V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

**MATEMATIKA INSTITUTI,
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI**

TOSHKULOV XAMZA ABDUJABBOROVICH

KRITIK GAL’TON-VATSON TARMOQLANUVCHI JARAYONLARINING SHARTLI TAQSIMOTLARI ASIMPTOTIKASI

**01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2024

UDK: 519.21

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Toshkulov Xamza Abdujabborovich
Kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarining shartli taqsimotlari asimptotikasi........ 3

Тошкулов Хамза Абдужабборович
Асимптотика условных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона........ 19

Toshkulov Khamza Abdujabborovich
Asymptotics of conditional distributions of critical Galton-Watson branching processes........ 33

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works........ 37

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**MATEMATIKA INSTITUTI,
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI**

TOSHKULOV XAMZA ABDUJABBOROVICH

KRITIK GAL’TON-VATSON TARMOQLANUVCHI JARAYONLARINING SHARTLI TAQSIMOTLARI ASIMPTOTIKASI

**01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy Attestatsiya komissiyasida № B2023.1.PhD/FM841 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Matematika instituti va O‘zbekiston Milliy Universitetlarida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz/) va “ZiyonNet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy raxbar:	**Xusanbayev Yakubdjan Muxamadjanovich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Miraxmedov Sherzod Adbilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Azimov Jahongir Bahromovich fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Etakchi tashkilot:	**Namangan muhantislik-qurilish instituti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil « 25 » iyul soat 17:30·dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40, website: www.mathinst.uz, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (187-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil « 11 » iyul kuni tarqatildi.
(2024 yil « 11 » iyuldagi 2 - raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

Sh.K.Formanov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Tasodifiy tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi – zarrachalar populyatsiyasi evolyutsiyasi bilan bog‘liq masalalar uchun matematik model bo‘lib, tibbiyotda, kimyoda, fizikada, biologiyada, ommaviy xizmat ko‘rsatish kabi va fanning boshqa ko‘plab yo‘nalishlarida vujudga keladigan murakkab amaliy masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega. Shu sababli tasodifiy tarmoqlanuvchi jarayonlarni o‘rganish zamonaviy tasodifiy jarayonlar nazariyasidagi dolzarb va muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Bugungi kunda tarmoqlanuvchi jarayonlar xossalarini aniqlash uchun bunday jarayonlarni taqsimotlarini va shartli taqsimotlarini bilish muxim ahamiyatga ega. Ammo bu tasimotlarni aniq formulalar orqali ifodalashning deyarli imkoniyati yo‘q. Shu sababli aytilgan taqsimotlar uchun asimptotik formulalarni aniqlash, tarmoqlanuvchi jarayonlarning shartli taqsimotlari asimptotikasini o‘rganish; ko‘p sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi jarayon taqsimot funksiyasi asimptotikasini topish; bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan tarmoqlanuvchi jarayoni uchun limit teoremalar isbotlash tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasining markaziy va dolzarb masalalaridandir.

Mamlakatimizda matematikaning fundamental va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan ehtimollar nazariyasi, matematik statistika va tasodifiy jarayonlar nazariyasining katta amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlariga, xususan tasodifiy tarmoqlanuvchi jarayonlar taqsimotlarining va shartli taqsimotlarining asimptotikasini o‘rganishga alohida etibor qaratildi. Buning natijasida tarmoqlanuvchi jarayonlar taqsimotlarining asimptotikasini tatqiq qilish bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar asosida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalari va faoliyati yo‘nalishlaridan biridir[1] Bu borada tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi sohasida ilmiy tadqiqot ishlarini rivojlantirish dolzarb va muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-sonli Farmoni, 2017 yil 17 fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789-sonli, 2017 yil 20

[1]O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PQ-4387-son qarori

apreldagi “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-2909- sonli va 2019 yil 9 iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-sonli qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Tasodifiy tarmoqlanuvchi jarayonlarni o‘rganish bo‘yicha dastlabki ishlar F.Gal’ton, U.Vatson, A.N.Kolmogorov, R.Bellman, T.Xarris, B.Sevastyanov, S.Karlin, M.Irjina, Dj.Lamperti, P.Ney, D.Kendall, N.A.Dmitrev, K.B.Athreya, F.L.Spitzers va boshqalar tomonidan amalga oshirilgan. Tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun limit teoremalar B.Sevastyanov, P.Ney, A.Yaglom, V.Zolotarev, Dj.Foster, V.Chistyakov, Dj.Villiamson, R.Slack, E.Seneta, A.Pakes, S.Nagaev, G.Mitov, N.Yanev, A.Zubkov, V.Vatutin hamda O‘zbekistonlik olimlar Sh.K.Formanov, A.Nagaev, R.Muxamedxanova, I.S.Badalbayev, I.Raximov va boshqalar tomonidan amalga oshirilgan.

Subkritik va kritik Gal’ton-Varson tarmoqlanuvchi jarayonlar bir ehtimollik bilan so‘ngani uchun bu jarayonlarning jarayon so‘nmaganlik shartidagi shartli taqsimotlari o‘rganilgan. A.M.Yaglom subkritik va kritik jarayonlar shartli taqsimotlarining asimptotikasini aniqlagan va kritik holda mos ravishda normallangan tarmoqlanuvchi jarayon shartli taqsimoti bitta zarracha avlodlari soni chekli uchinchi momentga ega bo‘lganda ko‘rsatkichli taqsimotga yaqinlashishini ko‘rsatgan. T.Xarris tarmoqlanuvchi jarayonning uzoq kelajakda so‘nmaslik shartidagi taqsimoti limiti $1-e^{-x}-xe^{-x}$ ko‘rinishdagi taqsimot bo‘lishini isbotlagan. V.M.Zolotarev uzluksiz vaqtli tarmoqlanuvchi Markov jarayonlarini jarayon so‘nmaganlik shartidagi taqsimotini, bitta zarracha avlodlari soni hosil qiluvchi funksiyasi ma’lum ko‘rinishga ega (bu holda zarracha avlodlari soni dispersiyaga ega bo‘lmasligi ham mumkin) bo‘lgan holda asimptotikasini topgan. H.Kesten, P.Ney, F.Spitzerlar kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun Yaglom teoremasi o‘rinli bo‘lishi uchun bitta zarracha avlodlari soni dispersiyasi chekli bo‘lishi yetarli ekanligini ko‘rsatganlar.

V.Feller katta sondagi zarrachalardan boshlanuvchi tarmoqlanuvchi kritik jarayonlarni taqsimoti (shartsiz) Feller jarayoni taqsimotiga kuchsiz yaqinlashishini, T.Lindvall esa V.Feller natijasini Skoroxod fazosida ham o‘rinli ekanligini isbotlagan. Dj.Lamperti va P.Neylar katta sondagi zarrachalardan boshlanuvchi kritik jarayonlarning jarayon so‘nmaganlik shartidagi chekli o‘lchamli taqsimotlari tayin diffuzion jarayonning mos taqsimotlariga yaqinlashishini ko‘rsatgan. E.Seneta va A.Peykslar kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarni jarayonni so‘nish vaqti qaralayotgan vaqtdan so‘ng biror aniq vaqtda ro‘y berishi shartida o‘rganganlar.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Milliy universiteti Matematika fakulteti “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrasining “Statistik baholash nazariyasi va gipotezalarni tekshirish” (2016-2021 yillar) mavzusidagi ilmiy tadqiqot yo‘nalishi doirasida va V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti ilmiy Kengashida tasdiqlangan “Stoxastik taxlil” laborotoriyasining rejalashtirilgan mavzusiga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar taqsimotini va shartli taqsimotini sust yaqinlashishini taminlaydigan limit teoremalar isbotlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni dispersiyasi mavjud bo‘lmagan holda kritik tarmoqlanuvchi jarayonning $n+m$ momentda so‘nmaganlik shartidagi taqsimoti asimptotikasini n va m parametrlarga turli xil shartlar qo‘yilganda aniqlash;

bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni chekli dispersiyaga ega bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun uning traektoriyalariga ma’lum shartlar qo‘yilgandagi taqsimotlari uchun limit teoremalar isbotlash;

katta sondagi zarrachalardan boshlanuvchi kritik tarmoqlanuvchi jarayon taqsimot funksiyasi asimptotikasini zarracha avlodlar soni dispersiyasi mavjud bo‘lmagan holda topish;

bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi jarayonni so‘nish momentiga qo‘yilgan shartdagi shartli taqsimoti uchun limit teoremalar isbotlash;

Tadqiqot ob’ekti kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar va ularning taqsimotlari.

Tadqiqot predmeti. Tarmoqlanuvchi jarayon hosil qiluvchi funksiyalari, tarmoqlanuvchi jarayonlar sonli xarakteristikalari, tarmoqlanuvchi jarayonlarning davom etish ehtimolligi, tarmoqlanuvchi jarayonlarning bir o‘lchamli taqsimotlari va chekli o‘lchamli taqsimotlari, shartli taqsimotlari.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida ehtimolliklar nazariyasi usullaridan va hosil qiluvchi funksiyalar analitik usulidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

zarrachalar bevosita avlodlar soni dispersiyasi mavjud bo‘lmagan hamda hosil qiluvchi funksiyasi maxsus ko‘rinishda bo‘lishi talab qilingan kritik Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonining berilgan momentda so‘nmaganlik shartidagi taqsimotining asimptotikasi topilgan;

bitta zarrachaning bevosita avlodlari sonining dispersiyasi cheksiz bo‘lgan holda ko‘p sonli zarrachalardan boshlanadigan kritik Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun chekli o‘lchovli taqsimotlarning asimptotikasi aniqlangan;

bitta zarrachaning bevosita avlodlari soni chekli dispersiyaga ega bo‘lmagan holda kritik Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarining so‘nish vaqti ma’lum vaqt oralig‘ida ro‘y berish shartidagi shartli taqsimotlari uchun limit teoremalar isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ma’lum muhitdagi populyatsiya rivojlanishi yoki kasalliklarni tarqalishining matematik modellarini tarmoqlanuvchi jarayonlar orqali ifodalashni taklif etilganligi va bu tarmoqlanuvchi jarayonlar asimptotikasini aniqlash usullarini bayon qilinganligidan iborat;

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi ehtimolliklar nazariyasi, tasodifiy jarayonlar nazariyasi, matematik tahlil hamda matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasini rivojlantirishda qo‘llanilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, zarrachalarning populyatsiyalar evolyutsiyasi haqida xulosalar chiqarish, demografiya, biologiya, shuningdek, meditsinaning bazi masalalarini yechish imkonini berganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar uchun olingan natijalar asosida:

zarrachalar bevosita avlodlar soni dispersiyasi mavjud bo‘lmagan tarmoqlanuvchi jarayonining berilgan momentda so‘nmaganlik shartidagi taqsimotining asimptotikasidan OT-F4-69 raqamli “Garmonik tahlil, darajali geometriya va uning matematik fizika masalalariga tadbiqlari” mavzusidagi fundamental ilmiy loyihada tez tebranuvchan funksiyalardan olingan integrallarning asimptotik xarakterini tekshirishda foydalanilgan (Samarqand Davlat universitetining 2023 yil 3 iyundagi №10-2896-sonli ma’lumotnomasi).

Ilmiy natijaning qo‘llanilishi singulyar integrallarni tekis baholash imkonini bergan;

kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarining taqsimotlariga qo‘shimcha shartlar qo‘yilganda olingan asimptotik munosabatlardan OT-F4-40 raqamli “O‘lchovli funksiyalar sinfida indekslangan integral empirik protsesslarning asimptotik xossalarini tatqiq qilish” mavzusidagi fundamental loyihada o‘lchovli funksiyalar sinfida indekslangan integral emperik protsesslarning asimptotik xossalarini isbotlashda foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 27 iyuldagi №04/11-4514-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi indekslangan integral emperik protsesslarning asimptotik taqsimotlarini topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 5 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 16 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, shulardan, 6 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari (PhD) asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan 1 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jornallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 99 betni tashkil etgan.

DISSERTA TSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning kirish qismida mavzuning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi yoritilgan, tadqiqotning maqsad va vazifalari bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlariga doir asosiy ta’rif va natijalar”** deb nomlangan birinchi bobida Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayon ta’rifi va uning additivlik xossasi, hosil qiluvchi funksiya ta’rifi va uning asosiy xossalari, Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonning hosil qiluvchi funksiyasi, Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonning o‘rta qiymati va dispersiyasi uchun formulalar, jarayonning so‘nish ehtimolligi va kritik Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlari uchun asosiy limit teoremalar keltirilgan.

Birinchi bobning birinchi paragrafida Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayon ta’rifi va uning additivlik xossasi, hosil qiluvchi funksiya ta’rifi va uning asosiy xossalari, Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonning hosil qiluvchi funksiyasi, jarayonning o‘rta qiymati va dispersiyasi uchun formulalar hamda jarayonning so‘nish ehtimolligi to‘g‘risida ma’lumotlar keltirilgan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarining so‘nish ehtimolligi va shartli taqsimotlari uchun asosiy limit teoremalar, jumladan, Kolmogorov, Yaglom va Slack teoremalari keltirilgan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayon ta’rifi, ba’zi muxim xossalari, momentlari va bunday jarayonlar uchun ba’zi limit teoremalar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarining asimptotikasi**” deb nomlangan ikkinchi bobi Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi Z_n jarayonning $Z_{n+m} > 0$ shartdagi taqsimotini asimptotikasi n va m parametrlarga qo‘yilgan turli xil shartlarda o‘rganilgan. Bunda zarrachalar bevosita avlodlar soni dispersiyasi mavjud bo‘lmagan hol qaralgan bo‘lib, $f(s)$ hosil qiluvchi funksiya maxsus ko‘rinishda bo‘lishi talab qilingan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi Z_n jarayonning $Z_{n+m} > 0$ shartdagi taqsimotini asimptotikasi n va m parametrlarga qo‘yilgan turli xil shartlarda o‘rganilgan.

Faraz qilaylik, $Z_n,\ n \geq 0$ quyidagi

$$Z_0 = 1,\ \ Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,j},\ \ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

rekurent munosabat bilan aniqlangan Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni bo‘lsin, bu yerda $\xi_{i,j}$ tasodify miqdorlar bog‘liqsiz, manfiymas butun qiymatlar qabul qilib, bir xil $f(s)$ hosil qiluvchi funksiyaga va $\{p_k,\ k \geq 0\}$ $(p_0 + p_1 < 1,\ p_0 > 0)$ taqsimotga ega tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan iborat.

Hosil qiluvchi $f(s)$ funksiyaning n-momentdagi iteratsiyalarini $f_n(s)$ bilan belgilaymiz.

Quyidagi shartni kiritamiz:

(A): $f(s)$ hosil qiluvchi funksiya

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s),\ \ 0 \leq s \leq 1 \tag{2}$$

ko‘rinishga ega, bu yerda $\alpha \in (0,1]$-tayin son, $L(x)$-nolda sekin o‘zgaruvchi funksiya.

1-teorema. Faraz qilaylik m fiksirlangan butun musbat son yoki $k\to\infty$ da $m=o(k)$, $m\to\infty$, $f(s)$ uchun $f'(1)=1$ va **(A)** shart o‘rinli bo‘lsin. U holda $k\to\infty$ da

$$E\left(e^{-\lambda(1-f_k(0))Z_k}\Big/ Z_{k+m}>0\right)\to 1-\lambda\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}},\ k\to\infty.$$

2-teorema. Faraz qilaylik $f(s)$ uchun $f'(1)=1$ va **(A)** shart o‘rinli bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{m\to\infty}E\left(e^{-\lambda(1-f_k(0))Z_k}\Big/ Z_{k+m}>0\right)=\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}.$$

Ushbu teoremaning tasdig‘i Pakes tomonidan immigratsiyali jarayonlar uchun isbotlangan teorema natijasi sifatida olingan. Bizni 2-teoremani isbotlashdagi usulimiz Pakes usulidan farq qiladi.

Agar 2-teorema shartlari bajarilib, **(A)** shartda $\alpha=1$ bo‘lsa, $\left(1-f_k(0)\right)Z_k$ tasodifiy miqdorning $Z_{n+m}>0$ shartidagi shartli taqsimoti $m\to\infty, n\to\infty$ da Laplas almashtirishi $(1+\lambda)^{-2}$ bo‘lgan $1-e^{-x}-xe^{-x}$ taqsimotga kuchsiz yaqinlashadi. Bu natijani T.Harris isbotlagan.

3-teorema. Agar $f(s)$ hosil qiluvchi funksiya uchun $f'(1)=1$ va **(A)** shart o‘rinli va $m\to\infty$ da $k=o(m), k\to\infty$ bo‘lsa

$$E\left(e^{-\lambda(1-f_k(0))Z_k}\Big/ Z_{k+m}>0\right)\to\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}},\ m\to\infty.$$

4-teorema. Faraz qilaylik $f(s)$ uchun $f'(1)=1$ va **(A)** shart o‘rinli bo‘lsin, $t\in(0,1)$ fiksirlangan biror son bo‘lib, $k=[nt]$, $m=\left[(1-t)n\right]$ deylik, bunda $[a]$ belgi a sonining butun qismini bildiradi. Bu holda

$$E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_{[nt]}}\Big/ Z_n>0\right)\to\varphi_\alpha(t,\lambda),\ n\to\infty,$$

by yerda

$$\varphi_\alpha(t,\lambda)=\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\left\{1-\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\left[1+t\lambda^{\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}-\frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}}}\left\{1-\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{\lambda(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\left[1+t\lambda^{\alpha}\left(1+\frac{1}{\lambda(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

(3)

Natija. $f''(1)<\infty$ bo‘lsin. Bu holda **(A)** shart $\alpha=1$ bilan bajarilib 4-teoremaning tasdig‘idagi $\varphi_1(t,\lambda)$ hosil qiluvchi funksiya

$$\varphi_1(t,\lambda)=\frac{1}{t}\left[\frac{1}{1+\lambda t}-\frac{1-t}{1+\lambda t(1-t)}\right]$$

ko‘rinishga ega. $\varphi_1(t,\lambda)$ Laplas almashtirishi $t^{-2}e^{-\frac{y}{t}}\left(1-e^{-\frac{y}{1-t}}\right)$ zichlik funksiya va

$$G_t(y)=t^{-1}\left(1-e^{-\frac{y}{t}}\right)-t^{-1}(1-t)\left(1-e^{-\frac{y}{t(1-t)}}\right),\ y\geq 0$$

ehtimollik taqsimotiga mos keladi. Bu natija Lamperti, Ney [8]ning 2-teoremasi natijasi bilan mos keladi.

5-teorema. Faraz qiliylik $f(s)$ hosil qiluvchi funksiya uchun $f'(1)=1$ va **(A)** shart o‘rinli bo‘lsin. U holda har qanday $t\in[0,1]$ va ixtiyoriy $\lambda\geq 0$ uchun

$$\psi_t(\lambda)=\lim_{n\to\infty}E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_n}\Big/Z_{[nt]}>0\right)=1-\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

munosabat o‘rinli.

Ravshanki, $\psi_t(\lambda)$ funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin

$$\psi_t(\lambda)=1-t^{\frac{1}{\alpha}}+t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\lambda\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Bundan $\psi_t(\lambda)$ funksiya $\xi\eta$ tasodifiy miqdorning Laplas almashtirishi ekanligi kelib chiqadi, bu yerda ξ va η bog‘liqsiz, hamda ξ miqdor

$$P(\xi=0)=1-t^{\frac{1}{\alpha}},\ P(\xi=1)=t^{\frac{1}{\alpha}}$$

taqsimotga, η miqdor esa $1-\lambda\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$ ga teng hosil qiluvchi funksiyaga ega. Ushbu talqinda 4-teoremada olingan natijaning ma’nosi oydinlashadi. Haqiqatdan ham, agar qaralayotgan tarmoqlanuvchi jarayon $[nt]$ momentda so‘nmagan bo‘lsa $\left(Z_{[nt]}>0\right)$ u n-momentda yoki so‘nadi $(Z_n=0)$ yoki davom etayotgan bo‘ladi $(Z_n>0)$. $Z_n=0$ tasodifiy hodisaning $Z_{[nt]}>0$ shartdagi taqsimotining $n\to\infty$ dagi limiti $1-t^{\frac{1}{\alpha}}$ soniga teng.

Endi η butun musbat qiymatlar qabul qiluvchi va $\{\xi_{i,j},\ i,j\in\mathbb{N}\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligidan bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdor bo‘lsin. $h(s)$ orqali η ning hosil qiluvchi funksiyasini belgilaymiz.

$W_k,\ k\in\mathbb{N}$- boshlang‘ich momentda tasodifiy η sondagi zarrachalardan boshlanuvchi

$$W_0=\eta,\ W_n=\sum_{j=1}^{W_{n-1}}\xi_{n,j},\ n\in\mathbb{N}$$

rekurent munosabat bilan aniqlangan kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni bo‘lsin. Ushbu paragrafda $E\eta<\infty$ shart bajarilganda $W_k,\ k\in\mathbb{N}_0$ tasodifiy jarayonlar uchun 1-3 teoremalar analogi keltirilgan.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida ko‘p sondagi zarrachalardan boshlanadigan va bitta zarrachaning avlodlari soni chekli dispersiyaga ega bo‘lmasligi mumkin bo‘lgan holda mos ravishda normallashtirilgan $Z_{[nt]},\ t\in[0,1]$ Gal’ton-Vatson kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonining chekli o‘lchovli taqsimotlarining asimptotikasi o‘rganilgan.

6-teorema. Faraz qilaylik $f'(1)=1$, **(A)** shart bajarilsin, bu holda ixtiyoriy $k\in\mathbb{N}$ va $0\le t_1<t_2<...<t_k\le 1$, $\lambda_i\ge 0$, $i=1,2,...,k$ uchun

$$\left(1-f_n(0)\right)\left(Z_{[nt_1]},Z_{[nt_2]},...,Z_{[nt_k]}\right)$$

vektorning Laplas almashtirishi $n\to\infty$ da

$$f_k\left(x,t_1,...,t_k,\lambda_1,...,\lambda_k\right),\ k=2,...$$

Laplas almashtirishiga yaqinlashadi. $f_k\left(x,t_1,...,t_k,\lambda_1,...,\lambda_k\right),\ k=2,...$ funksiyalar quyidagi munosabatlarni qanoatlantiradi:

$$f_k\left(x,t_1,...,t_k,\lambda_1,...,\lambda_k\right)=f_{k-1}\left(x,t_1,...,t_{k-1},\lambda_1,...,\lambda_{k-1}+\lambda_k\left(1+\lambda_k^{\alpha}\left(t_k-t_{k-1}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right),$$

$$k=2,3,...$$

bunda $f_1(x,t,\lambda)=e^{-\frac{x\lambda}{\left(1+t\lambda^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}}-e^{\frac{x}{t^{1/\alpha}}}$.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Faraz qilaylik 6-teorema shartlari bajarilsin. U holda har qanday $k=2,3,...$ va $t_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,k}$, $0\le t_1<t_2<...<t_k\le 1$ uchun $\left(1-f_n(0)\right)\left(Z_{[nt_1]},...,Z_{[nt_k]}\right)$ vektorning taqsimoti $n\to\infty$ da Laplas almashtirishi 6-

teoremada aniqlangan $f_k\left(x,t_1,...,t_k,\lambda_1,...,\lambda_k\right)$ Laplas almashtirish funksiyasiga mos vektor taqsimotiga kuchsiz yaqinlashadi.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni chekli dispersiyaga ega bo‘lgan holda kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi $Z_k,\ k\geq 0$ jarayonning uning tugash momentiga qo‘yilgan shartdagi shartli taqsimoti asimptotikasi m va k parametrlarga qo‘yilgan turli shartlarda o‘rganilgan va ular uchun limit teoremalar isbotlangan.

Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonining tugash momentini ifodalovchi $T=\min\left(k:\ Z_k=0\right)$ tasodifiy miqdorni kiritamiz. Ravshanki, kritik holda

$$\lim_{n\to\infty}P\left(T>n\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n>0\right)=0 \text{ va demak, } P\left(T<\infty\right)=1.$$

7-teorema. $f'\left(1\right)=1,\ \sigma^2=f''\left(1\right)<\infty$ bo‘lsin. Bu holda har qanday tayinlangan $m\in\mathbb{N}$ va barcha $j\in\mathbb{N}$ uchun

$$u_j\left(k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n=j\big/T=n+k\right)=\mu\left(j\right)\left[f_k^j\left(0\right)-f_{k-1}^j\left(0\right)\right], \tag{4}$$

bu yerda

$$\mu\left(j\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2n^2}{2}P_n\left(1,j\right),\ \ j\in\mathbb{N},$$

$$P_n\left(i,j\right)=P\left(Z_n=j\big/Z_0=i\right),$$

$$U_k\left(s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}s^jP\left(Z_n=j\big/T=n+k\right)=G\left(sf_k(0)\right)-G\left(sf_{k-1}(0)\right), \tag{5}$$

bu yerda $G\left(s\right)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu\left(j\right)s^j$.

8-teorema. $f'\left(1\right)=1,\ \sigma^2=f''\left(1\right)<\infty$ bo‘lsin. U holda har qanday tayinlangan $m\in\mathbb{N}$ va barcha $j\in\mathbb{N}$ uchun

$$u_j=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n=j\big/n<T\leq n+m\right)=\frac{1}{m}\mu\left(j\right)f_m^j\left(0\right), \tag{6}$$

$$U\left(s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}s^jP\left(Z_n=j\big/n<T\leq n+m\right)=\frac{1}{m}G\left(sf_m(0)\right).$$

9-teorema. $f'(1)=1,\ \sigma^2 = f''(1)<\infty$ bo‘lsin. U holda har qanday $\lambda \ge 0$ uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_{[nt]}} \Big/ Z_{[nt]}>0, Z_n=0 \right) = \frac{1}{1+\lambda t(1-t)}.$$

Dissertatsiyaning **uchinchi bobi** “**Kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun shartli limit teoremalar**” deb atalib, bir zarrachaning bevosita avlodlari soni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan holda $Z_k,\ k\ge 0$ kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonining tugash momentiga qo‘yilgan shartdagi taqsimotlari uchun limit teoremalar isbotlangan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida zarrachaning avlodlari soni hosil qiluvchi funksiyasi (**A)** shartni qanoatlantirganda ikkinchi bobning uchinchi paragrafidagi 7,8- teoremalar analogi hamda 12-teorema keltirilgan.

10-teorema. Faraz qilaylik **(A)** shart o‘rinli va $f'(1)=1$ bo‘lsin. U holda har qanday tayin $k\in\mathbb{N}$ va hamma $j\in\mathbb{N}$ lar uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(Z_n = j \Big/ T = n+k \right) \to \mu(j)\left[f_k^j(0) - f_{k-1}^j(0) \right],$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bunda $\mu(j),\ j\ge 1$ miqdorlar

$$\lim_{n\to\infty} L^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-f_n(0)\right)(\alpha n)^{1+\frac{1}{\alpha}} P_n(i,j) = i\mu(j)$$

munosabatdan aniqlanadi, bu yerda $P_n(i,j) = P\left(Z_n = j \Big/ Z_0 = i \right)$.

Natija. Faraz qilaylik **(A)** shart o‘rinli va $f'(1)=1$ bo‘lsin. U holda har qanday tayin $k\in\mathbb{N}$ uchun $n\to\infty$ da

$$\Phi_{k,n}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} s^j P\left(Z_n = j \Big/ T = n+k \right) \to U\left(sf_k(0)\right) - U\left(sf_{k-1}(0)\right),\ 0\le s\le 1,$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerdagi $U(s)$ funksiya 10-teoremadagi $\mu(j),\ j\ge 1$ o‘lchovning hosil qiluvchi funksiyasi:

$$U(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j) s^j .$$

11-teorema. Faraz qilaylik **(A)** shart o‘rinli va $f'(1)=1$ bo‘lsin. Bu holda barcha $j\in\mathbb{N}$ va har qanday tayin $m\in\mathbb{N}$ son uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(Z_n = j \big/ n < T \le n+m\right) \to \frac{1}{m}\mu(j)\, f_m^{\,j}(0),$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerdagi $\mu(j),\ j \ge 1$ miqdorlar 10-teoremada aniqlangan.

Natija. Faraz qilaylik **(A)** shart o‘rinli va $f'(1) = 1$ bo‘lsin. U holda har qanday tayin $m \in \mathbb{N}$ soni uchun $n \to \infty$ da

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j P\left(Z_n = j \big/ n < T \le n+m\right) \to \frac{1}{m} U\left(s f_m(0)\right),\ 0 \le s < 1,$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, bu yerdagi $U(s)$ funksiya 10-teoremadagi $\mu(j),\ j \ge 1$ o‘lchovning hosil qiluvchi funksiyasi.

12-teorema. Faraz qilaylik **(A)** shart o‘rinli va $f'(1) = 1$ bo‘lsin. Bu holda har qanday $\lambda \ge 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_{[nt]}} \big/ Z_{[nt]} > 0, Z_n = 0\right) = \frac{1}{1-t^{\frac{1}{\alpha}}}\left\{1 - \lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 + \frac{1}{\lambda(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + t\lambda^{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\lambda(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida 10-12-teoremalar isbotida kerak bo‘ladigan yordamchi ma’lumotlar keltirilgan**, uchunchi paragraf** bobning asosiy natijalarini isbotlashga bag‘ishlangan.

Uchinchi bobning to‘rtinchi paragrafida immigratsiyali deyarli kritik tarmoqlanuvchi jarayonni deterministik jarayonga yaqinlashishi haqidagi teorema isbotlangan.

Har bir $n \in \mathbb{N}$ da $\left\{\xi_{i,j}^{(n)},\ i, j \in \mathbb{N}\right\}$ va $\left\{\varepsilon_i^{(n)}, i \in \mathbb{N}\right\}$ nomanfiy butun son qiymatlarni qabul qiluvchi bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning ikkita o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan oilasi bo‘lsin. Immigratsiyali tarmoqlanuvchi $\left\{X_k^{(n)}, k \ge 0\right\}$, $n \in \mathbb{N}$ jarayonlarning ketma-ketligini quyidagi rekurrent munosabatlar bilan aniqlaymiz:

$$X_0^{(n)} = 0,\ X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)},\ k, n \in \mathbb{N}. \qquad (9)$$

$T>0$-biror tayinlangan son bo‘lsin. $D_{[0,\mathrm{T}]}$ orqali $[0,T]$ oraliqda aniqlangan ikkinchi turdagi uzilishlarsiz va o‘ng tomondan uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiyalarning Skoroxod fazosini belgilaymiz.

$X_n(t),\ t\geq 0$ tasodifiy jarayonni quyidagicha

$$X_n(t)=X^{(n)}_{[\mathrm{nt}]},\ t\in[0,T] \tag{10}$$

aniqlaymiz, bu yerda $[\mathrm{a}]$ - a sonining butun qismini bildiradi. Ravshanki, $\{X_n(t),\ t\in[0,T]\},\ \ n\in\mathbb{N}$ jarayonlarning traektoriyalari $D_{[0,T]}$ fazoga tegishli. Faraz qilaylik $m_n=E\xi^{(n)}_{1,1}<\infty,\ \ n\in\mathbb{N}$ bo‘lsin. Agar $n\to 1$ da $m_n\to 1$ bo‘lsa, $\{X_n(t),\ t\in[0,T]\},\ n\in\mathbb{N}$ jarayonlar ketma-ketligi deyarli kritik imigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlar deb ataladi. Ushbu paragrafda mos ravishda normallangan $\{X_n(t),\ t\in[0,T]\},\ \ n\in\mathbb{N}$ tasodifiy jarayonlar ketma-ketligini deterministik (tasodifiy bo‘lmagan) jarayonga yaqinlashish shartlari aniqlangan.

Xulosa

Dissertatsiya ishi kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarda bitta zarrachaning avlodlari soni dispersiyasi mavjud bo‘lgan va mavjud bo‘lmagan hollarda shartli taqsimotlar asimptotik holatini aniqlashga hamda shu jarayonlar uchun limit teoremalar isbotlashga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni dispersiyasi mavjud bo‘lmagan holda kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonning $n+m$ momentda so‘nmaganlik shartidagi taqsimoti asimptotikasi n va m parametrlarga turli xil shartlar qo‘yilganda aniqlangan.

2. Bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni chekli dispersiyaga ega bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun uning traektoriyalariga ma’lum shartlar qo‘yilgandagi taqsimotlari uchun limit teoremalar isbotlangan;

3. Bitta zarrachaning bevosita avlodlari soni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan holda katta sondagi zarrachalardan boshlanuvchi kritik Gal’ton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarning chekli o‘lchovli taqsimotlarini asimptotikasi haqidagi teorema isbotlangan.

4. Bitta zarrachaning bevosita avlodlar soni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi jarayonni so‘nish momentiga qo‘yilgan turli shartlardagi taqsimoti uchun limit teoremalar isbotlangan.

5. Immigratsiyali deyarli kritik tarmoqlanuvchi jarayonni vaqt o‘tishi bilan tasodifiylik xususiyatini yo‘qotishi uchun yetarli bo‘lgan shartlarni o‘z ichiga olgan teorema isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ,
НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ТОШКУЛОВ ХАМЗА АБДУЖАББОРОВИЧ

АСИМПТОТИКА УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2024 г.

Тема диссертации доктора философии (Doctorof Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за B2023.1.PhD/FM841.

Диссертация выполнена в институте математики и Национальном университете Узбекистана.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz/ и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу www.ziyonet.uz

Научный руководитель:	**Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Мирахмедов Шерзод Адылович** доктор физико-математических наук, профессор
	Азимов Жахонгир Бахромович кондидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Наманганский инженерно-строительный институт**

Защита диссертации состоится « 25 » июля 2024 года в 17:30 часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)207-91-40, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 187). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазрский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 11 » июля 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от « 11 » июля 2024 года).

У.А. Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Научный секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Ш.К.Форманов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Теория ветвящихся случайных процессов представляет собой математическую модель задач, связанных с эволюцией популяций частиц и важна для решения сложных практических задач, возникающих в медицине, химии, физике, биологии, системах массового обслуживания и многих других областях науки. Поэтому исследование случайных ветвящихся процессов остается одной из актуальных и важных задач теории современных случайных процессов.

В последнее время для определения свойств ветвящихся процессов изучаются их распределения, а также условные распределения. Однако нахождение явных выражений для распределений является трудной задачей. Поэтому для определения асимптотических формул указанных распределений необходимо изучить асимптотику условных распределений ветвящихся процессов; нахождение асимптотики функции распределения ветвящегося процесса, начиная с большого числа частиц; доказательство предельных теорем для ветвящегося процесса с бесконечным числом прямых поколений одной частицы-один из центральных и актуальных вопросов теории ветвящихся процессов.

В нашей стране особое внимание уделяется актуальным направлениям теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов как фундаментальное и практическое применение математики, имеющих большое практическое значение, в частности, к изучению асимптотики распределений и условных распределений случайных ветвящихся процессов. В результате были достигнуты существенные результаты в исследовании асимптотики распределений ветвящихся процессов. Проведение научных исследований на основе международных стандартов по приоритетным направлениям «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Функциональный анализ и актуарная математика» является одной из основных задач и направлений деятельности[1]. В связи с этим актуально и важно развитие научных исследований в области теории ветвящихся процессов.

Данная диссертация в определенной мере служит в обеспечении выполнения задач, определенных в Указе Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года № ПФ-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлении Президента Республики Узбекистан № PQ-2789 от 17 февраля 2017 года «Деятельность АН СССР, научный «О мерах по дальнейшему совершенствованию организации, управления и финансирования научных исследований», в Постановлении Президента Республики Узбекистан ПQ-2909 от 20 апреля 2017 г. «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и в Постановлении Президента Республикии[1]. Узбекистан № PQ-4387 от 9 июля 2019 г.

[1]Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

«О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мер по коренному совершенствованию деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и других административно-правовых документах, относящихся к данной сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в рамках приоритетного направления IV «Математика, механика и информатика» развития науки и технологий Республики.

Степень изученности проблемы. Первоначальные работы по изучению случайных ветвящихся процессов осуществлены Ф. Гальтоном, У. Ватсоном, А.Н. Колмогоровым, Р. Беллманом, Т. Харрисом, Б. Севастьяновым, С. Карлиным, М. Иржина, Дж. Ламперти, П. Ней, Д. Кендаллом, Н. А. Дмитриевым, К.Б. Атрея, Ф.Л. Спитцером и другими. Предельным теоремам для ветвящихся процессов посвящены работы Б. Севастьянова, П. Нея, А. Яглома, В. Золотарева, Дж. Фостера, В. Чистякова, Дж. Уильямсона, Р. Слэка, Э. Сенета, А. Пэйкса, С. Нагаева, Г. Митова, Н. Янева, А. Зубкова, В. Ватутина, а также узбекских ученых Ш. К. Форманова, А. Нагаева, Р. Мухамедхановой, И. С. Бадалбаева, И. Рахимова и других.

Поскольку докритические и критические ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона вырождаются с вероятностью 1, то распределение этих процессов изучаются при условии, что процесс не не выродился. А.М. Яглом определил асимптотику условных распределений докритических и критических процессов и показал, что условное распределение критического ветвящегося процесса, соответственно нормированное, приближается к экспоненциальному распределению, когда число поколений одной частицы имеет конечный третий момент. Т. Харрис доказал, что предел распределения ветвящегося процесса при условии не вырождения в отдаленном будущем имеет вид $1-e^{-x}-xe^{-x}$. В.М. Золотарев определил предельное распределение непрерывных во времени ветвящихся марковских процессов при условии, что процесс не вырождается, в случае, когда производящая функция числа потомков одной частицы, имеет специальный вид (в этом случае число потомков одной частицы может не иметь дисперсию). Х. Кестен, П. Ней, Ф. Спитцер доказали, что конечность дисперсии числа потомков одной частицы достаточна для справедливости теоремы Яглома для критических ветвящихся процессов.

В. Феллер доказал, что распределение ветвящихся критических процессов, начинающихся с большого числа частиц, слабо приближается к процессу Феллера, а Т. Линдвалл доказал, что результат В. Феллера справедлив и в пространстве Скорохода. Дж. Ламперти и П. Ней показали, что распределения критических процессов, начинающихся с большого числа частиц, при условии, что процесс не затухает, приближаются к соответствующим распределениям определенного диффузионного процесса. Е. Сенета и А. Пэйкс исследовали критические ветвящиеся процессы при условии, что момент вырождения процесса наступает в определенное время после рассматриваемого времени.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами

учреждения высшего образования (НИИ), где выполнялась диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научного исследования по теме «Теория статистических оценок и проверка гипотез» (2016-2021 годы) кафедры «Теории вероятностей и математической статистики» математического факультета Национального университета Узбекистана и в соответствии с плановой темой лаборатории «Стохастический анализ», утвержденной ученым советом Математического института им. В.И. Романовского.

Целью исследования является доказательство предельных теорем, обеспечивающих слабую сходимость распределений и условных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона.

Задачи исследования:

определить асимптотику распределения ветвящегося процесса при условии не вырождения процесса в моменте $n+m$ при отсутствии конечной дисперсии числа потомков одной частицы и при наложении различных условий на параметры n и m;

доказать предельные теоремы для распределений критических ветвящихся процессов в случае когда число потомков одной частицы имеет конечную дисперсию при наложении определенных условий на ее траектории;

найти асимптотику функции распределения критического ветвящегося процесса, начинающихся с большого числа частиц при отсутствии дисперсии числа потомков одной частицы;

доказать предельные теоремы для условных распределений критического ветвящегося процесса в случае когда число потомков одной частицы бесконечно.

Объектом исследования. Критические ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона, ветвящиеся процессы с иммиграцией.

Предмет исследования. Производящие функции ветвящихся процессов, числовые характеристики ветвящихся процессов, вероятность продолжения ветвящихся процессов, одномерные распределения и конечномерные распределения ветвящихся процессов, условные распределения.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы теории вероятностей и аналитический метод производящих функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдена асимптотика распределения критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, при условии отсутствия дисперсии числа непосредственных потомков одной частицы и производящая функция имеет специальный вид, при условии не вырождения в моменте $n+m$ и при наложении различных условий на параметры n и m;

определена асимптотика конечномерных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, начинающихся с большого числа частиц, когда число непосредственных потомков одной частицы имеет бесконечную дисперсию;

доказаны предельные теоремы для условных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона при условии на времени вырождения, которое происходить в определенном интервале времени в случае отсутствии конечной дисперсии числа непосредственных потомков одной частицы;

Практические результаты исследования состоит в следующем:

математической моделью развития популяции или распространения болезней в определенной среде предлагается представлять ветвящимися процессами, и описываются методы определения асимптотики этих ветвящихся процессов;

Достоверность результатов исследования основана на строгости методов теории вероятностей, теории случайных процессов, математического анализа, а также математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследований объясняется их применением при разработке теории ветвящихся процессов.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что позволяют делать выводы об эволюции популяций, решать некоторые проблемы демографии, биологии, а также медицины.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов, полученных для критических ветвящихся случайных процессов:

результаты, полученные для условных распределений ветвящихся процессов в случае отсутствия момента второго порядка, использовано в фундаментальном проекте № ОТ-Ф4-69 «Гармонический анализ, степенная геометрия и их приложения к задачам математической физики» (справка Самаркандского государственного университета имени Шарафа Рашидова с регистрационным номером № 10-2896 от 3 июня 2023г.). Для проверки асимптотического характера интегралов, полученных от быстро колеблющихся функций. Применение научного результата позволило равномерно оценить сингулярных интегралов;

используется при исследовании асимптотических свойств индексированных интегральных эмпирических процессов в классе размерных функций, полученные для распределения критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, были использованы в фундаментальном проекте № ОТ-Ф4-40 «Исследование асимптотических свойств индексированных интегральных эмпирических процессов в классе измеримых функции» (справка Национального университета Узбекистана с регистрационным номером № № 04/11 -4514 от 27 июля 2023года). Применение научных результатов позволило найти асимптотические распределения индексированных интегральных эмпирических процессов.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации обсуждались на 5 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. Всего по теме диссертации опубликовано 16 научных работ. Из них 5 опубликовано в научных изданиях, рекомендованных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан к опубликованию основных научных результатов диссертаций доктора философии (PhD), в том числе, 1 в зарубежном и 5 в республиканских журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 99 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обосновывается актуальность и востребованность темы, показана соответствия исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики, дан обзор зарубежных научных исследований по теме, освещен степень изученности проблемы, даны сведения о цели и задачах исследования.

В первой главе диссертации под названием **«Основные определения и результаты о ветвящихся процессах Гальтона-Ватсона»** дано определение ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона и его свойства аддитивности, определение производящей функции и ее основные свойства, производящая функция ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, представлены формулы для среднего значения и дисперсии ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, приведены вероятность вырождения процесса и основные предельные теоремы для критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона.

В первом параграфе первой главы дано определение ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона и его свойства аддитивности, даны определение производящей функции и ее основные свойства, производящая функция ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, формулы для среднего значения и дисперсии процесса, а также обсуждается понятие вероятности вырождения процесса.

В втором параграфе первой главы изложены основные предельные теоремы для вероятности вырождения и для условных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, в частности, приведены теоремы Колмогорова, Яглома и Слака.

В третьем параграфе первой главы дано определение ветвящегося процесса с иммиграцией, приведены некоторые важные свойства, формулы для моментов и некоторые известные предельные теоремы для таких процессов.

Во второй главе диссертации, под названием **«Асимптотика критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона»**, изучаются асимптотика распределения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона Z_n при условии $Z_{n+m} > 0$ и при различных условиях, налагаемые на параметры n и m. При этом рассматривается случай отсутствия дисперсии числа непосредственных потомков одной частицы, а производящая функция $f(\mathrm{s})$ имеет специальный вид.

В первом параграфе второй главы изучается асимптотика условного распределения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона Z_n при условии $Z_{n+m} > 0$ при различных условиях на параметры n и m.

Пусть ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона $Z_n,\ n \geq 0$ определяется рекуррентным соотношением

$$Z_0 = 1, \;\; Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} \xi_{n,j}, \;\; n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

где случайные величины $\xi_{i,j}$ независимы и принимают неотрицательные целые значения, с производящей функцией $f(s)$ и одинаковым распределением $\{p_k, \; k \geq 0\}$ $(p_0 + p_1 < 1, \; p_0 > 0)$.

Обозначим через $f_n(s)$ n - итерацию производящей функции $f(s)$.

Введем следующее условие:

(A) : производящая функция $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L(1-s), \;\; 0 \leq s \leq 1 \qquad (2)$$

где $\alpha \in (0,1]$-фиксированное число, а $L(x)$–медленно изменяющаяся функция в нуле.

Теорема 1. Предположим, что или m-фиксированное целое положительное число или при *k→∞ m=o(k), m→∞.* Пусть производящая функция $f(s)$ такая, что $f'(1) = 1$ и выполнено условие (A). Тогда при *k→∞*

$$E\left(e^{-\lambda(1-f_k(0))Z_k} \big/ Z_{k+m} > 0 \right) \to 1 - \lambda\left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \; k \to \infty.$$

Теорема 2. Пусть производящая функция $f(s)$ такая, что $f'(1) = 1$ и выполнено условие (A). Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{m\to\infty} E\left(e^{-\lambda(1-f_k(0))Z_k} \big/ Z_{k+m} > 0 \right) = \left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}$$

Если в теореме 2 условие (A) выполняется при $\alpha = 1$, то условное распределение случайной величины $(1 - f_k(0))Z_k$ при условии $Z_{n+m} > 0$ слабо сходит при $m \to \infty$ а затем $n \to \infty$ к распределению $1 - e^{-x} - xe^{-x}$ с преобразованием Лапласа $(1+\lambda)^{-2}$. Этот результат было получено Т.Харрисом.

Теорема 3. Если для производящей функции $f(s)$ справедливо равенство $f'(1) = 1$ и выполнено условие (A) и при $m \to \infty, \; k = o(m), \; k \to \infty$, то

$$E\left(e^{-\lambda(1-f_k(0))Z_k} \big/ Z_{k+m} > 0 \right) \to \left(1+\lambda^{\alpha}\right)^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}, \; m \to \infty.$$

Теорема 4. Пусть для производящей функции $f(s)$ $f'(1) = 1$ и выполнено условие (A), $t \in (0,1)$ фиксированное произвольное число и $k = [nt], \; m = \left[(1-t)n\right]$, где символ $[a]$ обозначает целую часть числа a. В этом случае

$$E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_{[nt]}} \Big/ Z_n > 0 \right) \to \varphi_\alpha(t,\lambda)$$

где

$$\varphi_\alpha(t,\lambda) = \frac{1}{t^{1/\alpha}}\left\{1-\lambda t^{1/\alpha}\left[1+t\lambda^\alpha\right]^{-1/\alpha}\right\} - \frac{1}{t^{1/\alpha}}\left\{1-\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{\lambda(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\left[1+t\lambda^\alpha\left(1+\frac{1}{\lambda(1-t)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^\alpha\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right\} . (3)$$

Следствие. Пусть $f''(1)<\infty$. В этом случае условие **(A)** выполняется при $\alpha=1$, производящая функция $\varphi_1(t,\lambda)$ из теоремы 4 имеет вид

$$\varphi_1(t,\lambda) = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{1+\lambda t} - \frac{1-t}{1+\lambda t(1-t)}\right].$$

Преобразованию Лапласа $\varphi_1(t,\lambda)$ соответствует функция плотности $t^{-2}e^{-\frac{y}{t}}\left(1-e^{-\frac{y}{1-t}}\right)$ и распределения вероятности

$$G_t(y) = t^{-1}\left(1-e^{-\frac{y}{t}}\right) - t^{-1}(1-t)\left(1-e^{-\frac{y}{t(1-t)}}\right),\ y\ge 0.$$

Этот результат согласуется со следствием теоремы 2 работы Lamperti, Ney.

Теорема 5. Пусть производящая функция $f(s)$ такая, что $f'(1)=1$ и выполнено условие **(A)**. Тогда для любого $t\in[0,1]$ и произвольного $\lambda\ge 0$ справедливо соотношение

$$\psi_t(\lambda) = \lim_{n\to\infty} E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_n} \Big/ Z_{[nt]} > 0 \right) = 1-\lambda t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1+\lambda^\alpha\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Очевидно, что функцию $\psi_t(\lambda)$ можно записать в следующем виде

$$\psi_t(\lambda) = 1-t^{\frac{1}{\alpha}} + t^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\lambda\left(1+\lambda^\alpha\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Отсюда следует, что функция $\psi_t(\lambda)$ представляет собой преобразование Лапласа случайной величины $\xi\eta$, где ξ и η независимые, а величина ξ имеет распределение

$$P(\xi=0)=1-t^{\frac{1}{\alpha}},\ P(\xi=1)=t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

а величина η имеет производящую функцию, равную $1-\lambda\left(1+\lambda^\alpha\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$. Такая интерпретация проясняет смысл результата, полученного в теореме 4.

Действительно, если рассматриваемый ветвящийся процесс не выродился в моменте $[nt]$ ($Z_{[nt]}>0$), он либо вырождается в n–моменте ($Z_n=0$), либо продолжается ($Z_n > 0$). Предел распределения случайного события $Z_n = 0$ при условии $Z_{[nt]} > 0$ равен числу $1 - t^{\frac{1}{\alpha}}$.

Теперь пусть η – случайная величина, принимающая положительные значения и не зависящая от последовательности случайных величин $\{\xi_{i,j},\ i,j \in \mathbb{N}\}$. Через $h(s)$ обозначим производящую функциюі η.

Пусть $W_k,\, k \in \mathbb{N}$ - критический ветвящиеся процесс Гальтона-Ватсона начинающиеся в начальный момент со случайного η числа частиц, определяемое рекуррентным соотношением

$$W_0 = \eta,\ W_n = \sum_{j=1}^{W_{n-1}} \xi_{n,j},\ n \in \mathbb{N}.$$

В этом параграфе представлен аналог теорем 1–3 для случайных процессов $W_k,\, k \in \mathbb{N}_0$, когда выполнено условие $E\eta < \infty$.

Во втором параграфе второй главы изучена асимптотика конечномерных распределений соответствующим образом нормированного критического ветвящегося случайного процесса Гальтона-Ватсона $Z_{[nt]},\ \ t \in [0,1]$ в случае, когда начинающейся с нескольких частиц и при отсутствии кончной дисперсии числа поколений одной частицы.

Теорема 6. Предположим, что пусть $f'(1) = 1$ и выполняется условие **(A),** в этом случае для произвольного $k \in \mathbb{N}$ и $0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_k \le 1,\ \lambda_i \ge 0\, , i = 1,2,...,k$ преобразование Лапласа вектора

$$\left(1 - f_n(0)\right)\left(Z_{[nt_1]}, Z_{[nt_2]}, ..., Z_{[nt_k]}\right)$$

при $n \to \infty$ сходится к преобразованию Лапласа

$$f_k\left(x, t_1, ..., t_k, \lambda_1, ..., \lambda_k\right),\ k = 2,...$$

Функции $f_k\left(x, t_1, ..., t_k, \lambda_1, ..., \lambda_k\right)$, $k = 2,...$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$f_k\left(x, t_1, ..., t_k, \lambda_1, ..., \lambda_k\right) = f_{k-1}\left(x, t_1, ..., t_{k-1}, \lambda_1, ..., \lambda_{k-1} + \lambda_k\left(1 + \lambda_k^{\alpha}\left(t_k - t_{k-1}\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right),$$
$$k = 2,3,...$$

где $f_1\left(x, t, \lambda\right) = e^{-\frac{x\lambda}{\left(1+t\lambda^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}} - e^{\frac{x}{t^{1/\alpha}}}$.

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие. Предположим, что условия теоремы 6 выполнены. В этом случае для любых $k = 2,3,...$ и $t_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,k}$, $0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_k \le 1$ преобразование Лапласа распределения вектора $\left(1 - f_n(0)\right)\left(Z_{[nt_1]}, ..., Z_{[nt_k]}\right)$ при $n \to \infty$ слабо сходится векторному распределению, соответствующий функции

$f_k\left(x,t_1,...,t_k,\lambda_1,...,\lambda_k\right)$ преобразования Лапласа, определенной в теореме 7.

В третьем параграфе второй главы изучены асимптотика условного распределения (при наложенной условии на момент вырождения процесса) критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона $Z_k,\ k\geq 0$ в случае, когда число непосредственных потомков одной частицы имеет конечную дисперсию, при различных условиях на параметры m и k и доказаны предельные теоремы.

Вводим случайную величину $T=\min\left(k:\ Z_k=0\right)$, представляющую собой момент завершения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона. Очевидно, в критическим случае

$$\lim_{n\to\infty}P\left(T>n\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n>0\right)=0 \text{ и, следовательно, } P\left(T<\infty\right)=1.$$

Теорема 7. Пусть $f'(1)=1,\ \sigma^2=f''(1)<\infty$. Тогда для любого фиксированного $m\in\mathbb{N}$ и для всех $j\in\mathbb{N}$

$$u_j\left(k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n=j\Big/T=n+k\right)=\mu\left(j\right)\left[f_k^j\left(0\right)-f_{k-1}^j\left(0\right)\right], \qquad (4)$$

где

$$\mu\left(j\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2n^2}{2}P_n\left(1,j\right),\ \ j\in\mathbb{N},$$

$$P_n\left(i,j\right)=P\left(Z_n=j\Big/Z_0=i\right),$$

$$U_k\left(s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}s^jP\left(Z_n=j\Big/T=n+k\right)=G\left(sf_k(0)\right)-G\left(sf_{k-1}(0)\right), \qquad (5)$$

где $G\left(s\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu\left(j\right)s^j$.

Теорема 8. Пусть $f'(1)=1,\ \sigma^2=f''(1)<\infty$. Тогда для любого фиксированного $m\in\mathbb{N}$ и для всех $j\in\mathbb{N}$

$$u_j=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n=j\Big/n<T\leq n+m\right)=\frac{1}{m}\mu\left(j\right)f_m^j\left(0\right), \qquad (6)$$

$$U\left(s\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}s^jP\left(Z_n=j\Big/n<T\leq n+m\right)=\frac{1}{m}G\left(sf_m(0)\right).$$

Теорема 9. Пусть $f'(1)=1,\ \ \sigma^2=f''(1)<\infty$. Тогда для любого $\lambda\geq 0$

$$\lim_{n\to\infty}E\left(e^{-\lambda\left(1-f_n(0)\right)Z_{[nt]}}\Big/Z_{[nt]}>0,Z_n=0\right)=\frac{1}{1+\lambda t\left(1-t\right)}.$$

В третьей главе диссертации **«Предельные теоремы для критических**

ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона» доказаны предельные теоремы для распределений критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона $Z_k,\ k \ge 0$ при отсутствии конечной дисперсии числа неосредственных потомков одной частицы при различных условиях на момент вырождения процесса.

В первом параграфе третьей главы приведена аналог теорем 7,8 и теоремы 12 из третьего параграфа второй главы, когда производящая функция числа непосредственных потомков одной частицы, удовлетворяет условию А.

Теорема 10. Предположим, что справедливо условие **(А)** и пусть $f'(1)=1$. Тогда для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ и для всех $j \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ будет справедливо соотношение

$$P\left(Z_n = j \middle/ T = n+k \right) \to \mu(j)\left[f_k^j(0) - f_{k-1}^j(0) \right],$$

где величины $\mu(j),\ j \ge 1$ определяются из соотношения

$$\lim_{n\to\infty} L^{\frac{1}{\alpha}}\left(1 - f_n(0)\right)(\alpha n)^{1+\frac{1}{\alpha}} P_n(i,j) = i\mu(j),$$

здесь $P_n(i,j) = P\left(Z_n = j \middle/ Z_0 = i \right)$.

Следствие. Предположим, что справедливо условие **(А)** и пусть $f'(1)=1$. Тогда для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ будет справедливо соотношение

$$\Phi_{k,n}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} s^j P\left(Z_n = j \middle/ T = n+k \right) \to U\left(sf_k(0)\right) - U\left(sf_{k-1}(0)\right),\ 0 \le s \le 1,$$

где функция $U(s)$ является производящей функцией меры $\mu(j),\ j \ge 1$ из теоремы 10:

$$U(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(j) s^j .$$

Теорема 11. Предположим, что справедливо условие **(А)** и пусть $f'(1)=1$. Тогда для всех $j \in \mathbb{N}$ и любого фиксированного числа $m \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ будет справедливо соотношение

$$P\left(Z_n = j \middle/ n < T \le n+m \right) \to \frac{1}{m} \mu(j) f_m^j(0),$$

где величины $\mu(j),\ j \ge 1$ определены в теореме 10.

Следствие. Предположим, что справедливо условие **(А)** и пусть $f'(1)=1$. Тогда для любого фиксированного числа $m \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$ будет справедливо соотношение

$$\sum_{j=1}^{\infty} s^j P\left(Z_n = j \Big/ n < T \le n+m \right) \to \frac{1}{m} U\left(s f_m(0) \right),\ 0 \le s < 1,$$

где функция $U(s)$ является производящей функцией меры $\mu(j),\ j \ge 1$ из теоремы 10 .

Теорема 12. Предположим, что справедливо условие **(A)** и пусть $f'(1) = 1$. В этом случае для любого $\lambda \ge 0$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{-\lambda(1-f_n(0))Z_{[nt]}} \Big/ Z_{[nt]} > 0, Z_n = 0 \right) = \psi_t(\lambda) = \frac{1}{1-t^{\frac{1}{\alpha}}} \left\{ 1 - \lambda t^{\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1}{\lambda (1-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 + t\lambda^{\alpha} \left(1 + \frac{1}{\lambda (1-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\alpha} \right]^{-\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

Второй параграф третьей главы содержит вспомогательную информацию, необходимую для доказательства теорем 10-12, а третий параграф посвящен доказательству основных результатов третьей главы.

В четвертом параграфе третьей главы доказывается теорема о сходимости почти критического ветвящегося процесса с иммиграцией к детерминированному процессу.

Пусть при любом $n \in \mathbb{N}$, $\left\{ \xi_{i,j}^{(n)},\ i, j \in \mathbb{N} \right\}$ и $\left\{ \xi_i^{(n)},\ i \in \mathbb{N} \right\}$-две независимые семейства независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения. Последовательность ветвящихся процессов $\left\{ X_k^{(n)},\ k \ge 0 \right\}$, $n \in \mathbb{N}$ с иммиграцией определяем следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0^{(n)} = 0,\ X_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{X_{k-1}^{(n)}} \xi_{k,j}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Пусть $T > 0$- некоторое фиксированное число. Через $D_{[0,T]}$ обозначим пространство действительнозначных функций непрерывных справа без разрывов второго типа, определенных в интервале $[0,T]$ и с J_1- топологией Скорохода.

Случайный процесс $X_n(t),\ t \ge 0$ определяем следующим образом

$$X_n(t) = X_{[nt]}^{(n)}, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

где [a] обозначает целую часть числа a. Очевидно, что траектории процессов $\left\{ X_n(t), t \in [0,T] \right\}$, $n \in \mathbb{N}$ принадлежат пространству $D_{[0,T]}$. Предположим, пусть $m_n = E\xi_{1,1}^{(n)} < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Если $m_n \to 1$ при $n \to 1$, то то последовательность процессов $\{X_n(t), t \in [0,T]\}$, $n \in \mathbb{N}$ называется почти критическим ветвящимся процессом с иммиграцией. В данном параграфе найдены достаточные условия сходимости соответствующим образом нормированных последовательности процессов $\{X_n(t),\ t \in [0,T]\}$, $n \in \mathbb{N}$ к детерминированному (не случайному) процессу.

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотического поведения условных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с конечной дисперсией и без конечной дисперсией числа непосредственных потомков одной частицы и доказательству предельных теорем для этих процессов.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Определена асимптотика распределения критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона при условии не вырождения в моменте $n+m$ при отсутствии конечной дисперсии числа непосредственных потомков одной частицы при наложении различных условий на параметры n и m .

2. Доказаны предельные теоремы для распределений критических ветвящихся процессов с конечной дисперсией числа непосредственных потомков одной частицы при определенных условиях на ее траекторий ;

3. Доказана теорема об асимптотике конечномерных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона, начинающихся с большого числа частиц в случае, когда число непосредственных потомков одной частицы имеет бесконечную дисперсию.

4. Доказаны предельные теоремы для распределении критического ветвящегося процесса с бесконечной дисперсией числа непосредственных потомков одной частицы при различных условиях к моменту вырождения.

5. Доказана теорема, содержащая достаточные условия, при которых почти критический ветвящийся процесс с иммиграциоей теряет случайную особенность и стабилизируется.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TOSHKULOV KHAMZA ABDUJABBOROVICH

ASYMPTOTICS OF CONDITIONAL DISTRIBUTIONS OF CRITICAL GALTON-WATSON BRANCHING PROCESSES

01.01.05 – “Probability theory and mathematical statistics”

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.1.PhD/FM841.

The dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics and National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of “ZiyoNet” information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Xusanbayev Yakubdjan Muhammadjanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Official opponents:	**Mirakhmedov Sherzod Adilovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Azimov Jahongir Bahromovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**Namangan engineering-construction institute**

Defense will take place « 25 » July 2024 at 17:30 p.m. at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail:uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky (is registered № 187). Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40.

Abstract of dissertation sent out on « 11 » July 2024 year.
(Mailing report № 2 on « 11 » July 2024 year).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

J.K. Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., senior researcher

Sh.K.Formanov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is to prove the limit theorems about convergence in distribution of conditional distributions of critical branching processes.

The objects of the research work are Critical Galton-Watson branching processes, immigration branching processes.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the asymptotic behavior of the critical Galton-Watson branching process in which there is no finite dispersion of the number of generations of particles and the generating function is required to have a special form, under the condition of non-extinction at the $n+m$ moment, when different conditions are imposed on the parameters n and m is found;

the asymptotic behavior of finite-dimensional distributions for critical Galton-Watson branching processes starting from a large number of particles with infinite dispersion of the number of generations of one particle are determined is found;

limit theorems for the conditional distributions of critical Galton-Watson branching processes with the extinction time occurring in a certain time interval without finite dispersion of the number of generations of one particle have been proved;

the limit theorem on the approximation of the almost critical branching process with immigration to the deterministic process is proved.

Implementation of the research results. The results obtained for critical branching random processes:

the limit theorems obtained for conditional distributions of branching processes with infinite dispersion were used to check the asymptotic character of integrals obtained from rapidly oscillating functions in the fundamental scientific project “Harmonic analysis, graded geometry and its applications to mathematical physics problems” numbered OT-F4-69 (Samarkand State University Reference No. 10-2896 of June 3, 2023). The application of the scientific result made it possible to estimate the singular integrals smoothly;

the asymptotic relations obtained when additional conditions were imposed on the distributions of critical Galton-Watson branching processes were used in the fundamental project No. OT-F4-40 entitled “Investigation of asymptotic properties of indexed integral empirical processes in the class of dimensional functions” (National University of Uzbekistan dated July 27, No. 04/11-4514 reference number). The application of scientific results in the process of researching the asymptotic properties of indexed integral empirical processes in the class of dimensional functions used the asymptotics of branching processes.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were discussed at 5 international and 5 republican scientific and practical conferences.

Publications of the research results. Publication of research results. 16 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, of which 5 are included in the list of scientific publications recommended by the Higher

Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for defending dissertations for the degree of Doctor of Philosophy, including 1 of them published in foreign journals and 5 in republican scientific publications.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 99 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I, Part I)

1. Хусанбаев Я.М., Тошкулов Х.А. ОБ асимптотике критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона на невырождающихся траекториях. Доклади Академии наук Республики Узбекистан. 2021, № 5. ст. 7-11. (01.00.00;№ 7).
2. Khusanbaev Ya.M., Toshkulov H.A. On asymptotics of nearly critical branching processes with immigration. Uzbek Mathematical Journal, 2021, № 4, pp. 89-95. (01.00.00;№ 6).
3. Khusanbaev Ya.M. Toshkulov Kh.A. Limit theorems for a critical Galton - Watson branching processes starting with a large number of particles. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2022, Vol. 5, № 5, pp. 166-174. (01.00.00;№ 17).
4. Khusanbaev Ya.M., Toshkulov Kh.A. Limit theorems for conditional distributions of critical Galton-Watson branching processes. Uzbek Mathematical Journal, 2022, № 3, pp. 85-95. (01.00.00;№ 6)
5. Khusanbaev Ya.M., Toshkulov Kh.A. Limit theorems for conditional distributions of critical Galton-Watson branching processes without finite variance. Theory of Stochastic Processes. v.26. 2022, № 1, pp. 13-20. (Scopus, IF=0.269)
6. Khusanbaev Ya. M., Toshkulov Kh.A. On the rate of convergence in limit theorems for fluctuation critical branching processes with immigration // Uzbek Mathematical Journal, №4, 2023, pp. 59-67. (01.00.00;№ 6).

II bo‘lim (Часть II, Part II)

7. Khusanbaev Ya.M., Sharipov S.O., Toshkulov Kh.A. Deterministic approximation for nearly critical branching processes with dependent immigration // Akademik S.X.Sirojiddinov tavalludining 100 yilligiga bag‘ishlangan “Matematika va amaliy matematikaning zamonaviy muammolari” mavzusida Respublika miqyosida yosh olimlar ilmiy onlayn konferensiyasi. Toshkent. 2020 yil 21 may. 250-251.
8. Шарипов С.О., Тошқулов Ҳ.А. Центральная предельная теорема для почти критических ветвящихся процессов со слабо зависимой иммиграцией // Материалы научной конференции «Современные проблемы стохастического анализа». Ташкент, 21-22 сентября 2020 г., С. 252-254.
9. Ҳусанбаев Я.М., Тошқулов Ҳ.А. Принцип усреднения для почти критических ветвящихся процессов с иммиграцией // Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа», Ташкент, 20-21 февраля 2021 г., с. 763-764.

10. Toshkulov Kh.A., Khusanbaev Ya.M. On asymptotics of total namber ofsprings in nearly critical branching processes with immigration // Международная научная конференция «XIII Беларусская математическая конференция». Минск. 22-25 ноября 2021г., с. 32-33.
11. Ҳусанбаев Я.М., Тошқулов Ҳ.А. Об асимптотике критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в котором числа непосредственных потомков одной частицы имеет бесконечную дисперсию // Вестник молодых ученых. Ташкент. №2. 2022. с. 53-55.
12. Khusanbaev Ya.M., Toshkulov Kh.A. The limit theorems for the conditional distributions of the Galton-Watson branching process // Proceding of conference “Computer data analysis and modeling: stochastics and data science”. Belarus. September 6-10. 2022.
13. Toshkulov Kh.A., Khusanbaev Ya.M. Limit theorems for conditional distributions of critical Galton-Watson branching processes without finite variance // “Limit theorems. Probability theory and mathematical statistics” International conference. Tashkent. September 26-28, 2022. 112-114.
14. Хусанбаев Я.М., Тошкулов Х.А. Об асимптотическом поведений условных распределений критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона // VI Международная конференция «Статистика и ее применения», Наманган. 19-20 октября 2022г. с. 131-135.
15. Toshkulov Kh., Khusanbaev Ya. On the rate of convergence in limit theorems for fluctuation critical branching processes with immigration. // "Branching processes and their applications" International conference. Tashkent and Samarkand. September 18-22, 2023. 50-51.
16. Khusanbaev Ya.M., Toshkulov Kh.A. About the fluctuation critical branching processes with immigration. // Actual problems of applied mathematics and information technologies - Al - Khwarizmi. Samarkand. 2023. 25-26 september. 234.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi nusxalari 2024-yil 24-iyunda tahrirdan o‘tkazilib,
o‘zbek, rus va ingliz tillardagi matnlari o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 32/24.

Guvohnoma № 851684.
“Tipograff” MChJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.