П. Е. ДАНКО, А. Г ПОПОВ,
Т. Я. КОЖЕВНИКОВА, С. П. ДАНКО

Высшая математика
в упражнениях и задачах

В двух частях

Часть
1

7-е издание, исправленное

Москва
ОНИКС
Мир и Образование

УДК 516+517
ББК 22.1я73
Д17

Данко П. Е.

Д17 Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. — 7-е изд., испр. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009. — 368 с.: ил.

ISBN 978-5-488-02199-0 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-488-02200-3 (Часть 1)
ISBN 978-5-94666-532-2 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 978-5-94666-533-9 (Часть 1)

Содержание первой части охватывает следующие разделы программы: аналитическую геометрию, основы линейной алгебры, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функций одной переменной, элементы линейного программирования.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество задач для самостоятельной работы.

УДК 516+517
ББК 22.1я73

Учебное издание

Данко Павел Ефимович, Попов Александр Георгиевич,
Кожевникова Татьяна Яковлевна, Данко Сергей Павлович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

В двух частях. Часть 1

Ответственный редактор *О. А. Фёдорова*. Редактор *А. М. Суходский*.
Технический редактор *Е. А. Вишнякова*. Компьютерная верстка *К. Е. Панкратьева*.

Подписано в печать 09.04.2009. Формат 60х90 1/16. Гарнитура «Литературная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,00. Тираж 10 000 экз. Заказ № 9873.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 литература учебна

ООО «Издательство Оникс».
105082, Москва, ул. Б. Почтовая, д. 7, стр. 1. Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (499) 619-02-20, 619-31-88. Интернет-магазин: www.onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001. 109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (495) 120-51-47, 128-11-60. E-mail: mir-obrazovanie@ onyx.ru

Издание осуществлено при техническом содействии ООО «Издательство АСТ»

ОАО «Владимирская книжная типография». 600000, г. Владимир, Октябрьский пр-т, д. 7.
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

ISBN 978-5-488-02199-0 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-488-02200-3 (Часть 1)
ISBN 978-5-94666-532-2 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 978-5-94666-533-9 (Часть 1)

Оглавление

Предисловие

При написании данной книги авторы стремились раскрыть содержание основных понятий и теорем курса высшей математики для студентов вузов на специально подобранных упражнениях и задачах.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения, состоящие из определений и основных математических понятий данного раздела. При этом наиболее трудные вопросы теории для лучшего усвоения сопровождаются раскрытием этих понятий (без доказательств).

В пособие включены типовые задачи, для наглядности сопровождаемые иллюстрациями, и подробно рассматриваются методы их решения. Ко всем задачам для самостоятельной работы даны ответы. В Приложении приводятся таблицы, необходимые при решении некоторых задач.

Пособие состоит из двух книг и охватывает весь курс высшей математики для студентов высших профессиональных учебных заведений.

Книга 1 содержит следующие главы: аналитическая геометрия на плоскости; элементы векторной алгебры; аналитическая геометрия в пространстве; определители и матрицы; основы линейной алгебры; введение в анализ; дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной; дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных; неопределенный интеграл; определенный интеграл; элементы линейного программирования.

Книга 2 содержит следующие главы: двойные и тройные интегралы; криволинейные интегралы и интегралы по поверхности; ряды; обыкновенные дифференциальные уравнения; элементы теории вероятностей; понятие об уравнениях в частных производных; элементы теории функций комплексной переменной; элементы операционного исчисления; методы вычислений; основы вариационного исчисления.

В пособии приняты следующие обозначения: начало и конец решения задачи отмечаются соответственно знаками ❑ и ■, а вместо слова «Указание» используется знак У.

В настоящем, 7-м издании произведены некоторые поправки редакционного характера, а также устранены замеченные неточности и опечатки.

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность студентам и преподавателям высших учебных заведений, рецензентам всех изданий книги, чьи поправки, критические замечания и предложения способствовали улучшению данного пособия.

Глава I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1

Прямоугольные и полярные координаты

1. Координаты на прямой. Деление отрезка в данном отношении. Точку M координатной оси Ox, имеющую абсциссу x, обозначают через $M(x)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ оси при любом расположении точек на оси находится по формуле

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{1}$$

Пусть на произвольной прямой задан отрезок AB (A — начало отрезка, B — его конец); тогда всякая третья точка C этой прямой делит отрезок AB в некотором отношении λ, где $\lambda = \pm AC : CB$. Если отрезки AC и CB направлены в одну сторону, то λ приписывают знак «плюс»; если же отрезки AC и CB направлены в противоположные стороны, то λ приписывают знак «минус». Иными словами, $\lambda > 0$, если точка C лежит между точками A и B; $\lambda < 0$, если точка C лежит на прямой вне отрезка AB.

Пусть точки A и B лежат на оси Ox, тогда координата точки $C(\bar{x})$, делящей отрезок между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ в отношении λ, находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получается формула для координаты середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3}$$

1. Построить на прямой точки $A(3)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(\sqrt{2})$, $E(-3{,}5)$.

2. Отрезок AB четырьмя точками разделен на пять равных частей. Найти координату ближайшей к A точки деления, если $A(-3)$, $B(7)$.

❑ Пусть $C(\bar{x})$ — искомая точка; тогда $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{4}$. Следовательно, по формуле (2) находим

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + \frac{1}{4} \cdot 7}{1 + \frac{1}{4}} = -1, \text{ т.е. } C(-1). \quad \blacksquare$$

3. Известны точки $A(1)$, $B(5)$ — концы отрезка AB; вне этого отрезка расположена точка C, причем ее расстояние от точки A в 3 раза больше расстояния от точки B. Найти координату точки C.

❑ Нетрудно установить, что $\lambda = -\frac{AC}{BC} = -3$ (рекомендуем сделать чертеж). Таким образом,

$$\bar{x} = \frac{1 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = 7, \text{ т.е. } C(7). \quad \blacksquare$$

4. Найти расстояние между точками:
1) $M(3)$ и $N(-5)$; 2) $P(-5{,}5)$ и $Q(-2{,}5)$.

5. Найти координаты середины отрезка, если известны его концы:
1) $A(-6)$ и $B(7)$; 2) $C(-5)$ и $D(0{,}5)$.

6. Найти точку M, симметричную точке $N(-3)$ относительно точки $P(2)$.

7. Отрезок AB двумя точками разделен на три равные части. Найти координаты точек деления, если $A(-1)$, $B(5)$.

8. Даны точки $A(-7)$, $B(-3)$. Вне отрезка AB расположены точки C и D, причем $CA = BD = 0{,}5AB$. Определить координаты точек C и D.

2. Прямоугольные координаты на плоскости. Простейшие задачи. Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x; y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

В частности, расстояние d от начала координат до точки $M(x; y)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Координаты точки $C(\bar{x}; \bar{y})$, делящей отрезок между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении λ (см. п. 1), находятся по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{4}$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| =$$
$$= \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|. \qquad (5)$$

Формулу для площади треугольника можно записать в виде

$$S = \frac{1}{2}|\Delta|, \qquad (6)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

(понятие определителя третьего порядка дано в § 5).

9. Построить на координатной плоскости точки $A(4; 3)$, $B(-2; 5)$, $C(5; -2)$, $D(-4; -3)$, $E(-6; 0)$, $F(0; 4)$.

10. Найти расстояние между точками $A(3; 8)$ и $B(-5; 14)$.

❑ Используя формулу (1), получим

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10. \quad ■$$

11. Показать, что треугольник с вершинами $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ — прямоугольный.

❑ Найдем длины сторон треугольника:

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$
$$BC = \sqrt{(11+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$
$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Так как $AB^2 = 40$, $BC^2 = 160$, $AC^2 = 200$, то $AB^2 + BC^2 = AC^2$ Следовательно, сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Отсюда заключаем, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой. ■

12. Известны точки $A(-2; 5)$, $B(4; 17)$ — концы отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние до которой от A вдвое больше расстояния от B. Найти координаты точки C.

❑ Так как $AC = 2CB$, то $\lambda = \frac{AC}{CB} = 2$. Здесь $x_1 = -2$, $y_1 = 5$, $x_2 = 4$, $y_2 = 17$; поэтому

$$\bar{x} = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1+2} = 2, \quad \bar{y} = \frac{5 + 2 \cdot 17}{1+2} = 13, \quad \text{т. е. } C(2; 13). \quad ■$$

13. Точка $C(2;3)$ служит серединой отрезка AB. Найти координаты точки A, если $B(7;5)$.

❑ Здесь $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 3$, $x_2 = 7$, $y_2 = 5$, откуда $2 = \frac{x_1 + 7}{2}$, $3 = \frac{y_1 + 5}{2}$. Таким образом, $x_1 = -3$, $y_1 = 1$, т. е. $A(-3;1)$. ■

14. Даны вершины треугольника: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$. Найти координаты точки пересечения его медиан.

❑ Находим координаты точки D — середины отрезка AB; имеем $x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Точка M, в которой пересекаются медианы, делит отрезок CD в отношении $2:1$, считая от точки C. Поэтому координаты точки M выражаются следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}, \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2},$$

т. е.

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}}{3}.$$

Окончательно получаем

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \quad ■$$

15. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-2;-4)$, $B(2;8)$ и $C(10;2)$.

❑ Согласно формуле (5), получим

$$S = \frac{1}{2}|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)| = \frac{1}{2}|24 - 144| = 60 \text{ (кв. ед.)}. \quad ■$$

16. Найти расстояние между точками:

1) $A(2;3)$ и $B(-10;-2)$; 2) $C(\sqrt{2};-\sqrt{7})$ и $D(2\sqrt{2};0)$.

17. Показать, что треугольник с вершинами $A(4;3)$, $B(7;6)$ и $C(2;11)$ — прямоугольный.

18. Показать, что треугольник с вершинами $A(2;-1)$, $B(4;2)$ и $C(5;1)$ — равнобедренный.

19. Даны вершины треугольника: $A(-1;-1)$, $B(0;-6)$ и $C(-10;-2)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

20. Точки $A(-3;7)$ и $B(5;11)$ являются концами отрезка AB. Этот отрезок тремя точками разделен на 4 равные части. Найти координаты точек деления.

21. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;5)$, $B(2;7)$, $C(4;11)$.

22. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$. Найти координаты четвертой вершины.

23. Даны две вершины треугольника $A(3;8)$ и $B(10;2)$ и точка пересечения медиан $M(1;1)$. Найти координаты третьей вершины треугольника.

24. Даны вершины треугольника: $A(7;2)$, $B(1;9)$ и $C(-8;-11)$. Найти расстояния точки пересечения медиан от вершин треугольника.

25. Точки $L(0;0)$, $M(3;0)$ и $N(0;4)$ являются серединами сторон треугольника. Вычислить площадь треугольника.

3. Полярные координаты. В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $OM = \rho$ от полюса O (ρ — *полярный радиус-вектор* точки) и углом θ, образуемым отрезком OM с полярной осью Ox (θ — *полярный угол* точки). Угол θ считают положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если точка M имеет полярные координаты $\rho > 0$ и $0 \leqslant \theta < 2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho; \theta + 2k\pi)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Пусть начало декартовой прямоугольной системы координат совмещено с полюсом, а ось Ox направлена по полярной оси; тогда прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и θ связаны следующими формулами:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta; \tag{1}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

26. Построить точки, заданные полярными координатами: $A\left(4; \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(2; \frac{4\pi}{3}\right)$, $C\left(3; -\frac{\pi}{6}\right)$, $D\left(-3; \frac{\pi}{3}\right)$, $E(0; \alpha)$, $F\left(-1; -\frac{3\pi}{4}\right)$.

27. Найти полярные координаты точки $M(1; -\sqrt{3})$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось — с положительным направлением оси абсцисс.

❑ Используя равенства (2), находим $\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{3}$. Очевидно, что точка M лежит в IV четверти и, следовательно, $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Итак, $M\left(2; \frac{5\pi}{3}\right)$. ■

28. Найти прямоугольные координаты точки $A\left(2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось направлена по оси абсцисс.

❑ Согласно формулам (1), имеем

$$x = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4} = -2, \quad y = 2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = 2.$$

Итак, $A(-2;2)$. ■

29. Найти полярные координаты точек: $A(2\sqrt{3};2)$, $B(0;-3)$, $C(-4;4)$, $D(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $E(-\sqrt{2};-\sqrt{6})$, $F(-7;0)$.

30. Найти прямоугольные координаты точек: $A\left(10; \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2; \frac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(0; \frac{\pi}{10}\right)$, $D\left(1; -\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(-1; \frac{\pi}{4}\right)$, $F\left(-1; -\frac{\pi}{4}\right)$.

31. Найти расстояние между точками $M_1(\rho_1; \theta_1)$ и $M_2(\rho_2; \theta_2)$.

О Применить к треугольнику OM_1M_2 теорему косинусов.

32. Найти расстояние между точками $M\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ и $N\left(4; \frac{3\pi}{4}\right)$.

33. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho; \theta)$ относительно полярной оси.

34. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho; \theta)$ относительно полюса.

35. Найти полярные координаты точек, симметричных точкам $\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(5; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(2; -\frac{\pi}{6}\right)$: 1) относительно полюса; 2) относительно полярной оси.

36. Найти полярные координаты точки, симметричной точке $M(\rho; \theta)$ относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно полярной оси.

4. Уравнение линии. Пусть некоторой линии на плоскости xOy, рассматриваемой как множество точек, соответствует уравнение, связывающее координаты любой точки $M(x; y)$ («текущей точки»), лежащей на этой линии. Такое уравнение называют *уравнением* данной *линии*.

Если в уравнение данной линии подставить координаты любой точки, лежащей на этой линии, то уравнение обращается в тождество. Если же в уравнение линии подставить координаты любой точки, не принадлежащей этой линии, то уравнение не удовлетворяется.

37. Один конец отрезка перемещается по оси абсцисс, а другой — по оси ординат. Составить уравнение линии, описываемой серединой этого отрезка, если длина отрезка равна c.

❑ Пусть $M(x; y)$ — середина отрезка. Длина отрезка OM, т. е. длина медианы, опущенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы этого треугольника: $OM = \frac{c}{2}$. С другой стороны, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ (расстояние до точки M от начала координат).

Таким образом, приходим к уравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{2}, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Это и есть уравнение искомой линии. Очевидно, что этой линией является окружность радиуса $\frac{c}{2}$ с центром в начале координат. ■

38. Составить уравнение линии, расстояние до каждой точки которой от точки $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$ равно расстоянию до этой же точки от прямой $y = -\frac{1}{4}$.

❑ Возьмем на искомой линии произвольную точку $M(x; y)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, найдем расстояние до точки M от точки F:

$$MF = \sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$$

Расстояние до точки M от прямой $y = -\frac{1}{4}$ найдем из простых геометрических соображений (рис. 1):

$$MN = MK + KN = y + \frac{1}{4}.$$

Так как по условию равенство $MF = MN$ выполняется для любой точки M, лежащей на искомой линии, то уравнение этой линии можно записать в виде

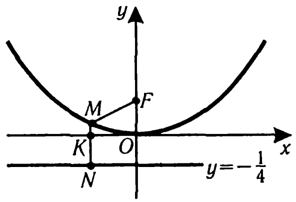

Рис. 1

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2} = y + \frac{1}{4},$$

или

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16},$$

т.е. $y = x^2$ Линию, определяемую уравнением $y = x^2$, называют *параболой*. ■

39. Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых от точек $F_1(a;0)$ и $F_2(-a;0)$ есть постоянная величина, равная a^2

❑ Возьмем на искомой кривой произвольную точку $M(x;y)$. Ее расстояния от точек: $F_1(a;0)$ и $F_2(-a;0)$ составляют $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$. Из условия следует, что $r_1 r_2 = a^2$ Поэтому уравнение искомой кривой запишется так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\ \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2$$

Приведем это уравнение к рациональному виду:

$$(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 + 2ax) = a^4,$$

т. е.

$$(x^2 + a^2 + y^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4,$$

или, наконец,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Найденную кривую называют *лемнискатой*. ■

40. Составить уравнение лемнискаты в полярных координатах и построить кривую.

❑ В уравнении $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (см. предыдущую задачу) перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Тогда получим

$$(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)^2 = 2a^2(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta), \quad \text{или } \rho^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Это уравнение лемнискаты в полярных координатах.

Построим кривую. Разрешив уравнение относительно ρ, находим $\rho = \pm a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Из того, что в правой части равенства стоит двойной знак « $\pm$ », а также из того, что уравнение не меняется при замене θ на $-\theta$, заключаем, что лемниската симметрична относительно осей Ox и Oy. Исследуем форму лемнискаты в I четверти, т.е. при $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. При этих значениях ρ и θ имеем $\rho = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cos 2\theta}$. Нетрудно установить, что θ может изменяться только в промежутке от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Таким образом, соответствующая часть кривой заключена между полярной осью и лучом $\theta = \frac{\pi}{4}$. Если $\theta = 0$, то $\rho = a\sqrt{2}$. С возрастанием θ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ величина ρ убывает до значения $\rho = 0$.

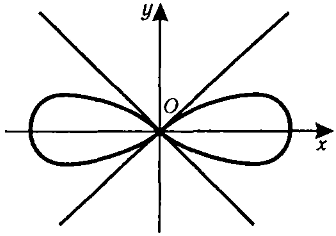

Рис. 2

Учитывая соображения симметрии, построим лемнискату (рис. 2). ■

41. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(1; 1)$ и $B(3; 3)$.

❑ Пусть точка M принадлежит искомому множеству; тогда $MA = MB$. Согласно формуле расстояния между двумя точками, находим

$$MA = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}, \quad MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}$$

и уравнение линии примет вид

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9,$$

откуда после приведения подобных членов приходим к уравнению $x + y - 4 = 0$. Итак, искомым множеством является прямая, которая, как известно, служит серединным перпендикуляром к отрезку AB. ■

42. Точка M равномерно перемещается по лучу, вращающемуся равномерно около полюса. Составить уравнение линии, описанной точкой M, если в начальный момент вращающийся луч совпадает с полярной осью, а точка M — с полюсом; при повороте же луча на угол $\theta = 1$ (один радиан) точка M удалилась от полюса на расстояние a.

❑ Поскольку в начальный момент величины ρ и θ равны нулю, а затем обе возрастают пропорционально времени, нетрудно установить, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью: $\frac{\rho}{\theta} = \text{const}$. Но $\rho = a$ при $\theta = 1$; следовательно, $\frac{\rho}{\theta} = \frac{a}{1}$, т.е. $\rho = a\theta$. Кривую $\rho = a\theta$ называют *спиралью Архимеда*. ■

43. Окружность диаметра a катится без скольжения по внешней стороне другой окружности такого же диаметра. Составить в полярных координатах уравнение линии, описанной некоторой фиксированной точкой катящейся окружности.

❑ Пусть (рис. 3): C_1 — первоначальное положение центра катящейся окружности; A — первоначальное положение точки, описывающей искомую линию (точка A диаметрально противоположна точке B, где в начальный момент соприкасаются окружности); C_2 — центр неподвижной окружности; C_3 — центр катящейся окружности в новом положении; M — новое положение точки A, описывающей искомую линию. После перемещения центра C_1 катящейся окружности в положение C_3 точка P займет положение Q, а точка B — положение D, причем $\smile BQ = \smile DQ$, $\angle QC_2B = \angle QC_3D$, так как качение происходит без скольжения.

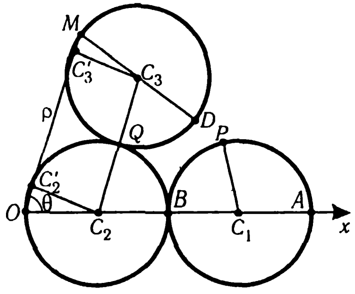

Рис. 3

На рисунке показано положение полюса O и полярной оси Ox. Требуется составить уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки $M(\rho;\theta)$ искомой линии.

Легко установить, что $\angle MC_3Q = \angle OC_2Q$, поэтому четырехугольник OC_2C_3M является равнобедренной трапецией с меньшим основанием $C_2C_3 = a$; C_2C_2' и C_3C_3' — перпендикуляры, опущенные из точек C_2 и C_3 на прямую OM. Значит,

$$\rho = OC_2' + C_2'C_3' + C_3'M = \frac{a}{2}\cos\theta + a + \frac{a}{2}\cos\theta = a(1+\cos\theta).$$

Итак, уравнение искомой линии в полярных координатах записывается в виде $\rho = a(1+\cos\theta)$; эту кривую называют *кардиоидой*.

Поскольку при замене θ на $-\theta$ уравнение кардиоиды не меняется, кривая симметрична относительно полярной оси. Если θ изменяется от 0 до π, то ρ убывает от $2a$ до 0. ■

44. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A(2;0)$ и $B(0;1)$.

45. Какая линия определяется уравнением $x = y$?

46. Какая линия определяется уравнением $x = -y$?

47. Составить уравнение множества точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A(2;0)$ и $B(0;2)$ равна квадрату расстояния между точками A и B.

48. Составить уравнение множества точек, сумма расстояний которых от точек $A(1;0)$ и $B(0;1)$ равна 2.

49. В полярной системе координат составить уравнение окружности, центр которой совпадает с полюсом.

50. В полярной системе координат составить уравнение полупрямой, проходящей через полюс и образующей с полярной осью угол α.

51. В полярной системе координат составить уравнение окружности диаметра a, если полюс лежит на окружности, а полярная ось проходит через центр окружности.

5. Параметрические уравнения линии. При отыскании уравнения множества точек иногда оказывается удобным выразить координаты x и y произвольной точки этого множества через некоторую вспомогательную величину t (ее называют *параметром*), т.е. рассматривать систему уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Такое представление искомой линии называют *параметрическим*, а уравнения системы — *параметрическими уравнениями* данной *линии.*

Исключение параметра t из системы (если оно возможно) приводит к уравнению, связывающему x и y, т.е. к уравнению вида $f(x, y) = 0$.

52. Составить параметрические уравнения окружности.

❑ Рассмотрим окружность радиуса a с центром в начале координат (рис. 4). Возьмем на ней произвольную точку $M(x; y)$. Примем за параметр t угол, образуемый с осью абсцисс радиусом OM. Из треугольника ONM следует, что $x = a\cos t$, $y = a\sin t$. Таким образом, уравнения

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t$$

являются параметрическими уравнениями окружности.

Исключив из этих уравнений параметр t, получим обычное уравнение окружности. В данном случае для исключения параметра достаточно каждое из уравнений возвести в квадрат и полученные уравнения сложить:

$$x^2 + a^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t, \text{ т. е. } x^2 + y^2 + a^2$$

Последнее уравнение является уравнением окружности радиуса a с центром в начале координат. ■

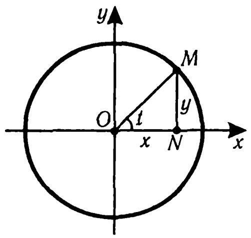

Рис. 4

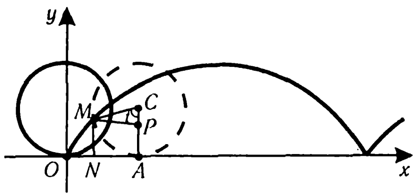

Рис. 5

53. Составить параметрические уравнения кривой, описанной фиксированной точкой окружности, катящейся без скольжения по неподвижной прямой.

❑ Пусть окружность радиуса a катится без скольжения вправо по горизонтальной прямой (рис. 5). Примем эту прямую за ось Ox, поместив начало координат в некоторой точке O оси. За фиксированную точку окружности (перемещение этой точки образует искомую кривую) примем ту ее точку, которая совпадает с O при соответствующем положении окружности. За параметр t примем угол поворота радиуса окружности, проходящего через фиксированную точку.

Пусть в некоторый момент времени окружность касается оси Ox в точке A. Фиксированная точка окружности займет положение $M(x; y)$, соответствующее углу t поворота радиуса CM ($t = \angle ACM$). Так как качение происходит без скольжения, то $OA = \smile MA = at$. Используя это, выразим координаты точки M через t:

$$x = ON = OA - NA = \smile MA - NA = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$y = NM = AP = AC - PC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Таким образом, параметрические уравнения линии имеют вид

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Эту линию называют *циклоидой*; она изображена на рис. 5. ■

54. Какая линия определяется параметрическими уравнениями $x = t^2$, $y = t^2$?

❑ Исключив параметр t, приходим к уравнению $y = x$. В силу параметрических уравнений $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Следовательно, данные параметрические уравнения определяют луч — биссектрису I координатного угла. ■

55. Какая линия определяется параметрическими уравнениями $x = \cos t$, $y = \cos^2 t$?

❑ Подставив x вместо $\cos t$ во второе уравнение, получаем уравнение параболы $y = x^2$ Из параметрических уравнений следует $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Таким образом, параметрические уравнения определяют дугу AOB параболы $y = x^2$, где $A(-1; 1)$; $B(1; 1)$. ■

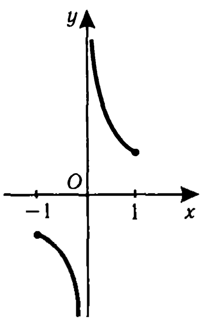

Рис. 6

56. Какая линия определяется уравнениями $x = \sin t$, $y = \operatorname{cosec} t$?

❑ Так как $y = \dfrac{1}{\sin t}$, то, исключив t, получаем уравнение $y = \dfrac{1}{x}$, выражающее обратную пропорциональную зависимость величин x и y. Учитывая, что $|x| \leqslant 1$, $|y| \geqslant 1$, заключаем, что линия, заданная параметрическими уравнениями $x = \sin t$, $y = \operatorname{cosec} t$, имеет вид, изображенный на рис. 6. ■

57. Какая линия определяется уравнениями $x = 2t$, $y = 4t$?

58. Кривая задана параметрическими уравнениями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

❶ Разделить первое уравнение на a, второе — на b, а затем исключить t.

59. Кривая задана параметрическими уравнениями $x = a\sec t$, $y = b\operatorname{tg} t$. Найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

60. Какая линия определяется уравнениями $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$?

61. Кривую, определяемую параметрическими уравнениями $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, называют *астроидой*. Исключив t, найти уравнение астроиды в прямоугольной системе координат.

62. На круг, описанный из центра O радиусом a, навернута по часовой стрелке нить; пусть конец нити находится в точке $A(a; 0)$. Затем нить развертывают (против часовой стрелки), сматывая ее с круга и все время натягивая за конец. Составить параметрические уравнения кривой, описываемой концом нити, если за параметр t взять угол между радиусом OA и радиусом OB, проведенным в точку касания окружности с натянутой нитью в произвольном положении последней.

§ 2

Прямая

1. Общее уравнение прямой. Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

(где A, B и C — постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$), определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называют *общим уравнением прямой*.

Частные случаи. 1. $C = 0$; $A \neq 0$; $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + By = 0$, проходит через начало координат.

2. $A = 0$; $B \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$ (или $y = b$, где $b = -\frac{C}{B}$), параллельна оси Ox.

3. $B = 0$; $A \neq 0$; $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$ (или $x = a$, где $a = -\frac{C}{A}$), параллельна оси Oy.

4. $B = C = 0$; $A \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax = 0$ (или $x = 0$, поскольку $A \neq 0$), совпадает с осью Oy.

5. $A = C = 0$; $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By = 0$ (или $y = 0$, поскольку $B \neq 0$), совпадает с осью Ox.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y = kx + b \qquad (2)$$

(здесь $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$). Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, поскольку $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образуемый прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy.

3. Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

(здесь $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$). Его называют *уравнением прямой в отрезках*; в нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b — ординатой точки пересечения прямой с осью Oy. Поэтому a и b называют отрезками прямой на осях координат.

4. Нормальное уравнение прямой. Если обе части общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ умножить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (которое называют *нормирующим множителем*), причем знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu C < 0$, то получим уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение называют *нормальным уравнением прямой*. Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ — угол, образуемый этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

63. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

❑ Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Воспользовавшись уравнением (2) прямой с угловым коэффициентом, имеем $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$. После элементарных преобразований получаем уравнение

$$x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0. \blacksquare$$

64. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{10}$.

❑ Воспользовавшись уравнением (3) прямой в отрезках, имеем

$$\frac{x}{\frac{2}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{10}} = 1.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{5}{2}x - 10y = 1, \text{ или } 5x - 20y - 2 = 0. \blacksquare$$

65. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Написать: 1) уравнение с угловым коэффициентом; 2) уравнение в отрезках; 3) нормальное уравнение.

☐ 1) Разрешив уравнение относительно y, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{12}{5}x - 13.$$

Здесь $k = \frac{12}{5}$, $b = -13$.

2) Перенесем свободный член общего уравнения в правую часть и разделим обе части на 65; имеем $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$. Переписав последнее уравнение в виде

$$\frac{x}{\frac{65}{12}} + \frac{y}{-\frac{65}{5}} = 1,$$

получим уравнение данной прямой в отрезках. Здесь $a = \frac{65}{12}$, $b = -\frac{65}{5} = -13$.

3) Находим нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$. Умножив обе части общего уравнения на этот множитель, получим нормальное уравнение прямой

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0.$$

Здесь $\cos\varphi = \frac{12}{13}$, $\sin\varphi = -\frac{5}{13}$, $p = 5$. ■

66. Построить прямые: 1) $x - 2y + 5 = 0$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $5x - 2 = 0$; 4) $2y + 7 = 0$.

☐ 1) Полагая в уравнении $x = 0$, получаем $y = 2{,}5$. Следовательно, прямая пересекается с осью ординат в точке $B(0; 2{,}5)$. Полагая $y = 0$, находим $x = -5$, т.е. прямая пересекается с осью абсцисс в точке $A(-5; 0)$. Остается провести прямую через точки A и B (рис. 7).

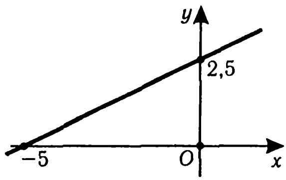

Рис. 7

2) Прямая $2x + 3y = 0$ проходит через начало координат, так как в ее уравнении отсутствует свободный член. Дадим x в уравнении прямой какое-нибудь значение. Пусть, например, $x = 3$, тогда $6 + 3y = 0$, т.е. $y = -2$; получим точку $M(3; -2)$. Остается провести прямую через начало координат и через точку M.

3) Разрешив уравнение прямой относительно x, получим $x = 0{,}4$. Эта прямая параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный $0{,}4$.

4) Аналогично получаем уравнение $y = -3{,}5$; эта прямая параллельна оси абсцисс. ■

67. Уравнение прямой задано в виде $\frac{x + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{y - 2\sqrt{5}}{2} = 0$. Написать: 1) общее уравнение этой прямой; 2) уравнение с угловым коэффициентом; 3) уравнение в отрезках; 4) нормальное уравнение.

68. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $2x + 2y - 5 = 0$?

69. Вычислить площадь треугольника, ограниченного прямой $4x + 3y - 36 = 0$ и отрезками, отсекаемыми ею на осях координат.

70. Можно ли уравнение прямой $20x + 21y = 0$ записать как уравнение в отрезках?

71. Построить прямые: 1) $4x - 5y + 15 = 0$; 2) $2x - y = 0$; 3) $7x - 10 = 0$; 4) $2y + 3 = 0$.

72. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = 1$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

73. Прямая отсекает на осях координат равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, ограниченного этой прямой и указанными отрезками, равна 8 кв. ед.

74. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2; -3)$.

75. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b = 7$

76. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3; -4)$ и параллельных осям координат.

77. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат равные отрезки, если длина отрезка прямой, заключенного между осями координат, равна $5\sqrt{2}$.

5. Угол между прямыми. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Острый угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ находится по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|. \tag{1}$$

Условие параллельности двух прямых имеет вид $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности двух прямых имеет вид $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_1; y_1)$, записывается в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2}$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $M(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, записывается в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{3}$$

а угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $y = y_1$.

6. Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых. Если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то координаты точки пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ находят, решая совместно уравнения этих прямых.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{1}$$

Уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и A_2x+B_2y+ $+C_2=0$ имеют вид

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = 0. \tag{2}$$

Если пересекающиеся прямые заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{3}$$

где λ — числовой множитель, определяет прямую, проходящую через точку пересечения заданных прямых. Придавая в последнем уравнении λ различные значения, будем получать различные прямые, принадлежащие пучку прямых, центр которого есть точка пересечения заданных прямых. Поэтому уравнение (3) часто называют *уравнением пучка прямых*.

78. Найти острый угол между прямыми $y=-3x+7$ и $y=2x+1$.

❑ Полагая $k_1=-3$, $k_2=2$ в формуле (1) п. 5, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)\cdot 2}\right| = 1, \quad \text{т.е.} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

79. Показать, что прямые $4x-6y+7=0$ и $20x-30y-11=0$ параллельны.

❑ Приведя уравнение каждой прямой к виду с угловым коэффициентом, получаем

$$y = \frac{2}{3}x+\frac{7}{6} \quad \text{и} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{30}.$$

Угловые коэффициенты этих прямых равны: $k_1=k_2=\frac{2}{3}$, т.е. прямые параллельны. ■

80. Показать, что прямые $3x-5y+7=0$ и $10x+6y-3=0$ перпендикулярны.

☐ Приведя уравнения к виду с угловым коэффициентом, получаем

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \quad \text{и} \quad y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Здесь $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = -\frac{5}{3}$. Так как $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, то прямые перпендикулярны. ■

81. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1;3)$ и $N(2;5)$.

☐ Полагая $x_1 = -1$, $y_1 = 3$, $x_2 = 2$, $y_2 = 5$ в уравнении (3) п. 5, получаем

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x+1}{2+1}, \quad \text{или} \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x+1}{3}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид $2x - 3y + 11 = 0$.

Полезно проверить, что уравнение составлено верно. Для этого достаточно показать, что координаты точек M и N удовлетворяют уравнению прямой. Действительно, равенства $2(-1) - 3\cdot 3 + 11 = 0$, $2\cdot 2 - 3\cdot 5 + 11 = 0$ выполняются тождественно. ■

82. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;4)$ и $B(-2;-1)$.

☐ Так как $x_1 = x_2 = -2$, то уравнение прямой имеет вид $x = -2$ (прямая параллельна оси ординат). ■

83. Показать, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

☐ Так как $\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{5}$, то прямые пересекаются. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0, \\ 2x + 5y - 12 = 0, \end{cases}$$

находим $x = 1$, $y = 2$, т.е. $(1;2)$ — точка пересечения прямых. ■

84. Не пользуясь нормальным уравнением прямой, доказать, что расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ выражается формулой (1) п. 6.

☐ Задача сводится к определению расстояния между точками $M(x_0;y_0)$ и N, где N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на данную прямую. Составим уравнение прямой MN. Так как угловой коэффициент заданной прямой равен $-\frac{A}{B}$, то угловой коэффициент прямой MN равен $\frac{B}{A}$ (из условия перпендикулярности). Значит, уравнение прямой MN можно записать в виде

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0), \quad \text{т. е.} \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

Для нахождения координат точки N нужно решить систему уравнений

$$Ax + By + C = 0, \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

Введем вспомогательную неизвестную t:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = t.$$

Тогда $x = x_0 + At$, $y = y_0 + Bt$. Подставив эти выражения в уравнение данной прямой, получим $A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0$, откуда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Подставив теперь значение t в уравнения $x = x_0 + At$ и $y = y_0 + Bt$, определим координаты точки N:

$$x = x_0 - A\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \quad y = y_0 - B\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Остается найти расстояние между точками M и N:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(A\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(B\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

что и требовалось установить. ■

85. Найти расстояние от точки $M(1; 2)$ до прямой $20x - 21y - 58 = 0$.

❑ Согласно формуле (1) п. 6, находим

$$d = \frac{|20 \cdot 1 - 21 \cdot 2 - 58|}{\sqrt{400 + 441}} = \frac{|20 - 42 - 58|}{29} = \frac{|-80|}{29} = 2\frac{22}{29}. \quad ■$$

86. Дана прямая l $4x - 3y - 7 = 0$. Какие из точек $A(2{,}5; 1)$, $B(3; 2)$, $C(1; -1)$, $D(0; -2)$, $E(4; 3)$, $F(5; 2)$ лежат на этой прямой?

❑ Если точка лежит на прямой, то ее координаты должны удовлетворять уравнению прямой. Имеем: $A \in l$, так как $4 \cdot 2{,}5 - 3 \cdot 1 - 7 = 0$; $B \notin l$, так как $4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 7 \neq 0$; $C \in l$, так как $4 \cdot 1 - 3(-1) - 7 = 0$; $D \notin l$, так как $4 \cdot 0 - 3(-2) - 7 \neq 0$; $E \in l$, так как $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 - 7 = 0$; $F \notin l$, так как $4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 7 \neq 0$. ■

87. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; -5)$ и параллельной прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

❑ Разрешив уравнение относительно y, имеем $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$. Следовательно, в силу условия параллельности угловой коэффициент искомой прямой равен $-\frac{3}{4}$. Воспользовавшись уравнением (2) п. 5, получаем

$$y - (-5) = -\frac{3}{4}[x - (-2)], \quad \text{т.е. } 3x + 4y + 26 = 0. \quad ■$$

88. Даны вершины треугольника: $A(2;2)$, $B(-2;-8)$ и $C(-6;-2)$. Составить уравнения его медиан.

❑ Находим координаты середин сторон BC, AC и AB:

$$x' = \frac{-2-6}{2} = -4, \quad y' = \frac{-8-2}{2} = -5, \quad A_1(-4;-5);$$
$$x'' = \frac{2-6}{2} = -2, \quad y'' = \frac{2-2}{2} = 0, \quad B_1(-2;0);$$
$$x''' = \frac{2-2}{2} = 0, \quad y''' = \frac{2-8}{2} = -3, \quad C_1(0;-3).$$

Уравнение каждой из медиан находим как уравнение прямой, проходящей через две данные точки, для чего воспользуемся формулой (3) п. 5. Уравнение медианы AA_1:

$$\frac{y-2}{-5-2} = \frac{x-2}{-4-2}, \quad \text{или} \quad \frac{y-2}{7} = \frac{x-2}{6}, \quad \text{т.е. } 7x - 6y - 2 = 0.$$

Находим уравнение медианы BB_1; поскольку точки $B(-2;-8)$ и $B_1(-2;0)$ имеют одинаковые абсциссы, медиана BB_1 параллельна оси ординат. Ее уравнение $x + 2 = 0$.

Уравнение медианы CC_1:

$$\frac{y+2}{-3+2} = \frac{x+6}{0+6}, \quad \text{или } x + 6y + 18 = 0. \quad ■$$

89. Даны вершины треугольника: $A(0;1)$; $B(6;5)$ и $C(12;-1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C.

❑ По формуле (4) п. 5 найдем угловой коэффициент стороны AB; имеем $k = \frac{5-1}{6-0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент высоты, проведенной из вершины C, равен $-\frac{3}{2}$. Уравнение этой высоты имеет вид

$$y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 12), \quad \text{или} \quad 3x + 2y - 34 = 0. \quad ■$$

90. Даны стороны треугольника: $x + 3y - 7 = 0$ (AB), $4x - y - 2 = 0$ (BC), $6x + 8y - 35 = 0$ (AC). Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

❑ Определим координаты точки B. Решив систему уравнений $x + 3y - 7 = 0$ и $4x - y - 2 = 0$, получим $x = 1$, $y = 2$, т.е. $B(1;2)$. Найдем длину высоты BB_1 как расстояние от точки B до прямой AC:

$$BB_1 = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 35|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 1{,}3. \quad ■$$

91. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ и $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$.

❑ Задача сводится к нахождению расстояния от произвольной точки одной прямой до другой прямой. Полагая, например, в уравнении первой прямой $x = 0$, получаем $y = 3\sqrt{10}$. Таким образом, $M(0; 3\sqrt{10})$ — точка, лежащая на первой прямой. Найдем расстояние от точки M до второй прямой:

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 2 \cdot 3\sqrt{10} + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{36+4}} = \frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 5{,}5. \quad \blacksquare$$

92. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $x + y - 5 = 0$ и $7x - y - 19 = 0$ (рис. 8).

❑ Сначала решим задачу в общем виде. Биссектрисы углов, образуемых двумя прямыми, являются, как известно, множеством точек, равноудаленных от этих прямых. Если прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ $\left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\text{, т.е. прямые не параллельны}\right)$, то для всякой точки $M(\bar{x}; \bar{y})$, лежащей на одной из биссектрис, имеем (используя формулу для определения расстояния от точки до прямой):

$$\frac{|A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Поскольку $M(\bar{x}; \bar{y})$ — произвольная точка биссектрисы, ее можно обозначать просто через $M(x; y)$. Учитывая, что выражения, записанные в последнем равенстве под знаком абсолютной величины, могут иметь разные знаки, получаем для одной из биссектрис уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

а для другой — уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

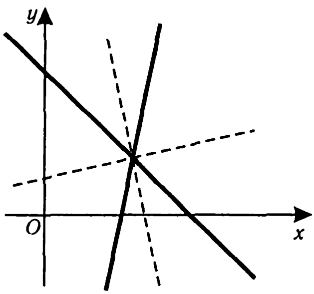

Рис. 8

Таким образом, уравнения обеих биссектрис можно записать в виде

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Теперь решим поставленную конкретную задачу. Заменив A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 их значениями из уравнений заданных прямых, получим

$$\frac{x + y - 5}{\sqrt{1+1}} \pm \frac{7x - y - 19}{\sqrt{49+1}} = 0, \quad \text{т. е. } 5(x + y - 5) \pm (7x - y - 19) = 0.$$

Итак, уравнение одной из биссектрис имеет вид

$$5(x+y-5)+(7x-y-19)=0, \quad \text{т. е. } 3x+y-11=0,$$

а уравнение другой — вид

$$5(x+y-5)-(7x-y-19)=0, \quad \text{т. е. } x-3y+3=0. \quad \blacksquare$$

93. Даны вершины треугольника: $A(1;1)$, $B(10;13)$, $C(13;6)$. Составить уравнение биссектрисы угла A.

❑ Воспользуемся другим (по сравнению с решением предыдущей задачи) способом составления уравнения биссектрисы.

Пусть D — точка пересечения биссектрисы со стороной BC. Из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Но $AB=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15$, $AC=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13$. Следовательно, $\lambda=\frac{BD}{DC}=\frac{15}{13}$. Так как известно отношение, в котором точка D делит отрезок BC, то можно найти координаты точки D:

$$x=\frac{10+\frac{15}{13}\ 13}{1+\frac{15}{13}}, \quad y=\frac{13+\frac{15}{13}\cdot 6}{1+\frac{15}{13}},$$

или $x=\frac{325}{28}$, $y=\frac{259}{28}$, т.е. $D\left(\frac{325}{28};\frac{259}{28}\right)$. Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через точки A и D:

$$\frac{y-1}{\frac{259}{28}-1}=\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1}, \quad \text{т. е. } 7x-9y+2=0. \quad \blacksquare$$

94. Даны уравнения двух высот треугольника ABC: $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ и координаты одной из его вершин: $A(2;2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

❑ Легко убедиться в том, что вершина A не лежит ни на одной из заданных высот: ее координаты не удовлетворяют уравнениям этих высот.

Пусть $9x-3y-4=0$ — уравнение высоты BB_1 и $x+y-2=0$ — уравнение высоты CC_1. Составим уравнение стороны AC, рассматривая ее как прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную высоте BB_1. Так как угловой коэффициент высоты BB_1 равен 3, то угловой коэффициент стороны AC равен $-\frac{1}{3}$, т. е. $k_{AC}=-\frac{1}{3}$. Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через данную точку и имеющей данный угловой коэффициент, получим уравнение стороны AC:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-2), \quad \text{или } x+3y-8=0.$$

Аналогично находим $k_{CC_1} = -1$, $k_{AB} = 1$, и уравнение стороны AB имеет вид

$$y - 2 = x - 2, \quad \text{т.е. } y = x.$$

Решив совместно уравнения прямых AB и BB_1, а также прямых AC и CC_1, найдем координаты вершин B и C треугольника: $B\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ и $C(-1; 3)$. Остается составить уравнение стороны BC:

$$\frac{y - \frac{2}{3}}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{x - \frac{2}{3}}{-1 - \frac{2}{3}}, \quad \text{т.е. } 7x + 5y - 8 = 0. \quad \blacksquare$$

95. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(5; 1)$ и образующих с прямой $2x + y - 4 = 0$ углы 45° (рис. 9).

❑ Пусть угловой коэффициент одной из искомых прямых равен k. Угловой коэффициент заданной прямой равен -2. Так как угол между этими прямыми равен 45°, то

$$\operatorname{tg} 45° = \left|\frac{k+2}{1-2k}\right|, \quad \text{т.е. } 1 = \left|\frac{k+2}{1-2k}\right|,$$

откуда

$$\frac{k+2}{1-2k} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{k+2}{1-2k} = -1.$$

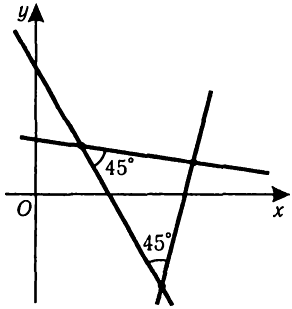

Рис. 9

Решив каждое из полученных уравнений, находим $k = -\frac{1}{3}$ и $k = 3$. Итак, уравнение одной из искомых прямых запишется в виде

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 5), \quad \text{т.е. } x + 3y - 8 = 0,$$

а уравнение другой прямой — в виде

$$y - 1 = 3(x - 5), \quad \text{т.е. } 3x - y - 14 = 0. \quad \blacksquare$$

96. Найти прямую, принадлежащую пучку $2x + 3y + 5 + \lambda(x + 8y + 6) = 0$ и проходящую через точку $M(1; 1)$.

❑ Координаты точки M должны удовлетворять уравнению искомой прямой, поэтому для определения λ получаем уравнение

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 + \lambda(1 + 8 \cdot 1 + 6) = 0, \quad \text{или } 10 + 15\lambda = 0,$$

т.е. $\lambda = -\frac{2}{3}$. Подставив значение λ в уравнение пучка, получим уравнение искомой прямой:

$$2x + 3y + 5 - \frac{2}{3}(x + 8y + 6) = 0, \quad \text{или } 4x - 7y + 3 = 0. \quad \blacksquare$$

97. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x - 4y + 7 = 0$ и $5x + 2y + 3 = 0$ и параллельную оси ординат.

❏ Искомая прямая принадлежит пучку

$$3x-4y+7+\lambda(5x+2y+3)=0, \quad \text{т. е.} \quad (3+5\lambda)x+(-4+2\lambda)y+(7+3\lambda)=0.$$

Так как она параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $-4+2\lambda=0$, т.е. $\lambda=2$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получаем $x+1=0$. Это и есть искомое уравнение. ■

98. Даны стороны треугольника: $x+2y+5=0$ (AB), $3x+y+1=0$ (BC) и $x+y+7=0$ (AC). Составить уравнение высоты треугольника, опущенной на сторону AC.

❏ Искомая высота принадлежит пучку

$$x+2y+5+\lambda(3x+y+1)=0, \quad \text{т. е.} \quad (1+3\lambda)x+(2+\lambda)y+(5+\lambda)=0.$$

Угловой коэффициент прямой пучка равен $-\frac{1+3\lambda}{2+\lambda}$; так как угловой коэффициент прямой AC равен -1, то угловой коэффициент высоты равен 1 и для определения λ имеем уравнение $-\frac{1+3\lambda}{2+\lambda}=1$. Отсюда $1+3\lambda+2+\lambda=0$, т.е. $\lambda=-\frac{3}{4}$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получим искомое уравнение высоты:

$$\left(1-\frac{9}{4}\right)x+\left(2-\frac{9}{4}\right)y+\left(5-\frac{3}{4}\right)=0, \quad \text{т. е.} \quad 5x-5y-17=0. \quad ■$$

99. Даны вершины треугольника: $A(0;2)$, $B(7;3)$ и $C(1;6)$. Найти $\angle BAC=\alpha$.

100. Даны стороны треугольника: $x+y-6=0$, $3x-5y+14=0$ и $5x-3y-14=0$. Составить уравнения его высот.

101. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-20=0$ и $8x+6y-5=0$.

102. Даны вершины треугольника: $A(0;0)$, $B(-1;-3)$ и $C(-5;-1)$. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам.

103. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(2;7)$ и образующих с прямой AB, где $A(-1;7)$ и $B(8;-2)$, углы 45°

104. Найти расстояние от точки $M(2;-1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8$, $b=6$.

105. В треугольнике с вершинами $A(\frac{3}{2};1)$, $B(1;\frac{5}{3})$, $C(3;3)$ найти длину высоты, проведенной из вершины C.

106. При каком значении m прямые $7x-2y-5=0$, $x+7y-8=0$ и $mx+my-8=0$ пересекаются в одной точке?

107. Даны середины сторон треугольника: $A_1(-1;-1)$, $B_1(1;9)$ и $C_1(9;1)$. Составить уравнения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

108. Найти острый угол, образуемый с осью ординат прямой, проходящей через точки $A(2; \sqrt{3})$ и $B(3; 2\sqrt{3})$.

109. Точки $A(1; 2)$ и $C(3; 6)$ являются противоположными вершинами квадрата. Найти координаты двух других вершин квадрата.

110. На оси абсцисс найти точку, расстояние до которой от прямой $8x + 15y + 10 = 0$ равно 1.

111. Даны вершины треугольника: $A(1; 1)$, $B(4; 5)$ и $C(13; -4)$. Составить уравнения медианы, проведенной из вершины B, и высоты, опущенной из вершины C. Вычислить площадь треугольника.

112. Найти прямые, принадлежащие пучку $2x + 3y + 6 + \lambda(x - 5y - 6) = 0$ и перпендикулярные основным прямым пучка.

113. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ и через точку $M(-0{,}8; 1)$.

114. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ и параллельную прямой $5x + 8y = 0$.

115. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$ и параллельную оси абсцисс.

116. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ и через начало координат.

117. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ и образующую угол 135° с осью абсцисс.

118. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(a; b)$ и образующих с прямой $x + y + c = 0$ углы 45°

119. Даны стороны треугольника: $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC). Составить уравнения медианы, проходящей через вершину B, и высоты, проходящей через вершину A.

120. Показать, что треугольник со сторонами $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ и $x - y - 10 = 0$ равнобедренный. Найти угол при его вершине.

121. Даны последовательные вершины параллелограмма: $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; 1)$. Найти угол между его диагоналями и показать, что этот параллелограмм является прямоугольником.

122. Даны стороны треугольника: $x - y + 2 = 0$ (AB), $x = 2$ (BC), $x + y - 2 = 0$ (AC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину B и через точку на стороне AC, делящую ее (считая от вершины A) в отношении 1 3.

123. Показать, что треугольник с вершинами $A(1; 1)$, $B(2; 1 + \sqrt{3})$, $C(3; 1)$ правильный, и вычислить его площадь.

124. Показать, что треугольник, стороны которого заданы уравнениями с целыми коэффициентами, не может быть правильным.

125. Дана вершина треугольника $A(3; 9)$ и уравнения медиан: $y - 6 = 0$ и $3x - 4y + 9 = 0$. Найти координаты двух других вершин.

126. Составить уравнение гипотенузы прямоугольного треугольника, проходящей через точку $M(2;3)$, если катеты треугольника расположены на осях координат, а площадь треугольника равна 12 кв. ед.

127. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x + 3y - 12 = 0$, концы которого лежат на осях координат.

§ 3

Кривые второго порядка

1. Окружность. *Окружность* — это множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). Если r — радиус окружности, а точка $C(a; b)$ — ее центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Раскрыв скобки в левой части уравнения (1), получим уравнение вида

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0, \tag{2}$$

где $l = -2a$, $m = -2b$, $n = a^2 + b^2 - r^2$

В общем случае уравнение (2) определяет окружность, если $l^2+m^2-4n > 0$.

Если $l^2+m^2-4n=0$, то указанное уравнение определяет точку $\left(-\frac{l}{2}; -\frac{m}{2}\right)$, а если $l^2 + m^2 - 4n < 0$, то оно не имеет геометрического смысла. В этом случае говорят, что уравнение определяет мнимую окружность.

Отметим, что уравнение окружности содержит старшие члены x^2 и y^2 с равными коэффициентами и в нем отсутствует член с произведением x на y.

Взаимное расположение точки $M(x_1; y_1)$ и окружности $x^2 + y^2 = r^2$ определяется такими условиями: если $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, то точка M лежит на окружности; если $x_1^2 + y_1^2 > r^2$, то точка M лежит вне окружности; если $x_1^2 + y_1^2 < r^2$, то точка M лежит внутри окружности.

128. Найти координаты центра и радиус окружности

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

❑ Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2 - 4x + y^2 + \frac{5}{2}y = 2$. Дополним выражения $x^2 - 4x$ и $y^2 + \frac{5}{2}y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4 и ко второму $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (одновременно к правой части прибавим сумму этих чисел):

$$(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{16},$$

или

$$(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности $a = 2$, $b = -\frac{5}{4}$, а радиус окружности $r = \frac{11}{4}$. ■

129. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого заданы уравнениями $9x - 2y - 41 = 0$, $7x + 4y + 7 = 0$, $x - 3y + 1 = 0$.

❏ Найдем координаты вершин треугольника, решив три системы уравнений:

$$\begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ 7x+4y+7=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ x-3y+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+4y+7=0, \\ x-3y+1=0. \end{cases}$$

В результате получим $A(3; -7)$, $B(5; 2)$, $C(-1; 0)$.

Пусть искомое уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. Для нахождения a, b и r напишем три равенства, подставив в искомое уравнение вместо текущих координат координаты точек A, B и C:

$$(3-a)^2+(-7-b)^2=r^2\cdot \quad (5-a)^2+(2-b)^2=r^2; \quad (-1-a)^2+b^2=r^2$$

Исключив r^2, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} (3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2, \\ (3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 4a+18b=-29, \\ 8a-14b=57. \end{cases}$$

Отсюда $a = 3{,}1$, $b = -2{,}3$. Значение r^2 находим из равенства $(-1-a)^2 + b^2 = r^2$, т.е. $r^2 = 22{,}1$. Итак, искомое уравнение записывается в виде

$$(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1. \quad ■$$

130. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5; 0)$ и $B(1; 4)$, если ее центр лежит на прямой $x + y - 3 = 0$.

❏ Найдем координаты точки M — середины хорды AB; имеем $x_M = \frac{5+1}{2} = 3$, $y_M = \frac{0+4}{2} = 2$, т.е. $M(3; 2)$. Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Составим уравнение прямой AB:

$$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-5}{1-5}, \quad \text{т. е. } x+y-5=0.$$

Так как угловой коэффициент этой прямой есть -1, то угловой коэффициент перпендикуляра к ней равен 1, а уравнение этого перпендикуляра запишется в виде $y - 2 = 1\ (x - 3)$, т.е. $x - y - 1 = 0$.

Очевидно, что центр C окружности есть точка пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ с указанным перпендикуляром, т.е. координаты центра определим из системы уравнений $x + y - 3 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Следовательно,

$x = 2$, $y = 1$, т.е. $C(2;1)$. Радиус окружности равен длине отрезка CA, т.е. $r = \sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2} = \sqrt{10}$. Итак, искомое уравнение имеет вид

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = 10. \quad \blacksquare$$

131. Составить уравнение хорды окружности $x^2+y^2 = 49$, делящейся в точке $A(1;2)$ пополам.

❑ Составим уравнение диаметра окружности, проходящего через точку $A(1;2)$. Это уравнение имеет вид $y = 2x$. Искомая хорда перпендикулярна диаметру и проходит через точку A, т.е. ее уравнение запишется так:

$$y-2 = -\frac{1}{2}(x-1), \quad \text{или} \quad x+2y-5=0. \quad \blacksquare$$

132. Найти уравнение окружности, симметричной с окружностью $x^2+y^2 = 2x+4y-4$ относительно прямой $x-y-3=0$.

❑ Приведем уравнение данной окружности к каноническому виду: $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$; центр окружности находится в точке $C(1;2)$, а ее радиус равен 1. Найдем координаты центра $C_1(x_1;y_1)$ симметричной окружности, для чего через точку $C(1;2)$ проведем прямую, перпендикулярную прямой $x-y-3=0$; ее уравнение есть $y-2 = k(x-1)$, где $k=-1$, откуда $y-2=-x+1$, или $x+y-3=0$.

Решив систему уравнений $x-y-3=0$ и $x+y-3=0$, получим $x=3$, $y=0$, т.е. проекция точки $C(1;2)$ на данную прямую — точка $P(3;0)$. Координаты же симметричной точки найдем, используя формулы координат середины отрезка: $3 = \frac{1+x_1}{2}$, $0 = \frac{2+y_1}{2}$; таким образом, $x_1 = 5$, $y_1 = -2$. Значит, точка $C_1(5;-2)$ — центр симметричной окружности, а уравнение этой окружности имеет вид $(x-5)^2+(y+2)^2=1$. ■

133. Найти множество середин хорд окружности $x^2+y^2 = 4(y+1)$, проведенных через начало координат.

❑ Уравнение множества хорд имеет вид $y = kx$. Выразим координаты точки пересечения хорд с окружностью через k, для чего решим систему уравнений $y = kx$ и $x^2+y^2-4y-4=0$. Получим квадратное уравнение $x^2(k^2+1) - 4kx-4=0$. Здесь $x_1+x_2 = \frac{4k}{1+k^2}$. Но полусумма этих абсцисс дает абсциссу середины хорды, т.е. $x = \frac{2k}{1+k^2}$, а ордината середины хорды $y = \frac{2k^2}{1+k^2}$. Последние два равенства являются параметрическими уравнениями искомого множества точек.

Исключив из этих равенств k $\left(\text{для чего достаточно в соотношении } x = \frac{2k}{1+k^2} \text{ положить } k = \frac{y}{x}\right)$, получим $x^2+y^2-2y = 0$. Следовательно, искомым множеством также является окружность. ■

134. Определить координаты центров и радиусы окружностей: 1) $x^2+y^2-8x+6y=0$; 2) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$; 3) $x^2+y^2-4x+14y+54=0$.

135. Найти угол между радиусами окружности $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведенными в точки ее пересечения с осью Oy.

136. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1;2)$, $B(0;-1)$ и $C(-3;0)$.

137. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(7;7)$ и $B(-2;4)$, если ее центр лежит на прямой $2x - y - 2 = 0$.

138. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2 + y^2 = 16$ и $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

139. Составить уравнения касательных к окружности $(x-3)^2+(y+2)^2=25$, проведенных в точках пересечения окружности с прямой $x - y + 2 = 0$.

140. Дана окружность $x^2 + y^2 = 4$. Из точки $A(-2;0)$ проведена хорда AB, которая продолжена на расстояние $BM = AB$. Найти множество точек M.

2. Эллипс. *Эллипсом* называют множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как на рис. 10, а фокусы эллипса находятся на оси Ox на равных расстояниях от начала координат в точках $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$, то получится ***каноническое*** (простейшее) ***уравнение эллипса***:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

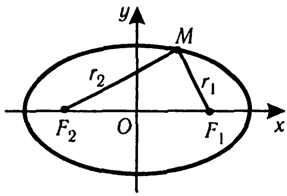

Рис. 10

Здесь a — большая, b — малая полуось эллипса, причем a, b и c (c — половина расстояния между фокусами) связаны соотношением $a^2 = b^2 + c^2$

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его ***эксцентриситетом*** $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$).

Расстояния некоторой точки M эллипса от его фокусов называют ***фокальными радиус-векторами*** этой точки. Их обычно обозначают r_1 и r_2 (в силу определения эллипса для любой его точки $r_1 + r_2 = 2a$).

В частном случае, когда $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$, фокусы сливаются в одной точке — центре), эллипс превращается в окружность (с уравнением $x^2+y^2=a^2$).

Взаимное расположение точки $M(x_1;y_1)$ и эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ определяется такими условиями: если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, то точка M лежит на эллипсе; если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, то то точка M лежит вне эллипса; если $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, то точка M лежит внутри эллипса.

Фокальные радиус-векторы выражаются через абсциссу точки эллипса по формулам $r_1 = a - \varepsilon x$ (правый фокальный радиус-вектор) и $r_2 = a + \varepsilon x$ (левый фокальный радиус-вектор).

141. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ и $N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

☐ Пусть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — искомое уравнение эллипса. Этому уравнению должны удовлетворять координаты данных точек. Следовательно,

$$\frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1, \quad \frac{4}{a^2} + \frac{3}{5b^2} = 1.$$

Отсюда находим $a^2 = 10$, $b^2 = 1$. Итак, уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$. ■

142. На эллипсе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, разность фокальных радиус-векторов которой равна 6,4.

143. Найти длину перпендикуляра, восставленного из фокуса эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ к большой оси до пересечения с эллипсом.

144. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

145. Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку $M(1; 1)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$. Составить уравнение эллипса.

146. Как расположены относительно эллипса $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ точки $M(7;1)$, $N(-5;-4)$, $P(4;5)$?

147. Найти эксцентриситет эллипса, если фокальный отрезок виден из верхней вершины под углом α.

148. На прямой $x + 5 = 0$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

149. Пользуясь определением эллипса, составить его уравнение, если известно, что точки $F_1(0; 0)$ и $F_2(1; 1)$ являются фокусами эллипса, а длина большой оси равна 2.

150. Составить уравнение множества точек, расстояния которых от точки $A(0; 1)$ в 2 раза меньше расстояния до прямой $y - 4 = 0$.

151. Концы отрезка AB постоянной длины a скользят по сторонам прямого угла. Найти уравнение кривой, описываемой точкой M, делящей этот отрезок в отношении 1 2.

3. Гипербола. *Гиперболой* называют множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами. Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c; 0)$ и $F_2(-c; 0)$, то получится ***каноническое уравнение гиперболы***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ Гипербола состоит из двух ветвей и симметрична относительно осей координат. Точки $A_1(a; 0)$ и $A_2(-a; 0)$ называют *вершинами* гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $A_1A_2 = 2a$, называют *действительной осью* гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $B_1B_2 = 2b$, — *мнимой осью* (рис. 11).

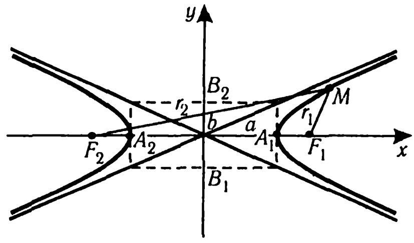

Рис. 11

Прямую называют *асимптотой* гиперболы, если расстояние от точки $M(x; y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Для построения асимптот гиперболы строят основной прямоугольник гиперболы со сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы. На рис. 11 указано взаимное расположение гиперболы и ее асимптот. Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называют *эксцентриситетом* гиперболы.

Фокальные радиус-векторы правой ветви гиперболы: $r_1 = \varepsilon x - a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2 = \varepsilon x + a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Фокальные радиус-векторы левой ветви гиперболы: $r_1 = -\varepsilon x + a$ (правый фокальный радиус-вектор), $r_2 = -\varepsilon x - a$ (левый фокальный радиус-вектор).

Если $a = b$, то уравнение гиперболы примет вид

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Такую гиперболу называют *равносторонней*. Ее асимптоты образуют прямой угол. Если за оси координат принять асимптоты равносторонней гиперболы, то ее уравнение примет вид $xy = m$ ($m = \pm\frac{a^2}{2}$; при $m > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $m < 0$ — во II и IV четвертях). Так как уравнение $xy = m$ можно переписать в виде $y = \frac{m}{x}$, то равносторонняя гипербола представляет собой график обратной пропорциональной зависимости между величинами x и y.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \left(\text{или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\right) \tag{2}$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок длины $2b$, расположенный на оси Oy.

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называют *сопряженными*.

152. На правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, расстояние до которой от правого фокуса в 2 раза меньше расстояния до нее от левого фокуса.

❑ Для правой ветви гиперболы фокальные радиус-векторы определяются по формулам $r_1 = \varepsilon x - a$ и $r_2 = \varepsilon x + a$. Следовательно, имеем уравнение $\varepsilon x + a = 2(\varepsilon x - a)$, откуда $x = \frac{3a}{\varepsilon}$; так как $a = 4$, $b = 3$, то $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16+9}}{4} = \frac{5}{4}$, т.е. $x = 9{,}6$.

Ординату искомой точки находим из уравнения гиперболы:

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 16} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(9{,}6; 0{,}6\sqrt{119})$ и $M_2(9{,}6; -0{,}6\sqrt{119})$. ■

153. Даны точки $A(-1;0)$ и $B(2;0)$. Точка M движется так, что в треугольнике AMB угол B остается вдвое больше угла A. Найти уравнение кривой, которую опишет точка M.

❑ Взяв точку M с координатами x и y, выразим $\operatorname{tg}B$ и $\operatorname{tg}A$ через координаты точек A, B и M:

$$\operatorname{tg}B = -\frac{y}{x-2} = \frac{y}{2-x}, \quad \operatorname{tg}A = \frac{y}{x+1}.$$

Согласно условию, получаем уравнение $\operatorname{tg}B = \operatorname{tg}2A$, т.е. $\operatorname{tg}B = \frac{2\operatorname{tg}A}{1-\operatorname{tg}^2 A}$. Подставив в это равенство найденные для $\operatorname{tg}B$ и $\operatorname{tg}A$ выражения, приходим к уравнению

$$\frac{y}{2-x} = \frac{2y}{x+1}\left(1 - \frac{y^2}{(x+1)^2}\right).$$

После сокращения на y ($y \neq 0$) и упрощений получаем $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. Искомая кривая — гипербола. ■

154. Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, если известно, что она проходит через точку $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

❑ Согласно определению эксцентриситета, имеем $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, или $c^2 = 2a^2$ Но $c^2 = a^2 + b^2$; следовательно, $a^2 + b^2 = 2a^2$, или $a^2 = b^2$, т.е. гипербола равносторонняя.

Теперь воспользуемся условием принадлежности точки M гиперболе, откуда $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$, или $\frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1$. Поскольку $a^2 = b^2$, получим $\frac{3}{a^2} - \frac{2}{a^2} = 1$, т.е. $a^2 = 1$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $x^2 - y^2 = 1$. ■

155. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;8)$, если уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

156. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой совпадают соответственно с фокусами и вершинами эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$.

157. Через точку $M(0;-1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

158. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти софокусный ей эллипс, проходящий через точку $M(4;6)$.

159. Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 1$. Написать уравнение софокусной ему равносторонней гиперболы.

160. Угол между асимптотами гиперболы равен $60°$ Вычислить эксцентриситет гиперболы.

161. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

162. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2 и фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

163. Найти фокальные радиус-векторы гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точках пересечения ее с окружностью $x^2 + y^2 = 91$.

164. Доказать, что длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на одну из асимптот гиперболы, равна мнимой полуоси.

165. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ до ее асимптот есть величина постоянная.

166. Найти уравнение множества точек, равноотстоящих от окружности $x^2 + 4x + y^2 = 0$ и от точки $M(2;0)$.

4. Парабола. *Параболой* называют множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и данной прямой, называемой *директрисой*. Если директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом — точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px. \qquad (1)$$

Эта парабола расположена симметрично относительно оси абсцисс (рис. 12, где $p > 0$). Уравнение

$$x^2 = 2py \qquad (2)$$

является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат. При $p > 0$ параболы (1) и (2) обращены в положительную сторону соответствующей оси, а при $p < 0$ — в отрицательную сторону.

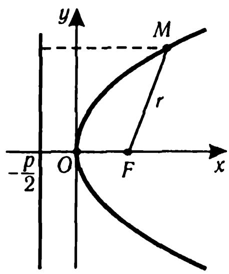

Рис. 12

Длина фокального радиус-вектора параболы $y^2 = 2px$ определяется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

167. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси Ox, равна 16, а расстояние до этой хорды от вершины параболы равно 6.

❑ Так как известны длина хорды и расстояние до нее от вершины, то известны координаты конца этой хорды — точки M, лежащей на параболе. Уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$; полагая в нем $x=6$, $y=8$, получим $8^2=$ $=2p\cdot 6$, откуда $2p=\frac{32}{3}$. Итак, искомое уравнение параболы есть $y^2=\frac{32}{3}x$. ■

168. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

❑ Искомое уравнение параболы запишется в виде $x^2 = 2py$, уравнение биссектрисы — в виде $y = x$. Таким образом, получаем точки пересечения параболы с биссектрисой: $O(0; 0)$ и $M(2p; 2p)$. Длина хорды равна расстоянию между двумя точками: $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2+4p^2}$, т. е. $2p = 8$. Следовательно, искомое уравнение есть $x^2 = 8y$. ■

169. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox.

170. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние до которой от директрисы равно 4.

171. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y=x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

172. Парабола $y^2 = 2x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна 0,75. Составить уравнение этой прямой.

173. Составить простейшее уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

174. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние до которой от прямой $4x+3y+10=0$ равно 2.

175. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $M(4; 2)$; найти угол α между фокальным радиус-вектором этой точки и осью Ox.

§ 4

Преобразование координат и упрощение уравнений кривых второго порядка

1. Преобразование координат. При переходе от системы координат xOy к новой системе $x'O'y'$ (направление осей координат прежнее, за новое начало координат принята точка $O_1(a; b)$; рис. 13) старые и новые координаты некоторой точки M плоскости связаны следующими формулами:

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b; \tag{1}$$

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b. \tag{2}$$

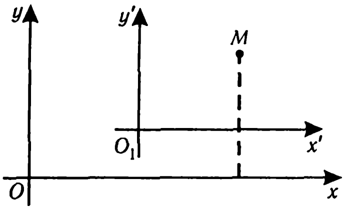

Рис. 13

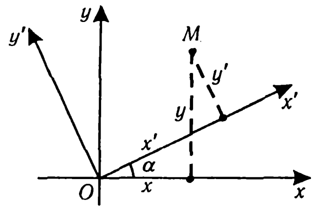

Рис. 14

С помощью формул (1) старые координаты выражаются через новые, а с помощью формул (2) — новые через старые.

При повороте осей координат на угол α (начало координат прежнее, причем α отсчитывается против часовой стрелки; рис. 14) зависимость между старыми координатами x, y и новыми x', y' выражается следующими формулами:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \qquad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha; \tag{3}$$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{4}$$

176. Выполнен параллельный перенос осей координат, причем новое начало расположено в точке $O_1(3; -4)$. Известны старые координаты точки $M(7; 8)$. Найти новые координаты этой же точки.

❑ Здесь $a = 3$, $b = -4$, $x = 7$, $y = 8$. Согласно формулам (2), находим $x' = 7 - 3 = 4$, $y' = 8 - (-4) = 12$. ■

177. На плоскости xOy дана точка $M(4; 3)$. Система координат повернута вокруг начала координат так, что новая ось прошла через точку M. Определить старые координаты точки A, если известны ее новые координаты $x' = 5$, $y' = 5$.

❑ Так как $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, то $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; тогда формулы (3) преобразования координат в данном случае примут вид $x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y'$, $y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$ Полагая $x' = y' = 5$, находим $x = 1$, $y = 7$ ■

178. Система координат повернута на угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Определить новые координаты точки $M(\sqrt{3}; 3)$.

❑ Используя формулы (4), получим

$$x' = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

$$y' = -\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \ ■$$

179. Дана точка $M(4{,}5; 5{,}5)$. За новые координатные оси приняты прямые $2x - 1 = 0$ (ось O_1y'), $2y - 5 = 0$ (ось O_1x'). Найти координаты точки M в новой системе координат.

180. Дана точка $M(4\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$. За новую ось абсцисс принята прямая $y = 2x$, а за новую ось ординат — прямая $y = -0{,}5x$, причем новые оси координат образуют с соответствующими старыми осями острые углы. Найти координаты точки M в новой системе.

2. Парабола $y=Ax^2+Bx+C$ и гипербола $y=\frac{kx+l}{px+q}$. Уравнение вида

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

с помощью преобразования координат при параллельном переносе осей, т.е. по формулам $x = x' + a$, $y = y' + b$ (a и b — координаты нового начала, x' и y' — новые координаты), преобразуется к каноническому виду уравнения параболы.

Парабола, определяемая уравнением $y = Ax^2 + Bx + C$, имеет ось симметрии, параллельную оси Oy (аналогично уравнение $x = Ay^2 + By + C$ определяет параболу с осью симметрии, параллельной оси Ox).

Дробно-линейная функция

$$y = \frac{kx + l}{px + q}$$

определяет равностороннюю гиперболу, если $kq - pl \neq 0$, $p \neq 0$; с помощью преобразования координат при параллельном переносе осей это уравнение преобразуется к каноническому виду уравнения равносторонней гиперболы $xy = m$, т.е. к уравнению такой равносторонней гиперболы, у которой оси координат являются асимптотами. При $m > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а при $m < 0$ — во II и IV четвертях.

181. Привести к каноническому виду уравнение параболы $y = 9x^2-6x+2$.

❑ Заменим x на $x' + a$ и y на $y' + b$:

$$y' + b = 9(x' + a)^2 - 6(x' + a) + 2,$$

или

$$y' = 9x'^2 + 6x'(3a - 1) + (9a^2 - 6a + 2 - b).$$

Найдем такие значения a и b, при которых коэффициент при x' и свободный член обратятся в нуль: $3a - 1 = 0$, $9a^2 - 6a + 2 - b = 0$, т.е. $a = \frac{1}{3}$, $b = 1$. Следовательно, каноническое уравнение параболы имеет вид $x'^2 = \frac{1}{9}y'$ Вершиной параболы является точка $O_1(\frac{1}{3}; 1)$ и $p = \frac{1}{18}$.

Другой способ решения подобных задач заключается в том, что заданное уравнение вида $y = Ax^2 + Bx + C$ (или $x = Ay^2 + By + C$) преобразуют к виду $(x - a)^2 = 2p(y - b)$ [соответственно $(y - b)^2 = 2p(x - a)$]. Тогда точка $O_1(a; b)$ служит вершиной параболы, а знак параметра p определяет, в какую сторону — положительную или отрицательную соответствующей оси (Oy или Ox) — направлена парабола.

Так, уравнение $y = 9x^2 - 6x + 2$ преобразуем следующим образом:

$$y = 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 1 + 2;$$

$$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \qquad \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(y - 1).$$

Отсюда снова получаем, что вершиной параболы является точка $O_1\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, параметр $p = \frac{1}{18}$, а ветви параболы направлены в положительную сторону оси Oy. ■

182. Привести уравнение гиперболы $y = \dfrac{4x+5}{2x-1}$ к виду $x'y' = k$. Найти уравнения асимптот гиперболы относительно первоначальной системы координат.

❑ С помощью параллельного переноса осей координат преобразуем данное уравнение к виду

$$(y' + b)(2x' + 2a - 1) = 4x' + 4a + 5,$$

или

$$2x'y' + (2b - 4)x' + (2a - 1)y' = 4a + b - 2ab + 5.$$

Найдем a и b из условий $2b - 4 = 0$ и $2a - 1 = 0$, т.е. $a = 0,5$, $b = 2$. Тогда уравнение гиперболы в новой системе координат примет вид $x'y' = 3{,}5$. Асимптотами гиперболы служат новые оси координат, а поэтому их уравнения $x' = 0,5$, $y' = 2$.

Другой способ решения подобных задач заключается в том, что уравнение вида $y = \dfrac{kx+l}{px+q}$ преобразуют к виду $(x-a)(y-b) = m$; центр гиперболы находится в точке $O_1(a; b)$; ее асимптотами служат прямые $x = a$ и $y = b$, знак m по-прежнему определяет, в каких углах между асимптотами находятся ветви гиперболы.

Так, уравнение $y = \dfrac{4x+5}{2x-1}$ преобразуем следующим образом:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)y - 4\left(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{4}\right) = 0;$$

$$(2x - 1)y - (4x + 5) = 0; \qquad 2(x - 0,5)(y - 2) = 7.$$

Значит, уравнение гиперболы приведено к виду $(x - 0,5)(y - 2) = 3,5$; центром гиперболы является точка $O_1(0,5; 2)$, ветви гиперболы расположены в I и III четвертях между ее асимптотами $x - 0{,}5 = 0$, $y - 2 = 0$. ■

183. Привести к каноническому виду уравнения парабол:
1) $y = 4x - 2x^2$; 2) $y = -x^2 + 2x + 2$; 3) $x = -4y^2 + y$; 4) $x = y^2 + 4y + 5$.

184. Преобразовать уравнения гипербол к виду $x'y' = m$:
1) $y = \dfrac{2x}{4x-1}$; 2) $y = \dfrac{2x+3}{3x-2}$; 3) $y = \dfrac{10x+2}{5x+4}$; 4) $y = \dfrac{4x+3}{2x+1}$.

3. Пятичленное уравнение кривой второго порядка. Уравнение второй степени вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

(не содержащее члена xy с произведением координат) называют *пятичленным уравнением кривой второго порядка*. В зависимости от знака произведения коэффициентов A и C оно определяет на плоскости xOy эллипс, гиперболу или параболу (включая возможные случаи распада и вырождения этих кривых) с осями симметрии, параллельными осям координат.

1. Пусть $AC > 0$; тогда определяемая уравнением (1) кривая есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку); при $A = C$ эллипс превращается в окружность.

2. Пусть $AC < 0$; тогда соответствующая кривая является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения (1) распадается на произведение двух линейных множителей:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2).$$

3. Пусть $AC = 0$ (т.е. либо $A = 0$, $C \neq 0$, либо $C = 0$, $A \neq 0$); тогда уравнение (1) определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (действительные различные, действительные слившиеся или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y (т.е. если уравнение (1) имеет вид $Ax^2 + 2Dx + F = 0$ или $Cy^2 + 2Ey + F = 0$).

Вид кривой и расположение ее на плоскости легко устанавливаются с помощи преобразования уравнения (1) к виду $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (в случае $AC > 0$ или $AC < 0$); по виду полученного уравнения обнаруживаются и случаи распада или вырождения эллипса и гиперболы.

В случае невырожденных кривых переносом начала координат в точку $O_1(x_0; y_0)$ полученное уравнение эллипса или гиперболы можно привести к каноническому виду.

Случай $AC = 0$ подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, поскольку уравнение невырожденной параболы можно записать в виде $y = a_1x^2 + b_1x + c$ или $x = a_1y^2 + b_1y + c_1$.

185. Какую линию определяет уравнение $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$?

❑ Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) = -4;$$
$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = -4;$$
$$4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = -4 + 4 + 36; \quad 4(x - 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36.$$

Выполним параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O'(1; 2)$. Воспользуемся формулами преобразования координат: $x = x' + 1$, $y = y' + 2$. Относительно новых осей уравнение кривой примет вид

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36, \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Таким образом, заданная кривая является эллипсом. ■

186. Какую линию определяет уравнение $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$?

❑ Преобразуем данное уравнение так:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 44;$$
$$(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 44 + 1 - 36, \quad (x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 9.$$

Выполним параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(-1;2)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x = x' - 1$, $y = y' + 2$. После преобразования координат получим уравнение

$$x'^2 - 9y'^2 = 9, \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{9} - y'^2 = 1.$$

Кривая является гиперболой. Асимптотами этой гиперболы относительно новых осей служат прямые $y' = \pm\frac{1}{3}x'$ ■

Установить, какие кривые определяются заданными уравнениями. Изобразить эти кривые.

187. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$.

188. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$.

189. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$.

190. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$.

191. $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.

192. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$.

193. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

194. $x^2 - 6x + 8 = 0$.

195. $x^2 + 2x + 5 = 0$.

4. Приведение к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка. Если кривая второго порядка задана уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

то, применив преобразование поворота осей координат с использованием формул $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$, следует выбрать α так, чтобы освободиться в уравнении от члена с произведением координат.

Дальнейшие преобразования были рассмотрены в предыдущем разделе.

Случай распада кривой второго порядка на две прямые можно легко установить по исходному уравнению следующим образом: рассматривая уравнение (1) как квадратное относительно y (предполагая, что коэффициент при y^2 отличен от нуля), разрешают его относительно y; если при этом под корнем окажется точный квадрат некоторого двучлена $ax + b$, то корень извлечется, и для y получатся два значения: $y_1 = k_1x + b_1$; $y_2 = k_2x + b_2$. Это и покажет, что кривая распадается на две прямые.

Данное уравнение можно разрешить и относительно x. Если в общем уравнении кривой второго порядка $A = C = 0$ (естественно, что $B \neq 0$), то указанное уравнение определяет пару прямых тогда и только тогда, если $\frac{B}{D} = \frac{2E}{F}$. В этом случае левая часть уравнения разлагается на линейные множители.

196. Показать, что уравнение $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 25 = 0$ определяет совокупность двух прямых.

❑ Перепишем уравнение в виде $(3x + 4y)^2 - 25 = 0$. Разложив левую часть на множители, получаем $(3x + 4y + 5)(3x + 4y - 5) = 0$. Таким образом, заданное уравнение определяет прямые $3x + 4y + 5 = 0$ и $3x + 4y - 5 = 0$. ■

197. Показать, что уравнение $3x^2+8xy-3y^2-14x-2y+8=0$ определяет совокупность двух прямых.

❑ Перепишем уравнение в виде $3y^2-2(4x-1)y-(3x^2-14x+8)=0$. Разрешим уравнение относительно y:

$$y=\frac{4x-1\pm\sqrt{(4x-1)^2+(9x^2-42x+24)}}{3}, \quad \text{или} \quad y=\frac{4x-1\pm(5x-5)}{3}.$$

Получаем уравнения прямых $y=3x-2$ и $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$. Эти уравнения можно записать в виде $3x-y-2=0$, $x+3y-4=0$. ■

198. Какая линия определяется уравнением $xy+2x-4y-8=0$?

❑ Запишем уравнение в виде $x(y+2)-4(y+2)=0$, или $(x-4)(y+2)=$ $=0$. Таким образом, уравнение определяет две прямые $x-4=0$ и $y+2=0$, одна из которых параллельна оси Ox, а другая параллельна оси Oy. ■

199. Привести к каноническому виду уравнение

$$5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0.$$

❑ 1. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами (3) п. 1 поворота осей координат. Имеем

$$5(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+8(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+14(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+5=0,$$

или

$$(5\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+(5\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha)y'^2+$$
$$+[6\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'+(8\cos\alpha+14\sin\alpha)x'+$$
$$+(14\cos\alpha-8\sin\alpha)y'+5=0.$$

Найдем α из условия $4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+6\sin\alpha\cos\alpha=0$, т.е. приравняем нулю коэффициент при $x'y'$ Получаем уравнение $2\,\mathrm{tg}^2\alpha-3\,\mathrm{tg}\,\alpha-2=0$, откуда $\mathrm{tg}\,\alpha_1=2$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2=-0{,}5$.

Заметим, что эти значения $\mathrm{tg}\,\alpha$ соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Поэтому, взяв $\mathrm{tg}\,\alpha=2$ вместо $\mathrm{tg}\,\alpha=-0{,}5$, мы только меняем ролями оси x' и y' (рис. 15).

Пусть $\mathrm{tg}\,\alpha=2$, тогда $\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt5}$; возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение примет вид

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'+5=0,$$

или

$$9\left(x'^2+\frac{4}{\sqrt5}\right)^2+4\left(y'^2-\frac{1}{2\sqrt5}y'\right)^2=-5.$$

2. Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{36}{5} + \frac{1}{20} - 5,$$

или

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

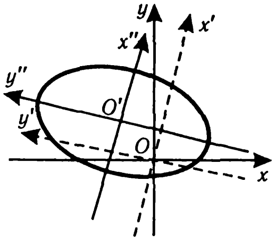

Рис. 15

Приняв за новое начало точку $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$, применим формулы параллельного переноса осей координат: $x' = x'' - \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y' = y'' + \frac{1}{4\sqrt{5}}$. В результате получим $9x''^2 + 4y''^2 = \frac{9}{4}$, или $\frac{x''^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{9}{16}} = 1$ (уравнение эллипса). ■

200. Привести к каноническому виду уравнение

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

❑ 1. Преобразуем это уравнение, воспользовавшись формулами (3) п. 1 поворота осей координат:

$$6(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 8(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 -$$
$$-12(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) - 26(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 11 = 0,$$

или

$$6(\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin^2\alpha)x'^2 + 8(\cos^2\alpha - 6\sin\alpha\cos\alpha)y'^2 +$$
$$+[16\sin\alpha\cos\alpha + 6(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' -$$
$$-12(\cos\alpha + 26\sin\alpha)x' - (26\cos\alpha - 12\sin\alpha)y' + 11 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при $x'y'$, имеем

$$16\sin\alpha\cos\alpha + 6(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0, \quad \text{или} \quad 3\,\mathrm{tg}^2\alpha - 8\,\mathrm{tg}\,\alpha - 3 = 0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 3$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = -\frac{1}{3}$; примем $\mathrm{tg}\,\alpha = 3$, тогда $\sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$; возьмем положительные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Тогда уравнение примет вид

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0,$$

или

$$9(x'^2 - \sqrt{10}x') - (y'^2 - \sqrt{10}y') = -11.$$

2. Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} - 11,$$

или

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9.$$

Приняв за новое начало точку $O'\left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, применим формулы параллельного переноса осей координат: $x' = x'' + \frac{\sqrt{10}}{2}$, $y' = y'' + \frac{\sqrt{10}}{2}$. Окончательно получим $9x''^2 - y''^2 = 9$, или $x''^2 - \frac{y''^2}{9} = 1$ (уравнение гиперболы). ■

201. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

❑ 1. Преобразуем уравнение с помощью формул поворота осей координат:

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$
$$+ (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 10(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) - 6(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 25 = 0,$$

или

$$(\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)x'^2 + (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)y'^2 +$$
$$+ 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)x'y' - (10\cos\alpha + 6\sin\alpha)x' + (10\sin\alpha - 6\cos\alpha)y' + 25 = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при произведении $x'y'$, имеем $2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha = 1$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1$. Возьмем $\operatorname{tg}\alpha = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда уравнение примет вид

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 25 = 0, \quad \text{или} \quad 2(y'^2 + \sqrt{2}y') - 8\sqrt{2}x' + 25 = 0.$$

2. Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}x' - 24, \quad \text{или} \quad \left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Приняв за новое начало точку $O'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, применим формулы параллельного переноса осей координат: $x' = x'' - \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y' = y'' + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Окончательно получим $y''^2 = 4\sqrt{2}x''$ (уравнение параболы). ■

Показать, что заданные уравнения определяют кривые, распадающиеся на пару прямых, и найти уравнения этих прямых:

202. $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0.$

203. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

204. $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$.

Привести к каноническому виду уравнения кривых:

205. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.

206. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

207. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

§ 5

Определители второго и третьего порядков и системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными

1. Определители второго порядка и системы линейных уравнений. *Определитель второго порядка*, соответствующий таблице элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, — это число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

если ее определитель $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, имеет единственное решение, которое находится по *формулам Крамера*:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \qquad (1)$$

Если определитель $D = 0$, то система является либо несовместной, либо неопределенной. В последнем случае система сводится к одному уравнению (например, первому), второе же уравнение является следствием первого.

Условие несовместности системы можно записать в виде $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, а условие неопределенности — в виде $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Линейное уравнение называют ***однородным***, если свободный член этого уравнения равен нулю.

Рассмотрим систему двух линейных однородных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0. \end{cases}$$

1. Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то система сводится к одному уравнению (например, первому), из которого одно неизвестное выражается через два других, значения которых остаются произвольными.

2. Если условие $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ не выполнено, то решения системы находят по формулам

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t, \qquad (2)$$

где t может принимать любые значения. Эти решения можно записать также в виде

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = t.$$

При этой форме записи решений следует иметь в виду, что если один из знаменателей обращается в нуль, то нужно приравнять нулю и соответствующий числитель.

208. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab, \\ (a-b)x + (a+b)y = 2(a^2 - b^2). \end{cases}$$

❑ Находим определитель D системы, а также определители D_x и D_y, входящие в числители формул (1):

$$D = \begin{vmatrix} a+b & -(a-b) \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4ab & -(a-b) \\ 2(a^2-b^2) & a+b \end{vmatrix} = 4a^2b + 4ab^2 + 2a^3 - 2a^2b - 2ab^2 + 2b^3 =$$

$$= 2(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = 2(a^2+b^2)(a+b),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a+b & 4ab \\ a-b & 2(a^2-b^2) \end{vmatrix} = 2a^3 + 2a^2b - 2ab^2 - 2b^3 - 4a^2b + 4ab^2 =$$

$$= 2(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = 2(a^2+b^2)(a-b).$$

Отсюда получаем $x = \dfrac{D_x}{D} = a+b$, $y = \dfrac{D_y}{D} = a-b$. ■

209. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

❑ Используя формулы (2), находим

$$x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} t = -22t, \quad y = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} t = 14t, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} t = 2t,$$

где t можно придавать любые значения. ■

Решить системы уравнений:

210. $\begin{cases} 5x - 3y = 1, \\ x + 11y = 6. \end{cases}$

211. $\begin{cases} 2x + y = \frac{1}{6}, \\ 4x + 2y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

212. $\begin{cases} ax - by = a^2 + b^2, \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}$

213. $\begin{cases} 3x + 2y = \frac{1}{6}, \\ 9x + 6y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

214. $\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 3x - 5y + 2z = 0. \end{cases}$

215. $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos 2\alpha, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin 2\alpha. \end{cases}$

216. $\begin{cases} a^2x - 2(a^2 + b^2)y + b^2z = 0, \\ 2x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

2. Определители третьего порядка и системы линейных уравнений. *Определитель третьего порядка*, соответствующий таблице элементов $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, — это число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Минором данного элемента определителя третьего порядка называют определитель второго порядка, который получится, если в исходном определителе вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент. *Алгебраическим дополнением* данного элемента называют его минор, умноженный на $(-1)^k$, где k — сумма номеров строки и столбца, содержащих данный элемент.

Таким образом, знак, который при этом приписывают минору соответствующего элемента определителя, определяется следующей таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Правая часть равенства (1), выражающего определитель третьего порядка, представляет собой сумму произведений элементов первой строки определителя на их алгебраические дополнения.

Теорема 1. *Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.*

Эта теорема позволяет вычислять значение определителя, раскрывая его по элементам любой строки или столбца.

Теорема 2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

Свойства определителей.

1° *Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками.*

2° *Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.*

3° *Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.*

4° *При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.*

5° *Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число* (***теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя***).

Решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

находится по *формулам Крамера*:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}, \tag{2}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что $D \neq 0$ (если $D = 0$, то исходная система либо неопределенная, либо несовместная).

Если система однородная, т.е. имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

и ее определитель отличен от нуля, то она имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Если же определитель однородной системы равен нулю, то система сводится либо к двум независимым уравнениям (третье является их следствием), либо к одному уравнению (остальные два являются его следствиями). Первый случай имеет место тогда, когда среди миноров определителя однородной системы есть хотя бы один отличный от нуля; второй — тогда, когда все миноры этого определителя равны нулю.

В обоих случаях (см. п. 1) однородная система имеет бесчисленное множество решений.

217. Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

❑ Разложив определитель по элементам первой строки, получим

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 5 \cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68. \blacksquare$$

218. Вычислить тот же определитель, используя теорему о линейной комбинации элементов строк (столбцов).

❑ К элементам первой строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на 5, а к элементам третьей строки — соответствующие элементы второй строки, умноженные на 7:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Разложив полученный определитель по элементам первого столбца, находим

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 13 \cdot 34 - 17\ \ 22 = 68. \blacksquare$$

219. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + \ \ z = 8, \\ 3x + 2y + \ \ z = 10, \\ 4x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

❑ Используя формулы (2), находим

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1 \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{42}{14} = 3. \quad \blacksquare$$

220. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 4x + \ \ y + \ \ z = 0, \\ x + 3y + \ \ z = 0, \\ x + \ \ y + 2z = 0. \end{cases}$$

❑ Запишем определитель системы:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления этого определителя к элементам первой строки прибавим элементы третьей строки, умноженные на -4, а к элементам второй строки — элементы третьей строки, умноженные на -1:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 17.$$

Так как $D \neq 0$, то система имеет только нулевое решение $x = y = z = 0$. $\blacksquare$

221. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

❑ Имеем

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 + 14 + 1 = 0.$$

Следовательно, система имеет решения, отличные от нулевого. Решаем систему первых двух уравнений (третье уравнение является их следствием):

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ x + 2y + 9z = 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя формулы (2) п. 1, получаем

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \cdot t = 20t, \quad y = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} t = -28t, \quad z = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} t = 4t. \quad \blacksquare$$

222. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам третьей строки.

223. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$, используя теорему о линейной комбинации строк (столбцов).

224. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$

Решить системы уравнений:

225. $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

226. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$

227. $\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$

228. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$

229. $\begin{cases} ax + by + cz = a - b, \\ bx + cy + az = b - c, \\ cx + ay + bz = c - a, \end{cases}$
где $a + b + c \neq 0$.

230. $\begin{cases} ax + by + (a+b)z = 0, \\ bx + ay + (a+b)z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$

Глава II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1

Прямоугольные координаты в пространстве

Если в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то точку M пространства, имеющую координаты x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата), обозначают $M(x; y; z)$.

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

В частности, расстояние до точки $M(x; y; z)$ от начала координат O находится по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

Если отрезок, концами которого служат точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, разделен точкой $C(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ в отношении λ, то координаты точки C определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad \bar{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4}$$

231. Даны точки $M_1(2; 4; -2)$ и $M_2(-2; 4; 2)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = 3$.

❑ Воспользуемся формулами (3) деления отрезка в данном отношении:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{2 + 3(-2)}{1+3} = -1, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 3\cdot 4}{1+3} = 4,$$

$$z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{-2 + 3\cdot 2}{1+3} = 1.$$

Следовательно, $M(-1; 4; 1)$ — искомая точка. ■

232. Дан треугольник: $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Найти координаты точки D пересечения биссектрисы угла A со стороной CB.

❑ Используя формулу (1), найдем длины сторон треугольника, образующих угол A:

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(9-1)^2+(1-1)^2}=10;$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(5-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2}=5.$$

Следовательно, $\frac{CD}{DB}=\frac{10}{5}=2$, поскольку биссектриса делит сторону CB на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом,

$$x_D=\frac{x_C+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{7+2\cdot 5}{1+2}=\frac{17}{3},\quad y_D=\frac{y_C+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{9+2\cdot 1}{1+2}=\frac{11}{3},$$

$$z_D=\frac{z_C+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{1+2(-2)}{1+2}=-1,$$

т.е. $D\left(\frac{17}{3};\frac{11}{3};-1\right)$ — искомая точка. ■

233. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(2;-4;5)$ и $B(-3;2;7)$.

❑ Пусть M – искомая точка. Для нее должно выполняться равенство $AM=MB$. Так как эта точка лежит на оси Ox, то она имеет координаты $(x;0;0)$, поэтому

$$AM=\sqrt{(x-2)^2+(-4)^2+5^2},\quad MB=\sqrt{(x+3)^2+2^2+7^2}.$$

Отсюда после возведения в квадрат получаем

$$(x-2)^2+41=(x+3)^2+53,\quad \text{или}\quad 10x=-17,\quad \text{т.е.}\ x=-1{,}7.$$

Таким образом, точка $M(-1{,}7;0;0)$ является искомой. ■

234. Даны точки $A(3;3;3)$ и $B(-1;5;7)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок AB на три равные части.

235. Дан треугольник: $A(1;2;3)$, $B(7;10;3)$, $C(-1;3;1)$. Показать, что угол A — тупой.

236. Найти координаты центра тяжести треугольника с вершинами $A(2;3;4)$, $B(3;1;2)$ и $C(4;-1;3)$.

237. В каком отношении точка M, равноудаленная от точек $A(3;1;4)$ и $B(-4;5;3)$, разделит отрезок оси Oy от начала координат до точки $C(0;6;0)$?

238. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек $M_1(2;4;1)$ и $M_2(-3;2;5)$.

239. На плоскости xOy найти точку, равноудаленную от точек $A(1;-1;5)$, $B(3;4;4)$ и $C(4;6;1)$.

§ 2

Векторы и простейшие действия над ними

Любой вектор $\boldsymbol{a}$, заданный в координатном пространстве $Oxyz$, можно представить в виде

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

Такое представление вектора $\boldsymbol{a}$ называют его *разложением по осям координат* (или *разложением по ортам.*)

Здесь a_x, a_y, a_z — проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на соответствующие оси координат (их называют *координатами вектора* $\boldsymbol{a}$), $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты этих осей (единичные векторы, направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси).

Векторы $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$ и $a_z\boldsymbol{k}$, в виде суммы которых представлен вектор $\boldsymbol{a}$, называют *составляющими* (*компонентами*) *вектора* $\boldsymbol{a}$ по осям координат.

Длина (модуль) вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается a или $|\boldsymbol{a}|$ и находится по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора $\boldsymbol{a}$ определяется углами α, β и γ, образуемыми им с осями координат Ox, Oy и Oz. Косинусы этих углов (так называемые *направляющие косинусы вектора*) находят по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы их разложениями по ортам, то их сумму и разность находят по формулам

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k}.$$

Напомним, что сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, начала которых совмещены, изображается вектором, имеющим то же начало и совпадающим с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ этих векторов изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, причем начало этого вектора находится в конце вектора $\boldsymbol{b}$, а конец — в конце вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 16).

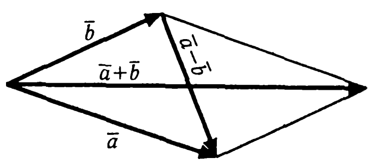

Рис. 16

Сумму любого числа векторов можно найти по правилу многоугольника (рис. 17).

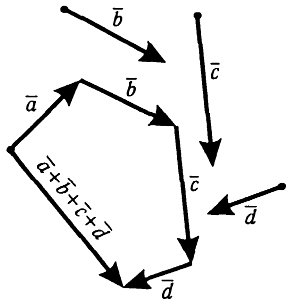

Рис. 17

Произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на скалярный множитель m определяется формулой

$$m\boldsymbol{a} = ma_x\boldsymbol{i} + ma_y\boldsymbol{j} + ma_z\boldsymbol{k}.$$

Напомним, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $m\boldsymbol{a}$ параллельны (коллинеарны) и направлены в одну и ту же сторону, если $m > 0$, и в противоположные стороны, если $m < 0$.

В частности, если $m = \frac{1}{a}$, то вектор $\frac{\boldsymbol{a}}{a}$ имеет длину, равную единице, и направление, совпадающее с направлением вектора $\boldsymbol{a}$. Этот вектор называют *единичным вектором* (*ортом*) вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначают $\boldsymbol{a}_0$. Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор $\boldsymbol{a}$, называют *нормированием* вектора $\boldsymbol{a}$.

Таким образом, $\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{a}$, или $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}_0$.

Вектор $\overline{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой $M(x; y; z)$, называют *радиус-вектором* точки M и обозначают $\boldsymbol{r}(M)$ или просто $\boldsymbol{r}$. Так как координаты радиус-вектора совпадают с координатами точки M, то его разложение по ортам имеет вид

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Вектор $\overline{AB}$, имеющий начало в точке $A(x_1; y_1; z_1)$ и конец — в точке $B(x_2; y_2; z_2)$, можно записать в виде $\overline{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, где $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-вектор точки B, а $\boldsymbol{r}_1$ — радиус-вектор точки A. Поэтому разложение вектора $\overline{AB}$ по ортам имеет вид

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.$$

Его длина равна расстоянию между точками A и B:

$$|\overline{AB}| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

а направление вектора $\overline{AB}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

240. В треугольнике ABC сторона AB точками M и N разделена на три равные части: $AM = MN = NB$. Найти вектор $\overline{CM}$, если $\overline{CA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{CB} = \boldsymbol{b}$.

❑ Имеем $\overline{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Следовательно, $\overline{AM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$. Так как $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, то $\overline{CM} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{3}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. ■

241. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причем точка M лежит на стороне BC. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{c}$.

❑ Имеем $\overline{BC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$. Согласно свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника, $BM : MC = b : c$, т.е. $BM : BC = b : (b + c)$. Отсюда получаем $\overline{BM} = \dfrac{b}{b+c}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})$. Так как $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то

$$\overline{AM} = \boldsymbol{b} + \frac{b}{b+c}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = \frac{1}{b+c}(b\boldsymbol{c} + c\boldsymbol{b}). \quad ■$$

242. Известно, что $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_3$ — радиус-векторы вершин треугольника ABC. Найти радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника.

❑ Имеем $\overline{BC} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2$; $\overline{BD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2)$ (D — середина стороны BC); $\overline{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$; $\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 - 2\boldsymbol{r}_1)$; $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ (M — точка пересечения медиан), поэтому $\overline{AM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 - 2\boldsymbol{r}_1)$. Итак,

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = \boldsymbol{r}_1 + \overline{AM} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 - 2\boldsymbol{r}_1) + \boldsymbol{r}_1, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{r} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3). \quad ■$$

243. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = 20\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j} - 60\boldsymbol{k}$ и его направляющие косинусы.

❑ Имеем

$$a = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 70;$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}, \quad \cos\gamma = -\frac{60}{70} = -\frac{6}{7}. \quad ■$$

244. Найти вектор $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, если $A(1; 3; 2)$ и $B(5; 8; -1)$.

❑ Проекциями вектора $\overline{AB}$ на оси координат являются разности соответственных координат точек B и A: $a_x = 5 - 1 = 4$, $a_y = 8 - 3 = 5$, $a_z = -1 - 2 = -3$. Следовательно, $\overline{AB} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$. ■

245. Нормировать вектор $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$.

❑ Найдем длину вектора $\boldsymbol{a}$:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = 13.$$

Искомый единичный вектор имеет вид

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}{13} = \frac{3}{13}\boldsymbol{i} + \frac{4}{13}\boldsymbol{j} - \frac{12}{13}\boldsymbol{k}. \quad ■$$

246. Дан треугольник ABC. На стороне BC взята точка M так, что $BM : MC = \lambda$. Найти $\overline{AM}$, если $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{c}$.

247. Дано: $\overline{AB} = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$, $\overline{BC} = -4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\overline{CD} = -5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

248. Найти проекции вектора a на оси координат, если $a = \overline{AB} + \overline{CD}$, $A(0;0;1)$, $B(3;2;1)$, $C(4;6;5)$ и $D(1;6;3)$.

249. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{i} + (m+1)\boldsymbol{j} + m(m+1)\boldsymbol{k}$.

250. Даны радиус-векторы вершин треугольника ABC: $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_B = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$. Показать, что треугольник ABC правильный.

251. Вычислить модуль вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} - \frac{1}{5}(4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$ и найти его направляющие косинусы.

252. Даны точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(3;-4;6)$. Найти длину и направление вектора $\overline{M_1M_2}$.

253. Дан вектор $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}$, если $b = a$, $b_y = a_y$ и $b_x = 0$.

254. Радиус-вектор точки M составляет с осью Oy угол $60°$, а с осью Oz — угол $45°$, его длина $r = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

255. Нормировать вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

§ 3

Скалярное и векторное произведения. Смешанное произведение

1. Скалярное произведение. *Скалярным произведением* двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения.

1° $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2$, или $\boldsymbol{a}^2 = a^2$

2° $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b} = 0$, если $\boldsymbol{a} = 0$, либо $\boldsymbol{b} = 0$, либо $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ (*ортогональность ненулевых векторов*).

3° $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (*переместительный закон*).

4° $\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c}$ (*распределительный закон*).

5° $(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b}) = m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (*сочетательный закон по отношению к скалярному множителю*).

Скалярные произведения ортов осей координат:

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \quad \boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k} = 0.$$

Пусть векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов находят по формуле

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

2. Векторное произведение. *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называют третий вектор $\boldsymbol{c}$, определяемый следующим образом (рис. 18):

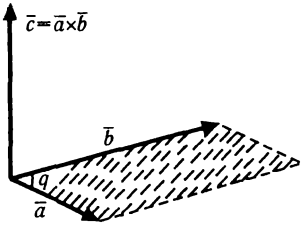

Рис. 18

1) модуль вектора c равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ($c = ab\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$);

2) вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ после приведения их к общему началу ориентированы по отношению друг к другу соответственно как орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (в правой системе координат они образуют так называемую *правую тройку* векторов).

Векторное произведение $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$ обозначают через $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Свойства векторного произведения.

1° $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, т.е. векторное произведение не обладает переместительный свойством.

2° $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = 0$, если $\boldsymbol{a} = 0$, либо $\boldsymbol{b} = 0$, либо $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ (*коллинеарность ненулевых векторов*).

3° $(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b}) = m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (*сочетательный закон по отношению к скалярному множителю*).

4° $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ (*распределительный закон*).

Векторные произведения координатных ортов осей координат:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0,$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i};\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}.$$

Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$ находят по формуле

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

3. Смешанное произведение. *Смешанным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ называют скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{c}$, т.е. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

Модуль смешанного произведения трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения.

1° *Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если:*

а) *хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю;*

б) *два из перемножаемых векторов коллинеарны;*

в) *три ненулевых вектора параллельны одной и той же плоскости (компланарность).*

2° *Смешанное произведение не изменится, если в нем поменять местами знаки векторного* $(\times)$ *и скалярного* $(\cdot)$ *умножения, т. е.*

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}).$$

В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ условимся записывать в виде $\boldsymbol{abc}$.

3° *Смешанное произведение не изменится, если переставить перемножаемые векторы в круговом порядке*:

$$\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab}.$$

4° *При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменит только знак*:

$$\boldsymbol{bac} = -\boldsymbol{abc}; \quad \boldsymbol{cba} = -\boldsymbol{abc}; \quad \boldsymbol{acb} = -\boldsymbol{abc}.$$

Пусть векторы заданы их разложениями по ортам: $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{c} = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$. Тогда справедлива формула

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств смешанного произведения трех векторов вытекают следующие утверждения:

необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов служит условие $\boldsymbol{abc} = 0$;

объем V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, и объем V_2 образуемой ими треугольной пирамиды находятся по формулам

$$V_1 = |\boldsymbol{abc}|, \quad V_2 = \frac{1}{6}V_1 = \frac{1}{6}|\boldsymbol{abc}|.$$

256. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

❑ Находим $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \cdot 2 + 4(-5) + 7 \quad 2 = 0$. Так как $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$, то $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. ■

257. Даны векторы $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

❑ Находим скалярное произведение этих векторов: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 4m + 3m - 28$; так как $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Отсюда $7m - 28 = 0$, т.е. $m = 4$. ■

258. Найти $(5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \cdot (2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$, если $a = 2$, $b = 3$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

❑ Имеем

$$(5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 10\boldsymbol{a}^2 - 5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{b}^2 = 10a^2 - 3b^2 = 40 - 27 = 13. \quad ■$$

259. Определить угол между векторами $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

❑ Так как $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi$, то $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}$. Имеем $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\cdot6+2\cdot4+$ $+3(-2) = 8$, $a = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $b = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}$. Значит,

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\ 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7} \quad \text{и } \varphi = \arccos\frac{2}{7}. \ ■$$

260. Найти векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} =$ $= \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

❑ Имеем

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

т.е. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$. ■

261. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

❑ Находим векторное произведение $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = 14\boldsymbol{i}-42\boldsymbol{j}-21\boldsymbol{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то

$$S = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{14^2+42^2+21^2} = 49\,(\text{кв. ед.}). \ ■$$

262. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$.

❑ Находим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = (2-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(4-1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$
$$\overline{AC} = (4-1)\boldsymbol{i}+(3-1)\boldsymbol{j}+(2-1)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, поэтому находим векторное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+16} = 2\sqrt{6}\,(\text{кв. ед.}) \ ■$$

263. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ и $3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$, $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 30°$

❏ Находим

$$(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \times (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 3\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + 9\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} =$$
$$= 3 \cdot 0 + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - 9\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + 3 \cdot 0 = -8\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

(поскольку $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = 0$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$). Итак,

$$S = 8|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 8 \cdot 1\ \ 1 \cdot \sin 30° = 4 \text{ (кв. ед.)}. \blacksquare$$

264. Найти смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

❏ Имеем

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 26 + 5 + 2 = 33. \ \blacksquare$$

265. Показать, что векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ компланарны.

❏ Находим смешанное произведение векторов:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 15 + 7 = 0.$$

Так как $\boldsymbol{abc} = 0$, то заданные векторы компланарны. ■

266. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;3;3)$, $C(4;5;4)$ и $D(5;5;6)$.

❏ Найдем векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A: $\overline{AB} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\overline{AC} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\overline{AD} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 7.$$

Так как объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, то $V = \frac{7}{6}$ (куб. ед.). ■

267. Вычислить $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$.

❏ Так как $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = 0$, то эти векторы компланарны (рис. 19). Следовательно, их смешанное произведение равно нулю: $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = 0$. ■

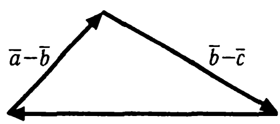

Рис. 19

268. Найти скалярное произведение векторов $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ и $5\boldsymbol{a} - 6\boldsymbol{b}$, если $a = 4$, $b = 6$ и угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 60°

269. Определить угол между векторами $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

270. При каком значении m векторы $\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ перпендикулярны?

271. Найти скалярное произведение векторов $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$ и $5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}$, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, а $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = \angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 60^\circ$

272. Найти работу силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $\boldsymbol{s}$, если $F = 2$, $s = 5$, $\varphi = \angle(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}) = 30^\circ$

273. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

274. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

275. Даны векторы $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Найти $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ и $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

276. Даны радиус-векторы трех последовательных вершин параллелограмма $ABCD$: $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_C = 7\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}$. Найти радиус-вектор четвертой вершины D.

277. Показать, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не могут быть перпендикулярными, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i} > 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j} > 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} > 0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{i} < 0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{j} < 0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k} < 0$.

278. Показать, что векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+(m+1)\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+m\boldsymbol{k}$ ни при каком значении m не могут быть компланарными.

279. Могут ли отличные от нуля числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 удовлетворять уравнениям

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{aligned} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= 0, \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 &= 0, \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 &= 0? \end{aligned}$$

280. Найти векторное произведение векторов $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

281. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2;2;2)$, $B(4;0;3)$ и $C(0;1;0)$.

282. Найти смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

283. Показать, что векторы $\boldsymbol{a} = 7\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ компланарны.

284. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$ и $D(3;7;2)$. Найти длину высоты пирамиды, опущенной на грань BCD.

285. Показать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ и $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1

Плоскость и прямая

1. Плоскость. 1) *Уравнение плоскости в векторной форме* имеет вид

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = p.$$

Здесь $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ — радиус-вектор текущей точки $M(x; y; z)$ плоскости; $\boldsymbol{n} = \cos\alpha \quad \boldsymbol{i} + \cos\beta \quad \boldsymbol{j} + \cos\gamma \quad \boldsymbol{k}$ — единичный вектор, имеющий направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат; α, β, γ — углы, образуемые этим перпендикуляром с осями координат Ox, Oy, Oz; p — длина этого перпендикуляра.

При переходе к координатам это уравнение примет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{1}$$

(*нормальное уравнение плоскости*).

2) Уравнение всякой плоскости можно записать также в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (*общее уравнение*). Здесь A, B, C можно рассматривать как координаты некоторого вектора $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$, перпендикулярного плоскости (*нормального вектора* плоскости). Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду надо все члены уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{N} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{3}$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

3) Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

$A = 0$; параллельна оси Ox;
$B = 0$; параллельна оси Oy;
$C = 0$; параллельна оси Oz;
$D = 0$; проходит через начало координат;
$A = B = 0$; перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);
$A = C = 0$; перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);
$B = C = 0$; перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);
$A = D = 0$; проходит через ось Ox;
$B = D = 0$; проходит через ось Oy;
$C = D = 0$; проходит через ось Oz;
$A = B = D = 0$; совпадает с плоскостью xOy $(z = 0)$;
$A = C = D = 0$; совпадает с плоскостью xOz $(y = 0)$;
$B = C = D = 0$; совпадает с плоскостью yOz $(x = 0)$.

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D \neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{4}$$

(здесь $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$). Это уравнение называют *уравнением плоскости в отрезках*: в нем a, b и c — соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz.

4) Угол φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{5}$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{6}$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{7}$$

5) Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{8}$$

Оно равно взятому по абсолютной величине результату подстановки координат точки в нормальное уравнение плоскости; знак результата этой подстановки характеризует взаимное расположение точки и начала координат относительно данной плоскости: «плюс», если точка M_0 и начало координат расположены по разные стороны от плоскости, и «минус», если они расположены по одну сторону от плоскости.

6) *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *и перпендикулярной вектору* $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9}$$

При произвольных значениях A, B и C последнее уравнение определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Поэтому его часто называют *уравнением связки плоскостей*.

7) Уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{10}$$

при произвольном значении λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \ (\text{А}) \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ \ (\text{Б}),$$

т.е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую (в силу чего такое уравнение часто называют *уравнением пучка плоскостей*). Если плоскости, определяемые уравнениями (А) и (Б), параллельны, то пучок плоскостей превращается в совокупность плоскостей, параллельных этим плоскостям.

8) Пусть даны три точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$, $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, где $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_3 = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$. Тогда если $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ — радиус-вектор текущей точки M искомой плоскости, то *уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки*, имеет вид

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1) = 0,$$

или в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

286. Уравнение плоскости $2x + 3y - 6z + 21 = 0$ привести к нормальному виду.

❑ Находим нормирующий множитель (который берем со знаком «минус», поскольку $D = 21 > 0$): $\mu = -\dfrac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = -\dfrac{1}{7}$. Итак, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид $-\dfrac{2}{7}x - \dfrac{3}{7}y + \dfrac{6}{7}z - 3 = 0$. ■

287. Определить расстояние от точки $M_0(3;5;-8)$ до плоскости $6x - 3y + 2z - 28 = 0$.

❑ Используя формулу (8) расстояния от точки до плоскости, находим

$$d = \frac{|6\cdot 3 - 3\cdot 5 + 2\cdot(-8) - 28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{41}{7}.$$

Так как результат подстановки координат точки M_0 в нормальное уравнение плоскости отрицателен, то M_0 и начало координат лежат по одну сторону от заданной плоскости. ■

288. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;5)$ и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{N} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

❑ Воспользуемся уравнением (9) плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору:

$$4(x-2) + 3(y-3) + 2(z-5) = 0, \quad \text{т. е.}\ 4x + 3y + 2z - 27 = 0. \ ■$$

289. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

❑ Запишем уравнение (9) связки плоскостей, проходящих через данную точку:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\boldsymbol{n} = \{5;-3;2\}$ данной плоскости; следовательно, $A = 5$, $B = -3$, $C = 2$ и уравнение искомой плоскости примет вид

$$5(x-2) - 3(y-3) + 2(z+1) = 0, \quad \text{т. е.}\ 5x - 3y + 2z + 1 = 0. \ ■$$

290. Из точки $P(2;3;-5)$ на координатные оси опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

❑ Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, служат следующие точки: $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$. Используя формулу (11), запишем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или}\ 15x + 10y - 6z - 60 = 0. \ ■$$

291. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5;4;3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

❑ Используя уравнение (4) плоскости в отрезках, в котором $a = b = c$, имеем $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$. Координаты точки A удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство $\frac{5}{a} + \frac{4}{a} + \frac{3}{a} = 1$, откуда $a = 12$. Итак, получаем уравнение $x + y + z - 12 = 0$. ■

292. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку $M(3;2;1)$.

❑ Воспользуемся уравнением (10) пучка плоскостей:

$$x+y+5z-1+\lambda(2x+3y-z+2)=0.$$

Значение λ найдем из условия, что координаты точки M удовлетворяют этому уравнению: $3+2+5-1+\lambda(6+6-1+2)=9+13\lambda=0$, откуда $\lambda=-\frac{9}{13}$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$x+y+5z-1-\frac{9}{13}(2x+3y-z+2)=0, \quad \text{или } 5x+14y-74z+31=0. \ ■$$

293. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+3y+5z-4=0$ и $x-y-2z+7=0$ и параллельной оси Oy.

❑ Запишем уравнение пучка плоскостей:

$$x+3y+5z-4+\lambda(x-y-2z+7)=0;$$
$$(1+\lambda)x+(3-\lambda)y+(5-2\lambda)z+(7\lambda-4)=0.$$

Так как искомая плоскость параллельна оси ординат, то коэффициент при y должен быть равен нулю: $3-\lambda=0$, т.е. $\lambda=3$. Подставив найденное значение λ в уравнение пучка, получаем $4x-z+17=0$. ■

294. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

❑ В качестве нормального вектора $\boldsymbol{N}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору $\overline{AB}=\{1;3;-5\}$ и нормальному вектору $\boldsymbol{n}=\{1;1;2\}$ данной плоскости. Поэтому за $\boldsymbol{N}$ примем векторное произведение $\overline{AB}$ и $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{N}=\overline{AB}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=11\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

Остается воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через данную точку (например, A) перпендикулярно заданному вектору $\boldsymbol{N}=\{11;-7;-2\}$:

$$11(x-2)-7(y+1)-2(z-4)=0, \quad \text{или } 11x-7y-2z-21=0. \ ■$$

295. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x-2y+2z+7=0$ и $5x-4y+3z+1=0$.

❑ Очевидно, что в качестве нормального вектора $\boldsymbol{N}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1=\{3;-2;2\}$ и $\boldsymbol{n}_2=\{5;-4;3\}$ данных плоскостей:

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M(3; -1; -5)$ перпендикулярно вектору $N = \{2; 1; -2\}$, получаем

$$2(x-3) + (y+1) - 2(z+5) = 0, \quad \text{или } 2x + y - 2z - 15 = 0. \quad \blacksquare$$

296. Привести к нормальному виду уравнения плоскостей: 1) $x+y-z-2 = 0$; 2) $3x + 5y - 4z + 7 = 0$.

297. Найти расстояние от точки $M_0(1; 3; -2)$ до плоскости $2x - 3y - 4z + 12 = 0$. Как расположена точка M_0 относительно плоскости?

298. Найти длину перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(2; 3; -5)$ на плоскость $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.

299. Найти уравнение плоскости, проходящей: 1) через точку $M(-2; 3; 4)$, если она отсекает на осях координат равные отрезки; 2) через точку $N(2; -1; 4)$, если она отсекает на оси Oz отрезок вдвое больший, чем на осях Ox и Oy.

300. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

301. На плоскости $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ найти такую точку M, чтобы прямая OM составляла с осями координат равные углы.

302. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4; -3; 12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

303. Найти уравнения плоскостей, проходящих через оси координат перпендикулярно плоскости $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.

304. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $P(1; -4; 2)$ и $Q(7; 1; -5)$.

305. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $P(0; 2; 0)$ и $Q(2; 0; 0)$ и образующей угол 60° с плоскостью $x = 0$.

306. Вычислить угол между плоскостями, проходящими через точку $M(1; -1; -1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая — ось Oz.

307. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $P(4; -2; 1)$ и $Q(2; 4; -3)$.

308. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $2x + 2y + z - 7 = 0$, $2x - y + 3z - 3 = 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ и через точки $M(0; 3; 0)$ и $N(1; 1; 1)$.

309. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 5y + 9z - 13 = 0$ и $3x - y - 5z + 1 = 0$ и через точку $M(0; 2; 1)$.

310. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 5 = 0$ и $3x - 2y - z + 1 = 0$ и отсекающей равные отрезки на осях Ox и Oz.

311. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $(1 + \sqrt{2})x + 2y + 2z - 4 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$ и образующей с координатной плоскостью xOy угол 60°

312. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y - 12z - 3 = 0$ и $3x + y - 7z - 2 = 0$ и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

313. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ и через начало координат.

314. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A_1(0; 2; 1)$ и параллельной векторам $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.

315. Какой угол образует с плоскостью $x + y + 2z - 4 = 0$ вектор $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$?

2. Прямая. 1) Прямую можно задать уравнениями двух плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

пересекающихся по этой прямой.

2) Исключив поочередно x и y из предыдущих уравнений, получим уравнения вида $x = az + c$, $y = bz + d$. Здесь прямая определена двумя плоскостями, проецирующими ее на плоскости xOy и yOz.

3) *Уравнения прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1}$$

4) *Канонические уравнения*

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \tag{2}$$

определяют прямую, проходящую через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ и параллельную вектору $\boldsymbol{s} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$. В частности, эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

где α, β и γ — углы, образуемые прямой с осями координат. Направляющие косинусы прямой находят по формулам

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{3}$$

5) От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к *параметрическим уравнениям*:

$$\begin{cases} x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases} \tag{4}$$

6) Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$, определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}};\tag{5}$$

условие параллельности двух прямых:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};\tag{6}$$

условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.\tag{7}$$

7) Необходимое и достаточное условие нахождения двух прямых, заданных их каноническими уравнениями, в одной плоскости (*условие компланарности двух прямых*):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.\tag{8}$$

Если величины l_1, m_1, n_1 не пропорциональны величинам l_2, m_2, n_2, то указанное соотношение является необходимым и достаточным условием пересечения двух прямых в пространстве.

8) Угол между прямой $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ и плоскостью $Ax+$ $+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}};\tag{9}$$

условие параллельности прямой и плоскости:

$$Al+Bm+Cn=0;\tag{10}$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.\tag{11}$$

9) Чтобы найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$, нужно решить совместно их уравнения, для чего следует воспользоваться параметрическими уравнениями прямой $x=lt+x_0$, $y=mt+y_0$, $z=nt+z_0$. При этом:

а) если $Al+Bm+Cn\neq 0$, то прямая пересекает плоскость;

б) если $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая параллельна плоскости;

в) если $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

316. Уравнения прямой, заданной как линия пересечения плоскостей $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $5x + 4y - z - 7 = 0$, привести к каноническому виду.

❑ I способ. Исключив сначала y, а затем z, имеем

$$13x + 11z - 11 = 0 \quad \text{и} \quad 17x + 11y - 22 = 0.$$

Разрешив каждое из уравнений относительно x, получим

$$x = \frac{11(y-2)}{-17} = \frac{11(z-1)}{-13}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

II способ. Найдем вектор $\boldsymbol{s} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\boldsymbol{N}_1 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{N}_2 = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ заданных плоскостей, то за $\boldsymbol{s}$ можно принять векторное произведение векторов $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j} + 13\boldsymbol{k}.$$

Таким образом, $l = -11$, $m = 17$, $n = 13$.

В качестве точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью yOz. Так как при этом $x_1 = 0$, то координаты y_1 и z_1 этой точки определятся из системы уравнений заданных плоскостей, если в них положить $x = 0$:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим $y_1 = 2$, $z_1 = 1$. Итак, искомая прямая определяется уравнениями $\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$. ■

317. Построить прямую

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 9 = 0, \\ 4x + 2y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

❑ Искомую прямую можно построить как линию пересечения плоскостей. Для этого запишем уравнения этих плоскостей в отрезках на осях:

$$\frac{x}{4{,}5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1.$$

Построив данные плоскости, получим искомую прямую (рис. 20). ■

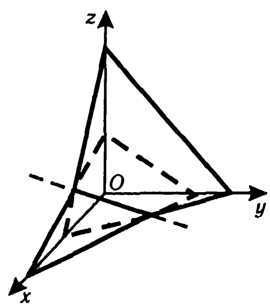

Рис. 20

318. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

❑ Используя условие (11) перпендикулярности прямой и плоскости и полагая $A=l$, $B=m$, $C=n$, $D=0$, составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой. Это уравнение имеет вид $2x+3y+z=0$.

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Параметрические уравнения прямой запишутся так: $x=2t+2$, $y=3t+1$, $z=t+3$. Для определения t имеем уравнение $2(2t+2)+3(3t+1)+t+3=0$, откуда $t=-\frac{5}{7}$. Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой, находим координаты точки пересечения: $x=\frac{4}{7}$, $y=-\frac{8}{7}$, $z=\frac{16}{7}$, т.е. $M\left(\frac{4}{7};-\frac{8}{7};\frac{16}{7}\right)$.

Остается составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку M; используя соотношения (1), получим

$$\frac{x}{\frac{4}{7}}=\frac{y}{-\frac{8}{7}}=\frac{z}{\frac{16}{7}},\quad \text{или}\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{4}.\ ■$$

319. В уравнениях прямой $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{n}$ определить параметр n так, чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

❑ Для нахождения параметра n используем условие (8) пересечения двух прямых; полагая $x_1=-1$, $y_1=-5$, $z_1=0$, $x_2=0$, $y_2=0$, $z_2=0$, $l_1=3$, $m_1=2$, $n_1=1$, $l_2=2$, $m_2=-3$, $n_2=n$, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -3 & n\end{vmatrix}=0,\quad \text{или}\ 2n+10+3-15n=0,\quad \text{т. е.}\ n=1.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$ и $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z}{1}$, выразим из первых уравнений x и y через z: $x=2z$, $y=-3z$. Подставляя эти значения в равенство $\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}$, имеем $\frac{2z+1}{3}=\frac{-3z+5}{2}$, откуда $z=1$. Зная z, находим $x=2z=2$, $y=-3z=-3$. Следовательно, $M(2;-3;1)$ — искомая точка. ■

320. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;2;-1)$ и пересекающей ось Ox под прямым углом.

❑ Так как прямая перпендикулярна оси Ox и пересекает ее, то она проходит через точку $N(3;0;0)$. Составив уравнения прямой, проходящей через точки M и N, получим $\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$. ■

321. Дана плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$ и вне ее точка $M(1; 1; 1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной плоскости.

❑ Запишем уравнения любой прямой, проходящей через точку M: $\frac{x-1}{l} = \frac{y-1}{m} = \frac{z-1}{n}$. Координаты $\{l; m; n\}$ направляющего вектора прямой, перпендикулярной плоскости, можно заменить координатами нормального вектора $\boldsymbol{n} = \{1; 1; -2\}$ данной плоскости. Тогда уравнения этой прямой запишутся в виде $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

Чтобы найти проекцию точки M на данную плоскость, нужно решить систему

$$x + y - 2z - 6 = 0, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Перепишем уравнения прямой в виде $x = t + 1$, $y = t + 1$, $z = -2t + 1$. Подставив эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости, получим $t = 1$, откуда $x = 2$, $y = 2$, $z = -1$.

Координаты симметричной точки N найдем, используя формулы $\bar{x} = \frac{x_M + x_N}{2}$, $\bar{y} = \frac{y_M + y_N}{2}$, $\bar{z} = \frac{z_M + z_N}{2}$, т.е.

$$2 = \frac{1 + x_N}{2}, \quad 2 = \frac{1 + y_N}{2}, \quad -1 = \frac{1 + z_N}{2},$$

откуда $x_N = 3$, $y_N = 3$, $z_N = -3$. Итак, $N = (3; 3; -3)$ — искомая точка. ■

322. Дана прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и вне ее точка $M(1; 1; 1)$. Найти точку N, симметричную точке M относительно данной прямой.

❑ Запишем уравнение плоскости, проецирующей точку M на данную прямую:

$$A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0.$$

Координаты нормального вектора $\{A; B; C\}$ плоскости, перпендикулярной прямой, заменим координатами направляющего вектора $\{2; 3; -1\}$ данной прямой; тогда получим

$$2(x-1) + 3(y-1) - (z-1) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + 3y - z - 4 = 0.$$

Найдем проекцию точки M на прямую, для чего решим систему уравнений

$$2x + 3y - z - 4 = 0, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

Параметрические уравнения данной прямой имеют вид $x = 2t + 1$, $y = 3t$, $z = -t - 1$. Подставив x, y и z в уравнение плоскости, найдем $t = \frac{1}{14}$. Отсюда $x = \frac{8}{7}$, $y = \frac{3}{14}$, $z = -\frac{15}{14}$

Тогда координаты симметричной точки можно найти, используя формулы для координат середины отрезка, т.е. $\frac{8}{7} = \frac{1+x_N}{2}$, $\frac{3}{14} = \frac{1+y_N}{2}$, $-\frac{15}{14} = \frac{1+z_N}{2}$, откуда $x_N = \frac{9}{7}$, $y_N = -\frac{4}{7}$, $z_N = -\frac{22}{7}$. Итак, $N\left(\frac{9}{7}; -\frac{4}{7}; -\frac{22}{7}\right)$ — искомая точка. ■

323. Через прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

❑ Запишем уравнения первой из заданных прямых с помощью уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости xOy и yOz:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}, \quad \text{или } x + 2y - 1 = 0;$$

$$\frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}, \quad \text{или } 3y + z - 5 = 0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$x + 2y - 1 + \lambda(3y + z - 5) = 0, \quad \text{или } x + (2 + 3\lambda)y + \lambda z - (1 + 5\lambda) = 0.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости, определим λ так, чтобы соответствующая плоскость пучка была параллельна второй из заданных прямых. Имеем $-1 \quad 1 + 2(2 + 3\lambda) - 3\lambda = 0$, или $3\lambda + 3 = 0$, откуда $\lambda = -1$. Итак, искомая плоскость определяется уравнением $x - y - z + 4 = 0$. ■

324. Найти уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ на плоскость $x + y + 2z - 5 = 0$.

❑ Запишем уравнения заданной прямой в виде уравнений двух плоскостей, проецирующих ее соответственно на плоскости xOy и xOz:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2}, \quad \text{или } 2x - y - 3 = 0;$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{z}{3}, \quad \text{или } 3x - z - 3 = 0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, имеет вид

$$2x - y - 3 + \lambda(3x - z - 3) = 0, \quad \text{или } (2 + 3\lambda)x - y - \lambda z - 3(1 + \lambda) = 0.$$

Используя условие перпендикулярности плоскостей, выберем из этого пучка плоскость, проецирующую данную прямую на заданную плоскость. Имеем $1 \cdot (2 + 3\lambda) + 1(-1) + 2(-\lambda) = 0$, или $\lambda + 1 = 0$, т.е. $\lambda = -1$. Отсюда получаем уравнение проецирующей плоскости:

$$2x - y - 3 + (-1) \cdot (3x - z - 3) = 0, \quad \text{или } x + y - z = 0.$$

Искомую проекцию можно определить как линию пересечения двух плоскостей — заданной и проецирующей:

$$\begin{cases} x + y + 2z - 5 = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Приведя эти уравнения прямой к каноническому виду, окончательно получим

$$\frac{x}{1} = \frac{y - \frac{5}{3}}{-1} = \frac{z - \frac{5}{3}}{0}. \quad \blacksquare$$

325. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(5; 3; 4)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{s} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$.

❑ Воспользуемся каноническими уравнениями прямой. Полагая в равенствах (2) $l = 2$, $m = 5$, $n = -8$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $z_1 = 4$, получаем

$$\frac{x - 5}{2} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z - 4}{-8}. \quad \blacksquare$$

326. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ и перпендикулярной векторам $\boldsymbol{s}_1 = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{s}_2 = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

❑ Прямая параллельна вектору

$$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k},$$

поэтому ее уравнения имеют вид

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{-7}. \quad \blacksquare$$

327. Найти уравнения проекций прямой

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

328. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$

329. Вычислить углы, образуемые с осями координат прямой

$$\begin{cases} x - 2y - 5 - 0, \\ x - 3z + 8 = 0. \end{cases}$$

330. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(1; -2; 3)$ и образующей с осями Ox и Oy углы 45° и 60° соответственно.

331. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $N(5;-1;-3)$ и параллельной прямой
$$\begin{cases} 2x+3y+z-6=0, \\ 4x-5y-z+2=0. \end{cases}$$

332. Найти точку пересечения прямых
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

333. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(3;0;-1)$, $B(1;2;-4)$ и $C(0;7;-2)$. Найти уравнения сторон AD и CD.

334. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $M(2;-5;1)$ и $N(-1;1;2)$.

335. Вычислить расстояние между параллельными прямыми
$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

336. Даны точки $A(-1;2;3)$ и $B(2;-3;1)$. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;-1;2)$ и параллельной вектору $\overline{AB}$.

337. Найти угол между прямыми
$$\begin{cases} 4x-y-z+12=0, \\ y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x-2y+16=0, \\ 3x-z=0. \end{cases}$$

338. В плоскости yOz найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную прямой
$$\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2z=-2. \end{cases}$$

339. Даны две вершины параллелограмма $ABCD$: $C(-2;3;-5)$ и $D(0;4;-7)$ и точка пересечения диагоналей $M(1;2;-3{,}5)$. Найти уравнения стороны AB.

340. Треугольник ABC образован пересечением плоскости $x+2y+4z-8=0$ с координатными осями. Найти уравнения средней линии треугольника, параллельной плоскости xOy.

341. Даны точки $A(1;1;1)$, $B(2;3;3)$ и $C(3;3;2)$. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

342. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(0;2;1)$ и образующей равные углы с векторами $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{k}$.

343. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ и перпендикулярной плоскости $3x+y-z+2=0$.

344. Найти уравнения проекции прямой $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ на плоскость $2x+3y-z-5=0$.

§ 2

Поверхности второго порядка

1. Сфера. В декартовой системе координат уравнение сферы с центром $C(a; b; c)$ и радиусом r записывается в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \tag{1}$$

Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{2}$$

345. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0.$$

❑ Приведем уравнение сферы к каноническому виду (1), для чего дополним до полных квадратов члены, содержащие x, y и z, т.е. перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+(y^2+2y+1)-1+z^2+1=0,$$

или

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+z^2=\frac{1}{4}.$$

Значит, центр сферы — точка $C\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$, а ее радиус $r=\frac{1}{2}$. ■

346. Составить уравнение сферы, проходящей через точки $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$ и $C(2; 2; 3)$, если ее центр находится в плоскости xOy.

❑ Так как точки A, B и C принадлежат сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, центр которой находится в плоскости xOy (откуда $c=0$), то их координаты должны обращать искомое уравнение в тождество:

$$(1-a)^2+(2-b)^2+(-4)^2=r^2, \quad (1-a)^2+(-3-b)^2+1^2=r^2,$$
$$(2-a)^2+(2-b)^2+3^2=r^2$$

Отсюда получим уравнения

$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(1-a)^2+(-3-b)^2+1,$$
$$(1-a)^2+(2-b)^2+16=(2-a)^2+(2-b)^2+9,$$

или

$$(2-b)^2-(-3-b)^2=-15, \quad \text{т.е. } 10b=10;$$
$$(1-a)^2-(2-a)^2=-7, \quad \text{т.е. } 2a=-4.$$

Итак, $a = -2$, $b = 1$. Следовательно, центр сферы — точка $C(-2; 1; 0)$. Далее находим

$$r^2 = (1-a)^2 + (2-b)^2 + 16 = (1+2)^2 + (2-1)^2 + 16 = 26.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$. ■

347. Найти координаты центра и радиус окружности

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$$

❑ Из центра сферы $C(3; -2; 1)$ опустим на плоскость $2x-2y-z+9 = 0$ перпендикуляр, уравнения которого можно записать в виде

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{-1} \qquad (*)$$

(в качестве направляющего вектора этого перпендикуляра можно взять нормальный вектор заданной плоскости).

Найдем координаты точки пересечения прямой $(*)$ с плоскостью $2x - 2y - z + 9 = 0$. Эта точка и есть центр окружности, являющейся сечением сферы данной плоскостью.

Записав уравнения прямой в параметрическом виде $x = 2t+3$, $y = -2t-2$, $z = -t+1$ и подставив x, y, z в уравнение плоскости, получим

$$2(2t+3) - 2(-2t-2) - (-t+1) + 9 = 0, \quad \text{т.е. } t = -2.$$

Следовательно, $x = 2(-2)+3 = -1$, $y = -2(-2)-2 = 2$, $z = -(-2)+1 = 3$, т.е. центр окружности находится в точке $D(-1; 2; 3)$.

Найдем теперь расстояние от центра сферы $C(3; -2; 1)$ до плоскости $2x - 2y - z + 9 = 0$:

$$d = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 + 9}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = 6.$$

Радиус окружности r определим из равенства $r^2 = R^2 - d^2$, где R — радиус сферы; таким образом, $r^2 = 100 - 36 = 64$, т.е. $r = 8$. ■

348. Определить координаты центров и радиусы сфер, заданных уравнениями:

1) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$;
3) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 3z + 2 = 0$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$;
5) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$.

349. Как расположена точка $M(1; -1; 3)$ относительно сфер:

1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 19$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 2z = 0$?

350. Составить уравнение сферы, если точки $M(4; -1; -3)$ и $N(0; 3; -1)$ являются концами одного из ее диаметров.

351. Составить уравнения окружности, образующейся в сечении сферы $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25$ координатной плоскостью $z=0$.

352. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+z^2=100$, $2x+2y-z=18$.

2. Цилиндрические поверхности и конус второго порядка. Уравнение вида $F(x,y)=0$ в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oz. Аналогично уравнение $F(x,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, а уравнение $F(y,z)=0$ — цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox.

Канонические уравнения цилиндров второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — \textit{эллиптический цилиндр},}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — \textit{гиперболический цилиндр},}$$

$$y^2=2px \text{ — \textit{параболический цилиндр}.}$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых этими уравнениями, параллельны оси Oz, а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости xOy.

Следует иметь в виду, что кривую в пространстве можно задать либо параметрически, либо в виде линии пересечения двух поверхностей. Например, уравнения направляющей эллиптического цилиндра, т.е. уравнения эллипса в плоскости xOy, имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0.$$

Уравнение *конуса второго порядка* с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz, записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Аналогично уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси Oy и Ox.

353. Какие поверхности определяют в пространстве уравнения: 1) $x^2=4y$; 2) $z^2=xz$?

❑ 1) Уравнение $x^2=4y$ определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Направляющей цилиндрической поверхности является парабола $x^2=4y$, $z=0$.

2) Уравнение $z^2 = xz$ можно представить в виде $z(z - x)$; оно распадается на два уравнения: $z = 0$ и $z = x$, т.е. определяет две плоскости — плоскость xOy и биссектральную плоскость $z = x$, проходящую через ось Oy. ■

354. По какой линии конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ пересекается с плоскостью $y = 2$?

❑ Исключив из данных уравнений y, получим $x^2 + 4 - 2z^2 = 0$, или $\frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{4} = 1$. Следовательно, искомой линией пересечения является гипербола, лежащая в плоскости $y = 2$; ее действительная ось параллельна оси Oz, а мнимая — оси Ox. ■

355. Составить уравнение конической поверхности, вершиной которой служит точка $M(0; 0; 1)$, а направляющей — эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 3$.

❑ Составим уравнение образующей AM, где $A(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на эллипсе. Уравнения этой образующей имеют вид $\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z-1}{z_0-1}$. Так как точка A лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнениям эллипса, т.е. $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1$, $z_0 = 3$.

Исключив теперь x_0, y_0 и z_0 из системы

$$\frac{x}{x_0} = \frac{z-1}{z_0-1}, \quad \frac{y}{y_0} = \frac{z-1}{z_0-1}, \quad \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1, \quad z_0 = 3,$$

получим искомое уравнение конуса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{(z-1)^2}{4} = 0$. ■

356. Установить, какие поверхности определяют заданные уравнения, и построить эти поверхности:

1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $x^2 - y^2 = 1$; 4) $y^2 = 2x$;
5) $z^2 = y$; 6) $z + x^2 = 0$; 7) $x^2 + y^2 = 2y$; 8) $x^2 + y^2 = 0$;
9) $x^2 - z^2 = 0$; 10) $y^2 = xy$.

357. Составить уравнения линий пересечения конуса $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ с плоскостями: 1) $y = 3$; 2) $z = 1$; 3) $x = 0$.

358. Составить уравнения конусов с вершинами в начале координат, направляющие которых заданы уравнениями: 1) $x = a$, $y^2 + z^2 = b^2$; 2) $y = b$, $x^2 + z^2 = a^2$; 3) $z = c$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Поверхности вращения. Поверхности второго порядка. Если лежащая в плоскости yOz кривая $F(y, z) = 0$, $x = 0$ вращается вокруг оси Oz, то уравнение образуемой ею поверхности вращения имеет вид

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Аналогично уравнение $F(x, \sqrt{y^2+z^2}) = 0$ определяет поверхность, образуемую вращением вокруг оси Ox кривой $F(x, y) = 0$, $z = 0$; уравнение $F(\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$ — поверхность, образуемую вращением той же кривой вокруг оси Oy.

Приведем уравнения поверхностей вращения второго порядка, образуемых вращением эллипса, гиперболы и параболы вокруг их осей симметрии.

Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

осью вращения служит ось Oz; эллипсоид сжат при $a > c$ и вытянут при $a < c$ (при $a = c$ он превращается в сферу).

Однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

осью вращения является ось Oz (служащая мнимой осью гиперболы, вращением которой образована эта поверхность).

Двуполостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$$

осью вращения является ось Oz (служащая действительной осью гиперболы, вращением которой образована эта поверхность).

Параболоид вращения

$$x^2 + y^2 = 2pz;$$

осью вращения служит ось Oz.

Поверхности вращения второго порядка являются частным случаем поверхностей второго порядка общего вида, канонические уравнения которых таковы:

Эллипсоид (трехосный)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Кроме этих четырех поверхностей второго порядка, трех цилиндров второго порядка (эллиптического, гиперболического и параболического) и конуса второго порядка, существует еще одна поверхность второго порядка — ***гиперболический параболоид***, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p>0,\ q>0).$$

Таким образом, всего существуют девять различных поверхностей второго порядка.

359. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $x+2y=4$, $z=0$ вокруг оси Ox.

❑ Поверхностью вращения является конус с вершиной в точке $M(4;0;0)$. Пусть произвольная точка A искомой поверхности имеет координаты X; Y; Z; ей соответствует на данной прямой точка $B(x;y;0)$. Точки A и B лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси вращения Ox. Тогда $X=x$, $Y^2+Z^2=y^2$

Подставив выражения для x и y в уравнение данной прямой, получим уравнения искомой поверхности вращения: $X^2+2\sqrt{Y^2+Z^2}=4$, или $4(Y^2+Z^2)-(X-4)^2=0$, т. е.

$$4Y^2+4Z^2-(X-4)^2=0. \quad ■$$

360. Какую поверхность определяет уравнение $x^2=yz$?

❑ Выполним поворот координатных осей вокруг оси Ox на угол $\alpha=45°$ (от оси Oy к оси Oz против часовой стрелки). Формулы преобразования координат имеют вид $x=x'$, $y=y'\cos\alpha-z'\sin\alpha$, $z=y'\sin\alpha+z'\cos\alpha$. Так как $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $x=x'$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(y'-z')$, $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(y'+z')$.

Подставив эти выражения в уравнение поверхности, получим

$$x'^2=\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{2}, \quad \text{или} \quad x'^2-\frac{y'^2}{2}+\frac{z'^2}{2}=0$$

(это уравнение определяет конус с вершиной в начале координат, осью которого является ось ординат). ■

361. Найти уравнение поверхности, полученной при вращении прямой $2y+z-2=0$, $x=0$ вокруг оси Oz.

362. Найти уравнения линий пересечения поверхности $z=x^2-y^2$ плоскостями $z=1$, $y=1$, $x=1$, $z=-1$.

363. Какие поверхности определяют уравнения: 1) $z=xy$, 2) $z^2=xy$?

❶ Выполнить поворот координатных осей вокруг оси Oz на угол 45°

364. Найти уравнение эллиптического параболоида с вершиной в начале координат, осью которого является ось Oz, если точки $M(-1; -2; 2)$ и $N(1; 1; 1)$ лежат на его поверхности.

365. Составить уравнение эллипсоида, осями симметрии которого служат оси координат, если точки $A(3; 0; 0)$, $B\left(-2; \frac{5}{3}; 0\right)$ и $C\left(0; -1; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ лежат на его поверхности.

366. Найти уравнения линии пересечения поверхностей $z = 2 - x^2 - y^2$ и $z = x^2 + y^2$.

367. Исследовать, какие поверхности определяет уравнение $z^2 + x^2 = m(z^2 + y^2)$ при: 1) $m = 0$; 2) $0 < m < 1$; 3) $m > 1$; 4) $m < 0$; 5) $m = 1$.

4. Общее уравнение поверхности второго порядка. Общее уравнение второй степени относительно x, y и z имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

Это уравнение может определять сферу, эллипсоид, однополостный или двуполостный гиперболоид, эллиптический или гиперболический параболоид, цилиндрическую или коническую поверхность второго порядка. Оно может также определять совокупность двух плоскостей, точку, прямую или даже не иметь геометрического смысла (определять «мнимую» поверхность).

При $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$ общее уравнение принимает вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0.$$

В этом случае уравнение легко упрощается с помощью параллельного переноса осей координат, что позволяет сразу установить его геометрический смысл.

368. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0?$$

❑ Данное уравнение можно записать в виде

$$(x + 2y + 3z)^2 - 4(x + 2y + 3z) + 3 = 0.$$

Разложим на множители левую часть уравнения:

$$(x + 2y + 3z - 1)(x + 2y + 3z - 3) = 0.$$

Таким образом, уравнение определяет совокупность двух плоскостей

$$x + 2y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y + 3z - 3 = 0. \quad ■$$

369. Каков геометрический смысл уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy = 0?$$

❑ Умножив обе части уравнения на 2, перепишем его в виде

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz - 2xz - 2xy = 0.$$

или

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты только тех точек, для которых выполняются равенства $x=y$, $y=z$, $x=z$. Таким образом, уравнение определяет прямую $x=y=z$. ■

370. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

❑ Сгруппируем члены, содержащие x и y: $(x^2-4x)-(y^2-8y)=2z$. Дополнив до полных квадратов выражения в скобках, имеем

$$(x^2-4x+4)-(y^2-8y+16)=2z+4-16, \quad \text{или} \quad (x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6).$$

Выполним параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(2;4;6)$. Тогда $x=x'+2$, $y=y'+4$, $z=z'+6$. В результате получаем уравнение $x'^2-y'^2=2z'$, определяющее гиперболический параболоид. ■

371. Какая поверхность определяется уравнением

$$4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0?$$

❑ Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$4(x^2-2x)-(y^2-4y)+4(z^2+2z)=-4;$$

$$4(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)+4(z^2+2z+1)=-4+4-4+4;$$

$$4(x-1)^2-(y-2)^2+4(z+1)^2=0.$$

Выполним параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало точку $O'(1;2;-1)$. Формулы преобразования координат имеют вид $x=x'+1$, $y=y'+2$, $z=z'-1$. Тогда данное уравнение запишется так:

$$4x'^2-y'^2+4z'^2=0, \quad \text{или} \quad x'^2-\frac{y'^2}{4}+z'^2=0.$$

Это уравнение конической поверхности. ■

Выяснить, какие поверхности определяются заданными уравнениями:

372. $x^2+y^2+4z^2-2xy-8z+5=0$

373. $4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0$

374. $x^2-xy-xz+yz=0$.

375. $x^2+z^2-4x-4z+4=0$.

376. $x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz=0$.

377. $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$.

378. $x^2+2y^2+2z^2-4y+4z+4=0$.

379. $4x^2+y^2-z^2-24x-4y+2z+35=0$.

380. $x^2+y^2-z^2-2x-2y+2z+2=0$.

381. $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$.

382. $9x^2-z^2-18x-18y-6z=0$.

Глава IV

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ

§ 1

Понятие об определителе n-го порядка

Определитель четвертого порядка, соответствующий таблице элементов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

— это число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

С помощью определителей четвертого порядка можно аналогично ввести понятие определителя пятого порядка и т. д.

Для определителей любых порядков остаются в силе определения минора и алгебраического дополнения некоторого элемента и теоремы об алгебраических дополнениях, сформулированные для определителей третьего порядка.

Таким образом, обозначив через M_{ik} минор, а через A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik} определителя n-го порядка (т.е. элемента, находящегося в i-й строке и k-м столбце этого определителя), имеем

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

Пусть D — определитель n-го порядка. Раскрывая его сначала по элементам i-й строки, а затем по элементам k-го столбца, в силу теоремы 1 (см. п. 2 § 5 гл. I) получим

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in};$$
$$D = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \quad + a_{nk}A_{nk}.$$

С другой стороны, при $j \neq i$ и $l \neq k$ в силу теоремы 2 (см. п. 2 § 5 гл. I) имеем

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0,$$
$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \quad + a_{nk}A_{nl} = 0.$$

Свойства определителей второго и третьего порядка, сформулированные в § 5 гл. I, справедливы и для определителей любого порядка.

Решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

определитель которой

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

находится по формулам

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}; \qquad ; x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Здесь D — определитель системы, а D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — определитель, полученный из определителя системы заменой k-го столбца (т.е. столбца коэффициентов при определяемом неизвестном) столбцом свободных членов:

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & & a_{2n} \\ & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

383. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

❑ Выполним следующие действия: 1) из элементов первой строки вычтем утроенные элементы второй строки; 2) к элементам третьей строки прибавим удвоенные элементы второй строки; 3) из элементов четвертой строки вычтем элементы второй строки. Тогда исходный определитель преобразуется к виду

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первого столбца:

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам первой строки элементы третьей строки и вычтем из элементов второй строки элементы третьей строки; тогда получим

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам первого столбца:

$$D = -\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -70. \quad \blacksquare$$

384. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

❑ Вынесем за знак определителя общие множители второго, четвертого и пятого столбцов:

$$D = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов второго столбца элементы первого столбца и разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$D = 20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к элементам второй строки элементы первой строки, вынесем 2 (общий множитель элементов первого столбца) за знак определителя, а затем разложим полученный определитель по элементам первого столбца:

$$D = -40\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов второй строки элементы третьей строки, вынесем 2 (общий множитель элементов первой строки) за знак определителя и разложим полученный определитель по элементам третьего столбца:

$$D = -80\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -80\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 640. \blacksquare$$

385. Найти y из системы уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ y + 2z + 3t = 20, \\ z + 2t + 3x = 14, \\ t + 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

❑ Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 0 \cdot t = 14, \\ 0 \cdot x + y + 2z + 3t = 20, \\ 3x + 0 \cdot y + z + 2t = 14, \\ 2x + 3y + 0 \cdot z + t = 12. \end{cases}$$

Чтобы найти определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

из элементов второго столбца вычтем удвоенные элементы первого столбца; из элементов третьего столбца вычтем утроенные элементы первого столбца:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее из элементов второго столбца вычтем удвоенные элементы первого столбца; из элементов третьего столбца вычтем утроенные элементы первого столбца:

$$D = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -10 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 2(8 + 40) = 96.$$

Перейдем к нахождению определителя

$$D_y=\begin{vmatrix}1&14&3&0\\0&20&2&3\\3&14&1&2\\2&12&0&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\3&7&1&2\\2&6&0&1\end{vmatrix}.$$

Из элементов третьей строки вычтем утроенные элементы первой строки; из элементов четвертой строки вычтем удвоенные элементы первой строки:

$$D_y=2\begin{vmatrix}1&7&3&0\\0&10&2&3\\0&-14&-8&2\\0&-8&-6&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}10&2&3\\-14&-8&2\\-8&-6&1\end{vmatrix}=2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}5&1&3\\-7&-4&2\\-4&-3&1\end{vmatrix}.$$

Затем из элементов первой строки вычтем утроенные элементы третьей строки; из элементов второй строки вычтем удвоенные элементы третьей строки:

$$D_y=8\begin{vmatrix}17&10&0\\1&2&0\\-4&-3&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}17&10\\1&2\end{vmatrix}=192.$$

Итак, $y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{192}{96}=2.$ ■

386. Вычислить определитель

$$V=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}.$$

❑ Вычтем из второй строки первую, умноженную на a; из третьей строки вторую, умноженную на a; из четвертой строки третью, умноженную на a:

$$V=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b-a&c-a&d-a\\0&b^2-ab&c^2-ac&d^2-ad\\0&b^3-ab^2&c^3-ac^2&d^3-ad^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, умноженную на b; из третьей строки вторую, умноженную на b:

$$V=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&c-b&d-b\\0&c^2-bc&d^2-db\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c&d\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Нетрудно установить, что рассматриваемый определитель равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел a, b, c, d имеются равные. ■

Вычислить определители:

387. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

388. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$.

389. $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}$

390. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$.

Решить системы уравнений:

391. $\begin{cases} y - 3z + 4t = -5, \\ x - 2z + 3t = -4, \\ 3x + 2y - 5t = 12, \\ 4x + 3y - 5z = 5. \end{cases}$

392. $\begin{cases} x - 3y + 5z - 7t = 12, \\ 3x - 5y + 7z - t = 0, \\ 5x - 7y + z - 3t = 4, \\ 7x - y + 3z - 5t = 16. \end{cases}$

393. $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3y + 4z = 18, \\ 5z + 6u = 39, \\ 7u + 8v = 68, \\ 9v + 10x = 55. \end{cases}$

394. $\begin{cases} 2x + 3y - 3z + 4t = 7, \\ 2x + y - z + 2t = 5, \\ 6x + 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - 5t = -11. \end{cases}$

§ 2

Линейные преобразования и матрицы

С помощью равенств

$$x = a_{11}x' + a_{12}y',$$
$$y = a_{21}x' + a_{22}y'$$

значения переменных x и y можно выразить линейно через значения переменных x' и y' Эти равенства принято называть *линейным преобразованием переменных* x' и y' Их можно рассматривать также как линейное преобразование координат точки (или вектора) на плоскости.

Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей* рассматриваемого *линейного преобразования*, а определитель

$$D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

— *определителем линейного преобразования*. В дальнейшем будем предполагать, что $D_A \neq 0$.

Можно также рассматривать линейное преобразование трех переменных (т.е. для пространства)*

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad D_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

— соответственно матрица и определитель этого преобразования.

Матрицу A называют *невырожденной* (*неособой*), если $D_A \neq 0$. Если же $D_A = 0$, то матрицу называют *вырожденной* (*особой*).

Матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называют *квадратными матрицами* соответственно *второго и третьего порядков*. Для большей общности ряд определений будет дан применительно к матрицам третьего порядка; применение их к матрицам второго порядка не вызывает затруднений.

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{mn} = a_{nm}$, то матрицу называют *симметрической*. Две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

считают *равными* ($A = B$) тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы, т.е. когда $a_{mn} = b_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3)$.

---

* Часто линейным преобразованием называют равенства более общего вида

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + b_1, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b_2, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + b_3. \end{aligned}$$

Здесь рассматривается линейное преобразование, для которого $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. В курсах функционального анализа такое линейное преобразование называют *линейным оператором*.

Суммой двух *матриц* A и B называют матрицу, определяемую равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Произведением числа m на матрицу A называют матрицу, определяемую равенством

$$m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц A и B обозначают символом AB и определяют с помощью равенства

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum\limits_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix},$$

т. е. *элемент матрицы-произведения, находящийся в i-й строке и k-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B*

По отношению к произведению двух матриц переместительный закон, вообще говоря, не выполняется: $AB \neq BA$.

Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

Нулевой матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сумма этой матрицы и любой матрицы A дает матрицу A: $A + 0 = A$.

Единичной матрицей называют матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При умножении этой матрицы слева или справа на матрицу A получается матрица A: $EA = AE = A$. Единичной матрице отвечает тождественное линейное преобразование: $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$

Матрицу B называют *обратной* по отношению к матрице A, если произведения AB и BA равны единичной матрице: $AB = BA = E$. Матрицу, обратную по отношению к матрице A, обозначают A^{-1}, т.е. $B = A^{-1}$

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу. Обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \frac{A_{31}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \frac{A_{32}}{D_A} \\ \frac{A_{13}}{D_A} & \frac{A_{23}}{D_A} & \frac{A_{33}}{D_A} \end{pmatrix},$$

где A_{mn} — *алгебраическое дополнение* элемента a_{nm} матрицы в ее определителе, т.е. произведение минора второго порядка, полученного вычеркиванием m-й строки и n-го столбца в определителе матрицы A, на $(-1)^{m+n}$

Матрицей-столбцом называют матрицу

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Произведение AX определяется равенством

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

можно записать в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Решением этой системы является $X = A^{-1}B$ (если $D_A \neq 0$).

Характеристическим уравнением матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

называют уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Корни этого уравнения λ_1, λ_2, λ_3 называют *характеристическими числами* матрицы; они всегда действительны, если исходная матрица является симметричной.

Система уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3=0,\\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda)\xi_2+a_{23}\xi_3=0,\\ a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+(a_{33}-\lambda)\xi_3=0,\end{cases}$$

в которой λ принимает одно из значений λ_1, λ_2, λ_3 и определитель которой в силу этого равен нулю, определяет тройку чисел $(\xi_1;\xi_2;\xi_3)$, соответствующую данному характеристическому числу.

Эта совокупность трех чисел $(\xi_1;\xi_2;\xi_3)$ с точностью до постоянного множителя определяет ненулевой вектор $\boldsymbol{r}=\xi_1\boldsymbol{i}+\xi_2\boldsymbol{j}+\xi_3\boldsymbol{k}$, называемый *собственным вектором* матрицы.

395. Дано линейное преобразование $x=x'+y'+z'$, $y=x'+y'$, $z=x'$ и даны точки в системе координат x', y', z': $(1;-1;1)$, $(3;-2;-1)$; $(-1;-2;-3)$. Определить координаты этих точек в системе x, y, z.

❑ Подставив координаты точек в равенства, определяющие данное линейное преобразование, имеем: если $x'=1$, $y'=-1$, $z'=1$, то $x=1$, $y=0$, $z=1$, т.е. получаем точку $(1;0,1)$; если $x'=3$, $y'=-2$, $z'=-1$, то $x=0$, $y=1$, $z=3$, т.е. получаем точку $(0;1;3)$; если $x'=-1$, $y'=-2$, $z'=-3$, то $x=-6$, $y=-3$, $z=-1$, т.е. получаем точку $(-6;-3;-1)$. ■

396. Написать линейное преобразование предыдущей задачи для перехода от координат x, y, z к координатам x', y', z'

❑ Имеем $x'=z$ (из третьего равенства); $y'=y-z$ (вычитаем из второго равенства третье); $z'=x-y$ (вычитаем из первого равенства второе). ■

397. Дано линейное преобразование $x=x'+2y'$, $y=3x'+4y'$ У каких точек оно не меняет координат?

❑ Нужно найти x и y, если $x=x'$, $y=y'$, т.е. $x=x+2y$, $y=3x+4y$. Следовательно, $x=x'=0$, $y=y'=0$. ■

398. У каких точек линейное преобразование $x=3x'-2y'$, $y=5x'-4y'$ не меняет координат?

❑ Имеем $x = 3x - 2y$, $y = 5x - 4y$. Следовательно, $x = y = x' = y'$, т.е. линейное преобразование не меняет координат у точек $(t;\, t)$ с одинаковыми координатами. ■

399. Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ Имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad ■$$

400. Найти матрицу $2A + 5B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

❑ Находим

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A + 5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix} \quad ■$$

401. Найти произведения матриц AB и BA, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❑ Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot2+3\cdot1+1\cdot3 & 1\;1+3(-1)+1\cdot2 & 1\cdot0+3\cdot2+1\;1 \\ 2\cdot2+0\cdot1+4\cdot3 & 2\cdot1+0(-1)+4\cdot2 & 2\cdot0+0\cdot2+4\cdot1 \\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+2(-1)+3\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot2+3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot0+0\cdot2 & 2\cdot1+1\cdot4+0\cdot3 \\ 1\;1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot3-1\cdot0+2\cdot2 & 1\;1-1\cdot4+2\cdot3 \\ 3\cdot1+2\cdot2+1\;1 & 3\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & 3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}. \quad ■$$

402. Найти A^3, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

❑ Имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 6+8 \\ 3+4 & 2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33+14 & 22+56 \\ 21+18 & 14+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix} \quad ■$$

403. Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, где

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix},$$

а E — единичная матрица третьего порядка.

❏ Последовательно находим

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&1\\4&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6&5\\8&11&6\\9&8&10\end{pmatrix},\quad 2A^2=\begin{pmatrix}20&12&10\\16&22&12\\18&16&20\end{pmatrix},$$

$$3A=\begin{pmatrix}3&3&6\\3&9&3\\12&3&3\end{pmatrix},\quad 5E=5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix},$$

$$2A^2+3A+5E=\begin{pmatrix}28&15&16\\19&36&15\\30&19&28\end{pmatrix}.\ \blacksquare$$

404. Даны два линейных преобразования:

$$x=a_{11}x'+a_{12}y',\quad y=a_{21}x'+a_{22}y'\quad \text{и}\quad x'=b_{11}x''+b_{12}y'',\quad y'=b_{21}x''+b_{22}y''$$

Подстановка x' и y' из второго преобразования в первое даст линейное преобразование, выражающее x и y через x'' и y'' Показать, что матрица полученного преобразования равна произведению матриц первого и второго преобразований.

❏ Матрицы данных преобразований таковы:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$$

Подставив выражения x' и y' из второго преобразования в первое, находим

$$x=a_{11}(b_{11}x''+b_{12}y'')+a_{12}(b_{21}x''+b_{22}y'')=$$
$$=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x''+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y'',$$

$$y=a_{21}(b_{11}x''+b_{12}y'')+a_{22}(b_{21}x''+b_{22}y'')=$$
$$=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x''+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y''$$

Матрица полученного линейного преобразования имеет вид

$$\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix},$$

т.е. она является произведением матриц исходных преобразований. ■

405. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

❑ Вычислим определитель матрицы A:

$$D_A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \quad ■$$

406. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16, \end{cases}$$

представив ее в виде матричного уравнения.

❑ Перепишем систему в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$. Для отыскания A^{-1} сначала найдем

$$D_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

Затем вычислим алгебраические дополнения элементов этого определителя:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+70-208 \\ -90-56+128 \\ -18+14+16 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x = 2$, $y = 3$, $z = -2$. ■

407. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

❑ Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 - 0, \quad \text{т.е.} \quad \lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$ Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 1$, находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\xi_1' + 2\xi_2' = 0, \\ 4\xi_1' + (3-\lambda_1)\xi_2' = 0; \end{cases}$$

так как $\lambda_1 = 1$, то ξ_1' и ξ_2' связаны зависимостью $2\xi_1' + \xi_2' = 0$.

Полагая $\xi_1' = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ — произвольное число), получаем $\xi_2' = -2\alpha$ и собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 1$, есть $\boldsymbol{r}_1 = \alpha\boldsymbol{i} - 2\alpha\boldsymbol{j}$.

Найдем собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_2 = 7$. Имеем

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1'' + 2\xi_2'' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3-\lambda_2)\xi_2'' = 0. \end{cases}$$

Подставив значение $\lambda_2 = 7$, приходим к соотношению $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$, т.е. $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta \neq 0$. Собственным вектором, соответствующим характеристическому числу $\lambda_2 = 7$, служит $\boldsymbol{r}_2 = \beta\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j}$. ■

408. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

❏ Составим характеристическое уравнение

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda) - 1] + (-3+\lambda+1) + (1-5+\lambda) = 0.$$

После элементарных преобразований уравнение приводится к виду

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0, \\ -\xi_1' + 3\xi_2' - \xi_3' = 0, \\ \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений этой системы есть следствие двух других и его можно отбросить), получим $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\xi_1'$. Полагаем $\xi_1' = \alpha$, тогда $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\alpha$ и $\boldsymbol{r}_1 = \alpha\boldsymbol{i} - \alpha\boldsymbol{k}$.

Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_2 = 3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\xi_2'' + \xi_3'' = 0, \\ -\xi_1'' + 2\xi_2'' - \xi_3'' = 0, \\ \xi_1'' - \xi_2'' = 0 \end{cases}$$

(одно из этих уравнений — следствие двух других). Отсюда $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_3'' = \beta$ и $\boldsymbol{r}_2 = \beta\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \beta\boldsymbol{k}$.

Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_3 = 6$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -3\xi_1''' - \xi_2''' + \xi_3''' = 0, \\ -\xi_1''' - \xi_2''' - \xi_3''' = 0, \\ \xi_1''' - \xi_2''' - 3\xi_3''' = 0 \end{cases}$$

(снова одно из уравнений — следствие двух других). Решив эту систему, находим $\xi_1''' = \gamma$, $\xi_2''' = -2\gamma$, $\xi_3''' = \gamma$ и $\boldsymbol{r}_3 = \gamma\boldsymbol{i} - 2\gamma\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы имеют вид $\boldsymbol{r}_1 = \alpha(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$; $\boldsymbol{r}_2 = \beta(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$; $\boldsymbol{r}_3 = \gamma(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$, где α, β, γ — произвольные отличные от нуля числа. ■

409. Даны два линейных преобразования:

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \quad y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \quad z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z';$$
$$x' = b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'', \quad y' = b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'', \quad z' = b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''.$$

Подстановка x', y' и z' из второго преобразования в первое дает линейное преобразование, выражающее x, y, z через x'', y'', z'' Показать, что матрица полученного преобразования равна произведению матриц первого и второго преобразований.

410. Дано линейное преобразование

$$x = 6x' + y' - 2z', \quad y = -18x' + 2y' + 6z', \quad z = 2x' + 2y'$$

Координаты каких точек удваиваются в результате этого преобразования?

411. Даны два линейных преобразования:

$$x = x' + y' + 2z', \quad y = x' + 2y' + 6z', \quad z = 2x' + 3y';$$
$$x = 2x' + 2z', \quad y = 3y' + 4z', \quad z = x' + 3y' + 2z'$$

Найти точки, для которых каждое из этих преобразований дает один и тот же результат.

412. Найти точки, координаты которых не меняются при линейном преобразовании $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$.

413. Найти множество точек, координаты которых меняются местами при линейном преобразовании $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$.

414. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Какую матрицу B нужно прибавить к матрице A, чтобы получить единичную матрицу?

415. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти сумму матриц $A^2 + A + E$.

416. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

417. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 11, \\ 5y + 6z = 28, \\ x + 2z = 7, \end{cases}$ представив ее в виде матричного уравнения.

418. Найти характеристические числа и нормированные собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

419. Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 3

Приведение к каноническому виду общих уравнений кривых и поверхностей второго порядка

Выражения вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

и

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

называют *квадратичными формами* соответственно от двух и трех переменных.

Симметрические матрицы

$$A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{21} = a_{12},$$

и

$$A_3^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{21} = a_{12}, \ a_{31} = a_{13}, \ a_{32} = a_{23},$$

называют *матрицами* этих *форм*.

Квадратичные формы с помощью линейного преобразования переменных можно преобразовать к виду, не содержащему произведений новых переменных (привести к алгебраической сумме квадратов); иными словами, квадратичную форму двух переменных можно привести к виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, а квадратичную форму трех переменных — к виду $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$.

Для того чтобы коэффициенты при квадратах переменных были характеристическими числами, *линейное преобразование* производят следующим образом: определяют тройку (для квадратичной формы двух переменных — пару) нормированных попарно ортогональных собственных векторов, соответствующих характеристическим числам λ_1, λ_2, λ_3:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \alpha_1 \boldsymbol{i} + \beta_1 \boldsymbol{j} + \gamma_1 \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{e}_2 &= \alpha_2 \boldsymbol{i} + \beta_2 \boldsymbol{j} + \gamma_2 \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{e}_3 &= \alpha_3 \boldsymbol{i} + \beta_3 \boldsymbol{j} + \gamma_3 \boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

В силу нормированности и ортогональности векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ должны выполняться тождества:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3); \quad \alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j).$$

Тогда матрица преобразования переменных имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix};$$

иными словами, надо положить

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{aligned}$$

(для случая двух переменных все формулы соответственно упрощаются). Такое преобразование переменных называют ***линейным ортогональным преобразованием***: в этом случае определитель матрицы S равен ± 1: $D_S = \pm 1$.

Линейное ортогональное преобразование используют для приведения к каноническому виду общего уравнения кривой или поверхности второго порядка, причем если хотят сохранить взаимную ориентацию новых координатных осей, то налагают на матрицу преобразования S дополнительное условие: $D_S = 1$.

Преобразование уравнения кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду выполняют следующим образом:

а) находят линейное ортогональное преобразование координат, которое приводит квадратичную форму старших членов уравнения кривой или поверхности к сумме квадратов, и совершают в уравнении соответствующую замену. После этого преобразования в уравнении не остается членов с произведениями координат;

б) затем с помощью параллельного переноса новых осей координат (в пространстве иногда приходится, кроме того, осуществлять дополнительный поворот двух осей в одной из координатных плоскостей) приводят уравнение к требуемому каноническому виду.

420. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$$

❑ В данном случае матрица старших членов имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad \lambda^2-13\lambda+36=0,$$

откуда следует, что $\lambda_1=4$, $\lambda_2=9$ — характеристические числа.

При $\lambda_1=4$ для определения соответствующего собственного вектора получаем систему

$$\begin{cases}\xi_1+2\xi_2=0,\\ 2\xi_1+4\xi_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $\xi_1=-2\xi_2$; полагая $\xi_2=-\alpha$, находим $\xi_1=2\alpha$ и $\boldsymbol{r}_1=\alpha(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$. Нормируя вектор $\boldsymbol{r}_1$, имеем $\boldsymbol{e}_1=\frac{2}{\sqrt5}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt5}\boldsymbol{j}$.

При $\lambda_2=9$ для определения второго собственного вектора получаем систему

$$\begin{cases}-4\eta_1+2\eta_2=0,\\ 2\eta_1-\eta_2=0.\end{cases}$$

Отсюда $\eta_2=2\eta_1$ и $\boldsymbol{r}_2=\beta(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})$. Нормируя вектор $\boldsymbol{r}_2$, имеем $\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt5}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt5}\boldsymbol{j}$. Легко проверить, что скалярное произведение $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$, т.е. векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ ортогональны.

Используя собственные нормированные ортогональные векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, запишем матрицу преобразования координат:

$$S=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}; \quad D_S=1.$$

Следовательно,

$$x=\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y', \quad y=-\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'$$

Найденные для x и y выражения подставим в уравнение кривой:

$$5\left(\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\right)^2+4\left(\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\right)\left(-\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'\right)+$$

$$+8\left(-\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'\right)^2-32\left(\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\right)-56\left(-\frac{1}{\sqrt5}x'+\frac{2}{\sqrt5}y'\right)+80=0,$$

откуда после раскрытия скобок и приведения подобных членов придем к уравнению

$$4x'^2+9y'^2-\frac{8}{\sqrt{5}}x'-\frac{144}{\sqrt{5}}y'+80=0.$$

Заметим, что в этом уравнении коэффициентами при x'^2 и y'^2 оказались (как и следовало ожидать) характеристические числа λ_1 и λ_2. Перепишем уравнение в виде

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}x'\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}y'\right)+80=0.$$

Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$4\left(x'^2-\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+9\left(y'^2-\frac{16}{\sqrt{5}}y'+\frac{64}{5}-\frac{64}{5}\right)+80=0,$$

или

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+80=0,$$

или

$$4\left(x'-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+9\left(y'-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2=36.$$

Выполним параллельный перенос осей координат, полагая $x''=x'-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $y''=y'-\frac{8}{\sqrt{5}}$. Окончательно получим

$$4x''^2+9y''^2=36, \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{9}+\frac{y''^2}{4}=1$$

(каноническое уравнение эллипса). ■

421. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-225=0.$$

❑ Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 12 \\ 12 & 16-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad \lambda^2-25\lambda=0, \quad \text{т.е.} \quad \lambda_1=0, \ \lambda_2=25.$$

При $\lambda=0$ получим систему

$$\begin{cases} 9\xi_1+12\xi_2=0, \\ 12\xi_1+16\xi_2=0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений сводится к уравнению $\frac{\xi_1}{4}=\frac{\xi_2}{-3}$. Следовательно, собственным вектором матрицы служит вектор $r_1=\alpha(4i-3j)$, а при $\alpha=\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{5}$ находим собственный нормированный вектор $e_1=\frac{4}{5}i-\frac{3}{5}j$.

При $\lambda = 25$ получим систему

$$\begin{cases} -16\eta_1 + 12\eta_2 = 0, \\ 12\eta_1 - 9\eta_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы аналогично находим собственный вектор $r_2 = \beta(3i + 4j)$, а затем собственный нормированный вектор $e_2 = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$ $(e_1 \cdot e_2 = 0)$.

Матрица преобразования координат имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}; \quad D_S = 1;$$

формулы преобразования координат таковы:

$$x = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \quad y = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'$$

Переписав уравнение кривой в виде

$$(3x + 4y)^2 - 230x + 110y - 225 = 0,$$

перейдем к новым координатам:

$$25y'^2 - 230\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 110\left(-\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'\right) - 225 = 0.$$

Приведя подобные члены и сократив на 25, получим уравнение

$$y'^2 - 10x' - 2y' - 9 = 0,$$

которое можно записать так: $(y' - 1)^2 = 10(x' + 1)$. Выполнив параллельный перенос осей, примем за новое начало координат точку $O'(-1; 1)$. В результате приходим к каноническому уравнению заданной кривой $y''^2 = 10x''$ (парабола). ■

422. Привести к каноническому виду уравнение поверхности

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 12x - 10 = 0.$$

❑ Здесь матрица старших членов уравнения поверхности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Характеристические числа матрицы определим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое приводится к виду $(3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)=0$; отсюда следует, что $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

При $\lambda=2$ получим систему

$$\begin{cases} u_1-\ u_2+u_3=0,\\ -u_1+3u_2-u_3=0,\\ u_1-\ u_2+u_3=0. \end{cases}$$

Указанному значению λ соответствует собственный вектор $(\alpha;0;-\alpha)$. После нормирования приходим к вектору $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$.

При $\lambda=3$ получим систему

$$\begin{cases} -v_1+\ v_2 \qquad =0,\\ -v_1+2v_2-v_3=0,\\ v_1-\ v_2 \qquad =0. \end{cases}$$

Отсюда находим второй собственный нормированный вектор $\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$. Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ ортогональны: $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$.

При $\lambda=6$ получим систему

$$\begin{cases} -3w_1-w_2+\ w_3=0,\\ -\ w_1-w_2-\ w_3=0,\\ w_1-w_2-3w_3=0. \end{cases}$$

Соответствующим собственным нормированным вектором (третьим) служит вектор $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$, который ортогонален векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$: $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=0$, $\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=0$. Запишем матрицу преобразования координат:

$$S=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, формулы преобразования координат имеют вид

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z',$$
$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z',$$
$$z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'.$$

Подставив выражения для x, y и z в уравнение поверхности и упростив, имеем

$$2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 - 6\sqrt{2}x' - 4\sqrt{3}y' - 2\sqrt{6}z' - 10 = 0.$$

Коэффициентами при x'^2, y'^2, z'^2, как и должно быть, являются соответственно числа λ_1, λ_2, λ_3. Перепишем уравнение в виде

$$2\left(x'^2 - \frac{6}{\sqrt{2}}x'\right) + 3\left(y'^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}y'\right) + 6\left(z'^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}z'\right) = 10,$$

что после дополнения выражений в скобках до полных квадратов даст

$$2\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(y' - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\left(z' - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 24.$$

Выполнив параллельный перенос осей координат по формулам $x' = x'' + \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y' = y'' + \frac{2}{\sqrt{3}}$, $z' = z'' + \frac{1}{\sqrt{6}}$ и разделив уравнение на 24, приходим к каноническому уравнению эллипсоида $\frac{x''^2}{12} + \frac{y''^2}{8} + \frac{z''^2}{4} = 1$. ■

Привести к каноническому виду уравнения кривых:

423. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$

424. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$

425. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0.$

Привести к каноническому виду уравнения поверхностей:

426. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 6 = 0.$

О Формулы преобразования координат:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z',$$
$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y',$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'$$

427. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + x - 4y - 3z + 2 = 0.$

О Формулы преобразования координат:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad x' = x'';$$
$$y = -\frac{2}{\sqrt{6}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z', \quad z' = z'' + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ 4

Ранг матрицы. Эквивалентные матрицы

Пусть дана прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в ней k произвольных строк и k произвольных столбцов ($k \leqslant m$, $k \leqslant n$). Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называют *минором* k-го порядка матрицы A. Матрица A имеет $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.

Рассмотрим всевозможные миноры матрицы A, отличные от нуля. *Рангом матрицы* A называют наибольший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называют *базисным минором* матрицы.

Ранг матрицы A будем обозначать через $r(A)$. Если $r(A) = r(B)$ то матрицы A и B называют *эквивалентными*. В этом случае пишут $A \sim B$.

Ранг матрицы не изменится от элементарных преобразований. Под *элементарными преобразованиями* понимают:

1) замену строк столбцами, а столбцов — соответствующими строками;
2) перестановку строк матрицы;
3) вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
5) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

428. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

❑ Все миноры второго и третьего порядков данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 1. ■

429. Определить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

❑ Вычеркнув из этой матрицы вторую строку, а затем второй, третий и четвертый столбцы, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix},$$

эквивалентную заданной. Так как $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то ранг данной матрицы равен 2. ■

430. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

❑ Сложим соответствующие элементы первой и третьей строк, а затем разделим на 4 элементы первой строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Из элементов первой строки вычтем соответствующие элементы второй строки, после чего вычеркнем первую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Значит, и ранг данной матрицы равен 2. ■

431. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

❑ Вычтем из элементов четвертого столбца элементы третьего столбца, а затем вычеркнем четвертый столбец:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Так как $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, то ранг данной матрицы равен 3. ■

432. Определить ранг и найти базисные миноры матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

❑ Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad r(A) = 2.$$

Базисными минорами являются миноры второго порядка данной матрицы, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, матрица A имеет 8 базисных миноров. ■

433. Сколько миноров второго порядка имеет матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}?$$

Выписать все эти миноры.

❑ Матрица имеет C_3^2 $C_3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ миноров второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}, \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad ■$$

Определить ранги матриц:

434. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$ **435.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Определить ранги матриц и найти их базисные миноры.

436. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **437.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

§ 5

Исследование системы m линейных уравнений с n неизвестными

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Решением этой *системы* называют совокупность n чисел $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots; \bar{x}_n)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Систему уравнений называют *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots; \bar{x}_n)$. Если же система не имеет ни одного решения, то ее называют *несовместной*.

Совместную систему называют *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет больше одного решения.

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называют соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей системы* (1).

Для совместности системы (1) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы* (*теорема Кронекера–Капелли*). Итак, система (1) совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A_1) = r$. В этом случае число r называют *рангом системы* (1).

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то систему линейных уравнений (1) называют *однородной*. Однородная система уравнений всегда совместна.

Если ранг совместной системы равен числу неизвестных (т.е. $r = n$), то система является определенной.

Если же ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система — неопределенная. Остановимся на последнем случае. Итак, предположим, что система (1) совместна, причем $r < n$. Рассмотрим какой-нибудь базисный минор матрицы A. Выделим в этом миноре произвольную строку. Элементы этой строки являются коэффициентами при r неизвестных в одном из уравнений системы (1). Эти r неизвестных назовем *базисными неизвестными* рассматриваемой системы уравнений. Остальные $n - r$ неизвестных системы (1) назовем *свободными неизвестными*.

Выделим из системы (1) систему r уравнений, среди коэффициентов которых содержатся элементы базисного минора. Базисные неизвестные в выделенной системе оставим в левых частях уравнений, а члены, содержание свободные неизвестные, перенесем в правые части. Из полученной системы уравнений выразим базисные неизвестные через свободные неизвестные (например, по формулам Крамера).

Таким образом, придавая свободным неизвестным произвольные значения, можно найти соответствующие значения базисных неизвестных. Значит (об этом уже сказано выше), система (1) имеет бесчисленное множество решений.

438. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

❑ Найдем ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Выпишем расширенную матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

Вертикальной чертой мы отделили элементы матрицы системы (матрицы A) от свободных членов системы.

Прибавим к элементам второй строки соответствующие элементы третьей строки, а затем разделим все элементы второй строки на 3:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right)$$

Вычтем из элементов второй строки соответствующие элементы первой строки:

$$A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix};$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

Нетрудно установить, что $r(A) = 2$, $r(A_1) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(A_1)$; следовательно, система несовместна. ■

439. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

❑ Расширенная матрица системы имеет вид

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Прибавим элементы второй строки к соответствующим элементам первой и четвертой строк, затем разделим элементы первой строки на 4, а элементы четвертой строки на 5:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Вычтем из элементов третьей строки соответствующие элементы первой строки, а из элементов пятой строки вычтем элементы четвертой строки; после этого вычеркнем третью и пятую строки:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right); \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A) = 3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы A_1.

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. ■

440. Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

❑ Запишем расширенную матрицу системы:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Вычтем из третьей строки первую:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Разделим элементы третьей строки на 2 и вычтем из полученной третьей строки вторую; затем вычеркнем третью строку:

$$A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad A_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Нетрудно установить, что $r(A) = r(A_1) = 2$. Следовательно, система совместна. Возьмем первое и второе уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

За базисные неизвестные примем x_1 и x_2. Это можно сделать, так как определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ из коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля. Свободными неизвестными служат x_3 и x_4. Переписав систему в виде

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4, \end{cases}$$

выразим x_1 и x_2 через x_3 и x_4:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Полагая $x_3 = u$, $x_4 = v$, получим решение системы в виде

$$x_1 = -\frac{14}{11}u + \frac{2}{11}v + \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u - \frac{7}{11}v + \frac{2}{11}, \quad x_3 = u, \quad x_4 = v.$$

Придавая u и v различные числовые значения, будем получать различные решения данной системы уравнений. ■

Исследовать системы уравнений:

441. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5. \end{cases}$

442. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5. \end{cases}$

443. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

§ 6

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью определителей удобно производить для систем, состоящих из двух или трех уравнений. В случае же систем, содержащих большее число уравнений, гораздо выгоднее пользоваться *методом Гаусса*, который заключается в последовательном исключении неизвестных. Поясним смысл этого метода на примере системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u = a_{15}, & \text{(а)} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}u = a_{25}, & \text{(б)} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}u = a_{35}, & \text{(в)} \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}u = a_{45}. & \text{(г)} \end{cases}$$

Допустим, что $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то изменим порядок уравнений, выбрав первым такое уравнение, в котором коэффициент при x не равен нулю).

1 шаг. Делят уравнение (а) на a_{11}, умножают полученное уравнение на a_{21} и вычитают из (б); затем умножают на a_{31} и вычитают из (в); наконец, умножают

на a_{41} и вычитают из (г). В результате I шага приходят к системе

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, & \text{(д)} \\ b_{22}y + b_{23}z + b_{24}u = b_{25}, & \text{(е)} \\ b_{32}y + b_{33}z + b_{34}u = b_{35}, & \text{(ж)} \\ b_{42}y + b_{43}z + b_{44}u = b_{45}, & \text{(з)} \end{cases}$$

причем b_{ij} связаны с a_{ij} следующими формулами:

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j = 2, 3, 4, 5);$$

$$b_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \qquad (i = 2, 3, 4;\ j = 2, 3, 4, 5).$$

II шаг. Поступают с уравнениями (е), (ж), (з) точно так же, как с уравнениями (а), (б), (в), (г) и т. д. В итоге исходная система преобразуется к так называемому *ступенчатому виду*:

$$\begin{cases} x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}u = b_{15}, \\ y + c_{23}z + c_{24}u = c_{25}, \\ z + c_{34}u = d_{35}, \\ u = e_{45}. \end{cases}$$

Из преобразованной системы последовательно определяют все неизвестные.

444. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 36{,}47x + 5{,}28y + 6{,}34z = 12{,}26, & \text{(а)} \\ 7{,}33x + 28{,}74y + 5{,}86z = 15{,}15, & \text{(б)} \\ 4{,}63x + 6{,}31y + 26{,}17z = 25{,}22. & \text{(в)} \end{cases}$$

❑ Разделив уравнение (а) на $36,47$, имеем

$$x + 0{,}1447y + 0{,}1738z = 0{,}3361. \qquad (*)$$

Умножим уравнение $(*)$ на $7{,}33$ и результат вычтем из (б); получим

$$27{,}6793y + 4{,}586z = 12{,}6864;$$

теперь умножим уравнение $(*)$ на $4,63$ и результат вычтем из (в); получим

$$5{,}64y + 25{,}3653z = 23{,}6639.$$

Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 27{,}6793y + 4{,}586\ z = 12{,}6864, & \text{(г)} \\ 5{,}64\ \ y + 25{,}3653z = 23{,}6639. & \text{(д)} \end{cases}$$

Разделив уравнение (г) на $27{,}68$, имеем

$$y + 0{,}1657z = 0{,}4583. \qquad (**)$$

Умножая уравнение (**) на 5,64 и вычитая результат из (д), получим $24{,}4308z = 21{,}0791$. Следовательно, $z = 0{,}8628$. Тогда

$$y = 0{,}4583 - 0{,}1657 \cdot 0{,}8628 = 0{,}3153,$$
$$x = 0{,}3361 - 0{,}1447 \;\; 0{,}3153 - 0{,}1738 \cdot 0{,}8628 = 0{,}1405.$$

Итак, $x = 0{,}1405$, $y = 0{,}3153$, $z = 0{,}8628$.

Практически удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а матрицу из коэффициентов при неизвестных и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 36{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 \end{array}\right)$$

Введем пятый, так называемый *контрольный столбец*, каждым элементом которого является сумма четырех элементов данной строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 & 60{,}35 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 & 57{,}08 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 & 62{,}33 \end{array}\right)$$

При линейных преобразованиях элементов матрицы таким же преобразованиям должны подвергнуться и элементы контрольного столбца. Нетрудно установить, что каждый элемент контрольного столбца преобразованной матрицы равен сумме элементов соответствующей строки. Переход от одной матрицы к другой будем записывать с помощью знака эквивалентности:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 36{,}47 & 5{,}28 & 6{,}34 & 12{,}26 & 60{,}35 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 & 57{,}08 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 & 62{,}33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 7{,}33 & 28{,}74 & 5{,}86 & 15{,}15 & 57{,}08 \\ 4{,}63 & 6{,}31 & 26{,}17 & 25{,}22 & 62{,}33 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 27{,}693 & 4{,}586 & 12{,}6864 & 44{,}9516 \\ 0 & 5{,}64 & 25{,}3653 & 23{,}6639 & 54{,}6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 1 & 0{,}1657 & 0{,}4583 & 1{,}6240 \\ 0 & 5{,}64 & 25{,}3653 & 23{,}6639 & 54{,}6688 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 1 & 0{,}1657 & 0{,}4583 & 1{,}6240 \\ 0 & 0 & 24{,}4308 & 21{,}0791 & 45{,}5094 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0{,}1447 & 0{,}1738 & 0{,}3361 & 1{,}6547 \\ 0 & 1 & 0{,}1657 & 0{,}4583 & 1{,}6240 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}8628 & 1{,}8628 \end{array}\right)$$

Используя полученную матрицу, выписываем преобразованную систему и находим решение:

$$\begin{aligned} &z = 0{,}8628, \\ &y = 0{,}4583 - 0{,}1657 \cdot 0{,}8628 = 0{,}3153, \\ &x = 0{,}3361 - 0{,}1738 \cdot 0{,}8628 - 0{,}1447 \cdot 0{,}3153 = 0{,}1405. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Если система имеет единственное решение, то ступенчатая система уравнений приведется к *треугольной*, в которой последнее уравнение содержит одно неизвестное. В случае неопределенной системы, т.е. такой, в которой число неизвестных больше числа линейно независимых уравнений, допускающей поэтому бесчисленное множество решений, треугольной системы не получается, так как последнее уравнение содержит более одного неизвестного.

Если же система уравнений несовместна, то после приведения к ступенчатому виду она содержит хотя бы одно уравнение вида $0 = 1$, т.е. уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля. Такая система не имеет решений.

445. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

❑ Преобразуем матрицу данной системы в эквивалентную:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 11 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

(для упрощения вычислений мы поменяли местами первое и второе уравнения).

Вычтем из остальных двух строк первую строку, умноженную на 3 и на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 9 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Изменив знаки во второй строке и умножив ее на 5, прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & -11 & -22 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(мы разделили на -11 последнюю строку).

Система уравнений приняла треугольный вид:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ \phantom{x+{}} y - 4z = -5, \\ \phantom{x+y-4{}} z = 2. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение. Из последнего уравнения имеем $z = 2$; подставляя это значение во второе уравнение, получаем $y = 3$ и, наконец, из первого уравнения находим $x = -1$. ■

Решить системы уравнений:

446. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

447. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

448. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

449. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

450. $\begin{cases} 0{,}04x - 0{,}08y + 4z = 20, \\ 4x - 0{,}24y - 0{,}08z = 8, \\ 0{,}09x + 3y - 0{,}15z = 9. \end{cases}$

451. $\begin{cases} 3{,}21x + 0{,}71y + 0{,}34z = 6{,}12, \\ 0{,}43x + 4{,}11y + 0{,}22z = 5{,}71, \\ 0{,}17x + 0{,}16y + 4{,}73z = 7{,}06. \end{cases}$

§ 7

Применение метода Жордана–Гаусса к решению систем линейных уравнений

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса был рассмотрен матричный метод с контрольным столбцом, в результате чего данная система уравнений сводилась к треугольной системе (см. § 6). Теперь познакомимся с другим методом, позволяющим находить непосредственно значения неизвестных.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

В матрице A этой системы выбирают отличный от нуля элемент a_{qp}. Этот элемент называют *разрешающим элементом*, p-й столбец матрицы A — *разрешающим столбцом*, а q-ю строку — *разрешающей строкой.*

Переходят к новой системе уравнений

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \quad + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (2)$$

с матрицей A'; коэффициенты и свободные члены этой системы определяют по формулам

$$\left.\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}} \\ b'_i &= b_i - \frac{a_{ip}b_q}{a_{qp}} \end{aligned}\right\}, \quad \text{если } i \neq q.$$

В частности, $a'_{ip} = 0$, если $l \neq q$. Если же $i = q$, то принимают $a'_{qj} = a_{qj}$, $b'_q = b_q$. Таким образом, q-е уравнения в системах (1) и (2) одинаковы, а коэффициенты при x_p во всех уравнениях системы (2), кроме q-го, равны нулю.

Следует иметь в виду, что системы (1) и (2) одновременно совместны или несовместны. В случае совместности эти системы равносильны (их решения совпадают).

Для нахождения элемента a'_{ij} матрицы A' используют так называемое «правило прямоугольника».

Рассматривают четыре элемента матрицы A: a_{ij} (элемент, подлежащий преобразованию), a_{qp} (разрешающий элемент) и элементы a_{ip} и a_{qj}. Чтобы найти элемент a'_{ij}, следует из элемента a_{ij} вычесть произведение элементов a_{ip} и a_{qj}, расположенных в противоположных вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент a_{qp}:

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{ip} \\ & & \vdots \\ a_{qj} & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_{qp} \end{array}$$

Аналогично можно преобразовать систему (2), приняв за разрешающий элемент матрицы A' элемент $a'_{sr} \neq 0$, причем $s \neq q$, $r \neq p$. После этого преобразования все коэффициенты при x_r, кроме a'_{sr}, обратятся в нуль. Полученную систему можно снова преобразовать и т. д. Если $r = n$ (ранг системы равен числу неизвестных), то после ряда преобразований приходят к системе уравнений вида

$$\begin{cases} k_1x_1 = l_1, \\ k_2x_2 = l_2, \\ \\ k_nx_n = l_n. \end{cases}$$

из которой находят значения неизвестных. Описанный метод решения, основанный на последовательном исключении неизвестных, называют *методом Жордана—Гаусса*.

452. Дана матрица системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

При решении этой системы методом Жордана—Гаусса за разрешающий элемент приняли $a_{23} = 3$. Найти элементы a'_{24}, a'_{13}, a'_{44} преобразованной матрицы.

❑ Так как a_{24} — элемент разрешающей строки, то $a'_{24} = a_{24} = 2$. Элемент a_{13} принадлежит разрешающему столбцу; поэтому $a'_{13} = 0$, Элемент a'_{44} находим по правилу прямоугольника:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & -1 & 7 \\ 8 & 1 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 5 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$a'_{44} = a_{44} - \frac{a_{24}a_{43}}{a_{23}} = -4 - \frac{2 \cdot 5}{3} = -7\frac{1}{3}. \quad \blacksquare$$

453. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

❑ Запишем коэффициенты, свободные члены, а также суммы коэффициентов и свободных членов (Σ — контрольный столбец) в следующую таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
$\boxed{1}$	1	−3	2	6	7
1	−2	0	−1	−6	−8
0	1	1	3	16	21
2	−3	2	0	6	7

Мы приняли за разрешающий элемент коэффициент при x_1 в первом уравнении. Перепишем без изменения строку таблицы, содержащую этот элемент (разрешающую строку), а все элементы первого столбца, кроме разрешающего, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем остальные клетки таблицы (это же правило применяем и к столбцу Σ):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	−3	2	6	7
0	−3	3	−3	−12	−15
0	1	1	3	16	21
0	−5	8	−4	−6	−7

Отметим, что в контрольном столбце получаются суммы элементов соответствующих строк. Разделив на -3 элементы второй строки, переходим к новой таблице:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	−3	2	6	7
0	$\boxed{1}$	−1	1	4	5
0	1	1	3	16	21
0	−5	8	−4	−6	−7

Примем за разрешающий второй элемент второй строки. Первый столбец перепишем без изменения, элементы второго столбца, кроме разрешающего, заменим нулями, вторую (разрешающую) строку перепишем без изменения, элементы остальных клеток таблицы преобразуем по правилу прямоугольника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	−2	1	2	2
0	1	−1	1	4	5
0	0	2	2	12	16
0	0	3	1	14	18

Разделим элементы третьей строки на 2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	−2	1	2	2
0	1	−1	1	4	5
0	0	$\boxed{1}$	1	6	8
0	0	3	1	14	18

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий третий элемент третьего столбца:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	−2	−4	−6

Разделим элементы четвертой строки на −2:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	3	14	18
0	1	0	2	10	13
0	0	1	1	6	8
0	0	0	$\boxed{1}$	2	3

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий четвертый элемент четвертой строки:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	0	8	9
0	1	0	0	6	7
0	0	1	0	4	5
0	0	0	1	2	3

В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=8, \\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4=6, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3+0\cdot x_4=4, \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+1\ \ x_4=2, \end{cases}$$

т.е. $x_1=8$, $x_2=6$, $x_3=4$, $x_4=2$. ■

454. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-2x_3+x_4=1, \\ x_1-3x_2+\ \ x_3+x_4=0, \\ 4x_1-\ \ x_2-\ \ x_3-x_4=1, \\ 4x_1+3x_2-4x_3-x_4=2. \end{cases}$$

❏ Составим таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
$\boxed{1}$	1	−2	1	1	2
1	−3	1	1	0	0
4	−1	−1	−1	1	2
4	3	−4	−1	2	4

Первый элемент первого столбца — разрешающий:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	−2	1	1	2
0	−4	3	0	−1	−2
0	−5	7	−5	−3	−6
0	−1	4	−5	−2	−4

Изменим знаки элементов в четвертой строке:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	−2	1	1	2
0	−4	3	0	−1	−2
0	−5	7	−5	−3	−6
0	$\boxed{1}$	−4	5	2	4

Четвертый элемент второго столбца — разрешающий:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	20	7	14
0	0	−13	20	7	14
0	1	−4	5	2	4

Вычтем из третьей строки вторую и вычеркнем третью строку:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	2	−4	−1	−2
0	0	−13	$\boxed{20}$	7	14
0	1	−4	5	2	4

Четвертый элемент второй строки — разрешающий:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	$-0,6$	0	$0,4$	$0,8$
0	0	-13	20	7	14
0	1	$-0,75$	0	$0,25$	$0,5$

Матрица имеет ранг, равный 3, следовательно, система содержит три базисных неизвестных x_1, x_2 и x_4 и одно свободное неизвестное x_3. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - \ \ 0,6\, x_3 + 0 \cdot x_4 = 0,4, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - \ \ 13\, x_3 + 20\, x_4 = 7, \\ 0 \cdot x_1 + 1\ \ x_2 - 0,75\, x_3 + 0 \cdot x_4 = 0,25, \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 0,4 + 0,6x_3$, $x_2 = 0,25 + 0,75x_3$, $x_4 = 0,35 + 0,65x_3$,

Итак, решение системы имеет вид

$$x_1 = 0,4 + 0,6u, \quad x_2 = 0,25 + 0,75u, \quad x_4 = 0,35 + 0,65u,$$

где u — произвольное число. ■

455. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 5y + 7z + 8t = 3, \\ 3x + 11y + 2z + 4t = 6, \\ 3x + 2y + 3z + 4t = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

❑ Составим таблицу

x	y	z	t	b	Σ
6	-5	7	8	3	19
3	11	2	4	6	26
3	2	3	4	1	13
$\boxed{1}$	1	1	0	0	3

Четвертый элемент первого столбца — разрешающий:

x	y	z	t	b	Σ
0	-11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	8	-1	4	6	17
0	-1	0	4	1	4
1	1	1	0	0	3

Первый элемент третьего столба — разрешающий:

x	y	z	t	b	Σ
0	−11	$\boxed{1}$	8	3	1
0	−3	0	12	9	18
0	−1	0	4	1	4
1	12	0	−8	−3	2

Изменим знаки элементов в третьей строке:

x	y	z	t	b	Σ
0	−11	1	8	3	1
0	−3	0	12	9	18
0	$\boxed{1}$	0	−4	−1	−4
1	12	0	−8	−3	2

Третий элемент второго столбца — разрешающий:

x	y	z	t	b	Σ
0	0	1	−36	−8	−43
0	0	0	0	6	6
0	$\boxed{1}$	0	−4	−1	−4
1	0	0	40	9	50

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z-36t=-8, \\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot t=6, \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z-4\cdot t=-1, \\ 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+40t=9. \end{cases}$$

Очевидно, что второму уравнению не удовлетворяют никакие значения x, y, z и t. Таким образом, полученная система уравнений и заданная система несовместны. ■

456. Применить метод Жордана — Гаусса к определению ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

❑ Составим таблицу

7	−1	3	5	14
$\boxed{1}$	3	5	7	16
4	1	4	6	15
3	−2	−1	−1	−1

В последнем (контрольном) столбце записаны суммы элементов соответствующих строк, второй элемент первого столбца — разрешающий:

0	−22	−32	−44	−98
1	3	5	7	16
0	−11	−16	−22	−49
0	−11	−16	−22	−49

Разделим элементы первой строки на −2, вычтем элементы первой строки из соответствующих элементов четвертой и третьей строк и вычеркнем третью и четвертую строки. Тогда получим

0	11	16	22	49
1	3	5	7	16

Любой определитель второго порядка полученной матрицы отличен от нуля. Следовательно, $r(A) = 2$. ■

Методом Жордана—Гаусса решить системы уравнений:

457. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 =8, \\ x_2+3x_3+x_4=15, \\ 4x_1+x_3+x_4=11, \\ x_1+x_2+5x_4=23. \end{cases}$

458. $\begin{cases} x_2-x_1+x_3-x_4=-2, \\ x_1+2x_2-2x_3-x_4=-5, \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-6x_4=-10. \end{cases}$

459. $\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1, \\ 7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4, \\ x_1-x_2-x_3-x_4=-2. \end{cases}$

460. Методом Жордана—Гаусса определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Глава V

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1

Линейные пространства

1. Основные понятия. Рассмотрим такое множество R элементов x, y, z, ..., в котором для любых двух элементов $x \in R$ и $y \in R$ определена *сумма* $x + y \in R$ и для любого элемента $x \in R$ и любого действительного числа λ определено *произведение* $\lambda x \in R$.

Пусть сложение элементов множества R и умножение элемента этого множества на действительное число удовлетворяют следующим условиям:

1° $x + y = y + x$.

2° $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3° Существует такой элемент $0 \in R$ (нуль-элемент), что $x + 0 = x$ для любого $x \in R$.

4° Для каждого элемента $x \in R$ существует противоположный элемент $y \in R$ такой, что $x + y = 0$; в дальнейшем будем писать $y = -x$, т.е. $x + (-x) = 0$.

5° $1\ x = x$.

6° $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

7° $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

8° $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

Тогда множество R называют *линейным* (или *векторным*) пространством, а элементы x, y, z, ... этого пространства — *векторами*.

Например, множество всех геометрических векторов является линейным пространством, так как для элементов этого множества определены действия сложения и умножения на число, удовлетворяющие сформулированным условиям.

Разностью двух векторов x и y линейного пространства называют такой вектор v этого пространства, что $y + v = x$. Разность векторов x и y обозначают через $x - y$, т.е. $x - y = v$. Легко доказывается, что $x - y = x + (-y)$.

Справедливы также следующие утверждения:

1. *В каждом линейном пространстве существует только один нуль-элемент.*

2. *Для каждого элемента линейного пространства существует только один противоположный элемент.*

3. *Для каждого элемента $x \in R$ выполняется равенство* $0 \cdot x = 0$.

4. *Для любого действительного числа λ и $\mathbf{0} \in R$ выполняется равенство* $\lambda \cdot \mathbf{0} = 0$

5. *Из равенства $\lambda x = \mathbf{0}$ следует одно из двух равенств:* $\lambda = 0$ *или* $x = \mathbf{0}$

6. *Элемент $(-1) \cdot x$ является противоположным для элемента x*

461. Имеется множество всевозможных систем действительных чисел: $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$, $(\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$, Сумма двух любых элементов определяется равенством $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots$ $\ldots; \xi_n + \eta_n)$, а произведение любого элемента на любое число — равенством $\lambda(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n)$. Доказать, что это множество является линейным пространством.

❑ Положим $x = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, $y = (\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n)$, $z = (\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n)$. Проверим выполнение сформулированных выше условий $1° - 8°$

1° $x + y = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n)$, $y + x = (\eta_1 + \xi_1; \eta_2 + \xi_2; \ldots; \eta_n + \xi_n)$, т.е. $x + y = y + x$.

2° $x + y = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n)$, $y + z = (\eta_1 + \zeta_1; \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \eta_n + \zeta_n)$, $(x + y) + z = (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1; \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n + \zeta_n)$, $x + (y + z) =$ $= (\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1; \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n + \zeta_n)$. Таким образом, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3° Нуль-элементом является $\mathbf{0} = (0; 0; \ldots; 0)$. Действительно, $x + \mathbf{0} =$ $= (\xi_1 + 0; \xi_2 + 0; \ldots; \xi_n + 0) = x$.

4° Элемент $(-\xi_1; -\xi_2; \ldots; -\xi_n)$ является противоположным элементу $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$, так как $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + (-\xi_1; -\xi_2; \ldots; -\xi_n) = (0; 0; \ldots; 0) = \mathbf{0}$.

5° $1 \cdot x = (1 \cdot \xi_1; 1 \cdot \xi_2; \ldots; 1 \cdot \xi_n) = x$.

6° $\lambda(\mu x) = \lambda(\mu\xi_1; \mu\xi_2; \ldots; \mu\xi_n) = (\lambda\mu\xi_1; \lambda\mu\xi_2; \ldots; \lambda\mu\xi_n) = (\lambda\mu)x$.

7° $(\lambda + \mu)x = ((\lambda + \mu)\xi_1; (\lambda + \mu)\xi_2; \ldots; (\lambda + \mu)\xi_n) = (\lambda\xi_1 + \mu\xi_1; \lambda\xi_2 + \mu\xi_2; \ldots$ $\ldots; \lambda\xi_n + \mu\xi_n) = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \ldots; \lambda\xi_n) + (\mu\xi_1; \mu\xi_2; \ldots; \mu\xi_n) = \lambda x + \mu x$.

8° $\lambda(x + y) = \lambda(\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \ldots; \xi_n + \eta_n) = (\lambda\xi_1 + \lambda\eta_1; \lambda\xi_2 + \lambda\eta_2; \ldots$ $\ldots; \lambda\xi_n + \lambda\eta_n) = \lambda(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n) + \mu(\eta_1; \eta_2; \ldots; \eta_n) = \lambda x + \lambda y$. ■

462. Доказать, что множество всех комплексных чисел является линейным пространством.

463. Является ли линейным пространством множество систем четырех действительных чисел $(\xi_1; \xi_2; 0; 0)$, $(\eta_1; \eta_2; 0; 0)$, $(\zeta_1; \zeta_2; 0; 0)$, где ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 — всевозможные действительные числа? Сложение элементов и умножение на действительное число определены так же, как и в задаче 461.

464. Образует ли линейное пространство множество элементов $(\xi_1; \xi_2; 1; 1)$, $(\eta_1; \eta_2; 1; 1)$, $(\zeta_1; \zeta_2; 1; 1)$?

465. Является ли линейным пространством множество всевозможных многочленов второй степени $\alpha_0 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2$, $\beta_0 t^2 + \beta_1 t + \beta_2$, $\gamma_0 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_2, \ldots$?

466. Образует ли линейное пространство множество всех многочленов не выше третьей степени?

467. Даны функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, Является ли множество этих функций линейным пространством, если эти функции образуют: 1) совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[a; b]$; 2) совокупность всех дифференцируемых функций на отрезке $[a; b]$; 3) совокупность всех элементарных функций; 4) совокупность всех неэлементарных функций?

468. Дано множество всевозможных пар положительных чисел: $\boldsymbol{x} = (\xi_1; \xi_2)$, $\boldsymbol{y} = (\eta_1; \eta_2)$, $\boldsymbol{z} = (\zeta_1; \zeta_2)$, Является ли это множество линейным пространством, если сложение двух элементов определяется равенством $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\xi_1\eta_1; \xi_2\eta_2)$, а умножение на действительное число — равенством $\lambda\boldsymbol{x} = (\xi_1^\lambda; \xi_2^\lambda)$?

469. Может ли линейное пространство состоять из: 1) одного вектора; 2) двух различных векторов?

470. Из линейного пространства исключен вектор $\boldsymbol{x}$. Может ли полученное после этого исключения множество векторов остаться линейным пространством?

471. Из линейного пространства исключено бесчисленное множество векторов. Может ли полученное после этого исключения множество векторов быть линейным пространством?

472. В резерв проводников вагонов для выдачи им ежедневно поступают со склада: 1) сахар; 2) чай; 3) печенье; 4) сухари; 5) древесный уголь. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 — соответственно приращения за день количества (в кг) этих поступлений. Если $\xi_i > 0$, то соответствующего продукта или угля поступило больше, чем выдано в этот день, а если $\xi_i < 0$, то их выдано больше, чем поступило со склада. Является ли совокупность систем чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ линейным пространством? Что означает вектор $(-100; 5; 0; -200; 3)$?

473. Образует ли линейное пространство совокупность троек целых чисел $(\xi_1; \xi_3; \xi_3)$?

474. В парк вагонного депо ежедневно прибывают вагоны разных типов: багажные, почтовые, жесткоплацкартные, купированные и мягкие, из которых ежедневно формируются и отправляются пассажирские и скорые поезда. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 — приращения за сутки числа соответствующих вагонов. Является ли совокупность чисел $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ линейным пространством?

475. Образуют ли линейное пространство все геометрические векторы, имеющие общее начало в начале координат и расположенные в I октанте?

476. Доказать, что множество всех решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

образует линейное пространство.

❂ Установить что если $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ — решения этой системы, то $(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$ и $(\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$ при любом λ также являются решениями системы.

477. Доказать, что все функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x), \ldots$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению $A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_n y = 0$ $(A_0, A_1, \ldots, A_n$ — функции от $x)$ образуют линейное пространство.

2. Линейно независимые векторы. Пусть x, y, $z, \ldots$, u — какие-нибудь векторы линейного пространства R. Тогда вектор, определяемый равенством

$$v = \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots + \lambda u,$$

где α, β, $\gamma, \ldots, \lambda$ — действительные числа, также принадлежат линейному пространству R. Этот вектор называют *линейной комбинацией* векторов $x, y, z, \ldots, u$.

Предположим, что линейная комбинация векторов $x, y, z, \ldots, u$ является нуль-вектором, т.е.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots + \lambda u = 0. \tag{1}$$

Векторы $x, y, z, \ldots, u$ называют *линейно независимыми*, если равенство (1) выполняется лишь при $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$. Если же равенство (1) может выполняться и в том случае, когда не все числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ равны нулю, то говорят, что векторы $x, y, z, \ldots, u$ *линейно зависимы*.

Легко установить, что *векторы $x, y, z, \ldots, u$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов.*

478. Показать, что если среди векторов $x, y, z, \ldots, u$ имеется нуль-вектор, то рассматриваемые векторы линейно зависимы.

❑ Пусть, например, $x = 0$. Так как равенство $\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots + \lambda u = 0$ может выполняться при $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = \ldots = \lambda = 0$, то векторы линейно зависимы. ■

479. Элементами линейного пространства являются системы упорядоченных действительных чисел: $x_i = (\xi_{1i}; \xi_{2i}; \ldots; \xi_{ni})$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Какому условию должны удовлетворять числа ξ_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ для того чтобы векторы x_1, $x_2, \ldots, x_n$ были линейно независимы, если сумма векторов и произведение вектора на число определяются равенствами $x_i + x_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k}; \xi_{2i} + \xi_{2k}; \ldots \xi_{ni} + \xi_{nk})$, $\lambda x_i = (\lambda\xi_{1i}, \lambda\xi_{2i}, \ldots, \lambda\xi_{ni})$?

❑ Рассмотрим равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Оно равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 \xi_{11} + \alpha_2 \xi_{12} + \cdots + \alpha_n \xi_{1n} = 0, \\ \alpha_1 \xi_{21} + \alpha_2 \xi_{22} + \ldots + \alpha_n \xi_{2n} = 0, \\ \ldots \\ \alpha_1 \xi_{n1} + \alpha_2 \xi_{n2} + \ldots + \alpha_n \xi_{nn} = 0. \end{cases}$$

В случае линейной независимости векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ эта система должна иметь единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \quad = \alpha_n = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & & \xi_{2n} \\ & & & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & & \xi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В частности, векторы $(\xi_{11}; \xi_{21})$ и $(\xi_{12}; \xi_{22})$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21} \neq 0$. ■

480. Рассматривается линейное пространство многочленов не выше второй степени. Доказать, что векторы $P_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $P_2 = 2 + 3t + 4t^2$ и $P_3 = 3 + 5t + 7t^2$ линейно зависимы.

❏ В данном случае сразу замечаем, что $P_3 = 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$; следовательно, векторы P_1, P_2 и P_3 линейно зависимы. ■

481. В каком случае векторы $x = (\xi_1; \xi_2)$ и $y = (\eta_1; \eta_2)$, определенные в условии задачи 468, линейно зависимы?

❏ Из равенства $x = \lambda y$ следует, что $(\xi_1; \xi_2) = \lambda(\eta_1; \eta_2)$, или $(\xi_1; \xi_2) = (\eta_1^\lambda; \eta_2^\lambda)$, т.е. $\xi_1 = \eta_1^\lambda$, $\xi_2 = \eta_2^\lambda$. Отсюда получаем, что $\ln \xi_1 \cdot \ln \eta_2 = \ln \eta_1 \cdot \ln \xi_2$. ■

482. Доказать, что три компланарных вектора a, b и c линейно зависимы.

➋ Привести векторы к общему началу и разложить один из векторов на составляющие, соответственно коллинеарные двум другим векторам.

483. Доказать, что три некомпланарных вектора a, b и c линейно независимы.

484. Доказать, что любые четыре вектора a, b, c и d линейно зависимы.

❏ Если три из четырех векторов компланарны, то задача решается просто. Предположим, что эти векторы некомпланарны. Приведем все четыре вектора к общему началу O. Построим параллелепипед, диагональю которого является вектор d, а ребра параллелепипеда лежат на прямых, содержащих a, b и c. Нетрудно установить, что $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$, а это и означает линейную зависимость данных четырех векторов. ■

485. Доказать, что если в линейном пространстве n векторов $x, y, z, \ldots, u$ линейно зависимы, то $n+1$ векторов этого пространства $x, y, z, \ldots, a, v$ также линейно зависимы.

3. Размерность и базис линейного пространства. Если в линейном пространстве R имеется n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов этого пространства линейно зависимы, то пространство R называют *n-мерным*. Принято также говорить, что размерность пространства R равна n, и писать $d(R) = n$. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называют *бесконечномерным*. Если R — бесконечномерное пространство, то $d(R) = \infty$.

Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства называют *базисом*. Справедлива следующая **теорема**: *каждый век-*

тор линейного n-мерного пространства можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса. Например, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис n-мерного линейного пространства R, то любой вектор $x \in R$ можно единственным образом представить в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \quad + \xi_n e_n.$$

Следовательно, вектор x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяется единственным образом с помощью чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Эти числа называются *координатами вектора* x в данном базисе.

Если $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \quad + \xi_n e_n$, $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \quad + \eta_n e_n$, то $x+y = (\xi_1+\eta_1)e_1+(\xi_2+\eta_2)e_2+\cdots+(\xi_n+\eta_n)e_n$, $\lambda x = \lambda\xi_1 e_1+\lambda\xi_2 e_2+\cdots+\lambda\xi_n e_n$.

Для определения размерности линейного пространства полезно использовать следующую **теорему**: *если любой вектор линейного пространства R можно представить в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то $d(R) = n$* (а, значит, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис в пространстве R).

486. Дано линейное пространство всевозможных пар упорядоченных действительных чисел: $x_1 = (\xi_{11}; \xi_{21})$, $x_2 = (\xi_{12}; \xi_{22})$, $x_3 = (\xi_{13}; \xi_{23}), \ldots$, причем сложение векторов и умножение вектора на действительное число определены равенствами $x_i + x_k = (\xi_{1i} + \xi_{1k}; \xi_{2i} + \xi_{2k})$; $\lambda x_i = (\lambda\xi_{1i}; \lambda\xi_{2i})$. Доказать, что векторы $e_1 = (1; 2)$ и $e_2 = (3; 4)$ образуют базис данного линейного пространства. Найти координаты вектора $x = (7; 10)$ в этом базисе.

❑ Векторы $e_1 = (1; 2)$ и $e_2 = (3; 4)$ линейно независимы (см. задачу 479). Рассмотрим какой-нибудь вектор $y = (\eta_1; \eta_2)$. Покажем, что для любых η_1 и η_2 можно определить числа λ и μ так, чтобы выполнялось равенство $y = \lambda e_1 + \mu e_2$, или $(\eta_1; \eta_2) = (\lambda + 3\mu; 2\lambda + 4\mu)$.

Нетрудно установить, что существует единственная пара значений $(\lambda; \mu)$, для которой это равенство выполняется. Это следует из того, что система уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = \eta_1, \\ 2\lambda + 4\mu = \eta_2 \end{cases}$$

является определенной. Итак, векторы e_1 и e_2 образуют базис. Найдем координаты вектора $x = (7; 10)$ в этом базисе. Задача сводится к определению λ и μ из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

Отсюда получим $\lambda = 1$, $\mu = 2$, т.е. $x = e_1 + 2e_2$. ■

487. Показать, что линейное пространство, элементами которого являются векторы $x = (\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ (см. задачу 479), имеет своим базисом совокупность векторов $e_1 = (1; 0; 0; \ldots; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; \ldots; 0), \ldots$, $e_n = (0; 0; 0; \ldots; 1)$.

❑ Нетрудно установить, что

$$x = \xi_1(1;0;0;\ldots;0) + \xi_2(0;1;0;\ldots;0) + \cdots + \xi_n(0;0;0;\ldots;1),$$

т.е. $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \quad + \xi_n e_n$. Таким образом, любой вектор можно представить в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы, поскольку определитель, составленный из координат этих векторов, равен 1, т.е. отличен от нуля. Итак, эти векторы образуют базис, а пространство R является n-мерным. ■

488. Из каких элементов состоит линейное пространство с базисом $1, t, t^2, .\ ., t^{n-1}, t^n$, если сложение элементов и умножение элемента на действительное число понимать в обычном смысле?

489. Показать, что множество всех матриц второго порядка является линейным пространством четвертого измерения.

490. Показать, что матрицы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

образуют базис линейного пространства, рассмотренного в задаче 489.

491. Показать, что элементы $e_1 = (1;10)$ и $e_2 = (10;1)$ линейного пространства; рассмотренного в задаче 468, являются базисными. Найти координаты вектора $x = (2;3)$ в этом базисе.

❑ Так как $\ln 1 \quad \ln 1 - \ln 10 \quad \ln 10 \neq 0$, то векторы e_1 и e_2 линейно независимы (см. задачу 481). Пусть любой вектор $y = (\eta_1;\eta_2)$ представлен в виде линейной комбинации векторов e_1 и e_2. Покажем, что существует такая пара чисел $(\lambda;\mu)$, для которой выполняется равенство $y = \lambda e_1 + \mu e_2$, или $(\eta_1;\eta_2) = (1^\lambda \quad 10^\mu; 10^\lambda \quad 1^\mu)$. Отсюда следует, что $\mu = \lg\eta_1$, $\lambda = \lg\eta_2$. В частности, $x = e_1 \lg 3 + e_2 \lg 2$. Таким образом, $(\lg 3; \lg 2)$ — координаты вектора x в базисе e_1, e_2. ■

492. Показать, что в качестве базиса n-мерного пространства, рассмотренного в задаче 479, можно взять векторы $e_1 = (1;1;1;\ldots;1;1)$, $e_2 = (0;1;1;..\ ;1;1)$, $e_3 = (0;0;1;\ldots;1;1)$, $\quad e_{n-1} = (0;0;0;..\ ;1;1)$, $e_n = (0;0;0;\ldots;0;1)$,.

✪ Рассмотреть векторы $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = e_2 - e_3$, $\quad e'_{n-1} = e_{n-1} - e_n$, $e'_n = e_n$.

4. Изоморфизм линейных пространств. Рассмотрим два линейных пространства R и R' Элементы пространства R будем обозначать через $x, y, z, ..$, а элементы пространства R' — через $x', y', z', \ldots$

Пространства R и R' называют ***изоморфными***, если между их элементами x, y, x', y' можно установить такие взаимно однозначные соответствия $x \leftrightarrow x'$; $y \leftrightarrow y'$, при которых $x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ (λ — любое действительное число). Следует отметить важную **теорему**, с помощью которой легко устанавливается изоморфизм конечномерных линейных пространств: *для того чтобы два конечномерных пространства R и R' были изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были одинаковыми.*

493. Даны два линейных пространства R и R' Элементами пространства R являются всевозможные дифференцируемые функции аргумента t, обращающиеся в нуль при $t = 0$. Элементами же пространства R' являются производные функций, принадлежащих пространству R. Доказать, что пространства R и R' изоморфны.

❑ Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t), \ldots$ — функции пространства R, а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t), \ldots$ — функции пространства R' Из того, что эти функции снабжены индексами, не следует делать заключение, что R и R' — счетные множества.

Пусть $\varphi_i(t) = f_i'(t)$; тогда $f_i(t) = \int\limits_0^t \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t$. Таким образом, между элементами линейных пространств R и R' (доказательство их линейности предоставляем выполнить самостоятельно) установлено взаимно однозначное соответствие. Используя равенства

$$\varphi_i(t) + \varphi_k(t) = [f_i(t) + f_k(t)]', \quad f_i(t) + f_k(t) = \int\limits_0^t [\varphi_i(t) + \varphi_k(t)]\,\mathrm{d}t,$$

$$\lambda\varphi_i(t) = [\lambda f_i(t)]', \quad \lambda f_i(t) = \int\limits_0^t \lambda\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t$$

заключаем, что $f_i(t) + f_k(t) \leftrightarrow \varphi_i(t) + \varphi_k(t)$, $\lambda f_i(t) \leftrightarrow \lambda\varphi_i(t)$. Итак, R и R' — изоморфные пространства. ■

494. Доказать, что множества всех геометрических векторов и многочленов не выше второй степени — изоморфные линейные пространства.

495. Даны изоморфные линейные пространства R и R' Между элементами этих пространств установлены взаимно однозначные соответствия $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y', \ldots$. Доказать, что $\alpha x + \beta y + \gamma z \leftrightarrow \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$ при любых действительных α, β и γ.

496. Пусть R и R' — изоморфные линейные пространства, причем $x \leftrightarrow x'$ Доказать, что $(-x) \leftrightarrow (-x')$.

497. Даны изоморфные пространства R и R' причем $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ — нуль-элементы этих пространств. Доказать, что $\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0}'$ независимо от того, как установлены взаимно однозначные соответствия между другими элементами этих пространств.

498. Даны всевозможные пары действительных чисел: $(\xi_1; \eta_1)$, $(\xi_2; \eta_2)$, $(\xi_3; \eta_3), \ldots$ Построены два линейных пространства: пространство R с элементами $x_1 = (\xi_1; \eta_1)$, $x_2 = (\xi_2; \eta_2)$, $x_3 = (\xi_3; \eta_3), \ldots$, в котором сложение векторов и умножение вектора на число определены равенствами $x_1 + x_2 = (\xi_1 + \xi_2; \eta_1 + \eta_2)$, $\lambda x_1 = (\lambda\xi_1; \lambda\eta_1)$, и пространство R' с элементами $x_1' = (e^{-\xi_1}; e^{-\eta_1})$, $x_2' =$

$= (e^{-\xi_2}; e^{-\eta_2})$, $x_3' = (e^{-\xi_3}; e^{-\eta_3}), \ldots$, в котором соответствующие действия определены равенствами $x_1' + x_2' = (e^{-\xi_1-\xi_2}; e^{-\eta_1-\eta_2})$, $\lambda x_1' = (e^{-\lambda\xi_1}; e^{-\lambda\eta_1})$. Доказать, что пространства R и R' изоморфны.

499. Изоморфны ли линейные пространства R и R', если элементами R являются векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots$, а элементами R' — векторы $2\boldsymbol{x}$, $2\boldsymbol{y}$, $2\boldsymbol{z}, \ldots$? Показать, что пространства R и R' состоят из одних и тех же элементов.

§ 2

Преобразование координат при переходе к новому базису

Пусть в n-мерном линейном пространстве R^n имеются два базиса: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3, \ldots$ (старый) и $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3', \ldots$ (новый). Известны зависимости, выражающие каждый вектор нового базиса через векторы старого базиса:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1' &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n,\\
\boldsymbol{e}_2' &= a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \quad + a_{n2}\boldsymbol{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{e}_n' &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n.
\end{aligned}
$$

Матрицу

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

называют *матрицей перехода* от старого базиса к новому.

Возьмем какой-нибудь вектор $\boldsymbol{x}$. Пусть $(\xi_1; \xi_2; \ldots; \xi_n)$ — координаты этого вектора в старом базисе, а $(\xi_1'; \xi_2'; \ldots; \xi_n')$ — его координаты в новом базисе. При этом старые координаты вектора $\boldsymbol{x}$ выражаются через новые координаты этого вектора по формулам

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}\xi_1' + a_{12}\xi_2' + \cdots + a_{1n}\xi_n',\\
\xi_2 &= a_{21}\xi_1' + a_{22}\xi_2' + \cdots + a_{2n}\xi_n',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= a_{n1}\xi_1' + a_{n2}\xi_2' + \cdots + a_{nn}\xi_n',
\end{aligned}
$$

которые называют *формулами преобразования координат*.

Очевидно, что столбцы матрицы A являются координатами в формулах перехода от старого базиса к новому, а строки этой матрицы — координатами в формулах преобразования старых координат через новые.

500. Дан вектор $x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Разложить этот вектор по новому базису e_1', e_2', e_3', e_4', если $e_1' = e_2 + e_3 + e_4$, $e_2' = e_1 + e_3 + e_4$, $e_3' = e_1 + e_2 + e_4$, $e_4' = e_1 + e_2 + e_3$.

❑ <u>I способ.</u> Выпишем матрицу перехода от старого базиса к новому:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Строки этой матрицы являются коэффициентами в формулах преобразования координат:

$$\xi_1 = \xi_2' + \xi_3' + \xi_4', \quad \xi_2 = \xi_1' + \xi_3' + \xi_4', \quad \xi_3 = \xi_1' + \xi_2' + \xi_4', \quad \xi_4 = \xi_1' + \xi_2' + \xi_3'.$$

Так как $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1$, то, решив систему уравнений, находим $\xi_1' = \xi_2' = \xi_3' = \xi_4' = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}(e_1' + e_2' + e_3' + e_4')$.

<u>II способ.</u> Исключив e_1, e_2, e_3, e_4 из системы уравнений

$$\begin{cases} x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ e_1' = 0 \cdot e_1 + e_2 + e_3 + e_4, \\ e_2' = e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3 + e_4, \\ e_3' = e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3 + e_4, \\ e_4' = e_1 + e_2 + e_3 + 0 \cdot e_4, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_1' & 0 & 1 & 1 & 1 \\ e_2' & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e_3' & 1 & 1 & 0 & 1 \\ e_4' & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Остается раскрыть этот определитель по элементам первого столбца и выразить x через e_1', e_2', e_3' и e_4'.

<u>III способ.</u> Так как $e_1' + e_2' + e_3' + e_4' = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4$, то $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = \frac{1}{3}(e_1' + e_2' + e_3' + e_4')$. Отсюда $x = \frac{1}{3}(e_1' + e_2' + e_3' + e_4')$. ■

501. Дан вектор $x = 8e_1 + 6e_2 + 4e_3 - 18e_4$. Разложить его по новому базису, связанному со старым базисом уравнениями $e_1' = -3e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $e_2' = 2e_1 - 4e_2 + e_3 + e_4$, $e_3' = e_1 + 3e_2 - 5e_3 + e_4$, $e_4' = e_1 + e_2 + 4e_3 - 6e_4$.

502. Дан вектор $x = 2(e_1 + e_2 + \quad + e_n)$. Разложить его по базису $e_1', e_2', e_3', \ldots, e_n'$, если $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3 + e_4, \ldots, e_{n-1}' = e_{n-1} + e_n$, $e_n' = e_n + e_1$.

503. Система координат xOy повернута вокруг начала координат на угол α (рис. 21). Выразить координаты вектора $a = xi + yj$ в новой системе через его координаты в старой системе.

❏ Разложим векторы i' и j' по ортам i и j:

$$i' = i\cos\alpha + j\sin\alpha, \quad j' = i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Запишем матрицу перехода от старого базиса i, j к новому базису i', j':

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

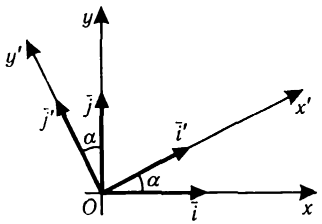

Рис. 21

Отсюда получаем

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

т.е.

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \quad ■$$

504. Даны зависимости $e_1' = \alpha e_2$, $e_2' = \beta e_3$, $e_3' = \gamma e_4$, $e_4' = \delta e_5$, $e_5' = \varepsilon e_1$. Написать формулы, связывающие старые координаты $(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4; \xi_5)$ вектора x с новыми координатами $(\xi_1'; \xi_2'; \xi_3'; \xi_4'; \xi_5')$ этого же вектора.

505. Возможны ли зависимости $e_1' = e_2 - e_3$, $e_2' = e_3 - e_1$, $e_3' = e_1 - e_2$ между старым базисом e_1, e_2, e_3 и новым базисом e_1', e_2', e_3'?

§ 3

Подпространства

1. Подпространство линейного пространства. Линейное пространство R' называют *подпространством* линейного пространства R, если элементами пространства R' являются только элементы пространства R.

Например, множество всех векторов, параллельных одной и той же плоскости, является подпространством всех геометрических векторов пространства.

Если $x, y, z, \ldots, u$ — какие-нибудь векторы линейного пространства R, то все векторы $\alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots + \lambda u$, где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ — всевозможные действительные числа, образуют подпространство пространства R. Множество всех линейных комбинаций векторов $\alpha x + \beta y + \gamma z + \quad + \lambda u$ называют *линейной оболочкой* векторов $x, y, z, \ldots, u$ и обозначают через $L(x, y, z, \ldots, u)$.

Если R_1 — подпространство линейного пространства R, то $d(R_1) \leqslant d(R)$.

Пусть в линейном пространстве R имеются два подпространства R_1 и R_2. *Пересечением* подпространств R_1 и R_2 называют множество R_3 всех элементов, одновременно принадлежащих R_1 и R_2. Запись $R_3 = R_1 \cap R_2$ означает, что R_3 является пересечением подпространств R_1 и R_2. *Суммой* подпространств R_1 и R_2 называют множество R_4 всех элементов вида $x + y$, где

$x \in R_1$, а $y \in R_2$. Запись $R_4 = R_1 + R_2$ означает, что множество R_4 является суммой подпространств R_1 и R_2.

Доказывается, что пересечение R_3 и сумма R_4 являются подпространствами пространства R. Следует иметь в виду, что $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$.

506. Может ли подпространство линейного пространства R состоять из одного элемента?

507. Дано линейное пространство R, элементами которого являются всевозможные системы действительных чисел: $x=(\xi_1;\xi_2;\xi_3;\xi_4)$, $y=(\eta_1;\eta_2;\eta_3;\eta_4)$, $z = (\zeta_1;\zeta_2;\zeta_3;\zeta_4), \ldots$. Сложение двух элементов и умножение элемента на число определены равенствами

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \xi_3 + \eta_3; \xi_4 + \eta_4), \qquad \lambda x = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \lambda\xi_3; \lambda\xi_4).$$

Доказать, что множество R_1 элементов $x_1 = (0;\xi_2;\xi_3;\xi_4)$, $y_1 = (0;\eta_2;\eta_3;\eta_4)$, $z_1 = (0;\zeta_2;\zeta_3;\zeta_4), \ldots$ и множество R_2 элементов $x_2 = (\xi_1;0;\xi_3;\xi_4)$, $y_2 = (\eta_1;0;\eta_3;\eta_4)$, $z_2 = (\zeta_1;0;\zeta_3;\zeta_4), \ldots$ являются подпространствами линейного пространства R.

508. Для линейного пространства R, рассмотренного в задаче 507, найти пересечение R_3 и сумму R_4 подпространств R_1 и R_2.

509. Показать, что для подпространств, указанных в задаче 508, выполняется равенство $d(R_1) + d(R_2) = d(R_3) + d(R_4)$.

510. Дано линейное пространство, состоящее из всех геометрических векторов. Является ли подпространством этого пространства множество векторов, начало которых совпадает с началом координат и расположенных в I октанте?

511. Дано линейное пространство R, элементами которого являются координаты точек $P = (x;y;z)$ I октанта, не лежащих на координатных плоскостях. Сложение двух каких-нибудь элементов $P_1=(x_1;y_1;z_1)$ и $P_2=(x_2;y_2;z_2)$ определено равенством $P_1 + P_2 = (x_1x_2; y_1y_2; z_1z_2)$, а умножение элемента $P = (x;y;z)$ на действительное число λ — равенством $\lambda P = (x^\lambda; y^\lambda; z^\lambda)$. Доказать, что множество R_1 точек этого пространства, расположенных на плоскости $z = 1$, является подпространством пространства R.

512. Дано линейное пространство R многочленов не выше пятой степени. Доказать, что множество R_1 многочленов вида $a_0t + a_1$ и множество R_2 многочленов $b_0t^4 + b_1t^2 + b_2$ являются подпространствами пространства R, если сложение элементов и умножение элемента на число понимать в обычном смысле.

513. Найти подпространства $R_3 = R_1 \cap R_2$ и $R_4 = R_1 + R_2$ по условию предыдущей задачи.

514. Рассматриваются два подпространства пространства R всех геометрических векторов; R_1 — множество векторов, параллельных координатной плоскости xOy, и R_2 — множество векторов, параллельных плоскости xOz. Найти $R_3 = R_1 \cap R_2$ и $R_4 = R_1 + R_2$.

515. Пусть R_1 и R_2 — подпространства линейного пространства R, а R'_1 и R'_2 подпространства линейного пространства R' Известно, что подпространства R_1 и R'_1, а также R_2 и R'_2 изоморфны. Доказать, что подпространства $R_3 = R_1 \cap R_2$ и $R'_3 = R'_1 \cap R'_2$, а также $R_4 = R_1 + R_2$ и $R'_4 = R'_1 + R'_2$ изоморфны.

516. Дано множество функций $f(x)$, непрерывных и положительных на отрезке $[-a; a]$. Доказать, что это множество является линейным пространством, если за сумму векторов принять произведение соответствующих функций, а за произведение вектора на действительное число λ — результат возведения в степень λ соответствующей функции. Является ли подпространством множество всех четных функций этого пространства? Множество всех нечетных функций этого пространства?

517. Рассматривается линейное пространство геометрических векторов. Образует ли подпространство этого пространства множество всех векторов $\boldsymbol{a} = Xi + Yj + Z\boldsymbol{k}$, где X, Y и Z — рациональные числа?

2. Подпространства, образуемые решениями линейной однородной системы уравнений. Рассмотрим линейную однородную систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, $\quad x_n = \lambda_n$ — какое-нибудь решение системы. Запишем это решение в виде вектора $f = (\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$. Совокупность линейно независимых решений $f_1, f_2, \ldots, f_n$ системы уравнений (1) называют *фундаментальной системой решений*, если любое решение системы уравнений (1) можно представить в виде линейной комбинации векторов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Теорема о существовании фундаментальной системы решений. *Если ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше n, то система (1) имеет ненулевые решения. Число векторов, определяющих фундаментальную систему решений, находится по формуле $k = n - r$, где r — ранг матрицы.

Таким образом, если рассматривается линейное пространство R^n векторами которого являются всевозможные системы n действительных чисел, то совокупность всех решений системы (1) является подпространством пространства R^n Размерность этого подпространства равна k.

518. Найти базис и размерность подпространства решений линейной однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0, \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

❑ Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

равен 1, поскольку все миноры матрицы, кроме миноров первого порядка, равны нулю. Число неизвестных равно 4; поэтому размерность подпространства решений $k = n - r = 4 - 1 = 3$, т.е. это подпространство является трехмерным. Так как $r = 1$, то достаточно взять какое-нибудь одно уравнение этой системы.

Возьмем первое уравнение и запишем его в виде $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4$. Если $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то $x_1 = -2$; если $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, то $x_1 = -3$, если $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, то $x_1 = -4$. Итак, мы получили линейно независимые векторы $f_1 = (-2; 1; 0; 0)$, $f_2 = (-3; 0; 1; 0)$, $f_3 = (-4; 0; 0; 1)$, которые образуют базис трехмерного подпространства решений данной системы. ■

519. Показать, что вектор $f = f_1 - 2f_2 + f_3$ удовлетворяет системе уравнений задачи 518.

520. Найти базис и размерность подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

❑ Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

равен 2, так как определитель третьего порядка, образуемый элементами матрицы, равен нулю, а среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля. Размерность подпространства решений $k = n - r = 3 - 2 = 1$. Так как $r = 2$, то достаточно взять два уравнения из заданных трех. Отбросим третье уравнение, поскольку его коэффициенты пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения. В системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3, \\ 2x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$$

полагаем $x_3 = 1$; тогда решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

есть $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Итак, подпространство решений определяется одним базисным вектором $f = (1; 1; 1)$. ■

521. Найти размерность и базис подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

❑ Найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычтем из третьей строки вторую, а из четвертой строки первую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Так как элементы третьей строки пропорциональны соответствующим элементам первой строки, а элементы четвертой строки пропорциональны элементам второй строки, то третью и четвертую строки можно вычеркнуть:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Значит, ранг матрицы A равен 2 и $k = n - r = 4 - 2 = 2$.

Итак, размерность подпространства решений равна 2. Так как $r = 2$, то из четырех уравнений возьмем два:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $f_1 = (0; 1; 1; 0)$.

Полагая теперь $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $f_2 = (0; -1; 0; 1)$. В качестве базисных векторов подпространства можно взять векторы $f_1 = (0; 1; 1; 0)$, $f_2 = (0; -1; 0; 1)$. Общее решение системы уравнений выражается вектором $f = c_1 f_1 + c_2 f_2$, т.е. $f = (0; c_1 - c_2; c_1; c_2)$. ■

522. Определить размерность подпространства решений, базис и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

§ 4

Линейные преобразования

1. Основные понятия. Будем говорить, что в линейном пространстве R задано *преобразование* A, если каждому вектору $x \in R$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $\mathrm{A}x \in R$. Преобразование A называют *линейным*, если для любых векторов x и y и для любого действительного числа λ выполняются равенства

$$\mathrm{A}(x + y) = \mathrm{A}x + \mathrm{A}y, \quad \mathrm{A}(\lambda x) = \lambda \mathrm{A}x.$$

Линейное преобразование называют *тождественным*, если оно преобразует любой вектор x в самого себя. Тождественное линейное преобразование обозначают через E. Таким образом, $\mathrm{E}x = x$.

523. Показать, что преобразование $\mathrm{A}x = \alpha x$, где α — действительное число, является линейным.

❏ Имеем $\mathrm{A}(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = \mathrm{A}x + \mathrm{A}y$, $\mathrm{A}(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda \mathrm{A}x$. Итак, оба условия, определяющие линейное преобразование, выполнены. Рассмотренное преобразование A называют *преобразованием подобия*. ■

524. Преобразование A в линейном пространстве R определено равенством $\mathrm{A}x = x + x_0$, где $x_0 \in R$ — фиксированный ненулевой вектор. Является ли преобразование A линейным?

❑ Из равенств $Ax = x + x_0$, $Ay = y + x_0$, $A(x+y) = x + y + x_0$, $A(x+y) = Ax + Ay$ заключаем, что $x + y + x_0 = (x + x_0) + (y + y_0)$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$, но это противоречит условию. Следовательно, преобразование A не является линейным. ■

525. Дано линейное пространство геометрических векторов. Преобразование A состоит в замене каждого вектора его составляющей по оси Ox. Является ли это преобразование линейным?

❑ Пусть $\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}$ — произвольные векторы, а λ — произвольное действительное число. Так как

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (X_1 + X_2)\boldsymbol{i} + (Y_1 + Y_2)\boldsymbol{j} + (Z_1 + Z_2)\boldsymbol{k}, \quad \lambda\boldsymbol{a} = \lambda X_1\boldsymbol{i} + \lambda Y_1\boldsymbol{j} + \lambda Z_1\boldsymbol{k},$$

то

$$A(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = (X_1 + X_2)\boldsymbol{i} = X_1\boldsymbol{i} + X_2\boldsymbol{i} = A\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b}, \quad A(\lambda\boldsymbol{a}) = AX_1\boldsymbol{i} = \lambda A\boldsymbol{a}.$$

Итак, A — линейное преобразование. ■

526. Является ли линейным преобразованием замена каждого геометрического вектора его симметричным отображением относительно координатной плоскости xOy?

527. Является ли линейным преобразованием умножение каждого геометрического вектора на его длину?

528. В каком случае преобразование A является линейным, если $Ax = x_0$, где x_0 — произвольный вектор линейного пространства R, а x_0 — фиксированный вектор?

529. Дано линейное пространство векторов $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$, где $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — всевозможные действительные числа. Пусть a — фиксированное действительное число. Является ли линейным преобразование A, определяемое равенством $Ax = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$?

530. Дано линейное пространство векторов $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4$. Преобразование A состоит в том, что у каждого вектора меняются местами вторая и третья координаты, т.е. $Ax = \xi_1 e_1 + \xi_3 e_2 + \xi_2 e_3 + \xi_4 e_4$. Является ли преобразование A линейным?

531. Пусть A — линейное преобразование. Доказать, что преобразование B, определяемое равенством $Bx = Ax - 2x$, является линейным.

2. Матрица линейного преобразования. Пусть в n-мерном линейном пространстве R, базис которого $e_1, e_2, \ldots, e_n$, задано линейное преобразование A. Так как $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ — векторы пространства R, то каждый из них можно разложить единственным образом по векторам базиса:

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \quad + a_{n1}e_n,\\
Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n,\\
\\
Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей линейного преобразования* A в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Столбцы этой матрицы составлены из коэффициентов в формулах преобразования базисных векторов. Возьмем в пространстве R какой-нибудь вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$. Так как $\mathrm{A}x \in R$, то и вектор $\mathrm{A}x$ можно разложить по векторам базиса:

$$\mathrm{A}x = x_1'e_1 + x_2'e_2 + \dots + x_n'e_n.$$

Координаты $(x_1'; x_2'; \dots; x_n')$ вектора $\mathrm{A}x$ выражаются через координаты $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ вектора x по формулам

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Эти n равенств можно назвать линейным преобразованием A в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Коэффициенты в формулах этого линейного преобразования являются элементами строк матрицы A.

532. Найти матрицу тождественного преобразования E в n-мерном пространстве.

❑ Тождественное преобразование не меняет базисных векторов: $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = e_3, \dots, e_n' = e_n$, т.е.

$$\begin{aligned} e_1' &= 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \\ e_2' &= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \\ &\dots \\ e_n' &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_n, \end{aligned}$$

Значит, матрицей линейного преобразования служит единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad ■$$

533. Найти матрицу преобразования подобия $\mathrm{A}x = \alpha x$ в n-мерном пространстве.

534. В четырехмерном линейном пространстве рассматривается линейное преобразование A. Записать это преобразование в координатной форме, если $Ae_1 = e_3 + e_4$, $Ae_2 = e_1 + e_4$, $Ae_3 = e_1 + e_2$, $Ae_4 = e_2 + e_3$.

❑ Матрица преобразования A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, преобразование A в координатной форме записывается так:

$$x_1' = x_2 + x_3, \quad x_2' = x_3 + x_4, \quad x_3' = x_1 + x_4, \quad x_4' = x_1 + x_2. \ ■$$

535. Линейное преобразование совокупности всех векторов на плоскости xOy заключается в повороте каждого вектора против часовой стрелки на угол α (рис. 22). Найти матрицу этого линейного преобразования в координатной форме.

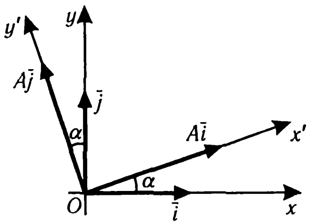

Рис. 22

❑ Так как $A\bar{i} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha$, $A\bar{j} = -\bar{i}\sin\alpha + \bar{j}\cos\alpha$, то

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Поэтому данное линейное преобразование имеет вид

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha; \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \ ■$$

536. Рассматривается линейное пространство векторов $\boldsymbol{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, где x_1, x_2, x_3, x_4 — всевозможные действительные числа. Доказать, что преобразование A, определяемое равенством $A\boldsymbol{x} = x_2e_1 + x_3e_2 + x_4e_3 + x_1e_4$, является линейным, и найти его матрицу.

3. Действия над линейными преобразованиями. В приведенных ниже определениях примем следующие обозначения: A и B — произвольные линейные преобразования в линейном пространстве R, λ — произвольное действительное число, $\boldsymbol{x} \in R$ — любой элемент.

Суммой линейных преобразований A и B называют преобразование C_1, определяемое равенством $C_1\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}$. Обозначение: $C_1 = A + B$.

Произведением линейного преобразования A *на число* λ называют преобразование C_2, определяемое равенством $C_2\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x}$. Обозначение: $C_2 = \lambda A$.

Произведением линейного преобразования A *на линейное преобразование* B называют преобразование C_3, определяемое равенством $C_3\boldsymbol{x} = AB\boldsymbol{x}$. Обозначение: $C_3 = AB$.

Преобразования C_1, C_2 и C_3 являются линейными. Матрицы линейных преобразований C_1, C_2 и C_3 определяются из равенств $C_1 = A + B$, $C_2 = \lambda A$, $C_3 = AB$.

При сложении линейных преобразований выполняется переместительный закон; произведение же AB, вообще говоря, отличается от произведения BA.

Перечислим некоторые свойства операций над линейными преобразованиями в пространстве R:

$$A(BC) = (AB)C; \quad AE = EA = A; \quad (A+B)C = AC+BC; \quad C(A+B) = CA+CB.$$

Если для линейного преобразования A найдутся такие линейные преобразования B и C, что $BA = E$, $AC = E$, то $B = C$. В этом случае обозначают $B = C = A^{-1}$, а линейное преобразование A^{-1} называют *обратным линейным преобразованием* по отношению к линейному преобразованию A. Таким образом, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Линейное преобразование A в конечномерном пространстве называют *невырожденным*, если определитель матрицы этого преобразования отличен от нуля. Каждое невырожденное линейное преобразование A имеет обратное преобразование A^{-1} и притом только одно.

Если невырожденное линейное преобразование A в координатной форме определяется равенствами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + \quad + a_{1n}u, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + \dots + a_{2n}u, \\ & \\ u' &= a_{n1}x + a_{n2}y + \dots + a_{nn}u, \end{aligned}$$

то обратное линейное преобразование A^{-1} записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_{11}}{|A|}x' + \frac{A_{21}}{|A|}y' + \quad + \frac{A_{n1}}{|A|}u', \\ y &= \frac{A_{12}}{|A|}x' + \frac{A_{22}}{|A|}y' + \quad + \frac{A_{n2}}{|A|}u', \\ & \\ u &= \frac{A_{1n}}{|A|}x' + \frac{A_{2n}}{|A|}y' + \dots + \frac{A_{nn}}{|A|}u', \end{aligned}$$

Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, а $|A|$ — определитель матрицы A.

Матрица обратного линейного преобразования A^{-1} является обратной по отношению к матрице A и имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

537. Преобразование A заключается в повороте на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ каждого вектора плоскости xOy. Найти в координатной форме преобразование $A + E$.

❑ Имеем

$$Ai = i\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j;$$

$$Aj = i\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j.$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Так как $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$A + E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Значит, линейное преобразование A + E можно записать с помощью равенств

$$x' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)y. \quad \blacksquare$$

538. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y + 3z, \\ y' &= 4x + 5y + 6z, \quad (A) \\ z' &= 7x + 8y + 9z \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x' &= x + 3y + 4{,}5z, \\ y' &= 6x + 7y + 9z, \quad (B) \\ z' &= 10{,}5x + 12y + 13z. \end{aligned}$$

Найти 3A – 2B.

539. Даны линейные преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= y + z, \quad (A) \\ z' &= z + x \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} x' &= y + z, \\ y' &= x + z, \quad (B) \\ z' &= x + y. \end{aligned}$$

Найти преобразования AB и BA.

❑ Матрицы данных преобразований имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем произведения этих матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

В данном случае $AB = BA$, поэтому линейные преобразования AB и BA совпадают. Координатная форма преобразования AB записывается следующим образом: $x' = x + y + 2z$, $y' = 2x + y + z$, $z' = x + 2y + z$. ■

540. Пусть над совокупностью векторов $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ на плоскости xOy производятся два линейных преобразования: A — замена вектора его составляющей по оси Ox; B — симметричное отображение вектора относительно биссектрисы I и III координатных углов. Найти преобразования AB и BA.

❑ Согласно условию, $\mathrm{A}\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{i}$, $\mathrm{B}\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{i}$. Таким образом, $\mathrm{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$, $\mathrm{A}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{B}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$, $\mathrm{B}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, преобразование AB определяется равенствами $x' = y$, $y' = 0$, а преобразование BA — равенствами $x' = 0$, $y' = x$. Рекомендуем получить эти равенства самостоятельно, используя геометрические соображения. ■

541. Преобразование A заключается в повороте на угол α каждого вектора плоскости xOy. Найти матрицу преобразования A^2 (т.е. A A).

❑ Так как $\mathrm{A}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha$, $\mathrm{A}\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha$, то

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Таким образом, преобразование A^2 в координатной форме определяется равенствами $x' = x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha$, $y' = x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha$. Этот результат можно получить и из чисто геометрических соображений. ■

542. Линейное преобразование A заключается в повороте на угол $\frac{\pi}{4}$ каждого вектора плоскости xOy. Найти матрицу линейного преобразования $\mathrm{B} = \mathrm{A}^2 + \sqrt{2}\mathrm{A} + \mathrm{E}$.

❑ Последовательно находим

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{2}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ■$$

543. Дано пространство геометрических векторов. Пусть линейное преобразование A — поворот пространства вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{4}$, а линейное преобразование B — поворот пространства вокруг оси Ox на тот же угол. Найти матрицу линейного преобразования AB.

❑ Имеем

$$\mathrm{A}i = i\cos\tfrac{\pi}{4} + j\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}i + \tfrac{\sqrt{2}}{2}j,$$

$$\mathrm{A}j = -i\sin\tfrac{\pi}{4} + j\cos\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}i + \tfrac{\sqrt{2}}{2}j,$$

$$\mathrm{A}k = k; \quad \mathrm{B}i = i; \quad \mathrm{B}j = \tfrac{\sqrt{2}}{2}j + \tfrac{\sqrt{2}}{2}k,$$

$$\mathrm{B}k = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}j + \tfrac{\sqrt{2}}{2}k.$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

544. Дано линейное преобразование A: $x' = -0{,}5(y+z)$, $y' = -0{,}5(x+z)$, $z' = -0{,}5(x+y)$. Найти матрицу обратного линейного преобразования.

545. Рассматривается совокупность всех геометрических векторов. Линейное преобразование A — симметричное отображение этих векторов относительно плоскости P. Найти A^{-1}

546. В линейном пространстве с базисом e_1, e_2 дано линейное преобразование A. Найти матрицу обратного преобразования, если $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_1$.

547. Линейное преобразование A заключается в повороте на угол α каждого вектора плоскости xOy. Найти матрицу $B = A + A^{-1}$

548. Дано линейное преобразование A: $x' = x + y$, $y' = 2(x + y)$. Найти обратное линейное преобразование.

549. Линейное преобразование A заключается в повороте на угол $\frac{\pi}{4}$ каждого вектора плоскости xOy. Найти матрицу A^{-2}

550. При каком значении λ линейное преобразование $x' = -2x + y + z$, $y' = x - 2y + z$, $z' = x + y + \lambda z$ не имеет обратного?

4. Характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования. Пусть R — заданное n-мерное линейное пространство. Ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in R$ называют *собственным вектором* линейного преобразования A, если найдется такое число λ, что выполняется равенство $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Само число λ называют *характеристическим числом* линейного преобразования A, соответствующим вектору $\boldsymbol{x}$.

Если линейное преобразование A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то характеристическими числами линейного преобразования A служат действительные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения n-й степени, которое можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение называют *характеристическим уравнением*, а его левую часть — *характеристическим многочленом* линейного преобразования A. Собственным вектором x_k, соответствующим характеристическому числу λ_k, является любой вектор $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \quad + \xi_n e_n$, координаты которого удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_k)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda_k)\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda_k)\xi_n = 0. \end{cases}$$

Отметим следующие важные **теоремы**.

Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Если матрица A линейного преобразования A является симметрической, то все корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ — действительные числа.

551. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, определяемого уравнениями $x' = 5x + 4y$, $y' = 8x + 9y$.

❑ Матрица преобразования запишется так: $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0;$$

характеристические числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$.

Для определения координат собственных векторов получаем две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_1)\xi_2 = 0; \end{cases} (*) \qquad \begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + (9-\lambda_2)\xi_2 = 0. \end{cases} (**)$$

При $\lambda_1 = 1$ систему $(*)$ можно записать так:

$$\begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Поэтому значения ξ_1 и ξ_2 должны удовлетворять уравнению $\xi_1 + \xi_2 = 0$, или $\xi_2 = -\xi_1$. Значит, решение этой системы имеет вид $\xi_1 = c_1$, $\xi_2 = -c_1$, где c_1 — произвольная величина. Отсюда следует, что характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует семейство собственных векторов $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{e}_1 - c_1\boldsymbol{e}_2$, т.е. $\boldsymbol{u} = c_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$.

При $\lambda_2 = 13$ система (**) примет вид

$$\begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 = 0, \end{cases}$$

т.е. $\xi_2 = 2\xi_1$. Полагая $\xi_1 = c_2$, получаем $\xi_2 = 2c_2$. Следовательно, характеристическому числу $\lambda = 13$ соответствует семейство собственных векторов $\boldsymbol{v} = c_2(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)$.

Итак, придавая в равенствах $\boldsymbol{u} = c_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$, $\boldsymbol{v} = c_2(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)$ величинам c_1 и c_2 всевозможные числовые значения, будем получать всевозможные собственные векторы линейного преобразования A. ■

Найти характеристические числа и собственные векторы линейных преобразований с заданными матрицами.

552. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. **553.** $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. **554.** $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

555. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

❑ Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е.

$$(1-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = 0, \quad (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1, \ \lambda_3 = 3.$$

Если $\lambda = 1$, то для определения координат собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует семейство собственных векторов $\boldsymbol{u} = c_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$.

Если $\lambda = 3$, то для определения координат собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0, \\ \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Семейство собственных векторов, соответствующих этому характеристическому числу, определяется равенством $v = c_2(e_1 - e_2)$. ■

556. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **557.** $A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

558. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

559. Доказать, что если

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— симметрическая матрица, а действительные числа α, β и γ отличны от нуля, то все корни характеристического уравнения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\frac{\alpha}{\beta} & a_{13}\frac{\alpha}{\gamma} \\ a_{21}\frac{\beta}{\alpha} & a_{22} & a_{23}\frac{\beta}{\gamma} \\ a_{31}\frac{\gamma}{\alpha} & a_{32}\frac{\gamma}{\beta} & a_{33} \end{pmatrix}$$

являются действительными числами.

❑ В базисе e_1, e_2, e_3 рассмотрим линейное преобразование A с матрицей A. Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{A}e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}\frac{\beta}{\alpha}e_2 + a_{31}\frac{\gamma}{\alpha}e_3, \\ \mathrm{A}e_2 &= a_{12}\frac{\alpha}{\beta}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}\frac{\gamma}{\beta}e_3, \\ \mathrm{A}e_3 &= a_{13}\frac{\alpha}{\gamma}e_1 + a_{23}\frac{\beta}{\gamma}e_2 + a_{33}e_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\alpha e_1) &= a_{11}\alpha e_1 + a_{21}\beta e_2 + a_{31}\gamma e_3, \\ \mathrm{A}(\beta e_2) &= a_{12}\alpha e_1 + a_{22}\beta e_2 + a_{32}\gamma e_3, \\ \mathrm{A}(\gamma e_3) &= a_{13}\alpha e_1 + a_{23}\beta e_2 + a_{33}\gamma e_3. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha e_1 = e_1'$, $\beta e_2 = e_2'$, $\gamma e_3 = e_3'$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{A}e_1' &= a_{11}e_1' + a_{21}e_2' + a_{31}e_3', \\ \mathrm{A}e_2' &= a_{12}e_1' + a_{22}e_2' + a_{32}e_3', \\ \mathrm{A}e_3' &= a_{13}e_1' + a_{23}e_2' + a_{33}e_3'. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицей линейного преобразования А в базисе e'_1, e'_2, e'_3 служит симметрическая матрица

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Следовательно, характеристическое уравнение линейного преобразования А в базисе e'_q, e'_2, e'_3 имеет только действительные корни. Поскольку при переходе к базису e_1, e_2, e_3 характеристические числа не меняются, те же корни имеет и характеристическое уравнение матрицы A. ■

560. Линейное преобразование А заключается в повороте пространства на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси Oz. Найти характеристические числа и собственные векторы этого преобразования.

У Показать, что матрица этого линейного преобразования имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

561. Зная характеристические числа линейного преобразования А, найти характеристические числа обратного линейного преобразования A^{-1}

У Показать, что из уравнения $|A^{-1} - \lambda E| = 0$ следует $\left|A - \frac{1}{\lambda}E\right| = 0$.

§ 5

Евклидово пространство

Линейное пространство R называют *евклидовым*, если имеется правило, которое позволяет каждым двум векторам x и y из R сопоставить действительное число, называемое *скалярным произведением* векторов x и y и обозначаемое (x, y), причем это правило удовлетворяет следующим условиям:

1° $(x, y) = (y, x)$.

2° $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

3° $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого действительного числа λ.

4° $(x, x) > 0$, если $x \neq 0$.

Из условий 1° –4° следует, что:

а) $(y + z, x) = (y, x) + (z, x)$;

б) $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$;

в) $(0, x) = 0$ для любого вектора x.

Скалярное произведение любого вектора $x \in R$ на себя называют *скалярным квадратом* вектора x.

Длиной вектора x в евклидовом пространстве называют квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора, т.е. $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Если λ — любое действительное число, а x — любой вектор евклидова пространства, то $|\lambda x| = |\lambda|\;|x|$.

Вектор, длина которого равна единице, называют ***нормированным***. Если $x \in R$ — ненулевой вектор, то нетрудно установить, что вектор $\frac{1}{|x|}\;x$ (его можно записать в виде $\frac{x}{|x|}$) является нормированным.

Для любых двух векторов x и y в евклидовом пространстве выполняется неравенство

$$(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y),$$

называемое ***неравенством Коши–Буняковского***.

Равенство $(x,y)^2 = (x,x)(y,y)$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что $-1 \leqslant \frac{(x,y)}{|x|\cdot|y|} \leqslant 1$. Угол φ, определяемый равенством $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x|\;|y|}$ и принадлежащий отрезку $[0;\pi]$, называют ***углом между векторами*** x и y. Если x и y — ненулевые векторы, а $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $(x,y) = 0$. В этом случае говорят, что векторы x и y ***ортогональны***, и пишут $x \perp y$.

Для произвольных векторов x и y евклидова пространства имеют место следующие важные соотношения:

1. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (***неравенство треугольника***).

2. Пусть φ — угол между векторами x и y; тогда

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\;|y|\cos\varphi$$

(***теорема косинусов***). Если $x \perp y$, то получается равенство

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Заменяя в последнем равенстве y на $-y$, получаем

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

(***теорема Пифагора***).

562. Дано линейное пространство, рассмотренное в задаче 461. Можно ли скалярное произведение двух произвольных векторов $x = (\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n)$ и $y = (\eta_1;\eta_2;\ldots;\eta_n)$ определить равенством $(x,y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n$ (для того чтобы это пространство стало евклидовым)?

❑ Проверим выполнение условий 1° –4°

1° Так как $(y,x) = \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 + \cdots + \eta_n\xi_n$, то $(x,y) = (y,x)$.

2° Пусть $z = (\zeta_1;\zeta_2;\ldots;\zeta_n)$. Тогда $y+z = (\eta_1+\zeta_1;\eta_2+\zeta_2;\ldots;\eta_n+\zeta_n)$ и

$$(x,y+z) = \xi_1\eta_1 + \xi_1\zeta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_2\zeta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n + \xi_n\zeta_n =$$
$$= (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + \xi_n\eta_n) + (\xi_1\zeta_1 + \xi_2\zeta_2 + \cdots + \xi_n\zeta_n) = (x,y) + (x,z).$$

3° $(\lambda x, y) = \lambda\xi_1\eta_1 + \lambda\xi_2\eta_2 + \dots + \lambda\xi_n\eta_n = \lambda(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n) = \lambda(x, y)$.

4° $(x, x) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \neq 0$, если хотя бы одно из чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ отлично от нуля.

Значит, в заданном пространстве с помощью указанного равенства можно определить скалярное произведение. ■

563. Дано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 562. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — количество n видов изделий, выпускаемых ежедневно заводом, а $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — соответственно цены этих изделий. Как можно истолковать скалярное произведение векторов $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ и $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$?

564. Дано линейное пространство, векторами которого являются всевозможные системы, состоящие из n положительных чисел: $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$, $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$, $z = (\zeta_1; \zeta_2; \dots; \zeta_n)$. Сложение векторов и умножение вектора на число определены равенствами $x + y = (\xi_1\eta_1; \xi_2\eta_2; \dots; \xi_n\eta_n)$, $\lambda x = (\xi_1^\lambda; \xi_2^\lambda; \dots; \xi_n^\lambda)$. Можно ли сделать это пространство евклидовым, определив скалярное произведение равенством

$$(x, y) = \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \dots + \ln\xi_n \ln\eta_n?$$

❑ Проверим выполнение условий 1°–4°.

1° $(x, y) = \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \dots + \ln\xi_n \ln\eta_n$, $(y, x) = \ln\eta_1 \ln\xi_1 + \ln\eta_2 \ln\xi_2 + \dots + \ln\eta_n \ln\xi_n$, т.е. $(x, y) = (y, x)$.

2° Так как $y + z = (\eta_1\zeta_1; \eta_2\zeta_2; \dots; \eta_n\zeta_n)$, то

$$(x, y+z) = \ln\xi_1 \ln(\eta_1\zeta_1) + \ln\xi_2 \ln(\eta_2\zeta_2) + \dots + \ln\xi_n \ln(\eta_n\zeta_n) =$$
$$= \ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \dots + \ln\xi_n \ln\eta_n + \ln\xi_1 \ln\zeta_1 + \ln\xi_2 \ln\zeta_2 + \dots + \ln\xi_n \ln\zeta_n =$$
$$= (x, y) + (x, z).$$

3° Так как $\lambda x = (\xi_1^\lambda; \xi_2^\lambda; \dots; \xi_n^\lambda)$, то

$$(\lambda x, y) = \ln\xi_1^\lambda \ln\eta_1 + \ln\xi_2^\lambda \ln\eta_2 + \dots + \ln\xi_n^\lambda \ln\eta_n =$$
$$= \lambda(\ln\xi_1 \ln\eta_1 + \ln\xi_2 \ln\eta_2 + \dots + \ln\xi_n \ln\eta_n) = \lambda(x, y).$$

4° $(x, x) = \ln^2\xi_1 + \ln^2\xi_2 + \dots + \ln^2\xi_n \geqslant 0$.

Следовательно, рассматриваемое пространство является евклидовым. ■

565. Рассматривается линейное пространство непрерывных в промежутке $[a; b]$ функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t), \dots$ Можно ли сделать это пространство линейным, определив скалярное произведение двух любых векторов x и y равенством $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)y(t)\,dt$?

566. Является ли множество всех геометрических векторов евклидовым пространством, если скалярное произведение двух векторов определить как произведение их длин?

567. Образует ли множество всех геометрических векторов евклидово пространство, если определить скалярное произведение двух произвольных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ как произведение длины вектора $\boldsymbol{a}$ и утроенной проекции вектора $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{a}$?

568. Задано линейное пространство, рассмотренное в задаче 562, где $n=4$. Определить угол между векторами $\boldsymbol{x} = (4; 1; 2; 2)$ и $\boldsymbol{y} = (1; 3; 3; -9)$.

❑ Имеем $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{16^2+1+4+4} = 5$; $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})} = \sqrt{1+9+9+81} = 10$; $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 4+3+6-18 = -5$; $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}|\ |\boldsymbol{y}|} = \dfrac{-5}{5\cdot 10} = -0,1$; $\varphi = \arccos(-0,1) = 174°15'$ ■

569. Задано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 562. Определить угол между векторами $\boldsymbol{x} = (1; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \ldots; \sqrt{2n-1})$ и $\boldsymbol{y} = (1; 0; 0; \ldots; 0)$.

570. Рассматривается евклидово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{z}(t), \ldots$ на отрезке $[-1; 1]$. Скалярное произведение определено равенством $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int\limits_{-1}^{1} \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}(t)\,\mathrm{d}t$. Найти угол между векторами $\boldsymbol{x}=3t^2-1$ и $\boldsymbol{y}=3t-5t^3$

❑ Имеем $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int\limits_{-1}^{1} (3t^2-1)(3t-5t^3)\,\mathrm{d}t$. Очевидно, что $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$, так как подынтегральная функция является нечетной. Следовательно, векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны. ■

571. Задано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 562, где $n = 6$. Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов $\boldsymbol{x} = (1; 0; 2; 0; 2; 0)$ и $\boldsymbol{y} = (0; 6; 0; 3; 0; 2)$.

❑ Имеем

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{1+0+4+0+4+0} = 3, \quad |\boldsymbol{y}| = \sqrt{0+36+0+9+0+4} = 7;$$
$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (1; 6; 2; 3; 2; 2); \quad |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| = \sqrt{1+36+4+9+4+4} = \sqrt{58}.$$

Итак, $|\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2$ ■

572. В евклидовом пространстве непрерывных функций, соответствующих условию задачи 565, рассматриваются два вектора: $\boldsymbol{x} = t^2+1$, $\boldsymbol{y} = \lambda t^2 + 1$. Найти значение λ, при котором векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны на отрезке $[0; 1]$, и проверить справедливость теоремы Пифагора для этих векторов.

❑ Составим скалярное произведение

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int\limits_{0}^{1} (t^2+1)(\lambda t^2+1)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{5} + \frac{\lambda+1}{3} + 1.$$

Из условия $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ имеем $\dfrac{\lambda}{5} + \dfrac{\lambda+1}{3} + 1 = 0$, откуда $\lambda = -\dfrac{5}{2}$.

Найдем теперь длины векторов $x=t^2+1$, $y=-\frac{5}{2}t^2+1$ и $x+y=-\frac{3}{2}t^2+2$:

$$|x| = \sqrt{\int_0^1 (t^4+2t^2+1)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1} = \sqrt{\frac{28}{15}},$$

$$|y| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{25}{4}t^4 - 5t^2 + 1\right) dt} = \sqrt{\frac{5}{4}-\frac{5}{3}+1} = \sqrt{\frac{7}{12}},$$

$$|x+y| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{9}{4}t^4 - 6t^2 + 4\right) dt} = \sqrt{\frac{9}{20}-2+4} = \sqrt{\frac{49}{20}}.$$

Итак, $|x|^2 = \frac{28}{15}$, $|y|^2 = \frac{7}{12}$, $|x+y|^2 = \frac{49}{20}$, т.е. $|x|^2+|y|^2 = |x+y|^2$ ■

573. Рассматривается множество всевозможных упорядоченных систем геометрических векторов $a^*=(a_1;a_2;\ldots;a_n)$; $b^*=(b_1;b_2;\ldots;b_n)$, ... Является ли это множество евклидовым пространством, если сложение элементов, умножение элемента на число и скалярное произведение определить равенствами $a^*+b^* = (a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ \ldots\ a_n+b_n)$; $\lambda a^* = (\lambda a_1;\lambda a_2;\ldots;\lambda a_n)$, $(a^*,b^*) = a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ (правая часть последнего равенства представляет собой сумму скалярных произведений геометрических векторов)?

574. Доказать справедливость неравенств:

$$\sqrt{(\xi_1+\eta_1)^2+(\xi_2+\eta_2)^2+\cdots+(\xi_n+\eta_n)^2} \leqslant \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}+\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2};$$

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2) \leqslant (\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n)^2,$$

где $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ — действительные числа.

Воспользоваться неравенствами треугольника и Коши–Буняковского для евклидова пространства, рассмотренного в задаче 562.

575. Рассматриваются всевозможные непрерывные на отрезке [0; 1] функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ... Доказать справедливость неравенств:

$$\sqrt{\int_0^1 (x+y)^2\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^1 x^2\,dt} + \sqrt{\int_0^1 y^2\,dt},$$

$$\int_0^1 \frac{y^2}{x^2}\,dt \geqslant \frac{\left(\int_0^1 y\,dt\right)^2}{\left(\int_0^1 x^2\,dt\right)}, \quad \text{если} \quad x(0) \neq 0.$$

§ 6

Ортогональный базис и ортогональные преобразования

1. Ортогональный базис. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства называют *ортогональным*, если $(e_i, e_k) = 0$ при $i \neq k$.

Справедлива следующая **теорема**: *во всяком евклидовом пространстве имеется ортогональный базис.* Если ортогональный базис состоит из нормированных векторов, то этот базис называют *ортонормированным*. Для ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ выполняются равенства

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Если в n-мерном евклидовом пространстве известен какой-нибудь базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то в этом пространстве всегда можно найти и ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Любой вектор x евклидова пространства, заданный в ортонормированном базисе, определяется равенством

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n.$$

Длина вектора x находится по формуле

$$|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}.$$

Два вектора $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$ и $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \cdots + \eta_n e_n$ линейно независимы (коллинеарны, пропорциональны) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2} = \cdots = \frac{\xi_n}{\eta_n}.$$

Условие ортогональности векторов x и y имеет вид

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n = 0.$$

Угол между двумя векторами x и y находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2} \cdot \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \cdots + \eta_n^2}}$$

В следующих задачах ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства обозначается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

576. Найти длину вектора $x = 4e_1 - 2e_2 + 2e_3 - e_4$.

577. Нормировать вектор $x = e_1 + 2\sqrt{2}e_2 + 3\sqrt{3}e_3 + 8e_4 + 5\sqrt{5}e_5$.

578. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3. Доказать, что базис e'_1, e'_2, e'_3 — ортонормированный.

579. Нормировать вектор

$$x = e_1 \sin^3\alpha + e_2 \sin^2\alpha\cos\alpha + e_3 \sin\alpha\cos\alpha + e_4\cos\alpha.$$

580. Определить угол между векторами $x = e_1\sqrt{7} + e_2\sqrt{5} + e_3\sqrt{3} + e_4$ и $y = e_1\sqrt{7} + e_2\sqrt{5}$.

581. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам $x = 3e_1 - e_2 - e_3 - e_4$, $y = e_1 - 3e_2 + e_3 + e_4$, $z = e_1 + e_2 - 3e_3 + e_4$.

582. При каком значении λ векторы $x = \lambda e_1 + \lambda e_2 - e_3 - \lambda e_4$ и $y = e_1 - e_2 + \lambda e_3 - e_4$ имеют одинаковые длины?

583. В четырехмерном пространстве дан базис f_1, f_2, f_3, f_4. С помощью векторов этого базиса построить ортонормированный базис того же пространства.

❑ Сначала построим в заданном пространстве какой-нибудь ортогональный базис g_1, g_2, g_3, g_4. Положим $g_1 = f_1$, $g_2 = f_2 + \alpha g_1$. Подберем действительное число α так, чтобы выполнялось условие $g_2 \perp g_1$. Умножив скалярно на g_1 обе части последнего равенства, имеем

$$(g_1, g_2) = (g_1, f_2) + \alpha(g_1, g_1).$$

Так как $(g_1, g_2) = 0$, то

$$\alpha = -\frac{(g_1, f_2)}{(g_1, g_1)}.$$

Далее в равенстве $g_3 = f_3 + \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2$ подберем β_1 и β_2 так, чтобы выполнялись условия $g_3 \perp g_1$, $g_3 \perp g_2$. Из равенств

$$(g_1, g_3) = (g_1, f_3) + \beta_1(g_1, g_1) + \beta_2(g_1, g_2),$$
$$(g_2, g_3) = (g_2, f_3) + \beta_1(g_1, g_2) + \beta_2(g_2, g_2)$$

получим

$$\beta_1 = -\frac{(g_1, f_3)}{(g_1, g_1)}, \quad \beta_2 = -\frac{(g_2, f_3)}{(g_2, g_2)}.$$

Наконец, из равенства $g_4 = f_4 + \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3$ находим

$$\gamma_1 = -\frac{(g_1, f_4)}{(g_1, g_1)}, \quad \gamma_2 = -\frac{(g_2, f_4)}{(g_2, g_2)}, \quad \gamma_3 = -\frac{(g_3, f_4)}{(g_3, g_3)}.$$

Итак, при сделанном выборе чисел $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ векторы g_1, g_2, g_3, g_4 попарно ортогональны. Значит, векторы $e_1 = \dfrac{g_1}{|g_1|}$, $e_2 = \dfrac{g_2}{|g_2|}$, $e_3 = \dfrac{g_3}{|g_3|}$, $e_4 = \dfrac{g_4}{|g_4|}$ образуют ортонормированный базис. ■

584. Рассматривается евклидово пространство многочленов не выше второй степени. Скалярное произведение двух произвольных многочленов $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определено равенством $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$. Используя базис $f_1 = t^2$, $f_2 = t$, $f_3 = 1$ и применив метод решения, рассмотренный в задаче 583, построить для этого пространства ортонормированный базис.

❏ Сначала построим ортогональный базис g_1, g_2, g_3. Положим $g_1 = f_1$, т.е. $g_1 = t^2$, $g_2 = f_2 + \alpha g_1 = t + \alpha t^2$ Тогда

$$\int\limits_0^1 g_2 t^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^3\,\mathrm{d}t + \alpha \int\limits_0^1 t^4\,\mathrm{d}t.$$

В силу ортогональности векторов g_1 и g_2 левая часть последнего равенства обращается в нуль. Таким образом, $\alpha = -\dfrac{5}{4}$ и $g_2 = t - \dfrac{5t^2}{4}$.

Найдем теперь g_3. В равенстве $g_3 = 1 + \beta_1 t^2 + \beta_2\left(t - \dfrac{5t^2}{4}\right)$ значения β_1 и β_2 определяем из условий ортогональности:

$$\int\limits_0^1 g_3 t^2\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 g_3\left(t - \frac{5}{4}t^2\right)\mathrm{d}t = 0.$$

Следовательно,

$$0 = \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t + \beta_1 \int\limits_0^1 t^4\,\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad 0 = \int\limits_0^1 \left(t - \frac{5}{4}t^2\right)\mathrm{d}t + \beta_2 \int\limits_0^1 \left(t - \frac{5}{4}t^2\right)\mathrm{d}t.$$

Отсюда $\beta_1 = -\dfrac{5}{3}$, $\beta_2 = -4$, $g_3 = 1 - \dfrac{5}{3}t^2 - 4\left(t - \dfrac{5}{4}t^2\right)$, т.е. $g_3 = 1 - 4t + \dfrac{10}{3}t^2$

Находим длины векторов $g_1 = t^2$, $g_2 = t - \dfrac{5}{4}t^2$ и $g_3 = 1 - 4t + \dfrac{10}{3}t^2$:

$$|g_1| = \sqrt{\int\limits_0^1 t^4\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad |g_2| = \sqrt{\int\limits_0^1 \left(t - \frac{5}{4}t^2\right)^2\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\sqrt{3}},$$

$$|g_3| = \sqrt{\int\limits_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3}t^2\right)^2\mathrm{d}t} = \sqrt{\int\limits_0^1 \left(1 - 8t + \frac{68}{3}t^2 - \frac{80}{3}t^3 + \frac{100}{9}t^4\right)\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}.$$

Итак, векторы

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|} = \sqrt{5}t^2, \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|} = \sqrt{3}(4t - 5t^2), \quad e_3 = \frac{g_3}{|g_3|} = 3 - 12t + 10t^2$$

образуют ортонормированный базис. ■

585. При каком значении λ базис, образуемый векторами $g_1 = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $g_2 = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4$, $g_3 = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4$, $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4$, является ортогональным? Нормировать этот базис.

❑ Из условия $(e_i, e_k) = 0$ (при $i \neq k$) получаем уравнение $\lambda + \lambda + 1 + 1 = 0$. Следовательно, $\lambda = -1$ и $g_1 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $g_2 = e_1 - e_2 + e_3 + e_4$, $g_3 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$, $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $|g_i| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$.

Таким образом, векторы $e_1' = 0{,}5(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $e_2' = 0{,}5(e_1 - e_2 + e_3 + e_4)$, $e_3' = 0{,}5(e_1 + e_2 - e_3 + e_4)$, $e_4' = 0{,}5(e_1 + e_2 + e_3 - e_4)$ образуют ортонормированный базис. ■

586. При каких значениях α и β базис, образуемый векторами $e_1' = \frac{\alpha}{3}e_1 + \frac{1-\alpha}{3}e_2 + \beta e_3$, $e_2' = \frac{1-\alpha}{3}e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3}e_3$, $e_3' = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3}e_2 + \frac{1-\alpha}{3}e_3$, является ортонормированным?

❑ Из условий $|e_i'| = 1$, $(e_i', e_k') = 0$ (при $i \neq k$) получим систему

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 9\beta^2 = 9, \\ \alpha(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\beta + 3\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что $\beta = -\frac{1}{3}\alpha(\alpha - 1)$. Подставив это выражение в первое уравнение, имеем

$$\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9; \quad 1 - 2(1-\alpha)\alpha + \alpha^2(1-\alpha)^2 = 9; \quad (1 - \alpha + \alpha^2)^2 = 9.$$

Так как $1 - \alpha + \alpha^2 > 0$ при всех действительных значениях α, то $1 - \alpha + \alpha^2 = 3$, т.е. $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Следовательно, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = -\frac{2}{3}$, $\beta_2 = \frac{2}{3}$.

Итак, получаем два ортонормированных базиса:

$$e_1^{(1)} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3, \quad e_2^{(1)} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3, \quad e_3^{(1)} = -\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3,$$

$$e_1^{(2)} = \frac{2}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, \quad e_2^{(2)} = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_2, \quad e_3^{(2)} = \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3. \quad ■$$

2. Ортогональные преобразования. Линейное преобразование A евклидова пространства называют *ортогональным*, если оно сохраняет скалярное произведение любых двух векторов x и y этого пространства, т.е. $(\mathrm{A}x, \mathrm{A}y) = (x, y)$. Длина вектора x при этом не изменяется, т.е. $|\mathrm{A}x| = |x|$. Таким образом,

$$\frac{(x, y))}{|x| \cdot |y|} = \frac{(\mathrm{A}x, \mathrm{A}y))}{|\mathrm{A}x|\ |\mathrm{A}y|}.$$

Из последнего равенства следует, что ортогональное преобразование A не изменяет угла между любыми двумя векторами x и y.

Ортогональное преобразование переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный. Наоборот, если линейное преобразование переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный, то оно является ортогональным.

587. Является ли ортогональным преобразование, переводящее каждый геометрический вектор в вектор, симметричный относительно некоторой фиксированной плоскости?

588. Является ли ортогональным преобразование, заключающееся в повороте любого вектора, лежащего в плоскости xOy, на фиксированный угол α?

589. При каких значениях λ преобразование A, определяемое равенством $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, является ортогональным?

590. Является ли ортогональным преобразование A, определяемое в каком-нибудь ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

если

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \quad a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0,$$
$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1,$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \quad a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1?$$

591. Является ли ортогональным преобразование $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = -\xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3 + \xi_4\boldsymbol{e}_4$, где $\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3 + \xi_4\boldsymbol{e}_4$ — произвольный вектор, а $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ — ортонормированный базис?

592. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_5$, $\boldsymbol{e}_6$ — ортонормированный базис. Доказать, что A — ортонормированное преобразование, если $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2$, $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3\cos\alpha + \boldsymbol{e}_4\sin\alpha$, $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_4 = -\boldsymbol{e}_3\sin\alpha + \boldsymbol{e}_4\cos\alpha$, $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{e}_5\cos\beta + \boldsymbol{e}_6\sin\beta$, $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_6 = -\boldsymbol{e}_5\sin\beta + \boldsymbol{e}_6\cos\beta$.

§ 7

Квадратичные формы

Квадратичной формой действительных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а λ — какое-нибудь действительное число, то

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пусть $n = 2$; тогда

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Пусть $n = 3$; тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

у которой $a_{ik} = a_{ki}$, называют *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, x_3)$, а соответствующий определитель — *определителем* этой *квадратичной формы*.

Так как A — симметрическая матрица, то корни λ_1, λ_2 и λ_3 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

являются действительными числами.

Пусть

$$e_1' = b_{11}e_1 + b_{21}e_2 + b_{31}e_3,$$
$$e_2' = b_{12}e_1 + b_{22}e_2 + b_{32}e_3,$$
$$e_3' = b_{13}e_1 + b_{23}e_2 + b_{33}e_3$$

— нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3. В свою очередь, векторы e_1', e_2', e_3' образуют ортонормированный базис. Матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'.

Формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют вид

$$x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3',$$
$$x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3',$$
$$x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3'.$$

Преобразовав с помощью этих формул квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$, получаем квадратичную форму

$$f(x_1', x_2', x_3') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2,$$

не содержащую членов с произведениями $x_1'x_2'$, $x_1'x_3'$, $x_2'x_3'$.

Принято говорить, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ приведена *к каноническому виду* с помощью ортогонального преобразования B. Рассуждения проводились в предположении, что характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны. При решении задач будет показано, как следует поступать, если среди характеристических чисел имеются одинаковые.

Привести к каноническому виду заданные квадратичные формы:

593. $f = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$.

❑ Здесь $a_{11} = 27$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 3$. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 30\lambda + 56 = 0,$$

т.е. характеристические числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 28$.

Определяем собственные векторы. Если $\lambda = 2$, то получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 25\xi_1 - 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 + \xi_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\xi_2 = 5\xi_1$. Полагая $\xi_1 = c$, имеем $\xi_2 = 5c$, т.е. собственный вектор $\boldsymbol{u} = c(\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2)$.

Если $\lambda = 28$, то приходим к системе

$$\begin{cases} -\ \xi_1 - \ 5\xi_2 = 0, \\ -5\xi_1 - 25\xi_2 = 0. \end{cases}$$

В этом случае получаем собственный вектор $\boldsymbol{v} = c(-5\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$.

Для того чтобы пронормировать векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, следует принять $c = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$. Итак, мы нашли нормированные собственные векторы

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{26}}(\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(-5\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2).$$

Матрица перехода от ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{26}} & -\dfrac{5}{\sqrt{26}} \\ \dfrac{5}{\sqrt{26}} & \dfrac{1}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем формулы преобразования координат:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}x_2', \quad x_2 = \frac{5}{\sqrt{26}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}x_2'.$$

Таким образом,

$$f = 27\left(\frac{1}{\sqrt{26}}x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}x_2'\right)^2 - 10\left(\frac{1}{\sqrt{26}}x_1' - \frac{5}{\sqrt{26}}x_2'\right)\left(\frac{5}{\sqrt{26}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}x_2'\right)+$$
$$+3\left(\frac{5}{\sqrt{26}}x_1' + \frac{1}{\sqrt{26}}x_2'\right)^2 = 2x_1'^2 + 28x_2'^2$$

Этот результат можно было получить сразу, так как $f = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$. ■

594. $f = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

❑ Здесь $a_{11} = 3$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 2$. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = 0;$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 8(2-\lambda) = 0; \quad (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 8) = 0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0; \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = 5.$$

Находим собственные векторы, соответствующие полученным характеристическим числам. Для определения координат собственных векторов имеем три системы линейных уравнений:

1) $\lambda = 2$,
$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_2 - \xi_3 = 0; \end{cases}$$

2) $\lambda = -1$,
$$\begin{cases} 4\xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \end{cases}$$

3) $\lambda = 5$,
$$\begin{cases} -2\xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 - 3\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_2 - 4\xi_3 = 0; \end{cases}$$

$$\xi_1 = 2c, \ \xi_2 = -c, \ \xi_3 = -2c, \quad \xi_1 = c, \ \xi_2 = -2c, \ \xi_3 = 2c, \quad \xi_1 = 2c, \ \xi_2 = 2c, \ \xi_3 = c,$$

$$\boldsymbol{u} = c(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3); \quad \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3); \quad \boldsymbol{w} = c(2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3),$$

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3); \quad \boldsymbol{e}_2' = \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3); \quad \boldsymbol{e}_3' = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3).$$

Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Формулы преобразования координат таковы:

$$x_1=\frac{2}{3}x_1'+\frac{1}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',\quad x_2=-\frac{1}{3}x_1'-\frac{2}{3}x_2'+\frac{2}{3}x_3',\quad x_3=-\frac{2}{3}x_1'+\frac{2}{3}x_2'+\frac{1}{3}x_3'.$$

Следовательно, $f = 2x_1'^2 - x_2'^2 + 5x_3'^2$ ■

595. $f = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

❑ Здесь $a_{11} = 6$, $a_{22} = 3$, $a_{33} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 2$, $a_{23} = -4$. Решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

находим характеристические числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$.

При $\lambda = 7$ приходим к системе

$$\begin{cases} -\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению $\xi_1 = 2\xi_2 + 2\xi_3$. Решение этой системы можно записать в виде $\xi_1 = 2a + 2b$, $\xi_2 = a$, $\xi_3 = b$. В результате получаем семейство собственных векторов $\boldsymbol{u} = 2(a+b)\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3$, зависящее от двух параметров a и b.

При $\lambda = -2$ получаем систему

$$\begin{cases} 8\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 5\xi_2 - 4\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Решив, например, два последних уравнения, имеем $\dfrac{\xi_1}{9} = \dfrac{\xi_2}{-18} = \dfrac{\xi_3}{-18}$ или $\xi_1 = -\dfrac{\xi_2}{2} = -\dfrac{\xi_3}{2}$; $\xi_1 = c$, $\xi_2 = -2c$, $\xi_3 = -2c$. Таким образом, получим однопараметрическое семейство собственных векторов $\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3)$.

Из семейства собственных векторов $\boldsymbol{u} = 2(a+b)\boldsymbol{e}_1 + a\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_3$ выделим два каких-нибудь ортогональных вектора. Полагая, например, $a = 0$, $b = 1$, получим собственный вектор $\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$. Подберем параметры a и b так, чтобы выполнялось равенство $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1) = 0$. Тогда получим уравнение $2\cdot 2(a+b)+b = 0$, т.е. $4a + 5b = 0$. Теперь можно принять $a = 5$, $b = -4$; отсюда находим другой собственный вектор рассмотренного семейства: $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3$.

Итак, мы получили три попарно ортогональных вектора: $\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$. Собственные векторы $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ соответствуют характеристическому числу $\lambda = 7$, а собственный вектор $\boldsymbol{v}$ — характеристическому числу $\lambda = -2$ при $c = 1$.

Пронормировав эти векторы, получим новый ортонормированный базис, причем матрица перехода к новому базису имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Применив формулы преобразования координат

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1' + \frac{2}{3\sqrt{5}}x_2' + \frac{1}{3}x_3',$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}x_2' - \frac{2}{3}x_3',$$
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1' - \frac{4}{3\sqrt{5}}x_2' - \frac{2}{3}x_3'$$

к заданной квадратичной форме, получаем $f = 7x_1'^2 + 7x_2'^2 - 2x_3'^2$ ■

596. $f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 8x_2^2$.

Привести к каноническому виду уравнения заданных линий:

597. $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = 0$.

❑ Группа старших членов уравнения образует квадратичную форму $17x^2 + 12xy + 8y^2$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,$$

т.е. характеристические числа $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$. Следовательно, квадратичная форма $17x^2 + 12xy + 8y^2$ преобразуется к каноническому виду $5x'^2 + 20y'^2$, а данное уравнение — к виду

$$5x'^2 + 20y'^2 - 80 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1,$$

т.е. заданная линия является эллипсом.

Найдем базис, в котором уравнение эллипса примет канонический вид, для чего определим собственные векторы.

При $\lambda = 5$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 12\xi_1 + 6\xi_2 = 0, \\ 6\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\xi_2 = -2\xi_1$. Полагая $\xi_1 = c$, получим $\xi_2 = -2c$, т.е. собственный вектор $\boldsymbol{u} = c(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2)$.

При $\lambda = 20$ имеем систему

$$\begin{cases} -3\xi_1 + \ \ 6\xi_2 = 0, \\ \ \ 6\xi_1 - 12\xi_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\xi_1 = 2\xi_2$, т.е. собственный вектор $\boldsymbol{v} = c(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$.

Приняв $c = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, находим нормированные собственные векторы $\boldsymbol{e}'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2)$ и $\boldsymbol{e}'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$.

Матрица ортогонального преобразования имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Формулы преобразования координат запишутся так:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y', \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = \\ = \tfrac{17}{5}(x' + 2y')^2 + \tfrac{12}{5}(x' + 2y')(-2x' + y') + \tfrac{8}{5}(-2x' + y')^2 - 80 = \\ = 5x'^2 + 20y'^2 - 80. \end{gathered}$$

Этот же результат можно было получить сразу, как только были найдены λ_1 и λ_2: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 80 = 0$. ■

598. $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$.

599. $4xy + 3y^2 + 16 = 0$.

600. $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 44 = 0$.

Глава VI

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1

Абсолютная и относительная погрешности

Пусть a — приближенное число, заменяющее собой в вычислениях точное число A. *Абсолютной погрешностью* приближенного числа a называют абсолютную величину разности между ним и соответствующим точным числом, т. е. $|A - a|$.

Предельной абсолютной погрешностью называют возможно меньшее число Δ, удовлетворяющее неравенству $|A - a| \leqslant \Delta$.

Точное число A находится в границах между $a - \Delta$ и $a + \Delta$, т.е. $a - \Delta \leqslant \leqslant A \leqslant a + \Delta$, или $A = a \pm \Delta$.

Относительной погрешностью приближенного числа a называют отношение абсолютной погрешности этого числа к соответствующему точному числу: $\dfrac{|A - a|}{A}$.

Предельной относительной погрешностью называют возможно меньшее число δ, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{|A - a|}{A} \leqslant \delta$.

Так как практически $A \approx a$, то за предельную относительную погрешность принимают число $\delta = \dfrac{\Delta}{a}$ (выражаемое обычно в процентах).

Справедливо неравенство $a(1 - \delta) \leqslant A \leqslant a(1 + \delta)$.

Говорят, что положительное приближенное число a, записанное в виде десятичного разложения, имеет n *верных знаков* (цифр), если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы n-го разряда.

При $n > 1$ за предельную относительную погрешность приближенного числа a с первой значащей цифрой k можно принять число $\delta = \frac{1}{2k}(\frac{1}{10})^{n-1}$

Если известно, что

$$\delta \leqslant \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \tag{1}$$

то число a имеет n верных знаков.

Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из относительных погрешностей этих слагаемых.

Предельная относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел.

Предельная относительная погрешность степени приближенного числа равна произведению предельной относительной погрешности этого числа на показатель степени.

601. Угол, измеренный теодолитом, оказался равным $22°20'30''\pm30''$ Какова относительная погрешность измерения?

❑ Абсолютная погрешность $\Delta = 30''$ Тогда относительная погрешность составит

$$\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{30''}{22°20'30''}\ 100\% = 0,04\%. \quad ■$$

602. Определить число верных знаков и записать соответствующую приближенную величину ускорения силы тяжести $g = 9,806\ldots$, если относительная погрешность равна 0,5%.

❑ Так как первая значащая цифра есть 9, то, используя неравенство (1), получим $0,005 \leqslant \frac{1}{2\cdot 10}(\frac{1}{10})^{n-1}$, т.е. $n = 2$. Значит, $g = 9,8$. ■

603. Известно, что предельная относительная погрешность числа $\sqrt{19}$ равна $0,1$ %. Сколько верных знаков содержится в этом числе?

❑ Здесь первая значащая цифра есть 4, предельная относительная погрешность $\delta = 0,001 = 10^{-3}$ Согласно неравенству (1), имеем $0,001 \leqslant \leqslant \frac{1}{2\cdot 5}\ (\frac{1}{10})^{n-1}$, откуда $n = 3$. Следовательно, $\sqrt{19} = 4,36$ (по четырехзначным таблицам $\sqrt{19} = 4,3589$). ■

604. Сколько верных знаков содержит число $A = 3,7563$, если относительная погрешность равна 1 %?

❑ Первая верная цифра есть 3, поэтому $0,01 \leqslant \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, откуда $n = 2$. Число A следует записать так: $A = 3,8$. ■

605. Площадь квадрата равна $25,16$ см^2 (с точностью до 0,01 см^2). С какой относительной погрешностью и со сколькими верными знаками можно определить сторону квадрата?

❑ Искомая сторона $x = \sqrt{25,16}$. Относительная погрешность стороны квадрата составляет $\delta = \frac{1}{2}\ \frac{0,01}{25,16}$, где $0,01$ — абсолютная погрешность площади, т.е. $\delta = 0,0002$. Первая значащая цифра числа, выражающего сторону квадрата, есть 5. Решив неравенство (1) при $k = 5$, получим $(5+1)\cdot 0,0002 \leqslant \frac{1}{10^{n-1}}$, или $1,2\ \ 10^{-3} \leqslant \frac{1}{10^{n-1}}$. Отсюда $n = 3$. ■

606. Со сколькими верными знаками можно определить радиус круга, если известно, что его площадь равна 124,35 см^2 (с точностью до 0,01 см^2)?

607. Найти предельную относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований $R =$

$= 23,64\pm0,01$ (см), $r = 17,31\pm0,01$ (см), образующая $l = 10,21\pm0,01$ (см); число $\pi = 3,14$.

608. Число $g = 9,8066$ является приближенным значением ускорения силы тяжести (для широты 45 °) с пятью верными знаками. Найти его относительную погрешность.

609. Вычислить площадь прямоугольника, стороны которого $92,73\pm\pm0,01$ (м) и $94,5\pm0,01$ (м). Определить относительную погрешность результата и число верных знаков.

§ 2

Функция одной независимой переменной

Действительными (или *вещественными*) числами называют рациональные и иррациональные числа. Множество всех действительных чисел обозначают буквой $\boldsymbol{R}$. Каждое действительное число можно изобразить точкой на числовой прямой.

Пусть даны два непустых множества X и Y Если каждому элементу x из множества X по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент y из Y, то говорят, что на множестве X задана *функция* (или *отображение*) с множеством значений Y Это можно записать так: $x \in X$, $X \xrightarrow{f} Y$ или f $X \to Y$, где множество X называют *областью определения функции*, а множество Y, состоящее из всех чисел вида $y = f(x)$, — *множеством значений* функции. Если y является функцией от x, то пишут также $y = f(x)$ или $y = \varphi(x)$. Буквы f или φ характеризуют то правило, по которому получается значение y, соответствующее заданному аргументу x. Область определения функции f обозначают через $D(f)$, а множество значений — через $E(f)$. Значение функции $f(x)$ при $x = a$, где $a \in D(f)$, называют *частным значением* функции и обозначают $f(a)$.

Область определения функции в простейших случаях представляет собой: *интервал* (*открытый промежуток*) $(a;b)$, т.е. совокупность значений x, удовлетворяющих условию $a < x < b$; *сегмент* (*отрезок* или *замкнутый промежуток*) $[a;b]$, т.е. совокупность значений x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$; *полуинтервал* $(a;b]$ (т.е. $a < x \leqslant b$) или $[a;b)$ (т.е. $a \leqslant x < b$); *бесконечный интервал* $(a,+\infty)$ (т.е. $a < x < +\infty$) или $(-\infty,b)$ (т.е. $-\infty < < x < b$) или $(-\infty,+\infty)$ (т.е. $-\infty < x < +\infty$); совокупность нескольких интервалов или сегментов и т.п.

Основными элементарными функциями называют следующие функции:

1) *степенную функцию* $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

2) *показательную функцию* $y = a^x$, где a — любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$, $a \neq 1$;

3) *логарифмическую функцию* $y = \log_a x$, где a — любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$, $a \neq 1$;

4) *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

5) *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называют функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (т.е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

Примером неэлементарной функции может служить *абсолютная величина* (*модуль*) действительного числа x:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geqslant 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|x|$ равен расстоянию на числовой прямой от точки с координатой x до начала отсчета. В общем случае $|x - a|$ есть расстояние между точками с координатами x и a.

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество точек плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Функцию $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называют *четной* (*нечетной*), если для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ [соответственно $f(-x) = -f(x)$]. График четной функции симметричен относительно оси ординат, график нечетной функции — относительно начала координат.

Функцию $f(x)$ называют *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любых $x \in D(f)$, $x - T \in D(f)$, $x + T \in D(f)$ выполняются равенства $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. *Основным периодом* функции называют наименьшее положительное число T, обладающее указанным свойством.

610. Найти $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, если $f(x) = x^2$

❑ Найдем значения данной функции при $x = a$ и $x = b$: $f(a) = a^2$, $f(b) = b^2$ Тогда получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b. \quad \blacksquare$$

611. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x - 1}$; 2) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{x - 1}$; 3) $f(x) = \sqrt{1 - 2x} + 3 \arcsin \dfrac{3x - 1}{2}$.

❑ 1) Данная функция определена, если $2x - 1 \neq 0$, т.е. если $x \neq 0,5$. Таким образом, областью определения функции является объединение двух интервалов: $D(f) = (-\infty; 0,5) \cup (0,5; +\infty)$.

2) Функция определена, если $x - 1 \neq 0$ и $1 + x > 0$, т.е. если $x \neq 1$ и $x > -1$. Область определения функции есть объединение двух интервалов: $D(f) = (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

3) Первое слагаемое принимает действительные значения при $1-2x\geqslant 0$, а второе — при $-1\leqslant \frac{3x-1}{2}\leqslant 1$. Таким образом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств $1-2x\geqslant 0$, $\frac{3x-1}{2}\leqslant 1$, $\frac{3x-1}{2}\geqslant -1$. В результате получаем $x\leqslant \frac{1}{2}$, $x\leqslant 1$, $x\geqslant -\frac{1}{3}$. Следовательно, область определения функции есть отрезок $[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$. ■

612. Найти множества значений функций: 1) $f(x)=x^2-6x+5$; 2) $f(x)=$ $=2+3\sin x$.

❑ 1) Выделив из квадратного трехчлена полный квадрат, получим $f(x)=$ $=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-4$. Первое слагаемое при всех x является неотрицательным числом, поэтому функция принимает значения, не меньшие -4. Итак, множество значений функции — бесконечный промежуток $[-4;+\infty)$.

2) Так как синус принимает значения, не превосходящие по модулю единицы, то получаем неравенство $|\sin x|\leqslant 1$, или $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$. Умножив все части этого двойного неравенства на 3 и прибавив к ним по 2, имеем $-3\leqslant 3\sin x\leqslant 3$; $-1\leqslant 2+3\sin x\leqslant 5$. Следовательно, $E(f)=[-1,5]$. ■

613. Найти основные периоды функций: 1) $f(x)=\cos 8x$; 2) $f(x)=$ $=\sin 6x+\operatorname{tg}4x$.

❑ 1) Так как основной период функции $\cos x$ есть 2π, то основной период функции $f(x)=\cos 8x$ равен $\frac{2\pi}{8}$, т.е. $\frac{\pi}{4}$.

2) Здесь для первого слагаемого основной период равен $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, а для второго он равен $\frac{\pi}{4}$. Очевидно, что основной период данной функции есть наименьшее общее кратное чисел $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$, т.е. π. ■

614. Установить четность или нечетность функций

$$1)\ f(x)=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x;\quad 2)\ f(x)=2^x+2^{-x};\quad 3)\ f(x)=|x|-5e^{x^2}$$
$$4)\ f(x)=x^2+5x;\quad 5)\ f(x)=\lg\frac{x+3}{x-3}.$$

❑ В рассматриваемых примерах область определения каждой из функций симметрична относительно нуля: в первых четырех примерах $D(f)=$ $=(-\infty;+\infty)$, а в последнем примере $D(f)=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

1) Заменив x на $-x$, получим $f(-x)=(-x)^2\sqrt[3]{(-x)}+2\sin(-x)=-x^2\sqrt[3]{x}-$ $-2\sin x$, т.е. $f(-x)=-f(x)$. Значит, данная функция является нечетной.

2) Имеем $f(-x)=2^{-x}+2^{-(-x)}=2^{-x}+2^x$, т.е. $f(-x)=f(x)$. Итак, данная функция — четная.

3) Здесь $f(-x)=|-x|-5e^{(-x)^2}=|x|-5e^{x^2}$, т.е. $f(-x)=f(x)$. Следовательно, $f(x)$ — четная функция.

4) Имеем $f(-x)=(-x)^2+5(-x)=x^2-5x$. Таким образом, $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, т.е. заданная функция не является ни четной, ни нечетной.

5) Находим

$$f(-x) = \lg\frac{-x+3}{-x-3} = \lg\frac{x-3}{x+3} = \lg\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1} = -\lg\frac{x+3}{x-3},$$

т.е. $f(-x) = -f(x)$, и, следовательно, данная функция — нечетная. ■

615. Дана функция $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Найти: $f(0)$, $f(4)$, $f(2-\sqrt{3})$, $f(a-1)$, $f(a)-1$, $f(a^2)$, $(f(a))^2$

616. Даны функции $f(x)=\lg x$, $\varphi(x)=x^2-1$. Найти: $f(\varphi(3))$, $f(\varphi(\sqrt{a+1}))$, $\varphi(f(0,1))$, $f(f(1000))$, $\varphi(\varphi(4))$.

617. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{xe^x}$; 4) $f(x) = \frac{x-2}{\cos 2x}$; 5) $f(x) = \frac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$;

6) $f(x) = \lg(3x-1) + 2\lg(x+1)$; 7) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$.

618. Найти множества значений функций:

1) $f(x) = |x|+1$; 2) $f(x) = \frac{5}{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$;

4) $f(x) = -x^2+8x-13$; 5) $f(x) = 1 - 3\cos x$; 6) $f(x) = 4^{-x^2}$

619. Установить четность или нечетность функций:

1) $f(x) = x^4 \sin 7x$; 2) $f(x) = 5|x| - 3\sqrt[3]{x^2}$;

3) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$; 4) $f(x) = |x| + 2$; 5) $f(x) = |x+2|$;

6) $f(x) = \lg\cos x$; 7) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$.

620. Найти основные периоды функций:

1) $f(x) = \sin 5x$; 2) $f(x) = -2\cos\frac{x}{3} + 1$;

3) $f(x) = \lg\cos 2x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$.

§ 3

Построение графиков функций

При построении графиков функций применяют следующие приемы: построение «по точкам»; действия с графиками (сложение, вычитание, умножение графиков); преобразования графиков (сдвиг, растяжение).

Исходя из графика функции $y = f(x)$, можно построить графики функций:

1) $y = f(x-a)$ — первоначальный график, сдвинутый вдоль оси Ox на величину a;

2) $y = f(x) + b$ — тот же график, сдвинутый вдоль оси Oy на величину b;

3) $y = Af(x)$ — исходный график, растянутый в A раз вдоль оси Oy.

4) $y = f(kx)$ — тот же график, растянутый в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox.

Таким образом, по графику функции $y = f(x)$ можно построить график функции вида $y = Af(k(x-a)) + b$.

7-9873

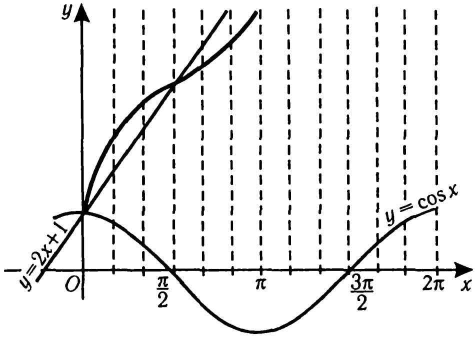

Рис. 23

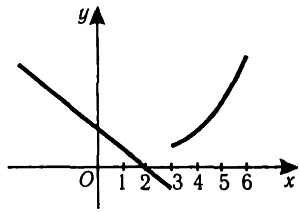

Рис. 24

621. Построить график функции $y = 2x + 1 + \cos x$.

❑ График данной функции построим сложением графиков двух функций: $y = 2x+1$ и $y = \cos x$. График первой функции есть прямая, ее можно построить по двум точкам, график второй функции — косинусоида (рис. 23). ■

622. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 2 - x & \text{при } x \leqslant 3, \\ 0,1x^2 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

❑ При $x \leqslant 3$ графиком является луч, а при $x > 3$ — ветвь параболы. Искомый график изображен на рис. 24. ■

623. Построить график функции $y = 2\sin(2x - 1)$.

❑ Преобразуем данную функцию к виду $y = 2\sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Здесь $A = 2$, $k = 2$, $a = \frac{1}{2}$. В качестве исходного возьмем график $y = \sin x$. Затем строим график функции $y = \sin 2x$ сжатием вдоль оси абсцисс в 2 раза. После этого строим график функции $y = \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ сдвигом предыдущего графика

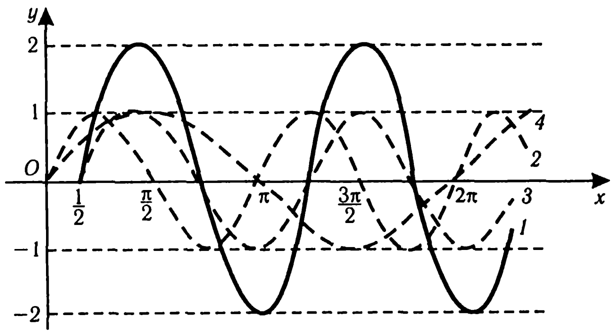

Рис. 25

на $\frac{1}{2}$ вправо и, наконец, растяжением в 2 раза вдоль оси ординат последнего графика получаем искомый график функции $y = 2\sin(2x - 1)$ (рис. 25). ■

Построить графики функций:

624. $y = \frac{x^3 - x}{3}$ на отрезке $[-4; 4]$.

625. $y = x^2(2 - x)^2$ на отрезке $[-3; 3]$.

626. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$ в области определения.

627. $y = 0,5x + 2^{-x}$ на отрезке $[0; 5]$.

628. $y = 2(x - 1)^3$, исходя из функции $y = x^3$

629. $y = \frac{1}{x^2 + 4}$.

630. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

631. $y = \sin(3x - 2) + 1$.

632. $y = -2\cos(2x + 1)$.

633. $y = \arcsin(x - 2)$.

634. $y = x + 1 + \sin(x - 1)$.

635. $y = \sin x + \cos x$.

636. $y = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x < 0, \\ 3x & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

637. $y = \begin{cases} 4 - x & \text{при } x < -1, \\ 5 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2 + 5 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

§ 4

Пределы

Число a называют *пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число N, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Это записывают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Условно записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $|f(x)| > M$ при $0 < |x - a| < \delta$, где M — произвольное положительное число.

В этом случае функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой* при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой* при $x \to a$.

Если $x < a$ и $x \to a$, то употребляют запись $x \to a - 0$; если $x > a$ и $x \to a$ — запись $x \to a + 0$. Числа $f(a - 0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a + 0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называют соответственно *левым* и *правым пределом* функции $f(x)$ в точке a.

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(a-0) = f(a+0)$.

Практическое вычисление пределов основано на следующих утверждениях:

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, *то*:

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (*при* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Часто используют так называемые замечательные пределы:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (*первый замечательный предел*);

$\lim\limits_{x\to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\ldots$ (*второй замечательный предел*).

Логарифм числа x по основанию e называют ***натуральным логарифмом*** и обозначают $\ln x$.

При решении примеров полезно использовать равенства:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

638. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots$ $\ldots, 2 + \frac{1}{n}$, имеет пределом число 2.

❑ Здесь n-й член последовательности есть $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Поэтому $x_n - 2 = \frac{1}{n}$. Зададим положительное число ε. Выберем n настолько большим, что будет выполнено неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Для этого достаточно принять $n > \frac{1}{\varepsilon}$. При таком выборе n получим $|x_n - 2| < \varepsilon$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ■

639. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $\frac{7}{3}, \frac{10}{5}, \frac{13}{7}$, $\frac{3n+4}{2n+1}$, имеет пределом число $\frac{3}{2}$.

❑ Здесь $x_n - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3n+4}{2n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2(2n+1)}$. Определим, при каком значении n выполняется неравенство $\dfrac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$; так как $2(2n+1) > \frac{5}{\varepsilon}$, то $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Итак, если $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, то $|x_n - \frac{3}{2}| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

Полагая $\varepsilon = 0,1$, заключаем, что неравенство $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0,1$ выполняется при $n > 12$ (например, при $n = 13$). Аналогично неравенство $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| < 0,01$ выполняется при $n > 124,5$ (например, при $n = 125$), а неравенство $\left|x_n - \frac{3}{2}\right| <$ $< 0,001$ — при $n > 1249,5$ (например, при $n = 1250$). ■

Найти указанные пределы:

640. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$.

❏ Так как $x\to 4$, то числитель дроби стремится к числу $5\cdot 4+2=22$, а знаменатель — к числу $2\cdot 4+3=11$. Значит, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{22}{11}=2$. ■

641. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{2x+7}$.

❏ Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив на x числитель и знаменатель, находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{3}{2},$$

так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\frac{5}{x}$ и $\frac{7}{x}$ стремится к нулю. ■

642. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

❏ Здесь числитель и знаменатель дроби при $x\to 3$ стремятся к нулю (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Имеем

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\frac{x+3}{x};$$

если $x\neq 3$, то $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x}$. Но при $x\to 3$ дробь $\dfrac{x+3}{x}$ стремится к числу $\dfrac{3+3}{3}=2$. Итак, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}=2$. ■

643. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

❏ Здесь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложив на множители числитель и знаменатель дроби, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0. \ ■$$

644. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$.

❏ Это также неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Имеем

$$\lim_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\lim_{x\to 10}\frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x(x-10)^2}=\lim_{x\to 10}\frac{x^2+10x+100}{x(x-10)}.$$

При $x \to 10$ числитель дроби стремится к 300, а знаменатель стремится к нулю, т.е. является бесконечно малой величиной, следовательно, рассматриваемая дробь — бесконечно большая величина и $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}=\infty$. ■

645. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

❑ Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+4}+2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.\ ■$$

646. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$.

❑ Положим $1+x=y^5$; тогда $y\to 1$ при $x\to 0$. Значит,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{3}{5}.\ ■$$

647. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{x}$.

❑ Используя первый замечательный предел, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{m\sin mx}{mx}=m\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m.\ ■$$

648. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$.

❑ Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{5x}{2}}{x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Мы воспользовались результатом предыдущего примера, приняв $m=\frac{5}{2}$. ■

649. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$.

❑ Это неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т.е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.\ ■$$

650. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

❑ Разделим числитель и знаменатель на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.\ ■$$

651. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$.

❑ Здесь имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Умножим и разделим данное выражение на $\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}$:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})(\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3})}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+8x+3-x^2-4x-3}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{4}{2}=2. \blacksquare$$

652. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

❑ Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}.$$

Таким образом, при $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель — к бесконечности (неопределенность вида 1^∞). Преобразуя функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8-3/x}{1-3/x+7/x^2}}$$

Так как $\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\to 0$ при $x\to\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=8$, находим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=e^8$ $\blacksquare$

653. Найти левый и правый пределы функции $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ при $x\to 3$.

❏ Если $x\to 3-0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to -\infty$ и $2^{1/(x-3)}\to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\dfrac{1}{3}$. Если же $x\to 3+0$, то $\dfrac{1}{x-3}\to +\infty$, $2^{1/(x-3)}\to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0$. ■

654. Найти левый и правый пределы функции $f(x)=e^{1/(x-a)}$ при $x\to a$.

❏ Если $x\to a-0$, то $\dfrac{1}{x-a}\to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=0$. Если же $x\to a+0$, то $\dfrac{1}{x-a}\to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$. ■

655. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{9}{4}$, $\dfrac{4n-3}{n+1}$, имеет предел, равный 4.

656. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 1, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{2n-1}$, является бесконечно малой.

Найти пределы:

657. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

658. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

659. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

660. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

661. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$.

662. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} mx}{\sin nx}$.

663. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} x_0}{x-x_0}$.

664. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}$.

665. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

🅤 Положить $\dfrac{\pi}{2}-x=\alpha$.

666. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

667. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}$.

668. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$.

669. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

670. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

671. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

672. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7x+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

673. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{1-\cos 3x}$.

674. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

675. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{x}$.

676. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$.

677. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+cx+d})$.

678. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

679. $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})$.

680. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$.

681. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$.

682. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$.

683. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}$.

684. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$.

❶ Положить $x=t^4$

685. $\lim\limits_{x\to\pm 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$.

686. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t+\sin t}{t-\sin t}$.

687. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\ln(x+1)}$.

688. $\lim\limits_{x\to 5-0}10^{1/(x-5)}$

689. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

690. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$.

691. $\lim\limits_{t\to\infty}t(\sqrt[t]{a}-1)$ (где $t>0$).

❶ Положить $x=\dfrac{1}{t}$, где $x\to 0$.

692. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$

693. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

694. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

❶ Привести дроби к общему знаменателю.

695. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-4^x}{x^2+x}$.

696. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

❶ Учесть, что $x^x=e^{x\ln x}$

697. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$.

698. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$.

699. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)-\ln 2}{x}$.

700. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$

701. $\lim\limits_{\alpha\to 0}(2-\cos\alpha)^{\operatorname{cosec}^2\alpha}$

702. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$

703. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x-2)}$

§ 5

Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x\to a$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то говорят, что α является *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с β. В этом случае пишут $\alpha=o(\beta)$.

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=m$, где m — число, отличное от нуля, то говорят, что α и β — *бесконечно малые одного и того же порядка*. В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то бесконечно малые α и β называют *эквивалентными*. Запись $\alpha\sim\beta$ означает, что α и β — эквивалентные бесконечно малые.

Если $\frac{\alpha}{\beta} \to \infty$, то это означает, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha} = 0$. Таким образом, β является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α, т.е. $\beta = o(\alpha)$.

3. Если α^k и β — бесконечно малые одного и того же порядка, причем $k > 0$, то говорят, что бесконечно малая β имеет *порядок* k по сравнению с α.

Свойства бесконечно малых.

1° *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с сомножителями, т.е. если* $\gamma = \alpha\beta$, *то* $\gamma = o(\alpha)$ *и* $\gamma = o(\beta)$

2° *Бесконечно малые* α *и* β *эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность* $\alpha-\beta = \gamma$ *является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* α *и* β, *т.е. если* $\gamma = o(\alpha)$, $\gamma = o(\beta)$, *то* $\alpha \sim \beta$.

3° *Если отношение двух бесконечно малых имеет предел , то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. если* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta} = m$, $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, *то* $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1} = m$.

Полезно использовать эквивалентность следующих бесконечно малых: если $x \to 0$, то

$$\sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x, \quad \ln(1 + x) \sim x.$$

704. Пусть t — бесконечно малая. Сравнить бесконечно малые $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ и $\beta = 3t^2 + 2t^3$

❑ Имеем $\lim\limits_{t\to0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to0}\frac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim\limits_{t\to0}\frac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \frac{5}{3}$. Так как предел отношения α и β есть число, отличное от нуля, то α и β — бесконечно малые одного и того же порядка. ■

705. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\sin^2 t$ и $\beta = 2t\sin t$ при $t \to 0$.

❑ Здесь $\lim\limits_{t\to0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{t\to0}\frac{t\sin^2 t}{2t\sin t} = \frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\sin t = 0$, т.е. $\alpha = o(\beta)$. ■

706. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\ln(1 + t)$ и $\beta = t\sin t$ при $t \to 0$.

❑ Находим

$$\lim_{t\to0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to0}\frac{t\ln(1 + t)}{t\sin t} = \lim_{t\to0}\frac{\ln(1 + t)}{\sin t} = \lim_{t\to0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 1,$$

т.е. $\alpha \sim \beta$. ■

707. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1 + 3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2}$.

❑ Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечными малыми: $\ln(1 + 3x\sin x) \sim 3x\sin x$, $\operatorname{tg} x^2 \sim x^2$ Тогда получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 3x\sin x)}{\operatorname{tg} x^2} = \lim_{x\to0}\frac{3x\sin x}{x^2} = 3\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 3. \quad ■$$

708. Определить порядок бесконечно малой $y = xe^x$ по сравнению с бесконечно малой x.

709. Определить порядок бесконечно малой $y = \sqrt{1 + x\sin x} - 1$ по сравнению с бесконечно малой x.

710. Определить порядок бесконечно малой $y = \sqrt{\sin 2x}$ по сравнению с x при $x \to 0$.

711. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t^2 \sin^2 t$ и $\beta = t \operatorname{tg} t$, если $t \to 0$.

712. Сравнить бесконечно малые $\alpha = (1+x)^m - 1$ и $\beta = mx$, если $x \to 0$ и m — рациональное положительное число.

713. Сравнить бесконечно малые $\alpha = a^x - 1$ и $\beta = x \ln a$, если $x \to 0$.

Найти указанные пределы:

714. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$.

715. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$.

☉ Заменить числитель и знаменатель эквивалентными бесконечно малыми.

716. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1-4x)}$.

717. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(1 + x - 3x^2 + 2x^3)}{\ln(1 + 3x - 4x^2 + x^3)}$.

718. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

719. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x}$.

☉ Представить $\cos x$ в виде $1 - (1 - \cos x)$.

720. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1}$.

721. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{(5^\alpha - 1)(4^\alpha - 1)}{(3^\alpha - 1)(6^\alpha - 1)}$.

722. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}$.

☉ Разделить на 2 числитель и знаменатель.

§ 6

Непрерывность функции

Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в точке* a, если: 1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a; 2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Обозначив $x - a = \Delta x$ (приращение аргумента) и $f(x) - f(a) = \Delta y$ (приращение функции), условие непрерывности можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, т.е. *функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, отрезка и т.п.), то ее называют *непрерывной* в этой *области*.

Точку a, принадлежащую области определения функции или являющуюся граничной для этой области, называют *точкой разрыва*, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, причем *не* все три числа $f(a)$, $f(a-0)$, $f(a+0)$ равны между собой; тогда точку a называют *точкой разрыва* I *рода*.

Точки разрыва I рода подразделяют, в свою очередь, на *точки устранимого разрыва* (когда $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на *точки скачка* (когда $f(a-0) \neq f(a+0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0)-f(a-0)$ называют *скачком* функции в точке a. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называют *точками разрыва* II *рода*. В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

723. Показать, что при $x = 4$ функция $y = \dfrac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

❑ Находим $\lim\limits_{x\to 4-0} \dfrac{x}{x-4} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{x}{x-4} = +\infty$. Таким образом, при $x \to 4$ функция не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва II рода (рис. 26). ■

724. Показать, что при $x = 4$ функция $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}$ имеет разрыв.

❑ Если $x \to 4-0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4-0} y = -\dfrac{\pi}{2}$. Если же $x \to 4+0$, то $\dfrac{1}{x-4} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 4+0} = \dfrac{\pi}{2}$. Итак, при $x \to 4$ функция имеет как левый, так и правый конечный предел, причем эти пределы различны. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва I рода — точкой скачка. Скачок функции в этой точке равен $\dfrac{\pi}{2} - (-\dfrac{\pi}{2}) = \pi$ (рис. 27). ■

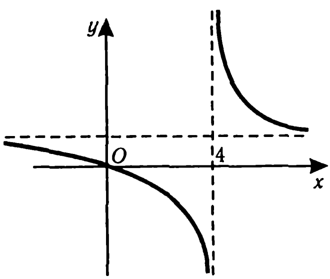

Рис. 26

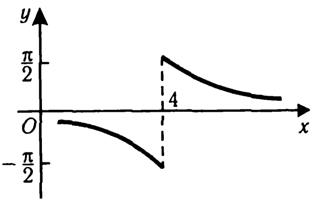

Рис. 27

725. Показать, что при $x = 5$ функция $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ имеет разрыв.

❑ В точке $x = 5$ функция не определена, так как, выполнив подстановку, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. В других точках дробь можно сократить на $x-5$, так как $x-5 \neq 0$. Следовательно, $y = x+5$ при $x \neq 5$. Легко установить, что $\lim\limits_{x\to 5-0} y = \lim\limits_{x\to 5+0} y = 10$.

Таким образом, при $x = 5$ функция имеет устранимый разрыв. Он будет устранен, если условиться, что $y = 10$ при $x = 5$.

Итак, функция $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ непрерывна при всех значениях x, если считать, что равенство $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5$ справедливо при всех значениях x, не исключая и $x = 5$. В этом случае график функции есть прямая $y = x + 5$. ■

Найти точки разрыва функций:

726. $y = \frac{2^{1/(x-2)} - 1}{2^{1/(x-2)} + 1}$.

727. $y = \frac{1}{(x-1)(x-5)}$.

728. $y = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}}{x(x-5)}$.

729. $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$.

730. $y = \frac{x+1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$.

731. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

732. Каков характер разрыва функции $y = \frac{1}{1 - e^{1-x}}$ в точке $x = 1$?

733. Каков характер разрыва функции $y = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$?

734. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1}{(x-1)(x-6)}$ на отрезке: 1) $[2; 5]$; 2) $[4; 10]$; 3) $[0; 7]$.

735. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{1}{x^4 - 26x^2 + 25}$ на отрезке: 1) $[6; 10]$; 2) $[-2; 2]$; 3) $[-6; 6]$.

Глава VII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1

Производная и дифференциал

1. Дифференцирование явных функций. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ — соответствующие значения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называют *приращением аргумента*, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ — приращением функции на отрезке $[x_1; x_2]$.

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называют конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad \text{или} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(производную обозначают также $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$).

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x, т.е. $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Производная есть скорость изменения функции в точке x.

Отыскание производной называют *дифференцированием функции*.

Формулы дифференцирования основных функций

I. $(x^m)' = mx^{m-1}$

II. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$.

IV. $(e^x)' = e^x$

V. $(a^x)' = a^x \ln a$.

VI. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

VII. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

VIII. $(\sin x)' = \cos x$.

IX. $(\cos x)' = -\sin x$.

X. $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$.

XI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x$.

XII. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIII. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XIV. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

XV. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

XVI. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$.

XVII. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$.

XVIII. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{cth} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Основные правила дифференцирования

Пусть C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные. Тогда:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) если $y = f(u)$, $u = u(x)$, т.е. $y = f(u(x))$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \quad u'_x$$

(правило дифференцирования сложной функции).

736. Исходя из определения производной (не пользуясь формулами дифференцирования), найти производную функции $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.

❑ Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Таким образом, приращение функции составит

$$\Delta y = [2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) =$$
$$= 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x,$$

а отношение приращения функции к приращению аргумента равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Следовательно, по определению производной $y' = 6x^2 + 10x - 7$. ■

737. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

❑ Находим приращение функции: $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Таким образом,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Итак, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ■

738. Исходя из определения производной, найти производную функции $y = -\operatorname{ctg} x - x$.

❑ Находим

$$\Delta y = -\operatorname{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \operatorname{ctg} x + x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x.$$

Используя формулу $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$, получим

$$\Delta y = \frac{\sin(x + \Delta x - x)}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x = \frac{\sin \Delta x}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - \Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - 1$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x \sin(x+\Delta x)} - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

Итак, $y' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$. ■

Исходя из определения производной, найти производные функций:

739. $y = \frac{1}{x^2}$.

740. $y = \sqrt[3]{x^2}$.

741. $y = 5\sin x + 3\cos x$.

742. $y = 5(\operatorname{tg} x - x)$.

743. $y = \frac{1}{e^x + 1}$.

744. $y = 2^{x^2}$

Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные указанных функций:

745. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$.

❑ $y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7x' + 4' =$

$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$. ■

746. $y = x^2 e^x$

❑ $y' = x^2(e^x)' + e^x \cdot (x^2)' = x^2 e^x + 2xe^x = xe^x(x+2)$. ■

747. $y = x^3 \operatorname{arctg} x$.

❑ $y' = x^3(\operatorname{arctg} x)' + \operatorname{arctg} x \cdot (x^3)' =$

$$= x^3 \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arctg} x = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \operatorname{arctg} x. \quad ■$$

748. $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

❑ Перепишем заданную функцию в виде $y = x^{3/2}(3\ln x - 2)$. Тогда

$$y' = x^{3/2} \ \frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{1/2}(3\ln x - 2) = 3x^{1/2} + \frac{9}{2}x^{1/2}\ln x - 3x^{1/2} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x. \quad ■$$

749. $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$.

❑ $y' = \dfrac{x \cdot (\arcsin x)' - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} =$

$$= \frac{x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}. \quad ■$$

750. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

❑ $y' = \dfrac{(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}. \quad ■$$

751. $y = (2x^3 + 5)^4$.

❑ Положим $2x^3 + 5 = u$, тогда $y = u^4$ Согласно правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$y' = (u^4)'_u \ (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 \cdot 6x^2 = 24x^2(2x^3 + 5)^3 \quad ■$$

752. $y = \operatorname{tg}^6 x$.

❑ $y' = 6\operatorname{tg}^5 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 6\operatorname{tg}^5 x \sec^2 x$. ■

753. $y = \cos^2 x$.

❑ $y' = 2\cos x(\cos x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$. ■

754. $y = \sin(2x + 3)$.

❑ $y' = \cos(2x + 3) \ (2x + 3)' = 2\cos(2x + 3)$. ■

755. $y = \operatorname{tg} \ln x$.

❑ $y' = \sec^2 \ln x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x} \cdot \sec^2 \ln x$. ■

756. $y = \sin^3 \frac{x}{3}$.

❑ $y' = 3\sin^2 \frac{x}{3}\left(\sin \frac{x}{3}\right)' = 3\sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}\left(\frac{x}{3}\right)' = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$. ■

757. $y = \ln(x^2 + 5)$.

❑ $y' = \dfrac{1}{x^2+5}\ (x^2+5)' = \dfrac{2x}{x^2+5}$. ■

758. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

❑ $y' = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\ \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' =$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2}\ \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}. \ ■$$

759. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

❑ $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\ (x+\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\ \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \ ■$$

760. $y = \ln(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1})$.

❑ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1})' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\left(\frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x+1}} + \frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}}\ \frac{\cos x\,(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1})}{\sqrt{4\sin^2 x-1}} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}. \ ■$$

761. $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ \ln(x+\sqrt{x^2+k})$.

❑ $y' = \dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+k}} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+k} + \dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+k}}\right) =$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+k}} + \frac{\sqrt{x^2+k}}{2} + \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}+x}{\sqrt{x^2+k}} =$$

$$= \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} = \sqrt{x^2+k}. \ ■$$

762. $y = \arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$, $|x| < 1$.

❑ $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x^2}{1+x^4}\right)^2}}\ \dfrac{(1+x^4)\cdot 4x - 2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x^4+x^8}}\cdot\frac{4x(1-x^4)}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}. \ ■$$

763. $y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3}$.

❏ $y' = \frac{1}{1 + \frac{\ln^2 x}{9}} \; \frac{1}{3x} = \frac{3}{x(9 + \ln^2 x)}$. ■

764. $y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}$.

❏ Записав данную функцию в виде

$$y = e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}),$$

получим

$$y' = e^x \; \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^x + e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + e^{2x}} e^{2x} \; 2 =$$

$$= \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} + e^x \operatorname{arctg} e^x - \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = e^x \operatorname{arctg} e^x \quad ■$$

765. $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$.

❏ Преобразуем данную функцию:

$$y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln(1 + \sin x) - \ln \cos x.$$

Тогда получим

$$y' = \frac{\cos^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot 2 \cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} + \frac{1}{1 + \sin x} \cos x - \frac{1}{\cos x}(-\sin x),$$

или

$$y' = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{\cos^3 x} = 2\sec^3 x. \quad ■$$

766. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} + \ln \cos \sqrt{x}$.

❏ $y' = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos \sqrt{x}}(-\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg} \sqrt{x}(\sec^2 \sqrt{x} - 1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x}. \quad ■$$

767. $y = 5\,\mathrm{sh}^3 \frac{x}{15} + 3\,\mathrm{sh}^5 \frac{x}{15}$.

❏ Находим

$$y' = 15\,\mathrm{sh}^2 \frac{x}{15}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} + 15\,\mathrm{sh}^4 \frac{x}{15}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{15} \cdot \frac{1}{15} = \mathrm{sh}^2 \frac{x}{15}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{15}\left(1 + \mathrm{sh}^2 \frac{x}{15}\right),$$

откуда, используя соотношение $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, получаем

$$y' = \mathrm{sh}^3 \frac{x}{15}\,\mathrm{sh}^3 \frac{x}{15}. \quad ■$$

768. $y = x^{x^2}$

☐ Здесь основание и показатель степени зависят от x. Логарифмируя, получим $\ln y = x^2 \ln x$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln y$ есть сложная функция от x и $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$. Следовательно,

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1 + 2\ln x),$$

т.е.

$$y' = xy(1 + 2\ln x) = x \cdot x^{x^2}(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x). \quad \blacksquare$$

769. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

☐ Имеем $\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x$, откуда

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + \sec^2 x \ln \sin x = 1 + \sec^2 x \ln \sin x;$$

$$y' = y(1 + \sec^2 x \ln \sin x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x \ln \sin x). \quad \blacksquare$$

770. $y = \dfrac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}$.

☐ Здесь заданную функцию также следует предварительно прологарифмировать:

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x);$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3x+2} - 2 \cdot \frac{5}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)};$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}} \left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right]. \quad \blacksquare$$

Найти производные функций:

771. $y = \dfrac{7}{x^3}$.

772. $y = \dfrac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$.

773. $y = \dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$.

774. $y = (x^2 + x + 2)\,e^{-x}$

775. $y = 3x^3 \ln x - x^3$

776. $y = \dfrac{2^{3x}}{3^{2x}}$.

777. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x$.

778. $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$.

779. $y = \sqrt{1 - 3x^2}$.

780. $y = x \arccos \dfrac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$.

781. $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$.

782. $y = \left(\sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}\right)^2$

783. $y = \cos^3 \dfrac{x}{3}$.

784. $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{2x+1}{4}$.

785. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

786. $y = \operatorname{tg} 2x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 2x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 2x.$

787. $y = \frac{1}{3}\sin^3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sin^5\sqrt{x} + \frac{1}{7}\sin^7\sqrt{x}.$

788. $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}).$ ◆

789. $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$

790. $y = \ln\frac{\sqrt{4\operatorname{tg} x + 1} - 2\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{4\operatorname{tg} x + 1} + 2\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

791. $y = -\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} - 2\ln\sin\frac{x}{2}.$

792. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x^2 - 1}.$

793. $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

794. $y = \operatorname{arctg}\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$

795. $y = \arcsin\frac{2x^3}{1 + x^6}$, если $|x| < 1.$

796. $y = \arccos\frac{9 - x^2}{9 + x^2}.$

797. $y = e^{-x} - \sin e^{-x}\cos e^{-x}$

798. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$

799. $y = \ln\frac{(x - 1)(x - 3)^3}{(x - 2)^3(x - 4)}.$

800. $y = 1 - e^{\sin^2 3x}\cos^2 3x.$

801. $y = \ln\frac{2\ln^2\sin x + 3}{2\ln^2\sin x - 3}.$

802. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x).$

803. $y = -\ln(\operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg} x).$

804. $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1).$

805. $y = \ln\frac{x^5}{x^6 + 2}.$

806. $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$

807. $y = \arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$

808. $y = -\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}.$

809. $y = \sin\ln x\cos\ln x - \ln\frac{1}{x}.$

810. $y = (x^5 + 3)[\ln(x^5 + 3) - 1].$

811. $y = \arcsin\sqrt{1 - 0{,}2x^2}.$

812. $y = 0{,}5[(x + \alpha)\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (\beta - \alpha^2)\ln(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta})].$

813. $y = \arcsin e^x + \arcsin\sqrt{1 - e^{2x}}.$

814. $y = m\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (n - m\alpha)\ln(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}).$

815. $y = \frac{x}{\sqrt{1 - mx^2}}.$

816. $y = x^2 + 2x\sin x\cos x + \cos^2 x.$

817. $y = \operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x + \ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{cosec} x).$

818. $y = \frac{\sin x}{1 + \ln\sin x}.$

819. $y = 3x\sin^3 x + 3\cos x - \cos^3 x.$

820. $y = \ln\frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}.$

821. $y = e^x - \sin e^x\cos^3 e^x - \sin^3 e^x\cos e^x$

822. $y = \operatorname{arctg}(x + 1) + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}.$

823. $y = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6).$

824. $y = \ln\sin\sqrt{x}\ \operatorname{tg}\sqrt{x} - \sqrt{x}.$

825. $y = \operatorname{arctg}\frac{x^x - x^{-x}}{2}.$

826. $y = \frac{1}{64}\left(\operatorname{tg}^4\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{8}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

827. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x.$ **828.** $y = -\dfrac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{2}}.$

829. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \sin x + \ln \cos \sin x.$ **830.** $y = \ln(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x}.$

831. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}.$ **832.** $y = 2x \operatorname{tg} 2x + \ln\cos 2x - 2x^2.$

833. $y = \arccos(2e^{2x} - 1).$ **834.** $y = \ln\ln x(\ln\ln\ln x - 1).$

835. $y = \dfrac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}.$ **836.** $y = \ln \dfrac{x\ln x - 1}{x \ln x + 1}.$

837. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.$ **838.** $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{e^{2\sin x}}{4}.$

839. $y = \frac{a}{2}\sin^2 x + \frac{b}{2}\cos^2 x - \dfrac{a+b}{4}\cos 2x.$

840. $y = \operatorname{tg}^3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg}\operatorname{tg} x.$ **841.** $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

842. $y = \dfrac{\ln x}{x^5} + \dfrac{1}{5x^5}.$ **843.** $y = \sqrt{2x+1}[\ln(2x+1) - 2].$

844. $y = \sec x(1 + \ln\cos x).$ **845.** $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x.$

846. $y = 2^{\cos^3 x - 3\cos x}$ **847.** $y = \dfrac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}}.$

848. $y = \dfrac{x+1}{x} - e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$ **849.** $y = x\sin x\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x.$

850. $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}.$ **851.** $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}.$

852. $y = 2(\operatorname{tg}\sqrt{x} - \sqrt{x}).$ **853.** $y = \frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

854. $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{\sqrt{x^4+1} + x^2}.$ **855.** $y = e^{0,5\operatorname{tg}^2 x}\cos x.$

856. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x^4}{1 - x^8}.$ **857.** $y = x^2 e^{x^2}\ln x.$

858. $y = \arccos\sqrt{1 - 2^x}.$ **859.** $y = \log_{x^2} 2.$

860. $y = -m\sqrt{-x^2 + 2\alpha x + \beta} + (m\alpha + n)\arcsin\dfrac{x - \alpha}{\sqrt{\alpha+\beta}}.$

861. $y = \log_2 \sin^2 x.$ **862.** $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+9}).$

863. $y = x^{\text{arcsi}}$ **864.** $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$

865. $y = \dfrac{2^x(x+1)^2}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}.$ **866.** $y = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right).$

867. $y = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)^2 + n^2}[(m+1)\cos(n\ln x) + n\sin(n\ln x)].$

868. $y = (x\operatorname{tg} x + \ln\cos x)\cdot \operatorname{tg}(x\operatorname{tg} x + \ln\cos x) + \ln\cos(x\operatorname{tg} x + \ln\cos x).$

869. $y = (x\cos x - \sin x)[\ln(x\cos x - \sin x) - 1]$.

870. $y = 3\sin(xe^x - e^x) - \sin^3(xe^x - e^x)$.

871. $y = \arccos(2x\sqrt{1-x^2})$.

872. $y = |x|$ ($x \neq 0$).

873. $y = |f(x)|$.

874. $y = |3x - 5|$.

875. $y = e^{|x|}$.

876. $y = |x| + |x - 2|$.

877. $y = xe^x(\sin x - \cos x) + e^x\cos x$.

878. $y = \ln[x\sin x + \cos x + \sqrt{(x\sin x + \cos x)^2 + 1}]$.

879. $y = \dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x - x - 1)$.

880. $y = \log_{\cos x}\sin x$.

881. $y = \log_{e^2}(x^n + \sqrt{x^{2n} + 1})$.

882. $y = \log_x e$.

883. $y = \log_{x^2} x$.

884. $y = \log_{x^2} x^x$

885. $y = x^{1/\ln x}$

886. $y = x^x$

887. $y = x^{-x}\cdot 2^x\cdot x^2$.

888. $y = x^{\ln x}$

889. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$.

890. Показать, что $(\sec x)' = \sec x\operatorname{tg}x$.

891. Показать, что $(\operatorname{cosec}x)' = -\operatorname{cosec}x\operatorname{ctg}x$.

892. Показать, что $(u^v)' = vu^{v-1}\cdot u' + u^v\ v'\ln u$.

893. Вывести формулы дифференцирования $\operatorname{arcsec}x$ и $\operatorname{arccosec}x$.

894. Чему равно выражение $u = y^2 + y'^2 + \dfrac{4y^2}{y'^2}$, если $y = 2\cos x$?

895. Показать, что функция $y = (x^2+1)(e^x + C)$ обращает уравнение $y' - \dfrac{2xy}{x^2+1} = e^x(x^2+1)$ в тождество.

2. Дифференцирование неявных функций. Пусть уравнение $F(x,y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x. В дальнейшем будем считать эту функцию дифференцируемой.

Продифференцировав по x обе части уравнения $F(x,y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y' Из этого уравнения легко находится y', т.е. производная неявной функции для всех значений x и y, при которых множитель при y' в уравнении не обращается в нуль.

896. Найти производную y'_x из уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

❑ Так как y является функцией от x, то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x. Следовательно, $(y^2)' = 2yy'$ Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2x + 2yy' = 0$, т.е. $y' = -\dfrac{x}{y}$. ■

897. Найти производную y'_x из уравнения $x^3 + \ln y - x^2e^y = 0$.

❑ Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2e^yy' - 2xe^y = 0, \quad \text{т.е.} \quad y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2ye^y}. \ ■$$

Для указанных неявных функций найти производную y'_x:

898. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

899. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

900. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$.

901. $x^y - y^x = 0$.

902. $x \sin y + y \sin x = 0$.

903. $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$.

904. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$.

905. $\frac{y}{x} + e^{y/x} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$.

906. $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$.

907. $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

3. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Если функция аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

908. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, где $x = t^3 + 3t + 1$, $y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

❑ Найдем $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 3$, $\frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2 \quad ■$$

909. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, где $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

910. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, где $x = e^{-t}\sin t$, $y = e^t \cos t$.

911. Найти $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$, где $\rho = \left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha} + 1\right)\alpha$, $\theta = \sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}}$

912. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, где $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$.

4. Приложения производной к задачам геометрии и механики. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образуемый с положительным направлением оси Ox касательной к кривой в точке с абсциссой x_0

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

где y'_0 — значение производной y' при $x = x_0$.

Нормалью к кривой называют прямую, перпендикулярную касательной и проходящую через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0).$$

Углом между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ называют угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Тангенс этого угла находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)f_2'(x_0)}.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s = s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v = s'(t_0)$.

913. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

❑ Находим производную $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$ имеем $y' = 3$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = 3$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71°34'$ ■

914. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$, проведенная в точке $M(2; 3)$? Написать уравнение этой касательной.

915. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1; -1)$.

❑ Из уравнения кривой найдем производную:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \quad \text{т.е.} \quad y' = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Следовательно, $y_0' = -\dfrac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1(-1) + 6(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

Уравнение касательной записывается в виде

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1), \quad \text{или} \quad x - 4y - 5 = 0,$$

а уравнение нормали — в виде

$$y + 1 = -4(x - 1), \quad \text{или} \quad 4x + y - 3 = 0. \quad ■$$

916. Найти угол между параболами $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$

❑ Решив совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения $A(2; 4)$ и $B(-2; 4)$. Продифференцируем уравнения парабол: $y_1' = -2x$, $y_2' = 2x$. Найдем угловые коэффициенты касательных к параболам в точке A (т.е. значения производных при $x = 2$): $k_1 = -4$, $k_2 = 4$. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{4+4}{1-16} = -\frac{8}{15}$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{15}\right)$. Аналогично находим угол между кривыми в точке B: $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. ■

917. Найти уравнение нормали к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M(x_0; y_0)$.

918. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$, проведенной в точке $M(-9; -8)$.

919. Составить уравнения касательной и нормали к астроиде $x=\sqrt{2}\cos^3 t$, $y=\sqrt{2}\sin^3 t$, проведенных в точке, для которой $t=\frac{\pi}{4}$.

920. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, проведенных в точке, для которой $t=\frac{\pi}{2}$.

921. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x=t^2$, $y=t^3$, проведенных в точке, для которой $t=2$.

922. Показать, что уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

923. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y=\operatorname{sh}x$, проведенная в точке $(0;0)$?

924. Составить уравнения касательной и нормали к цепной линии $y=\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ в точке, где $x=2\ln 2$.

925. Составить уравнение касательной к равносторонней гиперболе $x=$ $=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$ в точке $t=t_0$.

Найти углы между заданными линиями:

926. $y=x-x^2$ и $y=5x$.

927. $y=x^3$ и $y=\frac{1}{x^2}$.

928. $y=1+\sin x$ и $y=1$.

929. $x^2+y^2=5$ и $y^2=4x$.

930. $y=\sqrt{2}\sin x$ и $y=\sqrt{2}\cos x$.

931. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s=\frac{t^5}{5}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{8}$ (t — в секундах, s — в метрах). Определить скорость движения в конце 2-й секунды.

❑ Находим производную пути по времени:

$$\frac{ds}{dt}=t^4+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8}.$$

При $t=2$ имеем $\frac{ds}{dt}=16+\frac{1}{8}\sqrt{2}\approx 16{,}18$. Значит, $v\approx 16{,}18$ м/с. ■

932. По параболе $y=x(8-x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x=t\sqrt{t}$ (t — в секундах, x — в метрах). Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1;7)$?

❑ Найдем закон изменения ординаты; заменив в уравнении параболы x на $t\sqrt{t}$, получим $y=8t\sqrt{t}-t^3$ Скорость изменения ординаты есть производная от ординаты по времени: $y'_t=12\sqrt{t}-3t^2$. Для точки $M(1;7)$ значение t равно 1. Поэтому $y'_{t=1}=9$, т.е. скорость изменения ординаты равна 9 м/с. ■

933. Зависимость пути от времени задана уравнением $s=t\ln(t+1)$ (t — в секундах, s — в метрах). Найти скорость движения в конце 2-й секунды.

934. По кубической параболе $y=x^3$ движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени t по закону $y=at^3$. Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени?

5. Нахождение угла между радиус-вектором и линией. Пусть плоская линия задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$. Направление линии в данной точке $M(x; y)$ определяется касательной в этой точке, т.е. углом α между касательной и положительным направлением оси Ox (отсчитываемым против часовой стрелки), причем $\operatorname{tg}\alpha = y'$ Угловой коэффициент радиус-вектора точки M составляет $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, а угол между радиус-вектором и касательной к линии в этой точке равен $\omega = \alpha - \varphi$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y' \frac{y}{x}} = \frac{xy' - y}{x + yy'} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}.$$

Если линия задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $x\,dy - y\,dx = r^2 d\varphi$, $x\,dx + y\,dy = r\,dr$, откуда

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r^2\,d\varphi}{r\,dr} = \frac{r}{\dot r}.$$

Найти углы между заданными линиями и указанными радиус-векторами:

935. Между параболой $y = 4 - x^2$ и радиус-вектором ее точки $M(1; 3)$.

❑ Находим

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{xy' - y}{x + yy'} = \frac{x(-2x) - y}{x + y(-2x)} = \frac{-2x^2 - y}{x - 2xy}.$$

В точке $M(1; 3)$ получаем $\operatorname{tg}\omega = \frac{-2-3}{1-6} = 1$, т.е. $\omega = \frac{\pi}{4}$. ■

936. Между окружностью $r = a$ радиус-вектором любой ее точки.

❑ Имеем $\dot r = 0$; значит, $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{\dot r} = \infty$, т.е. $\omega = \frac{\pi}{2}$. ■

937. Между равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = 36$ и радиус-вектором точки $M(10; 8)$.

❑ Так как $2x - 2yy' = 0$, $y' = \frac{x}{y}$, то

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{x \cdot \frac{x}{y} - y}{x + y \cdot \frac{x}{y}} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{36}{2xy} = \frac{18}{xy}.$$

В точке $M(10; 8)$ имеем $\operatorname{tg}\omega = \frac{18}{10 \cdot 8} = 0{,}225$, т.е. $\omega = \operatorname{arctg} 0{,}225$. ■

938. Между кардиоидой $r = a(1 - \cos\varphi)$ и радиус-вектором ее точки $M(\frac{3a}{2}; \frac{2\pi}{3})$.

❑ Здесь $\dot r = a\sin\varphi$, $\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{\dot r} = \frac{a(1-\cos\varphi)}{a\sin\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$. В данной точке M получаем $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{3}$. ■

939. Между параболой $y^2 = 8x$ и радиус-вектором ее точки $M(2; 4)$.

940. Между спиралью Архимеда $r = a\varphi$ и радиус-вектором любой ее точки.

941. Между окружностью $r = \cos\varphi$ и радиус-вектором любой ее точки.

942. Между окружностью $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 2$ и радиус-вектором ее точки $M(6;6)$.

943. Между спиралью $r = ae^{m\varphi}$ и радиус-вектором любой ее точки.

944. Между эллипсом $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ и радиус-вектором его точки $M(6;4{,}8)$.

6. Производные высших порядков. *Производной второго порядка* (*второй производной*) функции $y = f(x)$ называют производную от ее производной. Вторую производную обозначают так: y'', или $\frac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$.

Если $s = f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2s}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Аналогично *производная третьего порядка* функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y''' = (y'')'$

Вообще, *производной n-го порядка* функции $y = f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)}$ Обозначают n-ю производную так: $y^{(n)}$, или $\frac{d^ny}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков (вторую, третью и т.д.) вычисляют последовательным дифференцированием данной функции.

Если функция задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то производные y'_x, $y''_{xx}, \ldots$ вычисляют по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad y''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \quad \text{и т.д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$$

945. Дано: $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 0{,}5x + 7$. Найти y', y'', y''', ...

❏ $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - 0{,}5$, $y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2$, $y''' = 60x^2 + 48x - 18$, $y^{IV} = 120x + 48$, $y^{V} = 120$, $y^{VI} = y^{VII} = \cdots = 0$. ■

946. Дано: $y = \ln x$. Найти $y^{(n)}$

❏ $y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $y'' = -1\cdot x^{-2}$, $y''' = 1\cdot 2x^{-3}$, $y^{IV} = -1\cdot 2\cdot 3x^{-4}, \ldots$ $y^{(n)} = 1\ \ 2\cdot 3\cdots(n-1)(-1)^{n-1}\ \ x^{-n} = (-1)^{n-1}\ \ \frac{(n-1)!}{x^n}$. ■

947. Дано: $y = 2^x$ Найти $y^{(n)}$

❏ $y' = 2^x\ln 2$, $y'' = 2^x\ln^2 2$, $y''' = 2^x\ln^3 2, \ldots, y^{(n)} = 2^x\ln^n 2$. ■

948. Дано: $y = \sin x$. Найти $y^{(n)}$

❏ $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\ \ \frac{\pi}{2}\right)$, $y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $\quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\ \ \frac{\pi}{2}\right)$. ■

949. Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, если $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

❑ $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{(a\sin^3 t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t,$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'_t}{(a\cos^3 t)'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$ ■

Найти производные второго порядка заданных функций:

950. $y = -\frac{22}{x+5}$.

951. $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$.

952. $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$.

953. $y = -\frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$.

954. $y = x\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{x^2+a^2}$.

955. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

956. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$

957. Показать, что функция $y = \sin\ln x + \cos\ln x$ удовлетворяет уравнению $x^2y'' + xy' + y = 0$.

958. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

959. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $s = \sqrt{t}$. Найти ускорение точки в конце 4-й секунды.

Найти производные третьего порядка заданных функций:

960. $y = \frac{x}{6(x+1)}$.

961. $y = \frac{1}{2}\ln^2 x$.

962. $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$.

963. $y = \operatorname{sh}^2 x$.

Ⓤ Учесть, что $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

Найти производные n-го порядка заданных функций:

964. $y = x^n\sqrt{x}$.

965. $y = \frac{1}{2x+1}$.

966. $y = 5 - 3\cos^2 x$.

967. $y = 2^x + 2^{-x}$.

968. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

969. $y = e^{kx}$.

970. $y = \cos x$.

971. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

972. $\begin{cases} x = at + b, \\ y = \alpha t^2 + \beta t + \gamma. \end{cases}$

973. Показать, что функция $y = e^x + 2e^{2x}$ удовлетворяет уравнению $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

974. Показать, что функция $y = x^3$ удовлетворяет уравнению $y^{V} + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$.

7. Дифференциалы первого и высших порядков. *Дифференциалом* (*первого порядка*) функции $y = f(x)$ называют главную часть ее приращения, линейную относительно приращения аргумента. Дифференциалом аргумента называют приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy = y'dx.$$

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке $M(x; y)$ (рис. 28).

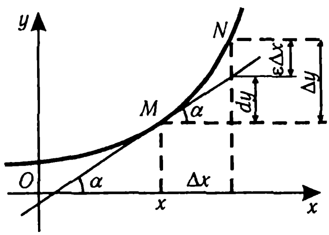

Рис. 28

Основные свойства дифференциала

1° $dC = 0$, где $C = \text{const}$.

2° $d(Cu) = C\,du$.

3° $d(u \pm v) = du \pm dv$.

4° $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

5° $d(\frac{u}{v}) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $v \neq 0$.

6° $df(u) = f'(u)\,du$.

Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$ и справедлива формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Таким образом, дифференциал функции может применяться для приближенных вычислений.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называют дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$.

Аналогично определяют *дифференциал третьего порядка*: $d^3y = d(d^2y)$. Вообще, $d^ny = d(d^{n-1}y)$.

Если $y = f(x)$ и x — независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляют по формулам

$$d^2y = y''(dx)^2, \quad d^3y = y'''(dx)^3, \qquad d^ny = y^{(n)}(dx)^n$$

975. Найти дифференциал функции $y = \operatorname{arctg} x$.

❑ $dy = (\operatorname{arctg} x)' \cdot dx = \frac{dx}{1 + x^2}$. ■

976. Найти дифференциал функции $s = e^{t^3}$

❑ $ds = e^{t^3} \cdot 3t^2\,dt$. ■

977. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = (2x - 3)^3$

❑ $dy = 3(2x - 3)^2\ \ 2dx = 6(2x - 3)^2\,dx$,

$d^2y = 12(2x-3)\ 2dx^2 = 24(2x-3)\,dx^2$,
$d^3y = 24\cdot 2dx^3 = 48\,dx^3$ ■

978. Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $v = e^{2t}$

❑ $dv = 2e^{2t}dt$, $d^2v = 4e^{2t}\cdot dt^2$ ■

979. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = 2x^3 + 5x^2$

❑ Находим

$$\Delta y = 2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 2x^3 - 5x^2 = \\ = (6x^2 + 10x)\Delta x + (6x+5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3,$$

$$dy = (6x^2 + 10x)\,dx.$$

Разность между приращением Δy и дифференциалом dy есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx, равная $(6x+5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3$ ■

980. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

❑ Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Полагая $x = 0{,}5$, $\Delta x = 0{,}01$ и применяя формулу $\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)'\Delta x$, получаем

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$ ■

981. Вычислить приближенное значение площади круга, радиус которого равен 3,02 м.

❑ Воспользуемся формулой $S = \pi R^2$ Полагая $R = 3$, $\Delta R = 0{,}02$, имеем

$$\Delta S \approx dS = 2\pi R\cdot\Delta R = 2\pi\cdot 3\cdot 0{,}02 = 0{,}12\pi.$$

Следовательно, приближенное значение площади круга составляет $9\pi + 0{,}12\pi = 9{,}12\pi \approx 28{,}66$ (м^2). ■

Найти дифференциалы заданных функций:

982. $y = \frac{x}{2}\sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}$.

983. $x = \frac{1}{12}\ln\frac{x-6}{x+6}$.

984. $y = 2\ln \operatorname{ch}\frac{x}{2}$.

985. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$

986. Найти dy, d^2y, d^3y, если $y = x(\ln x - 1)$.

987. Найти d^2y, если $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

988. Сравнить приращение и дифференциал функции $y = \frac{1}{x}$.

989. Вычислить Δy и dy для функции $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ и $\Delta = 0{,}01$.

990. Найти приближенное значение объема шара радиуса 2,01 м.

991. Найти приближенное значение x из уравнения $13\sin x - 15\cos x = 0$.

Найти приближенные значения:

992. $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

993. $\operatorname{tg} 46^\circ$

994. $\ln\operatorname{tg} 47^\circ 15'$.

995. $\sqrt[4]{15{,}8}$.

§ 2

Исследование функций

1. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши и формула Тейлора.

Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема в интервале $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то в интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одно значение $x = \xi$, при котором $f'(\xi) = 0$.*

Если, в частности, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, то теорема Ролля означает, что между двумя корнями функции содержится хотя бы один корень ее производной.

Теорема Лагранжа (о конечном приращении). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то в этом интервале найдется хотя бы одно значение $x = \xi$, при котором выполняется равенство*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$$

Эти теоремы имеют такой геометрический смысл: на дуге AB непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в каждой внутренней точке определенную касательную (не параллельную оси Oy), найдется хотя бы одна внутренняя точка, в которой касательная параллельна хорде AB. (Для теоремы Ролля и хорда AB, и касательная параллельны оси Ox.)

Теорема Коши. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы в интервале $(a; b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$, то в этом интервале найдется хотя бы одно значение $x = \xi$, при котором*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}, \quad \text{где} \quad a < \xi < b.$$

Формула Тейлора. *Функцию $f(x)$, дифференцируемую $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку a, можно представить в виде суммы многочлена n-й степени и остаточного члена R_n:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1},$$

где точка ξ лежит между точками a и x, т.е. $\xi = a + \theta(x - a)$, причем $0 < \theta < 1$

При $a = 0$ получается ***формула Маклорена***:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n + 1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Приведем разложения некоторых функций по формуле Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n; \qquad R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{m+1}x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m};$$

$$R_{2m} = (-1)^m \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1};$$

$$R_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n;$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1}$$

(всюду $0 < \theta < 1$).

996. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 6x + 100$, если $a = 1$, $b = 5$? При каком значении ξ?

❑ Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x и ее значения на концах отрезка $[1; 5]$ равны: $f(1) = f(5) = 95$, то теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значение ξ определяем из уравнения $f'(x) = 2x - 6 = 0$, т.е. $\xi = 3$. ■

997. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$, если $a = 0$, $b = 8$? При каком значении ξ?

❑ Функция $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$ непрерывна при всех значениях x и имеет производную $f'(x) = \dfrac{8-2x}{3\sqrt[3]{(8x-x^2)^2}}$ при $x \neq 0$, $x \neq 8$, т.е. дифференцируема в интервале $(0; 8)$. Кроме того, $f(0) = f(8) = 0$. Таким образом,, теорема Ролля на отрезке $[0; 8]$ выполняется; действительно, $f'(x) = 0$ при $x = \xi = 4$. ■

998. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$. Пусть $a = 0$, $b = 16$. Тогда $f(0) = f(16) = 4$. Однако производная $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-8}}$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(0; 16)$. Противоречит ли это теореме Ролля?

❑ Нет, так как в точке $x = 8$ интервала $(0; 16)$ производная не существует, и условия теоремы Ролля нарушены. ■

999. Показать, что производная многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ имеет действительный корень в интервале $(-1; 1)$.

❑ Найдем корни данного многочлена:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0, \quad \text{или} \quad (x-1)^2(x+1) = 0,$$

т.е. $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Так как $f(-1) = f(1) = 0$, то по теореме Ролля производная $f'(x)$ имеет корень в интервале $(-1;1)$. Найдем корни производной: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, т.е. $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$. Значит, между корнями функции -1 и 1 содержится корень производной, равный $-\frac{1}{3}$. ■

1000. На дуге AB кривой $y = 2x - x^2$ найти точку M, в которой касательная параллельна хорде AB, если $A(1;1)$ и $B(3;-3)$.

❑ Функция $y = 2x - x^2$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x. По теореме Лагранжа между двумя значениями $a = 1$ и $b = 3$ существует значение $x = \xi$, удовлетворяющее равенству $y(b) - y(a) = (b-a)y'(\xi)$, где $y' = 2 - 2x$. Подставив соответствующие значения, получим $y(3) - y(1) = (3-1)y'(\xi)$; $(2\cdot 3 - 3^2) - (2\cdot 1 - 1^2) = (3-1)\cdot(2-2\xi)$; $-4 = 4(1-\xi)$. Отсюда $\xi = 2$, $y(2) = 0$. Итак, точка M имеет координаты $(2;0)$. ■

1001. На дуге AB кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = t^2$, $y = t^3$, найти точку M, в которой касательная параллельна хорде AB, если точкам A и B соответствуют значения $t = 1$ и $t = 3$.

❑ Угловой коэффициент хорды AB равен $\dfrac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$, а угловой коэффициент касательной в точке M (при $t = \xi$) равен $\dfrac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}$ где $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2$ Согласно теореме Коши, получаем уравнение

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)} = \frac{y'_t(\xi)}{x'_t(\xi)}, \quad \text{или} \quad \frac{27-1}{9-1} = \frac{3\xi^2}{2\xi}, \quad \text{или} \quad \frac{13}{4} = \frac{3}{2}\xi,$$

т.е. $\xi = \frac{13}{6}$. Найденное значение ξ удовлетворяет неравенству $1 < \xi < 3$.

Подставив значение $t = \xi$ в параметрические уравнения кривой, находим $x = \frac{169}{36}$, $y = \frac{2197}{216}$. Итак, искомая точка $M\left(\frac{169}{36}; \frac{2197}{216}\right)$. ■

1002. Представить функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в виде многочлена пятой степени относительно двучлена $x - 1$.

❑ Вычислим значения функции $f(x) = x^{1/3}$ и ее производных до пятого порядка включительно при $a = 1$: $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'(1) = \frac{1}{3}$; $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-2/3}$, $f''(1) = -\frac{2}{9}$; $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$, $f'''(1) = \frac{10}{27}$; $f^{IV}(x) = -\frac{80}{81}x^{-11/3}$, $f^{IV}(1) = -\frac{80}{81}$; $f^{V}(x) = \frac{880}{243}x^{-14/3}$, $f^{V}(1) = \frac{880}{243}$. Следовательно, по формуле Тейлора получим

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3 - \\ - \frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4 + \frac{880}{243\cdot 5!}(x-5)^5 + R_5,$$

где $R_5 = \dfrac{f^{VI}(\xi)}{6!}(x-1)^6 = -\dfrac{12320}{729\cdot 6!}\cdot\xi^{-17/3}(x-1)^6$, $1 < \xi < x$. ■

1003. Представить функцию $f(x) = a^x$ ($a > 0$) в виде многочлена третьей степени относительно x.

❑ Имеем

$$f(x) = a^x,\ f'(x) = a^x \ln a,\ f''(x) = a^x \ln^2 a,\ f'''(x) = a^x \ln^3 a,\ f^{\text{IV}}(x) = a^x \ln^4 a,$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = \ln a,\ f''(0) = \ln^2 a,\ f'''(0) = \ln^3 a,\ f^{\text{IV}}(\theta x) = \ln^4 a \cdot a^{\theta x}$$

Согласно формуле Маклорена, получаем

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + R_3,$$

где $R_3 = \dfrac{x^4 \ln^4 a}{4!} a^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$. ■

1004. Вычислить с точностью до 10^{-3} приближенное значение $\sqrt[3]{29}$.

❑ Представим искомое значение так: $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1 + \frac{2}{27}\right)^{1/3}$

Воспользуемся биномиальным разложением

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{n!}x^n + R_n.$$

Отсюда получаем приближенное равенство

$$(1 + x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

погрешность которого

$$R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1 + \theta x)^{m-n-1}$$

можно сделать как угодно малой при $|x| < 1$ и при достаточно большом n. Полагая $x = \frac{2}{27}$ и $m = \frac{1}{3}$, получим

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2 \cdot 2}{81 \cdot 81} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} - \frac{2^5 \cdot 5}{81^4} + \dots + R_n\right).$$

Оценив величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим

$$3|R_1| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{81^2} < 0,002, \quad 3|R_2| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} < 0,0003.$$

Итак, для вычисления с заданной точностью достаточно взять три члена, которые предшествуют остатку R_2, т.е. $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0,024 - 0,0006) = 3,072$. ■

1005. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до $0,0001$.

❑ Воспользуемся формулой Маклорена для функции e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$. Полагая $x = \dfrac{1}{2}$, получаем

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n\cdot n!} + R_n,$$

где $R_n = \dfrac{e^{\theta/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Так как $0 < \theta < 1$, $2 < e < 3$, то $R_n < \dfrac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!}$. Но $e^{1/2} < 2$, поэтому $R_n < \dfrac{1}{2^n(n+1)!}$. Требуется определить n так, чтобы выполнялось неравенство $R_n < 0{,}0001$.

Если $n = 3$, то $R_3 < \dfrac{1}{8\cdot 24} = \dfrac{1}{192}$; если $n = 4$, то $R_4 < \dfrac{1}{16\cdot 120} = \dfrac{1}{1920}$; если $n = 5$, то $R_5 < \dfrac{1}{32\cdot 720}$, т.е. $R_5 < 0{,}0001$.

Для вычисления $\sqrt{e}$ точностью до $0{,}0001$ получаем приближенное равенство

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!} + \frac{1}{2^4\cdot 4!} + \frac{1}{2^5\cdot 5!}.$$

Произведем суммирование, обратив все слагаемые в десятичные дроби с одним лишним (запасным) знаком. В результате находим $\sqrt{e} \approx 1{,}6487$. ■

1006. Дана функция $f(x)$, непрерывная вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно на отрезке $[a; b]$ и имеющая производную n-го порядка в интервале $(a; b)$, причем для этой функции выполняются равенства $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = \quad = f(x_{n-1}) = f(b)$, где $a < x_1 < x_2 < \, < x_{n-1} < b$. Доказать, что в интервале $(a; b)$ найдется по крайней мере одна такая точка ξ, для которой $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1007. Рассмотреть частный случай предыдущей задачи, если $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, $a = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $b = 4$. Определить ξ.

1008. Представить в виде многочлена третьей степени относительно $x - x_0$ ($x_0 \neq 0$) функцию $\dfrac{1}{x}$.

1009. В какой точке дуги AB кривой $y = x^3 - 3x$ касательная параллельна хорде AB, если $A(0; 0)$, $B(3; 18)$?

Вычислить с точностью до 10^{-3}:

1010. $\cos 41°$ **1011.** $\sqrt[3]{121}$.

1012. $\sqrt[3]{e}$. **1013.** $\sqrt[7]{129}$.

1014. $\sin 36°$

2. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и $\varphi'(x) \neq 0$. Тогда справедливо ***правило Лопиталя***: *если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, *т.е. частное* $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$

в точке $x = x_0$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

при условии, что предел в правой части этого равенства существует.

Если же частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т.д.

В случае неопределенности вида $0\cdot\infty$ или $\infty-\infty$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида 0^0, ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Найти указанные пределы:

1015. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

❑ Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x\to 1$, а потому имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}. \quad ■$$

1016. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

❑ Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6},$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Здесь правило Лопиталя применено дважды. ■

1017. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, если n — целое положительное число.

❑ Это неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применим правило Лопиталя n раз:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{e^x} = 0. \quad ■$$

1018. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}$.

❑ В данном случае также имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}(1+\frac{x}{2})}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}(2+\frac{x}{2})}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = 0. \quad ■$$

1019. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$.

❏ Здесь мы имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Представим произведение функций в виде частного, а затем, получив неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0. \quad ■$$

1020. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

❏ Это неопределенность вида $\infty - \infty$. Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\frac{0}{0}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} = \frac{1}{2}. \quad ■$$

1021. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$

❏ Это неопределенность вида 0^0 Обозначим данную функцию через y, т.е. $y = (\sin x)^x$, и прологарифмируем ее:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Вычислим предел логарифма данной функции, применяя правило Лопиталя $\left(\text{здесь имеем неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x}\right) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$. ■

1022. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$

❏ Это неопределенность вида ∞^0 Положим $(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = y$ и прологарифмируем:

$$\ln y = 2\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \frac{2 \ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to \pi/2} \ln y = 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sec x} = 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\sec x \operatorname{tg} x} =$$

$$= 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x \sec^2 x} = \lim_{x\to \pi/2} \cos x = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to \pi/2} y = e^0 = 1$. ■

1023. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$

❑ Это неопределенность вида 1^∞ Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}(\ln x \ln(1+x)) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$. ■

Найти пределы следующих функций:

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

1024. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$.

1025. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

1026. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{3/x}-1}$.

1027. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$.

1028. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

1029. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3xe^x+3x^2}{\operatorname{arctg}x-\sin x-\frac{x^3}{6}}$.

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

1030. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$.

1031. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ $(n>0)$.

1032. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

1033. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$.

1034. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$.

1035. $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}\pi x)$.

1036. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg}x)$.

1037. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x$.

Неопределенность вида $\infty-\infty$.

1038. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

1039. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right)$.

1040. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

Неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞

1041. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$

1042. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$

1043. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$

1044. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$

3. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Функцию $f(x)$ называют *возрастающей в точке* x_0, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняются условия $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ (рис. 29).

Функцию $f(x)$ называют *убывающей в точке* x_0, если при любом достаточно малом $h > 0$ выполняются условия $f(x_0-h) > f(x_0) > f(x_0+h)$ (рис. 30).

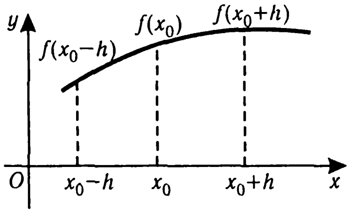

Рис. 29

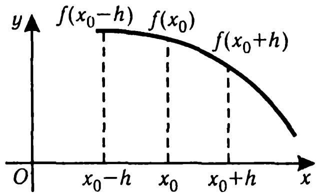

Рис. 30

Функцию $f(x)$ называют *возрастающей в интервале* $(a; b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функцию $f(x)$ называют *убывающей в интервале* $(a; b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Признаки возрастания и убывания функции.

1) *Если* $f'(x_0) > 0$, *то функция* $f(x)$ *возрастает в точке* x_0

2) *Если* $f'(x_0) < 0$, *то функция* $f(x)$ *убывает в точке* x_0

Значение $f(x_0)$ называют *максимумом* функции $f(x)$, если при любом досточна малом $h>0$ выполняются условия $f(x_0-h)<f(x_0)$ и $f(x_0+h)<f(x_0)$. Точку x_0 называют в этом случае *точкой максимума* функции $f(x)$ (рис. 31).

Значение $f(x_0)$ называют *минимумом* функции $f(x)$, если при любом достаточно малом $h>0$ выполняются условия $f(x_0-h)>f(x_0)$ и $f(x_0+h)>f(x_0)$. Точку x_0 называют в этом случае *точкой минимума* функции $f(x)$ (рис. 32).

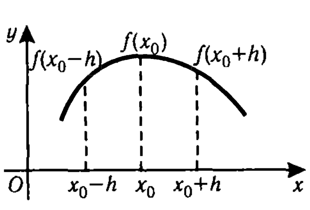

Рис. 31

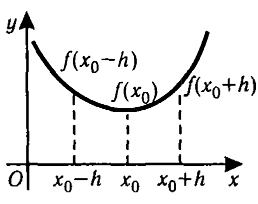

Рис. 32

Максимум или минимум функции называют *экстремумом* функции. Точку максимума или минимума функции называют *точкой ее экстремума*.

Необходимое условие экстремума. *Если функция* $f(x)$ *в точке* x_0 *имеет экстремум, то производная* $f'(x_0)$ *обращается в нуль или не существует.*

Точку x_0, в которой $f'(x_0) = 0$, называют *стационарной точкой*. Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называют *критическими точками*. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума.

Правило 1. *Если x_0 — критическая точка функции $f(x)$ и при произвольном достаточно малом $h>0$ выполняются неравенства $f'(x_0-h)>0$, $f'(x_0+h) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум; если же $f'(x_0-h) < 0$, $f'(x_0+h) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум.*

Если же знаки $f'(x_0 - h)$ и $f'(x_0 + h)$ одинаковы, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.

Правило 2. *Пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$; тогда функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, а именно максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$*

Правило 3. *Пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. В этом случае функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, если n — четное число, а именно, максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если же n — нечетное число, то функция $f(x)$ в точке x_0 экстремума не имеет.*

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее (наименьшее).

1045. Даны точки $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 0,5$. В каких из перечисленных точек функция $y = x^3 - 3x^2$ возрастает? Убывает?

❑ Найдем производную $y' = 3x^2 - 6x$. Если $x = 3$, то $y' = 9 > 0$ — функция возрастает; если $x=1$, то $y'=-3<0$ — функция убывает; если $x=-1$, то $y'=9>0$ — функция возрастает; если $x=0,5$, то $y'=-2,25<0$ — функция убывает. ■

1046. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x(1 + \sqrt{x})$.

❑ Находим $y' = 1+\frac{3}{2}x^{1/2}$ Так как производная положительна в промежутке $[0; +\infty)$, то функция возрастает во всей области определения. ■

1047. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = x - 2\sin x$, если $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

❑ Найдем производную $y' = 1 - 2\cos x$. Очевидно, что $y' > 0$ в интервале $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ и $y' < 0$ в интервалах $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$. Таким образом, в интервале $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$ данная функция возрастает, а в интервалах $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right)$ убывает. ■

1048. Исследовать на экстремум функцию $y = (x - 5)e^x$

❑ Находим производную $y' = (x - 4)e^x$ Приравниваем ее нулю и находим стационарную точку: $e^x(x - 4) = 0$, $x = 4$; $y'(4 - h) = -he^{4-h} < 0$, $y'(4 + h) = he^{4+h} > 0$. Согласно правилу 1, заключаем, что в точке $x = 4$ функция имеет минимум $y_{\min} = -e^4$ ■

1049. Исследовать на экстремум функцию $y = x\sqrt{1-x^2}$.

❑ Функция определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Найдем производную $y' = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0$ при $1-2x^2=0$; отсюда $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (стационарные точки); $y' = \infty$ при $x = \pm 1$, т.е. на границах области определения функции.

Найдем вторую производную $y'' = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}}$. Вычислим значения второй производной в стационарных точках. При $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ имеем

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}(1-\frac{1}{2})^{3/2}} < 0;$$

следовательно, согласно правилу 2 заключаем, что в точке $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ функция имеет максимум $y_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$. При $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ получим

$$y''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1\cdot(1-3)}{\sqrt{2}(1-\frac{1}{2})^{3/2}} > 0,$$

т.е. в точке $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ функция имеет минимум $y_{\min} = -\dfrac{1}{2}$.

В критических точках $x = \pm 1$ экстремума нет, так как по определению точками экстремума могут быть лишь внутренние точки области определения функции. ■

1050. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-1)^4$

❑ Найдем производную $y' = 4(x-1)^3$; $(x-1)^3 = 0$; $x = 1$ — стационарная точка. Вторая производная $y'' = 12(x-1)^2$ при $x = 1$ равна нулю. Третья производная $y''' = 24(x-1)$ при $x = 1$ также обращается в нуль. Четвертая производная $y^{\mathrm{IV}} = 24 > 0$. Следовательно, согласно правилу 3 заключаем, что в точке $x = 1$ функция имеет минимум $y_{\min} = 0$. ■

1051. Исследовать на экстремум функцию $y = 1 - (x-2)^{4/5}$

❑ Находим $y' = -\frac{4}{5}(x-2)^{-1/5} = -\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$. Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует лишь при $x = 2$ (критическая точка).

Так как при достаточно малом $h>0$ выполняются неравенства $y'(2-h)>0$ и $y'(2+h) < 0$, то, согласно правилу 1 заключаем, что при $x = 2$ функция имеет максимум $y_{\max} = 1$. ■

1052. Исследовать на экстремум функцию $y = (x-2)^{2/3}(2x+1)$.

❑ Находим $y' = \dfrac{10}{3}\,\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x-2}}$. Критические точки $x = 1$ (производная равна нулю) и $x = 2$ (производная не существует). При достаточно малом $h > 0$ выполняются неравенства $y'(1-h) > 0$, $y'(1+h) < 0$; $y'(2-h) < 0$, $y'(2+h) > 0$. Следовательно, в точке $x = 1$ функция имеет максимум $y_{\max} = 3$, а в точке $x = 2$ — минимум $y_{\min} = 0$. ■

1053. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.

❑ Находим производную $f'(x) = 3 - 3x^2$; $3 - 3x^2 = 0$, т.е. $x = \pm 1$ — стационарные точки. Определяем значения функции в этих точках: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Вычисляем значения данной функции на границах промежутка: $f(-2) = 2$, $f(3) = -18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно -18. ■

1054. Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объем при данной полной поверхности S.

❑ Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота равна y. Тогда

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy, \quad \text{т.е.} \quad y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right).$$

Следовательно, объем цилиндра выразится так:

$$V = V(x) = \pi x^2 \ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{S}{x} - 2\pi x\right) = \frac{S}{2}x - \pi x^3$$

Задача сводится к исследованию функции $V(x)$ на максимум при $x > 0$.

Найдем производную $\frac{dV}{dx} = \frac{S}{2} - 3\pi x^2$ и приравняем ее нулю, откуда $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Найдем вторую производную $\frac{d^2V}{dx^2} = -6\pi x$. Так как при $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ выполняется условие $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$, то объем имеет наибольшее значение, причем

$$y = \frac{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 2x,$$

т.е. осевое сечение цилиндра должно быть квадратом. ■

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1055. $y = 2 - 3x + x^3$.

1056. $y = (x^2 - 1)^{3/2}$.

1057. $y = xe^{-x}$

1058. $y = (2 - x)(x + 1)^2$.

Найти экстремумы функций:

1059. $y = x^2(1 - x\sqrt{x})$.

1060. $y = x + \sqrt{3 - x}$.

1061. $y = \ln(x^2 + 1)$.

1062. $y = \operatorname{ch}^2 x$.

1063. $y = \frac{x}{\ln x}$.

1064. $y = xe^{-x^2/2}$

1065. $y = (x - 1)^{6/7}$

1066. $y = (2x - 1)\sqrt[3]{(x - 3)^2}$.

1067. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

1068. $y = x - 2\sin^2 x$.

1069. $y = e^{1,5\mathrm{si}}$

1070. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3; 2]$.

1071. На оси Oy найти точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом, если $A(2; 0)$, $B(8; 0)$.

1072. Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

1073. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1074. Кусок проволоки длиной l согнут в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если его площадь наибольшая?

1075. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна l.

1076. Найти наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого равна S.

1077. Турист идет из пункта A, находящегося на шоссейной дороге, в пункт B, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт B, если его скорость по шоссе 5 км/ч, а по бездорожью 3 км/ч?

1078. Канал, ширина которого 27 м, под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 м. Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?

1079. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Яркость освещения выражается формулой $I = \frac{k \sin\varphi}{r^2}$, где φ — угол наклона лучей, r — расстояние до источника света от освещаемой площадки, k — сила источника света.

4. Выпуклость, вогнутость. Точка перегиба. График функции $y = f(x)$ называют *выпуклым* в интервале $(a; b)$, если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 33).

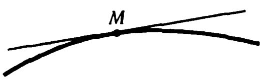

Рис. 33

Рис. 34

График функции $y = f(x)$ называют *вогнутым* в интервале $(a; b)$, если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала (рис. 34).

Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции. *Если $f''(x) < 0$ в интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым в этом интервале; если же $f''(x) > 0$, то в интервале $(a; b)$ график функции — вогнутый.*

Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Точку $(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называют *точкой перегиба* этого графика, если существует такая окрестность точки x_0 оси абсцисс, в пределах которой график функции $f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости (рис. 35).

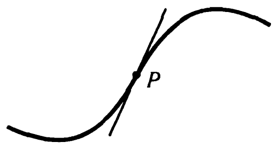

Рис. 35

Пусть x_0 — абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$; тогда вторая производная равна нулю или не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называют *критическими точками* II *рода*.

Если x_0 — критическая точка II рода и при произвольном достаточно малом $h > 0$ выполняются неравенства $f''(x_0 - h) < 0$, $f''(x_0 + h) > 0$ (или неравенства $f''(x_0 - h) > 0$, $f''(x_0 + h) < 0$), то точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой x_0 является точкой перегиба.

Если же $f''(x_0 - h)$ и $f''(x_0 + h)$ имеют одинаковые знаки, то точка кривой с абсциссой x_0 точкой перегиба не является.

1080. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $y = x^5 + 5x - 6$.

❑ Имеем $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$ Если $x < 0$, то $y'' < 0$ и кривая выпукла; если же $x > 0$, то $y'' > 0$ и кривая вогнута. Итак, кривая выпукла в промежутке $(-\infty; 0)$ и вогнута в промежутке $(0; +\infty)$. ■

1081. Найти экстремумы функции $y = (x + 1)^2(x - 2)$ и точки перегиба ее графика.

❑ Найдем первую производную: $y' = 3(x^2 - 1)$. Корни первой производной: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Найдем вторую производную: $y'' = 6x$. Вычислим значения второй производной в стационарных точках: $y''(-1) = -6 < 0$, т.е. $y_{\max} = 0$; $y''(1) = 6 > 0$, т.е. $y_{\min} = -4$.

Найдем точку перегиба, для чего вторую производную приравняем нулю: $6x = 0$, т.е. $x = 0$. Слева от точки $x = 0$ имеем $y''(0 - h) < 0$ — кривая выпукла, а справа от точки $x = 0$ имеем $y''(0 + h) > 0$ — кривая вогнута; поэтому точка с абсциссой $x = 0$ является точкой перегиба; $y_{\text{т.пер}} = -2$. ■

1082. Найти точки перегиба кривой $y = (x - 5)^{5/3} + 2$.

❑ Находим $y' = \frac{5}{3}(x - 5)^{2/3}$, $y'' = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}}$. Вторая производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует в точке $x = 5$. Значение $x = 5$ является абсциссой точки перегиба, так как $y''(5 - h) < 0$, $y''(5 + h) > 0$. Таким образом, $(5; 2)$ — точка перегиба. ■

1083. Найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = xe^x$

Найти точки перегиба кривых:

1084. $y = (x-4)^5 + 4x + 4$. **1085.** $y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

1086. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$

5. Асимптоты. Прямую L называют *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние до точки $M(x;y)$ кривой от прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по кривой от начала координат (т.е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности).

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$, если существуют пределы

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

или

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - kx].$$

1087. Найти асимптоты кривой $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$.

❑ Функция определена в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to2+0}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}} = +\infty$, то прямая $x = 2$ есть вертикальная асимптота кривой.

Горизонтальных асимптот кривая не имеет, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$ не являются конечными величинами.

Определим, существуют ли наклонные асимптоты. Находим:

$$1)\ k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - k_1x] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x}+\sqrt{x-2})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1.$$

Таким образом, существует правая наклонная асимптота $y = x + 1$ (рис. 36);

$$2)\ k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{-1}$$

(числитель и знаменатель разделили на положительную величину $-x$), т.е.

$$k_2 = -\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - k_2x] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} =$$

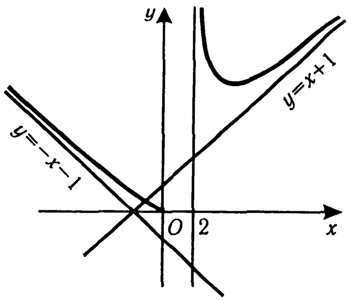

Рис. 36

$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x})}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x})} = -1.$$

Итак, существует левая наклонная асимптота $y = -x - 1$ (рис. 36). ■

1088. Найти асимптоты кривой $y = x + 2\operatorname{arctg} x$.

❑ Нетрудно установить, что вертикальных и горизонтальных асимптот кривая не имеет. Ищем наклонные асимптоты:

$$1)\ k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{x + 2\operatorname{arctg}x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{2\operatorname{arctg}x}{x}\right) = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(x + 2\operatorname{arctg}x - x) = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi;$$

$y = x + \pi$ — правая наклонная асимптота;

$$2)\ k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x + 2\operatorname{arctg}x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{2\operatorname{arctg}x}{x}\right) = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(x + 2\operatorname{arctg}x - x) = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi;$$

$y = x - \pi$ — левая наклонная асимптота. ■

1089. Найти асимптоты кривой $y = x^2e^{-x}$

❑ Очевидно, вертикальных асимптот нет. Если $x \to \infty$, то $y \to 0$. Следовательно, ось Ox является горизонтальной асимптотой данной кривой. Определим, существует ли наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0.$$

Таким образом, имеется только горизонтальная асимптота $y = 0$. ■

1090. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

❑ Если $x \to -2$, то $y \to \infty$, т.е. $x = -2$ — вертикальная асимптота. Найдем невертикальные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = 1, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} - x \right) = -4.$$

Таким образом, наклонная асимптота имеет уравнение $y = x - 4$. ■

Найти асимптоты кривых:

1091. $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$.

1092. $y = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$.

1093. $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

1094. $y = 0,5x + \operatorname{arctg} x$.

1095. $y = -x \operatorname{arctg} x$.

6. Построение графиков функций по характерным точкам. При построении графика функции $y = f(x)$ полезно выяснить его характерные особенности. Для этого обычно используют следующую схему:

1) находят область определения функции;

2) исследуют функцию на четность и нечетность;

3) находят точки пересечения графика функции с осями координат;

4) исследуют функцию на непрерывность; находят точки разрыва (если они существуют) и устанавливают характер разрыва; находят асимптоты кривой $y = f(x)$;

5) находят интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы;

6) находят интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба.

1096. Построить график функции $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

❑ 1) Область определения функции — вся числовая прямая, за исключением точки $x = 0$, т.е. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Найдем точки пересечения графика с осью Ox; имеем $\dfrac{x^3 + 4}{x^2} = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$.

4) Точка разрыва $x = 0$, причем $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$; следовательно, прямая $x = 0$ (ось Oy) является вертикальной асимптотой графика.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = x$.

5) Найдем экстремумы функции и интервалы возрастания и убывания. Имеем $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3} = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$; $y' = \infty$ при $x = 0$ (точка разрыва

функции). Точки $x = 0$ и $x = 2$ разбивают числовую прямую на промежутки $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$, причем $y' > 0$ в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ (функция возрастает) и $y' < 0$ в промежутке $(0; 2)$ (функция убывает).

Далее находим $y'' = \frac{24}{x^4}$; $y''(2) > 0$; следовательно, $x = 2$ — точка минимума; $y_{\min} = 3$.

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки ее перегиба. Так как $y'' > 0$, то график функции всюду вогнут. Точек перегиба кривая не имеет. Используя полученные данные, строим график функции (рис. 37). ■

1097. Построить график функции $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

❑ 1) Область определения — вся числовая прямая, т.е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Функция не является четной или нечетной.

3) Точки пересечения с осями координат: если $x = 0$, то $y = 1$; если $y = 0$, то $x = 1$.

4) Точек разрыва и вертикальных асимптот нет. Находим

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{x} = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{1 - x^3} + x^2} = 0.$$

Итак, уравнение наклонной асимптоты есть $y = -x$.

5) Находим $y' = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}}$; $y' = 0$ при $x = 0$; $y' = \infty$ при $x = 1$. В окрестности критических точек производная не меняет знак, экстремумов нет. Так как $y' < 0$ при всех $x \neq 0$, то функция убывает на всей числовой прямой.

6) Находим $y'' = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^5}}$; $y'' = 0$ при $x = 0$; $y'' = \infty$ при $x = 1$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$, $y''(1 - h) < 0$; $y''(1 + h) > 0$. Следовательно, в промежутках $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$ кривая вогнута, а в промежутке $(0; 1)$ — выпукла. Точки перегиба имеют координаты $(0; 1)$ и $(1; 0)$.

Используя полученные данные, строим искомый график (рис. 38). ■

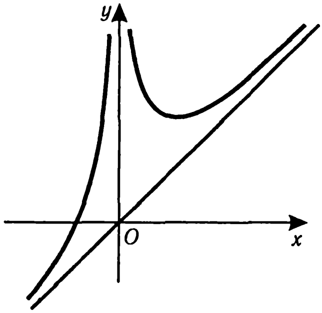

Рис. 37

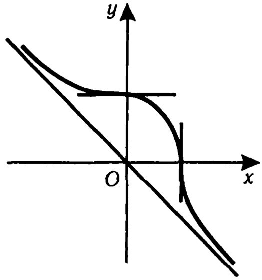

Рис. 38

Построить графики функций:

1098. $y = \sin^2 x$.

1099. $y = 3\sqrt[3]{x} - x$.

1100. $y = \ln x - \ln(x-1)$.

1101. $y = \ln\frac{x}{x-1}$.

1102. $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

1103. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1104. $y = 16x(x-1)^2$

1105. $y = (x-1)\sqrt{x}$.

1106. $y = x + e^{-x}$

1107. $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

1108. $y = e^{2x-x^2}$

1109. $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

§ 3

Кривизна плоской линии

Углом смежности дуги AB плоской линии называют угол φ между касательными, проведенными в точках A и B этой линии (рис. 39). Отношение угла смежности к длине s дуги AB называют *средней кривизной дуги* AB, т.е. $k_{\text{ср}} = \frac{\varphi}{s}$.

Кривизной данной линии в точке A называют предел средней кривизны дуги AB при $B \to A$, т.е. $k = \lim\limits_{s\to 0}\frac{\varphi}{s}$.

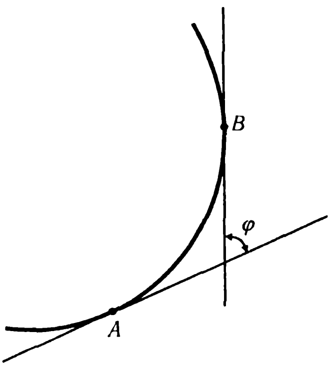

Рис. 39

Кривизна окружности $k_{\text{окр}} = \frac{1}{a}$, где a — радиус окружности; кривизна прямой равна нулю.

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то ее кривизна вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Если линия задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}},$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$.

Если линия задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\theta)$, то

$$k = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}},$$

где $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$, $\rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

Радиусом кривизны называют величину, обратную кривизне: $R = \frac{1}{|k|}$.

Окружностью кривизны данной линии в ее точке A называют предельное положение окружности, проходящей через три точки A, B, C кривой, когда $B \to A$ и $C \to A$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны. Центр окружности кривизны называют *центром кривизны*; он находится на нормали к линии, проведенной в точке A в сторону вогнутости этой линии.

Координаты ξ и η центра кривизны линии $y = f(x)$ вычисляются по формулам

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Эволютой линии называют множество ее центров кривизны. Формулы для координат центра кривизны можно рассматривать как параметрические уравнения эволюты (где параметром является абсцисса x исходной линии).

1110. Найти кривизну линии $y = -x^3$ в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}$.

❏ Имеем $y' = -3x^2$, $y'' = -6x$. При $x = \frac{1}{2}$ эти производные принимают значения $y' = -\frac{3}{4}$, $y'' = -3$, откуда находим

$$k = \left| \frac{-3}{\left(1+\frac{9}{16}\right)^{3/2}} \right| = \frac{3}{\frac{125}{64}} = \frac{192}{125}. \quad ■$$

1111. Найти кривизну в любой точке циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

❏ $\dot{x} = a(1-\cos t)$, $\ddot{x} = a\sin t$, $\dot{y} = a\sin t$, $\ddot{y} = a\cos t$,

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = a^2(\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t) = -a^2(1-\cos t),$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1-\cos t),$$

$$k = \left| \frac{-a^2(1-\cos t)}{2^{3/2}a^3(1-\cos t)^{3/2}} \right| = \frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}}. \quad ■$$

1112. Найти координаты центра кривизны линии $x^3+y^4=2$ в точке $M(1;1)$.

❏ Продифференцируем дважды уравнение данной линии:

$$3x^2 + 4y^3y' = 0, \quad (*) \qquad 6x + 12y^2y'^2 + 4y^3y'' = 0. \quad (**)$$

Так как $x = 1$, $y = 1$, то из уравнения $(*)$ находим $y' = -\frac{3}{4}$, а из уравнения $(**)$ получаем $6 + \frac{27}{4} + 4y'' = 0$, т.е. $y'' = -\frac{51}{16}$. Тогда

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''} = 1 - \frac{\left(1+\frac{9}{16}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)}{-\frac{51}{16}} = \frac{43}{68},$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{1+\frac{9}{16}}{-\frac{51}{16}} = \frac{26}{51}.$$

т.е. $C\left(\frac{43}{68}, \frac{26}{51}\right)$. ■

1113. Составить уравнение эволюты параболы $2y^2 = 2x + 1$.

❏ Продифференцируем дважды уравнение параболы:

$$4yy' = 2;\ y' = \frac{1}{2y};\ 4y'^2 + 4yy'' = 0,\ y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{4y^3}.$$

Определяем координаты центра кривизны:

$$\xi = x - \frac{(1+y'^2)\ y'}{y''} = y^2 - \frac{1}{2} - \frac{\left(1+\frac{1}{4y^2}\right)\ \frac{1}{2y}}{-\frac{1}{4y^3}} = 3y^2,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1+\frac{1}{4y^2}}{-\frac{1}{4y^3}} = y - 4y^3 - y = -4y^3$$

Получаем уравнения эволюты в параметрической форме: $\xi = 3y^2$, $\eta = -4y^3$ Исключив параметр y, найдем уравнение эволюты в явном виде: $\eta^2 = \frac{16\xi^3}{27}$. ■

1114. Найти радиус кривизны эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ в точке $M(0;3)$.

1115. Найти радиус кривизны в любой точке кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0)$.

1116. Найти кривизну линии $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ в точке $t = 1$.

1117. Найти координаты центра кривизны линии $y = \frac{1}{x}$ в точке $M(1;1)$.

1118. Составить уравнение эволюты кривой $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\sin t - \sin t$.

§ 4

Порядок касания плоских кривых

Если кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют общую точку $M(x_0; y_0)$, т.е. $y_0 = f(x_0) = \varphi(x_0)$, и касательные к указанным кривым, проведенные в точке $M(x_0; y_0)$, не совпадают, то говорят, что кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ *пересекаются* в точке M. Условие пересечения этих кривых в точке $M(x_0; y_0)$ таково:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) \neq \varphi'(x_0).$$

Если же эти кривые имеют общую точку $M(x_0; y_0)$ и касательные в этой точке к обеим кривым совпадают, то говорят, что кривые *касаются* в точке M. Условие касания кривых в точке $M(x_0; y_0)$ таково:

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0).$$

Если, наконец,

$$f(x_0) = \varphi(x_0), \quad f'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad f''(x_0) = \varphi''(x_0), \ \ldots, \ f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0),$$

но $f^{(n+1)}(x_0) \neq \varphi^{(n+1)}(x_0)$, то принято говорить, что в точке $M(x_0; y_0)$ кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ имеют *касание n-го порядка*.

Если $n \geqslant 2$, то кривые $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеют не только общую касательную, но и одинаковую кривизну.

1119. Каков порядок касания кривых $y = e^{-x}$ и $xy = \frac{1}{e}$ в точке $x = 1$?

❑ Пусть $f(x) = e^{-x}$, $\varphi(x) = \frac{1}{ex}$. Найдем последовательные производные этих функций: $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{ex^2}$, $\varphi''(x) = \frac{2}{ex^3}$,. Затем вычислим значения данных функций и их производных в точке $x = 1$; имеем $f(1) = e^{-1}$, $f'(1) = -e^{-1}$, $f''(1) = e^{-1}$; $\varphi(1) = e^{-1}$, $\varphi'(1) = -e^{-1}$, $\varphi''(1) = 2e^{-1}$ Таким образом, $f(1) = \varphi(1)$, $f'(1) = \varphi'(1)$, но $f''(1) \neq \varphi''(1)$. Следовательно, указанные кривые имеют касание первого порядка. ■

1120. При каком выборе параметра a кривая $y = e^{ax}$ имеет в точке $x = 0$ касание первого порядка с прямой $y = 2x + 1$?

❑ Пусть $f(x) = e^{ax}$ и $\varphi(x) = 2x + 1$. Для того чтобы указанные линии имели в точке $x = 0$ касание первого порядка, необходимо выполнение равенств $f(0) = \varphi(0)$ и $f'(0) = \varphi'(0)$, т.е. $e^{a \cdot 0} = 2 \cdot 0 + 1$ и $ae^0 = 2$. Отсюда $a = 2$. ■

Определить порядок касания заданных кривых:

1121. $y = 1 + \cos x$ и параболы $y = 2 - x^2$ в точке $x = 0$.

1122. $y = \sin^2 x$ и оси Ox в точке $x = 0$.

1123. Цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и параболы $y = 1 + 0,5x^2$ в точке $x = 0$.

1124. Окружностей $x^2 + y^2 = 2y$ и $x^2 + y^2 = 4y$ в точке $x = 0$.

1125. Параболы $y = x^4$ и оси Ox в точке $x = 0$.

1126. $y = \ln(1 + x)$ и параболы $y = x - x^2$ в точке $x = 0$.

§ 5

Вектор-функция скалярного аргумента и ее производная

Пространственную кривую можно задать параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ или векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}.$$

Последнее уравнение определяет переменный вектор $\boldsymbol{r}$ как вектор-функцию скалярного аргумента t, т.е. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Кривую, заданную уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, называют *годографом* переменного вектора $\boldsymbol{r}$.

Производной вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ по скалярному аргументу t называют новую вектор-функцию, определяемую равенством

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

Производную вектор-функции можно вычислить по формуле

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}.$$

Производная $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора $\boldsymbol{r}$ в сторону возрастания параметра t.

Если t есть время, то $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ — вектор скорости конца вектора $\boldsymbol{r}$, а $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ — вектор ускорения.

Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента:

1° $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} - \frac{d\boldsymbol{r}_3}{dt}$;

2° $\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = \boldsymbol{0}$, где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор;

3° $\frac{d}{dt}(\lambda \boldsymbol{r}) = \lambda \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{r}\frac{d\lambda}{dt}$, где $\lambda = \lambda(t)$ — скалярная функция от t;

4° $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$;

5° $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$.

Уравнения касательной к пространственной кривой $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ записываются в виде

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0},$$

где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $\dot{x}_0 = x'(t_0)$, $\dot{y}_0 = y'(t_0)$, $\dot{z}_0 = z'(t_0)$.

Нормальной плоскостью называют плоскость, проходящую через точку касания и перпендикулярную касательной. Уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$\dot{x}_0(x - x_0) + \dot{y}_0(y - y_0) + \dot{z}_0(z - z_0) = 0.$$

Дифференциал дуги пространственной кривой вычисляется по формуле

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

1127. Какая линия является годографом вектор-функции $\boldsymbol{r} = a\cos t \cdot \boldsymbol{i} + a\sin t \cdot \boldsymbol{j} + ct\boldsymbol{k}$?

❑ Эта линия имеет параметрические уравнения $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ct$, определяющие винтовую линию. ■

Найти годографы вектор-функций:

1128. $\boldsymbol{r} = \cos t \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \sin t \cdot \boldsymbol{k}$.

1129. $\boldsymbol{r} = t(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$.

1130. $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

1131. $\boldsymbol{r} = \operatorname{ch} t \cdot \boldsymbol{i} + \operatorname{sh} t \cdot \boldsymbol{j}$.

1132. Найти производную скалярного произведения векторов $\boldsymbol{r}_1 = 3t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r}_2 = 2\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

❑ Имеем

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t} =$$
$$= (3t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) \cdot (-3\boldsymbol{j}) + \cdot(2\boldsymbol{i} - 3t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \cdot 3\boldsymbol{i} = -6 + 6 = 0.$$

Полученный результат объясняется тем, что скалярное произведение $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = 5$, т.е. является постоянной величиной. ■

1133. Показать, что векторы $\boldsymbol{r} = \cos t \cdot \boldsymbol{i} + \sin t \ \ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ перпендикулярны.

❑ Имеем $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\sin t \cdot \boldsymbol{i} + \cos t \cdot \boldsymbol{j}$. Находим скалярное произведение:

$$\boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\cos t \sin t + \sin t \cos t + 1 \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\boldsymbol{r} \perp \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$. ■

1134. Найти производную вектор-функции $\boldsymbol{r} = \mathrm{ch}^2\, t \cdot \boldsymbol{i} + \mathrm{sh}\, t\, \mathrm{ch}\, t \cdot \boldsymbol{j} + \mathrm{sh}^2\, t \cdot \boldsymbol{k}$.

1135. Дано: $\boldsymbol{r} = \mathrm{sh}\, t \cdot \boldsymbol{i} + \mathrm{ch}\, t \cdot \boldsymbol{j} + \sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 3\,\mathrm{sh}^2 t}\, \boldsymbol{k}$. Найти $\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}^2)}{\mathrm{d}t}$.

1136. Дано: $\boldsymbol{r}_1 = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{r}_2 = t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$. Найти $\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2)}{\mathrm{d}t}$.

1137. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t \cos t$, $z = c\cos^2 t$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

❑ Находим $\dot{x} = a\sin 2t$, $\dot{y} = b\cos 2t$, $\dot{z} = -c\sin 2t$. При $t = \frac{\pi}{4}$ имеем: $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{2}$, $z_0 = \frac{c}{2}$, $\dot{x}_0 = a$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = -c$.

Уравнения касательной:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}.$$

Уравнение нормальной плоскости:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0, \quad \text{или} \quad ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0. \ ■$$

1138. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к винтовой линии $\boldsymbol{r} = \cos t \cdot \boldsymbol{i} + \sin t \ \ \boldsymbol{j} + \sqrt{3}\, t\boldsymbol{k}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

1139. На кривой $x = t + 1$, $y = t^2 - 1$, $z = t^3$ найти точку, в которой касательная параллельна плоскости $x + 2y + z - 1 = 0$.

1140. Какой угол образует с плоскостью xOy касательная к винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2\sqrt{2}t$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$?

1141. Составить уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \sin t$, $y = 1$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \cos t$ в точке $t = 0$.

1142. Составить уравнения касательной к кривой $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\sin t - \cos t)$, $z = e^t$ в точке $t = 0$.

1143. Составить уравнения касательной к кривой $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i}+t^3\boldsymbol{j}+t^4\boldsymbol{k}$ в точке $t = 1$.

1144. Показать, что кривые $\boldsymbol{r} = (u+1)\boldsymbol{i} + u^2\boldsymbol{j} + (2u-1)\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r} = 2v^2\boldsymbol{i} + (3v-2)\boldsymbol{j} + v^2\boldsymbol{k}$ пересекаются, и определить угол между кривыми в точке их пересечения.

1145. Составить уравнения винтовой линии, если радиус основания цилиндра $R = 4$, шаг $h = 6\pi$, и найти дифференциал ее дуги.

❑ Уравнения винтовой линии имеют вид $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$, так как $z = h$ при $t = 2\pi$. Продифференцируем эти уравнения: $\dot{x} = -4\sin t$, $\dot{y} = 4\cos t$, $\dot{z} = 3$. Следовательно, дифференциал дуги равен

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}\,dt =$$
$$= \sqrt{16(\sin^2 t + \cos^2 t) + 9}\,dt = 5dt. \quad ■$$

1146. Найти дифференциал дуги кривой $x=a\cos^2 t$, $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin t\cos t$, $z = b\sin^2 t$.

1147. При каком шаге h длина дуги одного витка винтовой линии $x=\cos t$, $y = \sin t$, $z = ct$ равна 4π?

⚠ Воспользоваться тем, что при развертывании цилиндра на плоскость один виток винтовой линии превращается в отрезок прямой.

1148. Уравнение движения имеет вид $\boldsymbol{r} = 3\cos t\ \boldsymbol{i} + 3\sin t\ \boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$, где t — время. Определить скорость и ускорение движения в произвольный момент времени.

1149. Уравнение движения имеет вид $\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$. Определить скорость и ускорение движения в момент $t = 1$.

§ 6

Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Кривизна и кручение

Во всякой точке $M(x; y; z)$ пространственной кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ можно построить три взаимно перпендикулярных единичных вектора: *единичный вектор касательной* (*тангенциальный единичный вектор*; рис. 40):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|};$$

единичный вектор главной нормали

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}{\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|};$$

единичный вектор бинормали

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}.$$

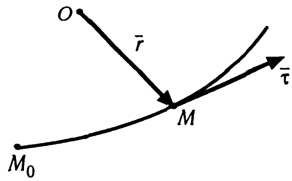

Рис. 40

Соответствующие неединичные векторы можно найти по формулам:

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \text{ (вектор касательной)},$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \text{ (вектор бинормали)},$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{T} \text{ (вектор главной нормали)}.$$

Плоскость, содержащую векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$, называют *соприкасающейся плоскостью*; содержащую векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$, — *нормальной плоскостью*; содержащую векторы $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\tau}$, — *спрямляющей плоскостью*.

Трехгранник с вершиной в точке M, образуемый соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостями, называют *сопровождающим трехгранником* пространственной кривой (рис. 41).

Кривизной линии в точке M называют число $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s}$, где φ — угол поворота касательной (угол смежности) на дуге MN, Δs — длина этой дуги.

Если кривая задана уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, то $K = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|$.

Если уравнение кривой имеет вид $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, то

$$K = \frac{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^3}.$$

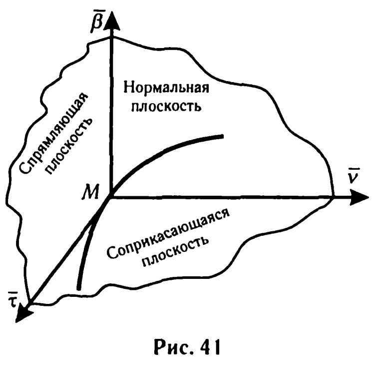

Рис. 41

Кручением кривой в точке M называют число $\sigma = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s}$, где θ — угол поворота бинормали (угол смежности второго рода) на дуге MN.

Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, то $\sigma = \mp\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right|$, где знак «минус» берут в случае одинакового направления векторов $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ и $\boldsymbol{\nu}$, знак «плюс» — в случае их противоположного направления.

Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, то

$$\sigma = \frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|^2}.$$

1150. Найти тангенциальный единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ кривой $\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + t^6\boldsymbol{k}$ в точке $t = 1$.

❑ Имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 2t\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + 6t^5\boldsymbol{k}, \qquad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{4t^2 + 9t^4 + 36t^{10}}.$$

При $t = 1$ находим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}, \quad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{2}{7}\boldsymbol{i} + \frac{6}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}. \ \blacksquare$$

1151. Найти тангенциальный единичный вектор кривой $\boldsymbol{r} = 5t\boldsymbol{i} + 12\cos t\ \boldsymbol{j} + 12\sin t \cdot \boldsymbol{k}$ в произвольной точке.

1152. Найти тангенциальный единичный вектор кривой $x = t\sin t + \cos t$, $y = t\cos t - \sin t$, $z = t^2\sqrt{2}$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

1153. Найти вектор $\boldsymbol{\tau}$ винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \sqrt{R^2 - a^2}\,t$ $(R > a > 0)$ в произвольной точке.

❑ $\boldsymbol{r} = a\cos t \cdot \boldsymbol{i} + a\sin t \cdot \boldsymbol{j} + \sqrt{R^2 - a^2}\,t\boldsymbol{k}$,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\sin t \cdot \boldsymbol{i} + a\cos t \cdot \boldsymbol{j} + \sqrt{R^2 - a^2}\,\boldsymbol{k},$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + R^2 - a^2} = R,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}}{\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|} = \frac{-a\sin t \cdot \boldsymbol{i} + a\cos t \cdot \boldsymbol{j} + \sqrt{R^2 - a^2}\,\boldsymbol{k}}{R} =$$

$$= -\frac{a\sin t}{R}\boldsymbol{i} + \frac{a\cos t}{R}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\boldsymbol{k}. \ \blacksquare$$

1154. Найти вектор $\boldsymbol{\beta}$ винтовой линии в произвольной точке.

❑ Имеем $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -a\sin t\cdot\boldsymbol{i} + a\cos t\cdot\boldsymbol{j} + \sqrt{R^2 - a^2}\,\boldsymbol{k}$, $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -a\cos t\cdot\boldsymbol{i} - a\sin t \cdot \boldsymbol{j}$. Найдем векторное произведение этих векторов:

$$\boldsymbol{B} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & \sqrt{R^2 - a^2} \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a\sqrt{R^2 - a^2}\sin t \cdot \boldsymbol{i} - a\sqrt{R^2 - a^2}\cos t \cdot \boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k};$$

$$|\boldsymbol{B}| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{a^2(R^2 - a^2)\sin^2 t + a^2(R^2 - a^2)\cos^2 t + a^4} = aR.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \frac{a\sqrt{R^2 - a^2}\sin t \cdot \boldsymbol{i} - a\sqrt{R^2 - a^2}\cos t \cdot \boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}}{aR} =$$

$$= \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\sin t \cdot \boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}\cos t \cdot \boldsymbol{j} + \frac{a}{R}\boldsymbol{k}. \ \blacksquare$$

1155. Найти вектор $\boldsymbol{\nu}$ винтовой линии в произвольной точке.

❑ Так как $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$, то

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}\sin t}{R} & -\dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}\cos t}{R} & \dfrac{a}{R} \\ -\dfrac{a\sin t}{R} & \dfrac{a\cos t}{R} & \dfrac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \end{vmatrix} = -\cos t \cdot \boldsymbol{i} - \sin t\ \boldsymbol{j}. \ ■$$

1156. Найти кривизну K винтовой линии.

❑ В задачах 1153 и 1154 было найдено, что $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = R$, $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right| = aR$, поэтому

$$K = \frac{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|^3} = \frac{aR}{R^3} = \frac{a}{R^2}. \ ■$$

1157. Найти кручение σ винтовой линии в произвольной точке.

1158. Составить уравнение соприкасающейся плоскости винтовой линии в произвольной точке.

❑ Эта плоскость проходит через точку $(a\cos t; a\sin t; \sqrt{R^2 - a^2}t)$ и перпендикулярна вектору бинормали $\boldsymbol{\beta} = \frac{\sqrt{R^2-a^2}\sin t}{R}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{R^2-a^2}\cos t}{R}\boldsymbol{j} + \frac{a}{R}\boldsymbol{k}$. Поэтому искомое уравнение таково:

$$\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\sin t(x - a\cos t) - \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\cos t(y - a\cos t) + \frac{a}{R}(z - \sqrt{R^2 - a^2}t) = 0,$$

или

$$x\sqrt{R^2 - a^2}\sin t - y\sqrt{R^2 - a^2}\cos t + az - a\sqrt{R^2 - a^2}t = 0. \ ■$$

1159. Составить уравнение спрямляющей плоскости винтовой линии в произвольной точке.

❑ Эта плоскость проходит через точку $(a\cos t; a\sin t; \sqrt{R^2 - a^2}t)$ перпендикулярно вектору главной нормали $\boldsymbol{\nu} = -\cos t \cdot \boldsymbol{i} - \sin t \cdot \boldsymbol{j}$. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$-(x - a\cos t)\cos t - (y - a\sin t)\sin t = 0, \quad \text{т.е.} \quad x\cos t + y\sin t - a = 0. \ ■$$

1160. Составить уравнение нормальной плоскости винтовой линии в произвольной точке.

1161. Найти вектор $\boldsymbol{\tau}$ кривой $x = 6t$, $y = 3t^2$, $z = t^3$ в точке $t = 1$.

1162. Найти вектор $\boldsymbol{\beta}$ той же кривой при $t = 1$.

1163. Найти вектор $\boldsymbol{\nu}$ той же кривой при $t = 1$.

1164. Найти кривизну K той же кривой при $t = 1$.

1165. Найти кручение σ той же кривой при $t = 1$.

1166. Составить уравнение соприкасающейся плоскости той же кривой при $t = 1$.

1167. Составить уравнение спрямляющей плоскости той же кривой при $t=1$.

1168. Составить уравнение нормальной плоскости той же кривой при $t=1$.

Глава VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1

Область определения функции. Линии и поверхности уровня

Пусть даны два непустых множества D и U. Если каждой паре действительных чисел $(x; y)$, принадлежащей множеству D, по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент u из U, то говорят, что на множестве D задана *функция* f (или *отображение*) с множеством значений U. При этом пишут $D \xrightarrow{f} U$, или $f\colon D \to U$, или $u = f(x, y)$. Множество D называют *областью определения* функции, а множество U, состоящее из всех чисел вида $f(x, y)$, где $(x; y) \in D$, — *множеством значений* функции. Значение функции $u = f(x, y)$ в точке $M(x_0; y_0)$ называют *частным значением* функции и обозначают $f(x_0, y_0)$ или $f(M)$.

Область определения функции $u = f(x, y)$ в простейших случаях представляет собой либо часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой, причем точки этой кривой (границы области) могут принадлежать или не принадлежать области определения, либо всю плоскость, либо, наконец, совокупность нескольких частей плоскости xOy. Геометрическим изображением функции $u = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат $Oxyu$ (графиком функции) является некоторая поверхность.

Аналогично определяется функция любого конечного числа независимых переменных $u = f(x, y, z, \ldots, t)$.

Линией уровня функции $u = f(x, y)$ называют линию $f(x, y) = C$ на плоскости xOy, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называют поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция сохраняет постоянное значение $u = C$.

1169. Найти область определения функции $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

❑ Функция u принимает действительные значения при условии $a^2 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Областью определения данной функции является круг радиуса a с центром в начале координат, включая граничную окружность. ■

1170. Найти область определения функции $u = \arcsin \frac{x}{y^2}$.

❑ Эта функция определена, если $y \neq 0$ и $-1 \leqslant \frac{x}{y^2} \leqslant 1$, т.е. $-y^2 \leqslant \leqslant x \leqslant y^2$ Областью определения функции является часть плоскости, заключенная между двумя параболами $y^2 = x$ и $y^2 = -x$, за исключением точки $O(0;0)$. ■

1171. Найти область определения функции $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

❑ Данная функция зависит от трех переменных и принимает действительные значения при $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, т.е. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} < -1$. Областью определения функции является часть пространства, заключенная внутри полостей двуполостного гиперболоида. ■

1172. Найти линии уровня функции $u = x^2 + y^2$

❑ Уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$). Придавая C различные действительные значения, получим концентрические окружности с центром в начале координат. ■

1173. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + z^2 - y^2$

❑ Уравнение семейства поверхностей уровня имеет вид $x^2 + z^2 - y^2 = C$. Если $C = 0$, то получаем $x^2+z^2-y^2 = 0$ — конус; если $C > 0$, то $x^2+z^2-y^2 = C$ — семейство однополостных гиперболоидов, если $C < 0$, то $x^2 + z^2 - y^2 = C$ — семейство двуполостных гиперболоидов. ■

Найти области определения функций:

1174. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

1175. $u = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$.

1176. $u = \arcsin(x + y)$.

1177. $u = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

1178. $u = \ln(-x + y)$.

1179. $u = y + \sqrt{x}$.

1180. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

1181. $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1182. $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$.

1183. $u = \sqrt{x + y + z}$.

Найти линии уровня функций:

1184. $z = 2x + y$.

1185. $z = \frac{x}{y}$.

1186. $z = \ln \sqrt{\frac{y}{x}}$.

1187. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

1188. $z = e^{xy}$.

Найти поверхности уровня функций:

1189. $u = x + y + 3z$.

1190. $u = x^2 + y^2 + z^2$

1191. $u = x^2 - y^2 - z^2$

§ 2

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

1. Частные производные первого порядка. *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ *по независимой переменной* x называют конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y),$$

вычисленный при постоянном y.

Частной производной по независимой переменной y называют конечный предел

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y),$$

вычисленный при постоянном x.

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

1192. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$.

❑ Рассматривая y как постоянную величину, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 1$. Рассматривая x как постоянную, найдем $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x - 8y + 2$. ■

1193. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{x^2+y^2}$.

❑ Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)'_x = 2xe^{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)'_y = 2ye^{x^2+y^2}$$ ■

1194. Найти $\frac{\partial \rho}{\partial u}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$, если $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$.

❑ $\frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^3 \cos^2 \varphi$, $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = u^4 \quad 2\cos\varphi(-\sin\varphi) = -u^4 \sin 2\varphi$. ■

1195. Показать, что функция $z = y\ln(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

❑ Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\left[\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right] = \frac{2y}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

Получаем тождество, т.е. функция z удовлетворяет данному уравнению. ■

1196. Показать, что функция $z = y^{y/x}\sin\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz$.

❑ Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{y/x}\ \ln y\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\sin\frac{y}{x} + y^{y/x}\cos\frac{y}{x}\ \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[y^{y/x}\cdot\ln y\ \ \frac{1}{x} + \frac{y}{x}\ \ y^{y/x-1}\right]\sin\frac{y}{x} + y^{y/x}\cos\frac{y}{x}\ \ \frac{1}{x}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть уравнения:

$$-x^2\frac{y}{x^2}\ \ y^{y/x}\ \ \ln y\cdot\sin\frac{y}{x} - x^2\ \ \frac{y}{x^2}\ \ y^{y/x}\cos\frac{y}{x}+$$
$$+xy\cdot\frac{y}{x}\ \ y^{y/x-1}\cdot\sin\frac{y}{x} + xy\cdot\frac{1}{x}\ \ y^{y/x}\cdot\ln y\cdot\sin\frac{y}{x}+$$
$$+xy\cdot\frac{1}{x}\ \ y^{y/x}\cos\frac{y}{x} = y\cdot y^{y/x}\sin\frac{y}{x} \equiv yz.$$

Получаем тождество; следовательно, функция z удовлетворяет данному уравнению. ■

1197. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$.

1198. Найти $\frac{\partial r}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial r}{\partial \theta}$, если $r = \rho^2\sin^4\theta$.

1199. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y}$.

1200. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{xy(x^2+y^2)}$

1201. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$.

1202. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = e^{x/y} + e^{-z/y}$.

1203. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}$.

1204. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{(x^2+y^2)^2}$

1205. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, если $u = (x-y)(x-z)(y-z)$.

1206. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = e^{3x^2+2y^2-xy}$

1207. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}$, если $u = e^{xyz}\cdot\sin\frac{y}{x}$.

1208. Показать, что функция $z = \frac{x^2}{2y}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ удовлетворяет уравнению $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

1209. Найти $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$, если $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

2. Полный дифференциал. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ называют разность $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$, где Δx и Δy — произвольные приращения аргументов.

Функцию $z = f(x, y)$ называют *дифференцируемой* в точке $(x; y)$, если в этой точке полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \text{где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называют главную часть полного приращения Δz, линейную относительно приращений аргументов Δx и Δy, т.е. $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогично полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ справедливы приближенные равенства

$$\Delta z \approx dz; \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + dz.$$

1210. Найти dz, если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$.

❑ Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2} \cdot \frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. ■

1211. Найти du, если $u = x^{y^2 z}$

❑ Имеем $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz$, где

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot \ln x \cdot 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2$$

Следовательно,

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1}dx + 2yz \cdot x^{y^2 z} \cdot \ln x\,dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x\,dz. \quad ■$$

1212. Вычислить приближенно $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{\sin^2 x + 8e^y}$ при $x = \frac{\pi}{2} \approx 1,571$, $y = 0$.

❑ Искомое число есть наращенное значение функции z при $\Delta x = 0{,}021$, $\Delta y = 0{,}015$. Найдем значение z при $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$; имеем $z = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2} + 8e^0} = 3$. Находим приращение функции:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\sin 2x\Delta x + 8e^y\Delta y}{2\sin\sqrt{\sin^2 x + 8e^y}} = \frac{8\cdot 0{,}015}{6} = 0{,}02.$$

Следовательно, $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,015}} \approx 3,02$. ■

1213. Вычислить приближенно $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$, исходя из значения функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ при $x = 1$, $y = 1$.

❑ Значение функции z при $x = 1$, $y = 1$ есть $z = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. Найдем приращение функции Δz при $\Delta x = -0{,}05$, $\Delta y = 0{,}02$:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y =$$

$$= -\frac{y\,\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\,\Delta y}{x^2+y^2} = \frac{x\,\Delta y - y\,\Delta x}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot 0{,}02 + 1\cdot 0{,}05}{2} = 0{,}035.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg}\frac{1,02}{0,95} = z + \Delta z \approx 0,785 + 0,035 = 0,82$. ■

1214. Найти dz, если $z = \ln(x^2 + y^2)$.

1215. Найти dz, если $z = \ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

1216. Найти dz, если $z = \sin(x^2 + y^2)$.

1217. Найти dz, если $z = x^y$

1218. Найти du, если $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

1219. Найти dz, если $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

1220. Найти dz, если $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x)$.

1221. Найти dz, если $z = \operatorname{arctg}\frac{2(x+\sin y)}{4 - x\sin y}$.

1222. Найти du, если $u = e^{xyz}$

1223. Вычислить приближенно $1{,}024^{4{,}05}$, исходя из значения функции $z = x^y$ при $x = 1$, $y = 4$ и заменяя ее приращение дифференциалом.

1224. Вычислить приближенно $\ln(0{,}09^3 + 0{,}99^3)$, исходя из значения функции $z = \ln(x^3 + y^3)$ при $x = 0$, $y = 1$.

1225. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ при $x = 1$, $y = 0$.

1226. Вычислить приближенно $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{5e^x + y^2}$ при $x = 0$, $y = 2$.

1227. Вычислить приближенно $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

3. Частные производные и дифференциалы высших порядков. *Частными производными второго порядка* функции $z = f(x, y)$ называют частные производные от ее частных производных первого порядка.

Обозначения частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f'''_{xxx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = f'''_{xxy}(x, y) \quad \text{и т. д..}$$

Так называемые *смешанные производные*, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называют дифференциал от ее полного дифференциала, т.е. $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z)$.

Аналогично определяются дифференциалы третьего и высших порядков: $\mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 z)$; вообще, $\mathrm{d}^n z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} z)$.

Если x и y — независимые переменные и функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные, то дифференциалы второго и третьего порядков вычисляются по формулам

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.$$

$$\mathrm{d}^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial^2 y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3$$

Вообще, имеет место символическая формула

$$\mathrm{d}^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n z,$$

которая формально раскрывается по биномиальному закону.

1228. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = y \ln x$.

❑ Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$. Дифференцируя повторно, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln x) = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$ ■

1229. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

❏ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{x}} \cdot \sec^2 \frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}\,\frac{2}{\sin\frac{2y}{x}}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{x^2}\,\frac{2}{\sin\frac{2y}{x}} - \frac{y}{x^2}\cdot\frac{-2\cos\frac{2y}{x}\,\frac{2}{x}}{\sin^2\frac{2y}{x}} =$$

$$= \frac{2}{x^3\sin^2\frac{2y}{x}}\left(2y\cos\frac{2y}{x} - x\sin\frac{2y}{x}\right). \quad ■$$

1230. Найти d^2z, если $z = \sin x \sin y$.

❏ $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y,$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$

$d^2z = -\sin x \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx\, dy - \sin x \sin y\, dy^2$ ■

1231. Найти d^3z, если $z = x^2 y$.

❏ $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$

$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial^2 y} = 0,$

$d^3z = 0 \cdot dx^3 + 3 \cdot 2\, dx^2 dy + 3 \cdot 0 \cdot dx dy^2 + 0 \cdot dy^3 = 6\, dx^2 dy.$ ■

1232. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, если $u = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

1233. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = xy + \sin(x + y)$.

1234. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, если $u = \ln \operatorname{tg}(x + y)$.

1235. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

1236. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, если $z = x^2 \ln(x + y)$.

1237. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = x \sin xy + y \cos xy$.

1238. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \sin(x + \cos y)$.

1239. Найти d^2z, если $z = 0{,}5 \ln(x^2 + y^2)$.

1240. Найти d^2z, если $z = \cos(x + y)$.

1241. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \cos(ax + e^y)$.

1242. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$.

1243. Дано: $z = x^2y^3$ Проверить, что $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^3 \partial x^2}$.

1244. Дано: $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7$ Найти d^2z.

1245. Показать, что функция $z = \varphi(x)g(y)$ удовлетворяет уравнению $z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1246. Показать, что функция $z = g(x) + yg'(x)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

1247. Показать, что функция $u = ye^{x^2-y^2}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{1}{x}\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$.

1248. Показать, что функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{-x^2/(4a^2t)}$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1249. Найти d^2u, если $u = e^{xy}$

1250. Найти d^2u, если $u = \ln(x+y)$.

1251. Найти d^3u, если $u = \dfrac{y}{x}$.

1252. Найти d^3u, если $u = xyz$.

1253. Найти d^4u, если $u = x\ln y$.

1254. Найти d^5u, если $u = e^{x+y}$

4. Дифференцирование сложных функций. Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и функции $f(x,y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Если $z = f(x,y)$, где $y = \varphi(x)$, то *полная производная* от z по x находится по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}.$$

Если же $z = f(x,y)$, где $x = \varphi(\xi,\eta)$, $y = \psi(\xi,\eta)$, то частные производные выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

1255. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{x^2+y^2}$, где $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

❑ Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2}\ 2x(-a\sin t) + e^{x^2+y^2}\cdot 2y(a\cos t) =$$
$$= 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x\sin t).$$

Выразив x и y через t, получим

$$\frac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}(a\sin t\cos t - a\cos t\sin t) = 0. \ ■$$

1256. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^2 - y^2)$, где $y = e^x$

❑ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}$. Используя формулу полной производной, находим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2ye^x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - ye^x)}{x^2 - y^2}. \blacksquare$$

1257. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{v}$, где $u = \operatorname{tg}^2 x$, $v = \operatorname{ctg}^2 x$.

1258. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 3x + 1$.

1259. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^2 y$, где $y = \cos x$.

1260. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}}$, где $y = x \cos\alpha$.

1261. Найти $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial z}{\partial \eta}$, если $z = x^2 + y^2$, где $x = \xi + \eta$, $y = \xi - \eta$.

1262. Найти $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, если $u = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = \xi\eta$, $y = \frac{\xi}{\eta}$.

1263. Показать, что функция $u = \ln \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

5. Производная в данном направлении. Градиент функции. *Производной* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ *в направлении вектора* $l = \overline{MM_1}$ называют предел отношения $\frac{f(M) - f(M_1)}{MM_1}$ при $MM_1 \to 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}, \quad \text{где } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема, то производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\alpha,$$

где α — угол, образуемый вектором l с осью Ox.

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная в данном направлении определяется аналогично. Соответствующая формула имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x} \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора l.

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ называют вектор с началом в точке M, координатами которого являются частные производные функции z:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

Градиент функции и производная в направлении вектора $\boldsymbol{l}$ связаны формулой

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_{\boldsymbol{l}} \operatorname{grad} z.$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке. Производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ в направлении градиента имеет наибольшее значение, равное

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{наиб}} = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

В случае функции $u = f(x, y, z)$ градиент функции равен

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

1264. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1; 1)$ в направлении вектора $\boldsymbol{l}$, составляющем угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси Ox.

❑ Найдем значения частных производных в точке M: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = -2$. Так как $\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} \approx -0,7. \quad ■$$

1265. Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M(3; 2; 1)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(5; 4; 2)$.

❑ Найдем вектор $\overline{MN}$ и его направляющие косинусы: $\overline{MN} = \boldsymbol{l} = (5-3)\boldsymbol{i} + (4-2)\boldsymbol{j} + (2-1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$. Вычислим значения частных производных в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 36.$$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial l} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}$. ■

1266. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(3; 4)$ в направлении градиента функции z.

❑ Здесь вектор $\boldsymbol{l}$ совпадает с градиентом функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(3; 4)$ и равен

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)_M \boldsymbol{i} + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)_M \boldsymbol{j} = \frac{6}{25}\boldsymbol{i} + \frac{8}{25}\boldsymbol{j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\operatorname{grad} z| = \sqrt{\left(\frac{8}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}. \quad \blacksquare$$

1267. Найти величину и направление градиента функции $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$ в точке $M(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

❑ Найдем частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sec^2 x - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \operatorname{cosec}^2 z$$

и вычислим их значения в точке $M(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2 - 1 = 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{3}{8},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{grad} u)_M = \boldsymbol{i} + \frac{3}{8}\boldsymbol{j}; \quad |\operatorname{grad} u|_M = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{73}}; \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}}. \quad \blacksquare$$

1268. Найти производную функции $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1; 1)$ в направлении вектора $\boldsymbol{l} = 6\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$.

1269. Найти производную функции $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $M(1; 1; 1)$ в направлении вектора $\overline{MN}$, где $N(3; 2; 3)$.

1270. Найти производную функции $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точке $M(1; 2; 1)$ в направлении вектора $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

1271. Найти величину и направление градиента функции $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в точке $M(x_0; y_0; z_0)$.

1272. Найти величину и направление градиента функции $u = xyz$ в точке $M(2; 1; 1)$.

1273. Найти производную функции $u = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}$ в направлении вектора $\boldsymbol{l} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$ в произвольной точке.

6. Дифференцирование неявных функций. Производную неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y) = 0$, где $F(x,y)$ — дифференцируемая функция переменных x и y, можно вычислить по формуле

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием указанной формулы, рассматривая при этом y как функцию от x.

Аналогично частные производные неявной функции двух переменных $z = \varphi(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z)$ — дифференцируемая функция переменных x, y и z, можно вычислить по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{при условии} \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

1274. Найти y', если $\cos(x+y) + y = 0$.

❏ Здесь $F(x,y) = \cos(x+y) + y$. Найдем $\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(x+y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(x+y) + 1$. Следовательно,

$$y' = -\frac{-\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)} = \frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}. \quad ■$$

1275. Найти y' и y'', если $y - \sin y = x$.

❏ Здесь $F(x,y) = y - \sin y - x$. Имеем $\frac{\partial F}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \cos y = 2\sin^2\frac{y}{2}$, откуда

$$y' = -\frac{-1}{2\sin^2\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{y}{2}.$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot 2\operatorname{cosec}\frac{y}{2}\left(-\operatorname{cosec}\frac{y}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}y' = -\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^4\frac{y}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}. \quad ■$$

1276. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^3 - 3xyz = a^3$

❏ Здесь $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$ Находим $\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3xz$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2-3xy} = \frac{yz}{z^2-xy}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2-3xy} = \frac{xz}{z^2-xy}. \quad ■$$

1277. Найти dz, если $xyz = x + y + z$.

❑ Как известно, $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, поэтому найдем сначала $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz-1}{xy-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz-1}{xy-1}.$$

Следовательно,

$$dz = -\frac{1}{xy-1}[(yz-1)dx + (xz-1)dy]. \quad ■$$

1278. Найти y', если $x^2 + y^2 + \ln(x^2+y^2) = a^2$

1279. Найти y', если $\frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} = a$.

1280. Найти y' и y'', если $(xy-\alpha)^2 + (xy-\beta)^2 = r^2$

1281. Найти y', если $x^3 + 2y^3 - 2xy\sqrt{2xy} + 1 = 0$.

1282. Найти y', если $\ln\lg\frac{y}{x} - \frac{y}{x} = a$.

1283. Найти y' в точке $M(b;b)$, если $(x^2+y^2-bx)^2 = a^2(x^2+y^2)$.

1284. Найти y', если $3\sin\frac{\sqrt{x}}{y} - 2\cos\frac{\sqrt{x}}{y} + 1 = 0$.

1285. Найти y', если $0,5\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0$.

1286. Найти y', если $x^2 - x\cdot 2^{y+1} + 4^y - x + 2^y + 2 = 0$.

1287. Найти y' и y'', если $x + y - e^{x+y} = 0$.

1288. Найти z'_x и z'_y, если $x + y + z = e^z$

1289. Найти z'_x и z'_y, если $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

1290. Найти dz, если $x = z\ln\frac{z}{y}$.

1291. Найти z'_y, если $x\sin y + y\sin x + z\sin x = 1$.

1292. Найти dz, если $xy + xz + yz = 1$.

1293. Найти z'_x, если $xe^y + ye^x + ze^x = a$.

1294. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = x + \operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.

§ 3

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в точке M называют плоскость, проходящую через точку M поверхности, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку M и любую точку M_1 поверхности стремится к нулю, когда M_1 стремится к M.

Касательная плоскость к поверхности в точке M содержит касательные ко всем кривым, проведенным на поверхности через точку M.

Нормалью к поверхности в точке M называют прямую, проходящую через точку M перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ частные производные $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M$ конечны и не обращаются в нуль одновременно, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали к поверхности в этой же точке — в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Если же уравнение поверхности задано явным образом: $z = f(x, y)$, где частные производные $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ конечны (и могут быть равны нулю одновременно), то уравнение касательной плоскости в точке M записывается в виде

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M(x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M(y - y_0),$$

а уравнения нормали — в виде

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Равенство нулю, например $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$, означает, что касательная плоскость параллельна оси Ox, а нормаль лежит в плоскости $x = x_0$.

1295. Дана поверхность $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$. Составить уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности в точке $M(1; 1; 1)$.

❑ Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$ и их значения в точке $M(1; 1; 1)$: $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = -1$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2$.

Уравнение касательной плоскости :

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1), \quad \text{или} \quad x - 2y + z = 0.$$

Уравнения нормали:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}. \quad ■$$

1296. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + y + z = 1$.

❑ Здесь $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 11$. Найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$. Из условия параллельности касательной плоскости и данной плоскости следует, что

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{1}, \quad \text{или} \quad \frac{2x}{1} = \frac{4y}{1} = \frac{6z}{1}.$$

Присоединив к этим уравнениям уравнение поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$, найдем координаты точек касания: $M_1\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ и $M_2\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Следовательно, уравнения касательных плоскостей имеют вид

$$1\ (x \pm \sqrt{6}) + 1\ \left(y \pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 1\ \left(z \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0,$$

т.е.

$$x + y + z + \frac{11}{\sqrt{6}} = 0 \quad \text{и} \quad x + y + z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0. \quad \blacksquare$$

1297. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M(1; 1; 3)$.

1298. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ в точке $M(2; 2; 3)$.

1299. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1; 0; 0)$.

1300. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin x \cos y$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

1301. Составить уравнения касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, параллельных плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

1302. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ ($a > 0$) отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

1303. В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

1304. Доказать, что $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, если $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности $z = f(x, y)$.

§ 4

Экстремум функции двух независимых переменных

1. Экстремум функции. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $M_0(x_0; y_0)$, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке $M(x; y)$ некоторой окрестности точки M_0, т.е. $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (соответственно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$) для всех точек $M(x; y)$, удовлетворяющих условию $M_0M < \delta$, где δ — достаточно малое положительное число.

Максимум или минимум функции называют ее *экстремумом*. Точку M_0, в которой функция имеет экстремум, называют *точкой экстремума*.

Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0; y_0)$, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

(***необходимые условия экстремума***).

Точки, в которых частные производные равны нулю, называют *стационарными точками*. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Положим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

и составим *дискриминант* $\Delta = AC - B^2$ Тогда:

если $\Delta > 0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, а именно максимум при $A < 0$ (или $C < 0$) и минимум при $A > 0$ (или $C > 0$) (***достаточные условия наличия экстремума***);

если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет (***достаточные условия отсутствия экстремума***);

если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай).

1305. Найти экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

❑ Находим частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6$. Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$$

откуда $x = 0$, $y = 3$; $M(0; 3)$ — стационарная точка.

Вычислим значения частных производных второго порядка в точке M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$

и составим дискриминант $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$. Поскольку $A > 0$, в точке $M(0; 3)$ заданная функция имеет минимум. Значение функции в этой точке $z_{\min} = -9$. ■

1306. Найти экстремум функции

$$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

❑ Находим частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0, \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 8x + y = 188, \\ x + 6y = 141. \end{cases}$$

Отсюда $x = 21$, $y = 20$; стационарная точка $M(21; 20)$.

Вычислим значения вторых производных в точке M: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}$. Тогда

$$\Delta = AC - B^2 = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0.$$

Так как $A < 0$, то в точке $M(21; 20)$ функция имеет максимум: $z_{\max} = 282$. ■

Найти экстремумы функций:

1307. $z = xy^2(1 - x - y)$.

1308. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

1309. $z = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

1310. $z = (x^2+y^2)(e^{-(x^2+y^2)} - 1)$.

1311. $z = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}$.

2. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. *Условным экстремумом* функции $z = f(x, y)$ называют экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (*уравнение связи*).

Отыскание условного экстремума можно свести к исследованию на обычный экстремум так называемой *функции Лагранжа* $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ — неопределенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы трех уравнений можно найти неизвестные x, y и λ.

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области, надо:

1) найти стационарные точки, расположенные в данной области, и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на линиях, образующих границу области;

3) из всех полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

1312. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

❑ Рассмотрим функцию Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$. Из системы уравнений (необходимые условия экстремума)

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0, \\ x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

находим $\lambda = -\frac{5}{12}$, $z = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$. Нетрудно установить, что в точке $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$ функция $z = xy$ достигает наибольшего значения $z_{\max} = \frac{25}{24}$. ■

1313. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти такой, гипотенуза которого имеет наименьшее значение.

❑ Пусть x и y — катеты треугольника, а z — гипотенуза. Так как $z^2 = x^2 + y^2$, то задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $x^2 + y^2$ при условии, что x и y связаны уравнением $\frac{xy}{2} = S$, т.е. $xy - 2S = 0$. Рассмотрим функцию $u = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2S)$ и найдем ее частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + \lambda y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \lambda x.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$, то из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0, \\ 2y + \lambda x = 0, \\ \frac{xy}{2} = S \end{cases}$$

получаем решение $\lambda = -2$, $x = y = \sqrt{2S}$.

Таким образом, гипотенуза имеет наименьшее значение, если катеты треугольника равны между собой. ■

1314. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в круге $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leqslant 9$.

❑ Здесь рассматривается область D, ограниченная окружностью $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$, включая и точки окружности.

Найдем стационарные точки данной функции; имеем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$; в силу необходимых условий экстремума получим $x = 0$, $y = 0$.

Нетрудно установить, что в точке $(0; 0)$ функция $z = x^2 + y^2$ принимает наименьшее значение $z_{\text{наим}} = 0$, причем указанная точка является внутренней точкой области D.

Исследуем на условный экстремум функцию $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны соотношением $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 9$. Рассмотрим функцию

$$u = x^2 + y^2 + \lambda[(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 - 9].$$

Находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-\sqrt{2})$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y-\sqrt{2})$. Для определения x, y и λ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + \lambda(x-\sqrt{2}) = 0, \\ y + \lambda(y-\sqrt{2}) = 0, \\ (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 9. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x = y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\lambda = -\frac{5}{3}$ и $z = 25$; $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{3}$ и $z = 1$. Таким образом, функция принимает наибольшее значение в точке $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. Итак, $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = 25$. ■

1315. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны уравнением $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

1316. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

1317. $z = xy + x + y$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

1318. $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1319. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

1320. $z = 1 - x^2 - y^2$ в круге $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$.

1321. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ в области $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

1322. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ в области $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

1323. $z = \cos x \cos y \cos(x+y)$ в области $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

1324. Из всех треугольников, вписанных в круг, найти тот, площадь которого наибольшая.

1325. Из всех треугольников, имеющих данный периметр, найти наибольший по площади.

1326. Из всех прямоугольников с заданной площадью S найти такой, периметр которого имеет наименьшее значение.

1327. Найти размеры прямоугольного параллелепипеда, имеющего при данной полной поверхности S максимальный объем.

Глава IX

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1

Непосредственное интегрирование. Замена переменной и интегрирование по частям

1. Непосредственное интегрирование. Функцию $F(x)$ называют *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)\,dx$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении $F(x) + C$, где C — постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)\,dx$) называют совокупность всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Здесь $\int$ — знак интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования. Отыскание неопределенного интеграла называют *интегрированием* функции.

Свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования)

1° $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2° $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

3° $\int dF(x) = F(x) + C$.

4° $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, где a — постоянная.

5° $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

6° Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

Таблица основных интегралов

I. $\int dx = x + C$.

II. $\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$ при $m \neq -1$.

III. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

IV. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

VI. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

X. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$.

XI. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$.

XII. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$.

XIII. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$.

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Найти указанные интегралы:

1328. $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx$.

❑ Используя свойства 4° и 5°, получаем

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx = 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx + 7\int x\,dx - 3\int dx.$$

К первым трем интегралам в правой части применим формулу II, а к четвертому интегралу — формулу I:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)\,dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\,\frac{x^2}{2} - 3x + C =$$
$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C. \quad ■$$

1329. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\,dx$.

❑ $$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx = \int \left(x + 2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right) dx =$$
$$= \int (x + 2x^{1/6} + x^{-2/3})\,dx = \int x\,dx + 2\int x^{1/6}\,dx + \int x^{-2/3}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{7/6}}{\frac{7}{6}} + \frac{x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{12}{7}x\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + C. \quad ■$$

1330. $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx$.

❑ Имеем

$$\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx = \int (2\cdot 3^2\cdot 5^3)^x\,dx = \int 2250^x\,dx = \frac{2250^x}{\ln 2250} + C. \quad ■$$

Свойство 6° позволяет значительно расширить таблицу основных интегралов с помощью приема *подведения функции под знак дифференциала*.

1331. $\int (1 + x^2)^{1/2} x\,dx$.

❑ Этот интеграл можно привести к формуле II, преобразовав его так:

$$\int (1 + x^2)^{1/2} x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + x^2)^{1/2}\ 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + x^2)^{1/2}\,d(1 + x^2).$$

Теперь переменной интегрирования служит выражение $1+x^2$ и относительно этой переменной получим интеграл от степенной функции. Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{1/2}\,d(1+x^2) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C. \quad \blacksquare$$

1332. $\int(x^2-3x+1)^{10}(2x-3)\,dx.$

❑ Поступая так же, как и в предыдущем примере, имеем

$$\int(x^2-3x+1)^{10}\,d(x^2-3x+1) = \frac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11} + C. \quad \blacksquare$$

1333. $\int(\ln t)^4\,\frac{dt}{t}.$

❑ Выражение $\frac{dt}{t}$ можно записать как $d(\ln t)$, поэтому

$$\int(\ln t)^4\,d(\ln t) = \frac{1}{5}(\ln t)^5 + C. \quad \blacksquare$$

1334. $\int e^{3\cos x}\sin x\,dx.$

❑ Заданный интеграл можно представить так:

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx \doteq \frac{1}{3}\int e^{3\cos x}\cdot 3\sin x\,dx.$$

Учитывая, что $3\sin x\,dx = -d(3\cos x)$, имеем

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}d(3\cos x),$$

т.е. переменной интегрирования является $3\cos x$. Следовательно, интеграл берется по формуле VI:

$$\int e^{3\cos x}\sin x\,dx = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C. \quad \blacksquare$$

1335. $\int(2\sin x+3\cos x)\,dx.$

❑ Находим

$$\int(2\sin x+3\cos x)\,dx = 2\int\sin x\,dx + 3\int\cos x\,dx = -2\cos x + 3\sin x + C$$

(см. формулы VIII и IX). ■

1336. $\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2\,dx.$

❑ Имеем

$$\int(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2\,dx = \int(\operatorname{tg}^2x + 2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}^2x)\,dx =$$
$$= \int(\operatorname{tg}^2x+1+1+\operatorname{ctg}^2x)\,dx = \int(\operatorname{tg}^2x+1)\,dx + \int(1+\operatorname{ctg}^2x)\,dx =$$
$$= \int\sec^2x\,dx + \int\operatorname{cosec}^2x\,dx = \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$$

(см. формулы X и XI). ■

Найти интегралы:

1337. $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

1338. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{x}}$.

1339. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1340. $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1341. $\int e^{3x}\cdot 3^x\,\mathrm{d}x$.

1342. $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$.

1343. $\int (\operatorname{sh} x - \sin x)\,\mathrm{d}x$.

1344. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2\,\mathrm{d}x$.

1345. $\int (2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x)^2\,\mathrm{d}x$.

1346. $\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x$.

1347. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

1348. $\int (ax^2+b)^{1/3}\cdot x\,\mathrm{d}x$.

1349. $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

1350. $\int \sin(a+bx)\,\mathrm{d}x$.

1351. $\int \cos(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

2. Замена переменной в неопределенном интеграле. *Замена переменной в неопределенном интеграле* производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t;$$

2) $u = \psi(x)$, где u — новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Найти указанные интегралы:

1352. $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

❑ Воспользуемся подстановкой $t = \sqrt[3]{x}$, т.е. $x = t^3$ Эта подстановка приведет к тому, что под знаком синуса окажется переменная интегрирования, а не корень из нее. Найдем дифференциал $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$. Отсюда имеем

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3t^2\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int \sin t\,\mathrm{d}t = -3\cos t + C.$$

Ответ нужно выразить через старую переменную x. Подставляя в результат интегрирования $t = \sqrt[3]{x}$, получим

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x = -3\cos\sqrt[3]{x} + C. \quad ■$$

1353. $\int (2x+1)^{20}\,\mathrm{d}x$.

❑ Этот интеграл можно найти и не производя замены переменной. Здесь достаточно развернуть выражение $(2x+1)^{20}$ по формуле бинома Ньютона и применить почленное интегрирование. Однако этот прием связан с большим количеством вычислений. С помощью замены переменной можно сразу свести данный интеграл к табличному.

Полагая $2x+1=t$, имеем $2\,dx = dt$, т.е. $dx = \frac{1}{2}\,dt$. Отсюда получим

$$\int (2x+1)^{20}\,dx = \frac{1}{2}\int t^{20}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{21}t^{21} + C = \frac{1}{42}(2x+1)^{21} + C. \ \blacksquare$$

Вообще, если интеграл $\int f(x)\,dx$ является табличным, то интеграл $\int f(ax+b)\,dx$ можно легко найти с помощью подстановки $ax+b=t$.

Например, применим эту подстановку к интегралу $\int \sin(ax+b)\,dx$. Имеем $ax+b=t$, $a\,dx = dt$ и $dx = \frac{1}{a}\,dt$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)\,dx = \int \sin t\cdot\frac{1}{a}\,dt = \frac{1}{a}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{a}\cos t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

Аналогично можно показать, что

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C, \quad \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax+b} + C \text{ и т.д.}$$

При нахождении интеграла $\int f(ax+b)\,dx$ запись самой подстановки $ax+b=t$ можно фактически и не производить. Здесь достаточно принять во внимание, что $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$. Таким образом,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

где F — первообразная для f.

1354. $\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$.

❑ Положим $\sqrt{x^3+5}=t$; тогда $x^3+5=t^2$. Дифференцируем обе части равенства: $3x^2\,dx = 2t\,dt$. Отсюда $x^2\,dx = \frac{2}{3}t\,dt$ и, следовательно,

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx = \int \sqrt{x^3+5}\,x^2\,dx = \int t\cdot\frac{2}{3}t\,dt = \frac{2}{3}\int t^2\,dt =$$
$$= \frac{2}{9}t^3 + C = \frac{2}{9}(\sqrt{x^3+5})^3 + C = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5} + C.$$

Данный интеграл можно найти и с помощью подстановки $x^3+5=t$. Эта подстановка сразу приводит интеграл к табличному, поскольку первый множитель подынтегрального выражения x^2 отличается от производной подкоренного выражения x^3+5 только постоянным множителем $\frac{1}{3}$, т.е. $x^2 = \frac{1}{3}(x^3+5)'$ $\blacksquare$

Вообще, если подынтегральная функция является произведением двух множителей, один из которых зависит от некоторой функции $\psi(x)$, а другой является производной $\psi(x)$ (с точностью до постоянного множителя), то целесообразно сделать замену переменной по формуле $\psi(x) = t$.

1355. $\int \frac{(2\ln x + 3)^3}{x}\,dx$.

❑ Перепишем данный интеграл в виде $\int (2\ln x + 3)^3 \frac{1}{x}\,dx$. Так как производная выражения $2\ln x + 3$ равна $\frac{2}{x}$, а второй множитель $\frac{1}{x}$ отличается от этой производной только постоянным коэффициентом 2, то нужно применить подстановку $2\ln x + 3 = t$. Тогда $2\cdot\frac{dx}{x} = dt$, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,dt$. Следовательно,

$$\int (2\ln x+3)^3\frac{dx}{x} = \int t^3\ \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C. \ ■$$

1356. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

❑ Воспользуемся подстановкой $f(x) = t$. Тогда $f'(x)\,dx = dt$ и

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Например,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Здесь знак модуля опущен, так как $x^2 + 1 > 0$. ■

1357. $\int \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}$.

❑ Положим $f(x) = t$. Тогда $f'(x)\,dx = dt$, откуда

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти с помощью подстановки $\sqrt{f(x)} = t$. ■

1358. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, где $a \neq 0$.

❑ Для того чтобы свести интеграл к табличному (см. формулу IV), разделим числитель и знаменатель подынтегрального выражения на a^2:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{\frac{dx}{a^2}}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}.$$

Мы подвели постоянный множитель $\frac{1}{a}$ под знак дифференциала. Рассматривая $\frac{x}{a}$ как новую переменную, получим

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

К этому же результату мы пришли бы и с помощью подстановки $x = at$. ■

1359. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, где $a > 0$.

❑ Разделив числитель и знаменатель на a, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}.$$

Принимая $\frac{x}{a}$ за новую переменную, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad ■$$

Дополним теперь таблицу основных интегралов следующими формулами:

XVI. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C.$

XVII. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\, dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$

XVIII. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

XIX. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

XX. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}| + C.$

XXII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

XXIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$

XXIV. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$

XXV. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

Формулы I–XXV следует запомнить, так как большинство интегралов, используемых на практике, сводится к интегралам, берущимся по этим формулам.

1360. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$.

❑ Выполним подстановку $\sqrt{2x-9} = t$; тогда $2x - 9 = t^2$, $x = \frac{t^2+9}{2}$ и $dx = t\,dt$. Значит,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{t\,dt}{\frac{t^2+9}{2} \cdot t} = 2\int \frac{dt}{t^2+9}.$$

Применив формулу XVIII, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C. \quad ■$$

1361. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{3 - \cos^4 x}}$.

❑ Воспользуемся подстановкой $\cos^2 x = t$; тогда $-2\cos x \sin x\, dx = dt$, т. е. $\sin 2x\, dx = -dt$. Теперь находим

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^4 x}} dx = -\int \frac{dt}{\sqrt{3 - t^2}} = -\arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + C = -\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}} + C$$

(согласно формуле XX). ■

1362. $\int(2\sin\frac{x}{2}+3)^2\cos\frac{x}{2}\,dx$.

❑ Применим подстановку $2\sin\frac{x}{2}+3=t$; тогда $\cos\frac{x}{2}\,dx=dt$ и

$$\int\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2\cos\frac{x}{2}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^3+C.\ ■$$

1363. $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

❑ Применим подстановку $x^5=t$; тогда $5x^4\,dx=dt$, $x^4\,dx=\frac{1}{5}\,dt$ и

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}}=\frac{1}{5}\ln|t+\sqrt{t^2-2}|+C$$

(см. формулу XXI). Итак,

$$\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\ln|x^5+\sqrt{x^{10}-2}|+C.\ ■$$

1364. $\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$.

❑ Преобразуя знаменатель дроби, получим $x^4+2x^2+5=(x^2+1)^2+4$. Воспользуемся подстановкой $x^2+1=t$; тогда $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$. Отсюда

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C$$

(см. формулу XVIII). Таким образом,

$$\int\frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C.\ ■$$

1365. $\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\,dx$.

❑ Положим $e^{2x}=t$, тогда $e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\,dt$ и

$$\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C$$

(мы применили формулу XIX). Итак,

$$\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}-5}=\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+C.\ ■$$

1366. $\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}$.

❑ Используя ту же подстановку, что и в предыдущем примере, получим

$$\int\frac{e^{2x}\,dx}{e^{4x}+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+C.\ ■$$

1367. $\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}\,dx.$

❑ Полагая $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2t\,dt$, имеем

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(\sin t+\cos t)\;2t}{t\sin 2t}\,dt =$$

$$= \int \frac{\sin t+\cos t}{\sin t\cos t}\,dt = \int\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}\right)dt = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C$$

(см. формулы XXIII и XXII). Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}}{2}\right| + C. \quad ■$$

Найти интегралы:

1368. $\int \frac{e^{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

1369. $\int x^3(1-2x^4)^3\,dx.$

1370. $\int \sin(2-3x)\,dx.$

1371. $\int x\,\mathrm{ch}(5x^2+3)\,dx.$

1372. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$

1373. $\int x(x^2+1)^{3/2}\,dx.$

1374. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}.$

1375. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}.$

1376. $\int \frac{\sin 4x\,dx}{\cos^4 2x+4}.$

1377. $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}.$

1378. $\int \frac{e^{x/2}\,dx}{\sqrt{16-e^x}}.$

1379. $\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx.$

❶ Представить данный интеграл в виде суммы интегралов.

1380. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-3x^3}}.$

1381. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}\,dx.$

1382. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}.$

1383. $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x}\,dx.$

1384. $\int \frac{x\,dx}{2x^4+5}.$

3. Интегрирование по частям. *Интегрированием по частям* называют нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v\,du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом за u берут такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов вида $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, $\int P(x)e^{ax}\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv — соответственно выражения $\sin ax\,dx$, $\cos ax\,dx$, $e^{ax}\,dx$; для интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$ за u принимают соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv — выражение $P(x)\,dx$.

Найти указанные интегралы:

1385. $\int \ln x\,dx$.

❑ Положим $u = \ln x$, $dv = dx$; тогда $v = x$, $du = \frac{dx}{x}$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx =$$
$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C. \quad ■$$

1386. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

❑ Пусть $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$; тогда $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Согласно формуле интегрирования по частям, находим

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad ■$$

1387. $\int x\sin x\,dx$.

❑ Положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$; тогда $du = dx$, $v = -\cos x$. Отсюда

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Если бы выражения u и dv мы выбрали иначе, например $u = \sin x$, $dv = x\,dx$, то получили бы $du = \cos x\,dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, откуда

$$\int x\sin x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin x - \int \frac{1}{2}x^2\cos x\,dx = \frac{1}{2}x^2\sin x - \frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx,$$

и пришли бы к интегралу более сложному, чем исходный, так как степень сомножителя при тригонометрической функции повысилась на единицу. ■

1388. $\int x^2e^x\,dx$.

❑ Положим $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$; тогда $du = 2x\,dx$, $v = e^x$ Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Мы понизили степени x на единицу. Чтобы найти $\int xe^x\,dx$, применим еще раз интегрирование по частям. Положим $u = x$, $dv = e^x\,dx$; тогда $du = dx$, $v = e^x$, откуда

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2-2x+2) + C. \quad ■$$

1389. $I = \int e^x \sin x\, dx$.

❑ Пусть $u = e^x$, $dv = \sin x\, dx$; тогда $du = e^x\, dx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$I = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

Создается впечатление, что интегрирование по частям не привело к цели, так как интеграл не упростился. Попробуем, однако, еще раз проинтегрировать по частям. Полагая $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx$, откуда $du = e^x\, dx$, $v = \sin x$, получаем

$$I = -e^x \cos x + (e^x \sin x - I), \quad \text{т.е. } I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I.$$

Применив дважды операцию интегрирования по частям, мы в правой части снова получили исходный интеграл. Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом I. Из этого уравнения находим

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x, \quad \text{т.е. } I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

В окончательном результате мы прибавили к найденной первообразной функции произвольную постоянную. ■

1390. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, где $a > 0$.

❑ Положим $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, откуда $du = -\dfrac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = x$.
Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx,$$

или

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}.$$

Отсюда получим

$$2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

т.е.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad ■$$

1391. Вывести рекуррентную формулу для интеграла $\int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$.

❑ Заданный интеграл можно преобразовать так:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x \cdot x\, dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \cdot I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int x \cdot \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Пусть $u = x$, $\mathrm{d}v = \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$; тогда $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$,

$$v = \frac{1}{2}\int (x^2+a^2)^{-n}\cdot \mathrm{d}(x^2+a^2) = -\frac{1}{2(n-1)}\ \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}},$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right],$$

или

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1},$$

т.е.

$$I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}.$$

Полагая $n = 2$, выразим интеграл I_2 через элементарные функции. Полагая теперь $n = 3$, находим интеграл I_3 (ведь интеграл I_2 уже найден). Таким образом, можно найти I_n при любом целом положительном n. ■

Найти интегралы:

1392. $\int x\ln x\,\mathrm{d}x.$

1393. $\int \arcsin x\,\mathrm{d}x.$

1394. $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x.$

1395. $\int (x+1)e^x\,\mathrm{d}x.$

1396. $\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x.$

1397. $\int x^5 e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$

1398. $\int (x^2+2x+3)\cos x\,\mathrm{d}x.$

1399. $\int \sqrt{x^2+\lambda}\,\mathrm{d}x.$
⚈ Положить $x^2 = t$.

1400. $\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x.$

1401. $\int \sin\ln x\,\mathrm{d}x.$

1402. $\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$
⚈ Положить $\sqrt{x} = t$.

§ 2

Интегрирование рациональных дробей

1. Интегрирование простейших дробей. *Рациональной дробью* называют дробь вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Рациональную дробь называют *правильной*, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени многочлена $Q(x)$; в противном случае дробь называют *неправильной*.

Простейшими (*элементарными*) *дробями* называют правильные дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$.

II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, где m — целое число, большее единицы.

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, т.е. квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где где n — целое число, большее единицы, и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Во всех четырех случаях предполагается, что A, B, p, q, a — действительные числа. Перечисленные дроби будем соответственно называть простейшими дробями I, II, III и IV типов.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей первых трех типов. Имеем

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C.$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}\,dx = -\frac{A}{m-1}\;\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C.$

III. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$

Действительно, для этого частного случая простейшей дроби III типа получаем

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},\quad\text{или}\quad x^2+px+q=t^2+a^2,$$

где $t=x+\dfrac{p}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ (здесь $\dfrac{p^2}{4}-q<0$), откуда

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Найти указанные интегралы:

1403. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+25}.$

❑ Имеем

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+16}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C.\ ■$$

1404. $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}.$

❑ Имеем

$$\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2}-\frac{1}{4})}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{5}}{2})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.\ ■$$

Покажем теперь в общем виде, как интегрируются простейшие дроби III типа.

Требуется найти $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$, $\frac{p^2}{4}-q<0$. Выделим в числителе дроби производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде

$$Ax+B=(2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B.$$

Тогда получим

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом интеграле числитель является производной знаменателя; поэтому

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\ln(x^2+px+q)+C,$$

так как $x^2+px+q>0$ для любого значения x. Второй интеграл, как уже было отмечено, находится по формуле

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Итак,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

1405. $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx.$

❑ Имеем

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx+5\int \frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}+C. \quad ■$$

1406. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}.$

❑ Имеем

$$\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3}+C. \quad ■$$

1407. $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}\,dx.$

❑ Предварительно выполним замену переменной $x^2=t$; тогда $2x\,dx = dt$, $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$. Следовательно,

$$\int \frac{(2x^2+3)x\,dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2t+3)\,dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)+2}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt + \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^4+x^2+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C. \quad ■$$

Рассмотрим теперь частный случай интеграла от простейшей дроби IV типа. Для интеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ (n — целое положительное число) справедлива следующая рекуррентная формула:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\;\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\;I_{n-1}.$$

Эта формула позволяет после $(n-1)$-кратного применения свести данный интеграл I_n к табличному интегралу $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

1408. $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

❑ Здесь $n=3$. Применив рекуррентную формулу, получаем

$$I_3 = \frac{1}{2(3-1)}\;\frac{x}{(x^2+1)^{3-1}} + \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}\cdot I_{3-1} = \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2.$$

К интегралу $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ снова применяем рекуррентную формулу (здесь полагаем $n=2$):

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)}\;\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\;I_{2-1} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right] + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C. \quad \blacksquare$$

Покажем теперь в общем виде, как интегрируются простейшие дроби IV типа. Требуется найти $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена, записанного в знаменателе:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Первый интеграл в правой части равенства легко находим с помощью подстановки $x^2+px+q = t$, а второй преобразуем так:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Полагая теперь $x + \frac{p}{2} = t$, $dx = dt$ и обозначая $q - \frac{p^2}{4} = a^2$, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, интегрирование элементарной дроби IV типа можно выполнить с помощью рекуррентной формулы.

1409. $\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx.$

❑ Имеем

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) + (2-3)}{(x^2+2x+10)^2}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx - \int \frac{dx}{((x+1)^2+9)^2}.$$

В первом интеграле выполним замену $x^2+2x+10 = z$, $(2x+2)\,dx = dz$, а во втором интеграле положим $x+1 = t$, $dx = dt$. Отсюда следует, что

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} = \frac{3}{2}\int z^{-2}\,dz - \int \frac{dt}{(t^2+9)^2} =$$
$$= -\frac{3}{2}z^{-1} - \left[\frac{1}{2(2-1)\cdot 9}\ \frac{t}{(t^2+9)^{2-1}} + \frac{1}{9}\ \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\ \int \frac{dt}{t^2+9}\right] =$$
$$= -\frac{3}{2z} - \frac{1}{18}\ \frac{t}{t^2+9} - \frac{1}{18}\ \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx = -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{(x+1)^2+9} - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10} - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C. \quad \blacksquare$$

Найти интегралы:

1410. $\int \frac{dx}{(x-1)^4}$.

1411. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$.

1412. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

1413. $\int \frac{x^2}{x^6+2x^3+3}\,dx$.

1414. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}\,dx$.

1415. $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}\,dx$.

1416. $\int \frac{x+1}{5x^2+2x+1}\,dx$.

1417. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$.

1418. $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$.

2. Интегрирование рациональных дробей с помощью представления в виде суммы простейших дробей. Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ нужно выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1) если дана неправильная рациональная дробь, то выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ — многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь;

2) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \cdots (x^2+px+q)^n$$

где $\frac{p^2}{4} - q < 0$, т.е. трехчлен x^2+px+q имеет комплексные сопряженные корни;

3) правильную рациональную дробь представить как сумму простейших дробей:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots$$

$$\cdots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q} + \ldots;$$

4) вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots, B_1, C_1, B_2, C_2, \ldots, B_n, C_n, \ldots$, для чего привести последнее равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой

частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Эти коэффициенты можно найти и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Случай 1. Знаменатель имеет только действительные различные корни, т.е. разлагается на неповторяющиеся множители первой степени.

Найти указанные интегралы:

1419. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx.$

❑ Так как каждый из двучленов $x-1$, $x-2$, $x-4$ входит в знаменатель в первой степени, то данную правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^2+2x+6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2). \qquad (*)$$

Следовательно,

$$x^2+2x+6 = A(x^2-6x+8) + B(x^2-5x+4) + C(x^2-3x+2).$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями:

$$x^2+2x+6 = (A+B+C)x^2 + (-6A-5B-3C)x + (8A+4B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ -6A-5B-3C=2, \\ 8A+4B+2C=6, \end{cases}$$

из которой найдем $A=3$, $B=-7$, $C=5$.

Итак, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C в разложении можно было определить иначе. После освобождения от знаменателя следует придать x столько частных значений, сколько неизвестных содержится в системе, в данном случае — три частных значения.

Особенно удобно придавать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. Воспользуемся этим приемом для решения данного примера. После освобождения от знаменателя мы получили равенство $(*)$. Действительными корнями знаменателя являются числа 1, 2 и 4. Положим в этом равенстве $x = 1$, тогда

$$1^2 + 2\;1 + 6 = A(1-2)(1-4) + B(1-1)(1-4) + C(1-1)(1-2),$$

откуда $9 = 3A$, т.е. $A = 3$. Полагая $x = 2$, получаем $14 = -2B$, т.е. $B = -7$; полагая $x = 4$, имеем $30 = 6C$, т.е. $C = 5$. В результате получились те же значения, что и при первом способе определения неизвестных.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx = 3\int\frac{dx}{x-1} - 7\int\frac{dx}{x-2} + 5\int\frac{dx}{x-4} =$$

$$= 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| + 5\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C. \quad ■$$

<u>Случай 2.</u> Знаменатель имеет лишь действительные корни, причем некоторые из них кратные, т.е. знаменатель разлагается на множители первой степени и некоторые из них повторяются.

1420. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx.$

❑ Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей $\dfrac{A}{(x-1)^3} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1}$, а множителю $x+3$ — простейшая дробь $\dfrac{D}{x+3}$. Значит,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+3}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$x^2 + 1 = A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2(x+3) + D(x-1)^3$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и -3. Полагая $x = 1$, получаем $2 = 4A$, т.е. $A = \frac{1}{2}$. При $x = -3$ имеем $10 = -64D$, т.е. $D = -\frac{5}{32}$.

Сравним теперь коэффициенты при старшей степени x, т.е. при x^3 В левой части нет члена с x^3, т.е. коэффициент при x^3 равен 0. В правой части коэффициент при x^3 равен $C + D$. Итак, $C + D = 0$, откуда $C = \frac{5}{32}$.

Остается определить коэффициент B. Для этого необходимо иметь еще одно уравнение. Это уравнение можно получить сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x (например, при x^2) или придав x какое-нибудь числовое значение. Удобнее взять такое значение, при котором вычислений будет возможно меньше. Полагая, например, $x = 0$, получаем

$$1 = 3A - 3B + 3C - D, \quad \text{или} \quad 1 = \frac{3}{2} - 3B + \frac{15}{32} + \frac{5}{32}, \quad \text{т.е. } B = \frac{3}{8}.$$

Итак, данная дробь представлена в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{8(x-1)^2}+\frac{5}{32(x-1)}-\frac{5}{32(x+3)}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}\,dx=\int\frac{1}{2}\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{3}{8}\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{5}{32}\frac{dx}{x-1}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=$$
$$=-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{3}{8(x-1)}+\frac{5}{32}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C. \blacksquare$$

Случай 3. Среди корней знаменателя имеются простые комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит квадратичные неповторяющиеся множители.

1421. $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$.

❑ Разложим знаменатель на множители:

$$x^5-x^2=x^2(x^3-1)=x^2(x-1)(x^2+x+1).$$

Тогда получим

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

Освободимся от знаменателя:

$$1=A(x-1)(x^2+x+1)+Bx(x-1)(x^2+x+1)+$$
$$+Cx^2(x^2+x+1)+(Dx+E)x^2(x-1).$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 0 и 1. При $x=0$ имеем $1=-A$, т.е. $A=-1$; при $x=1$ имеем $1=3C$, т.е. $C=\frac{1}{3}$.

Перепишем предыдущее равенство в виде

$$1=A(x^3-1)+B(x^4-x)+C(x^4+x^3+x^2)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.$$

Сравнивая коэффициенты при x^4, x^3, x^2, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} B+C+D=0, \\ A+C+E-D=0, \\ C-E=0, \end{cases}$$

из которой найдем $B = 0$, $D = -\frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$\frac{1}{x^5 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)},$$

откуда получим

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacksquare$$

Случай 4. Среди корней знаменателя имеются кратные комплексные корни, т.е. разложение знаменателя содержит повторяющиеся квадратичные множители.

1422. $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

❑ Так как $x^2 + 1$ есть двукратный множитель, то

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$x^3 - 2x = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 1 = C, \\ x^2 & 0 = D, \\ x & -2 = A + C;\ \ A = -3, \\ x^0 & 0 = B + D;\ \ B = 0. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-3x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = -\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$
$$= \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Заметим, что данный интеграл можно было найти проще с помощью подстановки $x^2 + 1 = t$. ■

1423. $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx.$

❑ Выделим целую часть данной неправильной рациональной дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+5x+7 & x^2+2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3\qquad +2x\quad} & x+3+\dfrac{3x+1}{x^2+2} \\ -\,3x^2+3x+7 & \\ \underline{3x^2\qquad +6} & \\ 3x+1 & \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Отсюда находим

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx = \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx + 3\int dx + \int\frac{3x+1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C. \quad \blacksquare$$

1424. $\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx.$

❑ Так как подынтегральная функция является правильной дробью, то ее следует сразу представить в виде суммы простейших дробей. Легко установить, что многочлен $x^3+6x^2+11x+6$ обращается в нуль при $x=-1$, поэтому он делится без остатка на $x+1$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+6x^2+11x+6 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+\ x^2\qquad\qquad} & x^2+5x+6 \\ -\,5x^2+11x\quad & \\ \underline{5x^2+\ 5x\quad} & \\ -\,6x+6 & \\ \underline{6x+6} & \end{array}$$

Следовательно,

$$x^3+6x^2+11x+6 = (x+1)(x^2+5x+6) = (x+1)(x+2)(x+3);$$

$$\frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}.$$

Освобождаясь от знаменателей, имеем

$$x+4 = A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2).$$

Полагая $x=-1$, найдем $3=2A$, т.е. $A=\frac{3}{2}$. Если $x=-2$, то получим $2=-B$, т.е. $B=-2$. При $x=-3$ получим $1=2C$, т.е. $C=\frac{1}{2}$.

Итак,

$$\int \frac{x+4}{x^3+6x^2+11x+6}\,dx = \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+1} - 2\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C. \quad \blacksquare$$

1425. $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx.$

❑ Прежде всего выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} -\ x^5-8x^3+16x & x+\dfrac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} \\ \hline 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Разложим теперь правильную дробь на простейшие:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

Освободимся от знаменателей:

$$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-2)^2(x+2).$$

Полагая $x=2$, имеем $33 = 16A$, т.е. $A = \frac{33}{16}$; при $x=-2$ получим $-31 = 16C$, т.е. $C = -\frac{31}{16}$; если $x=0$, то $1 = 4A - 8B + 4C + 8D$. Заменив A и C их значениями, получаем

$$1 = \frac{33}{4} - 8B - \frac{31}{4} + 8D, \quad \text{или} \quad -16B + 16D = 1.$$

Для того чтобы найти B и D, составим еще одно уравнение. Сравнив коэффициенты при x^3, имеем $8 = B + D$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} B + D = 8, \\ -16B + 16D = 1, \end{cases}$$

находим $D = \frac{129}{32}$, $B = \frac{127}{32}$.

Итак,

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}\,dx = \int\left[x + \frac{33}{16(x-2)^2} + \frac{127}{32(x-2)} - \frac{31}{16(x+2)^2} + \frac{129}{32(x+2)}\right]dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{127}{32}\ln|x-2| + \frac{31}{16(x+2)} + \frac{129}{32}\ln|x+2| + C. \quad \blacksquare$$

1426. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5}$.

☐ Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной $x - 1 = t$; тогда $x = t + 1$ и $dx = dt$. В результате получаем

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^5} = \int \frac{(t+1)^2\,dt}{t^5} = \int \frac{t^2+2t+1}{t^5}\,dt = \int \frac{dt}{t^3} + 2\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^5} =$$
$$= -\frac{1}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{4t^4} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + C =$$
$$= -\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4} + C. \quad \blacksquare$$

1427. $\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5}$.

☐ Преобразуем знаменатель: $x^4 + 6x^2 + 5 = (x^2+3)^2 - 4$. Теперь имеем

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4}.$$

Выполним замену $x^2 + 3 = t$; тогда $2x\,dx = dt$ и

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+6x^2+5} = \int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5} + C.$$

Из последних двух примеров видим, что иногда перед интегрированием рациональной дроби следует выполнить замену переменной. ■

Найти интегралы:

1428. $\int \frac{x+2}{x(x-3)}\,dx$.

1429. $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$.

1430. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}\,dx$.

1431. $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

1432. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}\,dx$.

1433. $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$.

1434. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$.

1435. $\int \frac{\frac{19}{16}x^2+x+1}{(x^2+4)(x^2+2x+5)}\,dx$.

1436. $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx$.

❶ Представить знаменатель в виде $x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$

1437. $\int \frac{x^2\,dx}{x^2-4x+3}$.

1438. $\int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5}\, dx.$ **1439.** $\int \frac{x^4}{x^4 - 16}\, dx.$

1440. $\int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x}\, dx.$

3. Интегралы вида $\int R(e^x)\, dx$, где R — рациональная функция. С помощью подстановки $e^x = t$, откуда $e^x\, dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, данный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Найти указанные интегралы:

1441. $\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3}\, dx.$

❑ Положим $e^x = t$; тогда $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{t}$, откуда

$$\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3}\, dx = \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t^2 - 2t - 3)}\, dt.$$

Так как $t(t^2 - 2t - 3) = t(t + 1)(t - 3)$, то разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{3t^2 + t + 1}{t(t + 1)(t - 3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1} + \frac{C}{t - 3}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получим

$$3t^2 + t + 1 = A(t + 1)(t - 3) + Bt(t - 3) + Ct(t + 1).$$

Если $t = 0$, то $1 = -3A$, т.е. $A = -\frac{1}{3}$, если $t = -1$, то $2 = 4B$, т.е. $B = \frac{1}{2}$, наконец, если $t = 3$, то $31 = 12C$, т.е. $C = \frac{31}{12}$.

Итак,

$$\frac{3t^2 + t + 1}{t(t^2 - 2t - 3)} = -\frac{1}{3t} + \frac{1}{2(t + 1)} + \frac{31}{12(t - 3)}$$

и значит,

$$\int \frac{3e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x - 3}\, dx = \int \frac{3t^2 + t + 1}{t(t + 1)(t - 3)}\, dt =$$
$$= -\frac{1}{3} \ln t + \frac{1}{2} \ln(t + 1) + \frac{31}{12} \ln|t - 3| + C =$$
$$= -\frac{1}{3} \ln e^x + \frac{1}{2}(e^x + 1) + \frac{31}{12} \ln|e^x - 3| + C =$$
$$= -\frac{x}{3} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + \frac{31}{12} \ln|e^x - 3| + C. \quad ■$$

1442. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x + 16}{e^{4x} - 16}\, dx.$

1443. $\int \frac{2e^x + 3}{(2e^{2x} - e^x - 1)(e^{2x} + 1)}\, dx.$

§ 3

Интегрирование простейших иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots)\,\mathrm{d}x$, где R — рациональная функция; $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$ — целые числа. С помощью подстановки $ax + b = t^s$, где s — наименьшее общее кратное чисел n_1, $n_2, \ldots$, заданный интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Найти указанные интегралы:

1444. $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}}$.

❏ Здесь $n_1 = 3$, $n_2 = 2$; поэтому $s = 6$. Воспользуемся подстановкой $2x + 1 = t^6$; тогда $x = \dfrac{t^6 - 1}{2}$, $\mathrm{d}x = 3t^5\,\mathrm{d}t$ и, следовательно,

$$I = \int \frac{3t^5\,\mathrm{d}t}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t-1} = 3\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t - 1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t - 1| + C.$$

Возвратимся к старой переменной. Так как $t = (2x+1)^{1/6}$, то

$$I = \frac{3}{2}(2x+1)^{1/3} + 3(2x+1)^{1/6} + 3\ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| + C. \quad ■$$

2. Интегралы вида $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. Такие интегралы с помощью выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к табличным интегралам XX или XXI.

1445. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$.

❏ Преобразуя квадратный трехчлен к виду $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$, получим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}| + C. \quad ■$$

1446. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}$.

❏ Имеем

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x - 2) + C. \quad ■$$

3. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$. Для отыскания этого интеграла выделим в числителе производную квадратного трехчлена, находящегося под знаком корня, и представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Первый из полученных интегралов есть табличный интеграл XVII, а второй был рассмотрен в п. 2.

1447. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx.$

❑ Выделим в числителе производную подкоренного выражения:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx =$$
$$= \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C. \ \blacksquare$$

1448. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx.$

❑ Имеем

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}\,dx +$$
$$+13\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\int \arcsin(x-3) + C. \ \blacksquare$$

4. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. С помощью подстановки $x-\alpha=\frac{1}{t}$ этот интеграл приводится к рассмотренному в п. 2.

1449. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}.$

❑ Положим $x=\frac{1}{t}$; тогда $dx=-\frac{dt}{t^2}$ и, значит,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} =$$

$$= -\ln|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}|+C = -\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C. \quad \blacksquare$$

1450. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

❑ Положим $x-1=\frac{1}{t}$; тогда $x=\frac{1}{t}+1$ и $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} = -\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} =$$

$$= -\int\frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C. \quad \blacksquare$$

1451. $\displaystyle I=\int\frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$.

❑ Записав числитель подынтегральной функции в виде $3x+2=$ $=3(x+1)-1$, получим

$$I=\int\frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx.$$

Представим данный интеграл как разность двух интегралов:

$$I=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

К первому интегралу применим формулу XXI, а ко второму — подстановку $x+1=\frac{1}{t}$:

$$I=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}} =$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C =$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+x+3}}{x+1}\right|+C. \quad \blacksquare$$

5. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени. Интеграл такого вида находят с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени с неопределенными коэффициентами, λ — число.

Дифференцируя указанное тождество и приводя результат к общему знаменателю, получают равенство двух многочленов, из которого определяют коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

1452. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

❏ Здесь $n = 3$, поэтому соответствующее тождество имеет вид

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = (b_0x^2+b_1x+b_2)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Дифференцируя обе его части, получаем

$$\frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}} = (2b_0x+b_1)\sqrt{x^2+2x+2}+$$
$$+(b_0x^2+b_1x+b_2)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x^3+2x^2+3x+4 = (2b_0x+b_1)(x^2+2x+2) + (b_0x^2+b_1x+b_2)(x+1) + \lambda,$$

или

$$x^3+2x^2+3x+4 = 3b_0x^3 + (5b_0+2b_1)x^2 + (4b_0+3b_1+b_2)x + (2b_1+b_2+\lambda).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} 3b_0 = 1, \\ 5b_0+2b_1 = 2, \\ 4b_0+3b_1+b_2 = 3, \\ 2b_1+2b_2+\lambda = 4. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $b_0 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{7}{6}$, $\lambda = \frac{5}{2}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$
$$+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C. \quad ■$$

Найти интегралы:

1453. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

1454. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

1455. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$.

1456. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.

1457. $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx$.

1458. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

1459. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$.

1460. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$.

1461. $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1462. $\int \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$.

6. Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p — рациональные числа. Как доказал П. Л. Чебышев, интегралы от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

1) p — целое число, тогда данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $x = t^s$, где s — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число, в этом случае данный интеграл рационализируется с помощью подстановки $a+bx^n = t^s$;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, в этом случае к той же цели ведет подстановка $ax^{-n}+b = t^s$, где s — знаменатель дроби p.

1463. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$.

❑ Запишем подынтегральную функцию в виде

$$x^{-1/2}(x^{1/4}+1)^{-10},$$

т.е. $p = -10$ — целое число. Значит, имеем первый случай интегрируемости дифференциального бинома. Поэтому следует применить подстановку $x = t^4$; тогда $dx = 4t^3dt$ и искомый интеграл примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int \frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}}.$$

Найдем последний интеграл:

$$\int \frac{t\,dt}{(t+1)^{10}} = \int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}\,dt = \int \frac{dt}{(t+1)^9} - \int \frac{dt}{(t+1)^{10}} =$$
$$= \int (t+1)^{-9}d(t+1) - \int (t+1)^{-10}d(t+1) = -\frac{1}{8(t+1)^8} + \frac{1}{9(t+1)^9} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = -\frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9} + C. \quad \blacksquare$$

1464. $\int \frac{x^3\,dx}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.

❑ Переписав подынтегральную функцию в виде $x^3(a^2-x^2)^{-3/2}$, имеем $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$. Так как $\frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2$ — целое число, то имеем второй случай интегрируемости. Используя подстановку $a^2-x^2=t^2$, получим $-2x\,dx = 2t\,dt$, $x\,dx = -t\,dt$, $x^2 = a^2-t^2$ Следовательно,

$$\int x^3(a^2-x^2)^{-3/2}dx = -\int (a^2-t^2)t^{-3}\cdot t\,dt = -\int \frac{a^2-t^2}{t^2}\,dt =$$

$$= \int dt - a^2\int \frac{dt}{t^2} = t + \frac{a^2}{t} + C = \frac{t^2+a^2}{t} + C = \frac{2a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + C. \quad \blacksquare$$

1465. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

❑ Здесь $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n}+p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ — целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Полагаем $x^{-2}+1 = t^2$; тогда $-2x^{-3}dx = 2t\,dt$, $x^{-3}\,dx = -t\,dt$. Преобразуем данный интеграл так:

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx =$$

$$= \int x^{-4}[x^2(x^{-2}+1)]^{-1/2}\,dx = \int x^{-2}(x^{-2}+1)^{-1/2}x^{-3}\,dx.$$

Следовательно,

$$I = -\int (t^2-1)t^{-1}t\,dt = -\int (t^2-1)\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \sqrt{x^{-2}+1} - \frac{\sqrt{(x^{-2}+1)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3} + C =$$

$$= \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C. \quad \blacksquare$$

Найти интегралы:

1466. $\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+1)^2}$.

1467. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\,dx$.

1468. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1469. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

1470. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}\,dx$.

1471. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

§ 4

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, где R — рациональная функция. Интегралы указанного вида приводят к интегралам от рациональных функций с помощью так называемой *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. В результате этой подстановки имеем:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t;\quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Найти указанные интегралы:

1472. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

❑ Подынтегральная функция является рациональной относительно $\sin x$ и $\cos x$. Воспользуемся подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ и, значит,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+8t+8} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} + C. \quad ■$$

1473. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\cos x}$.

❑ Полагая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, находим

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\cos x} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{(a^2+b^2) - (a^2-b^2)\,\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(a^2+b^2)(1+t^2) - (a^2-b^2)(1-t^2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{a^2t^2+b^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(at)}{(at)^2+b^2} = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{at}{b} + C = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C. \quad ■$$

Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее использовании $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ можно упростить.

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция относительно $\sin x$, т.е. если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция относительно $\cos x$, т.е. если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $\sin x = t$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ — четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то к цели приводит подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

1474. $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)\,dx}{\cos 2x}$.

❑ Так как подынтегральная функция нечетна относительно синуса, то полагаем $\cos x = t$. Отсюда $\sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$, $dt = -\sin x\,dx$. Таким образом,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)\,dx}{\cos 2x} = \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} = \int \frac{(t^2 - 2)\,dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2} - 1}{t\sqrt{2} + 1}\right| + C.$$

Окончательно находим

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)\,dx}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае интеграл всегда можно записать в виде $\int R^*(\sin^2 x, \cos x)\sin x\,dx$. ■

1475. $\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

❑ Здесь подынтегральная функция является нечетной относительно косинуса. Поэтому воспользуемся подстановкой $\sin x = t$; тогда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos x\,dx = dt$. Следовательно,

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x\,(1 + \cos^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)\,dt}{t^2 + t^4}.$$

Так как $\frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2(1 + t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2}$, то

$$\int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)\,dt}{t^2(1 + t^2)} = t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\,\mathrm{arctg}\sin x + C.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае интеграл всегда можно записать в виде $\int R^*(\sin x, \cos^2 x)\cos x\,dx$. ■

1476. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

❑ Подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса. Полагаем $\mathrm{tg}\,x = t$; тогда $\sin x = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$; $x = \mathrm{arctg}\,t$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Отсюда получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1}.$$

Далее имеем

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,x+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\,x+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Заметим, что нахождение интеграла можно упростить, если в исходном интеграле разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 1} = \int \frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 1}. \quad ■$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$. Выделим здесь два случая, имеющие особенно важное значение.

Случай 1. По крайней мере один из показателей m или n — нечетное положительное число.

Если n — нечетное положительное число, то применяют подстановку $\sin x = t$; если же m — нечетное положительное число — подстановку $\cos x = t$.

1477. $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$.

❑ Полагая $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$, получим

$$\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx = \int t^4(1-t^2)^2\,dt = \int t^4 dt -$$
$$-2\int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C. \quad ■$$

1478. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$.

❑ Имеем

$$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}} = \int \sin^3 x\cos^{-4/3} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^{-4/3} x\sin x\,dx.$$

Полагая $\cos x = t$, $-\sin x\,dx = dt$, получим

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}} = -\int (1-t^2)t^{-4/3}dt = -\int t^{-4/3}dt + \int t^{2/3}\,dt =$$
$$= 3t^{-1/3} + \frac{3}{5}t^{5/3} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} + C. \quad ■$$

Случай 2. Оба показателя степени m и n — четные положительные числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \tag{1}$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \tag{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \tag{3}$$

1479. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

❑ Из формулы (1) следует, что

$$\sin^2 x\cos^2 x = (\sin x\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Применив теперь формулу (2), получим

$$\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\quad\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(i - \cos 4x).$$

Итак,

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C. \quad ■$$

1480. $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$.

❑ Используя формулу (3), получим

$$\int \cos^6 x\,dx = \int (\cos^2 x)^3\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx + \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx =$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}\int dx+\frac{3}{16}\int\cos 4x\,dx+\frac{1}{8}\int\cos 2x\,dx-\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}d(\sin 2x)=$$
$$=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{16}x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C=$$
$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C. \blacksquare$$

1481. $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

❑ Имеем

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx=$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x\,dx=$$
$$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}\,d(\sin 2x)=$$
$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4x\,dx+\frac{1}{16}\sin^2 2x\,d(\sin 2x)=$$
$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C. \blacksquare$$

3. Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x\,dx$ и $\int \mathrm{ctg}^m x\,dx$, где m — целое положительное число. При нахождении таких интегралов применяют формулу $\mathrm{tg}^2 x=\sec^2 x-1$ (или $\mathrm{ctg}^2 x=\mathrm{cosec}^2 x-1$), с помощью которой последовательно понижают степень тангенса или котангенса.

1482. $\int\mathrm{tg}^7 x\,dx$.

❑ Имеем

$$\int\mathrm{tg}^7 x\,dx=\int\mathrm{tg}^5 x(\sec^2 x-1)\,dx=\int\mathrm{tg}^5 x\,d(\mathrm{tg}\,x)-\int\mathrm{tg}^5 x\,dx=$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^6 x}{6}-\int\mathrm{tg}^3 x(\sec^2 x-1)\,dx=\frac{\mathrm{tg}^6 x}{6}-\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+\int\mathrm{tg}\,x(\sec^2 x-1)\,dx=$$
$$=\frac{\mathrm{tg}^6 x}{6}-\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C. \blacksquare$$

1483. $\int\mathrm{ctg}^6 x\,dx$.

❑ Имеем

$$\int\mathrm{ctg}^6 x\,dx=\int\mathrm{ctg}^4 x(\mathrm{cosec}^2 x-1)\,dx=-\int\mathrm{ctg}^4 x\,d(\mathrm{ctg}\,x)-\int\mathrm{ctg}^4 x\,dx=$$
$$=-\frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5}-\int\mathrm{ctg}^2 x(\mathrm{cosec}^2 x-1)\,dx=-\frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5}+\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}+\int(\mathrm{cosec}^2 x-1)\,dx=$$
$$=-\frac{\mathrm{ctg}^5 x}{5}+\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}-\mathrm{ctg}\,x-x+C. \blacksquare$$

4. Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$, где n — четное положительное число. Такие интегралы находят аналогично рассмотренным в п. 3 с помощью формулы $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ (или $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$).

1484. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\,dx$.

❑ Имеем

$$\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\,dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x \cdot \sec^2 x\,dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^4 x(1+\operatorname{tg}^2 x)^2\,d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^4 x\,d(\operatorname{tg} x) + 2\int \operatorname{tg}^6 x\,d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x\,d(\operatorname{tg} x) =$$
$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C. \quad ■$$

1485. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

❑ Имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \operatorname{cosec}^4 x\,dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\operatorname{cosec}^2 x\,dx =$$
$$= \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx - \int \operatorname{ctg}^2 x\,d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C. \quad ■$$

5. Интегралы вида $\int \sec^{2n+1} x\,dx$ и $\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx$. Интегралы от нечетной положительной степени секанса или косеканса находят с помощью рекуррентных формул:

$$\int \sec^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2n}\,\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\int \sec^{2n-1} x\,dx, \tag{1}$$
$$\int \operatorname{cosec}^{2n+1} x\,dx = -\frac{1}{2n}\,\frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\int \operatorname{cosec}^{2n-1} x\,dx. \tag{2}$$

1486. $\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx$.

❑ Применяя рекуррентную формулу (2) при $2n+1=5$, т.е. при $n=2$, получим

$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{1}{4}\,\frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4}\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx.$$

Далее, полагая $2n+1=3$, т.е. $n=1$, воспользуемся той же формулой:

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \operatorname{cosec} x\,dx.$$

Так как $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$, то

$$\int \operatorname{cosec}^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$
$$\int \operatorname{cosec}^5 x\,dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \quad ■$$

6. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$. Тригонометрические формулы

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], \quad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \quad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \quad (3)$$

дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы.

1487. $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$.

❑ Используя формулу (1), получим

$$\int \sin 2x\cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int[\sin 7x + \sin(-3x)] \, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x \, dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C. \quad ■$$

Найти интегралы:

1488. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

1489. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

1490. $\int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x}$.

⚠ Положить $\operatorname{ctg} x = t$.

1491. $\int \frac{\cos^3 x \, dx}{\sin^2 x + \sin x}$.

1492. $\int \frac{\sin 2x \, dx}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1}$.

1493. $\int \sin^3 x \, dx$.

1494. $\int \frac{\cos^5 x \, dx}{\sin x}$.

1495. $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} \, dx$.

1496. $\int \cos^4 x \, dx$.

1497. $\int \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} \, dx$.

1498. $\int \operatorname{ctg}^3 3x \, dx$.

1499. $\int \sec^6 x \, dx$.

1500. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \, dx$.

1501. $\int \sec^3 x \, dx$.

1502. $\int \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{cosec} x \, dx$.

1503. $\int \sin 3x \sin x \, dx$.

1504. $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3} \, dx$.

1505. $\int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} \, dx$.

7. Тригонометрические подстановки. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) \, dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) \, dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) \, dx$ приводят к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки: для первого интеграла $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$), для второго $x = a\operatorname{tg} t$ (или $x = a\operatorname{ctg} t$) и для третьего $x = a\sec t$ (или $x = a\operatorname{cosec} t$).

Найти указанные интегралы:

1506. $I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,\mathrm{d}x.$

❑ Положим $x = a\sin t$, тогда $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$ и заданный интеграл примет вид

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}}{a\sin t} a\cos t\,\mathrm{d}t =$$
$$= a\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = a\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = a\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} - a\int \sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= a\ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + a\cos t + C = a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin t}\right| + a\cos t + C,$$

где $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$. Итак,

$$I = a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C. \quad \blacksquare$$

1507. $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2 + x^2}}.$

❑ Применим подстановку $x = a\operatorname{tg} t$, откуда $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$. Тогда получим

$$I = \int \frac{a\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{tg} t\sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{tg} t\sec t} =$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec t}{\operatorname{tg} t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosec} t - \operatorname{ctg} t| + C,$$

где $\operatorname{tg} t = \frac{x}{a}$ и, следовательно, $\operatorname{ctg} t = \frac{a}{x}$, $\operatorname{cosec} t = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$. Итак,

$$I = \frac{1}{a}\left|\ln \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x}\right| + C. \quad \blacksquare$$

1508. $I = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$

❑ Применим подстановку $x = a\sec t$, откуда $\mathrm{d}x = a\sec t\operatorname{tg} t\,\mathrm{d}t$. Тогда получим

$$I = \int \frac{a^2\sec^2 t \cdot a\sec t\operatorname{tg} t}{\sqrt{a^2\sec^2 t - a^2}}\,\mathrm{d}t = a^2\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t.$$

Далее воспользуемся рекуррентной формулой (1) п. 5 при $n = 1$:

$$\int \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2}\int \sec t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} =$$
$$= \frac{\sin t}{2\cos^2 t} + \frac{1}{2}\ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C,$$

где $\sec t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \frac{a}{x}$, $\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$. Итак,

$$I = \frac{a^2 \sin t}{2\cos^2 t} + \frac{a^2}{2} \ln|\sec t + \operatorname{tg} t| + C = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C. \quad \blacksquare$$

Найти интегралы:

1509. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$.

1510. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$.

1511. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$.

§ 5

Интегрирование разных функций

Найти интегралы:

1512. $\int \sin^2 x \sin 3x \, dx$.

1513. $\int (2x^2 - 2x + 1)e^{-x/2} \, dx$.

1514. $\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$.

1515. $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \operatorname{arctg} x \, dx$.

1516. $\int (2x^2 - 1) \cos 2x \, dx$.

1517. $\int x \ln^2 x \, dx$.

1518. $\int \frac{2e^{2x} - e^x - 3}{e^{2x} - 2e^x - 3} \, dx$.

1519. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$.

1520. $\int \sqrt{2^x - 1} \, dx$.

1521. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$.

1522. $\int \sqrt{6 + 4x - 2x^2} \, dx$.

1523. $\int e^{2x} \sin e^x \, dx$.

1524. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2 + 5\operatorname{tg}^2 x}}$.

1525. $\int \sin 2x \ln \cos x \, dx$.

1526. $\int (x + 2)\cos(x^2 + 4x + 1) \, dx$.

1527. $\int \frac{x \cos x \, dx}{\sin^3 x}$.

1528. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1 + e^x}} \, dx$.

1529. $\int \ln(x^2 + x) \, dx$.

1530. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

1531. $\int \cos \ln x \, dx$.

1532. $\int \frac{1 + \sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}} \, dx$.

1533. $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx$.

1534. $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$.

1535. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$.

1536. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

1537. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$.

Глава X

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1

Вычисление определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разделим отрезок $[a; b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \quad < x_{n-1} < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку ξ_k и найдем длину каждого такого отрезка: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. ***Интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называют сумму вида $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$, причем эта сумма имеет конечный предел I, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при $\max \Delta x_k < \delta$ неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе чисел ξ_k.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (или в пределах от a до b) называют предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_k (***теорема существования определенного интеграла***).

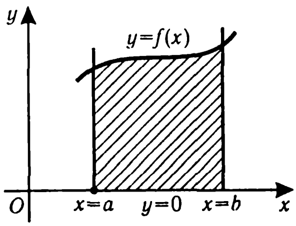

Рис. 42

Числа a и b соответственно называют ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования.***

Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции — фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 42).

Основные свойства определенного интеграла

1° $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

2° $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

3° $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$

4° $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$

5° $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где c — постоянная.

6° **Оценка определенного интеграла.** *Если* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *на* $[a;b]$, *то*

$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Правила вычисления определенных интегралов

1. *Формула Ньютона–Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ *— первообразная для* $f(x)$, *т.е.* $F'(x) = f(x)$

2. *Интегрирование по частям*:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ *— непрерывно дифференцируемые функции на отрезке* $[a;b]$

3. *Замена переменной*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi(t)$ *— функция, непрерывная вместе со своей производной* $\varphi'(t)$ *на отрезке* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f(\varphi(t))$ *— функция, непрерывная на* $[\alpha;\beta]$

4. *Если* $f(x)$ *— нечетная функция, т.е.* $f(-x) = -f(x)$, *то*

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

Если $f(x)$ *— четная функция, т.е.* $f(-x) = f(x)$, *то*

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

1538. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^2\,dx$ как предел интегральной суммы.

❑ Здесь $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$; разделим отрезок $[0; 1]$ на n равных частей, тогда $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$; выберем $\xi_k = x_k$. Имеем

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = \frac{n}{n} = 1;$$

$$f(\xi_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2\ f(\xi_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(\xi_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2\ f(\xi_k)\,\Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2\ \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} = \frac{1}{3}.$$

Здесь использована формула суммы квадратов натуральных чисел. ■

1539. Вычислить $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ по формуле Ньютона–Лейбница.

❑ Имеем

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.\ ■$$

1540. Оценить интеграл $\int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

❑ Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то при $x > 10$ получим неравенство $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\right| < < 10^{-2}$ Следовательно,

$$\left|\int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}\right| < 8\cdot 10^{-2} < 10^{-1},\quad \text{т.е.}\quad \left|\int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}\right| < 0{,}1.\ ■$$

1541. Оценить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

❑ Поскольку $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, находим

$$\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{1}{5}\quad \text{и}\quad \frac{\pi}{16} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \leqslant \frac{\pi}{10}.\ ■$$

Вычислить указанные интегралы:

1542. $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx.$

❑ Воспользуемся методом интегрирования по частям. Положим $u=x$, $dv = e^{-x}\,dx$, откуда $du = dx$, $v = -e^{-x}$. Тогда получим

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}. \ \blacksquare$$

1543. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$

❑ Положим $\ln x = t$; тогда $\frac{dx}{x} = dt$; если $x = 1$, то $t = 0$; если $x = e$, то $t = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int\limits_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{3}. \ \blacksquare$$

1544. $\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$

❑ Положим $x = r\sin t$; тогда $dx = r\cos t\,dt$; если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = r$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t\,dt = r^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}r^2\Big[t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{r^2}{2}\Big[\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\Big) - \Big(0 + \frac{1}{2}\sin 0\Big)\Big] = \frac{\pi r^2}{4}. \ \blacksquare$$

1545. $I = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

❑ Подынтегральная функция — четная, а потому $I = 2\int\limits_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$ Интегрируем по частям, полагая $u = x$, $dv = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$; тогда $du = dx$, $v = \frac{1}{\cos x}$. Теперь находим

$$\int\limits_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{x}{\cos x}\Big|_0^{\pi/3} - \int\limits_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\Big) + \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Следовательно, $I = 2\Big(\frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}\Big)$. $\blacksquare$

1546. $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

❑ Подынтегральная функция — нечетная, следовательно, $I = 0$. ■

1547. $\int\limits_0^1 x\, dx$ как предел интегральной суммы.

1548. $\int\limits_0^1 e^x\, dx$ как предел интегральной суммы.

Оценить интегралы:

1549. $\int\limits_0^1 x(1-x^2)\, dx.$

1550. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin^2 x}\, dx.$

1551. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$

Вычислить интегралы:

1552. $\int\limits_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\, dx.$

1553. $\int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^4}.$

1554. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx.$

1555. $\int\limits_0^1 e^{x+e^x}\, dx.$

1556. $\int\limits_1^{e^{\pi/2}} \cos\ln x\, dx.$

1557. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx.$

1558. $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$

1559. $\int\limits_0^{2\pi} \cos 5x \cos x\, dx.$

1560. $\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx.$

1561. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\, dx.$

1562. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+x}.$

1563. $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx.$

1564. $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}\, dx.$

➊ Использовать свойство нечетной функции.

1565. $\int\limits_{-1}^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx.$

➊ Использовать свойство четной функции.

1566. Доказать, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n \end{cases}$$

(m и n — целые положительные числа).

§ 2

Несобственные интегралы

1. Основные понятия. *Несобственными интегралами* называют: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если предел (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности — *расходящимся*.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to0}\int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to0}\int_{c+\beta}^{b} f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (где $f(c)=\infty$, $a<c<b$) называют *сходящимся*, если существуют оба предела в правой части равенства (2), и *расходящимся*, если не существует хотя бы один из них.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1567. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx.$

❑ Имеем

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to+\infty}\sin b,$$

т.е. предел не существует. Значит, несобственный интеграл расходится. ■

1568. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}.$

❑ Находим

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) = 1,$$

т.е. несобственный интеграл сходится. ■

1569. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

❑ Подынтегральная функция — четная, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, т.е. несобственный интеграл сходится. ■

1570. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

❑ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ неограничена, а потому имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0} \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0} \ln x|_a^1 = \lim_{a\to 0}(\ln 1 - \ln a) = +\infty,$$

т.е. несобственный интеграл расходится. ■

1571. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

❑ Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b xe^{-x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2},$$

т.е. несобственный интеграл сходится. ■

Вычислить несобственные интегралы:

1572. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

1573. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$.

1574. $\int\limits_0^2 \frac{x^5\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

1575. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1576. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

1577. $\int\limits_0^1 x\ln^2 x\,dx$.

1578. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

2. Признаки сравнения. При исследовании сходимости несобственных интегралов пользуются одним из признаков сравнения.

1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены для всех $x \geqslant a$ и интегрируемы на отрезке $[a; A]$, где $A \geqslant a$, и если $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \geqslant a$, то*

из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ *вытекает сходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$, *причем* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$

2. (а) *Если при* $x \to +\infty$ *функция* $f(x) \geqslant 0$ *является бесконечно малой порядка* $p > 0$ *по сравнению с* $\frac{1}{x}$, *то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$

(б) *Если функция* $f(x) \geqslant 0$ *определена и непрерывна в промежутке* $a \leqslant x < b$ *и является бесконечно большой порядка* p *по сравнению с* $\frac{1}{b-x}$ *при* $x \to b-0$, *то интеграл* $\int\limits_a^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$ *сходится при* $p < 1$ *и расходится при* $p \geqslant 1$

1579. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$.

❑ Согласно определению, имеем

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A}x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right]_a^A =$$
$$= \frac{1}{-p+1}\lim_{A\to+\infty}A^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}a^{-p+1}$$

Пусть $p>1$; тогда $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{-p+1}=0$. Значит, при $p>1$ интеграл сходится. Пусть $p\leqslant 1$; тогда $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{-p+1}=\infty$, т.е. при $p\leqslant 1$ интеграл расходится. ■

Исследовать сходимость указанных интегралов:

1580. $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$ (интеграл Френеля).

❑ Пусть $x=\sqrt{\tau}$; тогда $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau$. Представим записанный справа интеграл в виде суммы:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau + \int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau.$$

Первое слагаемое есть собственный интеграл, так как $\lim\limits_{\tau\to0}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau = 0$; ко второму применим интегрирование по частям, полагая $u=\frac{1}{\sqrt{\tau}}$, $\mathrm{d}v=\sin\tau\,\mathrm{d}\tau$:

$$\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau}}\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos\tau}{\sqrt{\tau^3}}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos\tau\,\mathrm{d}\tau}{\tau^{3/2}}.$$

Последний интеграл сходится, так как $\frac{\cos\tau}{\tau^{3/2}} \leqslant \frac{1}{\tau^{3/2}}$, а интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{d\tau}{\tau^{3/2}}$ сходится. Поэтому $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$ сходится на основании признака (2а), а следовательно, данный интеграл также сходится. ■

1581. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$.

❑ Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{1+x^{10}}$ в промежутке интегрирования меньше, чем $\varphi(x)=\frac{1}{x^{10}}$, а интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{10}}$ является сходящимся. Значит, данный интеграл также сходится. ■

1582. $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^p}$ $(a<b)$.

❑ Согласно определению, имеем

$$\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^p}=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^p}=-\frac{1}{-p+1}\lim_{\varepsilon\to0}(b-x)^{-p+1}\Big|_a^{b-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{p-1}\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-p+1}+\frac{1}{-p+1}(b-a)^{-p+1}$$

Если $p<1$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-p+1}=0$; если же $p>1$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon^{-p+1}=\infty$; если, наконец, $p=1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x}=-\lim_{\varepsilon\to0}\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon}=\infty.$$

Итак, при $p<1$ интеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^p}$ сходится, а при $p\geqslant1$ — расходится. ■

1583. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$.

❑ Подынтегральная функция является бесконечно большой при $x\to1$. Представим ее в следующем виде:

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\;\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\;\frac{1}{(1-x)^{1/3}},$$

т.е. порядок этой бесконечно большой функции при $x\to1$ по сравнению с $\frac{1}{1-x}$ равен $p=\frac{1}{3}<1$. Поэтому данный интеграл сходится в силу признака (2б). ■

1584. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}\,dx$.

❑ Подынтегральная функция $f(x)$ в промежутке интегрирования положительна и $f(x)\to\infty$ при $x\to0$. Пользуясь теоремой об эквивалентных бесконечно малых, преобразуем числитель и знаменатель подынтегральной дроби; имеем $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{1/3}$, а $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$ при $x \to 0$, откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty,$$

т.е. $f(x)$ является бесконечно большой порядка $p = \frac{2}{3}$ по сравнению с $\frac{1}{x}$. Согласно признаку (2б), заданный интеграл сходится. ■

Исследовать сходимость интегралов:

1585. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx.$ **1586.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx.$

1587. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$ **1588.** $\int\limits_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx.$

1589. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3}\,dx.$ **1590.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}.$

1591. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$

§ 3

Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ (где $f(x) \geqslant 0$), прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ (где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, а $y(t) \geqslant 0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\theta)$ и двумя полярными радиусами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$, находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta.$$

1592. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и осью Ox.

❑ Парабола пересекает ось Ox в точках $O(0;0)$ и $M(4;0)$. Следовательно,

$$S=\int\limits_0^4(4x-x^2)\,dx=\left[2x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^4=\frac{32}{3}\text{ (кв. ед.)}.\ ■$$

1593. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=(x-1)^2$ и гиперболой $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

❑ Найдем точки пересечения параболы и гиперболы, для чего решим совместно уравнения этих кривых:

$$x^2-\frac{(x-1)^4}{2}=1,\quad\text{или}\quad x^4-4x^3+4x^2-4x+3=0.$$

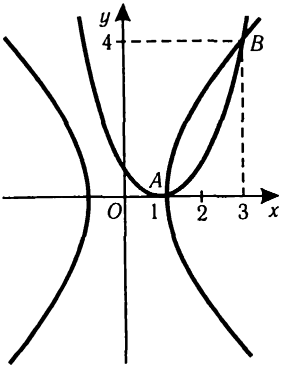

Рис. 43

Левую часть последнего уравнения можно разложить на множители: $(x-1)(x-3)(x^2+1)=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$ и $y_1=0$, $y_2=4$. Таким образом, заданные кривые пересекаются в точках $A(1;0)$ и $B(3;4)$ (рис. 43). Следовательно,

$$S=\int\limits_1^3\left[\sqrt{2(x^2-1)}-(x-1)^2\right]dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^3-\frac{1}{3}\left[(x-1)^3\right]_1^3=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[3\sqrt{8}+\ln(3+\sqrt{8})\right]-\frac{8}{3}=$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3+\sqrt{8})\approx4{,}58\text{ (кв. ед.)}.\ ■$$

1594. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ (см. рис. 5) и осью Ox.

❑ Здесь $dx=2(1-\cos t)\,dt$, а t изменяется от $t_1=0$ до $t_2=2\pi$. Значит,

$$S=\int\limits_0^{2\pi}2^2(1-\cos t)^2\,dt=4\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=4\left[t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=12\pi\text{ (кв. ед.)}.\ ■$$

1595. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho^2 = 2\cos 2\theta$ (см. рис. 2).

❑ Четвертой части искомой площади соответствует изменение θ от 0 до $\frac{\pi}{4}$, а потому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta \, d\theta = 2\sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = 2 \text{ (кв. ед.)}. \quad ■$$

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1596. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

1597. $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$ (I четверть).

1598. $y^2 = 4x^3$, $y = 2x^2$.

1599. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I четверть).

1600. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

1601. $y = 0{,}25x^2$, $y = 3x - 0{,}5x^2$

1602. $xy = 4\sqrt{2}$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $y = 0$, $x = 4$.

1603. $x = 12\cos t + 5\sin t$, $y = 5\cos t - 12\sin t$.

1604. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

1605. $\rho = \frac{4}{\cos(\theta - \frac{\pi}{6})}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

1606. $\rho = a\cos\theta$, $\rho = 2a\cos\theta$.

1607. $\rho = \sin^2\frac{\theta}{2}$ (справа от луча $\theta = \frac{\pi}{2}$).

1608. $\rho = a\sin 3\theta$ (площадь одной петли).

1609. $\rho = 2\cos\theta$, $\rho = 1$ (вне круга $\rho = 1$).

§ 4

Вычисление длины дуги плоской кривой

Если кривая $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$ — гладкая (т.е. производная $y'=f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции) длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, то длина дуги выражается формулой

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta.$$

1610. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ $(y \geqslant 0)$.

❑ Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$ Значит,

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx = \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{2}{3}\left(1 + \tfrac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right). \ \blacksquare$$

1611. Найти длину дуги кривой $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

❑ Найдем производные по параметру t: $\dot{x} = -5\cos^4 t \sin t$, $\dot{y} = 5\sin^4 t \cos t$. Таким образом,

$$L = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\cos^4 t \sin t)^2 + (5\sin^4 t \cos t)^2}\, dt =$$

$$= 5 \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}\, dt =$$

$$= \frac{5}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2t}\, dt = -\frac{5}{8} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\, d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}\cdot\cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{5}{8}\left[2 - \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right]. \ \blacksquare$$

1612. Найти длину дуги кривой $\rho = \sin^3 \frac{\theta}{3}$ от $\theta_1 = 0$ до $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

❑ Имеем $\rho' = \sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}$. Следовательно,

$$L = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6 \frac{\theta}{3} + \left(\sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}\right)^2}\, d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{\theta}{3}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \left(1 - \cos\frac{2\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}). \ \blacksquare$$

Вычислить длины дуг кривых:

1613. $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

1614. $y = \frac{2}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ между точками пересечения с осью Ox.

1615. $y = \frac{x^2}{2}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

1616. $y = 1 - \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$.

1617. $y = \operatorname{ch} x$ от $x = 0$ до $x = 1$.

1618. $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ от $t = 0$ до $t = 3$.

1619. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = \ln\pi$.

1620. $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

1621. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ (длину дуги одной арки циклоиды).

1622. $\rho = \theta^2$ от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$.

1623. $\rho = a\sin\theta$.

1624. $\rho = a\cos^3\frac{\theta}{3}$ от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{2}$.

1625. $\rho = 1 - \cos\theta$.

§ 5

Вычисление объема тела

1. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений. Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, можно выразить как функцию от x, т.е. в виде $S = S(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси Ox плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

2. Вычисление объема тела вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения выражается формулой

$$V_x = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx.$$

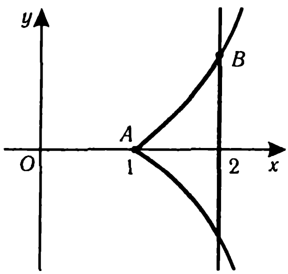

Рис. 44

1626. Найти объем тела, образуемого вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$ (рис. 44).

❑ Имеем

$$V = \pi\int_1^{\pi} y^2\,dx = \pi\int_1^2 (x-1)^3\,dx = \frac{1}{4}\pi(x-1)^4\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\pi \text{ (куб. ед.)}$$ ■

1627. Вычислить объем тела, в основании которого находится равнобедренный треугольник с высотой h и основанием a. Поперечное сечение тела есть сегмент параболы с хордой, равной высоте сегмента (рис. 45).

❑ Здесь $AB = a$, $OC = h$, $MK = DE$, $OK = x$. Выразим площадь поперечного сечения как функцию от x, для чего предварительно найдем уравнение параболы. Длину хорды DE можно найти из подобия соответствующих треугольников, а именно: $\frac{DE}{a} = \frac{h-x}{h}$, т.е. $DE = \frac{a(h-x)}{h} = MK$.

Положим $DE = m$, тогда уравнение параболы в системе координат uKv примет вид $v = m - \frac{4}{m}u^2$ Отсюда находим площадь поперечного сечения данного тела:

$$S = 2\int_0^{m/2}\left(m - \frac{4}{m}u^2\right)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}m^2, \quad \text{или} \quad S(x) = \frac{2}{3}\,\frac{a^2(h-x)^2}{h^2}.$$

Таким образом,

$$V = \int_0^h S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{2}{3}\,\frac{a^2}{h^2}(h-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}a^2h. \quad ■$$

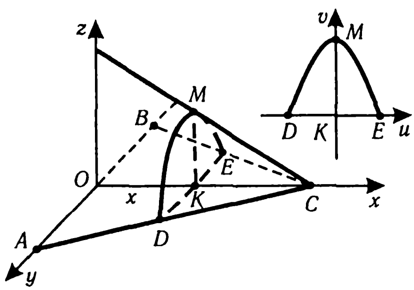

Рис. 45

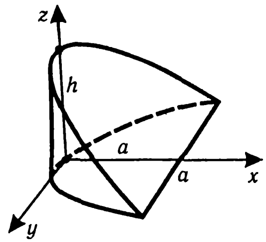

Рис. 46

Найти объемы тел, образуемых вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

1628. $y = \frac{64}{x^2+16}$, $x^2 = 8y$. **1629.** $y^2 = x$, $x^2 = y$.

1630. $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1$, $y = 0$. **1631.** $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \frac{x^3}{8}$.

1632. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $x = 1$, $x = 3$, если площадь его поперечного сечения обратно пропорциональна квадрату расстояния сечения от начала координат, а при $x=2$ площадь сечения равна 27 (кв. ед.).

1633. Найти объем цилиндрического клина по его размерам, указанным на рис. 46 (задача Архимеда).

1634. В цилиндрический стакан с водой вложен параболоид вращения вершиной вниз. Основание и высота параболоида совпадают с основанием и высотой цилиндра. Найти объем оставшейся в стакане воды, если радиус основания равен r, а высота равна h.

§ 6

Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

В том случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, площадь поверхности вращения вокруг оси Ox находится по формуле

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t.$$

1635. Найти площадь поверхности, образуемый вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

❑ Находим $y' = 2\cos 2x$; тогда

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x.$$

Выполним замену переменной: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\sin 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\,\mathrm{d}t$. Найдем пределы интегрирования по t: если $x = 0$, то $t = 2$; если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = -2$. Таким образом,

$$S = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) = \frac{\pi}{2}[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)] \text{ (кв. ед).}$$ ■

Найти площади поверхностей, образуемых вращением вокруг оси Ox дуг кривых:

1636. $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ от $x = 0$ до $x = 2$.

1637. $y = x^3$ от $x = 0$ до $x = \frac{1}{2}$.

1638. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1639. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ (площадь, образованную вращением одной арки).

§ 7

Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур

Пусть на плоскости xOy задана система материальных точек $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, …, $A_n(x_n; y_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. *Статическим моментом* M_x этой системы относительно оси Ox называют сумму произведений масс этих точек на их ординаты:

$$M_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k.$$

Аналогично (как сумму произведений масс точек на их абсциссы) определяют статический момент системы относительно оси Oy:

$$M_y = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k.$$

Моментами инерции I_x и I_y системы относительно осей Ox и Oy называют суммы произведений масс точек на квадраты их расстояний от соответствующей оси. Таким образом,

$$I_x = \sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k^2, \qquad I_y = \sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k^2.$$

За статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур принимают соответствующие моменты условных масс, равномерно распределенных вдоль этих дуг и фигур с плотностью (линейной или плоскостной), равной единице.

Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b y\,\mathrm{d}L; \quad M_y = \int_a^b x\,\mathrm{d}L; \quad I_x = \int_a^b y^2\,\mathrm{d}L; \quad I_y = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}L,$$

где $\mathrm{d}L = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$ — дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x, \quad M_y = \int_a^b x\,\mathrm{d}S = \int_a^b xy\,\mathrm{d}x,$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,\mathrm{d}x, \quad I_y = \int_a^b x^2\,\mathrm{d}S = \int_a^b x^2 y\,\mathrm{d}x.$$

В этих формулах $\mathrm{d}S = y\,\mathrm{d}x$ — дифференциал площади криволинейной трапеции.

1640. Найти статический момент и момент инерции полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$ относительно оси Ox.

❑ Статический момент будем вычислять по формуле $M_x = \int\limits_a^b y\,\mathrm{d}L$, где $\mathrm{d}L = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Тогда получим

$$M_x = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = r\int\limits_{-r}^{r}\mathrm{d}x = 2r^2$$

Находим момент инерции относительно оси Ox:

$$I_x = \int\limits_a^b y^2\,\mathrm{d}L = \int\limits_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = r\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 2r\int\limits_0^r\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Воспользуемся подстановкой $x = r\sin t$, $\mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t$; если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = r$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$I_x = 2r\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\,r\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= r^3\int\limits_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = r^3\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}. \quad \blacksquare$$

1641. Найти момент инерции площади эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ относительно оси Oy.

❑ Момент инерции площади эллипса относительно оси Oy равен $I_y = \int\limits_{-a}^{a} x^2\,\mathrm{d}S$, где $\mathrm{d}S = 2y\,\mathrm{d}x$. Из параметрических уравнений эллипса следует, что $\mathrm{d}S = 2b\sin t\cdot a(-\sin t)\,\mathrm{d}t = -2ab\sin^2 t\,\mathrm{d}t$, откуда находим

$$I_y = 2\int\limits_{\pi/2}^{0} a^2\cos^2 t(-2ab\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = -4a^3b\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}a^3b\int\limits_0^{\pi/2}(1 - \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi a^3 b}{4}. \quad \blacksquare$$

1642. Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в I четверти (рис. 47).

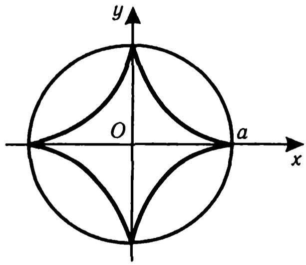

Рис. 47

❑ Так как астроида симметрична относительно координатных осей, то $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Поэтому достаточно вычислить моменты относительно оси Ox. Для I четверти имеем $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Находим

$$\mathrm{d}L = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,\mathrm{d}t = 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t,$$

$$M_x = \int_a^b y\,\mathrm{d}L = \int_0^{\pi/2} a\sin^3 t \quad 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{3a^2}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}a^2,$$

$$I_x = \int_a^b y^2\,\mathrm{d}L = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^6 t\cdot 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}a^3\sin^8 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8}a^3$$

Итак, $M_x = M_y = \frac{3}{5}a^2$; $I_x = I_y = \frac{3}{8}a^3$ ■

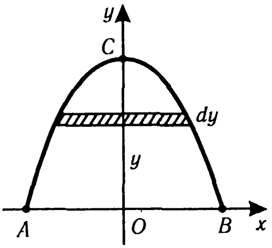

Рис. 48

1643. Найти момент инерции параболического сегмента, у которого хорда равна a, а стрелка относительно хорды равна h (рис. 48).

❑ Имеем $AB = a$, $OC = h$. Уравнение параболы имеет вид $y = h - Nx^2$, где коэффициент N можно определить, пользуясь тем, что точка $B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ принадлежит параболе: $0 = h - \frac{Na^2}{4}$, или $N = \frac{4h}{a^2}$; следовательно, $y = h - \frac{4h}{a^2}x^2$ Теперь находим искомый' момент инерции:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_{-a/2}^{a/2} y^3\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^{a/2}\left(h - \frac{4h}{a^2}x^2\right)^3\mathrm{d}x = \frac{16}{105}ah^3 \quad ■$$

1644. Найти статический момент и момент инерции дуги цепной линии $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$, где $0 \leqslant x \leqslant a$, относительно оси Ox.

1645. Найти статический момент и момент инерции треугольника с основанием a и высотой h относительно его основания.

1646. Найти момент инерции параболического сегмента, ограниченного параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $x = 3$, относительно оси Ox.

1647. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно осей симметрии прямоугольника.

1648. Найти полярный момент инерции круга диаметра d, т.е. момент инерции относительно оси, проходящей через центр круга и перпендикулярной его плоскости.

§ 8

Нахождение координат центра тяжести. Теоремы Гульдена

Координаты центра тяжести однородной дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ выражаются формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x\,\mathrm{d}L, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y\,\mathrm{d}L,$$

где $\mathrm{d}L = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$, а L — длина дуги.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx,$$

где $dS = y\,dx$, а S — площадь фигуры.

Первая теорема Гульдена. *Площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей ее, равна длине дуги кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести дуги.*

Вторая теорема Гульдена. *Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг оси, не пересекающей ее и расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.*

1649. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $-a \leqslant x \leqslant a$.

❑ Так как кривая симметрична относительно оси Oy, то ее центр тяжести лежит на оси Oy, т.е. $\bar{x} = 0$. Остается определить $\bar{y}$. Имеем $y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$; тогда $dL = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}}\,dx = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx$; отсюда находим длину дуги:

$$L = \int_{-a}^{a}\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\int_0^a \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = 2a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\Big|_0^a = 2a\,\mathrm{sh}\,1.$$

Следовательно,

$$\bar{y} = \frac{1}{2a\,\mathrm{sh}\,1}\int_{-a}^{a} a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{\mathrm{sh}\,1}\int_0^a \mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\int_0^a\left(1 + \mathrm{ch}\,\frac{2x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left[x + \frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a}\right]_0^a = \frac{a}{2\,\mathrm{sh}\,1}\left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,2\right) = \frac{a(2 + \mathrm{sh}\,2)}{4\,\mathrm{sh}\,1} \approx 1{,}18a. \quad ■$$

1650. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенной в I четверти, и осями координат.

❑ В I четверти при возрастании x от 0 до a величина t убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0; поэтому

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^a xy\,dx = \frac{1}{S}\int_{\pi/2}^{0} a\cos t\cdot b\sin t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2b}{S}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{a^2b}{S}\;\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^2b}{3S}.$$

Воспользовавшись формулой площади эллипса $S = \pi ab$, получим

$$\bar{x} = \frac{4a^2b}{3\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Аналогично находим

$$\bar{y} = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2\,dx = \frac{1}{2S}\int_{\pi/2}^0 b^2\sin^2 t(-a\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) = \frac{2b}{\pi}\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{\pi/2}^0 = \frac{4b}{3\pi}.$$

Таким образом, $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$, $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$. ■

1651. Найти площади поверхностей и объемы колец (торов), образованных вращением круга $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$ вокруг осей Ox и Oy ($a \geqslant r$, $b \geqslant r$).

❑ Если круг вращается вокруг оси Ox, то центр тяжести круга отстоит от оси вращения на расстояние b; поэтому площадь поверхности, согласно первой теореме Гульдена, равна $S_x = 2\pi r\cdot 2\pi b = 4\pi^2 br$, а объем, согласно второй теореме Гульдена, равен $V = \pi r^2\ 2\pi b = 2\pi^2 br^2$.

Если же вращение производится вокруг оси Oy, то расстояние до центра тяжести круга от оси Oy равно a. Тогда $S_y = 2\pi r\cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar$, $V_y = \pi r^2\cdot 2\pi a = 2\pi^2 ar^2$ ■

1652. Пользуясь теоремой Гульдена, найти координаты центра тяжести четверти круга $x^2+y^2 \leqslant r^2$

❑ При вращении четверти круга вокруг оси Ox получим полушар, объем которого $V = \frac{1}{2}\ \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$. Согласно второй теореме Гульдена, имеем $V = \frac{\pi r^2}{4}\ 2\pi\bar{y}$. Отсюда $\bar{y} = \frac{2V}{\pi^2 r^2} = \frac{2\cdot 2\pi r^3}{3\pi^2 r^2} = \frac{4r}{3\pi}$. Центр тяжести четверти круга лежит на оси симметрии, т.е. на биссектрисе I координатного угла, а потому $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$. ■

1653. Найти координаты центров тяжести полуокружности $y = \sqrt{r^2-x^2}$ и полукруга, ограниченного этой полуокружностью и осью Ox.

1654. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\cos x$.

1655. Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y=4-x^2$, $y=0$.

1656. Найти координаты центра тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (в I четверти).

1657. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$.

1658. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\sin x$.

1659. Пользуясь теоремой Гульдена, найти объем тела, образованного вращением полукруга радиуса r вокруг касательной, параллельной диаметру.

1660. Пользуясь теоремой Гульдена, доказать, что центр тяжести треугольника отстоит от его основания на одну треть высоты.

О Найти объем тела, полученного вращением треугольника вокруг основания.

1661. Пользуясь теоремой Гульдена, найти объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 и 8 вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикулярно диагонали.

§ 9

Вычисление работы и давления

Работа переменной силы $X = f(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[x_0; x_1]$, вычисляется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Для вычисления силы давления жидкости используют закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно ее площади S, умноженной на глубину погружения h, на плотность ρ и на ускорение силы тяжести g, т.е.

$$P = \rho g h S.$$

1662. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

❑ Согласно закону Гука, сила X Н, растягивающая пружину на x м, равна $X = kx$. Коэффициент пропорциональности k найдем из условия: если $x = 0{,}01$ м, то $X = 1$ Н; следовательно, $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$ и $X = 100x$. Тогда

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08\,\text{Дж}. \blacksquare$$

1663. С помощью подъемного крана извлекают железобетонную надолбу со дна реки глубиной 5 м. Какая работа при этом совершается, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1 м (рис. 49)? Плотность железобетона 2500 кг/м ^{3}, плотность воды 1000 кг/м ^{3}

❑ Высота тетраэдра $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$ м, объем тетраэдра $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$ м ^{3} Вес надолбы в воде с учетом действия архимедовой силы равен

$$P = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot 2500 \cdot 9{,}8 - \frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot 1000 \cdot 9{,}8 = 1225\sqrt{2}\,(\text{Н}),$$

поэтому работа при извлечении надолбы до момента появления на поверхности воды ее вершины составляет

$$A_0 = 1225\sqrt{2}(5 - h) = 1225\sqrt{2}\left(5 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 7227{,}5\,(\text{Дж}).$$

Теперь найдем работу A_1 при извлечении надолбы из воды. Пусть вершина тетраэдра имеет высоту $5 + y$; тогда объем малого тетраэдра, извлеченного из воды, равен $\frac{3\sqrt{3}y^3}{8}$, а вес тетраэдра

$$P(y) = \frac{2500 \cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}y^3 3\sqrt{3}\right)\ 1000 \cdot 9{,}8.$$

Следовательно,

$$A_1 = \int_0^h \left(\frac{24\,500}{12}\sqrt{2} - \frac{9\,800}{12}\sqrt{2} + \frac{9\,800}{8}3y^3\sqrt{8}\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\sqrt{6}/3} (1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}y^3)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left[1225\sqrt{2}y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}y^4\right]_0^{\sqrt{6}/3} \approx$$

$$\approx 2082{,}5\ (\text{Дж}).$$

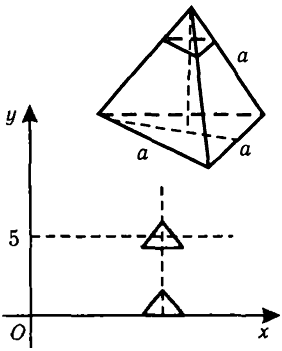

Рис. 49

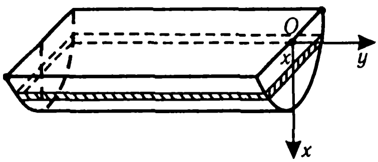

Рис. 50

Итак $A = A_0 + A_1 = 7227{,}5\ \text{Дж} + 2082{,}5\ \text{Дж} = 9310\ \text{Дж} = 9{,}31\ \text{кДж}$. ■

1664. Найти работу, совершенную при выкачивании воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого равна a, радиус основания равен r (рис. 50).

❏ Объем элементарного слоя воды, находящегося на глубине x и имеющего длину a, ширину $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ и толщину $\mathrm{d}x$, равен

$$\mathrm{d}V = am\,\mathrm{d}x = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Элементарная работа, совершаемая при подъеме этого слоя воды на высоту x, равна $\mathrm{d}A = 2\rho gax\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$, где ρ — плотность воды. Следовательно,

$$A = 2\rho ga \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = -\rho ga\left[\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{\pi/2}\right]_0^r = \frac{2}{3}\rho gar^3 \quad ■$$

1665. Найти силу давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого равен 6 м и находится на поверхности воды (рис. 51). Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м ^{3}

❑ Дифференциал силы давления на элементарную площадку выразится так:

$$dP = 2\rho g x\sqrt{9-x^2}dx = 19600x\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Отсюда находим

$$P = 19600\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{19600}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 = 176400\,\text{Н} = 176{,}4\,\text{кН}. \quad \blacksquare$$

1666. Какую силу давления испытывает прямоугольная пластинка длиной a и шириной b $(a > b)$, если она наклонена к горизонтальной поверхности жидкости под углом α и ее бо́льшая сторона находится на глубине h (рис. 52)?

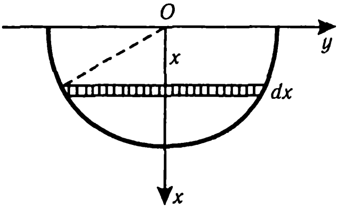

Рис. 51

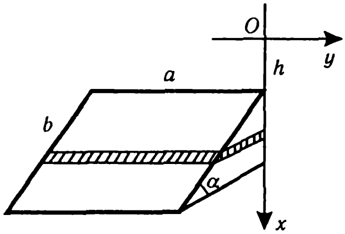

Рис. 52

❑ Площадь выделенной на глубине x элементарной полоски равна $dS = \frac{a}{\sin\alpha}dx$. Следовательно, элемент силы давления $dP = \frac{ax\rho g}{\sin\alpha}dx$ (ρ — плотность жидкости). Отсюда находим

$$P = a\rho g\int_h^{h+b\sin\alpha}\frac{x\,dx}{\sin\alpha} = \frac{a\rho g}{\sin\alpha}\,\frac{1}{2}x^2\Big|_h^{h+b\sin\alpha} =$$

$$= \frac{a\rho g}{2\sin\alpha}[(h^2+2bh\sin\alpha+b^2\sin^2\alpha)-h^2] = ab\rho g\left(h+\tfrac{1}{2}b\sin\alpha\right). \quad \blacksquare$$

1667. Найти силу давления на пластинку, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и b и высотой h, погруженную в жидкость на глубину c (рис. 53).

❑ Площадь элементарной полоски выражается так: $dS = (a+2l)\,dx$, где $l = \frac{(b-a)(x-c)}{2h}$ (l определяется из подобия треугольников). Следовательно,

$$P = \rho g\int_c^{c+h}\left[a+\frac{b-a}{h}(x-c)\right]x\,dx =$$

$$= \rho g\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{b-a}{h}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{cx^2}{2}\right)\right]_c^{c+h} =$$

$$= \left[\frac{a+b}{2}ch+\frac{h^2}{6}(a+2b)\right]\rho g. \quad \blacksquare$$

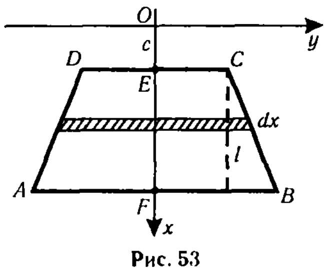

Рис. 53

1668. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см; один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 1 м выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

1669. Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h = 3{,}5$ м и радиусом основания $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если $\rho = 900$ кг/м^3

1670. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено ниже вершины, если радиус основания равен r и высота равна h.

1671. Из цилиндрической цистерны выкачивают жидкость. Какая работа совершается при этом, если длина цистерны равна a, а диаметр равен d?

1672. С помощью каната подъемным краном из воды поднимают камень конической формы. Найти работу, совершаемую при полном извлечении камня из воды, если вершина конуса находилась на поверхности воды. Радиус основания конуса 1 м, высота 3 м, плотность 2500 кг/м^3

Здесь $P(y) = 14\,700 + \frac{9800}{27}\pi y^3$, где P выражается в ньютонах.

1673. Чугунный прямой конус высотой 0,4 м и радиусом основания 0,4 м находится на дне бассейна, наполненного до краев нефтяным маслом. Найти работу, которую надо совершить при извлечении этого конуса из бассейна, если плотность чугуна $\rho_1 = 7220$ кг/м^3, а плотность нефтяного масла $\rho_2 = 890$ кг/м^3

Здесь $P(y)$ равна весу конуса без веса нефтяного масла, вытесненного частью конуса, т.е. $P(y) = \frac{1}{3}\pi\ 0{,}4^3\rho_1 g - \left(\frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}4^3 - \frac{1}{3}\pi y^3\right)\rho_2 g$, где P выражается в ньютонах.

1674. Цилиндрический баллон диаметром 0,24 м и длиной 0,8 м наполнен газом под давлением 2 кПа. Какую работу надо совершить при изотермическом сжатии газа до объема, в 2 раза меньшего?

1675. В жидкость с плотностью ρ погружена треугольная пластинка вершиной вверх. Найти силу давления жидкости на пластинку, если основание треугольника равно a, высота равна h. Вершина треугольника расположена на поверхности жидкости.

1676. Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h = 4$ м и радиусом основания $r = 2$ м ($\rho = 900$ кг/м^3), на стенки бака на каждом метре глубины.

1677. В жидкость с плотностью ρ погружена круглая пластинка диаметром d, касающаяся поверхности жидкости. Найти силу давления жидкости на пластинку.

Составляя соответствующие интегральные суммы и переходя к пределу, решить следующие задачи:

1678. Найти массу стержня длины 1 м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\delta = 20x + 0{,}15x^2$, где x — расстояние от одного из концов стержня, в м; δ — в кг/м.

1679. Скорость точки меняется по закону $v = 100+8t$ (где v выражается в м/с). Какой путь пройдет эта точка за промежуток времени $[0; 10]$?

1680. Точка движется по оси Ox, начиная от точки $M(1; 0)$, так, что скорость ее равна абсциссе. Где она будет через 10 с от начала движения?

1681. Скорость точки изменяется по закону $v = 2(6 - t)$ (где v выражается в м/с). Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

§ 10

Некоторые сведения о гиперболических функциях

1. Гиперболические функции. *Гиперболическими функциями* называют функции, определяемые следующими равенствами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — \textit{гиперболический синус},}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — \textit{гиперболический косинус},}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ — \textit{гиперболический тангенс},}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ — \textit{гиперболический котангенс}.}$$

Гиперболический косинус является четной функцией, т.е. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, а гиперболические синус, тангенс и котангенс — нечетными функциями: $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$.

Отметим некоторые важные соотношения для гиперболических функций: $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1$.

Графики гиперболических функций $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{th} x$ изображены соответственно на рис. 54—56.

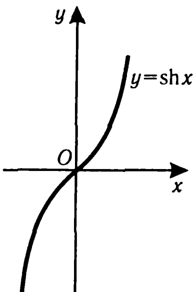

Рис. 54

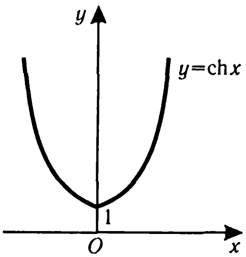

Рис. 55

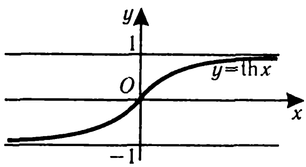

Рис. 56

График гиперболического косинуса называют *цепной линией*. Цепная линия является линией провисания тяжелой нити, подвешенной в двух точках.

Производные гиперболических функций находят по формулам

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

При интегрировании гиперболических функций используют формулы

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C,\qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,\qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

2. Обратные гиперболические функции. Для гиперболических функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ *обратные гиперболические функции* определяют с помощью следующих формул:

$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $(-\infty < x < +\infty)$ — *гиперболический ареа-синус*,

$\operatorname{arch} x = \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1})$ $(x \geqslant 1)$ — *гиперболический ареа-косинус*,

$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$ — *гиперболический ареа-тангенс*,

$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ $(|x| > 1)$ — *гиперболический ареа-котангенс.*

Производные обратных гиперболических функций находят по формулам

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\qquad (\operatorname{arch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$
$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2},\qquad (\operatorname{arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1}.$$

Обратные гиперболические и обратные тригонометрические функции связаны между собой следующими соотношениями (в комплексной плоскости):

$$\operatorname{arsh} x = -i\arcsin xi;\qquad \operatorname{arch} x = i\arccos x,$$
$$\operatorname{arth} x = -i\operatorname{arctg} xi;\qquad \operatorname{arcth} x = i\operatorname{arcctg} xi.$$

1682. Доказать справедливость равенства

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a.$$

❑ По определению гиперболического синуса имеем

$$\operatorname{sh}(x+a) = \frac{e^{x+a} - e^{-(x+a)}}{2} = \frac{e^x\cdot e^a - e^{-x}\cdot e^{-a}}{2}.$$

Так как $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$, $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$, $e^a = \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a$, $e^{-a} = \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a$, то

$$\operatorname{sh}(x+a) = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a) - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} a - \operatorname{sh} a)}{2}.$$

Выполнив алгебраические преобразования, получим

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a. \quad ■$$

1683. Выразить $\operatorname{ch}(x+a)$ через гиперболические функции аргументов x и a.

❑ Продифференцировав по x равенство

$$\operatorname{sh}(x+a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a,$$

находим

$$\operatorname{ch}(x+a) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} a + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} a. \quad ■$$

1684. Выразить гиперболические функции $\operatorname{ch} xi$ и $\operatorname{sh} xi$ мнимого аргумента через $\sin x$ и $\cos x$.

❑ Находим

$$\operatorname{sh} xi = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i\,\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = i \sin x, \quad \operatorname{ch} xi = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \cos x.$$

Итак, $\sin xi = i \sin x$, $\operatorname{ch} xi = \cos x$. ■

1685. Выразить тригонометрические функции $\sin xi$ и $\cos xi$ мнимого аргумента через $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

❑ Подставив в формулы $\operatorname{sh} xi = i \sin x$ и $\operatorname{ch} xi = \cos x$ (см. задачу 1684) xi вместо x, получим $\operatorname{sh} xi^2 = i \sin xi$, $\operatorname{ch} xi^2 = \cos xi$, т.е. $\sin xi = \dfrac{\operatorname{sh}(-x)}{i} = i \operatorname{sh} x$, $\cos xi = \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Итак, $\sin xi = i \operatorname{sh} x$, $\cos xi = \operatorname{ch} x$. ■

1686. Какая линия определяется параметрическими уравнениями $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$ при $a > 0$?

❑ Исключим из этих уравнений t, для чего из x^2 вычтем y^2:

$$x^2 - y^2 = a^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t), \quad \text{т.е. } x^2 - y^2 = a^2.$$

Кривая $x^2 - y^2 = a^2$ является равносторонней гиперболой, асимптотами которой служат прямые $y = \pm x$. Данная кривая есть правая ветвь этой гиперболы, так как $x = a \operatorname{ch} t > 0$ при любом t (рис. 57). ■

1687. Точка M лежит на правой ветви равносторонней гиперболы $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$. Из точки M опущен перпендикуляр MN на ось абсцисс и эта же точка соединена отрезком OM с началом координат. Из вершины A гиперболы восставлен перпендикуляр AK до пересечения в точке K с отрезком OM (рис. 58). Доказать, что $\dfrac{NM}{a} = \operatorname{sh} t$, $\dfrac{ON}{a} = \operatorname{ch} t$, $\dfrac{AK}{a} = \operatorname{th} t$.

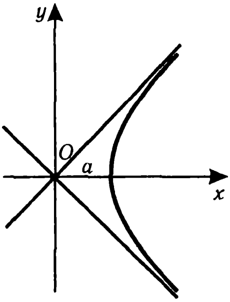

Рис. 57

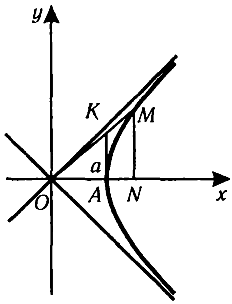

Рис. 58

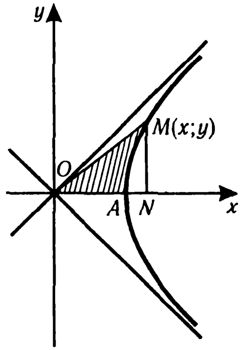

Рис. 59

❑ Имеем

$$\frac{NM}{a} = \frac{y}{a} = \operatorname{sh} t, \quad \frac{ON}{a} = \frac{x}{a} = \operatorname{ch} t, \quad \frac{AK}{a} = \frac{NM}{ON} = \frac{NM : a}{ON : a} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{th} t. \quad ■$$

1688. Точка M лежит на правой ветви равносторонней гиперболы $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$. Вычислить площадь гиперболического сектора, ограниченного ветвью гиперболы, осью абсцисс и отрезком OM (рис. 59).

❑ Имеем $S = S_{ONM} - S_{ANM} = \frac{1}{2}xy - \int\limits_a^x y\,dx$. Так как $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$, то $dx = a\operatorname{sh} t\,dt$, откуда

$$S = \frac{1}{2}a^2\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{sh} t - a^2\int\limits_0^t \operatorname{sh}^2 t\,dt = \frac{1}{2}a^2\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t - \frac{a^2}{2}\int\limits_0^t(\operatorname{ch} 2t - 1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}a^2\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{4}a^2\operatorname{sh} 2t + \frac{a^2}{2}t = \frac{a^2 t}{2}.$$

Значит, $t = \frac{2S}{a^2}$. Итак, аргумент t гиперболических функций можно рассматривать как частное от деления удвоенной площади гиперболического сектора OAM на квадрат действительной полуоси. ■

1689. Найти производные функций:

1) $y = \ln(\operatorname{ch} x + \sqrt{\operatorname{ch}^2 x + 1})$; 2) $y = 7\operatorname{sh}^5\frac{x}{35} + 5\operatorname{sh}^7\frac{x}{35}$;

3) $y = 2\operatorname{arctg}\operatorname{th}\frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{th} x - \frac{2}{3}\operatorname{th}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x$;

5) $y = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\operatorname{sh} x}$; 6) $y = \ln\operatorname{th}\frac{x^2}{4}$.

1690. В какой точке цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ касательная образует с осью абсцисс угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$?

1691. Исследовать на экстремум функцию $y = \operatorname{ch}\frac{x}{2} - 1$.

1692. Найти: 1) $\int x^2\operatorname{ch} x\,dx$; 2) $\int \operatorname{sh}^4 x\,dx$; 3) $\int\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}\,dx$;

4) $\int \operatorname{sh} x\sin x\,dx$; 5) $\int\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^3\frac{x}{2}}\,dx$; 6) $\int\operatorname{sh}^3\frac{x}{3}\operatorname{ch}^2\frac{x}{3}\,dx$.

1693. Вычислить определенные интегралы:

$$1)\ \int\limits_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{sh}^2 x}};\quad 2)\ \int\limits_0^{\ln 2} \operatorname{th}^2 x\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{\ln 3} x\operatorname{ch} x\,dx.$$

1694. Выразить $\operatorname{sh}(x-a)$ и $\operatorname{ch}(x-a)$ через гиперболические функции аргументов x и a.

1695. Выразить $\operatorname{sh} 2x$ и $\operatorname{ch} 2x$ через $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

1696. Выразить $\operatorname{ch}^2 x$ и $\operatorname{sh}^2 x$ через $\operatorname{ch} 2x$.

1697. Выразить $\operatorname{th}(x+a)$ и $\operatorname{th}(x-a)$ через $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{th} a$. Найти $\operatorname{th} 2x$.

1698. Выразить через $\operatorname{ch} x$ гиперболические функции половинного аргумента $\operatorname{sh}\frac{x}{2}$, $\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ и $\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

1699. Привести к виду, удобному для логарифмирования, выражения $\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{ch} y$, $\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y$.

1700. Выразить $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ через $\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

1701. Представить произведения гиперболических функций $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$ в виде сумм.

1702. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \operatorname{sh} x$ и прямыми $x = \ln 5$, $y = 0$.

1703. Найти длину дуги кривой $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, заключенной между прямыми $x = 0$, $x = a$.

1704. На кривой $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$ даны точки M и N, соответствующие значениям $t = t_1$ и $t = t_2$ $(t_1 < t_2)$. Вычислить площадь сектора OMN.

1705. Какая линия определяется уравнениями $x = \frac{a}{\operatorname{ch} t}$, $y = b\operatorname{th} t$, если $a > 0$, $b > 0$?

1706. Какая линия определяется уравнениями $x = \operatorname{ch}^2 t$, $y = \operatorname{sh}^2 t$?

1707. Дано $\sin\alpha = \operatorname{th} t$. Выразить $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ через t.

1708. Упростить выражение

$$(\cos x \operatorname{ch} y + i\sin x \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \operatorname{sh} y + i\sin x \operatorname{ch} y)^2$$

1709. Упростить выражение $(x\operatorname{ch} t + y\operatorname{sh} t)^2 - (x\operatorname{sh} t + y\operatorname{ch} t)^2$

1710. Доказать тождества:

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx;$$

$$\operatorname{ch} nx = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n + (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2};\quad \operatorname{sh} nx = \frac{(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n - (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)^n}{2}.$$

1711. Используя равенства $\operatorname{sh}^n x = \frac{(e^x - e^{-x})^n}{2^n}$; $\operatorname{ch}^n x = \frac{(e^x + e^{-x})^n}{2^n}$, доказать, что

$$\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4}\operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4}\operatorname{ch} x,\quad \operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16}\operatorname{sh} 5x - \frac{5}{16}\operatorname{sh} 3x + \frac{5}{8}\operatorname{sh} x.$$

Глава XI

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1

Линейные неравенства и область решений системы линейных неравенств

Пусть задано линейное неравенство с двумя переменными x_1 и x_2:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geqslant 0. \tag{1}$$

Если величины x_1 и x_2 рассматривать как координаты точки плоскости, то совокупность точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству (1), называют *областью решений* данного неравенства. Областью решений неравенства (1) является полуплоскость.

Для того чтобы установить, какая из двух полуплоскостей соответствует неравенству (1), достаточно привести это неравенство к виду $x_2 \geqslant kx_1 + l$ или к виду $x_2 \leqslant kx_1 + l$. В первом случае искомая полуплоскость лежит выше прямой $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, во втором — ниже ее. Если же $a_2 = 0$, то неравенство приводится к одному из видов $x_1 \geqslant h$ или $x_1 \leqslant h$, т.е. полуплоскость лежит справа или слева от прямой $x_1 = h$.

В случае же, когда задана система неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geqslant 0, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

где m — конечное число, получается пересечение конечного числа полуплоскостей, образующее многоугольную область D. Область D называют *областью решений* системы неравенств (2). Эта область не всегда бывает ограничена, она может быть и неограниченной и даже пустой. Последний случай имеет место тогда, когда система неравенств (2) противоречива. Возможны также случаи лишних неравенств, входящих в совместную систему и определяющих прямые, не имеющие с областью D общих точек. Такие неравенства можно исключить.

Область решений обладает важным свойством - она является *выпуклой*, т.е. вместе с любыми своими двумя точками содержит и весь соединяющий их отрезок. Прямую, которая имеет с областью по крайней мере одну общую точку, притом так, что вся область лежит по одну сторону от этой прямой, называют *опорной* по отношению к этой области.

Аналогично истолковывается геометрически и система неравенств с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2 \geqslant 0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + b_m \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь каждое из неравенств выполняется для одного из полупространств, на которые разбивает все пространство соответствующая плоскость. Система неравенств (3) представляет собой пересечение полупространств, т.е. многогранную область решений системы неравенств.

1712. Найти полуплоскость, определяемую неравенством $2x_1+3x_2-12\leqslant 0$.

❑ Заменив знак неравенства на знак строгого равенства, получим уравнение прямой $2x_1 + 3x_2 - 12 = 0$, или $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$ (рис. 60). Приведем данное неравенство к виду $x_2 \leqslant -\frac{2}{3}x_1 + 4$. Следовательно, искомая полуплоскость расположена ниже прямой $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$. ■

1713. Какую полуплоскость определяет неравенство $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$?

❑ Заменив знак неравенства на знак строгого равенства, получим уравнение прямой $2x_1 - 3x_2 = 0$, или $x_2 = \frac{2}{3}x_1$, проходящей через начало координат. Из неравенства $2x_1 - 3x_2 \geqslant 0$, т.е. $x_2 < \frac{2}{3}x_1$, вытекает, что искомая полуплоскость расположена ниже прямой $x_2 = \frac{2}{3}x_1$ (рис. 61). ■

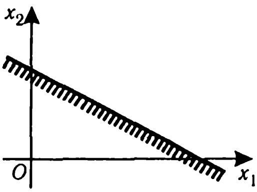

Рис. 60

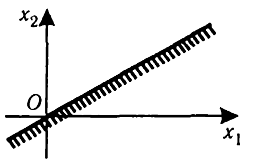

Рис. 61

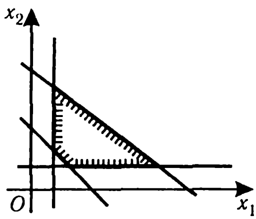

Рис. 62

Найти области решений заданных систем неравенств:

1714. $x_1 - 1 \geqslant 0$, $x_2 - 1 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 - 3 \geqslant 0$, $-6x_1 - 7x_2 + 42 \geqslant 0$.

❑ Заменив знаки неравенств на знаки строгих равенств, получим уравнения четырех прямых: $x_1 - 1 = 0$, $x_2 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 3 = 0$ и $6x_1 + 7x_2 - 42 = 0$, изображенных на рис. 62. Приведем данные неравенства к виду $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 \geqslant -x_1 + 3$, $x_2 \leqslant -\frac{6}{7}x_1 + 6$. Штриховка показывает те из полуплоскостей, которые служат областями решений соответствующих неравенств. Областью решений системы неравенств является выпуклый четырехугольник. ■

1715. $x_1 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0,\ x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0,\ x_1 \leqslant 2.$

❑ Заменив знаки неравенств на знаки строгих равенств, получим уравнения четырех прямых: $x_1 = 0,\ x_1 + x_2 - 2 = 0,\ x_1 - x_2 + 1 = 0,\ x_1 = 2$, изображенных на рис. 63. Приведем данные неравенства к виду $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant -x_1 + 2,\ x_2 \geqslant x_1 + 1,\ x_1 \leqslant 2$. Областью решений системы неравенств является неограниченная выпуклая фигура. ■

1716. $x_1 \geqslant 2,\ x_1 + 3x_2 \leqslant 3,\ x_1 - x_2 + 1 \leqslant 0.$

❑ Построим соответствующие прямые. Из рис. 64 видно, что не существует *ни одной* точки, общей для всех трех полуплоскостей. Это означает, что область решений «пустая» и заданная система неравенств несовместна. ■

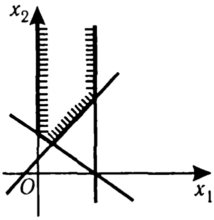

Рис. 63

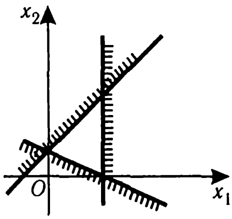

Рис. 64

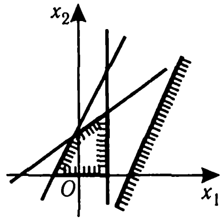

Рис. 65

1717. $2x_1 - x_2 \geqslant -2,\ x_1 - x_2 \geqslant -2,\ x_1 \leqslant 1,\ 2x_1 - x_2 \geqslant 3.$

❑ Эта система неравенств не имеет решений. Геометрически это означает, что не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяют всем неравенствам данной задачи (рис. 65). ■

1718. $3x_1 - x_2 \geqslant 0$ (а), $x_1 - x_2 \leqslant 0$ (б), $2x_1 + x_2 \leqslant 6$ (в), $x_1 \leqslant 2$ (г), $3x_1 - x_2 \geqslant -4$ (д).

❑ Пяти заданным неравенствам соответствует множество точек плоскости, образующее треугольник AOB (рис. 66). Неравенства (г) и (д) можно исключить, так как неравенство (д) определяет граничную прямую, не имеющую с треугольником AOB общих точек, а прямая, определяемая неравенством (г), имеет одну общую точку с треугольником и является опорной. ■

1719. $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 - 1 \leqslant 0,\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant 0.$

❑ Заменив знаки неравенств на знаки строгих равенств, получим уравнения плоскостей $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_1 + x_2 - 1 = 0,\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0,$

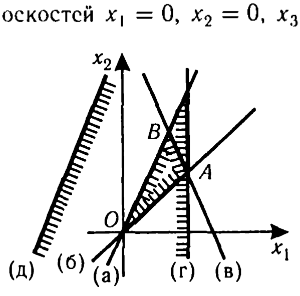

Рис. 66

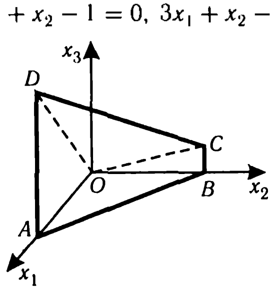

Рис. 67

которые изображены на рис. 67 Областью решений системы неравенств служит выпуклый четырехгранник $ABOCD$. ■

1720. Как расположена полуплоскость, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $x_1 - x_2 - 10 \geqslant 0$?

Найти области решений систем неравенств:

1721. $x_1 + x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 - x_2 - 5 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 7$.

1722. $x_1 - 5x_2 + 5 \geqslant 0$, $x_1 + 3x_2 - 3 \leqslant 0$, $x_1 \leqslant 5$.

1723. $x_1 \geqslant 3$, $x_2 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 \leqslant 0$.

1724. $x_1 - x_2 + 1 \geqslant 0$, $2x_1 + x_2 - 7 \geqslant 0$, $x_1 - 2x_2 + 4 \geqslant 0$.

1725. $x_2 \geqslant 0$ (а), $4x_1 - x_2 \geqslant 0$ (б), $x_2 \leqslant 6$ (в), $4x_1 + x_2 \leqslant 40$ (г), $x_1 - x_2 + 8 \geqslant 0$ (д).

1726. $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $x_3 \geqslant 0$, $x_1 + x_2 + x_3 - 5 \leqslant 0$.

1727. $x_1 \leqslant 4$, $2x_2 - x_3 \geqslant 0$, $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

§ 2

Основная задача линейного программирования

Задача линейного программирования заключается в изучении способов отыскания наибольшего или наименьшего значений линейной функции при наличии линейных ограничений.

Функцию, наибольшее или наименьшее значение которой отыскивается, называют *целевой функцией*, а совокупность значений переменных, при которых достигается наибольшее или наименьшее значение, определяет так называемый *оптимальный план*. Всякая же другая совокупность значений, удовлетворяющая ограничениям, определяет *допустимый план* (*решение*).

Пусть ограничения заданы совместной системой m линейных неравенств с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{cases}$$

Среди неотрицательных решений этой системы требуется найти такое решение при котором линейная (целевая) функция

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0$$

принимает наибольшее (наименьшее) значение или, как говорят, максимизировать (минимизировать) линейную форму L.

Покажем, как решается указанная задача геометрическим методом, для чего ограничимся рассмотрением совместной системы линейных неравенств с двумя и тремя переменными. Пусть, кроме того, задана линейная функция $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$. Найдем среди множества точек $(x_1; x_2)$ из области решений совместной системы неравенств такие, которые придают заданной линейной функции наименьшее (наибольшее) значение. Для каждой точки плоскости функция L принимает фиксированное значение $L = L_1$. Множество всех таких точек есть прямая $c_1x_1 + c_2x_2 + c_0 = L_1$, перпендикулярная вектору $C(c_1; c_2)$, выходящему из начала координат. Если эту прямую передвигать параллельно самой себе в положительном направлении вектора C, то линейная функция $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ будет возрастать, а в противоположном направлении — убывать. Пусть при движении прямой L в положительном направлении вектора C она впервые встретится с многоугольником решений в его вершине, тогда в этом положении L_1 прямая L становится опорной, и на этой прямой функция L принимает наименьшее значение. При дальнейшем движении в том же направлении (положительном) прямая L пройдет через другую вершину многоугольника решений, выходя из области решений, и станет также опорной прямой L_2; на ней функция L принимает наибольшее значение среди всех значений, принимаемых на многоугольнике решений.

Таким образом, минимизация и максимизация линейной функции $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_0$ на многоугольнике решений достигаются в точках пересечения этого многоугольника с опорными прямыми, перпендикулярными вектору $C(c_1; c_2)$. Опорная прямая может иметь с многоугольником решений либо одну общую точку (вершину многоугольника), либо бесконечное множество точек (это множество есть сторона многоугольника).

Аналогично линейная функция трех переменных $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_0$ принимает постоянное значение для точек плоскости, перпендикулярной вектору $C(c_1; c_2; c_3)$. Наименьшее и наибольшее значения этой функции на многограннике решений достигаются в точках пересечения этого многогранника с опорными плоскостями, перпендикулярными вектору $C(c_1; c_2; c_3)$. Опорная плоскость может иметь с многогранником решений либо одну общую точку (вершину многогранника), либо бесконечное множество точек (это множество есть ребро или грань многогранника).

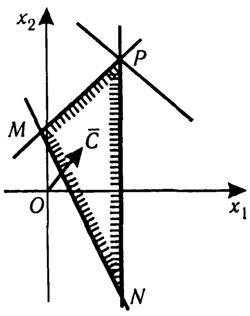

Рис. 68

1728. Максимизировать линейную форму $L = 2x_1 + 2x_2$ при ограничениях $3x_1 - 2x_2 \geqslant -6$, $3x_1 + x_2 \geqslant 3$, $x_1 \leqslant 3$.

❑ Заменив знаки неравенств на знаки строгих равенств, построим область решений по уравнениям прямых $3x_1 - 2x_2 + 6 = 0$, $3x_1 + x_2 - 3 = 0$, $x_1 = 3$ (рис. 68).

Областью решений неравенств является треугольник MNP. Построим вектор $C(2; 2)$. Тогда опорная прямая при выходе из треугольника решений пройдет через точку $P(3; \frac{15}{2})$, а потому в точке P линейная функция $L = 2x_1 + 2x_2$ принимает наибольшее значение, причем $L_{max} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{15}{2} = 21$. ■

1729. Минимизировать линейную функцию $L = 12x_1 + 4x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $x_1 \geqslant 0{,}5$, $x_2 \leqslant 4$, $x_1 - x_2 \leqslant 0$.

❑ Заменив знаки неравенств на знаки строгих равенств, построим область решений, ограниченную прямыми $x_1+x_2=2$, $x_1=0{,}5$, $x_2=4$, $x_1-x_2=0$. Область решений — многоугольник $MNPQ$ (рис. 69). Строим вектор $C(12; 4)$. Опорная прямая проходит через точку $M(0{,}5; 1{,}5)$ — это первая точка пересечения многоугольника решений с прямой L при перемещении этой прямой в положительном направлении вектора C. В точке M линейная функция $L = 12x_1 + 4x_2$ принимает наименьшее значение $L_{\min} = 12 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1{,}5 = 12$. ■

1730. Найти наибольшее значение функции $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ при ограничениях $x_2 + x_3 \leqslant 3$, $x_1 - x_2 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 1$, $3x_1 + x_2 \leqslant 15$.

❑ Построим область решений системы неравенств по уравнениям плоскостей $x_2+x_3 = 3$, $x_1 - x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $3x_1 + x_2 = 15$. Областью решений является многогранник $MNPQRS$ (рис. 70).

Построим вектор $C(1; 3; 3)$. При перемещении опорной плоскости в положительном направлении вектора C она выйдет из многогранника решений в точке $N(4; 3; 0)$. Поэтому в точке N линейная функция $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3$ примет наибольшее значение, т.е. $L_{\max} = 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 13$. ■

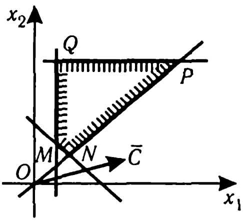

Рис. 69

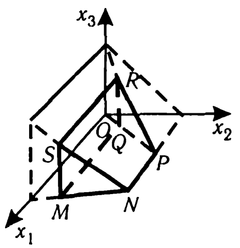

Рис. 70

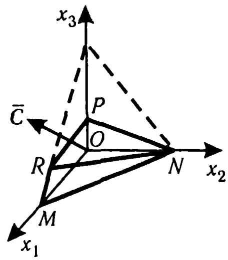

Рис. 71

1731. Найти наибольшее значение функции $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ при ограничениях $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leqslant 8$.

❑ Построим область решений системы линейных неравенств, взяв плоскости $3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$, $x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Эта область есть многогранник $MNOPR$ (рис. 71). Построим вектор $C(3; -6; 2)$. При перемещении опорной плоскости в положительном направлении вектора C она выйдет из многогранника решений в точках ребра MR. Следовательно, наибольшее значение данной функции принимается в точках отрезка MR. Убеждаемся в этом, подставив координаты точек $M(2; 0; 0)$ и $R(\frac{16}{11}; 0; \frac{9}{11})$ в линейную форму L; получим $L(M) = 6$, $L(R) = 6$. ■

1732. Найти наибольшее значение функции $L = x_1 + 3x_2$ при ограничениях $x_1 + 4x_2 \geqslant 4$, $x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_2 \leqslant 2$.

1733. Минимизировать функцию $L = x_1 - x_2$ при ограничениях $3 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 7$, $1 \leqslant x_2 \leqslant 4$, $x_1 \leqslant 4$.

1734. Найти наибольшее значение функции $L = 3x_1 - 4x_2$ при ограничениях $x_1 - 2x_2 \geqslant 6$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 0$, $x_1 \leqslant 6$.

1735. Найти наибольшее значение функции $L = -x_1 + 2x_2$ при ограничениях $x_1 - 8x_2 \leqslant 10$, $x_1 + x_2 \geqslant 1$, $x_1 - 5x_2 \geqslant -5$, $3x_1 + 10x_2 \leqslant 30$.

1736. Найти наибольшее значение функции $L = 8x_1 - 2x_2$ при ограничениях $3x_1 + 4x_2 \geqslant 18$, $3x_1 - x_2 \geqslant 3$, $x_2 \leqslant 6$, $2x_1 + x_2 \leqslant 18$, $4x_1 - x_2 \leqslant 24$.

1737. Минимизировать линейную форму $L = -2x_1 - x_2 + 3x_3$ при ограничениях $x_1 + x_2 \geqslant 2$, $3x_1 + x_2 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

1738. Найти наибольшее значение функции $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leqslant 3$, $x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 0$, $3x_1 + 3x_2 - x_3 \geqslant 0$.

1739. Найти наибольшее значение функции $L = 10x_1 + x_3$ при ограничениях $3x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6$, $3x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 6$, $x_3 \leqslant 3$.

§ 3

Симплекс-метод

1. Понятие о симплекс-методе. Решение основной задачи линейного программирования геометрическим методом является наглядным в случае двух и даже трех переменных. Для случая же большего числа переменных геометрический метод становится невозможным. Так называемый *симплекс-метод* принадлежит к числу аналитических методов решения основной задачи линейного программирования. Система ограничений в вычислительных методах обычно задается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

и среди неотрицательных решений системы уравнений (1) надо найти такие, которые максимизировали бы линейную функцию

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_0.$$

Выразим $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \leqslant m)$ через остальные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{1n}x_n + b'_1, \\ x_2 = a'_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{2n}x_n + b'_2, \\ \\ x_r = a'_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n + b'_r, \end{cases} \tag{2}$$

где $b'_1 \geqslant 0$, $b'_2 \geqslant 0$, $\quad b'_r \geqslant 0$. Если ограничительные условия заданы неравенствами, то их можно преобразовать в равенства введением новых неотрицательных переменных, так называемых *балансовых* (выравнивающих). Например, в неравенстве $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$ достаточно добавить к левой части некоторую величину $x_{n+1} \geqslant 0$ и получится равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b.$$

Ограничительные условия могут быть заданы и смешанным образом, т.е. неравенствами и уравнениями, тогда указанным способом их можно свести только к уравнениям. Переменные (неизвестные) $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называют ***базисными***, а весь набор $\{x_1; x_2; \ldots; x_r\}$ — ***базисом***, остальные переменные называют ***свободными***, систему ограничений (2) называют ***системой, приведенной к единичному базису***. Подставляя в линейную форму L вместо базисных переменных их выражения через свободные из системы (2), получим

$$L = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_nx_n.$$

Теперь, полагая все свободные переменные равными нулю, найдем значения базисных переменных: $x_1 = b_1'$, $x_2 = b_2'$, $x_r = b_r'$. Таким образом, решение $(b_1'; b_2'; \ldots; b_r'; 0; \ldots; 0)$ системы является допустимым — его называют ***базисным***. Для полученного базисного решения значение линейной формы $L_Б = \gamma_0$. Решение задачи с помощью симплекс-метода распадается на ряд шагов, заключающихся в том, что от данного базиса Б мы переходим к другому базису Б$'$ с таким расчетом, чтобы значение $L_Б$ уменьшалось или, по крайней мере, не увеличивалось, т.е. $L_{Б'} \leqslant L_Б$.

Идею метода проследим на конкретных примерах.

1740. Максимизировать линейную форму $L = -x_4 + x_5$ при ограничениях $x_1 + x_4 - 2x_5 = 1$, $x_2 - 2x_4 + x_5 = 2$, $x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$.

❑ Данная система уравнений-ограничений совместна, так как ранги матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

совпадают и равны 3. Следовательно, система уравнений совместна и три переменные (базисные) можно линейно выразить через две свободные переменные. Выразим, например x_1, x_2 и x_3 через x_4 и x_4, т.е. приведем систему к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases} \qquad (*)$$

Линейную форму $L = -x_4 + x_5$ выразим через свободные переменные x_4 и x_5 (в данном примере L уже выражена через x_4 и x_5). Теперь при $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ найдем значения базисных переменных: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Поэтому первое допустимое решение системы уравнений есть $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, или $(1; 2; 3; 0; 0)$. При найденном допустимом решении линейная форма L имеет значение 0, т.е. $L_1 = 0$.

Теперь попытаемся увеличить значение L_1; увеличение x_4 уменьшит L_1, так как коэффициент при x_4 отрицателен, а увеличение x_5 дает увеличение и L_1 Поэтому увеличим x_5 так, чтобы x_1, x_2, x_3 не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Из второго уравнения системы $(*)$ следует, что x_5 можно увеличить до 2. Таким образом, получаем следующие значения переменных: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 2$, или $(5; 0; 1; 0; 2)$.

Значение линейной формы L при этом допустимом решении равно $L_2 = 2$, т.е. при втором шаге оно увеличилось.

Далее примем за свободные переменные x_2 и x_4, т.е. именно те переменные, которые в новом решении имеют нулевые значения. Для этого из второго уравнения системы $(*)$ выразим x_5 через x_2 и x_4; получим $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$. Тогда придем к системе

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4, \end{cases} \qquad (**)$$
$$L = 2 - x_2 + x_4.$$

Для увеличения значения L будем увеличивать x_4. Из второго уравнения системы $(**)$ видно, что при условии неотрицательности x_3 значение x_4 можно довести до $x_4 = 0{,}2$. При этом условии новое допустимое решение есть $x_1 = 5{,}6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0{,}2$, $x_5 = 2{,}4$, или $(5{,}6; 0; 0; 0{,}2; 2{,}4)$. Значение линейной формы при этом есть $L_3 = 2{,}2$.

Выразим теперь x_1, x_4, x_5 через свободные переменные x_2 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 5{,}6 - 1{,}4x_2 - 0{,}6x_3, \\ x_4 = 0{,}2 + 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3, \\ x_5 = 2{,}4 - 0{,}6x_2 - 0{,}4x_3, \end{cases}$$
$$L = 2{,}2 - 0{,}8x_2 - 0{,}2x_3.$$

Так как в последней линейной форме обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, то наибольшее значение L достигается при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Это означает, что решение $(5{,}6; 0; 0; 0{,}2; 2{,}4)$ является оптимальным и $L_{max} = 2{,}2$. ■

1741. Максимизировать линейную форму $L = x_2 + x_3$ при ограничениях $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$.

❑ Система уравнений-ограничений совместна, так как ранги матрицы системы уравнений и расширенной матрицы одинаковы и равны 2. Следовательно, две базисные переменные можно выразить линейно через другие две свободные. Примем за свободные переменные x_2 и x_3. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - x_3, \\ x_4 = 2 - x_2 + 2x_3, \end{cases}$$
$$L = x_2 + x_3.$$

При $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ базисные переменные $x_1 = 1$, $x_4 = 2$, т.е. имеем первое допустимое решение $(1; 0; 0; 2)$ и $L_1 = 0$. Увеличение L можно осуществить при увеличении x_3 до 1. Тогда при $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ значения базисных переменных $x_1 = 0$, $x_4 = 4$. Новое допустимое решение $(0; 0; 1; 4)$ и $L_2 = 1$.

Выразим теперь x_3 и x_4 через x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_1 + x_2, \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_2, \end{cases}$$
$$L = 1 - x_1 + x_2.$$

Увеличение L возможно при увеличении x_2. Увеличение же x_2 не ограничено, судя по последней системе уравнений. Таким образом, L будет принимать все большие положительные значения, т.е. $L_{\max} = +\infty$. Итак, форма L не ограничена сверху, а потому оптимального решения не существует. ■

1742. Задана система ограничений: $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3$, $x_2 + 2x_4 = 1$ и линейная форма $L = 5x_1 - x_3$. Найти оптимальное решение, минимизирующее линейную форму.

❑ Эту задачу можно было бы свести к задаче нахождения максимума функции $L_1 = -L$, т.е. $L_1 = -5x_1 + x_3$, но это не обязательно. Рассуждая аналогично предыдущему, ее можно решить, не сводя к максимизации. Данная система уравнений совместна, так как ранги матрицы системы и расширенной матрицы одинаковы и равны 2. Следовательно, систему уравнений можно, например, переписать так:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 + 3x_4, \\ x_2 = 1 - 2x_4, \end{cases}$$
$$L = 10 - 11x_3 + 15x_4.$$

Здесь за базисные переменные приняты x_1 и x_2, а за свободные x_3 и x_4. При $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$ первое базисное решение есть $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, или $(2; 1; 0; 0)$, а $L_1 = 10$. Уменьшение линейной формы L вызывается увеличением x_3, так как перед x_3 в форме L находится отрицательный коэффициент, причем увеличение x_3 возможно только до 1, а значение $x_4 = 0$ остается. Если примем $x_3 = 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, или $(0; 1; 1; 0)$ — второе базисное решение, при котором $L_2 = -1$.

Выразим x_2 и x_3 через новые свободные переменные x_1 и x_4:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - 2x_4, \\ x_3 = 1 - 0{,}5x_1 + 1{,}5x_4, \end{cases}$$
$$L = -1 + 5{,}5x_1 - 1{,}5x_4.$$

Теперь уменьшение значения формы L зависит от увеличения x_4 до $x_4 = 0{,}5$ (при этом x_2 неотрицательно), а значение $x_1 = 0$ остается. В этом случае имеем новое допустимое решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1{,}75$, $x_4 = 0{,}5$, или $(0; 0; 1{,}75; 0{,}5)$, при котором $L = -1{,}75$.

Выразим x_3 и x_4 через свободные переменные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 1{,}75 - 0{,}5x_1 - 0{,}75x_2, \\ x_4 = 0{,}5 - 0{,}5x_2, \end{cases}$$
$$L = -1{,}75 + 5{,}5x_1 + 0{,}75x_2.$$

Так как дальнейшее уменьшение значения формы L невозможно вследствие положительности коэффициентов при x_1 и x_2, то допустимое решение задачи $(0; 0; 1{,}75; 0{,}5)$ является оптимальным. Наименьшее значение L равно $-1{,}75$. ■

1743. Максимизировать линейную форму $L = 2x_1 - x_4$ при следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geqslant 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 8. \end{cases}$$

❑ Так как задана смешанная система ограничений, то приведем ее к системе уравнений, введя новую неотрицательную переменную x_5 в левую часть второго условия с отрицательным коэффициентом, а x_6 — в третье условие с положительным коэффициентом. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20, \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 8. \end{cases}$$

Приведем эту систему к единичному базису, выбрав за базисные переменные x_1, x_2, x_3 (в силу того, что ранг матрицы системы равен 3):

$$x_1 = 15 + 2x_4 - x_5, \quad x_2 = 5 - 2x_4 + x_5, \quad x_3 = 28 - x_6. \qquad (*)$$

Тогда линейная форма примет вид $L = 30 + 3x_4 - 2x_5$. При $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ базисные переменные имеют значения $x_1 = 15$, $x_2 = 5$, $x_3 = 28$, т.е. первое допустимое решение $(15; 5; 28; 0; 0; 0)$; при этом $L_1 = 30$.

Для того чтобы значение L увеличилось, необходимо увеличивать x_4, так как эта переменная входит в выражение для L с положительным коэффициентом. Увеличение же x_4 возможно до $x_4 = 2{,}5$ — это видно из второго условия системы ограничений $(*)$. При $x_4 = 2{,}5$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ значения других переменных таковы: $x_1 = 20$, $x_2 = 0$, $x_3 = 28$, т.е. получим второе допустимое решение $(20; 0; 28; 2{,}5; 0; 0)$, и линейная функция L примет вид $L = 37{,}5 - 1{,}5x_2 - 0{,}5x_5$, а при втором допустимом решении ее значение равно $L_2 = 37{,}5$.

Теперь, поскольку коэффициенты при переменных в L отрицательны, увеличение значения L невозможно. Следовательно, $L_{max} = 37{,}5$. ■

1744. Для изготовления изделий двух видов имеется 100 кг металла. На изготовление одного изделия I вида расходуется 2 кг металла, а изделия II вида — 4 кг. Составить план производства, обеспечивающий получение наибольшей прибыли от продажи изделий, если отпускная стоимость одного изделия I вида составляет 3 ден. ед., а изделия II вида — 2 ден. ед., причем изделий I вида требуется изготовить не более 40, а изделий II вида — не более 20.

❏ Пусть изготовлено x_1 изделий I вида и x_2 изделий II вида. Тогда имеем следующие ограничения на переменные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 40, \\ x_2 \leqslant 20, \\ 2x_1 + 4x_2 = 100. \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид $L = 3x_1 + 2x_2$. Преобразуем смешанную систему ограничений в систему ограничений в виде уравнений, введя новые переменные x_3 и x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 20, \\ x_1 + 2x_2 = 50. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

равен 3. Выберем за базисные переменные x_1, x_2, x_3 и перейдем к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 2x_4, \\ x_2 = 20 - x_4, \\ x_3 = 30 - 2x_4. \end{cases}$$

Первое допустимое решение получится при $x_4 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$. При этих значениях переменных $L = 70$. Увеличения значения целевой функции можно достигнуть с помощью увеличения x_4 до $x_4 = 15$, судя по третьему уравнению. Тогда при $x_4 = 15$, $x_1 = 40$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$ имеем $L = 130$. Второе допустимое решение $(40; 5; 0; 15)$; $x_1 = 40 - x_3$, $x_2 = 5 + 0{,}5x_3$, $x_4 = 15 - 0{,}5x_3$, $L = 130 - 2x_3$. Коэффициент при x_3 в целевой функции отрицателен, а потому дальнейшее увеличение L невозможно. Следовательно, оптимальное решение $x_1 = 40$, $x_2 = 5$ и $L_{max} = 130$. ■

2. Симплексные таблицы. Систему ограничений сведем к единичному базису:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + a_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_i + \cdots + a_{i,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ x_r + \cdots + a_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases}$$

а линейную форму L — к виду

$$L + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \quad + \gamma_j x_j + \quad + \gamma_n x_n = \gamma_0. \qquad (1)$$

В виде таблицы эти данные можно представить так:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1		x_i		x_r	x_{r+1}		x_j		x_n
x_1	b_1	1		0		0	$a_{1,r+1}$		a_{1j}		a_{1n}
x_i	b_i	0		1		0	$a_{i,r+1}$		a_{ij}		a_{in}
x_r	b_r	0		0		1	$a_{r,r+1}$		a_{rj}		a_{rn}
L	γ_0	0		0		0	γ_{r+1}		γ_j		γ_n

Равенство (1) будем называть *приведенным* (к свободным переменным) *выражением* для функции L, а коэффициенты γ_j — *оценками* (индексами) соответствующих свободных переменных x_j.

1 Выбирают разрешающий столбец a_p из условия: оценка $\gamma_p < 0$ и хотя бы один элемент $a_{ip} > 0$.

2. Выбирают q -ю разрешающую строку из условия

$$\frac{b_q}{a_{qp}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ip}}\right\} \quad \text{для } a_{ip} > 0.$$

3. Выполняют пересчет элементов разрешающей q-й строки по формуле

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

4. Вычисляют элементы всех остальных строк (при $k \neq p$) по формуле

$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk}a_{ip} \quad (i = 0, 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, r).$$

Следует иметь в виду основную теорему симплексного метода, которую приведем без доказательства.

Теорема. *Если после выполнения очередной итерации:*

1) *найдется хотя бы одна отрицательная оценка и в каждом столбце с такой оценкой окажется хотя бы один положительный элемент, т.е. $\gamma_k > 0$ для некоторых k, и $a_{ik} > 0$ для тех же k и некоторого i, то можно улучшить решение, выполнив следующую итерацию;*

2) *найдется хотя бы одна отрицательная оценка, столбец которой не содержит положительных элементов, т.е. $\gamma_k < 0$, $a_{ik} < 0$ для какого-то k и всех i, то функция L не ограничена в области допустимых решений ($L_{\max} \to \infty$);*

3) *все оценки окажутся неотрицательными, т.е. $\gamma_k \geqslant 0$ для всех k, то достигнуто оптимальное решение.*

1745. Найти наибольшее значение линейной функции $L = 7x_1 + 5x_2$ на множестве неотрицательных решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_2 + x_5 = 15, \\ 3x_1 + x_6 = 18. \end{cases}$$

❑ Ранг матрицы системы уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 4. Ранг расширенной матрицы также равен 4. Следовательно, четыре переменные (базисные) можно выразить через две (свободные), т.е.

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 15 - 3x_2, \\ x_6 = 18 - 3x_1. \end{cases}$$

Заметим, что линейная форма $L = 7x_1 + 5x_2$, или $L - 7x_1 - 5x_2 = 0$ уже выражена через эти же свободные переменные. Имеем исходную таблицу (табл. 1).

Выясняем, имеются ли в последней строке (индексной) отрицательные оценки. Таких чисел два: -7 и -5. Берем, например, -5 и просматриваем столбец для x_2, в этом столбце имеем три положительных элемента 3, 1, 3. Делим на эти числа соответствующие свободные члены: $\frac{19}{3}$, $\frac{13}{1}$, $\frac{15}{3}$, из полученных частных наименьшее есть $\frac{15}{3}$. Следовательно, разрешающим является элемент 3, находящийся на пересечении строки для x_5 и столбца для x_2. Выделим эту

Таблица 1

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	19	2	3	1	0	0	0
x_4	13	2	1	0	1	0	0
x_5	15	0	3	0	0	1	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	0	−7	−5	0	0	0	0

Таблица 2

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	4	2	0	1	0	−1	0
x_4	8	2	0	0	1	$-1/3$	0
x_2	5	0	1	0	0	$1/3$	0
x_6	18	3	0	0	0	0	1
L	25	−7	0	0	0	$5/3$	0

Таблица 3

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	2	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	0
x_4	4	0	0	−1	1	$2/3$	0
x_2	5	0	1	0	0	$1/3$	0
x_6	12	0	0	$-3/2$	0	$3/2$	1
L	39	0	0	$7/2$	0	$-11/6$	0

Таблица 4

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	0	$-1/4$	$3/4$	0	0
x_5	6	0	0	$-3/2$	$3/2$	1	0
x_2	3	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	0
x_6	3	0	0	$3/4$	$-9/4$	0	1
L	50	0	0	$3/4$	$11/4$	0	0

строку и этот столбец рамками. Новый базис состоит из x_3, x_4, x_2, x_6. Для составления следующей таблицы умножим выделенную строку табл. 1 на $\frac{1}{3}$, чтобы получить на месте разрешающего элемента 1, и полученную таким образом строку записываем на месте прежней. К каждой из остальных строк прибавляем вновь полученную, умноженную на такое число, чтобы в клетках столбца для x_2 появились нули, и записываем преобразованные строки на месте прежних. Этим завершается I итерация.

Теперь все рассуждения повторим применительно к табл. 2, т.е. выполним II итерацию. Новый разрешающий элемент, находящийся на пересечении строки для x_3 и столбца для x_1, есть 2. Переходим к следующей таблице.

Те же рассуждения повторим применительно к табл. 3. Здесь разрешающим является элемент $\frac{2}{3}$, находящийся на пересечении строки для x_4 и столбца для x_5. Переходим к табл. 4.

Поскольку в индексной строке нет отрицательных оценок, мы получили оптимальный план (5; 3; 0; 0; 6; 3) и наибольшее значение линейной формы L есть $L_{\max} = 50$. ■

Найти оптимальные неотрицательные решения, минимизирующие линейную форму:

1746. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2, \end{cases}$ $L = x_1 - x_3.$

1747. $\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4, \\ x_3 = 5 - x_3 + x_4, \end{cases}$ $L = x_1 + x_2.$

1748. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_2 - x_4 = 1, \end{cases}$ $L = 2x_3 - x_2.$

1749. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 900, \end{cases}$ $L = 12x_1 + 5x_2 + 3x_3.$

1750. $\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \end{cases}$ $L = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6.$

Найти оптимальные неотрицательные решения, максимизирующие линейную форму:

1751. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_2 + 2x_4 \geqslant 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 8, \end{cases}$ $L = 2x_1 + x_4.$

1752. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leqslant -1, \end{cases}$ $L = -x_1 - 2x_2 - 3x_3.$

1753. Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа A и 360 изделий типа B в сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа A вчетверо дороже изделий типа B. Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

1754. Для изготовления изделий двух видов склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на изделие I вида расходуется 2 кг, а на изделие II вида — 1 кг металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий I вида нужно изготовить не более 30 шт., а изделий II вида — не более 40 шт., причем одно изделие I вида стоит 5 ден. ед., а II вида — 3 ден. ед.

1755. Для откорма животных употребляют два вида кормов; стоимость 1 кг корма I вида — 5 ден. ед., а корма II вида — 2 ден. ед. В каждом килограмме корма I вида содержится 5 ед. питательного вещества A, 2,5 ед. питательного вещества $Б$ и 1 ед. питательного вещества B, а в каждом килограмме корма II вида соответственно 3, 3 и 1,3 ед. Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на откорм были минимальными, если суточный рацион предусматривает питательного вещества типа A не менее 225 ед., типа $Б$ — не менее 150 ед. и типа B — не менее 80 ед.?

3. Понятие о вырожденном решении. При рассмотрении симплексного метода предполагалось, что $b_i > 0$ (см. с. 332) как в исходной системе, так и в системах, получаемых после очередных итераций. Если же в некоторых уравнениях свободные члены $b_i = 0$, то в соответствующем этой системе опорном решении базисные переменные, относительно которых эти уравнения разрешены, принимают нулевые значения. Опорное решение, в котором хотя бы одна из базисных переменных принимает нулевое значение, называют *вырожденным решением*, а задачу линейного программирования, имеющую хотя бы одно вырожденное решение, — *вырожденной задачей*. Применяя в этом случае последовательные итерации, мы можем вернуться к ранее встречавшемуся набору базисных и свободных переменных, т.е. появляется так называемое *зацикливание* в схеме расчета. Приведем правило для устранения зацикливания (мы не касаемся теоретического обоснования этого правила, являющегося специальным вопросом так называемой проблемы вырождения).

Если на каком-либо этапе расчета возникает неопределенность в выборе разрешающей строки, т.е. оказывается несколько равных минимальных отношений $\dfrac{b_i}{a_{ip}}$, то следует выбирать ту строку, для которой отношение элементов следующего столбца к разрешающему является наименьшим. Если при этом снова оказываются равные минимальные отношения, то составляют отношения элементов следующего столбца, и так до тех пор, пока разрешающая строка не определится однозначно.

1756. Максимизировать линейную форму $L = 4x_5 + 2x_6$ при ограничениях $x_1 + x_5 + x_6 = 12$, $x_2 + 5x_5 - x_6 = 30$, $x_3 + x_5 - 2x_6 = 6$, $2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 18$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

❑ Исходной системе соответствует опорное решение (12; 30; 6; 9; 0; 0) и значение $L = 0$. Запишем последовательность итераций симплексного метода:

Исходная таблица

x_i	b_i					4	2	$\frac{b_i}{a_{ip}}$	$\frac{a_{i1}}{a_{ip}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_1	12	1				1	1	12	
x_2	30		1			5	−1	6	−1/5
x_3	6			1		1	−2	6	−2
x_4	18				2	3	−2	6	−2/3
L	0					−4	−2		

I итерация

x_1	6	1		−1			3	2	
x_2	0		1	−5			9	0	−5/9
x_5	6			1		1	−2		
x_4	0			−3	2		4	0	−3/4
L	24			4			−10		

II итерация

x_1	6	1		5/4	−3/2			24/5	
x_2	0		1	7/4	−9/2			0	
x_5	6			−1/2	1	1			
x_6	0			−3/4	1/2				
L	24			−7/2	5				

III итерация

x_1	6	1	−5/7		12/7				
x_3	0		4/7	1	−18/7				
x_5	6		2/7		−2/7	1			
x_6	0		3/7		−10/7		1		
L	24		2		−4				

IV итерация

x_4	7/2	7/12	−5/12		1				
x_3	9	3/2	−1/2	1					
x_5	7	1/6	1/6			1			
x_6	5	5/6	−1/6				1		
L	38	7/3	1/2						

После I итерации получили систему, разрешенную относительно базисных переменных x_1, x_2, x_4, x_5, которой соответствует опорное решение (6; 0; 0; 0; 6; 0) и значение $L_1 = 24$. II и III итерации не изменяют опорного решения и значения $L_2 = L_3 = 24$ и только IV итерация дает оптимальное решение $\left(0; 0; 9; \frac{7}{2}; 7; 5\right)$ и $L_{\max} = 38$. В данной схеме расчетов зацикливание не появилось, хотя в течение трех итераций мы как бы «топтались на месте», менялись только базисные и свободные переменные. В рассмотренном примере в исходной таблице оказалось три равных наименьших отношения: $\frac{b_2}{a_{25}} = \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{b_4}{a_{45}} = 6$. Поэтому, пользуясь правилом устранения возможного зацикливания, берем отношения элементов следующего за свободным столбца: $\frac{a_{26}}{a_{25}} = -\frac{1}{5}$, $\frac{a_{36}}{a_{35}} = -2$, $\frac{a_{46}}{a_{45}} = -\frac{2}{3}$. Наименьшим оказалось отношение $\frac{a_{36}}{a_{35}} = -2$. Следовательно, третья строка должна быть взята в качестве разрешающей и т. д. (см. таблицы). ■

1757. Максимизировать линейную функцию $L = 2x_1 + 4x_2$ при ограничениях $-2x_1 + x_2 + x_3 = 6$, $-x_1 + 1{,}5x_2 + x_4 = 9$, $-x_1 + 5x_2 + x_5 = 30$, $-x_1 + x_2 + x_6 = 12$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$, $x_4 \geqslant 0$, $x_5 \geqslant 0$, $x_6 \geqslant 0$.

§ 4

Двойственные задачи

Каждой задаче линейного программирования можно сопоставить определенным образом связанную с ней другую задачу, которую называют *двойственной* по отношению к первой.

Так, если исходная задача (задача I) линейного программирования состоит в минимизации линейной функции $L = c_1x_1 + c_2x_2 + \quad + c_nx_n$, когда заданы ограничения в форме неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases}$$

при условии неотрицательности x_k ($k = 1, 2, \dots, n$), то с ней связана двойственная задача (задача I′), состоящая в том, что требуется максимизировать линейную функцию $T = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leqslant c_2, \\ \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leqslant c_n \end{cases}$$

и условиях неотрицательности $y_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Заметим, что в задаче I и в двойственной задаче I′ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленные из коэффициентов при переменных, получаются друг из друга транспонированием. В правых частях системы ограничений каждой задачи записаны коэффициенты линейной функции, взятой из другой задачи. В системе ограничений задачи I (минимизация) все неравенства типа « $\geqslant$ », а в системе ограничений задачи I′ (максимизация) все неравенства типа « $\leqslant$ ». Понятие двойственности является взаимным, т.е. если задачу I′ записать в форме, аналогичной задаче I, то двойственной к ней окажется исходная задача I. Поэтому задачи I и I′ называют ***взаимно двойственными*** или ***взаимно сопряженными***. Доказывается, что $L_{\min} = T_{\max}$, а также, что необходимым и достаточным условием оптимальности решений любой пары двойственных задач является равенство $L(\bar{x}) = T(\bar{y})$, где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — допустимые решения задач I и I′

1758. Дать геометрическую интерпретацию следующих взаимно двойственных задач:

Исходная задача (I): найти неотрицательные значения (x_1, x_2) из условий $x_1 + 2x_2 \geqslant 4$, $x_1 - x_2 \geqslant -1$ и минимизации линейной функции $L = 3x_1 + 2x_2$.

Двойственная задача (I′): найти неотрицательные значения (y_1, y_2) из условий $y_1 + y_2 \leqslant 3$, $2y_1 - y_2 \leqslant 2$ и максимизации линейной функции $T = 4y_1 - y_2$.

❑ Построим систему ограничений задач I и I′ В точке $P\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ достигается минимум линейной функции L, т.е. $L_{\min} = 3 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{16}{3}$, а в точке $P'\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$ — максимум линейной функции T, т.е. $T_{\max} = 4 \cdot \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ (рис. 72). ■

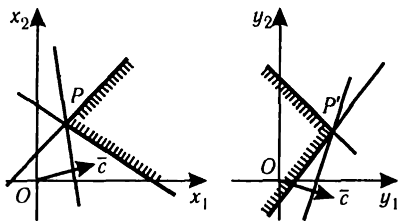

Рис. 72

1759. Исходная задача (I): найти неотрицательные значения (x_1, x_2), минимизирующие линейную функцию $L = 3x_1 + 2x_2$, если дана система ограничений $7x_1 + 2x_2 \geqslant 14$, $4x_1 + 5x_2 \geqslant 20$. Составить двойственную задачу и решить ее.

1760. Исходная задача (I): найти неотрицательные значения (x_1, x_2), максимизирующие линейную функцию $L = 5x_1 + 4x_2$ при системе ограничений $4x_1 + 3x_2 \leqslant 24$, $3x_1 + 4x_2 \leqslant 24$. Составить двойственную задачу и решить ее.

1761. Исходная задача (I): найти неотрицательные значения (x_1, x_2), минимизирующие линейную функцию $L = 3x_1 + 3x_2$ при системе ограничений $5x_1 - 4x_2 \geqslant -2$, $x_1 + 2x_2 \geqslant 6$. Составить двойственную задачу и решить ее.

§ 5

Транспортная задача

Одной из типичных задач линейного программирования является так называемая *транспортная задача*. Она возникает при планировании наиболее рациональных перевозок грузов. В одних случаях это означает определение такого плана перевозок, при котором стоимость последних была бы минимальна, а в других более важным является выигрыш во времени. Первую задачу называют *транспортной задачей по критерию стоимости*, а вторую — *транспортной задачей по критерию времени*.

Первая задача является частным случаем задачи линейного программирования и может быть решена симплексным методом. Однако в силу особенностей этой задачи она решается проще.

Пусть в p пунктах отправления находятся соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ед. однородного груза, который должен быть доставлен q потребителям в количествах $b_1, b_2, \ldots, b_q$ ед. Заданы стоимости c_{ik} перевозок единицы груза из i-го пункта отправления k-му пункту потребления. Обозначим через $x_{ik} \geqslant 0$ $(i = 1,2,\ldots,p;\ k = 1,2,\ldots,q)$ количество единиц груза, перевозимого из i-го склада k-му потребителю; тогда переменные x_{ik} должны удовлетворять следующим условиям:

1) $\sum\limits_{k=1}^{q} x_{ik} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots,p)$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{p} x_{ik} = b_k \quad (k = 1,2,\ldots,q)$;

3) $x_{ik} \geqslant 0$.

Суммарные затраты на перевозки равны $L = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{pq}x_{pq}$. Следовательно, требуется найти pq переменных x_{ik}, удовлетворяющих указанным условиям и минимизирующих целевую функцию L.

Решение такой задачи разбивается на два этапа:

1) определение исходного опорного решения;

2) построение последовательных итераций, т.е. приближение к оптимальному решению.

1. Определение исходного опорного решения. Пусть имеется таблица исходных данных задачи. Исходное опорное решение будем строить по так называемому правилу «северо-западного угла».

Заполним вышеуказанную таблицу, начиная с левого верхнего угла, двигаясь далее или по строке вправо, или по столбцу вниз. В клетку (1; 1) запишем меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е. $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$.

$a_i \backslash b_k$	b_1	b_2		b_k		b_q
a_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}		x_{1k} c_{1k}		x_{1q} c_{1q}
a_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}		x_{2k} c_{2k}		x_{2q} c_{2q}
a_i	x_{i1} c_{i1}	x_{i2} c_{i2}		x_{ik} c_{ik}		x_{iq} c_{iq}
a_p	x_{p1} c_{p1}	x_{p2} c_{p2}		x_{pk} c_{pk}		x_{pq} c_{pq}

Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый столбец «закрыт», т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью. Двигаемся далее по первой строке, записав в соседнюю клетку $(1; 2)$ меньшее из чисел $a_1 - b_1$ и b_2, т.е. $x_{12} = \min\{a_1 - b_1; b_2\}$.

Если же $b_1 > a_1$, то аналогично «закрываем» первую строку и далее переходим к заполнению соседней клетки $(2; 1)$, куда запишем $x_{21} = \min\{a_2; b_1 - a_1\}$. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпаются ресурсы a_p и потребности b_q.

1762. В двух пунктах отправления A и B находится соответственно 150 и 90 т горючего. В пункты *1, 2, 3* требуется доставить соответственно 60, 70 и 110 т горючего. Стоимости перевозки тонны горючего из пункта A в пункты *1, 2, 3* составляют соответственно 6, 10 и 4 ден. ед., а из пункта B — 12, 2 и 8 ден. ед. Составить оптимальный план перевозок горючего так, чтобы общая сумма транспортных расходов была наименьшей.

❑ Исходные данные приведены в табл. 1. Заполнение начнем с клетки $(1; 1)$: $x_{11} = \min\{150; 60\} = 60$, первый столбец закрыт. Переходим к клетке $(1; 2)$: $x_{12} = \min\{150 - 60; 70\} = 70$, второй столбец закрыт; далее, перехо-

Таблица 1

		1	*2*	*3*
	$a_i \backslash b_k$	60	70	110
A	150	60 (6)	70 (10)	20 (4)
B	90	(12)	(2)	90 (8)

дим к клетке (1; 3): $x_{13} = \min\{150 - 60 - 70; 110\} = 20$. Так как в третьем столбце оказался остаток, равный 90, то переходим к заполнению клетки (2; 3), куда запишем $x_{23} = \min\{90; 90\} = 90$. Поскольку остатки по строке и столбцу равны нулю, исходное опорное решение построено. Этому плану соответствуют затраты в количестве $L = 6 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 8 \cdot 90 = 1860$ ден. ед.

В правиле «северо-западного угла» не учитывается величина затрат c_{ik}, а потому исходное опорное решение часто может быть далеким от оптимального. Применяют также прием «минимального элемента», в котором учитывают величину c_{ik}. В этом случае построение исходного опорного решения начинают с клетки с наименьшей величиной c_{ik}, в данном примере — с клетки (2; 2), где $c_{22} = 2$ (табл. 2). В эту клетку запишем $a_{22} = \min\{a_2; b_2\} = \min\{90; 70\} = 70$.

Таблица 2

	a_i \ b_k	*1* 60	*2* 70	*3* 110	Остаток
A	150	60 [6]	[10]	90 [4]	60,0
B	90	[12]	70 [2]	20 [8]	20,0
	Остаток	0	0	20,0	

Остатки по строке и столбцу записываем в соответствующие клетки строки и столбца остатков. Столбец b_2 закрыт. Теперь переходим к клетке (1; 3), так как после $c_{22} = 2$ наименьшим является $c_{13} = 4$. В клетку (1; 3) запишем $x_{13} = \min\{a_1 - b_1; b_3\} = \min\{150 - 60; 110\} = 90$. Затем переходим к клетке (1; 1): $x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{150; 60\} = 60$. Наконец, переходим к клетке (2; 3), в которую запишем $x_{23} = \min\{a_2 - b_2; b_3\} = \min\{90 - 70; 110\} = 20$.

Применяя это правило, мы получили другой вариант исходного опорного решения, при котором затраты $L = 6 \cdot 60 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 20 = 1020$ ден. ед., т.е. сумма затрат ближе к оптимальному плану.

2. Построение последовательных итераций. Получив исходное опорное решение, перейдем теперь к построению новых опорных решений, улучшающих друг друга: для этого применим метод потенциалов.

Итак, после построения исходного опорного решения все переменные разбиты на две группы: x_{kl} — базисные и x_{pq} — свободные; линейные функции стоимости перевозок выразятся через свободные переменные так:

$$L = \sum_{pq} \gamma_{pq} x_{pq} + \gamma_0. \tag{1}$$

Для нахождения коэффициентов γ_{pq} при свободных переменных сопоставим каждому пункту отправления A_i некоторую величину u_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), которую назовем *потенциалом* пункта A_i, и каждому пункту назначения B_j величину v_j — потенциал пункта B_j. Свяжем эти величины равенством $u_k + v_l = c_{kl}$, где c_{kl} — стоимость перевозки одной тонны груза из пункта A_k в пункт B_l. Доказывается, что совокупность уравнений $u_k + v_l = c_{kl}$, составленных для всех базисных переменных, образует совместную систему линейных уравнений, причем значение одной из переменных можно задавать произвольно, и тогда значения остальных переменных находятся из системы однозначно. Обозначим для свободных переменных сумму соответствующих потенциалов через c'_{pq}, т.е. $u_p + v_q = c'_{pq}$, и назовем ее *косвенной стоимостью* (в отличие от данной стоимости c_{pq}). Тогда коэффициенты при свободных переменных в соотношении (1) определяются с помощью равенства $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$.

Если все величины γ_{pq} неотрицательны, то исходное решение является оптимальным. Если же среди них имеются отрицательные, то переходим к следующему базису, увеличивая члены с отрицательным коэффициентом и оставляя другие переменные равными нулю.

Воспользуемся изложенными общими понятиями и продолжим решение задачи 1762. Мы получили исходное опорное решение (следуя правилу «минимального элемента»): $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$, $L = 1020$. Для нахождения потенциалов необходимо решить систему

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6,\ \ u_1 + v_3 = c_{13} = 4,\ \ u_2 + v_2 = c_{22} = 2,\ \ u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Значение одного из неизвестных зададим произвольно, например $u_1 = 1$. Тогда $v_1 = 5$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$, $v_2 = -3$. Далее вычисляем косвенные стоимости c'_{pq}:

$$c'_{12} = u_1 + v_2 = -2,\ \ c'_{21} = u_2 + v_1 = 10.$$

Найдем теперь разности $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{12} = c_{12} - c'_{12} = 10 - (-2) = 12, \quad \gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2.$$

Следовательно, выражение L через свободные переменные имеет вид $L = 1020 + 12x_{12} + 2x_{21}$. Среди коэффициентов при переменных в правой части нет отрицательных. Значит, исходное опорное решение является оптимальным. Таким образом, правило «минимального элемента» сразу дает оптимальное решение.

Решим теперь эту же задачу при условии, что исходное решение получено по правилу «северо-западного угла», т.е. $x_{11} = 60$, $x_{12} = 70$, $x_{13} = 20$, $x_{23} = 90$, $L = 1860$. Для нахождения потенциалов решим систему

$$u_1 + v_1 = c_{11} = 6,\ \ u_1 + v_2 = c_{12} = 10,\ \ u_1 + v_3 = c_{13} = 4,\ \ u_2 + v_3 = c_{23} = 8.$$

Полагая $u_1 = 1$, получим $v_1 = 5$, $v_2 = 9$, $v_3 = 3$, $u_2 = 5$.

Вычисляем косвенные стоимости c'_{pq}:

$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 10, \quad c'_{22} = u_2 + v_2 = 14.$$

Найдем теперь разности $\gamma_{pq} = c_{pq} - c'_{pq}$:

$$\gamma_{21} = c_{21} - c'_{21} = 12 - 10 = 2, \quad \gamma_{22} = c_{22} - c'_{22} = 2 - 14 = -12.$$

Следовательно, выражение L через свободные переменные имеет вид $L = 1860 + 2x_{21} - 12x_{22}$. Среди коэффициентов при переменных в правой части есть отрицательный при x_{22}, поэтому можно попытаться уменьшить L, увеличив x_{22} (сохранив нулевое значение x_{21}). Положим $x_{22} = \lambda$. Поскольку суммы значений неизвестных по строкам и столбцам должны остаться неизменными, нужно произвести следующий балансовый пересчет:

60	$70 - \lambda$ $\uparrow$	$\rightarrow 20 + \lambda$ $\downarrow$
	$\lambda \quad \leftarrow$	$\cdots 90 - \lambda$

Добавление λ к x_{22} компенсируется вычитанием λ из x_{12}, а это в свою очередь — прибавлением λ к x_{13} и т.д. до тех пор, пока мы не вернемся обратно к x_{22}. Обходя клетки по пунктирной ломаной линии, в одной из вершин которой находится свободная переменная x_{22}, а в остальных вершинах — базисные переменные (причем не обязательно все), мы получим так называемый ***цикл пересчета*** (ломаную называют ***циклом***), отвечающий свободной клетке x_{22}. Как видно из таблицы, для неотрицательности переменных можно увеличить λ до $\lambda = 70$, тогда получим второе опорное решение:

60	0	90
0	70	20

т.е. $x_{11} = 60$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 90$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 70$, $x_{23} = 20$.

Значение функции L для него составляет $L = 1860 - 12\ \ 70 = 1020$, т.е. получили оптимальное решение (судя по предыдущему решению). ■

Таким образом, правила вычислений по методу потенциалов сводятся к следующему.

1. Находят потенциалы u_k и v_l всех пунктов отправления A_k и назначения B_l.

2. Выбирают какую-нибудь свободную переменную, для которой сумма потенциалов строго больше соответствующей стоимости; это отвечает элементу с отрицательным коэффициентом при свободной переменной в правой части функции L.

3. Для выбранной в п. 2 переменной выполняют соответствующий ей цикл пересчета и производят сдвиг по этому циклу. Этот сдвиг приводит к новому допустимому решению.

4. Вышеуказанные операции 1–3 повторяют до тех пор, пока не получат оптимальный базис, т.е. неотрицательные коэффициенты при свободных переменных в правой части линейной функции L.

1763. На двух складах A и B находится по 90 т горючего. Перевозка одной тонны горючего со склада A в пункты *1, 2, 3* соответственно стоит 1, 3 и 5 ден. ед., а перевозка одной тонны со склада B в те же пункты — соответственно 2, 5 и 4 ден. ед. В каждый пункт надо доставить по одинаковому количеству тонн горючего. Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

1764. В резерве трех железнодорожных станций A, B и C находятся соответственно 60, 80 и 100 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту № 1 необходимо 40 вагонов, № 2 — 60 вагонов, № 3 — 80 вагонов и № 4 — 60 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции A в указанные пункты соответственно равны 1, 2, 3, 4 ден. ед., со станции B — 4, 3, 2, 0 ден. ед. и со станции C — 0, 2, 2, 1 ден. ед.

1765. Завод имеет три цеха A, B, C и четыре склада № 1, 2, 3, 4. Цех A производит 30 тыс. шт. изделий, цех B — 40 тыс. шт., цех C — 20 тыс. шт. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад № 1 — 20 тыс. шт., склад № 2 — 30 тыс. шт., склад № 3 — 30 тыс. шт., склад № 4 — 10 тыс. шт. Стоимости перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха A в склады № 1, 2, 3, 4 соответственно равны 2, 3, 2, 4 ден. ед.; из цеха B — 3, 2, 5, 1 ден. ед., а из цеха C — 4, 3, 2, 6 ден. ед. Составить такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

1766. На трех складах A, B, C находится сортовое зерно соответственно 10, 15, 25 т, которое надо доставить в четыре пункта: пункту № 1 — 5 т, № 2 — 10 т, № 3 — 20 т и № 4 — 15 т. Стоимости доставки одной тонны со склада A в указанные пункты соответственно равны 8, 3, 5, 2 ден. ед.; со склада B — 4, 1, 6, 7 ден. ед. и со склада C — 1, 9, 4, 3 ден. ед. Составить оптимальный план перевозки зерна в четыре пункта, минимизирующий стоимость перевозок.

4. 1) 8; 2) 3. 5. 1) 0,5; 2) $-2,25$; 6. $M(7)$. 7. $C(1)$, $D(3)$. 8. $C(-9)$, $D(-1)$. 16. 1) 13; 2) 3. 19. 5. 20. $(-1;8)$, $(1;9)$, $(3;10)$. 21. $S=0$, т.е. точки A, B, C лежат на одной прямой. 22. $D(17;12)$. 23. $C(-10;-7)$. 24. $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$. 25. 24 кв. ед. 29. $A\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(3;-\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(4\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$; $D\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$; $E\left(2\sqrt{2};\frac{4\pi}{3}\right)$; $F(7;\pi)$. 30. $A(0;10)$; $B(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$; $C(0;0)$; $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 31. $\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$. 32. 5. 33. $M_1(\rho;-\theta)$. 34. $M_1(\rho;\pi+\theta)$. 35. 1) $\left(3;\frac{7\pi}{6}\right)$, $\left(5;-\frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(2;\frac{3\pi}{6}\right)$; 2) $\left(3;-\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(5;-\frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$. 36. $M(\rho;\pi-\theta)$. 44. $y=2x-1,5$. 45. Биссектриса I и III координатных углов. 46. Биссектриса II и IV координатных углов. 47. $x^2+y^2-2x-2y=0$. 48. $3x^2+2xy+3y^2-4x-4y=0$. 49. $\rho=a$. 50. $\theta=\alpha$. 51. $\rho=a\cos\theta$. 57. Прямая $y=2x$. 58. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (кривую называют *эллипсом*). 59. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (кривую называют *гиперболой*). 60. Отрезок прямой AB, где $A(1;0)$, $B(0;1)$. 61. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 62. $x=a(t\sin t+\cos t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ (кривую называют *эвольвентой круга*). 67. 1) $x+2y-2\sqrt{5}=0$; 2) $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{5}$; 3) $\frac{x}{2\sqrt{5}}+\frac{y}{\sqrt{5}}=1$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-2=0$. 68. 135° 69. 54 кв. ед. 70. Нет. 72. $\sqrt{3}x+y-1=0$. 73. $x+y-4=0$. 74. $3x-2y=0$. 75. $x+y-7=0$. 76. $x+3=0$, $y+4=0$. 77. $x+y-5=0$, $x+y+5=0$. 99. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{27}{11}$. 100. $x-y=0$, $5x+3y-26=0$, $3x+5y-26=0$. 101. $14x+14y-45=0$, $2x-2y+35=0$. 102. $3x-y+14=0$, $x-5y-14=0$, $x+2y=0$. 103. $x-2=0$, $y-7=0$. 104. 4,4. 105. 2,4. 106. $m=4$. 107. $x-y=0$, $x+5y-14=0$, $5x+y-14=0$. 108. $\frac{\pi}{6}$. 109. $(0;5)$ и $(4;3)$. 110. $\left(\frac{7}{8};0\right)$ и $\left(-\frac{27}{8};0\right)$. 111. $13x+6y-82=0$, $3x+4y-23=0$, $S=31,5$ кв. ед. 112. $3x-2y=0$, $5x+y+6=0$. 113. $5x+4=0$. 114. $5x+8y+11=0$. 115. $5y+2=0$. 116. $17x+11y=0$. 117. $x+y+1=0$. 118. $x=a$, $y=b$. 119. $x=1$; $y=x$. 120. 30° 121. $\varphi=53°8'$ 122. $5x-3y+2=0$. 123. $\sqrt{3}$ кв. ед. 125. $B(1;3)$, $C(11;6)$. 126. 1) $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$; 2) $\frac{x}{4(\sqrt{2}-1)}+\frac{y}{-6(\sqrt{2}+1)}=1$; 3) $\frac{x}{-4(\sqrt{2}+1)}+\frac{y}{6(\sqrt{2}-1)}=1$. 127. $3x-4y-9=0$, $3x-4y+16=0$, $4x+3y-37=0$, или $4x+3y+13=0$. 134. 1) $a=4$, $b=-3$, $r=5$; 2) $a=-5$, $b=2$, $r=0$; уравнение определяет точку; 3) $a=2$, $b=-7$, $r^2=-1$; уравнение не имеет геометрического смысла (мнимая окружность). 135. $\operatorname{tg}\varphi=-2,4$. 136. $(x+1)^2+(y-1)^2=5$. 137. $(x-3)^2+(y-4)^2=25$. 138. $x=3,2$.

139. $3x - 4y + 8 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$. **140.** $(x-2)^2 + y^2 = 16$. **142.** $(4; 1{,}8)$; $(4; -1{,}8)$; $(-4; 1{,}8)$; $(-4; -1{,}8)$. **143.** $\frac{b^2}{a}$. **144.** $4x + 3y + 12 = 0$. **145.** $16x^2 + 25y^2 = 41$. **146.** Точка M — вне эллипса; точка N — на эллипсе; точка P — внутри эллипса. **147.** $\varepsilon = \sin(\alpha/2)$. **148.** $M(-5; 7)$. **149.** $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$. **150.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. **151.** Искомая кривая — эллипс. Если направить оси координат по сторонам прямого угла (точка A лежит на оси Ox), то уравнение этого эллипса $9x^2 + 36y^2 = 4a^2$ **155.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$. **156.** $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$. **157.** $(-4; -3)$. **158.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **159.** $x^2 - y^2 = \frac{8}{225}$. **160.** $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **161.** $(-8; 0)$. **162.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. **163.** 6 и 14. **166.** Правая ветвь гиперболы $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. **169.** $y^2 = 4x$. **170.** $M_1(2; 4)$ и $M_2(2; -4)$. **171.** $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$. **172.** $y = \pm 2\sqrt{2}x$. **173.** $y^2 = \sqrt{2}x$. **174.** $M(0; 0)$, $M_1(18; -24)$. **175.** $y^2 = x$, $\lg\alpha = \frac{8}{15}$. **179.** $(3; 2)$. **180.** $(8; -6)$. **183.** 1) $O_1(1; 2)$, $p = -\frac{1}{4}$; $x'^2 = -\frac{1}{2}y'$; 2) $O_1(1; 3)$; $p = -\frac{1}{2}$; $x'^2 = -y'$; 3) $O_1(\frac{1}{16}; \frac{1}{8})$, $p = -\frac{1}{8}$; $y'^2 = -\frac{1}{4}x'$; 4) $O_1(1; -2)$, $p = \frac{1}{2}$; $y'^2 = x'$ **184.** 1) $x'y' = \frac{1}{8}$; 2) $x'y' = \frac{13}{9}$; 3) $x'y' = -\frac{6}{3}$; 4) $x'y' = \frac{1}{2}$. **187.** Окружность $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1$. **188.** Эллипс $\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1$; новое начало $O'(1; -1)$. **189.** Гипербола $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$; новое начало $O'(2; 3)$. **190.** Точка $O'(2; 1)$. **191.** Мнимый эллипс $\frac{x'^2}{-1} + \frac{y'^2}{-\frac{1}{4}} = 1$; $x' = x$, $y' = y + 1$. **192.** Гипербола $y'^2 - x'^2 = 1$; новое начало $O'(3; 0)$. **193.** Парабола $x'^2 = -y'$; новое начало $O'(1; \frac{5}{2})$. **194.** Прямые $x = 2$ и $x = 4$. **195.** Мнимые прямые. **202.** Совокупность двух параллельных прямых $5x + y + 1 = 0$ и $5x + y - 1 = 0$. **203.** Совокупность двух слившихся прямых $x + y + 1 = 0$. **204.** Совокупность двух пересекающихся прямых $2x - 3y + 1 = 0$, $4x - 3y - 1 = 0$. **205.** $\frac{x''^2}{30} + \frac{y''^2}{5} = 1$. **206.** $\frac{x''^2}{9} - \frac{y''^2}{36} = 1$. **207.** $y''^2 = -2x''$ **210.** $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$. **211.** Система противоречива (решений не имеет). **212.** $x = a + b$, $y = a - b$. **213.** Система неопределенная (имеет бесчисленное множество решений: x остается произвольным, а $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{12}$. **214.** $x = y = z = t$. **215.** $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. **216.** $x = 2t$, $y = t$, $z = 2t$. **222.** 0. **223.** 2. **224.** $2(ad - bc)$. **225.** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. **226.** $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. **227.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. **228.** $x = t$, $y = 2t$, $z = -3t$. **229.** $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$. **230.** $x = t$, $y = t$, $z = -t$.

Глава II

234. $C\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right)$, $D\left(\frac{1}{3}; \frac{13}{3}; \frac{17}{3}\right)$. **236.** $M(3; 1; 3)$. **237.** Пополам. **238.** $M\left(0; 0; \frac{17}{8}\right)$. **239.** $M(16; -5; 0)$. **246.** $\overline{AM} = \frac{1}{1+\lambda}(b + \lambda c)$. **248.** $a_x = 0$,

$a_y = 2, a_z = -2$. **249.** $m^2 + m + 1$. **251.** $a = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$. **252.** $|\overline{M_1M_2}| = 7$; $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = -\frac{6}{7}$, $\cos\gamma = \frac{3}{7}$. **253.** $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ или $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$. **254.** $M(-4; 4; 4\sqrt{2})$. **255.** $\boldsymbol{a}_0 = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$. **268.** -96. **269.** $\arccos\frac{17}{50}$. **270.** $m = 1$. **271.** 547. **272.** $A = \boldsymbol{Fs} = Fs\cos\varphi = 5\sqrt{3}$. **273.** $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. **274.** $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ или $\boldsymbol{c} = \frac{1}{3}(-\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$. **275.** $\frac{20}{3}$ и $\frac{20}{7}$. **276.** $\boldsymbol{r}_D = 7\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$. **279.** Нет, так как компланарные векторы не могут быть попарно перпендикулярными. **280.** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -17\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. **281.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$ кв. ед. **282.** 4. **284.** 20 куб. ед.; $\frac{4\sqrt{510}}{17}$.

Глава III

296. 1) $\frac{x+y+z-2}{\sqrt{3}} = 0$; 2) $-\frac{3}{5\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{4}{5\sqrt{2}}z - \frac{7}{5\sqrt{2}} = 0$. **297.** $d = \frac{13}{\sqrt{29}}$; начало координат и точка M_0 лежат по разные стороны от плоскости. **298.** $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}$. **299.** 1) $x+y+z-5 = 0$; 2) $2x+2y+z-6 = 0$. **300.** $7x-11y-z-15 = 0$. **301.** $M(5; 5; 5)$. **302.** $4x - 3y + 12z - 169 = 0$. **303.** $5y + 4z = 0$; $5x - 3z = 0$; $4x + 3y = 0$. **304.** $6x + 5y - 7z - 27 = 0$. **305.** $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\pm\sqrt{2}} = 1$. **306.** $60°$ **307.** $x + 7y + 10z = 0$. **308.** $x - z = 0$. **309.** $x + y + z - 3 = 0$. **310.** $5x+2y+5z-9 = 0$. **311.** $\sqrt{2}x+y+z-5 = 0$. **312.** $4x+3y-2z-1 = 0$. **313.** $(A_1D_2-A_2D_1)x+(B_1D_2-B_2D_1)y+(C_1D_2-D_1C_2)z = 0$. **314.** $x-y+2 = 0$. **315.** $\arcsin\frac{3}{6}$. **327.** $5y + 5z - 64 = 0, x = 0\,(yOz)$; $5x + 5z - 2 = 0, y = 0\,(xOz)$; $5x - 5y + 62 = 0, z = 0\,(xOy)$. **328.** $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$. **329.** $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{2}{7}$. **330.** $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{\pm 1}$. **331.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}$. **332.** $M(0; 7; -2)$. **333.** $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$; $\frac{x}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+2}{3}$. **334.** $x = -3t-1$, $y = 6t+1, z = t+2$. **335.** $\frac{5\sqrt{30}}{6}$. **336.** $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2}$. **337.** $\cos\varphi = \frac{20}{21}$. **338.** $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. **339.** $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$. **340.** $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{0}$. **341.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}$. **342.** $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. **343.** $x-5y-2z+11 = 0$. **344.** $\frac{x}{-10} = \frac{y-3,4}{13} = \frac{z-5,2}{19}$. **348.** 1) $C(-1; -2; 0)$, $r = 5$; 2) $C(2; -3; -1)$, $r = 4$; 3) $C(0; -1; \frac{3}{4})$, $r = \frac{3}{4}$; 4) $C(1; 0; 0)$, $r = 1$; 5) $C(0; 0; 2)$, $r = 1$. **349.** 1) Внутри сферы; 2) вне сферы; 3) на сфере. **350.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. **351** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16, z = 0$. **352.** $C(4; 4; -2)$; $r = 8$. **356.** 1) Круговой цилиндр; 2) эллиптический цилиндр; 3) гиперболический цилиндр; 4) параболический цилиндр; 5) параболический цилиндр; 6) параболический цилиндр; 7) круговой цилиндр; 8) ось аппликат $x = 0$, $y = 0$; 9) биссектральные плоскости $x = z$ и $x = -z$; 10) плоскости $y = 0$ и $y = x$. **357.** 1) $x^2 + z^2 = 9$, $y = 3$

(окружность); 2) $y^2 - x^2 = 1$, $z = 1$ (гипербола); 3) $z^2 - y^2 = 0$, $x = 0$ (две прямые). **358.** 1) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; 3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. **361.** $4x^2+4y^2-(z-2)^2 = 0$. **362.** $x^2-y^2 = 1, z = 1$; $z+1 = x^2, y = 1$; $y^2 = 1-z$, $x = 1$; $y^2 - x^2 = 1$; $z = -1$. **363.** 1) Гиперболический параболоид; 2) конус с вершиной в начале координат. **364.** $3z = 2x^2 + y^2$ **365.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{1} = 1$. **366.** $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ (окружность). **367.** 1) Ось ординат; 2) конус с осью Oy и вершиной в начале координат; 3) конус с осью Ox и вершиной в начале координат; 4) начало координат; 5) пара плоскостей, пересекающихся по оси Oz. **372.** Уравнение не имеет геометрического смысла. **373.** Эллипсоид с каноническим уравнением $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} + z'^2 = 1$. **374.** Две плоскости $x = y$ и $x = z$. **375.** Круговой цилиндр $(x-2)^2 + (z-2)^2 = 4$. **376.** Прямая $x = y = z$. **377.** Конус второго порядка $x^2 + (y-1)^2 - (z-1)^2 = 0$ с вершиной $S(0; 1; 1)$. **378.** Точка $(0; 1; -1)$. **379.** Однополостный гиперболоид с каноническим уравнением $x'^2 + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1$. **380.** Двуполостный гиперболоид с каноническим уравнением $x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$. **381.** Параболоид вращения с каноническим уравнением $x'^2 + y'^2 = 4z'$ **382.** Гиперболический параболоид с каноническим уравнением $x'^2 - \frac{z'^2}{9} = 2y'$

Глава IV

387. 900. **388.** 12. **389.** 21280. **390.** a^2b^2 **391.** $x = 1, y = 2, z = 1, t = -1$. **392.** $x = 1, y = 1, z = 0, t = -2$. **393.** $x = 1, y = 2, z = 3, u = 4, v = 5$. **394.** $x = 1, y = -1, z = 0, t = 2$. **410.** $(t; 2t; 3t)$, где t — произвольное действительное число. **411.** $(2t; 2t; t)$, где t — произвольное действительное число. **412.** $(0; 0)$. **413.** Прямая $x'\cos\alpha - y'(1 + \sin\alpha) = 0$.

414. $B = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ **415.** $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ **416.** $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

417. $x = 1, y = 2, z = 3$. **418.** $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 11$; $e_1 = \frac{4}{\sqrt{41}}i - \frac{5}{\sqrt{41}}j$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$. **419.** $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$; $r_1 = \alpha(i-k)$, $r_2 = \beta(i-j+k)$, $r_3 = \gamma(i+2j+k)$. **423.** $\frac{x''^2}{16} + \frac{y''^2}{4} = 1$. **424.** $\frac{x''^2}{25} - \frac{y''^2}{9} = 1$. **425.** $y''^2 = 2\sqrt{2}x''$ **426.** $x'^2 + \frac{y'^2}{1} - \frac{z'^2}{3} = 1$ (однополостный гиперболоид). **427.** $2y''^2 + 3z''^2 = \sqrt{6}x''$ (эллиптический параболоид). **434.** $r(A) = 0$, если $\lambda = 0$; $r(A) = 2$, если $\lambda \neq 0$. **435.** $r(A) = 3$. **436.** $r(A) = 3$, базисные миноры $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

437 $r(A) = 2$; базисные миноры $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. **441.** Система совместна, $r(A) = r(A_1) = 2$; $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$.

442. $r(A) = 1$, $r(A_1) = 2$. Система несовместна. **443.** Система совместна, $r(A) = r(A_1) = 2$. **446.** $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2$. **447.** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. **448.** $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 1, x_5 = 2$. **449.** Система несовместна. **450.** $x = 1{,}96$, $y = 2{,}96$, $z = 5{,}04$. **451.** $x = 1{,}50$, $y = 1{,}16$, $z = 1{,}40$. **457.** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$. **458.** $x_1 = u$, $x_2 = u + 1$, $x_3 = u + 2$, $x_4 = u + 3$. **459.** Система несовместна. **460.** $r(A) = 3$.

Глава V

463. Да. **464.** Нет, так как сумма двух элементов множества не является элементом этого множества. **465.** Нет, так как сумма двух многочленов второй степени может быть многочленом первой степени или постоянной величиной. **466.** Да. **467.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) нет. **468.** Да. **469.** 1) Лишь в том случае, если это нуль-вектор; 2) нет, так как в этом пространстве, кроме векторов x и y, должны быть и другие векторы вида $\lambda x + \mu y$. **470.** Нет, так как в полученном множестве векторов найдутся векторы, сумма которых равна x, например векторы $\frac{1}{2}(x-y)$ и $\frac{1}{2}(x+y)$. **471.** Может. Например, исключив из множества геометрических векторов векторы, не перпендикулярные оси Oz, получим множество векторов $\lambda i+\mu j$, образующее линейное пространство. **473.** Нет, так как $\lambda(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ не принадлежит этой совокупности, если λ — не целое число. **474.** Нет. **475.** Нет, так как противоположные векторы расположены не в I октанте. **488.** Множество всех многочленов не выше n-й степени. **501.** $x = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$. **502.** $x = e'_1 + e'_2 + e'_3 + \quad + e'_n$. **504.** $\xi_1 = \varepsilon\xi'_5$, $\xi_2 = \alpha\xi'_1$, $\xi_3 = \beta\xi'_2$, $\xi_4 = \gamma\xi'_3$, $\xi_5 = \delta\xi'_4$. **505.** Нет, так как имеет место равенство $e'_1+e'_2+e'_3 = \mathbf{0}$, которое невозможно в силу линейной независимости базисных векторов e'_1, e'_2 и e'_3. **506.** Может лишь в том случае, если этим элементом является нуль-вектор. **508.** Пересечением является множество элементов $x_{12} = (0; 0; \xi_3; \xi_4)$, $y_{12} = (0; 0; \eta_3; \eta_4)$, $z_{12} = (0; 0; \zeta_3; \zeta_4)$, Сумма совпадает с пространством R. **509.** $d(R_1) = 3$, $d(R_2) = 3$, $d(R_3) = 2$, $d(R_4) = 4$. **510.** Нет. **513.** R_3 — множество постоянных величин, R_4 — множество многочленов вида $c_0t^4 + c_1t^2 + c_2t + c_3$. **514.** R_3 — множество всех векторов, параллельных оси Ox, а $R_4 = R$. **516.** Множество всех четных функций образует подпространство, а множество нечетных — нет, так как произведение двух нечетных функций есть четная функция. **517.** Нет, так как любой вектор λa не принадлежит этому множеству, если λ — иррациональное число. **522.** $k = 3$; $f_1 = (-1; 0; 1; 0; 0)$, $f_2 = (-1; 0; 0; 1; 0)$, $f_3 = (0; -0,5; 0; 0; 1)$, $f = (-c_1 - c_2; -0,5c_3; c_1; c_2; c_3)$. **526.** Да. **527.** Нет, так как равенство $|a + b| \quad (a + b) = a \quad a + b \quad b$ не выполняется, если $ab \neq 0$. **528.** Лишь в том случае, если $x_0 = \mathbf{0}$. **529.** Лишь при $a = 0$. **530.** Да.

533. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \alpha \end{pmatrix}$ **536.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **538.** $3A - 2B = E$.

544. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **545.** $A^{-1} = A$. **546.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

547. $B = 2E\cos\alpha$. **548.** Линейное преобразование A не имеет обратного, так как $|A| = 0$. **549.** $A^{-2} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **550.** При $\lambda = -2$. **552.** 1) Если $\alpha \neq \beta$, то $\lambda_1 = \alpha$, $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{e}_1$, $\lambda_2 = \beta$, $\boldsymbol{v} = c_2\boldsymbol{e}_2$; 2) если $\alpha = \beta$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$, $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2$. **553.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\boldsymbol{u} = c_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$. **554.** 1) Если $b \neq 0$, то линейное преобразование не имеет собственных векторов; 2) если $b = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2$. **556.** $\lambda = 2$, $\boldsymbol{u} = c_1(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3)$; $\lambda = 3$, $\boldsymbol{v} = c_2(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$; $\lambda = 6$, $\boldsymbol{w} = c_3(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$. **557.** $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$, $\boldsymbol{u} = c(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)$. **558.** $\lambda = 1$, $\boldsymbol{u} = c_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4)$; $\lambda = -1$, $\boldsymbol{v} = c_2(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4)$. **560.** $\lambda = -1$, $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j}$. **563.** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — общая стоимость всех изделий, выпускаемых заводом. **565.** Да. **566.** Нет, так как не выполняются условия 2° и 3°, если $\lambda < 0$. **567.** Да. **569.** $\arccos\frac{1}{n}$. **573.** Да. **576.** $|\boldsymbol{x}| = 5$. **577.** $\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = \frac{1}{15}\boldsymbol{e}_1 + \frac{2\sqrt{2}}{15}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{5}\boldsymbol{e}_3 + \frac{8}{15}\boldsymbol{e}_4 + \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{e}_5$. **579.** $\boldsymbol{x}$ — нормированный вектор. **580.** $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **581.** $\pm 0,5(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4)$. **582.** $\lambda = \pm 1$. **587.** Да. **588.** Да. **589.** При $\lambda = \pm 1$. **590.** Да, так как векторы $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_1$, $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_2$ и $\mathrm{A}\boldsymbol{e}_3$ образуют ортонормированный базис. **591.** Да. **596.** $f = 10x_2'^2$ **598.** $\frac{x'^2}{21} + \frac{y'^2}{3} = 1$. **599.** $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$. **600.** $\frac{x'^2}{44} + \frac{y'^2}{4} = 1$.

Глава VI

606. $n = 4$. **607.** $\delta = 0,16\%$. **608.** $\delta = 0,0005\%$. **609.** $\delta = 0,022\%$; $n = 4$; $S = 8765 \pm 0,1$ м^2 **615.** 1; 1; 0; $a^2 - 6a + 6$; $a^2 - 4a$; $a^4 - 4a^2 + 1$; $a^4 - 8a^3 + 18a^2 - 8a + 1$. **616.** $3\lg 2$; $\lg a$; 0; $\lg 3$; 224. **617.** 1) $[-2; 0) \cup (0; 2]$; 2) $[0; 4]$; 3) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $x \neq \frac{\pi(2n+1)}{4}$; 5) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 6) $(\frac{1}{3}; +\infty)$; 7) $[0; 2)$. **618.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $[-4; 4]$; 4) $(-\infty; 3]$; 5) $[-2; 4]$; 6) $(0; 1]$. **619.** 1) Нечетная; 2) четная; 3) ни четная, ни нечетная; 4) четная; 5) ни четная, ни нечетная; 6) четная; 7) нечетная. **620.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 6π; 3) π; 4) π. **657.** $\frac{1}{2}$. **658.** -1. **659.** $\frac{1}{6}$. **660.** -2. **661.** $-\sin a$. **662.** $\frac{m}{n}$. **663.** $\sec^2 x_0$. **664.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **665.** $\frac{1}{2}$. **666.** ∞. **667.** 2. **668.** $\frac{3}{4}$. **669.** $-\frac{1}{4}$. **670.** $\frac{1}{2}$. **671.** 3. **672.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **673.** $\frac{25}{9}$. **674.** $\frac{1}{2}$. **675.** m. **676.** 1, если $x \to +\infty$; -1, если $x \to -\infty$. **677.** $\frac{1}{2}(a - c)$. **678.** 0. **679.** 0. **680.** $\ln 5$. **681.** $\ln\frac{8}{7}$ $\ln\frac{8}{5}$. **682.** 2. **683.** $\ln 5$. **684.** $\frac{1}{4}$. **685.** 1, если $x \to +0$; -1, если $x \to -0$. **686.** $+\infty$. **687.** 2. **688.** 0. **689.** Не существует. **690.** $\frac{5}{4}$. **691.** $\ln a$. **692.** e. **693.** e^3 **694.** $\frac{1}{6}$. **695.** $\ln\frac{5}{4}$. **696.** 1. **697.** -3. **698.** 0. **699.** $\frac{1}{2}$. **700.** e^{10} **701.** $\sqrt{e}$. **702.** e^{a-b} **703.** $\sqrt{e}$. **708.** $y \sim x$. **709.** 2. **710.** $\frac{1}{2}$. **711.** $\alpha = o(\beta)$. **712.** $\alpha \sim \beta$. **713.** $\alpha \sim \beta$. **714.** $\frac{1}{3}$. **715.** $\frac{9}{4}$. **716.** $-\frac{1}{2}$. **717.** $-\frac{1}{2}$. **718.** $-\frac{1}{2}$. **719.** 1. **720.** $\frac{9}{25}$. **721.** $\frac{\ln 5 \cdot \ln 4}{\ln 3 \cdot \ln 6}$. **722.** 1,6. **726.** $x = 2$ — точка скачка. **727.** $x = 1$, $x = 5$ — точки разрыва II рода. **728.** $x = 3$ — точка скачка; $x = 5$ — точка разрыва II рода; $x = 0$ — точка устранимого разрыва; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$ — точки разрыва II рода. **729.** $x = 1$, $x = 2$ — точки устранимого разрыва. **730.** $x = -2$, $x = -3$ — точки разрыва II рода; $x = -1$ — точка устранимого разрыва. **731.** Функция непрерывна в бесконечном промежутке $(-\infty; +\infty)$. **732.** Разрыв II рода. **733.** $x = 0$ — точка устранимого разрыва. **734.** 1) Функция непрерывна; 2) имеет одну точку разрыва II рода; 3) имеет две точки разрыва II рода; **735.** 1) Функция непрерывна; 2) имеет две точки разрыва II рода; 3) имеет четыре точки разрыва II рода.

Глава VII

739. $y' = -\frac{2}{x^3}$. **740.** $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **741.** $y' = 5\cos x - 3\sin x$. **742.** $y' = 5\,\mathrm{tg}^2\, x$. **743.** $y' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. **744.** $y' = 2^{x^2}\ 2x\ \ln 2$. **771.** $y' = -\frac{21}{x^4}$. **772.** $y' = \sqrt[3]{x}$. **773.** $y' = x^2\sqrt{x}(1-x^2)^2$ **774.** $y' = -x^2e^{-x}$ **775.** $y' = 9x^2\ln x$. **776.** $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \ln\frac{8}{9}$. **777.** $y' = x^2\cos x$. **778.** $y' = \frac{6(x+1)}{2x^2+3x}$. **779.** $y' = -\frac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}$. **780.** $y' = \arccos\frac{x}{2}$. **781.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}$. **782.** $y' = -\cos x$. **783.** $y' = -\cos^2\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$. **784.** $y' = \mathrm{cosec}\,\frac{2x+1}{2}$. **785.** $y' = \frac{1}{\cos x}$. **786.** $y' = 2\sec^6 2x$. **787.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin^2\sqrt{x}\cos^5\sqrt{x}$. **788.** $y' = \frac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$. **789.** $y' = \sqrt{a^2-x^2}$. **790.** $y' = -\frac{2\sec^2 x}{\sqrt{\mathrm{tg}\,x(4\,\mathrm{tg}\,x+1)}}$. **791.** $y' = \mathrm{ctg}^3\frac{x}{2}$. **792.** $y' = \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$. **793.** $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **794.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **795.** $y' = \frac{6x^2}{1+x^6}$. **796.** $y' = \frac{6\,\mathrm{sgn}\,x}{x^2+9}$. **797.** $y' = -2e^{-x}\sin^2 e^{-x}$ **798.** $y' = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **799.** $y' = -\frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$. **800.** $y' = 3e^{\sin^2 3x}\sin 6x\sin^2 3x$. **801.** $y' = -\frac{24\ln\sin x\cdot\mathrm{ctg}\,x}{4\ln^4\sin x - 9}$. **802.** $y' = \sec x$. **803.** $y' = \mathrm{cosec}\,x$. **804.** $y' = e^{\sqrt{2x}}$ **805.** $y' = \frac{10}{x(x^5+2)}$. **806.** $y' = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$. **807.** $y' = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. **808.** $y' = \mathrm{cosec}^2\frac{x}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$. **809.** $y' = \frac{2}{x}\cos^2\ln x$. **810.** $y' = 5x^4\ln(x^5+3)$. **811.** $y' = -\frac{x}{|x|\sqrt{5-x^2}}$. **812.** $y' = \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}$. **813.** $y' = 0$. **814.** $y' = \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}}$. **815.** $y' = \frac{1}{(1-mx^2)^{3/2}}$. **816.** $y' = 4x\cos^2 x$. **817.** $y' = -2\,\mathrm{cosec}^3 x$. **818.** $y' = \frac{\cos x\ln\sin x}{(1+\ln\sin x)^2}$. **819.** $y' = 9x\sin^2 x\cos x$. **820.** $y' = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$. **821.** $y' = 2e^x\sin^2 e^x$ **822.** $y' = \frac{2}{(x^2+2x+2)^2}$. **823.** $y' = \ln^3 x$. **824.** $y' = \frac{\ln\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$. **825.** $y' = \frac{2(1+\ln x)}{x^x+x^{-x}}$. **826.** $y' = \frac{1}{\sin^5 x}$. **827.** $y' = \frac{\cos^4 x}{\sin x}$. **828.** $y' = \frac{1}{3\sin x+4\cos x+5}$. **829.** $y' = \cos x\,\mathrm{tg}^3\sin x$. **830.** $y' = \frac{1}{x^2(x-1)}$. **831.** $y' = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. **832.** $y' = 4x\,\mathrm{tg}^2\,2x$. **833.** $y' = -\frac{2e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **834.** $y' = \frac{\ln\ln\ln x}{x\ln x}$. **835.** $y' = 2e^{2x}\frac{1-2x}{(x+e^{2x})^2}$. **836.** $y' = \frac{2(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x-1}$. **837.** $y' = \frac{3}{1+x^2}$.

838. $y' = \dfrac{e^{2\sin x}\cos x}{\sin(e^{2\sin x}/2)}$. **839.** $y' = a\sin 2x$. **840.** $y' = 3\sec^2 x \sec^4 \operatorname{tg} x$. **841.** $y' = \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\operatorname{arctg} x$. **842.** $y' = \left(-\dfrac{5}{x^6}\right)\ln x$. **843.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}\ln(2x+1)$. **844.** $y' = \sec x \operatorname{tg} x \ln\sec x$. **845.** $y' = -\dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **846.** $y' = 3\cdot 2^{\cos^3 x - 3\cos x}\cdot\sin^3 x\cdot\ln 2$.

847. $y' = \dfrac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot\ln\dfrac{32e}{81}$. **848.** $y' = 0$. **849.** $y' = x\cos 2x$. **850.** $y = 2e^{x^2}x\dfrac{x^4+x^2+1}{(x^2+1)^2}$.

851. $y' = \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$. **852.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$. **853.** $y' = \dfrac{x^2}{x^4-a^4}$. **854.** $y' = -\dfrac{4x}{\sqrt{x^4+1}}$.

855. $y' = e^{0,5\operatorname{tg}^2 x}\sin x\operatorname{tg}^2 x$. **856.** $y' = \dfrac{8x^3}{1+x^8}$. **857.** $y' = xe^{x^2}(2x^2\ln x + 2\ln x + 1)$.

858. $y' = 0,5\ln 2\sqrt{\dfrac{2^x}{1-2^x}}$. **859.** $y' = -\dfrac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$. **860.** $y' = \dfrac{mx+n}{\sqrt{-x^2+2\alpha x+\beta}}$. **861.** $y' = \dfrac{2}{\ln 2}\cdot\operatorname{ctg} x$. **862.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}\ln a}$. **863.** $y' = x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{x}\right)$.

864. $y' = 8\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$. **865.** $y' = \dfrac{2^x(x+1)^3}{(x-1)^2\sqrt{2x+1}}\left(\ln 2 + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2x+1}\right)$.

866. $y' = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$. **867.** $y' = x^m\cos(n\ln x)$. **868.** $y' = (x\operatorname{tg} x + \ln\cos x)\times\sec^2(x\operatorname{tg} x + \ln\cos x)x\sec^2 x$. **869.** $y' = -x\sin x\cdot\ln(x\cos x - \sin x)$. **870.** $y' = 3\cos^3(xe^x - e^x)\cdot xe^x$ **871.** $y' = -\dfrac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$. **872.** $y' = \begin{cases} 1 & \text{при } x>0, \\ -1 & \text{при } x<0. \end{cases}$

873. $y' = \begin{cases} f'(x) & \text{при } f(x) > 0, \\ -f'(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$ **874.** $y' = \begin{cases} 3 & \text{при } x > \frac{5}{3}, \\ -3 & \text{при } x < \frac{5}{3}. \end{cases}$ **875.** $y' = \begin{cases} e^x & \text{при } x > 0, \\ -e^{-x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$ **876.** $y' = \begin{cases} -2 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < 2, \\ 2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$ **877.** $y' = 2xe^x\sin x$.

878. $y' = \dfrac{x\cos x}{\sqrt{(x\sin x+\cos x)^2+1}}$. **879.** $y' = \dfrac{x^{x+1}\ln x(\ln x - 1)}{e^x}$. **880.** $y' = \dfrac{\operatorname{ctg} x\cdot\ln\cos x + \operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$. **881.** $y' = \dfrac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}$. **882.** $y' = -\dfrac{(\log_x e)^2}{x}$.

883. $y' = 0$. **884.** $y' = \frac{1}{2}$. **885.** $y' = 0$. **886.** $y' = x^x(1+\ln x)$. **887.** $y' = x^{-x}\cdot 2^x\times x^2\left(\ln 2 + \frac{2}{x} - 1 - \ln x\right)$. **888.** $y' = 2x^{\ln x - 1}\ln x$. **889.** $y' = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}\times\left[\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{1}{5x-1}\right]$. **893.** $(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. $(\operatorname{arccosec} x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **894.** $4\operatorname{cosec}^2 x$. **898.** $y' = \dfrac{x^2-y}{x-y^2}$. **899.** $y' = -\dfrac{Ax+By+D}{Bx+Cy+E}$. **900.** $y' = \dfrac{x}{3y}$. **901.** $y' = \dfrac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$. **902.** $y' = -\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$. **903.** $y' = -\dfrac{e^x - y\cdot 2^{xy}\cdot\ln 2}{e^y - x\cdot 2^{xy}\cdot\ln 2}$.

904. $y' = 2x$. **905.** $y' = \frac{y}{x}$. **906.** $y' = -\frac{y}{2x\ln x}$. **907.** $y' = -\frac{2x\sin y - y^3\sin x - 2}{x^2\cos y + 3y^2\cos x - 3}$. **909.** $-\operatorname{ctg} t$. **910.** e^{2t} **911.** $2\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}}$ **912.** $\operatorname{cth} t$. **914.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $y = x + 1$. **917.** $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0)$. **918.** $x - y + 1 = 0$. **919.** $x + y - 1 = 0$; $x - y = 0$. **920.** $x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$; $x + y - \frac{\pi}{2} = 0$. **921.** $3x - y - 4 = 0$; $x + 3y - 28 = 0$. **923.** $\frac{\pi}{4}$. **924.** $3x - 8y + 10 - 6\ln 2 = 0$; $32x + 12y - 15 - 64\ln 2 = 0$. **925.** $x\operatorname{ch} t_0 - 1 = 0$. **926.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{3}$. **927.** $\frac{\pi}{4}$. **928.** $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$. **929.** $\operatorname{tg}\varphi_1 = 3$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = -3$. **930.** $\frac{\pi}{2}$. **933.** 1,76 м/с. **934.** $x'_t = \sqrt[3]{a}$. **939.** $\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. **940.** $\operatorname{tg}\omega = \varphi$; если $\varphi \to \infty$, то $\omega \to \frac{\pi}{2}$. **941.** $\frac{\pi}{2} + \varphi$. **942.** 0. **943.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{m}$. **944.** $\pi - \operatorname{arctg}\frac{125}{64}$. **950.** $y'' = -\frac{44}{(x+5)^3}$. **951.** $y'' = \ln x$. **952.** $y'' = 2\sqrt{1 - x^2}$. **953.** $y'' = x\sin 3x$. **954.** $y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. **955.** $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a}\operatorname{cosec}^4\frac{t}{2}$. **956.** $\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sqrt{t - t^2}$. **959.** $-\frac{1}{3}$ м/с^2 **960.** $y''' = \frac{1}{(x+1)^4}$. **961.** $y''' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$. **962.** $y''' = 105\sqrt{2x+3}$. **963.** $y''' = 4\operatorname{sh} 2x$. **964.** $y^{(n)} = \frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$. **965.** $y^{(n)} = \frac{n!(-2)^n}{(2x+1)^{n+1}}$. **966.** $y^{(n)} = -1{,}5\cdot 2^n \times \cos(2x + \frac{\pi}{2})$. **967.** $y^{(n)} = [2^x + (-1)^n\cdot 2^{-x}]\ln^n 2$. **968.** $y^{(n)} = \frac{n!(ad - bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$. **969.** $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ **970.** $y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$. **971.** $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n\ \frac{1}{t}$. **972.** $y''' = y^{IV} = \quad = 0$. **982.** $dy = \sqrt{49 - x^2}\,dx$. **983.** $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$. **984.** $dy = \operatorname{th}\frac{x}{2}\,dx$. **985.** $dy = \frac{2e^{2x}dx}{1 + e^{4x}}$. **986.** $dy = \ln x\,dx$, $d^2y = \frac{(dx)^2}{x}$, $d^3y = -\frac{(dx)^3}{x^2}$. **987.** $d^2y = \frac{-x(dx)^2}{(x^2+4)^{3/2}}$. **988.** $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$, $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$. **989.** $\Delta y = 0{,}0401$; $dy = 0{,}04$. **990.** $34{,}04$ м^3 **991.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{13}$. **992.** 0,811. **993.** 1,035. **994.** 0,078. **995.** 1,9938. **1007.** $\xi = \frac{5}{2}$. **1008.** $\frac{1}{x_0} - \frac{x - x_0}{x_0^2} + \frac{(x - x_0)^2}{x_0^3} - \frac{(x - x_0)^3}{x_0^4} + R_3$, где $R_3 = \frac{(x - x_0)^4}{\xi^5}$. **1009.** $M(\sqrt{3}; 0)$. **1010.** 0,754. **1011.** 4,946. **1012.** 1,395. **1013.** 2,002. **1014.** 0,587 **1024.** $\frac{3}{5}$. **1025.** 2. **1026.** $\frac{2}{3}$. **1027.** $\frac{1}{3}$. **1028.** 0,18. **1029.** 18. **1030.** 1. **1031.** 0. **1032.** $\frac{1}{2}$. **1033.** ∞. **1034.** 0. **1035.** $\frac{1}{\pi}$. **1036.** 1. **1037.** 0. **1038.** $-\frac{1}{2}$. **1039.** $\frac{p - q}{2}$. **1040.** $\frac{2}{3}$. **1041.** 1. **1042.** e^{-6} **1043.** 2. **1044.** $e^{1/3}$ **1055.** Возрастает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 1)$. **1056.** Убывает на $(-\infty; -1)$, возрастает на $(-1; +\infty)$. **1057.** Возрастает на $(-\infty; 1)$, убывает на $(1; +\infty)$. **1058.** Убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, возрастает на $(-1; 1)$. **1059.** $y_{\min} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y\left(2\sqrt[3]{\frac{2}{49}}\right) = \frac{12}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$. **1060.** $y_{\max} = y\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{13}{4}$. **1061.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **1062.** $y_{\min} = y(0) = 1$. **1063.** $y_{\min} = y(e) = e$.

1064. $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$. **1065.** $y_{\min} = y(1) = 0$. **1066.** $y_{\min} = y(3) = 0$, $y_{\max} = y(2) = 3$. **1067.** $y_{\min} = y(1) = -1$. **1068.** $y_{\max} = \frac{1}{12}(\pi - 12 + 6\sqrt{3})$, $y_{\min} = \frac{1}{12}(5\pi - 12 - 6\sqrt{3})$. **1069.** $y_{\max} = e^{3/2}$, $y_{\min} = e^{-3/2}$. **1070.** $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}} = 66$. **1071.** $(0; 4)$ и $(0; -4)$. **1072.** 25 км; 8 ч 15 мин. **1073.** $5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$. **1074.** $\frac{l}{4}, \frac{l}{4}$. **1075.** $V = 2\pi l^3\frac{\sqrt{3}}{27}$. **1076.** $V = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. **1077.** На расстоянии 9 км от A. **1078.** 125 м. **1079.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **1083.** Выпукла на $(-\infty; -2)$, вогнута на $(-2; +\infty)$. **1084.** $(4; 20)$. **1085.** $(1; 0)$. **1086.** Точек перегиба нет. **1091.** $x = 0$; $y = 2x$. **1092.** $x = 0$; $y = -3x$. **1093.** $y = x - 6$. **1094.** $y = 0,5x + \pi$ и $y = 0,5x$. **1095.** $y = 0,5\pi x + 1$ и $y = -0,5\pi x + 1$. **1098.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$; функция четная и периодическая с периодом π. Возрастает на $\left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, убывает на $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$; $y_{\min} = y(\pi k) = 0$, $y_{\max} = y\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Кривая вогнута на $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$ и выпукла на $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$; точки перегиба $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. **1099.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$, функция нечетная. Убывает на $(-\infty; -1)$ и на $(1; +\infty)$, возрастает на $(-1; 1)$; $y_{\min} = y(-1) = -2$, $y_{\max} = y(1) = 2$. Кривая вогнута на $(-\infty; 0)$ и выпукла на $(0; +\infty)$; точка перегиба $(0; 0)$. **1100.** $D(y) = (1; +\infty)$; асимптоты $x = 1$, $y = 0$. Убывает во всей области определения. Кривая всюду вогнута. Экстремумов и точек перегиба нет. **1101.** $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; асимптоты $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(1; +\infty)$. Кривая всюду вогнута. Экстремумов и точек перегиба нет. **1102.** $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$; функция нечетная; асимптоты $x = -2$, $x = 2$, $y = -x$. Возрастает на $(-\infty; -2\sqrt{3})$ и на $(2\sqrt{3}; +\infty)$, убывает на $(-2\sqrt{3}; -2)$, $(-2; 2)$ и на $(2; 2\sqrt{3})$; $y_{\min} = y(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$, $y_{\max} = y(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$. Кривая выпукла на $(-\infty; -2)$ и на $(0; 2)$, вогнута на $(-2; 0)$ и на $(2; +\infty)$; точка перегиба $(0; 0)$. **1103.** $D(y) = (0; +\infty)$; асимптота $y = 0$. Возрастает на $(0; e^2)$, убывает на $(e^2; +\infty)$; $y_{\max} = y(e^2) = \frac{2}{e}$. Кривая выпукла на $(0; e^{8/3})$ и вогнута на $(e^{8/3}; +\infty)$; точка перегиба $\left(e^{8/3}; \frac{8}{3}e^{-4/3}\right)$. **1104.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$, возрастает на $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; $y_{\min} = y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{16}$. Кривая вогнута на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ и на $(1; +\infty)$, выпукла на $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; точки перегиба $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ и $(1; 0)$. **1105.** $D(y) = [0; +\infty)$. Убывает на $\left(0; \frac{1}{3}\right)$, возрастает на $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; $y_{\min} = y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Кривая всюду вогнута. **1106.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$; асимптота $y = x$. Убывает на $(-\infty; 0)$, возрастает на $(0; +\infty)$; $y_{\min} = y(0) = 1$. Кривая всюду вогнута. **1107.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$; функция нечетная; асимптоты $y = -1$ и $y = 1$. Возрастает на $(-\infty; +\infty)$. Кривая вогнута на $(-\infty; 0)$ и выпукла на $(0; +\infty)$; точка перегиба $(0; 0)$. **1108.** $D(y) = (-\infty; +\infty)$, асимптота $y = 0$. Возрастает на $(-\infty; 1)$, убывает на $(1; +\infty)$; $y_{\max} = y(1) = e$. Кривая вогнута на $\left(-\infty; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и на $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$, выпукла на $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

точки перегиба $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$ и $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e}\right)$. **1109.** $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$; асимптоты $x=2$ и $y=x+4$. Возрастает на $(-\infty;2)$ и на $(6;+\infty)$, убывает на $(2;6)$; $y_{\min}=y(6)=\frac{27}{2}$. Кривая выпукла на $(-\infty;0)$, вогнута на $(0;2)$ и на $(2;+\infty)$; точка перегиба $(0;0)$. **1114.** $R=\frac{25}{3}$. **1115.** $R=\frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}$. **1116.** $k=\frac{1}{e\sqrt{2}}$. **1117.** $(2;2)$. **1118.** Окружность $\xi^2+\eta^2=1$. **1121.** Первый. **1122.** Первый. **1123.** Третий. **1124.** Первый. **1125.** Третий. **1126.** Второй. **1128.** Окружность $x^2+z^2=1$, $y=1$. **1129.** Прямая, проходящая через начало координат и образующая с осями координат равные углы. **1130.** Прямая, параллельная оси Oz и проходящая через точку $(1;1;0)$. **1131.** Равносторонняя гипербола, лежащая в плоскости xOz. **1134.** $(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})\operatorname{sh}2t+\boldsymbol{j}\operatorname{ch}2t$. **1135.** 0. **1136.** $3(t^2-2t^5)\boldsymbol{i}+(5t^4-2t)\boldsymbol{j}$. **1138.** $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$, $2x-2z\sqrt{3}+3\pi=0$. **1139.** $M_1(0;0;-1)$ и $M_2\left(\frac{2}{3};-\frac{8}{9};-\frac{1}{27}\right)$. **1140.** $70°23'$ **1141.** $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}$, $x+z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$. **1142.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1}$. **1143.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$. **1144.** $\arccos\frac{14}{3\sqrt{29}}$. **1146.** $ds=\sqrt{a^2+b^2}\,dt$. **1147.** $h=2\sqrt{3}\pi$. **1148.** $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-3\sin t\cdot\boldsymbol{i}+3\cos t\cdot\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-3\cos t\cdot\boldsymbol{i}-3\sin t\cdot\boldsymbol{j}$. **1149.** $\boldsymbol{v}|_{t=1}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{w}|_{t=1}=2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$. **1151.** $\frac{5}{13}\boldsymbol{i}-\frac{12}{13}\sin t\cdot\boldsymbol{j}+\frac{12}{13}\cos t\cdot\boldsymbol{k}$. **1152.** $-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{k}$. **1157.** $\sigma=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}$. **1160.** $xa\sin t-ya\cos t-z\sqrt{R^2-a^2}+(R^2-a^2)t=0$. **1161.** $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$. **1162.** $\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$. **1163.** $-\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$. **1164.** $\frac{2}{27}$. **1165.** $\frac{2}{27}$. **1166.** $x-2y+2z-2=0$. **1167.** $2x-y-2z-7=0$. **1168.** $2x+2y+z-19=0$.

Глава VIII

1174. $x^2+y^2\geqslant 1$ — часть плоскости вне единичного круга с центром в начале координат. **1175.** Часть плоскости внутри круга $x^2+y^2<1$. **1176.** Полоса между параллельными прямыми $x+y\leqslant 1$ и $x+y\geqslant -1$. **1177.** Концентрические кольца $\frac{\pi}{2}\geqslant x^2+y^2\geqslant 0$, $\frac{5\pi}{2}\geqslant x^2+y^2\geqslant\frac{3\pi}{2}$, ... **1178.** $y>x$ — полуплоскость, лежащая выше биссектрисы $y=x$. **1179.** Полуплоскость $x\geqslant 0$. **1180.** Шар $x^2+y^2+z^2<a^2$ **1181.** Часть пространства вне конуса $x^2+y^2-z^2=0$. **1182.** Часть пространства внутри шара $x^2+y^2+z^2<1$, за исключением начала координат. **1183.** Часть пространства над плоскостью $x+y+z=0$, включая эту плоскость. **1184.** Семейство параллельных прямых $2x+y=C$. **1185.** Семейство прямых $y=Cx$. **1186.** Семейство прямых $y=e^{2C}x$, или $y=C_1x$ $(C>0)$. **1187.** Семейство парабол $y=C\sqrt{x}$. **1188.** Семейство равносторонних гипербол $xy=C$ (при $C\neq 0$); совокупность координатных осей Ox и Oy (при $C=0$). **1189.** Семейство плоскостей $x+y+3z=C$. **1190.** Семейство сфер $x^2+y^2+z^2=C$. **1191.** Семейство двуполостных гиперболоидов $x^2-y^2-z^2=C$ (при $C>0$); семейство однополостных гипер-

болоидов $x^2 - y^2 - z^2 = C$ (при $C < 0$); конус $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ (при $C = 0$).
1197. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y - 4$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y - 3x + 2$. **1198.** $\frac{\partial r}{\partial \rho} = 2\rho\sin^4\theta$, $\frac{\partial r}{\partial \theta} = 4\rho^2\sin^3\theta\cos\theta$. **1199.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}$. **1200.** $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy(x^2+y^2)} \times (3x^2y + y^3)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy(x^2+y^2)}(x^3 + 3xy^2)$. **1201** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}$. **1202.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{x/y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}e^{x/y} + \frac{z}{y^2}e^{-z/y}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{y}e^{-z/y}$
1203. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}$. **1204.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2(x^3+y^2) \times e^{(x^2+y^2)^2}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y(x^3+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}$ **1205.** $\frac{\partial u}{\partial x} = (y-z)(2x-y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x-z)(x-2y+z)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = (x-y)(-y+2z-x)$. **1206.** $\frac{\partial u}{\partial x} = (6x-y)e^{3x^2+2y^2-xy}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (4y-x)e^{3x^2+2y^2-xy}$ **1207.** $\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz}\sin\frac{y}{x} + \frac{1}{x}e^{xyz}\cos\frac{y}{x}$. **1209.** ρ.
1214. $dz = \frac{2(x\,dx + y\,dy)}{x^2+y^2}$. **1215.** $dz = \frac{2(x\,dy - y\,dx)}{x^2\sin^2(2y/x)}$. **1216.** $2(x\,dx + y\,dy) \times \cos(x^2+y^2)$. **1217.** $dz = x^y\left(\frac{y}{x}dx + \ln x\,dy\right)$. **1218.** $du = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \left(dx + \frac{y\,dy}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. **1219.** $dz = e^x[(x\cos y - \sin y)\,dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)\,dx]$.
1220. $dz = e^{x+y}\{[(x+y)\cos y + y(\sin x + \cos x)]\,dx + [x(\cos y - \sin y) + (y+1)\sin x]dy\}$. **1221.** $dz = \frac{2\,dx}{x^2+4} + \frac{2\cos y\,dy}{\sin^2 y + 4}$. **1222.** $du = e^{xyz}(yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$. **1223.** 1,08. **1224.** $-0{,}03$. **1225.** 1,013. **1226.** 3,037
1227. 1,05. **1232.** $6(x+y)$. **1233.** $-\sin(x+y)$. **1234.** $-4\frac{\cos(2x+2y)}{\sin^2(2x+2y)}$. **1235.** 0.
1236. $\frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$. **1237.** $y(2-y^2)\cos xy - xy^2\sin xy$. **1238.** $\sin y\cos(x+\cos y)$.
1239. $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}[(dy)^2 - (dx)^2] - \frac{4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **1240.** $-\cos(x+y)(dx+dy)^2$
1241. $ae^y[e^y\sin(ax+e^y) - \cos(ax+e^y)]$. **1242.** 4. **1244.** $2[(dx)^2 - dx\,dy + (dy)^2]$.
1249. $e^{xy}\left[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2\,dx\,dy\right]$. **1250.** $-\left(\frac{dx+dy}{x+y}\right)^2$. **1251.** $-\frac{6}{x^4}(y\,dx - x\,dy) \times (dx)^2$ **1252.** $6\,dx\,dy\,dz$. **1253.** $\frac{2}{y^4}(4y\,dx - 3x\,dy)(dy)^3$ **1254.** $e^{x+y}(dx+dy)^5$
1257. $\frac{4}{\sin 2x}$. **1258.** $\frac{2x(3x+2)}{(x^2+3x+1)^2}$. **1259.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos x$, $\frac{dz}{dx} = x(2\cos x - x\sin x)$.
1260. 0. **1261.** $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 4\xi$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 4\eta$. **1262.** $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{2}{\xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{2(\eta^4-1)}{\eta(\eta^4+1)}$. **1268.** $\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_M = \frac{7}{5}$.
1269. $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \frac{1}{6}$. **1270.** $\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_M = \frac{7}{9}$. **1271.** $|\operatorname{grad} u|_M = \frac{1}{r_0^2}$; $\cos\alpha = -\frac{x_0}{r_0}$, $\cos\beta = -\frac{y_0}{r_0}$, $\cos\gamma = -\frac{z_0}{r_0}$, где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. **1272.** $|\operatorname{grad} u|_M = 3$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{2}{3}$. **1273.** $\frac{1}{3}$. **1278.** $-\frac{x}{y}$. **1279.** $\frac{y}{x}$. **1280.** $y' = -\frac{y}{x}$.

$y'' = \frac{2y}{x^2}$. **1281.** $\frac{y\sqrt{2xy} - x^2}{2y^2 - x\sqrt{2xy}}$. **1282.** $\frac{y}{x}$. **1283.** $\frac{a^2 - b^2}{2b^2 - a^2}$. **1284.** $\frac{y}{2x}$. **1285.** $\frac{x+y}{x-y}$. **1286.** $\frac{1}{2^y \ln 2}$. **1287.** $y' = 1$, $y'' = 0$. **1288.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x+y+z-1}$. **1289.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 - xz}{z^2 - xy}$. **1290.** $\frac{dx + \frac{z}{y}\,dy}{1 + \ln\frac{z}{y}}$. **1291.** $-\frac{x\cos y + \sin x}{\sin x}$. **1292.** $-\frac{(y+z)\,dx + (x+z)\,dy}{x+y}$. **1293.** $-y-z-e^{y-x}$ **1294.** 1. **1297.** $2x+2y-z=1$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$. **1298.** $2x + 2y - 3z + 1 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$. **1299.** $z-2x+2=0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$. **1300.** $x-y-2z+1=0$, $\frac{x-\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}$. **1301.** $x+4y+6z\pm 21=0$. **1303.** $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **1307.** $z_{\max} = \frac{1}{64}$. **1308.** $z_{\min} = -125$. **1309.** $z_{\max} = 4$. **1310.** $z_{\min} = 0$. **1311.** $z_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{9}$ при $x = y = \frac{2a}{3}$. **1315.** $z_{\min} = \frac{144}{25}$ в точке $\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right)$. **1316.** $z_{\text{наим}} = -\frac{16}{3}$, $z_{\text{наиб}} = 16$. **1317.** $z_{\text{наим}} = 5$, $z_{\text{наиб}} = 11$. **1318.** $z_{\text{наим}} = -\frac{1}{2}$, $z_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}$. **1319.** $z_{\text{наим}} = 1$, $z_{\text{наиб}} = 4$. **1320.** $z_{\text{наим}} = -2(\sqrt{2} + 1) \approx -4.8$, $z_{\text{наиб}} \approx 0,8$. **1321.** $z_{\text{наим}} = 0$, $z_{\text{наиб}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **1322.** $z_{\text{наим}} = -3$ при $x = y = \frac{3\pi}{2}$, $z_{\text{наиб}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x = y = \frac{5\pi}{6}$. **1323.** $z_{\text{наим}} = -\frac{1}{8}$, $z_{\text{наиб}} = 1$. **1324.** Правильный. **1325.** Правильный. **1326.** Квадрат; $P_{\text{наим}} = 4\sqrt{S}$. **1327.** Куб; $V_{\max} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}}$.

Глава IX

1337. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. **1338.** $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}+C$. **1339.** $2\arcsin x - x + C$. **1340.** $\operatorname{arctg} x + x - \frac{x^3}{3} + C$. **1341.** $\frac{e^{3x}\cdot 3^x}{3+\ln 3} + C$. **1342.** $\operatorname{tg} x - x + C$. **1343.** $\operatorname{ch} x + \cos x + C$. **1344.** $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$. **1345.** $4\operatorname{tg} x - 9\operatorname{ctg} x - x + C$. **1346.** $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$. **1347.** $\ln|\ln x| + C$. **1348.** $\frac{3(ax^2+b)^{4/3}}{8a} + C$. **1349.** $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x} + C$. **1350.** $-\frac{1}{b} \times \cos(a+bx) + C$. **1351.** $\sin(\sin x) + C$. **1368.** $e^{\sqrt{2x-1}} + C$. **1369.** $-\frac{1}{32}(1-2x^4)^4 + C$. **1370.** $\frac{1}{3}\cos(2-3x) + C$. **1371.** $\frac{1}{10}\operatorname{sh}(5x^2+3) + C$. **1372.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$. **1373.** $\frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} + C$. **1374.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$. **1375.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 + \sqrt{x^4 - 1}| + C$. **1376.** $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(0,5\cos^2 2x) + C$. **1377.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}\right| + C$. **1378.** $2 \times \arcsin\frac{e^{x/2}}{4} + C$. **1379.** $\ln|x + \sqrt{2+x^2}| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$. **1380.** $-\frac{2}{9}\sqrt{2-3x^3} + C$. **1381.** $-5\sqrt{3-x^2} + 3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$. **1382.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4} + C$. **1383.** $2\sqrt{3x+5} +$

$+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{3x+5}+\sqrt{5}}\right|+C$. **1384.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(x^2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)+C$. **1392.** $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+$ $+C$. **1393.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **1394.** $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(x^2+1)+C$. **1395.** xe^x+C. **1396.** $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$. **1397.** $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^4-2x^2+2)+C$. **1398.** $(x+1)^2\sin x+2(x+1)\cos x+C$. **1399.** $0,5(x\sqrt{x^2+\lambda}+\lambda\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)+$ $+C$. **1400.** $\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C$. **1401.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. **1402.** $-2\sqrt{x}\times$ $\times\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$. **1410.** $-\frac{1}{3(x-1)^3}+C$. **1411.** $-\frac{1}{4(2x+3)^2}+C$. **1412.** $\frac{1}{3}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C$. **1413.** $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^3+1}{\sqrt{2}}+C$. **1414.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7)+C$. **1415.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+10x+29)-11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2}+C$. **1416.** $\frac{1}{10}\ln(5x^2+2x+1)+$ $+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{2}+C$. **1417.** $\frac{x}{8(x^2+2)^2}+\frac{3x}{32(x^2+1)}+\frac{3\sqrt{2}}{64}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. **1418.** $\frac{x-7}{8(x^2+2x+5)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **1428.** $-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-3|+C$. **1429.** $-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **1430.** $\frac{1}{2(x-1)^2}+$ $+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$. **1431.** $\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$. **1432.** $\frac{31}{108}\ln|x-3|+\frac{29}{108}\ln|x+3|+\frac{2}{9}\ln(x^2+9)-\frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. **1433.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{x-1}{2x(x-2)}+C$. **1434.** $\frac{1}{16}\ln\frac{x^2+1}{x^2+9}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$. **1435.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+4}{x^2+2x+5}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{7}{32}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **1436.** $\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}(x-1)+$ $+\operatorname{arctg}(x+1)]+C$. **1437.** $x+\frac{9}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$. **1438.** $\frac{x^2}{2}+7x+$ $+\frac{75}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$. **1439.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. **1440.** $3x+$ $+\ln|x|+2\operatorname{arctg}x+C$. **1442.** $\frac{1}{32}\ln|e^x-2|^{13}(e^x+2)^7+\frac{3}{16}\ln(e^{2x}+4)-\frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}-$ $-x+C$. **1443.** $\frac{5}{6}\ln|e^x-1|+\frac{16}{5}\ln(2e^x+1)+\frac{11}{20}\ln(e^{2x}+1)-\frac{7}{5}\operatorname{arctg}e^x-3x+C$. **1453.** $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|+C$. **1454.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+$ $+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **1455.** $\ln\left|x-0,5+\sqrt{x^2-x-1}\right|+C$. **1456.** $\arcsin\frac{x+1}{3}+$ $+C$. **1457.** $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arcsin\frac{x-2}{3}+C$. **1458.** $3\sqrt{x^2+x+2}+$ $+0,5\ln|x+0,5+\sqrt{x^2+x+2}|+C$. **1459.** $\sqrt{\frac{x}{x+2}}+C$. **1460.** $-\arcsin\frac{x+1}{x\sqrt{3}}+C$. **1461.** $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$. **1462.** $-\left(\frac{x}{2}+5\right)\sqrt{-x^2+4x}+$ $+13\arcsin\frac{x-2}{2}+C$. **1466.** $\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+\ln\frac{x}{(\sqrt[3]{x}+1)^2}+C$. **1467.** $4\sqrt{\sqrt{x}+1}\times$ $\times\left[\frac{1}{5}(\sqrt{x}+1)^2-\frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)+1\right]+C$. **1468.** $\frac{1}{6}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$,

где $t = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1469.** $\frac{1}{3}\ln\frac{(\sqrt{1+x^3}-1)^2}{|x^3|}+C$. **1470.** $\frac{1}{10}(5x^{4/3}+3)^{3/2}+C$.
1471. $-\frac{(2-x^3)^{2/3}}{4x^2}+C$. **1488.** $\frac{1}{5}\ln\left|5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+3\right|+C$. **1489.** $-\frac{2}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1}+C$.
1490. $-\frac{1}{17}x+\frac{1}{4}\ln|\sin x|-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|+C$. **1491.** $\ln|\sin x|-\sin x+C$.
1492. $-\frac{2}{5}\ln(1-\cos x)+\frac{1}{5}\ln(\cos^2 x+2\cos x+2)-\frac{6}{5}\,\mathrm{arctg}(1+\cos x)+C$.
1493. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$. **1494.** $\ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+C$. **1495.** $\frac{1}{8}x-$
$-\frac{1}{8}\sin x+C$. **1496.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **1497.** $\frac{2}{3}\,\mathrm{tg}^3\frac{x}{2}-2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+x+C$.
1498. $-\frac{1}{6}\,\mathrm{ctg}^2 3x-\frac{1}{3}\ln|\sin 3x|+C$. **1499.** $\mathrm{tg}\,x+\frac{2}{3}\,\mathrm{tg}^3 x+\frac{1}{5}\,\mathrm{tg}^5 x+C$.
1500. $-\frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3 x+C$. **1501.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x\sec x+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C$. **1502.** $-\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,x\times$
$\times\,\mathrm{cosec}\,x-\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|+C$. **1503.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **1504.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+$
$+C$. **1505.** $\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C$. **1509.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$.
1510. $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$. **1511.** $\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C$. **1512.** $-\frac{1}{6}\cos 3x+$
$+\frac{1}{20}\cos 5x+\frac{1}{4}\cos x+C$. **1513.** $-2(2x^2+6x+13)e^{-x/2}+C$. **1514.** $-\frac{2\ln x+1}{4x^2}+C$.
1515. $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{3}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. **1516.** $(x^2-1)\sin 2x+x\cos 2x+C$.
1517. $\frac{1}{4}x^2(2\ln^2 x-2\ln x+1)+C$. **1518.** $x+\ln|e^x-3|+C$. **1519.** $(x+1)\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}-$
$-\sqrt{x}+C$. **1520.** $\frac{2}{\ln 2}(\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{2^x-1})+C$. **1521.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t+$
$+C$, где $t^4=1+x^{-4}$ **1522.** $\sqrt{2}\left[0{,}5(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}+2\arcsin\frac{x-1}{2}\right]+C$.
1523. $\sin e^x-e^x\cos e^x+C$. **1524.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\mathrm{tg}\,x+\sqrt{\mathrm{tg}^2 x+0{,}4}\right|+C$. **1525.** $0{,}5\cos^2 x\times$
$\times(1-2\ln\cos x)+C$. **1526.** $0{,}5\sin(x^2+4x+1)+C$. **1527.** $-0{,}5\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\mathrm{ctg}\,x\right)+$
$+C$. **1528.** $2(x-2)\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$. **1529.** $x\ln(x^2+x)+$
$+\ln|x+1|-x+C$. **1530.** $-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}\,x+C$. **1531.** $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$.
1532. $12\left[\sqrt[12]{x}+\ln\frac{(\sqrt[12]{x}-1)^2}{\sqrt[12]{x}}\right]+C$. **1533.** $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)+C$.
1534. $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)+C$. **1535.** $\frac{1}{ab}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,x\right)+C$. **1536.** $\mathrm{tg}\,x-$
$-\mathrm{ctg}\,x+C$. **1537.** $0{,}5\left(\mathrm{arctg}\,x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C$.

Глава X

1547. $\frac{1}{2}$. **1548.** $e-1$. **1549.** $0<I\leqslant\frac{4}{27}$. **1550.** $\frac{\pi}{2}\leqslant I\leqslant\frac{e\pi}{2}$. **1551.** $0<$
$<I<1$. **1552.** $\frac{464\sqrt{2}}{15}$. **1553.** $\frac{\pi}{8}$. **1554.** $e-\sqrt{e}$. **1555.** e^e-e. **1556.** $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$.

1557. $\frac{\ln 3 - 1}{2}$. **1558.** $\ln 1{,}5$. **1559.** 0. **1560.** $\frac{2}{5}$. **1561.** $\frac{\pi}{2}$. **1562.** $\ln\frac{4}{3}$. **1563.** $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$. **1564.** 0. **1565.** $\frac{\pi}{2}-1$. **1572.** $\frac{\pi^2}{8}$. **1573.** $\frac{\pi}{4}$. **1574.** $\frac{256}{15}$. **1575.** π. **1576.** $+\infty$. **1577.** $\frac{1}{4}$. **1578.** $\frac{\pi}{6}$. **1585.** Расходится. **1586.** Сходится. **1587.** Расходится. **1588.** Сходится. **1589.** Расходится. **1590.** Сходится. **1591.** Расходится. **1596.** $4{,}5$ (кв. ед.). **1597.** 18 (кв. ед.). **1598.** $\frac{2}{15}$ (кв. ед.). **1599.** $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41}+$ $+20\ln 0{,}8$ (кв. ед.). **1600.** $\sqrt{2}-1$ (кв. ед.). **1601.** 8 (кв. ед.). **1602.** $\frac{9\pi}{4}-$ $-\sqrt{2}+4\sqrt{2}\ln 2-\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}$ (кв. ед.). **1603.** 169π (кв. ед.). **1604.** $\frac{3}{8}\pi a^2$ **1605.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (кв. ед.). **1606.** $\frac{3}{2}\pi a^2$ **1607.** $\frac{3\pi-8}{32}$ (кв. ед.). **1608.** $\frac{\pi a^2}{12}$. **1609.** $\frac{\pi}{3}+$ $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (кв. ед.). **1613.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **1614.** $\frac{20}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$. **1615.** $0{,}5[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **1616.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **1617.** $\operatorname{sh}1\approx 1{,}17$. **1618.** 12. **1619.** $\sqrt{2}(\pi-1)$. **1620.** 5π. **1621.** 72. **1622.** $\frac{(\pi^2+4)\sqrt{\pi^2+4}-8}{3}$. **1623.** πa. **1624.** $\frac{a(2\pi+3\sqrt{3})}{8}$. **1625.** 8. **1628.** $\frac{16\pi(5\pi+8)}{5}$ (куб. ед,). **1629.** $0{,}3\pi$ (куб. ед.). **1630.** $\frac{\pi(e^2+1)}{4}$ (куб. ед.). **1631.** $\frac{4\pi}{35}$ (куб. ед.). **1632.** 72 (куб. ед.). **1633.** $\frac{2a^2h}{3}$. **1634.** $\frac{\pi r^2h}{2}$ **1636.** $\pi(e^2-$ $-e^{-2}+4)$ (кв. ед.). **1637.** $\frac{61\pi}{1728}$ (кв. ед.). **1638.** $2\pi b\left(b+\frac{a^2}{c^2}\arcsin\frac{c}{a}\right)$, где $c^2=a^2-b^2$ **1639.** $\frac{64\pi}{3}$ (кв. ед.). **1644.** $M_x=\frac{a^2(e^2-e^{-2}+4)}{8}$; $I_x=\frac{a^3}{24}(e-e^{-1})\times$ $\times(e^2+e^{-2}+10)$. **1645.** $M_a=\frac{ah^2}{6}$; $I_a=\frac{ah^3}{12}$. **1646.** $I_x=\frac{1628}{105}$. **1647.** $I_x=\frac{ab^3}{12}$; $I_y=\frac{a^3b}{12}$. **1648.** $I_0=\frac{\pi d^4}{32}$. **1653.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2r}{\pi}$ (для полуокружности); $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$ (для полукруга). **1654.** $\bar{x}=\frac{\pi-2}{2}$, $\bar{y}=\frac{\pi}{8}$. **1655.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{8}{5}$. **1656.** $\bar{x}=\bar{y}=\frac{2a}{5}$. **1657.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=\frac{2}{5}$. **1658.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=\frac{\pi}{8}$. **1659.** $\frac{\pi r^3(3\pi-4)}{3}$. **1661.** 480π (куб. ед.). **1668.** $0{,}09\pi$ Н. **1669.** $161{,}7\pi$ кН. **1670.** $\frac{\pi\rho g r^2h^2}{4}$. **1671.** $\frac{\pi\rho g a d^3}{8}$. **1672.** 51450π Дж. **1673.** $547{,}8\pi$ Дж. **1674.** $50{,}7$ Дж. **1675.** $\frac{\rho g a h^2}{3}$. **1676.** $17{,}64\pi$ кН; $70{,}56\pi$ кН; $158{,}76\pi$ кН; $282{,}24\pi$ кН. **1677.** $\frac{\pi\rho g d^3}{8}$. **1678.** 150 кг. **1679.** 1400 м. **1680.** $x=e^{10}$ **1681.** 36 м. **1689.** 1) $y'=\frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2x+1}}$; 2) $y'=\operatorname{sh}^4\frac{x}{35}\operatorname{ch}^3\frac{x}{35}$; 3) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$; 4) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}^6x}$; 5) $y'=\frac{1}{\operatorname{ch}x}$; 6) $y'=\frac{x}{\operatorname{sh}\frac{x^2}{2}}$.

1690. $M\left(\ln(1+\sqrt{2});\sqrt{2}\right)$. **1691.** $y_{\min}=0$ при $x=0$. **1692.** 1) $x^2\operatorname{sh}^2x-$ $-2x\operatorname{ch}x+2\operatorname{sh}x+C$; 2) $\frac{1}{32}\operatorname{sh}4x-\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+6x+C$; 3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}x-1}+C$; 4) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}x\sin x-\operatorname{sh}x\cos x)+C$; 5) $\operatorname{th}^2\frac{x}{2}+C$; 6) $\frac{3}{5}\operatorname{ch}^5\frac{x}{3}-\operatorname{ch}^3\frac{x}{3}+C$. **1693.** 1) $\frac{\pi}{6}$;

2) $\ln 2 - 0,6$; 3) $\frac{2}{3}(2\ln 3 - 1)$. **1694.** $\operatorname{sh}(x-a) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} a - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} a$; $\operatorname{ch}(x-a) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} a - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} a$. **1695.** $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$. **1696.** $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$; $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$. **1697.** $\operatorname{th}(x+a) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} a}$; $\operatorname{th}(x-a) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} a}$; $\operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$. **1698.** $\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}$; $\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$; $\operatorname{th}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}$. **1699.** $2\operatorname{sh} 0{,}5(x \pm y)\operatorname{ch} 0{,}5(x \mp y)$, $2\operatorname{ch} 0{,}5(x+y)\operatorname{ch} 0{,}5(x-y)$, $2\operatorname{sh} 0{,}5(x+y)\operatorname{sh} 0{,}5(x-y)$, $\frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}$. **1700.** $\operatorname{sh} x = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$; $\operatorname{ch} x = \frac{1 + \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th}^2\frac{x}{2}}$. **1701.** $0,5[\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)]$; $0,5[\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)]$; $0,5[\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)]$. **1702.** $\frac{8}{5}$ (кв. ед.). **1703.** $1,17a$. **1704.** $\frac{a^2}{2}(t_2 - t_1)$. **1705.** Дуга эллипса, расположенная над осью абсцисс. **1706.** Луч прямой $x - y - 1 = 0$, расположенный в I четверти. **1707.** $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\operatorname{ch} t}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\operatorname{sh} t$. **1708.** 1. **1709.** $x^2 - y^2$

Глава XI

1720. Ниже прямой $x_1 - x_2 - 10 = 0$. **1721.** Треугольник. **1722.** Неограниченная область. **1723.** Пустая область. **1724.** Точка (2; 3). **1725.** Областью решений является трапеция, неравенство (д) можно исключить. **1726.** Треугольная пирамида. **1727.** Трехгранная призма. **1732.** $L_{\max} = 10$ при $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. **1733.** $L_{\min} = -4$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. **1734.** $L_{\max} = 18$ при $x_1 = 6$, $x_2 = 0$. **1735.** $L_{\max} = 2$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. **1736.** $L_{\max} = 48$ в каждой точке отрезка AB, где $A(6; 0)$, $B(7; 4)$. **1737.** $L_{\min} = -4$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **1738.** $L_{\max} = 33$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 9$. **1739.** $L_{\max} = 20$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. **1746.** $(0; 1; 3; 0)$; $L = -3$. **1747.** $\left(\frac{3}{2}; 0; 0; \frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$; $L = \frac{3}{2}$. **1748.** $(0; 3; 1; 0)$; $L = -1$. **1749.** $\left(0; 50; 30; \frac{215}{6}\right)$; $L = 340$. **1750.** $\left(0; 5; \frac{3}{2}; 0; 0; \frac{3}{2}\right)$; $L = -5$. **1751.** $L = \infty$. **1752.** $\left(0; \frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$; $L = -\frac{11}{5}$. **1753.** $(80; 120)$; $L_{\max} = 440$. **1754.** $(20; 40)$; $L_{\max} = 220$. **1755.** 15 кг корма I вида; 50 кг корма II вида. **1757.** $\left(5; 7; 9; \frac{7}{2}; 0; 0\right)$; $L_{\max} = 38$. **1759.** $L_{\min} = \frac{86}{9}$; $\left(\frac{10}{9}; \frac{28}{9}\right)$; $T_{\max} = \frac{86}{9}$; $\left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right)$. **1760.** $L_{\max} = \frac{216}{7}$; $\left(\frac{24}{7}; \frac{24}{7}\right)$; $T_{\min} = \frac{216}{7}$; $\left(\frac{8}{7}; \frac{1}{7}\right)$. **1761.** $L_{\min} = \frac{78}{7}$; $\left(\frac{10}{7}; \frac{16}{7}\right)$; $T_{\max} = \frac{78}{7}$; $\left(\frac{27}{14}; \frac{3}{14}\right)$. **1763.** $L_{\min} = 510$ ден. ед. Оптимальный план: $x_{11} = 30$, $x_{12} = 60$, $x_{21} = 30$, $x_{23} = 60$. **1764.** $L_{\min} = 280$ ден. ед. Оптимальный план: $x_{12} = x_{24} = x_{33} = 60$, $x_{23} = 20$, $x_{31} = 40$. **1765.** $L_{\min} = 395$ ден. ед. Оптимальный план: $x_{11} = 25$, $x_{13} = x_{32} = 20$, $x_{12} = x_{21} = 5$, $x_{23} = 35$. **1766.** $L_{\min} = 140$ ден. ед. Оптимальный план: $x_{14} = x_{22} = 10$, $x_{23} = x_{31} = x_{34} = 5$, $x_{33} = 15$.