^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix}R(Y^{(3)} = 1) - Z(Y^{(3)} = 1) + F_4(Y^{(4)} = 2), \\ R(Y^{(3)} = 0) - Z(Y^{(3)} = 0) - C_n + F_4(Y^{(4)} = 1;\end{Bmatrix}$$

$$F_3(Y_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix}R(Y^{(3)} = 2) - Z(Y^{(3)} = 2) + F_4(Y^{(4)} = 3, \\ R(Y^{(3)} = 0) - Z(Y^{(3)} = 0) - C_n + F_4(Y^{(4)} = 1).\end{Bmatrix}$$

6.5 va 6.6- jadvallardagi berilganlardan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$$F_3(Y_1^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix}75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85\end{Bmatrix} = 120,\ U^0 = U_1;$$

$$F_3(Y_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix}65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85\end{Bmatrix} = 105,\ U^0 = U_2.$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, $F_3(U_2^{(3)}) = 105$ da boshqaruv shartli optimal yechimlar Y_1 yoki Y_2 dan qaysisini olmaylik uskunalarning ishlash muddati besh yillikning uchinchi yili boshida ishlash muddati 2 yilni tashkil qilgani uchun mehnat unumdorligi bir xil bo'ladi. Hosil bo'lgan natijalarni 6.8- jadvalga yozib olamiz.

6.8- jadval

Uskunalardan foydalanish muddati (yil hisobida)	$F_3(Y^{(3)})$ funksiyaning qiymati(ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlari
1	120	U_1
2	10	U_2

Besh yillik ikkinchi yilining boshida uskunalardan foydalanish muddati 1 yil bo'ladi: $Y^{(2)} = 1$. Bu yerda uskunani almashtirish kerakmi degan savol tug'iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagilarni hisoblaymiz:

$$F_2(U_2^{(2)}) = \max\begin{Bmatrix} R(Y^{(2)} = 1) - Z(Y^{(2)} = 1) + F_3(Y^{(3)} = 2) \\ R(Y^{(2)} = 0) - Z^{(3)}(Y^{(2)} = 0) - C_n + F_3(Y^{(3)} = 1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 105 \\ 80 - 20 - 40 + 120 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 155 \\ 144 \end{Bmatrix} = 155, \ U_1.$$

Bu natijaga asoslanib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

6.9- jadval

Uskunalardan foydalanish muddati (yil hisobida), $Y^{(4)}$ yil	$F_2(Y^{(2)})$ funksiyaning qiymati(ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlari
1	155	U_1

Masalaning shartiga ko'ra, besh yillikning boshida uskunalarni yangi uskunalar bilan almashtirish shart emas. Demak, boshqaruv vektori yoki shartli optimal yechim U_1 bo'ladi. Korxonaning daromadi esa

$$F_1(Y_1^{(1)} = 0) = R(Y_2^{(1)} = 0) - Z(Y_1^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215 \text{ so'm}.$$

Demak, korxonaning maksimum daromadi $F_1(Y^{(1)}) = 215$ so'mni tashkil qiladi. Shunday qilib, korxona uskunalarini almashtirishning optimal rejasini quyidagi jadval orqali ifodalash mumkin:

6.10- jadval

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="5">Uskunalarning ishlash yillari</td></tr>
<tr><td>1- yilda</td><td>2- yilda</td><td>3- yilda</td><td>4- yilda</td><td>5- yilda</td></tr>
<tr><td>Masalaning optimal yechimlari</td><td>Uskuna-larni almashti-rish kerak emas</td><td>Uskuna-larni almashti-rish kerak emas</td><td>Uskuna-larni almashti-rish kerak</td><td>Uskuna-larni almashti-rish kerak emas</td><td>Uskuna-larni almashti-rish kerak emas</td></tr>
</table>

6.5- masala. Katta ehtiyojga ega bo‘lgan mahsulotni ishlab chiqarish uchun uchta korxona kapital qurilishiga $S = 700$ ming so‘m mablag‘ ajratilgan. Bu mablag‘dan uchta korxonaga mos ravishda x_1, x_2, x_3 ming so‘mdan ishlatganda kapital qurilish hajmining o‘sishiga mos ravishda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning hajmi o‘sishi $F_i(x_i)$ so‘mni tashkil qiladi. Kapital qurilishga ajratilgan mablag‘ni korxonalar o‘rtasida shunday taqsimlangki, korxonalar ishga tushganda maksimum daromad beruvchi mahsulotlar ishlab chiqarish qobiliyatiga ega bo‘lsin. x_i va $F_i(x_i)$ miqdorlar quyidagi jadvalda berilgan:

6.11- jadval

<table>
<tr><td rowspan="2">Kapital qurilishga ajratilgan mab-lag‘ning hajmi, x_i (ming so‘m)</td><td colspan="3">Kapital qurilishga ajratilgan mablag‘ hajmiga asosan mahsulotlar ishlab chiqarishning o‘sish ko‘rsatkichi, $F_i(x_i)$ (ming hisobida).</td></tr>
<tr><td>1- korxona</td><td>2- korxona</td><td>3- korxona</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>30</td><td>50</td><td>40</td></tr>
<tr><td>200</td><td>50</td><td>80</td><td>50</td></tr>
<tr><td>300</td><td>90</td><td>90</td><td>110</td></tr>
<tr><td>400</td><td>110</td><td>150</td><td>120</td></tr>
<tr><td>50</td><td>170</td><td>190</td><td>180</td></tr>
<tr><td>600</td><td>180</td><td>210</td><td>220</td></tr>
<tr><td>700</td><td>210</td><td>220</td><td>240</td></tr>
</table>

Yechish. Masalani yechish uchun Bellmanning o‘zaro bog‘lanish rekurrent formulalarini tuzamiz. Bu masala uchun o‘zaro bog‘lanishni quyidagi funksional tenglamalar ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_i \le x} \lfloor F_1(x_1) \rfloor;$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} [F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)]; \qquad (6.7)$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x} [F_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_n)].$$

(6.7) formulada $\varphi_i(x)(i = \overline{1, n-1})$ — uchta korxonaga taqsimlangan x ming so'm kapital mablag' natijasida o'sish sur'ati (ko'rsatkichi). Shuning uchun $f_n(x)$ ning qiymatini $x = S = 700$ ming so'm deb olamiz. Chunki uchta korxona kapital qurilishiga $S = 700$ ming so'm ajratilgan. (6.7) formulani 6.11- jadval yordamida hisoblab chiqsak, u holda birinchi korxona uchun ajratilgan shartli optimal kapital mablag'ni aniqlash uchun $\varphi_i(x)$ ni $x = 0$, 100, 200, 300, 400, 500, 600 va 700 qiymatlarida 6.11- jadvalni qo'llab, hisoblab chiqamiz:

1) $x = 0$, $\varphi_1(0)=0$, o'sish yo'q, ya'ni $X_1^0 = 0$;

2) $x = 100$, $\varphi_2(100) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 100} \{0, 30\} = 30$, $X_2^0 = 100$;

3) $x = 200$, $\varphi_1(200) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 200} \{0, 30, 50\} = 50$, $X_3^0 = 200$;

4) $x = 300$, $\varphi_1(300) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 300} \{0, 30, 50, 90\} = 90$, $X_4^0 = 300$;

5) $x = 400$, $\varphi_1(400) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 400} \{0, 30, 50, 90, 110\} = 110$, $X_5^0 = 400$;

6) $x = 500$, $\varphi_1(500) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 500} \{0, 30, 50, 90, 110, 170\} = 170$, $X_6^0 = 500$;

7) $x = 600$, $\varphi_1(600) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 600} \{0, 30, 50, 90, 110, 170, 180\} = 180$, $X_6^0 = 600$;

8) $x = 700$, $\varphi_1(700) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 700} \{0, 30, 50, 90, 110, 170, 180, 210\} =$
$= 210$, $X_1^0 = 700$.

Hisoblash natijalarini va shartli optimal yechimlarni quyidagi jadvalga yozib olamiz:

Birinchi korxonaga ajratilgan x kapital mablag'ning hajmi (ming so'm)	$\varphi_i(x)$ maksimum o'sish ko'rsatkichi (ming so'm)	Birinchi korxonaga ajratilgan shartli optimal mablag' (ming so'm)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

6.11 va 6.12- jadvallardagi natijalarga asoslanib, ikkinchi korxonaga ajratilgan kapital mablag'ning shartli optimal hajmini hisoblash uchun

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \left[F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\right] \text{ ni } x = 0,\ 100,\ 200,\ 300,$$

400, 500, 600 va 700 qiymatlarida hisoblaymiz:

1) $x = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \ X_1^0 = 0;$

2) $x = 100,\ \ \varphi_2(100) = \max\limits_{0 \le x_2 \le 100} \begin{Bmatrix} 0 + 50 \\ 50 + 0 \end{Bmatrix} = 50,\ X_2^0 = 100;$

3) $x = 200,\ \ \varphi_2(200) = \max\limits_{0 \le x_2 \le 200} \begin{Bmatrix} 0 + 50 \\ 50 + 30 \\ 80 + 0 \end{Bmatrix} = 80,\ X_3^0 = 100;$

4) $x = 300,\ \ \varphi_2(300) = \max\limits_{0 \le x_2 \le 300} \begin{Bmatrix} 0 + 90 \\ 50 + 50 \\ 80 + 30 \\ 90 + 0 \end{Bmatrix} = 110,\ X_4^0 = 200;$

$$5)\ x=400,\quad \varphi_2(400)=\max_{0\le x_2\le 400}\begin{Bmatrix}0+110\\50+90\\80+50\\90+30\\150+0\end{Bmatrix}=150,\ X_5^0=400;$$

$$6)\ x=500,\quad \varphi_2(500)=\max_{0\le x_2\le 500}\begin{Bmatrix}0+170\\50+110\\80+90\\90+50\\150+30\\190+0\end{Bmatrix}=190,\quad X_6^0=500;$$

$$7)\ x=600,\quad \varphi_2(600)=\max_{0\le x_2\le 600}\begin{Bmatrix}0+180\\50+170\\80+110\\90+90\\150+50\\190+30\\210+0\end{Bmatrix}=220,\quad X_7^0=100;$$

$$8)\ x=700,\quad \varphi_2(700)=\max_{0\le x_2\le 700}\begin{Bmatrix}0+210\\50+80\\80+170\\90+110\\150+90\\210+30\\22+0\end{Bmatrix}=250,\quad X_8^0=200.$$

Olingan natijalarni va korxonaga ajratiladigan kapital mablag‘ning shartli optimal hajmlarini 6.13- jadvalga yozamiz.

Ikkita korxonaga ajratiladigan kapital mablag' hajmi, x (ming so'm)	$\varphi_2(x)$ maksimum o'sish ko'rsatkichi (ming so'm)	Ikkinchi korxonaga ajratiladigan shartli optimal mablag', x_2^0 (ming so'm)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	300
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

6.11- va 6.13- jadvalga asoslanib, $\varphi_3(x) = \max\limits_{0 \le x_3 \le x} [F_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)]$ funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz. Bu yerda korxonalar soni $n = 3$ bo'lgani uchun hisoblashni faqat $x = 700$ ming so'm uchun bajaramiz:

$$x = 700, \quad \varphi_3(700) = \max_{0 \le x_3 \le 700} \begin{Bmatrix} 0 + 250 \\ 40 + 220 \\ 50 + 190 \\ 100 + 150 \\ 120 + 110 \\ 180 + 80 \\ 220 + 50 \\ 240 + 0 \end{Bmatrix} = 270, X_1^0 = 600.$$

Demak, maksimum o'sish ko'rsatkichi $\varphi_3(700) = 270$ ming so'mni tashkil qiladi. Bu ko'rsatkichga erishish mumkin, faqatgina uchinchi korxonaga 600 ming so'm, birinchi va ikkinchi korxonalarga esa 100 ming so'm kapital mablag' ajratilsa. 6.13- jadvaldan ko'rinib turibdiki, ikkinchi korxonaga 100 ming so'm ajratish kerak.

TOPSHIRIQLAR

Dinamik programmalash usullarini qo'llab, quyidagi masalalarni yeching (**6.6—6.9**).

6.6- masala. To'rtta korxona qurish uchun 200 ming so'm sarmoya ajratilgan. Har bir korxona o'ziga ajratilgan sarmoyaning miqdoriga bog'liq ravishda turli miqdordagi daromadga erishadi. Bu daromadlar 6.14- jadvalda ko'rsatilgan.

6.14- jadval

Korxonalarga ajratiladigan sarmoya miqdori (ming so'm)	Korxonalarning daromadi			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
20	90	85	92	68

Mavjud sarmoyalarni korxonalararo shunday taqsimlash kerakki, natijada hamma korxonalar olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

6.7- masala. Ishlab chiqarish jarayonini tashkil qilish uchun korxona yangi uskunalar bilan yil boshida jihozlangan. Ishdan chiqqan uskunalar o'z vaqtida hisobdan chiqarilib, uning o'rniga narxi 10 ming so'mga teng bo'lgan yangi uskunalar qo'yiladi. Uskunalarning ish unumdorligi vaqt o'tishiga bog'liq bo'lib, unga ketadigan xarajatlar quyidagi jadvalda ko'rsatilgan.

6.15- jadval

	Uskunalarning ishlash vaqti (Y), (yil hisobida)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
„Y" ish muddatiga ega bo'lgan uskunaning bir yilda ishlab chiqargan mahsulotlarining narxi, $R(Y)$ (ming so'm)	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Uskunalarni ta'mirlash va saqlash uchun ketadigan bir yillik xarajatlar, $Z(Y)$ (ming so'm)	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

Jadvalda berilgan muddatga korxona uskunalarini almashtirishning optimal rejasini tuzing.

6.8- masala. 6.2- masalaning shartiga asosan kapital qurilishga ajratilgan mablag' S=100 ming so'mni tashkil etadi. Bu mablag'ni to'rtta korxonaga taqsimlashning optimal rejasini tuzing. Dastlabki berilganlar (x_i va $F_i(x_i)$ qiymatlar) 6.16- jadvalda berilgan.

6.16- jadval

Kapital qurilishga ajratilgan mablag'ninig hajmi, x_i (ming so'm)	Kapital qurilishga ajratilgan mablag' hajmiga asosan mahsulotlar ishlab chiqarishning o'sish ko'rsatkichi, $F_i(x_i)$ (ming so'm)			
	1-korxona	2-korxona	3-korxona	3-korxona
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

6.9- masala. Omborning umumiy hajmi W= 90 m^3. Firmaga hajmlari v_1= 24 m^3,v_2= 19 m^3,v_3= 16 m^3 bo'lgan konteynerlar bilan yuk olib kelindi. Bu konteynerlardan har birining narxi, mos ravishda, c_1 = 960 so'm, c_2 = 500 so'm, c_3 = 250 so'm. Omborga konteynerlarni shunday joylashtiringki, yuklar maksimum qiymatga ega bo'lsin.

VII BOB. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASH

1- §. Chiziqsiz programmalash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Faraz qilaylik, bizga yuklarni optimal joylashtirish masalalari berilgan bo‘lsin. Shu vaqtgacha bunday masalalarni yechganda har bir ishlab chiqarilgan mahsulot maksimal bo‘lishi uchun ishlab chiqarish xarajatlarini o‘zgarmas deb hisoblagan edik. Bundan keyin bu xarajatlarni o‘zgaruvchi (o‘zgarmas emas) deb qaraymiz. Ishlab chiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmiga proporsional emas. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi x_i korxona uchun x_i, korxona xarajatlari esa $f_i(x_i)$ funksiyaga teng bo‘ladi. Ishlab chiqarish quvvati esa har xil bo‘lishi mumkin (butun sonli, kasr sonli va h.k.).

Natijada ushbu iqtisodiy masala kelib chiqadi.

Quyidagi:

1) $X_i \geq 0$ (musbat miqdorda mahsulotlar tashilgan);

2) $X_i = \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij}$ (ishlab chiqarilgan mahsulotlar to‘laligicha iste’molchilarga yetkazilgan);

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = B_i, \quad j = \overline{1, \quad m}$ (har bir iste‘molchi eng kamida talabini qondiruvchi mahsulotlar hajmini oladi) shartlar bajarilganda

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) + \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$$

funksiyaning minimum qiymatini toping.

$F(x)$ maqsad funksiyasi va yuqoridagi shartlardan birortasi chiziqsiz bo‘lsa, bunday masalalar chiziqsiz programmalash masalalariga kiradi.

Shunday qilib, chiziqsiz programmalash masalasining ta’rifini quyidagicha yozish mumkin:

Quyidagi

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i & (i = \overline{1, \quad k}), \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i & (i = \overline{k+1, \quad m}) \end{cases} \tag{7.1}$$

shartlar bajarilganda

$$F(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{7.2}$$

funksiyaning maksimum(minimum) qiymatini toping. Bu yerda f va g_i — n o'zgaruvchili funksiyalar, b_i — berilgan sonlar, $\{\ge, \le, =\}$ belgilardan masalaning shartiga ko'ra faqat bittasi bo'ladi va shu bilan bir qatorda, turli munosabatlarga turli belgilar mos bo'lishi mumkin.

(7.1) va (7.2) shartlarda chegaraviy shartlar qatnashmasa, u holda bu masala *shartsiz optimallashtirish masalasi* deyiladi. Chegaraviy shartlar (7.1) shartga kiritilgan bo'lishi yoki bo'lmasligi mumkin, bunda (7.1), (7.2) masala quyidagicha berilgan bo'lishi mumkin:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad (i = \overline{1, \quad m}) \tag{7.3}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, n}); \tag{7.4}$$

$$F(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \quad (\min). \tag{7.5}$$

Noma'lumlarning manfiy emaslik sharti (7.4) qatnashmagan masalalarga bu shartlarni osonlik bilan kiritish mumkin.

E_n Evklid fazosida (7.1) sistema masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasini ifodalaydi.

Agar (7.1), (7.2) masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasi aniqlangan bo'lsa, u holda bu sohaning eng yuqori (eng chetki) yoki bo'lmasa eng quyi nuqtalari $f(x_1, x_2, ..., x_n) = R$ giperbolik sirtning (sath tekisligining) o'tgan nuqtalariga mos keladi.

Bu nuqtalar yechimlar sohasining chegara nuqtalarida yoki bo'lmasa sohaning ichki nuqtalarida ham joylashgan bo'lishi mumkin.

Chiziqsiz programmalash masalalarining geometrik talqini quyidagi bosqichlardan iborat:

1) (7.1) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi aniqlanadi (agar bu yechimlar sohasi bo'sh to'plamni tashkil qilsa, u holda masala yechimga ega emas);

2) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = R$ giperbolik sirt chiziladi;

3) eng yuqori va eng quyi giperbolik sath sirti aniqlanadi yoki

bo‘lmasa, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ning yuqoridan (quyidan) chegaralanmagani aniqlanadi (bu holda masala yechimga ega emas);

4) giperbolik sath tekisligi urinib o‘tgan eng chetki, eng quyi nuqta aniqlanadi va bu nuqtada $F(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ning qiymati aniqlanadi.

7.1- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \end{cases} \tag{7.6}$$

$$x_2 \le 4,$$

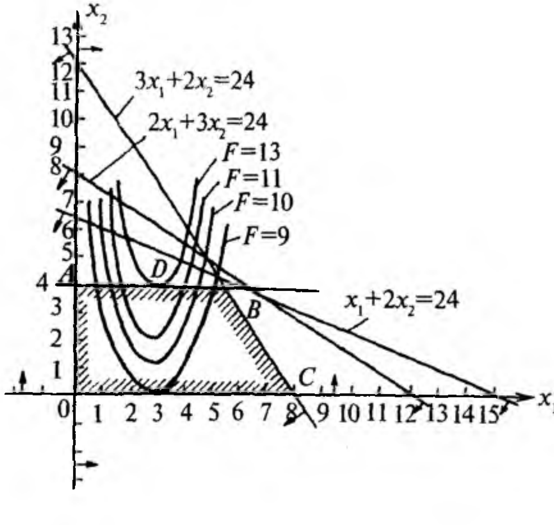
$$x_1, \quad x_2 \ge 0 \tag{7.7}$$

shartlarlarni qanoatlantiruvchi

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \tag{7.8}$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Oldin (7.6) sistemaning aniqlanish sohasini topamiz (7.1- chizma). Bu sistemaning mumkin bo‘lgan yechimlari sohasi $OABC$ ko‘pburchak bo‘ladi. $OABC$ ko‘pburchakning qaysi nuqtasida (7.8) funksiya maksimum qiymat qabul qilishini izlaymiz. Buning uchun $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$ sath egri chizig‘ini h ga qiymatlar berib chizamiz, bunda (7.8) egri chiziq paraboladan iborat bo‘lib,



7.1- chizma.

h ga qiymatlarni o'sib borish tartibida: 9,10,11,13 tartibida bersak, bu parabola OX o'qidan borgan sayin yuqoriga ko'tariladi. Natijada u $OABC$ ko'pburchagi bilan D nuqtasida urinadi. Demak, D nuqtada $F(x)$ funksiya maksimum qiymatga ega bo'ladi. D nuqtaning koordinatalarini quyidagi tenglamalar sistemasidan topamiz:

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, $x_1^* = 3;\quad x_2^* = 4$ ni hosil qilamiz.

$$F_{\max} = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13.$$

7.2- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10x_1 - x_2 \leq 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases} \tag{7.9}$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0 \tag{7.10}$$

shartalrni qanoatlantiruvchi

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

funksiyaning maksimum va minimum qiymatlarini toping.

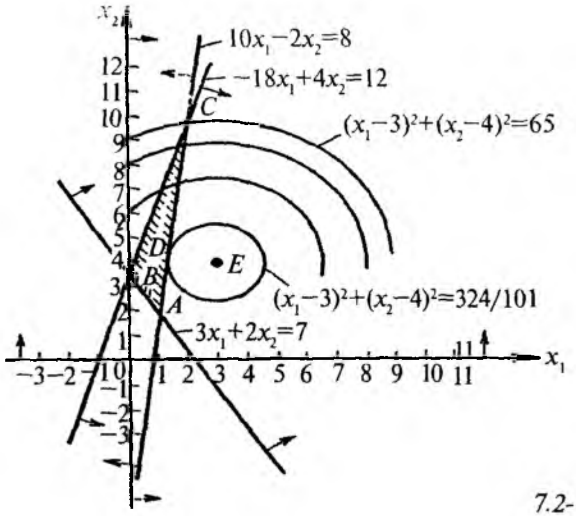
Yechish. (7.9)—(7.10) masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasi ABC uchburchakdan iborat. Maqsad funksiyasi $F = h$ deb olsak, $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$ aylana hosil bo'ladi. Bu aylananing markazi $E(3,4)$ nuqtada bo'lib, radiusi $R = \sqrt{h}$.

Agar h ga qiymatlar bersak, $F(x_1, x_2)$ funksiyaning qiymatlari h o'sganda o'sadi (h kamaysa $F(x_1, x_2)$ kamayadi) va D nuqtada maqsad funksiyasi yechimlari sohasi ABC uchburchakka urinib, urinish nuqtasida minimal qiymatga ega bo'ladi. D nuqta koordinatalarini topish uchun quyidagi to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlarining tengligidan foydalanamiz:

$10x_1 - x_2 = 8$ va aylanaga D nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq $2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0$, bu yerdan

$$x_2' = -\frac{x_1 - 2}{x_2 - 4} \cdot x_2 = 10x_1 + 8, \quad h = 10, \quad x_2' = h = 10$$

bo'lgani uchun quyidagi



7.2- chizma.

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

sistemani yechib, E nuqtaning koordinatalarini topamiz:

$$x_1' = 123/101; \quad x_2' = 422/101.$$

Shunday qilib, $F_{\min} = (\frac{123}{101} - 3)^2 + (\frac{422}{101} - 4)^2 = \frac{324}{101}.$

7.2- chizmadan ko'rinib turibdiki, agar (7.10) aylana radiusi h ning qiymatlarini oshirib borsak, u C nuqtada maksimum qiymatga ega bo'ladi.

C nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

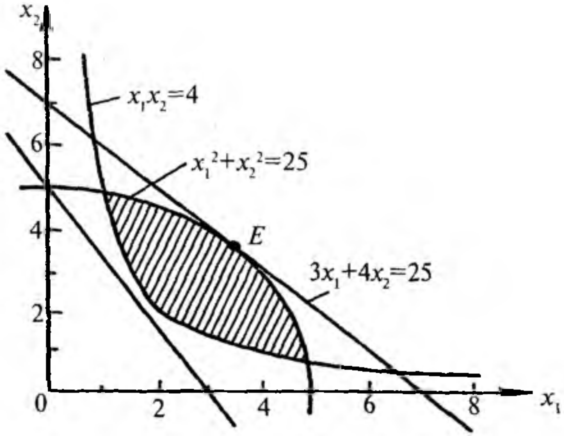
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases}$$

Natijada $C(2; 12)$ nuqtaning koordinatalari hosil bo'ladi. Shunday qilib, funktsiyaning maksimal qiymati quyidagiga teng bo'ladi:

$$F_{\max} = 65.$$

7.3- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 \quad x_2 \ge 4, \end{cases} \tag{7.11}$$



7.3- chizma.

$$x_1, x_2 \geq 0 \tag{7.12}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$F = 3x_1 + 4x_2 \tag{7.13}$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Bu masalaning aniqlanish sohasi 7.3- chizmada ko'rsatilgan. Chizmadan ko'rinib turibdiki, maqsad funksiyasi $x_1^2 + x_2^2 = 25$ maksimum qiymatga to'g'ri chiziq aylanaga uringan E nuqtada erishadi. E nuqtaning koordinatalarini topish uchun $3x_1 + 4x_2 = k$ va $x_1^2 + x_2^2 = 25$ aylanalarga o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari tengligidan foydalanamiz. Aylananing tenglamasidan x_2 ni x_1 ga nisbatan oshkormas funksiya deb olib differensiallasak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$2x_1 + 2x_2x_2' = 0.$$

Shunday qilib, E nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

sistemani yechib, bundan $x_1^* = 4; \quad x_2^* = 3$ ni hosil qilamiz. Demak,

$$F_{\max} = 3^2 + 4^2 = 25.$$

TOPSHIRIQLAR

Chiziqsiz programmalash masalalarini yeching (**7.4—7.7**):

7.4- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \geq 4, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.5- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.6- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x_1, x_2) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.7- masala. Quyidagi

$$\begin{cases} x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq 1, \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \geq 0, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

2- §. Lagranjning ko'paytmalar usuli

Cheklashlari tenglik tarzida bo'lgan masalalarni Lagranjning ko'paytuvchilar usuli yordamida yechish. Chiziqsiz programmalashning quyidagi masalasi berilgan bo'lsin:

$$Z = f(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n) \tag{7.14}$$

funksiyaning

$$g_i(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n) = 0, \ i = 1, \ 2, \ ..., \ m \tag{7.15}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi maksimum qiymati topilsin. $Z = f(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n)$ va $g_i(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n)$, $(i = 1, \ 2, \ ..., \ m)$ funksiyalar birinchi tartibli xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsin. Bu masalani yechish uchun quyidagi funksiyani tuzamiz:

$$F(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n, \lambda_1, \ \lambda_2, \ ..., \ \lambda_m) =$$

$$= f(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n). \tag{7.16}$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi xususiy hosilalarni olamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_m}, \quad \text{va} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \tag{7.17}$$

va ularni nolga tenglashtiramiz, natijada quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \ j = 1, \ 2, \ ..., \ n, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, \ x_2, \ x_n) = 0, \ i = 1, \ 2, \ ..., \ m. \end{cases} \tag{7.18}$$

(7.16)- funksiya *Lagranj funksiyasi*, λ_i sonlar *Lagranj ko'paytuvchilari* deyiladi. $Z = f(x_1, \ x_2, \ ..., \ x_n)$ funksiya biror $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ x_2^{(0)}, \ ..., \ x_n^{(0)})$ nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, shunday $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \ \lambda_2^{(0)}, \ ..., \ \lambda_n^{(0)})$ vektor topiladiki $(x_1^{(0)}, \ x_2^{(0)}, \ ..., \ x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \ \lambda_2^{(0)}, \ ..., \ \lambda_m^{(0)})$ nuqta (7.18) tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. Demak, (7.14) tenglamalar sistemasi uchun shunday nuqtalar to'plamini topamizki, bu nuqtalarda Z funksiya ekstremum qiymatlarga ega bo'lishi mumkin. Bunda global minimum yoki maksimumni topish qoidasi noma'lum bo'ladi. Lekin tenglamalar sistemasining yechimi topilgan bo'lsa, global maksimum (minimum)ni topish uchun bu nuqtalardagi funksiya qiymatlarini topib, ularni solishtirish bilan natijaga ega bo'lish mumkin. $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ funksiyalar ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega va ular uzluksiz bo'lsa, (7.14) sistema yechimi bo'lgan nuqtalarda lokal ekstremumga ega bo'lishining yetarli shartini ko'rsatish mumkin. Lekin, bunday shartni keltirib chiqarishning amaliy ahamiyati katta emas.

Demak, (7.14), (7.15) masalalarning Lagranjning ko'paytmalar usuli bilan ekstremal nuqtalarini topish quyidagi hollarni o'z ichiga oladi:

1) Lagranj funksiyasi tuziladi;

2) Lagranj funksiyasidan x_j va λ_i bo'yicha xususiy hosilalar olinib, ular nolga tenglashtiriladi;

3) (7.18) sistemani yechib, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ maqsad funksiyasi ekstremumga ega bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalari topiladi;

4) ekstremumga ega bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalar ichidan ekstremumga ega bo'lgan nuqtalarni topib, maqsad funksiyasining bu nuqtalardagi qiymati hisoblanadi.

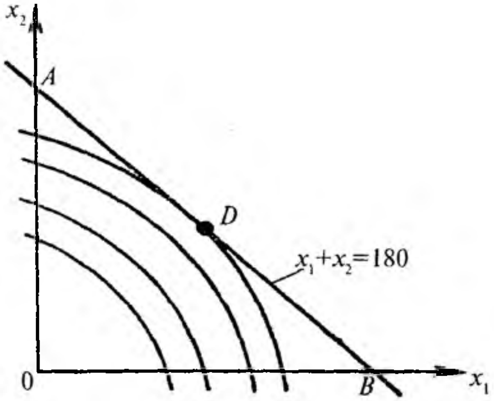
7.8- masala. Ishlab chiqarish korxonasining rejasi bo'yicha 180 ta buyum chiqarilishi mo'ljallangan. Bu buyumlarni ishlab chiqarish uchun ikki xil texnologik jarayon ishlatiladi. Birinchi texnologik usulni qo'llab, x_1 dona buyumlarni tayyorlaganda, xarajatlar $4x_1 + x_1^2$ so'mni, ikkinchi xil jarayonni qo'llab x_2 dona buyumlarni tayyorlaganda esa xarajatlar $8x_2 + x_2^2$ so'mni tashkil etadi. Korxona rejasini shunday tuzinki, ikki xil usul bilan ishlab chiqarishda buyumlarga ketgan xarajatlar minimal bo'lsin.

Yechish. Masalaning sharti bo'yicha $f = 4x_1 + x_1^2 + 8 \quad x_2 + x_2^2$ funksiyaning minimal qiymatini $x_1 + \quad x_2 = 180,\ x_1, x_2 \geq 0$ shartlar bajarilganda topish kerak, ya'ni

$$x_1 + x_2 = 180, \qquad (7.19)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (7.20)$$

shartlar bajarilganda



7.4- chizma.

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = (x_1+2)^2 + (x_2+4)^2 - 20 \to \min. \quad (7.21)$$

Oldin masalani geometrik usulni qo‘llab yechamiz. (7.21) funksiya markazi $(-2;-4)$ nuqtada bo‘lgan aylanadan iborat. Bu masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi $x_1 + x_2 = 180$ to‘g‘ri chiziq tashkil qilgan AB kesma ustida joylashgan bo‘lib (7.4- chizma), sath chizig‘ining markazi $E(-2;-4)$ nuqtada joylashgan aylanadan iborat. Ushbu

$$(x_1+2)^2 + (x_2+4)^2 = C \quad (7.22)$$

aylananing $x_1 + x_2 = 180$ to‘g‘ri chiziqqa uringan D nuqtasida maqsad funksiyasi $f(x)$ minimum qiymatga ega bo‘ladi.

(7.22) tenglamadagi C ga qiymatlar berib borsak, aylana $x_1 + x_2 = 180$ to‘g‘ri chiziqqa D nuqtada urinadi.

Aylanaga D nuqtada o‘tkazilgan urinma chiziqning burchak koeffitsiyenti AB to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentiga teng bo‘lib, $k=-1$ bo‘ladi.

Agar aylana tenglamasidagi x_2 ni oshkormas funksiya deb, x_1 argument bo‘yicha hosila olsak, quyidagi hosil bo‘ladi:

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2x_2' = 0 \text{ yoki } x_2' = -(2+x_1)/(4+x_2).$$

Yuqordagilarga asosan, $k = x_2' = -1$. Demak,

$$-1 = -(2+x_1)/(4+x_2) \quad \text{yoki} \quad x_1 - x_2 = 2.$$

D nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 91, \\ x_2 = 89. \end{cases}$$

Bu yerda optimal yechim $x_1^* = 91$, $x_2^* = 89$ bo'ladi. Shunday qilib, birinchi xil texnologik jarayon bilan $x_1^* = 91$, ikkinchi texnologik jarayon bilan $x_2^* = 89$ dona buyum ishlab chiqarilganda maqsad funksiyasi eng kam qiymat qabul qiladi va xarajatlar $f_{\min} = 17278$ so'mni tashkil etadi.

Endi (7.19)—(7.21) masalani Lagranjning ko'paytmalar usulini qo'llab yechamiz. Buning uchun oldin Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8 \quad x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

Endi x_1, x_2, λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz va xususiy hosilalarni nolga tenglashtiramiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.22')$$

Sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalardan λ ni topib olib tenglashtirsak, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 180. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechib, $D(x_1^*, x_2^*)$ nuqtaning koordinatalarini topamiz: $x_1^* = 91$, $x_2^* = 89$.

Bu nuqta ekstremumga shubhali nuqta hisoblanadi.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni (7.22′) dan topamiz:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_1} = 2, \\
B &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_2} = 0, \\
C &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (8 + 2x_2 - \lambda)'_{x_2} = 2.
\end{aligned}\right\}$$

Ikki o'zgaruvchili funksiya ekstremumi haqidagi teoremaga asosan

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2 > 0 \quad \text{va} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

bo'lgani uchun $D(91;89)$ nuqtada $F(x_1, x_2)$ funksiya minimumga ega.

7.9- masala. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

shartlar bajarilganda $f = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$ funksiyaning shartli ekstremumga ega bo'lgan nuqtasini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1(2 - x_1 - x_2) + \lambda_2(2 - x_2 - x_3).$$

Bu funksiyadan birinchi tartibli xususiy hosilalarni olib, nolga tenglashtirsak, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 - \lambda_1 = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= x_1 + x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial x_3} &= x_2 - \lambda_2 = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= 2 - x_1 - x_2 = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= 2 - x_2 - x_3 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadagi birinchi va uchunchi tenglamadan $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$. Shuning uchun

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechsak, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ bo'ladi. U holda

$$f_{\max} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2.$$

7.10- masala. Quyidagi $x_1 + x_2 = 7$ shartda $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ funksiyaning $0 \le x_1 \le 5$, $0 \le x_2 \le 10$ sohadagi shartli ekstremumini tekshiring.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(7 - x_1 - x_2).$$

$F(x_1, x_2, \lambda)$ funksiyadan x_1, x_2, λ bo'yicha xususiy hosilalarni olib, nolga tenglashtirsak, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 2) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 3) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 7 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalaridan λ ni topib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

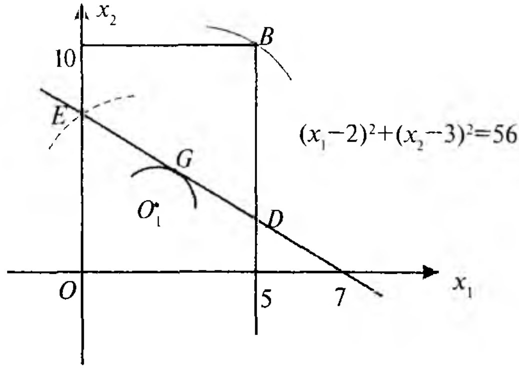
$$2(x_1 - 2) = 2(x_2 - 3).$$

Bu tenglamani yuqoridagi sistemaning uchinchi tenglamasi bilan birgalikda yechsak, y'ani

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x_1 = 3$ va $x_2 = 2$ yechimlar topiladi.

Masalaning geometrik shaklini chizsak, 7.5- chizma hosil bo'ladi.



7.5- chizma.

Sistemaning aniqlanish sohasi $OABC$ yopiq soha. Shuning uchun global va lokal ekstremumlar mavjud. Bog'lanish tenglamasi DE kesma to'rtburchak ichiga joylashgan. Demak, $F(x_1, x_2)$ funksiyaning qiymatlarini DE kesmada yotgan nuqtalarda taqqoslab tekshiramiz. $(x_1-2)^2+(x_2-3)^2=k$ sath chizig'i tenglamasi bo'lib, markazi $O_1(2;\ 3)$ nuqtada joylashgan. 7.5- chizmadan ko'rinib turibdiki, shartsiz ekstremumga $O_1(2;\ 3)$ va $B(5;\ 10)$ nuqtalarda erishiladi:

$$F_{O_1\ \min}=(2-2)^2+(3-3)^2=0,$$

$$F_{B\ \max}=(5-2)^2+(10-3)^2=9+49=58.$$

Shu bilan bir qatorda $F_{O_1\ \min}=0$ ham lokal, ham global minimum bo'ladi. $F_{B\ \max}=58$ esa global maksimumga ega bo'ladi.

Agar faqat DE to'g'ri chiziq ustida yotgan nuqtalarni ko'rib chiqsak, shartli global maksimumga $E(0;\ 7)$ nuqtada erishiladi va $F_{E\ \max}=(0-2)^2+(7-3)^2=20$. G nuqtaning koordinatalarini topish uchun aylanaga urinma chiziq tenglamasini tuzamiz:

$F_{x_2^1}(x_1, x_2)=2(x_1-2)+2(x_2-3)x_2^1=0$, $x_2^1=k_{DE}=-1$ bo'lgani uchun

$$2(x_1-2)+2(x_2-3)(-1)=0,$$
$$2x_1-2x_2+2=0$$

va quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0, \\ x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

Bundan

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 4.$$

Demak, G nuqtaning koordinatalari $x_1 = 3; x_2 = 4$ bo‘lib, $F_{G\ \min} = 2$. Shunday qilib, G statsionar nuqtaning koordinatalarini topdik.

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi masalalarda (7.18)—(7.19) Lagranj usulini qo‘llab statsionar nuqtalarni toping va shartli ekstremumlarni aniqlang:

7.11. $F = x_1^2 + x_2^2$, $\quad x_1 + x_2 = 1$ bo‘lganda.

7.12. $F = 3x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1 + 1$, $\quad x_1^2 + x_2^2 = 4$ bo‘lganda.

7.13. $F = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2$, $x_1 + x_2 \le 10$ sohada $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $\quad x_1 + x_2 = 6$ bo‘lganda.

7.14. $F = x_1^2 - x_2^2$, $\quad x_1^2 + x_2^2 \le 16$ sohada $x_1 - x_2 = 4$ bo‘lganda.

Quyidagi masalalarda (7.18—7.20) Lagranj usulini qo‘llab, shartli ekstremumlarni tekshirib, statsionar nuqtalarni toping:

7.15. $F = x_1 + x_2 + x_3$, $\quad \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 1$ bo‘lganda.

7.16. $F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ va $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 12$ bo‘lganda.

7.17. $F = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$, $\quad \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = 1$ bo‘lganda.

3- §. Qavariq programmalash masalalari

Quyidagi

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{7.23}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{7.24}$$

$$f(x_1, x_2, .., x_n) \to \max \tag{7.25}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi chiziqsiz programmalash masalasi berilgan bo‘lsin. Bu yerda f va g_i x_1, x_2, ..., x_n o‘zgaruvchilarga bog‘liq funksiyalar. Yuqorida ko‘rsatilgan masalani yechish uchun birorta umumiy usul yo‘q. Shuning uchun f va g_i funksiyalarga har xil shartlar qo‘yib, chiziqsiz programmalash masalalarini kerakli usullar yordamida yechish mumkin.

Xususiy holda, (7.25) funksiya qavariq (botiq) funksiya, (7.24) va (7.23) qavariq soha shartlari bajarilganda masalalarni yechish mumkin.

Shuning uchun quyidagi ayrim zarur ta’rif va teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

7.1- ta’rif. Agar $f(x_1, x_2, .., x_n)$ funksiya $G \subset E_n$ qavariq to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy $X_1 \in G$, $X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ son uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1) \qquad (7.26)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(X)$ funksiya *qavariq* deyiladi.

7.2- ta’rif. Agar $f(x_1, x_2, .., x_n)$ funksiya $G \subset E_n$ qavariq to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ixtiyoriy $X_1 \in G$, $X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \lambda \le 1$ son uchun

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1) \qquad (7.27)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(X)$ funksiya *botiq* deyiladi.

7.3- ta’rif. Agar $f(x_1, x_2, .., x_n)$ qavariq (botiq) funksiya bo‘lib, $g_i(X)$ $(i = \overline{1, m})$ qavariq bo‘lsa, u holda (7.23)—(7.25) masala *qavariq programmalash masalasi* deyiladi.

7.1- teorema. *Qavariq programmalash masalasining istalgan lokal maksimumi (minimumi) global maksimum (minimum) bo‘ladi.*

7.4- ta’rif. L funksiya (7.23)—(7.25) qavariq programmalash masalasining *Lagranj funksiyasi deyiladi*, bu yerda

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+\sum_{i=1}^{m} y_i [b_i - g_i(x_1, x_2 ..., x_n)], \qquad (7.28)$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ — Lagranj ko‘paytuvchilari.

7.5- ta’rif. Agar barcha $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1, n})$ va $y_i \ge 0$ $(i = \overline{1, m})$ lar uchun

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) \le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$$
$$\le L(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1, y_2, ..., y_m)$$

bo‘lsa, $(X_0, \lambda_0) = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; y_1^0; y_2^0; ...; y_m^0)$ nuqta *Lagranj funksiyasining egar nuqtasi* deyiladi.

Qavariq funksiyalarga oid ayrim xossalarni va teoremalarni isbotsiz keltiramiz:

1. G qavariq to‘plamda $f(x_1, x_2, .., x_n)$ funksiya pastga qavariq bo‘lsa, ixtiyoriy haqiqiy b son uchun $f(x_1, x_2, .., x_n) \le b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi.

2. G qavariq to‘plamda $f(x_1, x_2, .., x_n)$ funksiya yuqoriga qavariq bo‘lsa, b ixtiyoriy son bo‘lganda, $f(x_1, x_2, .., x_n) \ge b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi.

3. Ikkita G_1 va G_2 qavariq to‘plamning kesishmasi ham qavariq to‘plam bo‘lganligi sababli: G qavariq to‘plamda aniqlangan $g_i(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ $(i = \overline{1, m})$ funksiyalar qavariq (botiq) bo‘lib, b_i $(i = \overline{1, m})$ ixtiyoriy sonlar bo‘lganda

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_m) \le b_i, \quad (g_i(x_1, x_2, ..., x_m) \le b_i), \quad (i = \overline{1, m})$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami pastga (yuqoriga) qavariq to‘plam bo‘ladi (1 va 2- xossalarga asosan).

4. G qavariq to‘plamda aniqlangan $g_i(x_1, x_2, ..., x_m)$ funksiya qavariq (botiq) bo‘lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_m) \tag{7.29}$$

funksiya ham qavariq (botiq) bo‘ladi.

5. G qavariq to‘plamda aniqlangan $f(x_1, x_2, .., x_n)$ funksiya qavariq (botiq) bo‘lishi uchun u o‘z ichiga olgan noma’lumlarning ixtiyoriy biri bo‘yicha, qolganlarining belgilab olingan qiymatlarida, qavariq (botiq) bo‘lishi zarur va yetarlidir.

6. Agar $f_j(x_1, x_2, .., x_n)$, $j = \overline{1, n}$ funksiyalar G qavariq to‘plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo‘lsa, $f(x_1, x_2, .., x_n)$ =max $f_j(x_1, x_2, .., x_n)$, $(1 \le j \le m)$ funksiya ham qavariq bo‘ladi. Agar

kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g_i(X) > b_i$ $(i = \overline{1,m})$ tengsizlik bajarilsa, ya'ni Sleyter sharti bajarilsa, u holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi (Kun — Takker teoremasi).

7.2- teorema. *$X_0 = (x_1^0; x_2^0; ..; x_n^0) \geq 0$ nuqta (7.23) — (7.25) masalaning optimal yechimi bo'lishi uchun bu nuqtada*

$$\frac{\partial L(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; \lambda_1^0; \lambda_2^0; ...; \lambda_m^0)}{\partial x_j} \leq 0, \tag{7.30}$$

$$x_j^0 \frac{\partial L(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\partial x_j} = 0, \qquad x_j^0 \geq 0, \tag{7.31}$$

$$\frac{\partial L(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; \lambda_1^0; \lambda_2^0; ...; \lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} \geq 0, \tag{7.32}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; \lambda_1^0; \lambda_2^0; ...; \lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0 \tag{7.33}$$

$$(i = \overline{1,m}; \qquad j = \overline{1,n})$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

7.18- masala. Quydagi

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 12, \end{aligned}\right\} \tag{7.34}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \tag{7.35}$$

shartlarda

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \tag{7.36}$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. f funksiya botiq funksiya, chunki $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$ chiziqli funksiyalar yig'indisidan iborat (shuning uchun uni botiq funksiya sifatida ko'rish mumkin) va $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ funksiya esa manfiy aniqlangan funksiya bo'lib, botiq funksiya hisoblanadi. (7.34) sistema esa chiziqli tengsizliklar sistemasidan iborat.

Demak, Kun — Takker teoremasidan foydalansa bo'ladi.

Dastlab Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1(8 - x_1 - 2x_2) + y_2(12 - 2x_1 + x_2).$$

Lagranj funksiyasi $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ga (7.30)—-(7.33) shartlarni qo'llasak, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \le 0, \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \le 0, \\
\frac{\partial L}{\partial y_1} &= 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\
\frac{\partial L}{\partial y_2} &= 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0;
\end{aligned}
\right\} \tag{7.37}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_1(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 = 0, \\
x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_2(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2) = 0, \\
y_1 \frac{\partial L}{\partial y_1} &= y_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\
y_2 \frac{\partial L}{\partial y_2} &= y_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0,
\end{aligned}
\right\} \tag{7.38}
$$

$$
x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0 . \tag{7.39}
$$

(7.37) sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$
\left.
\begin{aligned}
2x_1 + y_1 + 2y_2 &\ge 2, \\
4x_2 + 2y_1 - y_2 &\ge 4, \\
x_1 + 2x_2 &\le 8, \\
2x_1 - x_2 &\le 12.
\end{aligned}
\right\} \tag{7.40}
$$

(7.40) sistemaga qo‘shimcha musbat bazisli o‘zgaruvchilar kiritib, quyidagi sistemani hosil qilamiz $(v_1, v_2, w_1$ va $w_2)$:

$$
\left.
\begin{aligned}
2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 &= 2, \\
4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 &= 4, \\
x_1 + 2x_2 + w_1 &= 8, \\
2x_1 - x_2 + w_2 &= 12,
\end{aligned}
\right\} \tag{7.41}
$$

$$
x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \ge 0 \tag{7.42}
$$

(7.41) sistemani hisobga olib, quyidagini yozib olish mumkin:

$$v_1 x_1 = 0, \quad v_2 x_2 = 0, \quad w_1 y_1 = 0, \quad w_2 y_2 = 0 \tag{7.43}$$

Agar (7.41) sistemaning bazisli yechimlarini (7.43) shartlarni hisobga olib yechsak, Lagranj funksiyasining egarli nuqtasi topiladi va shu bilan masalaning optimal yechimi aniqlanadi. (7.41) sistemaning bazisli yechimlarini topish uchun chiziqli programmalashning sun'iy bazis usulidan foydalanamiz. Bu usuldan foydalanish uchun sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo'shimcha z_1 va z_2 musbat o'zgaruvchilar kiritib, chiziqli programmalashning quyidagi masalasiga keltiramiz:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 &= 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 + z_2 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 &= 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 &= 12, \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

$$\overline{F} = -Mz_1 - Mz_2 \to \max, \tag{7.45}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0. \qquad (746)$$

(7.44)—(7.46) masalani yechish paytida hamma vaqt (7.43) shartni hisobga olib, (7.44) sistemaning yechimini topamiz.

7.1- jadval

№	Bazis	S_0	R_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2
1	z_1	$-M$	2	2	0	1	2	−1	0	0	0	1	0
2	z_2	$-M$	4	0	4	2	−1	0	−1	0	0	0	1
3	w_1	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	w_2	0	12	2	−1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			−6	−2	−4	−3	−1	1	1	0	0	0	0

7.2- jadval

№	Bazis	S_0	R_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2
1	z_1	–	2	2	0	1	2	−1	1	0	0	1	0
2	z_2	M	1	0	1	1/2	−1/4	0	0	0	0	0	1/4
3	w_1	0	6	1	0	0−1	1/2	0	−1/4	1	0	0	−1/2

4	w_2	0	13	2	0	1/2	−1/4	0	1/2	0	0	0	1/4
5		0	0	0	0	0	0	0	−1/4	0	1	0	0
6			−2	−2	0	−1	−2	1	0	0	0	0	1

7.3- jadval

№	Bazis	S_0	R_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				x_1	x_2	y_1	y_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2
1	z_1	0	1	1	0	1/2	1	−1/2	0	0	0	1/2	0
2	z_2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	w_1	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	w_2	0	11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Bu jadvalga asosan yechim quyidagilarga teng:

$$x_1^0 = 1, \quad x_2^0 = 1, \quad w_1 = 5; \quad w_2 = 11; \quad y_1^0 = y_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Yuqoridagilarga asosan

$$v_1 x_1^0 = 0, \quad v_2 x_2^0 = 0, \quad w_1 y_1^0 = 0, \quad w_2 y_2^0 = 0, \ (X_0; Y_0) = (1; 1; 0; 0)$$

nuqta (7.23)—(7.25) masalaga tuzilgan Lagranj funksiyasi uchun egar nuqtasi bo‘ladi.

Demak, $X^* = (1;\ 1)$ (7.23)—(7.25) masalaning optimal qiymati $f_{\max} = 3$.

7.19- masala. Kun—Takker shartlaridan foydalanib, $X^0 = (1;0)$ nuqta quyidagi chiziqsiz programmalash masalasining yechimi ekanligini ko‘rsating:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\le 8, \\ 2x_1 + x_2 &\le 4. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$F_{\min} = f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2.$$

Yechish. $X^0 = (1,0)$ nuqtada Sleyter shartlari bajariladi. (Shartlar qatiy tengsizlikka aylanadi.) Demak, bu holda $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilishimiz mumkin.

Yuqoridagi asosiy masala shartlariga asoslanib Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 - \lambda_1(8 - 4x_1 - 5x_2) - \lambda_2(4 - 2x_1 - x_2)$,

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}.$$

Kun—Takker shartlarining bajarilishini tekshirib chiqsak:

$$\frac{\partial L(x_1^0, x_2^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)}{\partial x_1} = (2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2)x^0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_2} = (6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2)x^0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^0, x^0)}{\partial \lambda_1} = (4x_1 + 5x_2 - 8)x^0 = -4 < 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1^0, \lambda_2^0)}{\partial \lambda_2} = (2x_1 + x_2 - 4)x^0 = -2 < 0,$$

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_1} \cdot x_1^0 = 0, \frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial x_2} X_2^0 = 0, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda^0{}_{T1}} \cdot \lambda_1^0 = 0 \Rightarrow (-4) \cdot 0 \rightarrow \lambda_1^0 = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_2^0, x^0)}{\partial \lambda_2} \cdot \lambda_2^0 = 0 \Rightarrow (-2)\lambda_2^0 \Rightarrow 0 \Rightarrow \lambda_2^0 = 0.$$

Shunday qilib, $(x^0, \lambda^0) = (1,0;0;0)$ nuqta Kun—Takker teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x^0, \lambda^0) = (1,0;0;0)$ nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo‘ladi. Shuning uchun X^0 (1;0) nuqta dastlabki berilgan chiziqsiz programmalash masalasining yechimi bo‘ladi va

$$f_{\min} = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -1 \ .$$

TOPSHIRIQLAR

7.20- masala. Kun—Takker teoremasining shartlaridan foydalanib, $x^0(0,8;\ 0,4)$ nuqta quyidagi qavariq programmalash masalasining yechimi ekanligini ko‘rsating:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$f_{max} = f_1(x_1,\ x_2) = -x_1^2 - x_2^2$$

Quyidagi qavariq programmalash masalalarini yeching

7.21- masala.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$f(x_1,\ x_2) = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 > \max.$$

7.22- masala.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \leq 5, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$$f(x_1,\ x_2) = x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 > \max.$$

4- §. Kvadratik programmalash masalalari

Kvadratik programmalash masalasi qavariq programmalash masalasining xususiy bir holidir. Faqat uning matematik modelidagi chegaraviy shartlar chiziqli tenglama va tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa umumiy holda chiziqli va kvadratik formalarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \ \{\leq, =, \geq\}\ b_i, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{7.47}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{7.48}$$

$$\begin{aligned} f(X) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j + d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \ldots + d_{nn}x_n^2 + \\ +2d_{12}x_1x_2 + 2d_{13}x_1x_3 + \ldots + 2d_{n-1n}x_{n-1}x_n. \end{aligned} \tag{7.49}$$

(7.47)—(7.49) kvadratik programmalash masalalarini yechish uchun ayrim zarur bo'lgan ta'rif va teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

7.6- ta'rif. Quyidagi

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}=d_{11}x_1^2+d_{22}x_2^2+\ldots d_{nn}x_n^2+2d_{12}x_1x_2+$$
$$+2d_{13}x_1x_3+\ldots+2d_{n-1}x_{n-1} \qquad (7.50)$$

ko'rinishdagi x_1, x_2, ..., x_n o'zgaruvchilarga nisbatan o'zgaruvchi sonli funksiya *kvadratik forma* deyiladi.

(7.50) formani vektor ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x)=X'DX, \qquad (7.51)$$

bu yerda

$$X'=(\ x_1,x_2,\ldots,x_n\ ),\ (dij=d_{ij}),\ i,j=1,\ n.$$

$$D=\begin{pmatrix} d_{11}d_{12}\ldots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\ldots d_{2n} \\ ------ \\ d_{n1}d_{n2}\ldots d_{nn}\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}.$$

(7.49) kvadratik funksiyaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi (7.50) kvadratik formaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishiga bog'liqdir.

7.7- ta'rif. $X=0$ dan boshqa barcha $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n)$ lar uchun $f(X)<0$ o'rinli bo'lsa, $f(X)$ *manfiy aniqlangan kvadratik forma* deyiladi.

7.8- ta'rif. $X=0$ dan boshqa barcha $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ lar uchun $f(X)>0$ o'rinli bo'lsa, $f(X)$ *musbat aniqlangan kvadratik forma* deyiladi.

7.9- ta'rif. Agar $X'DX$ kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'lsa, $X'DX$ kvadratik formaga *nomanfiy aniqlangan* deyiladi.

7.10- ta'rif. Agar $X'DX\le 0$ tengsizlik barcha $X\neq 0$ lar uchun to'g'ri bo'lsa va $X=0$ uchun $X'DX=0$ bajarilsa, $X'DX$ *nomusbat aniqlangan kvadratik forma* deyiladi.

7.3- teorema. *Agar* $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d_{ij}x_{ij}$ *kvadratik formada barcha tartibdagi*

$$D_1=d_{11},\ D_2=\begin{vmatrix} d_{11}d_{12} \\ d_{21}d_{22}\end{vmatrix},\ldots,\ D_n=\begin{vmatrix} d_{11}d_{12}\ldots d_{1n} \\ d_{21}d_{22}\ldots d_{2n} \\ d_{n1}d_{n2}\ldots d_{nn}\end{vmatrix},\ D_i=\overline{1,n}$$

aniqlovchilar noldan farqli bo'lsa, $f(x_1,x_2, \ldots,x_n)$ kvadratik formani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1,x_2, \ldots,x_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2,$$

bu yerda $\alpha_i = \dfrac{D_i}{D_1}, i = \overline{1,n}$.

Demak, α_i koeffitsiyentlarning ishorasi D_i aniqlovchilarning ishoralariga bog'liq bo'lib, kvadratik formaning ko'rinishini aniqlaydi va quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. Agar $D_1, D_2, \ldots, D_n$ aniqlovchilarning har biri musbat bo'lsa, $f(X)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi.

2. Agar, D_i, $i = \overline{1,n}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar navbat bilan almashib kelsa va α_i koeffitsiyentlar manfiy bo'lsa, $f(X)$ forma manfiy aniqlangan bo'ladi.

3. Agar D matritsaning rangi $r < n$ bo'lsa hamda D_i, $i = \overline{1,n}$ aniqlovchilar musbat ishorali bo'lib, qolganlari nolga teng bo'lsa, $f(X)$ kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.

4. Agar D matritsaning rangi $r < n$ bo'lib, $1, D_i$, $i = \overline{1,n}$ qatorda ishoralar almashib kelsa hamda $D_{r+i} = 0$ $i = \overline{1,n}$ bo'lsa, kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'ladi.

5. Agar, 1, D_i, $i = \overline{1,n}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar almashmasa hamda manfiy ishorali aniqlovchilar mavjud bo'lsa, $f(X)$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

7.23- masala. Quyidagi kvadratik formaning ko'rinishi aniqlansin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2.$$

Yechish.

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -\dfrac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D_1 = -2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +2 - 1 = 1, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -\dfrac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2\frac{3}{4}.$$

Demak, $1,\ D_1,\ D_2,\ D_3$, ya'ni $1,\ -2,\ 1,\ -2\frac{3}{4}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar navbat bilan almashgani uchun $F(x_1,\ x_2,\ x_3)$ forma manfiy aniqlangandir.

7.4- teorema. *Nomanfiy $F(X) = XDX$ kvadratik forma E_n Evklid fazosida qavariq funksiyadir. Agar kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u qat'iy qavariq funksiya bo'ladi.*

7.5- teorema. *Nomusbat $F(X) = XDX$ kvadratik forma E_n Evklid fazosida yuqoriga qavariq funksiyadir. Agar kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lsa, u qat'iy yuqoriga qavariq funksiya bo'ladi.*

Shunday qilib, kvadratik programmalash masalasining ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

7.11- ta'rif. Quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = \overline{1,m}), \tag{7.52}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{7.53}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{kj} x_k x_j \tag{7.54}$$

funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini topish *formaning programmalash masalasi* deyiladi. Bu yerda $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} C_{kj} x_j$ — manfiy (musbat) yarim aniqlangan kvadratik forma.

(7.52)—(7.54) kvadratik programmalash ta'rifini yechish uchun funksiyani quyidagicha tuzib olamiz:

$$L(X,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{kj} x_k x_j + \lambda_l \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right), \qquad (i = \overline{1,m}).$$

Agar $L(X, \lambda)$ funksiya $(X_0,\ \lambda_0) = (x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m)$ egar nuqtaga ega bo'lsa, ya'ni quyidagi shartlar qanoatlantirilsa:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0, \qquad (j = \overline{1,n}); \tag{7.55}$$

$$X_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = \overline{1,n}); \tag{7.56}$$

$$X_j^0 \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}); \tag{7.57}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.58}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} = 0, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.59}$$

$$\lambda_i^0 \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.60}$$

bu yerda $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ va $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ Lagranj funksiyasidan olingan xususiy hosilalarning egar nuqtadagi qiymatlari, (7.55) va (7.58) tengsizliklarga $\vartheta_j \left(i = \overline{1,n}\right)$ va W_i $(i = \overline{1,m})$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, (7.55)—(7.60) tengsizliklarni tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltiramiz:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + \vartheta_j = 0 \quad (j = \overline{1,n}); \tag{7.61}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} - W_j = 0 \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.62}$$

$$X_i^0 \vartheta_j = 0 \quad (i = \overline{1,n}); \tag{7.63}$$

$$\lambda_i^0 W_j = 0 \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.64}$$

$$X_i^0 \geq 0, \vartheta_j \geq 0, W_i \geq 0, \left(j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}\right). \tag{7.65}$$

Demak, (7.52)—(7.54) kvadratik programmalash masalasini hal qilish uchun (7.61) va (7.65) sistemalarning shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini topish kerakki, bu yechimlar (7.63) va (7.64) shartlarni albatta qanoatlantirsin.

Bu yechimlar to'plamining bazislar usulidan foydalanib, $f(X,\lambda) = -\sum_{i=1}^{m} M\lambda i$ funksiyaning (7.61)—(7.64) shartlarini qanoatlantiruvchi maksimum (minimum) qiymatlarini topamiz.

Shunday qilib, (7.52)—(7.54) kvadratik programmalash masalasini yechish uchun quyidagi bosqichlarni bajarish kerak:

1) Lagranj funksiyasini tuzamiz;

2) egar nuqtasi mavjudligining zarur va yetarli shartlarini Lagranj funksiyasi uchun (7.61)—(7.65) ko'rinishda yozamiz;

3) sun'iy bazis usulini qo'llab, Lagranj funksiyasi uchun egar nuqtasining mavjudligini yoki mavjud emasligini ko'rsatamiz va bu nuqtaning koordinatalarini topamiz;

4) optimal yechimlarni yozib olamiz va optimal rejani tuzamiz.

Yuqoridagi formulalar va qoidalarning qo'llanilishini yechilgan 7.25- masalada ko'rish mumkin.

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi kvadratik programmalash masalasining yechimlarini Kun—Takker teoremasining shartlaridan foydalanib toping:

7.24. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 + x_2 \le 9. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$f(x) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \to \max.$$

7.25. $$\left.\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 2, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$f_{\max} = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2.$$

7.26. $$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge 2. \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$f_{\min} = 4x_1^2 + 3x_2^2.$$

7.27. $$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12. \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$f_{\max} = 5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1 \cdot x_2 - x_2^2.$$

7.28. $\left.\begin{array}{l} 0 \le x_1 \le 2,\ \ 0 \le x_2 \le 4, \\ 0 \le x_3 \le 6, \end{array}\right\}$

$$f_{\min} = (x_1 + x_2 + x_3)^2.$$

7.29. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6,$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$

$f_{\max} = x_1 - x_2^2 - x_3^2.$

5- §. Gradiyentlar usuli

Shu vaqtgacha chiziqsiz programmalash masalalarini simpleks usulni qo'llab yechgan edik. Lekin simpleks usul chekli imkoniyatga ega bo'lganligi uchun uni chegaraviy shartlari va maqsad fuknsiyasining tarkibiy qismi murakkab bo'lgan masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Bunday hollarda kvadratik va qavariq programmalash masalalarini yechish uchun gradiyent usullarini qo'llash ancha qulaylik yaratadi. Chiziqsiz masalalarni gradiyent usullarini qo'llab yechish uchun ayrim zarur bo'lgan ta'rif va qoidalarni keltiramiz.

Bizga n o'lchovli E_n Evklid fazosi berilgan bo'lsin. E_n fazosining biror sohasida $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya o'zining xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz funksiyalar to'plamini tashkil etsin. Bu funksiyalar to'plamini S' bilan belgilasak, E_n da $f \in C'$ funksiyaning gradiyenti proeksiyalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Demak, E_n da $f \in C'$ funksiyaning proyeksiyalari vektor ustun bo'lib, u simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$gradf = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overline{e_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{e_n},$$

bu yerda $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ ortlar.

Gradiyentning E_n koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha yoziladi:

$$\nabla f(X)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)'.$$

$f(X)$ funksiyaning berilgan X^0 nuqtadagi gradiyentini

$$\nabla f(X^0)=\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_1},\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f\left(X^0\right)}{\partial x_n}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Berilgan $X^0=(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, \ldots, x_n^{\ 0})$ nuqtada $f(X)$ funksiyadan gradiyent yo'nalishi bo'yicha olingan hosila eng katta qiymatga erishadi, ya'ni

$$\left|\nabla f(X^0)\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)^2}$$

ga teng bo'ladi va gradiyent yo'nalishi eng tez o'sish yo'nalishi bo'ladi.

$f(X)$ funksiyaning E_n ishi X^0 nuqtasidagi gradiyenti $\nabla f(X^0)$ nuqtadan o'tuvchi yuksaklik sirti ($f(X)=\mathrm{const}$) ga perpendikular bo'ladi.

$$-\nabla f(X^0)=\left(-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2},\ldots,-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)$$

vektor $f(X)$ funksiyaning X^0 nuqtadagi eng tez kamayish yo'nalishini ko'rsatadi va uning X^0 nuqtadagi antigradiyenti deyiladi.

Agar X nuqtada $f(X)$ funksiya uchun $\nabla f(X)=0$ bo'lsa, u holda $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqta *statsionar nuqta* deyiladi.

Endi $f(X)\in C'$ funksiyadan ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosila olish tushunchasini kiritamiz.

7.12- ta'rif. Berilgan $X^0=(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, \ldots, x_n^{\ 0})$ nuqtada $f(X)=$ $=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in C'$ funksiyadan $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ ($\|S\|=1$) yo'nalish bo'yicha olingan *hosila* deb quyidagi limitga aytiladi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(X^0+\lambda S\right)-f(X^0)}{\lambda}.$$

Agar $f(X)$ funksiya $X^0=(x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, \ldots, x_n^{\ 0})$ nuqtada differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, ixtiyoriy S ($\|S\|=1$) uchun $\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ mavjud bo'ladi hamda $\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial S}=(\nabla f(X^0),S)$ o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy cheksiz kichik $\lambda > 0$ uchun quyidagi

$$f(X^0 + \lambda S) - f(X^0) = (\nabla f(X^0), (X^0 + \lambda S - X^0)) + 0(\|x^0 + \lambda S - x^0\|)$$

tenglik bajarilganda.

$$f(X^0 + \lambda S) = f(X^0) + \lambda(\nabla f(X^0), S) + 0(\|\lambda S\|)$$

va

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{f(X^0 + \lambda S) - f(X^0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\lambda(\nabla f(X^0), S) + 0(\|\lambda S\|)}{\lambda} =$$

$$= (\nabla f(X^0), S).$$

Bizga ma'lumki,

$$(\nabla f(X^0), S) = \|\nabla f(X^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(X^0)^\wedge, S).$$

Demak,

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \|\nabla f(X^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(X^0)^\wedge, S).$$

Shunday qilib, bundan ko'rinadiki, $f(X)$ funksiyadan X^0 nuqtada S yo'nalish bo'yicha olingan hosila

$$\cos(\nabla f(X0)^\wedge, S) = 1$$

bo'lganda maksimal qiymatga ega bo'ladi.

Demak, S yo'nalish X^0 nuqtadagi funksiya gradiyentining $(\nabla f(X^0))$ yo'nalishi bilan bir xil bo'lganda $\dfrac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ maksimal qiymatga erishadi.

7.30- masala. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 12x_2^2$ funksiyadan $X^0 = (3;4)$ nuqtada $S = (1,1)$, $S\left(\|S\| = 1\right)$ yo'nalish bo'yicha olingan hosila topilsin.

Yechish.

$$\nabla(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)',$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 6X_1, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 24x_2,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} = 6 \cdot 3 = 18,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} = 24 \cdot 4 = 96.$$

Demak, $\nabla f(X^0) = (18; 96)$.

(7.66) ga asosan

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (\nabla f(X^0), S),$$

ya'ni $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (18, 96), (1, 1)$.

Bunda $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = 18 + 96 = 114$.

7.31- masala. $f(X) = 4x_1^2 + 7x_2^2$ funksiyaning X^0=(1;2) nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi aniqlansin.

Yechish. $f(X)$ funksiyaning X^0 nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi: $S = \nabla f(X^0)$.

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} = 8x_1,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} = 14x_2.$$

Demak, $S = \nabla f(X^0) = (8, 1; 14; 2)$,

S = (8;2)

yo'nalish berilgan $f(X) = 4x_1^2 + 7x^2$ gradiyentning X^0 = (1;2) nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalish bo'ladi.

7.32- masala. $f(X) = 5x_1^2 + 10x_2^2$ funksiyaning X^0=(2,3) nuqtadagi $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \le 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha S yo'nalishlari topilsin.

Yechish. $S = (X - X^0) = (x_1 - 2; x_2 - 3)$. Shartga ko'ra

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \le 0,$$

$$(\nabla f(X^0), S) \le 0,$$

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} = 10x_1 \mid x = 2 = 20,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} = 20x_2 \mid x_{2=3} = 60,$$

$$\nabla f(X^0) = (20;60).$$

Demak,

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}((20;60), (x_1 - 2; x_2 - 3)) \le 0,$$

$$20(x_1 - 2) + 60(x_2 - 3) \le 0,$$

yoki

$$20x_1 + 60x_2 - 220 \le 0,$$

$$x_1 + 3x_2 - 11 \le 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday nuqtalar to‘plami $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ noldan katta bo‘lmagan qiymat beruvchi yo‘nalishlarni aniqlaydi.

Shuni ham aytish kerakki, ayrim vaqtlarda bu yo‘nalish ichida mumkin bo‘lgan yoki mumkin bo‘lmagan yo‘nalishlar ham bo‘lishi mumkin.

7.13- ta’rif. Shunday $\overline{\lambda}$ son mavjud bo‘lib, har qanday $\lambda \in [0, \overline{\lambda}]$ uchun $X^0 + \lambda S \in M$ o‘rinli bo‘lsa, $X^0 \in M$ boshlanadigan yo‘nalish *mumkin bo‘lgan yo‘nalish* deyiladi.

7.6- teorema. *Agar M to‘plam $g_i(x) \le 0 (i = \overline{1, m})$ tengsizliklar sistemasi orqali aniqlangan to‘plam bo‘lib, $X^0 \in M$ va $g_i(x) = 0$ shartni bajaruvchi i indekslar to‘plami $I(x)$ bo‘lsa, u holda*

$$(\nabla g(x^0), S) + \varepsilon \le 0, \quad (i \in i(x^0)) \tag{7.66}$$

tengsizliklar sistemasini ba’zi $\varepsilon > 0$ da qanoatlantiruvchi S yo‘nalish mumkin bo‘lgan yo‘nalish bo‘ladi.

7.7- teorema. *Agar $X^0 \in M$ nuqtadagi S yo‘nalish mumkin bo‘lgan yo‘nalish bo‘lsa, u holda har qanday $i \in i(X^0)$ uchun*

$$(\nabla g_i(X^0), S) \le 0 \tag{7.67}$$

tengsizlik o‘rinlidir.

Yuqoridagi gradiyent usullaridan foydalanib, har qanday chiziqsiz programmalash masalalari yechiladi va umumiy holda lokal ekstremumlarni topish mumkin bo‘ladi.

Shuning uchun gradiyent usullarini qo'llab, qavariq programmalash masalalarining lokal ekstremumlarini topish mumkin. Har qanday lokal ekstremum, bir vaqtning o'zida global ekstremum ham bo'ladi.

Gradiyent usullarini qo'llab, masalalarni yechish jarayoni birorta $x^{(k)}$ nuqtadan boshlab ketma-ket izlash natijasida dastlabki masalaning quyidagilari topiladi.

Gradiyent usullarini ikkita guruhga ajratish mumkin:

1. Izlanadigan $x^{(k)}$ nuqtalar mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan chetga chiqmaydigan masalalarni yechish usuli.

2. Izlanadigan $X^{(k)}$ nuqtalar mumkin bo'lgan yechimlar sohasida va izlanadigan yechim mumkin bo'lgan sohadan tashqarida bo'lgan masalalarni yechish usullari.

Birinchi guruhga qarashli masalalarni Frank—Vulf usuli bilan, ikkinchi guruhga qarashli masalalarni esa jarima funksiyasi usuli yoki Errou — Gurvits usuli bilan yechish mumkin.

1. Frank —Vulf usuli. Faraz qilaylik, quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = \overline{1, m}) \tag{7.68}$$

$$xj \ge 0, \quad (j = \overline{1, n}) \tag{7.69}$$

shartlarda

$$f(X) = f(x_1, x_2 ..., x_n), \tag{7.70}$$

botiq funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Bu masalaning xususiyatlaridan biri tengsizliklar sistemasining chiziqli tengsizliklardan iborat bo'lganidadir. Shu xususiyatlardan foydalanib, chiziqsiz programmalash masalalari ko'rinishiga keltirish mumkin va masalani ketma-ket almashtirishlar yordamida yechish mumkin.

(7.68)—(7.80) masalani yechish jarayoni masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan bironta $x^{(k)}$ nuqtasini topishdan boshlanadi va $x^{(k)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyenti topiladi.

Endi $x^{(k)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyentini topamiz:

$$\nabla f(x^{(k)}) \left(\frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1}; \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2}; ..., \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} \right)$$

va bunga asosan chiziqli funksiya tuzamiz:

$$F(x_1, x_2 ..., x_n) = \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2} x_2 + ... + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} X_n. \quad (7.71)$$

Bundan keyin (7.68)—(7.69) shartlarga asosan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning maksimum qiymatini topamiz. Faraz qilaylik, $Z^{(k)}$ nuqtada $F^{(X)}$ funksiya maksimum qiymat qabul qilsin. U holda dastlabki masalaning mumkin bo'lgan yechimining koordinatasi $x^{(k+1)}$ nuqtada bo'ladi:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda(Z^{(k)} - X^{(x)}), \quad (7.72)$$

bu yerda λ_k — ixtiyoriy son bo'lib, u *hisoblash qadami* deb aytiladi va $0 \le \lambda_k \le 1$ bo'ladi.

λ_k ni shunday tanlash kerakki, $f(X)$ funksiyaning $X=X^{(k+1)}$ nuqtadagi λ_k bog'liq bo'lgan qiymati maksimum qiymat bo'lsin, ya'ni $f_{max} = f(X^{(k+1)})$ bo'lsin. Shuning uchun $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ tenglamani yechib, λ_k ildizlari ichidan eng kichigini tanlab olamiz.

Agar bu izlanayotgan ildizlar birdan katta bo'lsa, u holda $\lambda_k = 1$ deb olamiz va shundan keyin $x^{(k+1)}$ nuqtaning koordinatlarini hisoblab, maqsad funksiyasining bu nuqtadagi qiymatini topamiz. Shundan keyin yangi $X^{(k+2)}$ nuqtaga o'tish zarurmi yoki yo'qligini aniqlaymiz. Agar zarur bo'lsa, u holda $X^{(k+1)}$ nuqtada maqsad funksiyasining gradiyentini hisoblab, chiziqli programmalash masalasini yechib, $X^{(k+2)}$ yechimlarini topamiz. $X^{(k+2)}$ nuqtani ham yuqoridagi kabi tekshiramiz.

Demak, chekli qadamlar natijasida, ma'lum aniqlikda dastlabki masalaning yechimlarini topish mumkin. Shunday qilib, (7.68)—(7.70) masalani Fran—Vulf usuli bilan yechish jarayoni quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1) dastlabki mumkin bo'lgan yechimi topiladi;

2) (7.70) funksiyaning mumkin bo'lgan yechimini aniqlovchi nuqtada gradiyenti hisoblaniladi;

3) (7.71) funksiyani tuzib, (7.68) va (7.69) shartlarda maksimal qiymati hisoblaniladi;

4) hisobash qadami λ_k topiladi;

5) (7.72) formula yordamida mumkin bo'lgan yechimining tarkibiy qismlari yangitdan topiladi;

6) keyingi mumkin bo'lgan yechimga o'tish zarurligi ko'rib chiqiladi. Agar zarur bo'lsa, ikkinchi bosqichga o'tiladi. Agar zarur bo'lmasa, dastlabki masalaning kerakli yechimi topilgan hisoblanadi.

7.33- masala. Frank—Vulf usulini qo'llab, quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \end{array}\right\} \tag{7.73}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \tag{7.74}$$

shartlarda

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \tag{7.75}$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. $f(x_1,x_2)$ funksiyaning gradiyentini topamiz:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = [2(1 - x_1); 4(1 - x_2)]$$

va masalaning mumkin bo'lgan dastlabki yechimi deb $x^{(0)} = (0;0)$, topilgan yechimining aniqlik sifatini esa $|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < \varepsilon$, bu yerda $\varepsilon = 0{,}01$, deb olamiz. Endi bu yechimni qadam-baqadam yaxshilaymiz.

I. Almashtirish (yaxshilash, o'zgartirish, yangilash).

$X^{(0)}$ nuqtada $f(x_1,x_2)$ funksiyaning gradiyentini $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ nuqtada topamiz.

$$\nabla f(X^0) = (2;\ 4).$$

Demak, birinchi bosqichda quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \end{array}\right\} \tag{7.76}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \tag{7.77}$$

shartlarda

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \tag{7.78}$$

funksiyaning maksimum qiymatini topish talab etiladi.

(7,76)—(7,78) masalani simpleks usul bilan yechib, dastlabki optimal reja $Z^0 = (0{,}4)$ topiladi.

Masalaning mumkin bo'lgan yechimini (7.72) formula yordamida topamiz:

$$x^{(k)} = x^{(0)} + \lambda_1(Z^{(0)} - X^{(0)}),\ \text{bu yerda } 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{7.79}$$

$X^{(0)}$ va $Z^{(0)}$ lar qiymatlarini (7.79) ga qo'ysak,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0 + \lambda; 0, \\ x_2^{(2)} &= 0 + \lambda; 4. \end{aligned}\right\} \qquad (7.80)$$

kelib chiqadi. Bu yerdan $\lambda_1$ni topish uchun x_1 va x_2 larning qiymatlarini (7.80) dan topib, (7.78) ga quysak, quyidagi kelib chiqadi:

$$f(\lambda_1) = 16\lambda_1 - 32\lambda_1^2.$$

$f(\lambda_1)$ funksiyadan hosila olib, 0 ga tenglashtirsak va yechsak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$F_1(\lambda_1) = 16 - 64\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$0 \le \lambda_1 \le 1$ bo'lgani uchun, λ_1 ning bu qiymatini qadam deb qabul qilamiz. U holda

$$x^{(1)} = (0; 1),$$

$$f(x^{(1)}) = 2,$$

$$f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) = 2 > \varepsilon = 0,01.$$

II. Almashtirish. Dastlabki masalaning $X^{(1)}$ nuqtadagi gradiyenti $\nabla f(X^{(1)}) = (2; 0)$ bo'lgani uchun $f_2(x_1,0)=2x_1$ maqsad funksiyasining (7.76) va (7.77) shartlarga asosan maksimum qiymatini topish talab etiladi. Bu masalani simpleks usulni qo'llab yechsak, $Z^{(1)} = (6,4;0,8)$ yechim kelib chiqadi. Endi $X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_2(Z^{(1)} - X^{(1)})$ni aniqlaymiz. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 6,4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} &= 1 - 0,2\lambda_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.81)$$

(7.81) ni (7.75) ga qo'ysak, λ_2 ga nisbatan quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$F(\lambda_2) = 2 + 12,8\lambda_2 - 41,76\lambda_2 2,$$

bu yerdan $F'(\lambda_2) = 12,8 - 83,52\lambda_2$. $F^1(\lambda_2)$ ni 0 ga tenglashtirsak, $\lambda_2 \approx 0,15$ hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0,96, \\ x_2^{(2)} &= 0,97. \end{aligned}\right\}$$

$X^{(2)} = (0,96;0,97)$, $f(X^{(2)}) = 2,996$ bo'lgani uchun
$f(X^{(2)}) - f(X^{(1)}) = 2,9966 - 2 = 0,9966 > \varepsilon = 0,01$ kelib chiqadi.

III. Almashtirish. $X^{(2)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyentini hisoblaymiz:

$$\nabla f(X^{(2)}) = (0,08;\ 0,12).$$

Demak, $F_3(X)$ funksiyaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F_3(x_1, x_2) = 0,08x_1 + 0,12x_2\,. \tag{7.82}$$

Endi (7.73) va (7.74) shartlarga asosan (7.92) funksiyaning qiymatini topamiz. Bu qiymat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $Z^{(2)} = (6;\ 0)$.

Yuqoridagilarga asosan $x^{(3)}$ ni aniqlaymiz:

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_3(Z^{(2)} - X^{(2)})\,.$$

Natijada quyidagilar topiladi:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,96 + \lambda_3\left(6 - 0,96\right) = 0,96 + 5,04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0,97 + \lambda_3\left(0 - 0,97\right) = 0,97 - 0,97\lambda_3, \end{cases}$$

$$F(\lambda_3) = 2,9384 + 0,4032\lambda_2 - 27,3416\lambda_3^2,$$

$$F'(\lambda_3) = 0,4032 - 54,6832\lambda_3,$$

$$0,4032 - 54,6832\lambda 3 = 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{0,4032}{54,6832} \approx 0,007.$$

Demak, $x^{(3)} = (0,99528\ ;\ 0,96321)$.

$$F(x^{(3)}) = 2,99957,$$

$$F(x^{(3)}) - F(x^{(2)}) = 2,99957 - 2,9966 = 0,00297 < \varepsilon = 0,01.$$

Shunday qilib, $x^{(3)} = (0,99528;\ 0,96321)$ (7.83)—(7.85) masalaning izlanayotgan yechimi hisoblanadi. Bu yechim qavariq programmalash masalalarini yechganda ko'rilgan 7.26- masalaning yechimi $x^k = (1;\ 1)$ ga ancha yaqindir. Agar ε miqdorga yana kamroq qiymat bersak, $x^{(k)} = (1,1)$ yechimga yanada yaqinroq maksimal yechimni topish mumkin.

2. Jarima funksiya usuli. Quyidagi

$$g_i(x_i, x_2 \ldots, x_n) \le v_i \ \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_i \ge 0,\ (i = \overline{1, n})$$

shartlarda $F(X) = f(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n)$ botiq funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Bu yerda $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)(i = \overline{1, m})$ funksiyalar qavariq funksiyalar to'plamini tashkil qiladi.

Bundan keyin maqsad funksiyasining maksimum qiymatini izlash o'rniga $F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + H(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning maksimum qiymatini izlaymiz, ya'ni

$$F(X) = f(X) + H(X) \to \max, \; X = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Demak, $F(X)$ funksiya maqsad funksiyasi va $H(X)$ ma'lum chegaralar sistemasi bilan aniqlangan jarima funksiyasi yig'indisidan iborat.

$N(X)$ jarima funksiyasini har xil usullar bilan tuzish mumkin.

Ko'pincha jarima funksiyasi quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$N(X) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) g_i(x), \; X = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Bu yerda

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} 0, \text{agarda} & b_i - g_i(x) \geq 0, \\ \alpha_i, \text{agarda} & b_i - g_i(x) \leq 0. \end{cases} \qquad (7.83)$$

$\alpha_i(x) \geq 0$ o'zgarmas sonlar bo'lib, *og'irlik koeffitsiyentlari* deb ataladi.

Jarima funksiyasidan foydalanib, ketma-ket bir nuqtadan ikkinchisi va hokazo nuqtalarga qadam-baqadam davom etib, bu jarayon kerakli yechimlar topilguncha davom etdiriladi.

Shu bilan birga har bir kelgusi nuqtaning koordinatasi quyidagi formula yordamida topiladi.

$$X_i^{(k+1)} = \max\left\{0; X_j^k + \left[\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_j}\right]\right\}. \qquad (7.84)$$

(7.84) dan ko'rinib turibdiki, agar kelgusi nuqta dastlabki masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasida bo'lsa, kvadrat qavs ichidagi qo'shiluvchi nolga teng va kelgusi nuqtaning koordinatasida maqsad funksiyasining gradiyenti topiladi. Agar nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan tashqarida bo'lsa, u holda yana qaytadan yechimlar sohasiga o'tishga to'g'ri keladi va qaytadan o'zgartiriladi.

Shunday qilib, jarima funksiyasi usuli qavariq programmalash masalalarini yechish jarayonida quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1) dastlabki masalaning mumkin bo'lgan yechimlari aniqlanadi;

2) hisoblash qadami aniqlaniladi;

3) maqsad funksiyasidan hamma o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalar va mumkin bo'lgan yechimlar sohasini aniqlovchi funksiya topiladi;

4) (7.84) formula yordamida mumkin bo'lgan yangi yechim nuqtalari aniqlanadi;

5) topilgan nuqtalarning koordinatlari berilgan chegara shartlarni qanoatlantirishi tekshiriladi. Qanoatlantirmasa, kelgusi bosqichga o'tiladi. Agar topilgan nuqtaning koordinatlari mumkin bo'lgan yechimlar sohasida aniqlansa, u holda kelgusi mumkin bo'lgan yechimlariga o'tish zarurligi o'rganiladi. Agar zarur bo'lsa, masalani yechishning ikkinchi bosqichiga o'tiladi. Agar zarur bo'lmasa, topilgan yechimlar dastlabki masalaning kerakli yechimlari deb hisoblanadi.

6) og'irlik koeffitsiyentlarining qiymatlari aniqlanadi va 4-bosqichga o'tiladi.

7.34- masala. Quyidagi

$$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \le 18, \tag{7.85}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \tag{7.86}$$

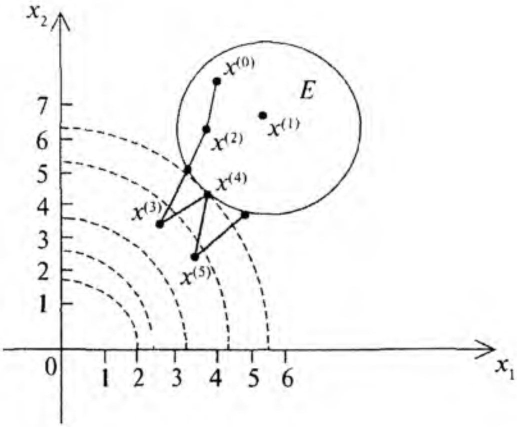
chegara shartlarida

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max \tag{7.87}$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Maqsad funksiyasi manfiy aniqlangan kvadratik forma bo'lani uchun, u botiq funksiyadir. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (7.85), (7.86) esa qavariq sohadir. Demak, (7.85)—(7.87) masala qavariq programmalash sohasining masalasidir. Masalani yechish uchun jarima funksiyalar usulini qo'llaymiz. Oldin mumkin bo'lgan yechimlar sohasini aniqlaymiz (7.6- chizma). Keyin sath chizig'i $f(x_1,x_2) = h$ ni chizib olamiz. Sath chizig'i markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan aylanalardan iboratdir. Shu aylanalar to'plamidan birontasi mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga urinadi. Bu nuqtada maqsad funksiyasi izlanayotgan maksimum qiymatga ega bo'ladi. X^0 nuqtani aniqlanish sohasidan olsak, $X^0 = (6,7)$ bo'ladi. λ ning qiymatini $\lambda = 0,1$ va $g(x_1, x_2) = 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2$ deb belgilab, undan x_1 va x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalar olsak, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1; \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$



7.6- chizma.

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2; \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14;$$

Endi (7.84) formulani qo‘llab, nuqtalar ketma-ketligini tuzib chiqamiz. Natijada tuzilgan nuqtalar ichidan kerak bo‘lgan yechim topiladi.

I almashtirish. $X^{(0)} = (6,7)$ nuqta mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida bo‘lgani uchun (7.84) formuladagi kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng. Demak, kelgusi nuqtaning koordinatlari quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$x_1^{(1)} = \max\left\{0; X_1^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1}\right\} = \max\{0; 6 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 6\} =$$

$$= \max\{0;\ 4,8\} = 4,8,$$

$$x_2^{(1)} = \max\left\{0; X_2^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2}\right\} = \max\{0; 7 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 7\} = 5,4.$$

Endi $X^{(1)} = (4,8\ ;\ 5,6)$ nuqta masalaning yechimlar to‘plami sohasiga kiradimi yoki yo‘qligini tekshiramiz: $g(X^{(1)}) = 18-4,84-1,96 = 11,2$ bo‘lgani uchun $g(X^{(1)}) = -54,4$.

II almashtirish. Yuqoridagilarga asosan quyidagilarni topamiz:

$x_1^{(2)} = \max\{0;\ 0,48 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,8\} = 3,48;$

$x_2^{(2)} = \max\{0;\ 0,56 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 5,6\} = 4,48;$

$g(X^{(2)}) = 18 - 9,9856 - 6,3504 = 1,664 > 0, f(x^{(2)}) = -34,816.$

III almashtirish. Endi quyidagilarni hisoblaymiz:
$x_1^{(3)} = \max\{0;\ 0{,}384+0{,}1 \cdot (-2) \cdot 3{,}84\} = 3{,}072;$
$x_2^{(3)} = \max\{0;\ 4{,}48+0{,}1 \cdot (-2)\ 4{,}48\} = 3{,}584;$
$g(x^{(3)}) = 18 - 15{,}429184 - 11{,}669056 \approx -9{,}0981.$

IV almashtirish. $X^{(3)}$ nuqta masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga kirmaydi. Shuning uchun,

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0; x_1^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0; 3,072 + 0,1 \cdot [((-2) \cdot 3,072) +$$

$$+\alpha((-2) \cdot 3,072 + 14)]\} = \max\{0; 2,4576 + \alpha \cdot 0,7856\},$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0; x_2^{(3)} + \lambda\left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0; 3,584 + 0,1 \cdot [((-2) \cdot 3,584) +$$

$$+\alpha((-2) \cdot 3,584 + 14)]\} = \max\{0; 2,8672 + \alpha \cdot 0,6832\}.$$

Bu yerda α sonni tanlash muamosi kelib chiqadi. α sonni shunday tanlash kerakki, $X^{(4)}$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasining chegarasiga yaqin bo'lsin va shu sohada joylashgan bo'lsin.

Bu talabni $\alpha = 1{,}9$ qiymat qondiradi.

$\alpha = 1{,}9$ qiymatda $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$ larni hisoblaymiz:
$x_1^{(4)} = \max\{0; 2{,}4576 + 1{,}9 \cdot 0{,}7856\} \approx 3{,}950;$
$x_2^{(4)} = \max\{0; 2{,}8672 + 1{,}9 \cdot 0{,}6832\} \approx 4{,}165;$
$g(X^{(4)}) = 9{,}3025 + 8{,}037225 \approx 0{,}660;$
$f(X^{(4)}) \approx -32{,}950.$

V almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:
$x_1^{(5)} = \max\{0; 3{,}950 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 3{,}950\} =$
$= \max\{0; 3{,}950 - 0{,}790\} = \max\{0; 3{,}18\} = 3{,}18.$
$x_2^{(5)} = \max\{0; 4{,}165 + 0{,}1 \cdot (-2) \cdot 4{,}165\} = 3{,}332;$
$g(X^{(5)}) = 18 - 14{,}7456 - 13{,}454224 \approx -10{,}2.$

VI almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:
$x_1^{(6)} = \max\{0; 3{,}18 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}18 + 1{,}9((-2) \cdot 3{,}18 + 14)\} \approx 3{,}987;$
$x_2^{(6)} = \max\{0; 3{,}332 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}332 + 1{,}9 \cdot ((-2) \cdot 3{,}332 +$
$+ 14)]\} \approx 4{,}059;$
$g(X^{(6)}) = 18 - 9{,}078169 - 8{,}649481 \approx 0{,}272;$
$f(X^{(6)}) \approx -32{,}372.$

VII almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$x_1^{(7)} = \max\{0;3,987 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,987\} \approx 3,189;$

$x_2^{(7)} = \max\{0;4,059 + 0,1(-2) \cdot 4,059\} \approx 3,247;$

$g(X^{(7)}) = 18 - 10,169721 - 10,543009 \approx -2,713;$

$f(X^{(7)}) \approx -3,189^2 - 3,247^2 \approx -10,24.$

VIII almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$x_1^{(8)} = \max\{0;3,189 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,189 + 1,9((-2) \cdot 3,189 + 14)\} \approx 3,999;$

$x_2^{(8)} = \max\{0;3,247 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,247 + 1,9 \cdot ((-2) \cdot 3,247 + 14)]\} \approx 4,027;$

$g(X^{(8)}) = 18 - 9,006001 - 8,856576 \approx 0,137;$

$f(X^{(8)}) \approx -32,185.$

IX almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$x_1^{(9)} = \max\{0;3,999 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,99]\} \approx 3,199;$

$x_2^{(9)} = \max\{0;4,024 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,024]\} \approx 3,219;$

$g(X^{(9)}) = 18 - 14,447601 - 14,29596 \approx -10,744;$

$f(X^{(9)}) \approx -3,199^2 - 3,219^2 \approx -10,22.$

X almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$x_1^{(10)} = \max\{0;3,199 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,199 + 1,9((-2) \cdot 319 + 14)]\} \approx 4,004;$

$x_2^{(10)} = \max\{0;3,219 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,219 + 1,9((-2) \cdot 3,219 + 14]\} \approx 4,012;$

$g(X^{(10)}) = 18 - 8,976016 - 8,928144 \approx 0,096;$

$f(X^{(10)}) \approx -32,128.$

XI almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$x_1^{(11)} = \max\{0;4,004 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,004]\} \approx 3,203;$

$x_2^{(11)} = \max\{0;4,012 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,012]\} \approx 3,210;$

$g(X^{(11)}) = 18 - 14,417209 - 14,3641 \approx -10,781;$

$f(X^{(11)}) \approx -3,203^2 - 3,210^2 \approx -10,18.$

XII almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$x_1^{(12)} = \max\{0;3,203 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,203 + 1,9((-2) \cdot 3,203 + 14)]\} \approx 4,005;$

$x_2^{(12)} = \max\{0;3,210 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,210 + 1,9((-2) \cdot 3,210 + 14]\} \approx 4,008;$

$g(X^{(12)}) = -32,104;$

$f(X^{(12)}) \approx -4,005^2 - 4,008^2 \approx -32,104.$

Agar X va XII almashtirishlarni o'zaro taqqoslasak, 10^{-1} aniqlikda bir-biriga teng bo'ladi. Demak, bu yechim oxirgi almashtirish natijasida maksimal yechim bo'ladi. Xuddi yuqoridagi kabi maqsad funksiyasi qiymatlarini $f(X)$ va $g(X)$ funksiyalar gradiyentini $X^{(12)} = (4{,}005\ ;\ 4{,}008)$ nuqtada tekshirib ko'rish mumkin, ya'ni

$\nabla f(X^{(12)}) = (-8{,}01; -8{,}016)$; $\nabla f(X^{(12)}) = (5{,}99; 5{,}984)$.

Mos koordinatlarining nisbatini hisoblasak:

$$\frac{-8,01}{5,99} \approx -1,337, \qquad \frac{-8,016}{5,984} \approx -1,339 .$$

Bu koordinatlardan ko'rinib turibdiki, ular deyarli bir-biriga teng. Demak, $\nabla f(X^{(12)})$ va $\nabla g(X^{(12)})$ vektorlar deyarli parallel vektorlardir. Shu bilan bir qatorda $X^{(12)} = (4{,}005\ ;\ 4{,}008)$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasi chegarasiga nihoyatda yaqin joylashgan, chunki $\nabla g(X^{(12)}) \approx 0{,}078$ bo'lgani uchun $x_1^{(12)} = 4{,}005$ va $x_2^{(12)} = 4{,}008$ yechimlarni masalaning kerakli yechimlari desa bo'ladi. Yuqoridagi ko'rsatilgan almashtirishlarni davom etdirib, yechimlarni kattaroq aniqlikda topish mumkin.

Bu masalaning geometrik talqini 7.6- chizmadan ham ko'rinib turibdi.

3. Errou—Gurvits usuli. Yuqorida jarima funksiyasi usulini qo'llab egri chiziqli programmalash masalasini yechdik. Lekin bu usulni qo'llaganda α_i larning qiymatlarini ixtiyoriy tanlab olgan edik va har bir aniqlangan $X^{(i)}\left(i=\overline{1,n}\right)$ nuqta dastlab mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan ancha uzoqlashib siljigan edi. Bu kamchilikka Errou—Gurvits usulini qo'llaganda o'rin qolmaydi. Bu usulga asosan har bir kelgusi qadam $\alpha_i^{(k)}$ quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\alpha_i^{(k)}=\max\{0;\ \alpha_i^{(k-1)} - \lambda gi(X^{(k)})\};\ \left(i=\overline{1,m}\right) \tag{7.88}$$

$\alpha_i^{(k)}$ ning dastlabki $\alpha_i^{(0)}$ qiymati deb ixtiyoriy musbat son olinadi.

7.35- masala. Errou—Gurvits usulini qo'llab, (7.50) masalani yeching, ya'ni quyidagi chegara shartlarida:

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2 \le 18, \tag{7.89}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \tag{7.90}$$

$$F(x_1,x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max .$$

Yechish. Errou—Gurvits usulini qo'llab (7.50) masalani yechganda birinchi uchta almashtirishda $\lambda = 0,1$ bo'lganda yechimlar bir-biriga to'g'ri keladi. Bu shuni ko'rsatadiki har bir topilgan nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasida joylashgan bo'lib, $X_i^{(k)}$ larning qiymatlarini (7.83) va (7.88) formulalar bilan hisoblaganda bir-biridan farq qilmaydi, ya'ni $X_i^{(k)} = 0$ $(k = \overline{1,3})$ bo'ladi.

IV almashtirish. $g(X^{(3)}) < 0$ bo'lgani uchun kelgusi $X^{(4)}$ nuqtani (7.84) formula yordamida hisoblaymiz:

$$x_1^{(4)} = \max\left\{0, x_1^{(3)} + \lambda\left[\frac{gf(X^{(3)})}{gx_1} + \alpha^{(4)}\frac{dg(X^{(3)})}{dx_1}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0, 30,72 + 0,1\}[(-3,072 + \alpha^{(4)}((-2)\cdot 3,072 + 14)]\}$$

$$x_2^{(4)} = \max\left\{0, x_2^{(3)} + \lambda\left[\frac{gf(X^{(3)})}{gx_2} + \alpha^{(4)}\frac{dg(X^{(3)})}{dx_2}\right]\right\} =$$

$$= \max\{0; 3,584 + 1,1[(-2)\cdot 3,584 + \alpha^{(4)}((-2)\cdot 3,584 + 14)]\}.$$

$\alpha^{(4)}$ ni (7.88) formula yordamida hisoblaymiz:

$$\alpha^{(4)} = \max\{0; \alpha^{(3)} - 0,1\cdot g(X^{(3)})\} = \max\{0; 0 - 0,1\cdot(-9,0981)\} \approx 0,91.$$

Demak, $x_1^{(4)} \approx 3,172$; $x_2^{(4)} \approx 3,489$; $g(x^{(4)}) \approx -8,981$.

V. Almashtirish. Topilgan $X^{(4)} = (3,172; 3,489)$ dastlabki berilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga kirmaydi. Shuning uchun (7.84) formula yordamida topamiz. Lekin oldin (7.88) formula yordamida quyidagini hisoblaymiz:

$\alpha^{(5)} = \max\{0;\ 0,91 - 0,1(-8,981)\} \approx 1,81;$

$x_1^{(5)} = \max\{0; 3,172 + 0,1\cdot[(-2)\cdot 3,172 + 1,81((-2)\cdot 3,172 +$
$+ 14]\} \approx 3,923;$

$x_2^{(5)} = \max\{0;\ 3,489 + 0,1\cdot[(-2)\cdot 3,489 + 1,81((-2)\cdot 3,489 +$
$+ 14]\} \approx 4,062;$

$g(X^{(5)}) \approx -0,1.$

VI almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$\alpha^{(6)} = \max\{0;\ 1,81 - 0,1\cdot(-0,1)\} \approx 1,82;$

$x_1^{(6)} = \max\{0;\ 3,923 + 0,1\cdot[(-2)\cdot 3,923 + 1,82((-2)\cdot 3,923 +$
$+ 14]\} \approx 4,258;$

$x_2^{(6)} = \max\{0;\ 4,062 + 0,1\cdot[(-2)\cdot 4,062 + 1,82((-2)\cdot 4,062 +$
$+ 14]\} \approx 4,319;$

$g(X^{(6)}) \approx 1{,}294;$
$f(X^{(6)}) \approx -36{,}784.$

VII almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:
$x_1^{(7)} = \max\{0;\ 4{,}258 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}258]\} \approx 3{,}406;$
$x_2^{(7)} = \max\{0;\ 4{,}319 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}319]\} \approx 3{,}455;$
$g(X^{(7)}) \approx -7{,}484.$

VIII almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:
$\alpha^{(8)} = \max\{0;\ 1{,}82 - 0{,}1(-7{,}484)\} \approx 2{,}57;$
$x_1^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}406 + 0{,}1[(-2) \cdot 3{,}406 + 2{,}57((-2) \cdot 3{,}406 + 14]\} \approx 4{,}572;$
$x_2^{(8)} = \max\{0;\ 3{,}455 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}455 + 2{,}57((-2) \cdot 3{,}455 + 14]\} \approx 4{,}586;$
$g(X^{(8)}) \approx 6{,}278;$
$f(X^{(8)}) \approx -41{,}935.$

IX almashtirish. $x_1^{(9)}$, $x_2^{(9)}$ va $g(X^{(9)})$ larni topamiz:
$x_1^{(9)} = \max\{0;\ 4{,}572 + 0{,}1[(-2) \cdot 4{,}572]\} \approx 3{,}658;$
$x_2^{(9)} = \max\{0;\ 4{,}586 + 0{,}1[(-2) \cdot 4{,}586]\} \approx 3{,}669;$
$g(X^{(9)}) \approx 4{,}265.$

X almashtirish. $\alpha^{(10)}$, $x_1^{(10)}$, $x_2^{(10)}$ va $g(X^{(10)})$ larni topamiz:
$\alpha^{(10)} = \max\{0;\ 2{,}57 - 0{,}1 \cdot (-4{,}265)\} \approx 3{,}0;$
$x_1^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}658 + 0{,}1[(-2) \cdot 3{,}658 + 3{,}0 \cdot ((-2) \cdot 3{,}658 + 14]\} \approx 4{,}931;$
$x_2^{(10)} = \max\{0;\ 3{,}669 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}669 + 3{,}0((-2) \cdot 3{,}669 + 14]\} \approx 4{,}934;$
$g(X^{(10)}) \approx 9{,}451.$

XI almashtirish. $x_1^{(11)}$, $x_2^{(11)}$ va $g(X^{(11)})$ larni hisoblaymiz:
$x_1^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}931 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 4{,}931]\} \approx 3{,}945;$
$x_2^{(11)} = \max\{0;\ 4{,}934 + 0{,}1[(-2) \cdot 4{,}934]\} \approx 3{,}947;$
$g(X_2^{(11)}) \approx -0{,}654.$

XII almashtirish. $\alpha^{(12)}$, $x_1^{(12)}$, $x_2^{(12)}$, va $g(X^{(12)})$, $f(X^{(12)})$ larni topamiz:
$x_1^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}945 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}945 + 3{,}06((-2) \cdot 3{,}945 + 14]\} \approx 5{,}026;$
$x_2^{(12)} = \max\{0;\ 3{,}947 + 0{,}1 \cdot [(-2) \cdot 3{,}947 + 3{,}06 \cdot ((-2) \cdot 3{,}947 + 14]\} \approx 5{,}026;$

$g(X^{(12)}) \approx 10,207;$
$f(x^{(12)}) \approx -50,521.$

XIII almashtirish. $x_1^{(13)}$, $x_2^{(13)}$, $g(X^{(13)})$ va $f(X^{(13)})$ larni hisoblaymiz:
$x_1^{(13)} = \max\{0;\ 5,026 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 5,026]\} \approx 4,021;$
$x_2^{(13)} = \max\{0;\ 5,026 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 5,026]\} \approx 4,021;$
$g(X_2^{(13)}) \approx 0,251;$
$f(X^{(13)}) \approx -32,337.$

Bu almashtirishda topilgan X=(4,021; 4,021) yechimlarni kerakli yechimlar deb hisoblasa bo'ladi. Shuni aytish kerakki, yuqoridagi almashtirishlar jarayoni davom ettirilsa, dastlabki masalaning yechimlarini istalgan aniqlikda topsa bo'ladi.

TOPSHIRIQLAR

7.36. Gradiyent usullarini qo'llab, quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtalardagi gradiyentlarini toping.

1) $Z = x^2y - 2xy + \frac{x}{y}$, $X^{(0)} = (1;2)$
2) $Z = x_1^3 - 2x_1x_2$, $X^{(0)} = (0;1)$;
3) $Z = x_1^2 + x_2^2$ $X^{(0)} = (2;0)$
4) $Z = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$, $X^{(0)} = (1;0)$.

7.37. Frank—Vulf usulini qo'llab, boshlang'ich nuqtasi $X^{(0)} = (2;2)$ bo'lganda quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_2 - x_2 \le 12, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

shartlarda $F(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.38. Jarima funksiyasi va Errou—Gurvits usulini qo'llab, quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_2 \le 2, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

shartlarda $F(x_1,x_2) = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

VIII BOB. MATRITSALI O‘YINLAR NAZARIYASI MASALALARI VA CHIZIQLI PROGRAMMALASH

1- §. Matritsali o‘yinlar nazariyasining iqtisodiy va geometrik talqini

Bir-biriga zid manfaatlarning to‘qnash kelishida eng optimal (foydali) yo‘l tanlash nazariyasi *o‘yinlar nazariyasi* deyiladi. O‘yinning matematik tushunchasi har xil o‘yinlar to‘plamini qarab chiqishdan paydo bo‘lgan. Lekin uning tadbiq etilish sohasi ancha keng bo‘lib, bir-biriga zid manfaatlar to‘qnashadigan xilma-xil holatlar to‘plamini o‘z ichiga oladi. Bu o‘yinlar to‘plamiga quyidagilar misol bo‘la oladi: shaxmat, shashka, karta o‘yinlari va boshqalar. O‘yinlar nazariyasiga asos solgan olim Fon Neymandir. Fon Neyman quyidagi masalani o‘rtaga qo‘yadi: agar n ta $R_1, R_2, ..., R_n$ o‘ynovchilar biror G o‘yinni o‘ynayotgan bo‘lsa, birinchi o‘ynovchi bu o‘yinda yutib chiqishi uchun qanday strategiyani tanlashi kerak?

Masalan, ikkita raqib (birinchisi R_1 va ikkinchisi R_2 o‘yinovchi) bo‘lib, ulardan har biri ish tutish yo‘li strategiyasini ikkinchisidan mustaqil ravishda tanlab oladi.

Misol uchun oq donalar bilan R_1 o‘ynovchi shaxmatchining strategiyasini tanlash birinchi yurishni ko‘rsatish va R_2 qora donalarning mumkin bo‘lgan birinchi, ikkinchi, uchinchi va hokazo yurishlariga oq donalarning qanday javob berishini ko‘rsatish demakdir; qora donalar bilan o‘ynovchining strategiyasini tanlash oq donalarning mumkin bo‘lgan har bir yurishiga qora donalarning qanday javob berishini ko‘rsatish demakdir. Shunday qilib, o‘yin natijalari faqat tanlab olingan strategiyalargagina (va ehtimol, natijasi o‘yinchilarga bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy sinovlarga) bog‘liq bo‘lgan to‘plamga ega bo‘ladi. Demak, agar o‘yin B natija olgan bo‘lsa, ikkinchi o‘yinchi birinchiga $f(B)$ so‘m to‘laydi yoki teskarisi.

R_1 o‘yinchi yutug‘ining $M(X, U)$ matematik kutilmasi, mos ravishda, R_1 va R_2 o'yinchi tanlab olgan X va U strategiyalargagina bog'liq bo'ladi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, o'yinlar nazariyasi quyidagi masalalarni o'rganadi:

1. R_1 o'yinchi R_2 o'yinchining qanday yo'l tutishiga bog'liq bo'lmagan holda imkon boricha ko'proq yutuq olishi uchun, ya'ni $\min_U M(X_0,U) = \max_X\{\min_U M(x,y)\}$ bo'lishi uchun u qanday X_0 strategiya tanlab olishi kerak;

2. R_2 o'yinchi R_1 o'yinchining qanday yo'l tutishidan qat'i nazar imkon boricha kamroq yutqizishi uchun, ya'ni $\min_X M(X,U_0) = \max_U\{\min_X M(x,y)\}$ bo'lishi uchun u qanday U_0 strategiya tanlab olish kerak.

Har bir o'yinchining strategiyalar soni chekli bo'lgan holdagina bu masalalar prinsipial jihatdan yechiladi. Bu yerda umuman har bir o'yinchi qandaydir aniq bir strategiyani emas, balki har bir o'yinni takrorlaganda R_1 o'yinchi uchun ehtimollari $R_1,R_2,...,R_n$ bo'lgan $X_1,X_2,..., X_n$ strategiyalardan birini, R_2 o'yinchi uchun esa ehtimollari $q_1,q_2,...,q_m$ bo'lgan $U_1,U_2,...,U_m$ strategiyalardan birini tanlash foydali bo'ladi.

$(R_1,R_2,...,R_n)$ va $(q_1,q_2,...,q_m)$ to'plamlar o'yinchilarning aralash strategiyalari deyiladi. $\{R_n\}$ va $\{q_m\}$ to'plamlarni va R_1 o'yinchi yutug'ining matematik kutulmasini topish *o'yining yechimi* deyladi.

Endi o'yinlar nazariyasiga oid ayrim ta'rif va teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1- ta'rif. Har qanday G o'yinni *o'yin matritsasi* deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n} \\ .... \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlash mumkin. Bu matritsa R_1 o'yinchi uchun yutuqlar matritsasi deb ataladi.

2- ta'rif. O'yinning miqdoriy natijasi *yutuq* deyiladi.

3- ta'rif. Agar o'yinga faqat ikkita ta'raf (ikkita shaxs) qatnashsa, bunday o'yin *juft o'yin* deyiladi.

4- ta'rif. Agar juft o'yinda yutuqlar nolga teng bo'lsa, ya'ni birinchi o‘yinchining yutug‘i, ikkinchi o‘yinchining boy berishiga teng bo‘lsa, bunday o‘yin *yig‘indisi nolga teng o‘yin* deyiladi.

4- ta’rif. Agar A yutuq matritsasi n ta ustun va m ta satrga ega bo‘lsa, bunday o‘yinga $n \times m$ *o‘lchovli chekli o‘yin* deyiladi.

5- ta’rif. Yutuq matritsasidan n topilgan $\alpha = \max\limits_{i}(\min\limits_{j} \alpha_{ij})$ son *o‘yinning quyi yutug‘i* (yoki maksmin strategiyasi) deyiladi.

6- ta’rif. Yutuq matritsasidan topilgan $\beta = \min\limits_{i}(\max\limits_{j} \alpha_{ij})$ son *o‘yinning yuqori yutug‘i qiymati* (yoki *minmaks strategiyasi*) deyiladi.

7- ta’rif. Agar $\max\limits_{i}(\min\limits_{j} \alpha_{ij}) = \min\limits_{j}(\max\limits_{i} \alpha_{ij}) = V$ bo‘lsa, u holda V *o‘yinning yutuq qiymati* deyiladi.

8- ta’rif. $\alpha = \beta$ o‘yin *egar nuqtali* o‘yin deyiladi.

9-ta’rif. Egar nuqtali o‘yinda maksimin va minimaksni topish *optimal strategiya* deyiladi.

10- ta’rif. Agar $\alpha \neq \beta$ bo‘lsa (egar nuqtaga ega bo‘lmasa), u holda sof strategiyani ko‘rsatuvchi vektorning tarkibiy qismlari *siljigan strategiya* deyiladi.

8.1- teorema. *O‘yinning quyi yutug‘i yuqori yutug‘idan katta bo‘la olmaydi.*

10- ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, sof strategiyani izoh etuvchi vektorning tarkibiy qismlari har bir o‘yinchining nisbiy takrorlanish darajasini bildiradi va uning yig‘indisi birga teng.

Agar birinchi o‘yinchining siljigan strategiyasini $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ va ikkinchi o‘yinchining siljigan strategiyasini $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ deb belgilasak, u holda $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1,\quad \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$ bo‘ladi, bu yerda $x_i \geq 0$, $(i = \overline{1,m})$ $y_j \geq 0$ $(j = \overline{1,n})$. Yuqoridagilarga asoslanib, birinchi o‘yinchining optimal strategiyasini X^*, ikkinchi o‘yinchining optimal strategiyasini U^* belgilasak, u holda ikkala o‘yinchining o‘yin yutug‘i quyidagiga teng bo‘ladi:

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_i^* y_j^*.$$

Optimal strategiya va o'yin yutug'ini aniqlash jarayoni *o'yinning yechimi* deyiladi.

8.2- teorema. *Har qanday chekli nol yig'indili o'yin siljigan strategiyali yechimga ega.*

8.3- teorema. *A matritsaning V o'yin yutug'i U^* va Z^* optimal strategiya bo'lishi uchun quyidagi*

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}u_i^* \geq \vartheta \quad (j=\overline{1,n}) \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}z_j^* \leq \vartheta \quad (i=\overline{1,m}) \quad \textit{tengsiz-}$$

liklarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

8.4- teorema. *Agar o'yinchilardan birortasi siljigan optimal strategiyani qo'llasa, u holda optimal strategiyaga (sof strategiya) qo'shilgan ikkinchi o'yinchining qanday chastotalar bilan o'yinga kirishidan qat'iy nazar yutuq qiymati V ga teng bo'ladi.*

8.1- masala. Ushbu $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o'yin yechimini toping va geometrik talqinini bering.

Yechish. Oldin masalaning egar nuqtaga ega yoki yo'qligini tekshiramiz.

Buning uchun quyidagilarni topamiz:

$\min\{2;5\} = 2,$ $\max\{2;6\} = 6,$

$\min\{6;4\} = 4,$ $\max\{5;4\} = 5.$

Demak, o'yinning quyi yutug'i $\alpha = \max\{2;4\} = 4$, yuqori yutug'i esa $\beta = \min\{6;5\}=5$, $\alpha = 4 \neq \beta = 5$ bo'lgani uchun $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o'yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo'lib, uning yutug'i V quyidagi oraliqda joylashgan: $4 \leq V \leq 5$.

Agar A o'yinchining strategiyasi $U(u_1, u_2)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u holda 8.4- teoremaga asosan B o'yinchi B_1 yoki B_2 strategiyani qo'llaganda A o'yinchining o'rtacha yutug'ining qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, & (B_1 \quad \text{strategiyani} \quad \text{qo'llaganda}), \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta. & (B_2 \quad \text{strategiyani} \quad \text{qo'llaganda}) \end{cases}$$

Bu o'yinlar chastotalarining yig'indisi esa:

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Yuqoridagilarga asosan, quyidagi sistema hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak, $u_1^* = 0{,}4;$ $u_2^* = 0{,}6;$ $v = 4{,}4$ yechim hosil bo‘ladi.

Agar B_1 o‘yinchining strategiyasi $Z = (z_1^*, z_2^*)$ vektor bilan berilgan bo‘lsa, u holda 8.4- teoremaga asoslanib quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} 2z_1^* + 5z_2^* &= 4{,}4, \\ 6z_1^* + 4z_2^* &= 4{,}4, \\ z_1^* + z_2^* &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Sistemani yechsak, quyidagi yechim hosil bo‘ladi:

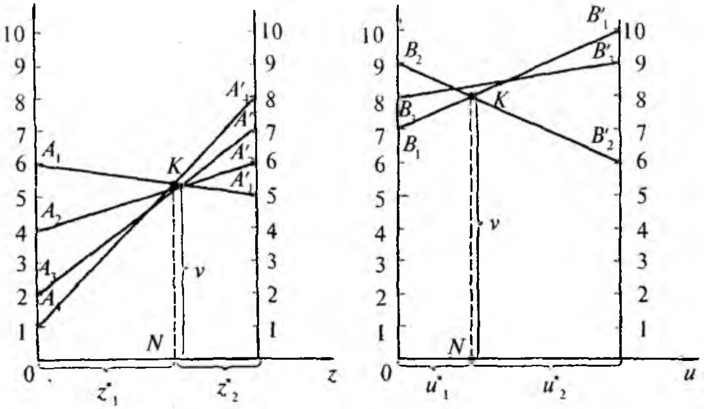
$$z_1^* = 0{,}2; \qquad z_2^* = 0{,}8.$$

Shunday qilib, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o‘yin siljigan optimal strategiyasi $U^* = (0{,}4;\ 0{,}6)$, $Z^* = (0{,}4;\ 0{,}8)$ bo‘lib, uning yutuq qiymati esa $v = 4{,}4$ bo‘ladi.

Endi masalaning geometrik talqinini beramiz. Buning uchun uOz teksligida A o‘yinchining siljigan strategiyasini $U = (u_1, u_2)$ bilan belgilasak, u vaqtda xususiy holda $A_1(0;1)$ nuqta A_1 strategiyani, $A_2(0;1)$ nuqta esa A_2 strategiyasini belgilaydi va h.k.

Agar A_1 va A_2 nuqtalarga perpendikular chiziqlar o‘tkazib, bu chiziqlarga o‘yinchilarning yutuqlarini joylashtirib chiqsak, 8.1- chizma hosil bo‘ladi.

Agar A o‘yinchi A_2 strategiyani tanlaganda B o‘yinchining strategiyasi B_1 bo‘lsa, u holda A o‘yinchining yutug‘i 6 ga teng, B_2 bo‘lganda esa 4 ga teng. Bu ikkala son A_2 nuqtaga o‘rnatilgan perpendikular ustida yotgan B_1^1 va B_2^1 nuqtalarni aniqlaydi. B_1 va B_1^1, B_2 va B_2^1 nuqtalarni birlashtirsak, ikkita to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqlardan Ou o‘qigacha bo‘lgan masofalar har qanday strategiyani tanlagandagi o‘rtacha yutuqni ko‘rsatadi. Masalan, $B_1\ B_1^1$ kesmadan Ou o‘qigacha bo‘lgan masofalar A_1 va A_2 strategiyalarning istalganini tanlagandagi o‘rtacha yutug‘i $v_1(A_1$ va A_2



8.1- chizma.

strategiyalarning chastotalari, mos ravishda, u_1 va u_2 ga teng). *B* o'yinchining strategiyasi esa B_1 ga teng bo'lib, masofa $2u_1+6u_2=v_1$ ga teng. Xuddi shunday, B_2 strategiyani qo'llaganda o'rtacha yutuq B_2, B_2' kesmadan *Ou* o'qigacha bo'lgan masofalarga teng bo'lib, bu masofa $5u_1+4u_2=v_2$ ga teng. Shunday qilib, B_1MB_2' siniq chiziqning ordinatalari *A* o'yinchining har qanday siljigan strategiyasi minimal yutug'i bo'ladi. Bu minimal yutug'lar ichida *M* nuqtaning ordinatasida maksimum qiymatga ega bo'ladi. Demak, *M* nuqtaning ordinatalari optimal yechimlar bo'ladi. Optimal strategiyasi $u^*=(u_1^*;\ u_2^*)$ o'yin yutug'ining qiymati esa *v* ga teng. $M=(u_1^*;\ u_2^*)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun $B_1\ B_1^1$ va $B_2\ B_2^1$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini quyidagi uchta tenglamalar sistemasini yechib topamiz:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1, \end{cases}$$

bu yerdan $u_1^* = \frac{2}{5} = 0,4,\quad u_2^* = \frac{3}{5} = 0,6,\quad \vartheta = \frac{22}{5} = 4,4.$

Xuddi yuqoridagi kabi, *B* o'yinchining optimal strategiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \frac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

sistemani yechib, $z_1^* = \frac{1}{5} = 0,2;$ $z_2^* = \frac{4}{5} = 0,8$ siljigan optimal yechimlarni topamiz. Natijada o'yinning siljigan optimal strategiyalarining yechimlari $U^*=(0,4;\ 0,6)$ va $Z^*=(0,2;\ 0,8)$ bo'ladi. O'yin yutug'ining qiymati esa $v = 4,4$.

8.2- masala. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

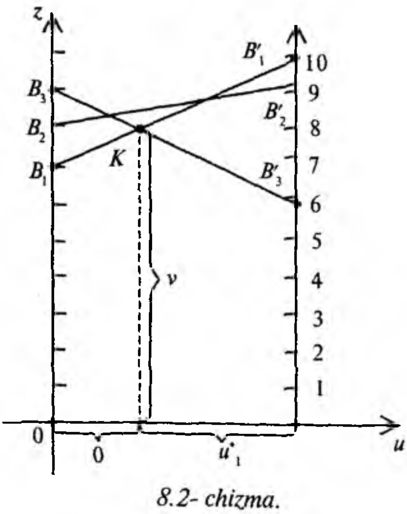
Yechish. Oldin masalaning egar nuqtaga ega yoki yo'qligini tekshiramiz. Buning uchun quyidagilarni topamiz:

min {7; 9; 8 }=7, max {7; 10}=10,

min {10; 6; 9 }=6, max =9, max {8; 9}=9.

Demak, uyinning quyi yutug'i $\alpha = \max\ \{7\ ;\ 6\} = 7$, yuqori yutug'i esa $\beta = \min\ \{10\ \ 9\ \ 9\}=9$, $\alpha = 7 \neq \beta=9$ bo'lgani uchun A matritsa bilan berilgan o'yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo'lib, v yutug'i quyidagi oraliqda joylashgan: $7 < v < 9$.

Agar A o'yinchining strategiyasi $U\,(u_1,\ u_2)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u holda 8.4- teoremaga asosan B o'yinchi B_1 yoki B_2 yoki B_3 strategiyani qo'llaganda A o'yinchining o'rtacha yutug'i qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi:



8.2- chizma.

$$\left.\begin{aligned} 7u_1^* + 10u_2^* &= \vartheta, \\ 9u_1^* + 6u_2^* &= \vartheta, \\ 8u_1^* + 9u_2^* &= \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* &= \vartheta. \end{aligned}\right|$$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechim hosil bo'ladi: $u_1^*=2/3$; $u_2^*=1/3$, $u^*=(2/3,\ 1/3)$, $v = 8$. B o'yinchining strategiyasi $Z^*=(z_1^*, z_2^*, z^*)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u holda 8.4- teoremaga asoslanib quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l} 7z_1^* + 9z_2^* + 8z_3^* = 8, \\ 10z_1^* + 6z_2^* + 9z_3^* = 8, \\ z_1^* + z_2^* + z_3^* = 1. \end{array}\right|$$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechimlar hosil bo‘ladi: $z_1^*=1/2=0{,}5$, $z_2^*=1/2=0{,}5$, $z_3^*=0$, $Z^*=(0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$ optimal yechim.

Yuqoridagi o‘yin yechimining geometrik talqinini 8.2- chizmadan ko‘rsatish mumkin: $B_1\,B'$, $B_2\,B_2'$ va $B_3\,B_3'$ to‘g‘ri chiziqlar siljigan optimal strategiya bo‘lib, $B_1 K B_2'$ siniq chiziq B o‘yinchining yutug‘ini quyi chegarasini ko‘rsatadi.

Shunday qilib, 2×2 ko‘rinishdagi o‘yin yechimlarini topish usulidan foydalanib, $2\times n$ va $n\times 2$ ko‘rinishdagi o‘yinlarning yechimlarini topishni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

1) ikkinchi (birinchi) o‘yinchining strategiyalariga mos bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar chiziladi;

2) o‘yin yutug‘ining quyi (yuqori) chegaralari aniqlanadi;

3) ikkinchi (birinchi) o‘yinchining ikkita strategiyasi topiladi va ularga mos bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar aniqlanadi. Shu to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasining maksimal (minimal) ordinataga ega bo‘lgan qiymati topiladi;

4) o‘yin yutug‘ining qiymati va optimal strategiyasi aniqlanadi.

2- §. Matritsali o‘yinlar nazariyasi masalalarini chiziqli programmalash masalalariga keltirish

Faraz qilaylik, quyidagi $m \times n$ ko‘rinishdagi matritsa bilan aniqlangan o‘yin berilgan bo‘lsin:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\cdots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\cdots\alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{m1}\alpha_{n2}\cdots\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

1- § dagi 8.1- teoremaga asosan R_1 o‘yinchining optimal strategiyasi $U^*=(u_1^*,u_2^*,...,u_m^*)$ ga teng bo‘lib, o‘yin yutug‘i uchun quyidagi tengsizlik bajariladi: $\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}u_i^* \ge v \qquad (j=\overline{1,n})$.

Masalaning yechimini aniqlash uchun yutuq $v > 0$ deb hisoblaymiz.

U holda quyidagi hosil bo'ladi: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \frac{u^*}{v} \geq 1$. $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Bu tengsizlikka $\frac{1}{v}$ almashtirish kiritsak, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i^* \geq 1 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$,

$y_i^* \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ kelib chiqadi.

Agar $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ shartdan foydalansak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \frac{1}{v}.$$

Shart bo'yicha R_1 o'yinchi maksimum yutuqga erishish uchun harakat qiladi, ya'ni $\frac{1}{v}$ miqdorning minimum qiymatini topishga intiladi. Demak, R_1 o'yinchining optimal strategiyasini topish uchun $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i^* \geq 1 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$, $y_i^* \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ shartlarda $F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ funksiyaning minimum qiymatini topish kerak.

Xuddi shunday R_2 o'ynovchi optimal strategiyasini topish uchun quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq 1 \ \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

shartlarda $F = \sum_{j=1}^{n} x_i$ funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak (bu yerda $x_j = \frac{z_i}{v}$). Shunday qilib, A o'yin matritsasi bilan berilgan $m \times n$ ko'rinishdagi bir juft o'yinni chiziqli dasturlash masalasi bilan almashtirib, quyidagi simmetrik, ikkilangan masalalar ko'rinishida yozish mumkin:

Berilgan dastlabki masala. Quyidagi

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq 1 \ \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Ikkilamchi masala. Quyidagi $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \geq 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, $u_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $F(u_1, u_2, ..., u_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Ko'rsatilgan ikkilangan masalalarning yechimlaridan foydalanib, o'yin strategiyasini va yutug'ini quyidagi formulalar bilan aniqlaymiz:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = \vartheta y_i^*, \qquad z_j^* = \frac{z_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \vartheta x_j^*,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \quad \left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right).$$

Demak, R_1 o'yin yechimini chiziqli programmalash usullarini qo'llab topish jarayoni quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

1) o'yin matritsasiga ekvivalent bo'lgan bir juft ikkilangan chiziqli dasturlash masalasi tuziladi;

2) bir juft ikkilangan masalaning optimal rejasi topiladi;

3) ikkilangan bir juft masalaning optimal rejasi bilan optimal strategiya va o'yin yutug'idan foydalanib, o'yinning yechimi topiladi.

8.3- masala. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimi topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsa $a_{32} = 5$ egar nuqtaga ega. Shuning uchun, uning yechimi sof strategiya A_3 va V_2 bo'ladi, ya'ni $\overline{X} = (0; 0; 1)$ va $\overline{Y} = (0; 1; 0)$, $v = 5$ bo'lganda.

Bu matritsaga mos bo'lgan bir juft chiziqli programmalashning ikkilangan masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Daslabki masala:
Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\geq 1, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 &\geq 1. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

shartlarda $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$ funksiyani minimum qiymatini toping.

Ikkilangan masala.
Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 &\leq 1, \\ 4y_1 + 3y_2 + 7y_3 &\leq 1, \\ 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 &\leq 1. \end{aligned}\right\}$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$$

shartlarda $f(u_1,u_2,u_3)=u_1+u_2+u_3$ funksiyani maksimum qiymatini toping.

Ikkilangan masalani simpleks usul bilan yechsak, quyidagi jadvallar hosil bo'ladi:

1- simpleks jadval

4	I	II	III	I	1	1	0	0	0	Σ
	$C_б$		A_{i0}	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
3	0	u_4	1	6	2	5	1	0	0	
2	0	u_5	1	4	3	7	0	1	0	
I	0	u_6	1	5	5	6	0	0	1	
			Z=0	−1	−1	−1	0	0	0	

2- simpleks jadval

4	1	2	3	I	1	1	0	0	0	Tek-shirish ustuni
	$C_б$			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$6\,{}^4/_5$
3	0	u_4	3/5	4	0	13/5	0	0	−2/5	$4\,{}^1/_5$
2	0	u_5	2/5	1	0	17/5	0	0	−3/5	$3\,{}^3/_5$
I	0	u_2	1/5	1	1	6/5	0	0	1/5	3/5
Indeks satri			Z=1/5	0	0	1/5	0	0	1/5	3/5

Demak indeks satrida hamma kataklardagi sonlar musbat bo'lgani uchun optimal yechim quyidagicha bo'ladi: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{5}$, $u_3 = 0$,

$u_4 = \frac{3}{5}$; $u_5 = \frac{2}{5}$ va $Z_{max} = f_{min} = \frac{1}{5}$. O'yin yutug'i $v = \frac{1}{Z_{max}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ bo'l-

gani uchun optimal yechimlar $y_1^* = 0$, $y_2^* = 1$, $y_3^* = 0$ bo'ladi. Shunday qilib, B o'yinchining optimal strategiyasi $\overline{Y}^* = (0;\quad 1;\quad 0)$ bo'ladi.

A o'yinchi yutug'ining optimal yechimlarini, ya'ni dastlabki masalaning optimal yechimlarini o'zgarmaslar ustunidan u_4, u_5, u_6 qarshisidagi sonlarni tanlab olamiz: $x1=0$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{5}$, optimal strategiyasi esa $\overline{X}^* = (0;\quad 0;\quad 1)$ ga teng bo'ladi.

TOPSHIRIQLAR

Quyidagi matritsalar bilan berilgan o'yinlarning yechimlari topilsin.

8.4. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

8.5. $A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

8.6. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.7. $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.8. $A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.9. $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

8.10. $A_7 = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8.11. $A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

ADABIYOTLAR

1. *Акулич Н.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – "Высшая школа", М: 1986.

2. *Гуревич Т.Ф., Лушук В.О.* Сборник задач по математическому программированию. – "Колос", М: 1977.

3. *Данциг Д.* Линейное программирование его применение и обобщение. – "Прогресс", М:, 1975.

4. *Калихман И.Л.* Сборник задач по математическому программированию. –Высшая школа, М., 1975.

5. *Канторович Л.В., Горстко А.Б.* Математическое оптимальное программирование в экономике. – Знание. М., 1968.

6. *Кузнецов Ю.Н.,Кузубов В.И., Волошенко А.Б.* Математическое программирование. – Высшая школа, М., 1976.

Internet saytlari

1. http://www.uzsci.net — O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi qoshidagi O'zbek milliy va maorif tarmog'ining serveri.

2. www.search.re.uz — O'zbekiston axborotlarini izlab topish tizimi.

3. www.msu.ru.-MDU serveri. Fanlar bo'yicha namunaviy, ishchi dasturlari, elektron adabiyotlarni olishni ta'minlaydi.

4. www.mesi.ru.-Maskva iqtisod-statistika instituti serveri. Fanlar bo'yicha namunaviy ishchi dasturlari elektron adabiyotlarni olishni ta'minlaydi.

5. www.atv-emmm.narod.ru—Rossiya Federatsiyasining matematik modellashtirish bo'yicha turli mavzulardagi ma'lumotlarini olishni ta'minlovchi sayti.

6. www.oup.com.uk — Buyuk Britaniyadagi OKSFORD universiteti sayti. Matematik moddelashtirish ekonomertika sohalari bo'yicha ma'lumotlarni olishni ta'minlaydi.

MUNDARIJA

22.18 **Raisov M.**
R 19 Matematik programmalash: O'quv qo'l./M.Raisov; O'zR oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. — T.: „Voris" nashriyot, 2009. — 176 b.

MANSUR RAISOV

MATEMATIK PROGRAMMALASH

Iqtisod yo'nalishidagi oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma

„Voris" nashriyot MCHJ
Toshkent — 2009

Muharrir *N. G'oipov*
Musahhih *S. Musaxo'jayev*
Kompyuterda sahifalovchi *N. Ahmedova*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 20.08.09. Bichimi $60 \times 84^{1}/_{16}$. Kegli 10,5 shponli. Tayms garn. Ofset bosma usulida bosildi. Hajmi 11,0 b.t. 1000 nusxada bosildi. Buyurtma №363.

„Voris" nashriyot MCHJ, Toshkent, Shiroq ko'chasi, 100.

ISBN 978-9943-375-07-9
«Voris-nashriyot»