O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

“OLIY VA AMALIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

“IQTISODIY MATEMATIKA”

fanidan o‘quv-uslubiy majmua

(IV semestr)

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

«TASDIQLAYMAN»
O‘quv ishlari bo‘yicha prorektor
__________dots. I.N.Qo‘ziyev
“____”_________2017 yil

“IQTISODIY MATEMATIKA”

fanidan o‘quv-uslubiy majmua

(IV semestr)

Tayyorladi: **A.R.Xashimov, N.K.Ochilova, A.I.Sotvoldiyev, M.I.Axmedov**

Toshkent - 2017

MA’RUZA MATNLARI

10-MAVZU. IQTISODIY MASALALARNING CHIZIQLI MODELLARINI TUZISH

Tayanch so'z va iboralar: Matematik model, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish, stoxastik programmalashtirish, dinamik programmalashtirish.

REJA:

1. Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalalari.

2. Iqtisodiy matematik model tushunchasi.

3. Eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modellari.

Chiziqli programmalashtirish matematik programmalashtirishning bir bo'limi bo'lib, u chegaralangan resurslar (xom-ashyo, texnika vositalari, kapital qo'yilmalar, yer, suv, mineral o'g'itlar va boshqalar)ni ratsional taqsimlab eng ko'p foyda olish yoki eng kam xarajat qilish yo'llarini o'rgatadi.

Chiziqli programmalashtirishning shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta'sir ko'rsatdi. 1975 yilda chiziqli programmalashtirish nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot bo'yicha mutaxassis, "Chiziqli programmalashtirish" terminining birinchi muallifi, amerika olimi T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli programmalashtirishning iqtisodiy nazariyaga qo'shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma'lumlarga chegaralovchi shartlar qo'yilganda, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o'rgatuvchi bo'limdir.

Noma'lumlarga chiziqli chegaralashlar qo'yilgan chiziqli funksiyaning ekstremumini topish chiziqli programmalashtirishning predmetini tashkil qiladi. Shunday qilib, chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Iqtisodiy jarayonlarning o’ziga xos qonuniyatlarini o’rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarni tuzish kerak. O’rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning (masalalarning) matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:

1) masalaning iqtisodiy ma’nosi bilan tanishib, undagi asosiy shartlar va maqsadni aniqlash;
2) masaladagi ma’lum parametrlarni belgilash;
3) masaladagi noma’lumlarni (boshqaruvchi o’zgaruvchilarni) belgilash;
4) masaladagi cheklamalarni, ya’ni boshqaruvchi o’zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo’lgan chegaraviy shartlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;
5) masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash.

Boshqaruvchi o’zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat bersin. Bundan ko’rinadiki, maqsad funksiya boshqaruvchi noma’lumlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyani foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko’p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o’rganamiz.

Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini i bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo’lsin. Har bir xom-ashyoning umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi haqidagi ma’lumotlar quyidagi jadvalda berilgan bo’lsin.

Mahsulot turlari \ Xom-ashyolar	1	2	3	…	n	Daromad
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	c_2
…	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	c_m
Xom-ashyolar zahirasi	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_n	

Jadvaldagi har bir: $b_j - j$ xom-ashyoning umumiy miqdori (zahirasi); a_{ij} – i mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan j xom-ashyo miqdori; c_j – korxonaning j mahsulotning bir birligini sotishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki:

a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir xom-ashyoning miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin;

b) mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo'lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan i mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni: $x_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak, masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat bo'lib, uni $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$ funksiya orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m},$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to \max.$$

Iste’mol savati masalasi. Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil $A_1, A_2, ..., A_n$ oziqa moddalari kerak bo’lsin, jumladan bir sutkada A_1 oziqa moddasidan kamida b_1 miqdorda, A_2 oziqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 oziqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n ozuqadan b_n miqdorda zarur bo’lsin va ularni m ta $B_1, B_2, ..., B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo’lsin. Har bir B_i mahsulot tarkibidagi A_j oziqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Ozuqa moddalari / **Mahsulot turlari**	A_1	A_2	A_3	…	A_n	**Mahsulot bahosi**
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\ldots$	a_{1n}	c_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\ldots$	a_{2n}	c_2
…	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\ldots$	a_{mn}	c_m
Ozuqa moddasining minimal normasi	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: iste’mol savatiga qanday mahsulotlardan qancha miqdorda kiritish kerakki, natijada:

a) odam organizmi qabul qiladigan turli oziqa moddasining miqdori belgilangan minimal miqdordan kam bo’lmasin;

b) iste’mol savatining umumiy bahosi minimal bo’lsin.

Iste’mol savatiga kiritiladigan i-mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning

a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n. \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, undagi noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni: $x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masalaning b) sharti uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste'mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo'lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m \to \min.$$

Shunday qilib, iste'mol savati masalasining matematik modeli ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_m \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \to \min.$$

Optimal bichish masalasi. Optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz. Faraz qilamiz, uzunligi L bo'lgan xomaki materiallardan uzunliklari $\Delta_i \quad (i = \overline{1,m})$ bo'lgan m xil detallarning har biridan c_i miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n usul bilan kesish mumkin, hamda har bir j usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i detal tayyorlash va b_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo'lsin. Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo'ladi.

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	…	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	c_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{1n}	c_2
…	…	…	…	…	…
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	c_m
Chiqindilar	b_1	b_2	…	b_n	

j usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko’rinishda yoiziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$Y = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n \to \min.$$

1-misol. Uzunligi 110 sm. bo’lgan po’lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo’lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo’lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po’lat xipchinlarni kesish yo’llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar Uzunligi	Kesish usullari						Xomaki mahsulotlar i/ch rejasi
	1	2	3	4	5	6	
45 sm.	2	1	1	-	-	-	40
35 sm.	-	1	-	3	1	-	30
50 sm.	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo'yicha qancha po'lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo'ladi?

Yechish: $j-$usul bilan kesiladigan po'lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45sm bo'lgan xomaki mahsulotlardan ja'mi $2x_j + x_2 + x_3$ miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko'ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo'lishi kerak, ya'ni $2x_j + x_2 + x_3 = 40$.

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35sm va 50sm bo'lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to'la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda $x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$ va $x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$ tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma'nosiga ko'ra belgilangan noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, demak $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \; ... \; , x_6 \geq 0.$

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo'lgan chiqindilar-ning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funksiya ko'rinishida ifodalaymiz: $Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_{6.}$.

Masalaning shartiga ko'ra bu funksiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya'ni $Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow min.$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \; ... \; , x_6 \geq 0,$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow min.$$

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi *A, B, C* karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom-ashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom-ashyolar miqdori (me'yori), xom-ashyolarning zahirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turlari	**1 tonna mahsulotga xom-ashyo sarfi (t. hisobida)**			**Xom-ashyo zahirasi (t)**
	A	B	C	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Qiyom	0,4	0,4	0,3	600
Quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad (sh.b.)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$ miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zahirasidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak, $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin: $0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600$, $0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120$. Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, B karameldan $102x_2$, C karameldan $126x_3$ birlik va ja'mi $108x_1 + 112x_2 + 126x_3$ birlik daromad oladi. Bu yig'indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funksiyaga ega bo'lamiz: $Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to max$. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600, \\ \qquad\quad 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0,$$

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to max.$$

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

11-MAVZU. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI YECHIMLARINING XOSSALARI

Tayanch so'z va iboralar: Chiziqli programmalashtirish, chegaralovchi shartlar (cheklamalar), maqsad funksiya, joiz reja (yechim), bazis yechim (reja), xos va xosmas bazis reja, optimal reja, qo'shimcha o'zgaruvchi, qavariq kombinatsiya, qavariq to'plam, qavariq to'plamning burchak nuqtasi.

REJA:

1. Chiziqli programmalashtirish masalasining umumiy qo'yilishi.
2. Chiziqli programmalashtirish masalasining turli formada ifodalanishi.
3. Teng kuchli almashtirishlarni bajarib ChPMni kanonik ko'rinishga keltirish.
4. Chiziqli programmalashtirish masalasining joiz va bazis yechimlari.
5. Joiz yechimlar to'plamining qavariqligi.

Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \text{...}, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \text{...}, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min). \qquad (3)$$

Demak, (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funksiyaga minimum (maksimum) qiymat bersin.

Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari, (3) chiziqli funksiya esa masalaning maqsadi yoki **maqsad funksiyasi** deb ataladi.

Muayyan masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, “≥” yoki “≤” ko’rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo’lishi mumkin.

Ko’p hollarda ChPMsida qatnashayotgan tengsizliklarning ishoralarini bir xil ko’rinishga keltirib olinadi. Shu sababli ChPMsining quyidagi shaklini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1a)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (2a)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad (3a)$$

uning **standart shakli** deb qabul qilingan.

ChPMsi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min. \qquad (6)$$

ko’rinishda bo’lsa, u holda (4)-(6) masala **kanonik** ko’rinishdagi ChPMsi deb ataladi.

ChPMsini (4)-(6) shaklini turli ko’rinishlarda yozish mumkin. Bu ko’rinishlarni keltirib o’tamiz.

1. ChPMning vektor ko’rinishi. (4)-(6) masalani vektor ko’rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$
\begin{aligned}
&P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0, \\
&x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \\
&Y = CX \to \min,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

bu yerda

$$
P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ C = (c_1, c_2, \ldots, c_n).
$$

2. ChPMning matrisa ko'rinishi. (4)-(6) masalaning matritsa ko'rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$
\begin{aligned}
&AX = P_0, \\
&x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \\
&Y = CX \to \min.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

bu yerda $A = (a_{ij})$.

Ba'zi hollarda (4)-(6) masala quyidagacha ifodalanadi:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \\
&x_j \ge 0, \\
&Y = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \min.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Har qanday ChPMsini (4)-(6) ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun quyidagilarni amalga oshirish zarur: ChPMda qatnashayotgan tengsizliklarni tenglamaga keltirish kerak. Bu quyidagicha amalga oshiriladi.

Masalan, $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ ko'rinishdagi tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning chap tamoniga qandaydir nomanfiy x_{n+1} o'zgaruvchini shunday qiymat bilan qo'shamizki, natijada tengsizlik tenglikka aylansin:

$$
a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b,
$$

bu yerda

$$
x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \ldots - a_nx_n \ge 0
$$

o'zgaruvchi **qo'shimcha o'zgaruvchi** deb ataladi.

1-teorema. Berilgan $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$ tengsizlikning har bir $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ yechimiga $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$ tenglamaning bitta va faqat bitta yagona $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot: Faraz qilaylik, X_0 tengsizlikning yechimi bo'lsin. U holda

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \le b,$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Tengsizlikning chap tomonini o'ng tomonga o'tkazib hosil bo'lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz: $0 \le b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}$. Endi $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektor tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatamiz:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + (b - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - ... - a_n\alpha_n) = b.$$

Endi agar Y_0 tenglamani qanoatlantirsa, u holda u tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

Shartga ko'ra: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b, \quad \alpha_{n+1} \ge 0.$ Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \ge 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \le b,$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko'rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo'l bilan ChPMsining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e'tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o'zgaruvchilarni qo'shish kerak.

Masalan, agar ChPMsi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0, \tag{10}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

shaklda bo'lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o'zgaruvchilar Y funksiyaga 0 koeffisiyent bilan kiritiladi. Natijada (10) masala quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0, \tag{11}$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min.$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{12}$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

shaklda berilgan ChPMsini kanonik shaklgakeltirish mumkin. Buning uchun qo'shimcha $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \geq 0$ o'zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0, \tag{13}$$
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min.$$

Agar ChPMda maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

ko’rinishda bo’lsa, uni kanonik shaklda yozish uchun c_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ qarama-qarshi ishora bilan yozib olinib

$$\tilde{Y} = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n \to \min$$

ifodani hosil qilamiz.

1-misol. Quyidagi ChPMsini kanonik ko’rinishga keltiring va uni turli ko’rinishlarda ifodalang:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad\quad - 3x_3 \le -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Yechish: Masalaning cheklamalaridagi birinchi va uchinchi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$ qo’shimcha o’zgaruvchilar kiritib, ularni tenglamalarga aylantiramiz, hamda birinchi tenglamaning ikki tomonini -1 ga ko’paytirib undagi ozod hadni musbat songa aylantiramiz va (I) masalaga teng kuchli bo’lgan quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Ushbu masalada $Y \to \max$ ifodani qarama-qarshi ishora bilan olib, uni $Y \to \min$ bilan almashtiramiz. Natijada berilgan masalaning kanonik shakliga ega bo’lamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$$

$$Y = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0(x_4 + x_5) \to \min .$$

(III) masalaning matrisa ko'rinishini yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U holda (III) masalaning matrisa shakli quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$\begin{aligned} &AX = B, \\ &x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}, \\ &Y = C^T X \to \min. \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

(III) masalani vector ko'rinishlarda yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$X = \left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\right),\ C = \left(-3,\ 2,\ -1,\ 0,\ 0\right).$$

U holda (III) masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{gathered} P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 = P_0, \\ x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,5}, \\ Y = CX \to \min . \end{gathered} \qquad \text{(V)}$$

Endi matritsasi yechimlari va ularning xossalari bilan tanishamiz.

1-ta'rif. (4)-(6) masalaning **joiz yechimi** (joiz rejasi) deb, (4), (5) shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorga aytiladi.

(4)-(6) masalaning joiz yechimlar to'plami uning mumkin bo'lgan (joiz) yechimlar to'plamini tashkil etadi: $K_m = \left\{X(x_1,...,x_n) : AX^T = P_0,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\right\}$.

Bu yerda $r(A) = m < n$.

2-ta'rif. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in K_m$ joiz rejaning $n - m$ ta koordinatasi $(m < n)$ nolga teng bo'lib, qolgan $x_1, x_2, ..., x_m$ koordinatalariga mos $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda $X^0 \in K_m$ joiz reja **bazis reja** deyiladi.

3-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda esa bu reja **aynigan bazis reja** deyiladi.

4-ta'rif. (4)-(6) masalaning (6) chiziqli funksiyasiga eng kichik qiymat beruvchi $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis reja masalaning **optimal rejasi** (optimal yechimi) deyiladi.

(4)-(6) masalaning joiz yechimlari to'plami xossalarini o'rganish uchun ba'zi tushunchalarni kiritamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi berilgan bo'lsin. Ma'lumki, R^n fazoda har bir $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorga koordinatalari $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bo'lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorni R^n fazo nuqtasi deb qaraymiz.

5-ta'rif. $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$ nuqtalar to'plami $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalarning **qavariq kombinasiyasi** deb ataladi. Bu yerda $\alpha_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$

$C \in R^n$ to'plam berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir qatorda bu nuqtalarning $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ $(0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 1, \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni $A_1 \in C, \ A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, u holda C to'plam **qavariq to'plam** deb ataladi.

Qavariq to'lamning geometrik ma'nosini tushuntirish uchun A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma tushunchasini kiritamiz.

Ma'lumki, A_1 va A_2 nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$A(\alpha) = A_2 + (A_1 - A_2)\alpha$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $A_1 - A_2$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori.

Agar $\alpha = 0$ bo'lsa, u holda $A(0) = A_2$;

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda $A(1) = A_1$.

Agar $0 \le \alpha \le 1$ bo'lsa, u holda $A(\alpha)$ – A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi nuqtalarni aks ettiradi.

1-teorema. ChPMsining joiz yechimlaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Isbot: ChPMsining ixtiyoriy ikkita yechimining qavariq kombinasiyasi ham yechim ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 ChPMsining yechimlari bo'lsin. U holda

$$AX_1^T = P_0, \quad x_{1j} \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$AX_2^T = P_0, \quad x_{2j} \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{15}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi. X_1 va X_2 yechimlarning qavariq kombinasiyasini tuzamiz.

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

hamda uni yechim ekanligini ko'rsatamiz:

$$AX^T = A\left[\alpha X_1^T + (1-\alpha)X_2^T\right] = \alpha AX_1^T + (1-\alpha)AX_2^T,$$

(14) va (15) tenglamalarni inobatga olsak:

$$AX^T = \alpha P_0 + (1-\alpha)P_0 = P_0.$$

Bu munosabat X vektor ham yechim ekanligini ko'rsatadi. Demak, ChPMsining yechimlaridan tashkil topgan to'plam qavariq to'plam bo'ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar k ta o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan $P_1, P_2, ..., P_k$ vektorlar berilgan bo'lib, ular uchun

$$P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_kx_k = P_0$$

tenglik barcha $x_i > 0$ lar uchun o'rinli bo'lsa, u holda $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, .., 0)$ nuqta K qavariq to'plamning burchak nuqtasi bo'ladi.

3-teorema. Qavariq to'plamning ixtiyoriy nuqtasini uning burchak nuqtalarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

4-teorema. ChPMsi o'zining optimal qiymatiga shu masalaning joiz yechimlaridan tashkil topgan qavariq to'plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar masala birdan ortiq burchak nuqtada optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham o'zining optimal qiymatiga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ K to'plamning burchak nuqtasi bo'lishi uchun musbat x_i komponentalar $P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0$ yoyilmada o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan P_i vektorlarning koeffisiyentlaridan iborat bo'lishi zarur va yetarli.

2-xulosa. ChPMsining bazis yechimiga K_m qavariq to'plamning burchak nuqtasi mos keladi va aksincha.

3-xulosa. ChPMsining optimal yechimini K_m to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

12-MAVZU. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASINING GEOMETRIK TALQINI

Tayanch so'z va iboralar: Gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, yechimlar ko'pburchagi, sath to'g'ri chizig'i, aktiv va passiv shartlar, kamyob xom-ashyo.

REJA:

1. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometirik talqini.

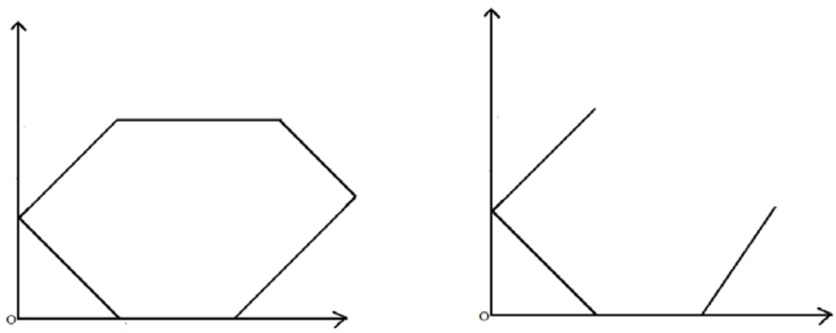
2. Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish.

3. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechish va tahlil qilish.

ChPMsini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilish uchun quyidagi statandart masalani ko'ramiz:

$$\begin{aligned} &Ax \le B \\ &x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \\ &Y = CX \to \max \end{aligned} \tag{1}$$

Ma'lumki, (1) masalaning har qanday rejasini n-o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga yana shu ham ma'lumki, chiziqli tengsizliklar bilan aniqlangan bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi. Bu holda qavariq to'plam (qavariq ko'pburchak yoki ko'pyoq) chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Masalan, qavariq to'plamlar



a) chegaralangan b) chegaralanmagan

(1) masalani geometrik nuqtai nazardan tahlil qilamiz. Buning uchun quyidagi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b, \tag{2}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o’rni bilan tanishib chiqamiz.

Ma’lumki, koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \tag{3}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, ...x_n$ nuqtalar to’plami gipertekislik deb ataladi. Demak, (1) masalada (3) kabi tengliklar qatnashsa ular gipertekisliklarni ifodalaydi. Har qanday gipertekislik fazoni ikki yarim fazoga ajratadi. Bu yarim fazolardan faqat bittasigina (2) tengsizlikni qanoatlantiradi. (2) tengsizlikni qanoatlantiradigan yarim fazoni aniqlash uchun $O(0,0,...,0)$ koordinata boshidan foydalanamiz, ya’ni:

agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (2) tengsizlikni to’g’ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuqtani o’z ichiga oluvchi yarim fazo (2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o’rni bo’ladi;

agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (2) tengsizlikni noto’g’ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuiqtani o’z ichiga olmaydigan yarim fazo (2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o’rni bo’ladi.

Bundan ko’rinadiki, (1) masalada nechta tensizlik qatnashsa ular shuncha yarim fazoni ifodalaydi. Bu yarim fazolarning kesishmasi esa (1) masalaning barcha joiz yechimlarini o’z ichiga oluvchi qavariq to’plamni tasvirlaydi. Bu qavariq to’plam masalaning joiz yechimlar sohasi deb ataladi.

(1) masalaning optimal yechimini topish uchun $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ maqsad funksiyasidan foydalanamiz. Buning uchun

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = const \tag{4}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi gipertekisliklar oilasini qaraymiz.

Ma’lumki, bu yerda *const* ning har bir qiymatiga bitta gipertekislik mos keladi. ChPMsining qavariq to’lami bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo’lgan gipertekisliklar “sath gipertekisliklar” deyiladi. ChPMsining qavariq to’plami bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo’lgan gipertekislik, ya’ni urinma gipertekislik tayanch gipertekislik deyiladi. Tayanch gipertekislikni hosil qilish uchun (4) tenglikdagi $const$ ga turli qiymatlar berib uni gipertekislikning normal vektori bo'ylab parallel ko'chiramiz va urinma gipertekislikni hosil qilamiz.

Shuni ta'kidlaymizki, Y funksiyaning maksimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalashi bo'ylab, Y funksiyaning minimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo'nalashiga qarama-qarshi harakatlanish kerak.

$n=2$ o'lchovli fazoda, ya'ni tekislikda ChPMsini geometrik nuqtai nazardan ko'rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{6}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{7}$$

Faraz qilaylik, (5) sistema (6) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega va ulardan tashkil topgan to'plam chegaralangan bo'lsin.

Ma'lumki, (5) va (6) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ (i = \overline{1,m}),$$
$$x_1 = 0, \ \ x_2 = 0$$

to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Bu tekisliklarni ko'rib chiqamiz.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \ (i = \overline{1,m}) \tag{8}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini aniqlash uchun $O(0,0)$ nuqtadan foydalanamiz. Agar $O(0,0)$ nuqta (8) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda qidirilayotgan teksilik $O(0,0)$ nuqtani o'z ichiga oladi, aks holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o'z ichiga olmyadi. Yuqoridagi mulohazalar asosida (5) sistemaning yechimlaridan iborat qavariq ko'pburchakni topib olganimizdan so'ng (6) tengsizliklarni e'tiborga olamiz. (6) tengsizliklar (5) yordamida topilgan qavariq ko'pburchakning I chorakdagi qismini ajratib olishga yordam beradi. (5)

va (6) cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko’pburchakni reja ko’pburchagi deb ataymiz.

(5)-(7) masalaning optimal yechimini topish uchun (7) ifodada qatnashayotgan chiziqli funksiyadan hosil qilinadigan

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const \qquad (9)$$

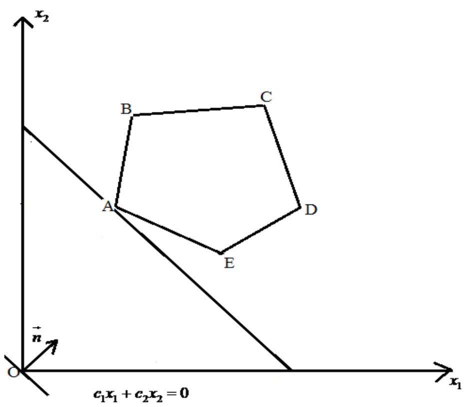
to’g’ri chiziqlar oilasidan foydalanamiz. Ma’lumki, (9) ifodadagi har bir ma’lum o’zgarmas $C_0 = const$ qiymatida bitta

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

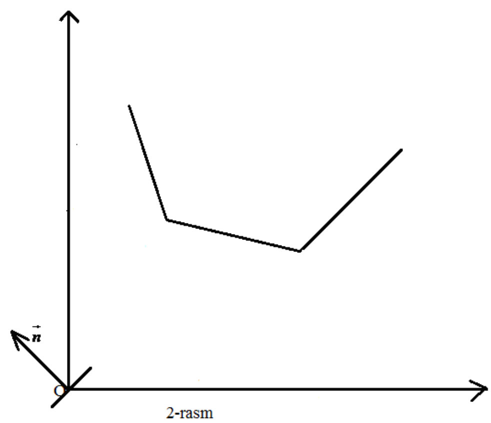
sath to’g’ri chizig’i to’g’ri keladi.

So’ngra, bu sath to’g’ri chiziqlardan birini, masalan, $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to’g’ri chiziqni chizib olamiz. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ chiziqni $\vec{n}(c_1, c_2)$ normal vektor bo’ylab parallel ko’chirib, reja ko’pburchagiga $c_1x_1 + c_2x_2 = C^0$ tayanch (urinma) to’g’ri chiziqni topib olamiz. Bu yerda C^0 (5)-(7) masalaning optimal yechimi yoki qiymati; $X^0(x_1^0, x_2^0)$ urinish nuqtasi esa (5)-(7) masalaning optimal rejasi deb ataladi.

Ba’zi xususiy hollarni ko’rib chiqamiz. Faraz qilaylik, reja ko’pburchakgi $ABCDE$ beshburchakdan iborat bo’lsin (1-rasm).



1-Rasm



2-rasm

1-rasmdan ko’rinib turibdiki, chiziqli funksiya o’zining minimal qiymatiga $ABCDE$ qavariq ko’pburchakning A nuqtasida erishadi. C nuqtada esa, u o’zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi.

Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko’pburchak chegaralanmagan bo’lsin. Bunday ko’pburchaklardan ba’zilarini ko’rib chiqamiz.

1-hol. 2-rasmdagi holatda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq $\vec{n}$ vektor bo'ylab siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi.

Bu holda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ funksiya minimal qiymatga ham, maksimal qiymatga ham erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya (5) va (6) cheklamalar bilan aniqlangan sohada quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan bo'ladi.

1-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$$Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

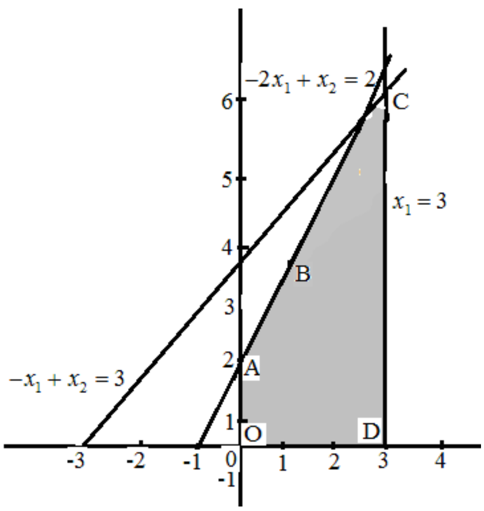
Yechish: Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

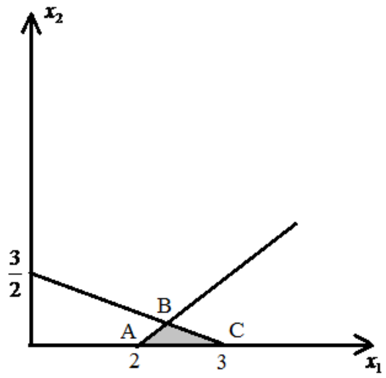
chiziqlar bilan chegaralangan

$$-2x_1 + x_2 \le 2, -x_1 + x_2 \le 3, x_1 \le 3$$

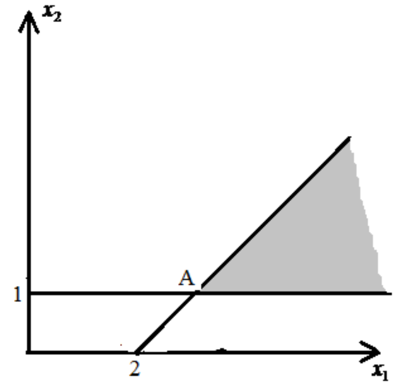
yarim tekisliklarni koordinatalar sistemasining I choragida yasaymiz, chunki $x_1, x_2 \ge 0$



Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami bo'yalgan *OABCD*-beshburchakni tashkil qiladi. Natijada $Z = -x_1 - 2x_2$ chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $C(3;6)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari masalaning optimal rejasi, $Z(C) = -15 \to \min$ esa masalaning optimal yechimi bo'ladi.[1]



1-rasm



2-rasm

2-misol. Berilgan ChPMsini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$Y = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Yechish: Bu yerda ham yuqoridagidek yechimlar ko'pburchagini hosil qilamiz.

Yuqoridagi 1-rasmdan ko'rinadiki, yechimlar ko'pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\vec{n}(2;2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan $2x_1 + 2x_2 = 0$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq $2x_1 + 2x_2 = const$ to'g'ri chiziqlar oilasidan biri bo'ladi. Shakldan ko'rinadiki, masalada maqsad funksiyaning qiymati yuqoridan chegaralanmagan.

3-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$Y = x_1 - 2x_2 \to \max$$

Yechish: Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo'lamiz.

---

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 97-98.

Yuqoridagi 2-rasmdan ko'rinadiki, yechimlar to'plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u $X^0(2,5;1)$ nuqta koordinatalaridan iborat.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, agar ChPMda noma'lumlar soni $n=2$ bo'lganda uning optimal yechimini gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Agar ChPM kanonik ko'rinishda berilgan bo'lib, tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenglamalar sonidan 2 taga ko'p bo'lsa, ya'ni $n-m=2$ bo'lsa, bunday ChPMlarining optimal yechimlarini ham gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarining tahlili. Endi ChPMsining optimal yechimini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi iqtisodiy masalaning optimal yechimini quramiz va tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, korxonada ikki xil bo'yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo'yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom-ashyodan foydalanilsin. Xom-ashyolarning zahirasi 6 va 8 birlikni tashkil qilsin. Ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talab 2 birlikdan oshmasin va u birinchi bo'yoqqa bo'lgan talabdan 1 birlikka katta bo'lsin.

Har bir bo'yoqning bir birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo'lgan xom-ashyolar miqdori, hamda korxonaning har bir birlik bo'yoqni sotishdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyolar / Bo'yoqlar	1	2	Foyda
I	1	2	3
II	2	1	2
Zahira	6	8	

Har bir bo'yoqdan qanchadan ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xom-ashyolar miqdori ularning zahiralaridan oshmaydi, daromad eng yuqori bo'ladi, hamda talab bo'yicha shartlar bajariladi? Masalaning optimal rejasini toping.

Masaladagi noma'lumlarni belgilaymiz:

x_1 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan I mahsulotning miqdori;

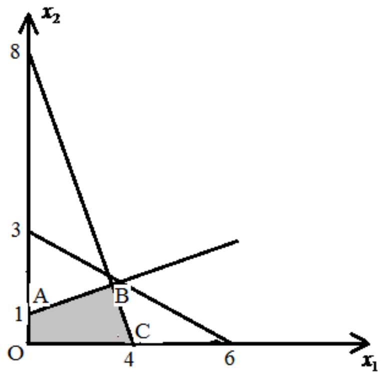
x_2 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan II mahsulot miqdori.

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 - x_1 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Masalani grafik usulda yechib, $D(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



Optimal yechim quyidagicha bo'ladi: $x_1 = 3\frac{1}{3};\ x_2 = 1\frac{1}{3};\ Y_{\max} = 12\frac{2}{3}$. Demak, korxona birinchi bo'yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladigan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo'ladi: $X^0\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$, $Y = 12\frac{2}{3}$.

Endi masalaning optimal yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun $D-$ optimal nuqtani qaraymiz. Bu nuqta $2x_1 + x_2 = 8$ va $x_1 + 2x_2 = 6$ to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi. Bu esa, buyoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xom ashyoning ham kamyob ekanligini ko'rsatadi. Optimal nuqta bilan bog'liq bo'lgan bu shartlar aktiv shartlar , optimal nuqtaga bog'liq bo'lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko'rayotgan masalada mahsulotlarga bo'lgan talabga qo'yilgan $-x_1 + x_2 \le 1$ va $x_2 \le 2$ shartlar optimal nuqtaga bog'liq emas va shu sababli bu shartlar passiv shartlar.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo’lmaydi va ularning ma’lum darajada o’zgarishi optimal yechimga ta’sir qilmaydi.

Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o’zgarishiga olib keladi.

Masalan, 1-xom ashyo zahirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta’sir ko’rsatishini ko’rish uchun uning zahirasini 7 ga teng deb olamiz. U holda *CD* to’g’ri chiziq o’ziga parallel ravishda yuqoriga ko’tariladi va *DCK* uchburchak reja ko’pburchagiga qo’shiladi. Natijada *K* nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_1 = 2;\ x_1 + 2x_2 = 7;\ 2x_1 + x_2 = 8$ to’g’ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning $0 \le x_2 \le 2;\ x_1 + 2x_2 \le 7;\ 2x_1 + x_2 \le 8$ shartlar aktiv shartlarga aylanadi. Demak, yangi optimal yechim: $X^0(2,3),\ Y_{\max} = 13.$

Xuddi shunday yo’l bilan 2-xom ashyoni bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o’zgartirishini ko’rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo’lmagan xom-ashyolar miqdorini, optimal yechimga ta’sir qilmagan holda, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko’rsatish mumkin.

Yuqoridagi 8-shaklda *BC* kesma $x_1 = 2$ chiziqni, ya’ni masalaning 4 shartini ifodalaydi. Ma’lumki, bu – passiv shart. Maqsad funksiya qiymatini o’zgartirmagan holda passiv shartni qanchalik o’zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun *BC* kesmani o’ziga parallel ravishda pastga, *D* nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = \dfrac{4}{3}$ bo’ladi.

Demak, ikkinchi bo’yoqqa bo’lgan talabni optimal yechimga ta’sir qilmasdan $\dfrac{4}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo’l bilan masalaning optimal yechimiga ta’sir etmasdan uning boshqa passiv shartning o’ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko’rsatish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Fermada qo'ng'ir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi ozuqa ishlatiladi. Qo'ng'ir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur bo'lgan har bir turdagi ozuqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi ozuqaning umumiy miqdori va 1 ta qo'ng'ir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	**Kunlik zarur bo'lgan ozuqa birligi miqdori**		**Oziqaning umumiy miqdori**
	Qo'ng'ir quyon	**Sariq quyon**	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \end{cases}$
$Z = -x_1 - x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$
$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -2x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$
$Z = -5x_1 - 7x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$Z = 2x_1 + 13x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 6x_1 - x_2 \geq 12 \end{cases}$
$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$ [2]
$x_1, x_2 \geq 0.$

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

[2] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 99-100.

13-MAVZU. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASINI SIMPLEKS USULIDA YECHISH

Tayanch so'z va iboralar: Simpleks usuli, optimallik bahosi, sun'iy o'zgaruvchilar.

REJA:

1. Simpleks usuli haqida.
2. Simpleks jadvalida almashtirishlarni bajarish.
3. Optimal yechimni aniqlashga doir teoremalar.
4. Maqsad funksiyaning chekli minimumga ega bo'lmaslik sharti.
5. Simpleks usuli.

Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940 yilda ishlab chiqilgan bo'lib chiziqli dasturlash model sifatida ham iqtisodiy ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.

Simpleks usuli faqat chiziqli dasturlash muammolarini yechishga qaratilgan bo'lsada uning yechish texnikalari umumiy qiziqishga sazovordir. Shu texnikasi chiziqsiz optimallashtirish muammolarini chiziqli cheklovlardan foydalanish va chiziqsiz cheklovlarni umumiylashtirish mumkin.

Simpleks usuli iqtisodiyot uchun muhim tarixiy aloqalarga ega va bu usul bilan bog'liq atamashunoslikka katta hissa qo'shgan. Misol uchun xarajatlar va soya narxlar degan iborani gapirish. Ko'p ilovalar uchun bu atamalar foydali va bu chiziqli dasturlash modelini talqin qilishda foydalaniladi.

Dansig yaratgan simpleks usul bilan chiziqli progammalash masalasining optimal yechimini topish uchun ChPMsi kanonik shaklda va cheklamalar sistemasi keltirilgan tenglamalar sistemasi shaklida bo'lishi kerak. Simpleks usuli ChPMsining optimal yechimini chekli qadamdan so'ng topishga yordam beradi.

Bizga quyidagi ChPMsi berilgan bo'lsin.

$$Z = C^T x \to \min$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

bu yerda $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ko'rinishda ifodalanadi.

Bu bazis o'zgaruvchilarning vektori esa nolga teng bo'lgan bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarning vektori. Maqsad funksiya quydagicha yoziladi:

$$Z = C_B^T x_B + C_N^T x_N,$$

bu yerda bazis o'zgaruvchilarning koeffisiyentlarida, bazis bo'lmagan o'zgaruvchi-larning koeffisiyentlari esa da va biz tenglikni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Qaytadan yozilganda quydagicha bo'ladi:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Bazis bo'lmagan o'zgaruvchilarni qiymati o'zgartirish orqali $Ax = b$ tenglikka barcha mumkin bo'lishi bo'lgan barcha yechimlarni qo'lga kiritamiz.

Bu formulani Z formulaga alishtirsak biz quydagi formula kelib chiqadi

$$Z = C_B^T B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T B^{-1} N) x_N.$$

Agar biz $y = (C_B^T B^{-1})^T = B^{-T} C_B$, ni aniqlasak, Z ni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Z = y^T b + (C_N^T - y^T N) x_N.$$

Bu formula samaraliroq. y vektor simpleks vektorning ko'paytiruvchilaridir.

Maqsad funksiya va bazis o'zgaruvchilarning qiymati $x_N = 0$ qiymat qo'yish orqali topiladi.

$$x_B = \widehat{b} = B^{-1} b \quad \text{va} \quad \widehat{Z} = C_B^T B^{-1} b.$$

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	C_B^T	C_N^T	0
x_B	B	N	b

va bazis asosda jadval quyidagicha bo'ladi

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	0	$C_N^T - C_B^T B^{-1}N$	0
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Bu simplek jadvalining rasmiy formulalari hisoblanadi[1].

Bizga quyidagi ChPMsi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \quad x_2 \quad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad x_m + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \tag{3}$$

Ko'rinib turibdiki bu masalada (1) cheklamalar keltirilgan tenglamalar sistemasi ko'rinishidadir. (1) sistemani vektor shaklida yozib olamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_n = P_0,$$

bu yerda $P_1,\ P_2, \ldots,\ P_m$ vektorlar sistemasi m-o'lchovli fazoda chiziqli erkli birlik vektorlar sistemasidan iborat bo'lib, bazis vektorlar sistemasini tashkil etadi. Ular m-o'lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ o'zgaruvchilar "**bazis** (erksiz) **o'zgaruvchilar**" deb ataladi. $x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots,\ x_n$ o'zgaruvchilar bazis bo'lmagan (erkli) o'zgaruvchilar. Agar erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ bazis yechim hosil bo'ladi. Bu yechimni boshlang'ich bazis yechim deb ataymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: P_b – bazis vektorlar sistemasi; C_b – maqsad funksiyasida bazis o'zgaruvchlar oldidagi c_i koeffisiyentlar.

Yuqoridagilardan foydalanib quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 125-137.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}		a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}		a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}		a_{lk}	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}		a_{mk}	$\dots$	a_{mn}

Bu jadval **simpleks jadvali** deb ataladi. $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ boshlangich bazis rejani optimallikka tekshirish uchun bu jadvalga qo’shimcha $\Delta = \left\{\Delta_0, \Delta_j\right\}, \ j = \overline{1,n}$ satr kiritamiz.

Jadvalning P_0 ustiniga mos Δ_0 ni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_0 \equiv Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i c_i \,. \tag{4}$$

Jadvalning P_j ustinlariga mos Δ_j larni esa quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i - c_j \,. \tag{5}$$

U holda yuqoridagi jadval quyidagi ko’rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}	$\dots$	a_{lk}	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	$\dots$	Δ_m	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_n

(5) formuladan ko’rinib turibdiki, simpleks jadvaldagi bazis vektorlarga mos Δ_j lar har doim 0 ga teng.

Agar c_j ustunlarga mos barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \le 0$ shart bajarilsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechim optimal yechim bo’ladi. Y chiziqli funksiyaning minimal qiymati Y_0 ga teng bo’ladi.

Shunday qilib, $\Delta_j \le 0$ shart (1)-(3) ChPMsi uchun **optimallik sharti** deyiladi.

Agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo’lsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ masalaning optimal yechimi bo’la olmaydi.

Bunday holatda topilgan $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bazis rejani optimal rejaga yaqin bo’lgan boshqa bazis rejaga almashtirish kerak.

Yangi bazisga kiritiladigan vektorni

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j \tag{6}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$ bo’lsin. Demak, yangi bazislar sistemasida P_k vektor bazis vektor sifatida qatnashishi kerak. Agar P_k bazisga kiritilsa, u holda eski $P_i -$bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak, chunki (1) sistemaga mos A matrisaning rangi: $rang(A) = m$. Bazisdan chiqariladigan $P_i,\ i = \overline{1,m}$ vektorni aniqlash uchun $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ nisbat orqali aniqlovchi koeffisiyent tushunchasini kiritamiz. Bazisdan chiqariladigan $P_i,\ i = \overline{1,m}$ vektorni

$$\min_{a_{ik} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}} \tag{7}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{ik} > 0} \dfrac{b_i}{a_{ik}} = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$ bo’lsin. Demak, P_l vektor bazisdan chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan

l satrdagi P_l vektor o’rniga u joylashgan k ustundagi P_k vektor bazis vektor sifatida kiritiladi. Buning uchun simpleks jadvalida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi.

1. l satrdagi barcha: b_l, a_{lj} elementlarni a_{lk} hal qiluvchi elementga bo’lib, bu satrda $\frac{b_l}{a_{lk}}, \frac{a_{l1}}{a_{lk}}, ..., \frac{a_{lk-1}}{a_{lk}}, 1, \frac{a_{lk+1}}{a_{lk}}, ..., \frac{a_{ln}}{a_{lk}}$ elementlarni hosil qilamiz. U holda jadval quyidagi ko’rinishga keladi:

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n	a.k
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n	
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1k}}$
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}	$\frac{b_2}{a_{2k}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	0	$\dots$	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$	$\boxed{\frac{b_l}{a_{lk}}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}	$\frac{b_m}{a_{mk}}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	$\dots$	Δ_m	Δ_{m+1}	$\dots$	$\boxed{\Delta_k}$	$\dots$	Δ_n	

2. P_k vektorni bazis vektorga aylantirish uchun, ya’ni jadvalni quyidagi

P_b	C_b	P_0	c_1	$\dots$	c_l	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	$\dots$	P_l	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	$\dots$	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	$\dots$	0	$\tilde{a}_{1m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\tilde{a}_{1n}$
P_2	c_2	b_2	0	$\dots$	$-\frac{a_{2k}}{a_{lk}}$	$\dots$	0	$\tilde{a}_{2m+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\tilde{a}_{2n}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	$\dots$	$\frac{1}{a_{lk}}$	$\dots$	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	$\dots$	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	$\dots$	1	$\tilde{a}_{mm+1}$	$\dots$	0	$\dots$	$\tilde{a}_{mn}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	$\dots$	$\tilde{\Delta}_l$	$\dots$	Δ_m	$\tilde{\Delta}_{m+1}$	$\dots$	$\tilde{\Delta}_k$	$\dots$	$\tilde{\Delta}_n$

ko'rinishga keltirish uchun jadvalda quyidagi elementar almashtirishlarni bajaramiz:

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik}; \ \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik}; \ i \neq l. \tag{8}$$

Bu jarayonni barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Har bir qadamda $\Delta_j \leq 0$ optimallik shartini tekshirib boramiz.

Shunday qilib quyidagi teoremalar o'rinli.

1-teorema. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, \ x_2^0, ..., \ x_m^0, 0, ..., 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j \leq 0$, $\quad (j = \overline{1,n})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2-teorema. Agar X^0 bazis rejada biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ shart o'rinli bo'lib qolsa, u holda X^0 optimal reja bo'lmaydi va uholda shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun

$$Y(X_1) < Y(X^0)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Agar biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar uchun $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n})$ bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Shuning uchun quyidagi shartlarga:

1. $\Delta_j > 0$; $\qquad$ 2. $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n})$

(1)-(3) masalaning optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti deyiladi.

Agar ChPMsida maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda masalaning optimallik sharti sifatida:

$$\Delta_j \geq 0\,, \quad (j = \overline{1,n})$$

tengsizlikni; masalaning optimal yechimga ega bolmaslik sharti sifatida esa:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \leq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

tengsizliklarni qabul qilamiz.

1-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching[2].

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7; \\ x_1 \leq 3; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ (j = 1,2.)$$
$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ (j = 1,2,..5.)$$
$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	-1	-2	0	0	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	$\boxed{2}$
P_4	0	7	-1	2	0	1	0	782
P_5	0	3	1	0	0	0	1	-
Δ_j		0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	
P_2	-2	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	3	0	-2	1	0	$\boxed{1}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	3

[2]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 136.

Δ_j		-4	$\boxed{5}$	0	-2	0	0	
P_2	-2	4	0	1	-1/3	2/3	0	-
P_1	-1	1	1	0	-2/3	1/3	0	-
P_5	0	2	0	0	2/3	-1/3	1	3
Δ_j		-9	0	0	4/3	-5/3	0	
P_2	-2	5	0	1	0	1/2	1/2	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	-1/2	3/2	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Simpleks usulning I bosqichida bazis vektorlar sistemasiga P_3 vektor kiritilib P_2 vektor bazisdan chiqarildi, II bosqichida P_4 bazisga kiritildi va P_1 bazisdan chiqarildi. Simpleks jadval (8) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi: $X_0 = (3, 5, 3, 0,\ 0,)$, $Y_{\min} = -13$.

2-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.[3]

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2; \\ -x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ (j = 1, 2.)$$
$$Z = -x_1 \to \min.$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ \ (j = 1, 2, ..5.)$$
$$Z = -x_1 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	-1	0	0	0	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	

[3]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 145.

P_3	0	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	-1	1	0	1	0	-
P_5	0	3	1	0	0	0	1	$\boxed{3}$
Δ_j		0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	
P_2	0	8	0	1	1	0	1	-
P_4	0	6	0	1	0	1	1	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
Δ_j		-3	0	0	0	0	-1	

$X_0 = (3,\ 0,\ 8,\ 6,\ \ 0,)$, $Y_{\min} = -3$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollarni simpleks usulda yeching.[4]

1.
$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 30 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2,3,4)$$

2.
$$Z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \le 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 30 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2,3)$$

3.
$$Z = 7x_1 + 8x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1 \le 40 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2)$$

4.
$$Z = 3x_1 + 9x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ -3x_1 + x_2 \le 12 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2)$$

5.
$$Z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0.\ (j = 1,2,3)$$

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

[4] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 142.

14-MAVZU. SUN'IY BAZIS USULI

Tayanch so'z va iboralar: Sun'iy bazis; sun'iy bazis usuli; kengaytirilgan masala; aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi; aynigan reja (yechim); sikllanish, ε-usuli.

REJA:

1. Sun'iy bazis, sun'iy vektor.

2. Sun'iy bazis vektor usulining mohiyati.

3. Sun'iy bazis vektor usulida bazis yechimning optimallik sharti.

4. ε-usuli.

ChPM masalasi quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \qquad (1)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Bu masalada tenglamalar sistemasi keltirilmagan. Shu sababli undagi tenglamalarga $x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots,\ x_{n+m} -$ sun'iy o'zgaruvchilar kiritib uni kengaytirilgan sistemaga aylantiramiz. U holda quyidagi masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots + c_nx_n + M\,(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min.$$

Bu yerda, $M -$ yetarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos $P_{n+1},\ P_{n+2},\ \ldots,\ P_{n+m}$ vektorlar "**sun'iy bazis vektorlar**" deb ataladi. Berilgan (1) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

1-teorema. Agar kengaytirilgan (2) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni: $x_{n+i} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan (1) masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.
Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda boshlang'ich masala yechimga ega bo'lmaydi.

Sun'iy bazis usuli maqsad funksiyaga jarima (penalty) termini kiritiladi qaysiki bazisga sun'iy o'zgaruvchilar kiritishga mo'ljallangan. Biz yana shartni minimallashtirish namunasidan metodni oydinlashtirish uchun foydalanamiz:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Oldingidek, standart shaklga keltiramiz va sun'iy o'zgaruvchlar kiritiladi. Lekin bu holatda qo'shimcha 1 muammo bosqich tashkil qilish o'rniga, maqsad funksiyaga qo'yilgan shart minimumga aylantiriladi.

$$Z' = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min$$

bu yerda M eng katta musbat sonni ifodalaydi. Umuman, har bir sun'iy o'zgaruvchini ifodalovch bitta penalty termin bor. Kompyuter hisoblari uchun M programma chizig'ining yechimlari orasida vujudaga kelishi mumkin bo'lgan boshqa hamma sonlar uchun dominat yetarli katta son.

Agar M katta bo'lsa, musbat sun'iy o'zgaruvchini o'z ichiga olgan qandaydir bazis maqsad funksiya Z' qiymatini ham katta musbat songa olib boradi. Agar qandaydir bazis dastlabki chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan javobi bo'lsa, u holda o'rganilayotgan bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchilarni olmaydi va uning maqsad qiymati kichikroq bo'ladi. Chunki sun'iy o'zgaruvchilar ular bilan katta qiymatli bog'liqlikka ega, simpleks usul agar bu mavjud bo'lsa ularni bazisdan oxirida olib tashlaydi. Qandaydir ba'zis jarima muammosi bo'lgan yechim bo'ladi qaysiki bazis emas hamma sun'iy o'zgaruvchilar (bundan buyog'iga nol) ham orginal muammoga mumkin bo'lgan yechim bo'ladi.

Sun'iy bazis usulida maqsad funksiya 1 muammo bosqichida maqsad funksiyaning chegarasi sifatida olinishi mumkin. Sun'iy bazis usulining maqsad funksiyasi mavjud:

$$Z' = c^T x + M\sum_i a_i$$

Bu maqsaddan foydalanishga teng:

$$\widehat{Z} = M^{-1}c^T x + \sum_i a_i$$

Chegaralarni $M \to \infty$ sifatida olish 1 maqsad bosqichini beradi. Natijada 1 muommo bosqichi ko'rinishi Sun'iy bazis usuli ko'rinishidan faqat tepa qatordan farq qiladi. Shu sababli biz simpleks usulini misollarda tezroq ko'rib chiqamiz ikki bosqich usulini tekshirishni amalga oshirishga nisbatan.

Bizning misolda, jarima (penalized) muommo uchun dastlabki bazis bilan sun'iy o'zgaruvchilar quyidagini beradi.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	2	3	0	0	M	M	0
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	2	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Oldingidek, sun'iy o'zgaruvchilar uchun qisqartirilgan qiymatlar nol bo'lmaydi va muammo doimiy bazis terminida yozilishi mumkin.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	-5M+2	2M+3	M	0	0	0	-16M
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	$\boxed{2}$	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Birinchi takrorlashda x_1 kirayotgan o'zgaruvchi va a_2 chiqayotgan o'zgaruvchi. Ikki bosqich usulidagidek, sun'iy o'zgaruvchi bazisni tark etsa u ahamiyatsizga aylanadi va muammodan olib tashlanadi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (a_2 olib tashlangandan), biz quyidagicha bazis yechim olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	-8M+7	-1,5M+1	0	0	-11M-2
a_1	0	8	3/2	0	1	11
x_1	1	-2	-1/2	0	0	1
x_4	0	$\boxed{11}$	2	1	0	15

Ikkinchi takrorlashda x_2 kiritilayotgan o'zgaruvchi va x_4 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (a_1 ustun olib tashlangan-dan keyin chunki, u ahamiyatsiz) biz quyidagi yangi bazis javobni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	0	$-\frac{M+6}{22}$	$\frac{8M-7}{11}$	0	$-\frac{M+127}{11}$
a_1	0	0	1/22	-8/11	1	1/11
x_1	1	0	-3/22	2/11	0	41/11
x_2	0	1	2/11	1/11	0	15/11

Uchinchi takrorlashda x_3 kiritilayotgan o'zgaruvchi va a_1 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashganda keyin (a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki, u ahamiyatsiz), biz yangi bazis yechimni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	0	0	-5	-11
x_3	0	0	1	-16	2
x_1	1	0	0	-2	4
x_2	0	1	0	3	1

Joriy bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchini olmaydi, shuning uchun bu haqiqiy muammo uchun mumkin bo'lgan maqsad. To'rtinchi takrorlashda x_4 uchun qisqartirilgan qiymat bo'lishsiz shuning uchun u optimal bazis emas. Muvoznatlashish quyidagini beradi:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	5/3	0	0	-28/3
x_3	0	16/3	1	0	22/3
x_1	1	2/3	0	0	14/3
x_4	0	1/3	0	1	1/3

Bu bazis optimal. Kutilgandek, bu ikki bosqich usuldan olingan optimal bazis bilan bir xil[1].

Programmalarda bajarishda penalty uchun mos qiymatni tanlsh qiyin bo'lishi mumkin.

M muammoda boshqa qiymatlar uchun dominant bo'lishi uchun yetarlicha katta bo'lishi zarur, lekin u juda katta bo'lsa uni aylana bo'ylab hisoblashda jiddiy muammolar kelib chiqadi.

1-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$
$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalada maqsad funksiyasiga qo'yilgan shartni minimumga aylantirib, sun'iy $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \; x_5 \geq 0, \; x_6 \geq 0,$$
$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \to \min.$$

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 156-159.

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvaliga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	-5	-3	-4	1	M	M	a.k
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	$\boxed{1}$
P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	1,5
Δ_j		6M	3M+5	$\boxed{5M+3}$	3M+4	3M-1	0	0	
P_2	-3	1	$1/3$	1	$2/3$	$2/3$	$1/3$	0	3
P_6	M	1	$4/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$
Δ_j		M-3	$\boxed{\frac{4}{3}M+4}$	0	$-\frac{1}{3}M+2$	$-\frac{1}{3}M-3$	$-\frac{5}{3}M-1$	0	
P_2	-3	$3/4$	0	1	$3/4$	$3/4$	$1/2$	$-1/4$	$\boxed{1}$
P_1	-5	$3/4$	1	0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$3/4$	-
Δ_j		-6	0	0	$\boxed{3}$	-2	1-M	-3-M	
P_3	-4	1	0	$4/3$	1	1	$2/3$	$-1/3$	
P_1	-5	1	1	$1/3$	0	0	$-1/3$	$2/3$	
Δ_j		-9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M	

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng. Shuning uchun (1-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi:

$$X_0(1,\,0,\,1,\,0), \quad Z_{\min} = -9, \quad Z_{\max} = 9.$$

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi. Sikllanish va undan qutilish usuli (ε-usul). Agar ChPMsida P_i bazis vektorlarga mos keluvchi birorta $x_i^0 = 0$ bo'lsa, ya'ni

$$P_0 = P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m \qquad (3)$$

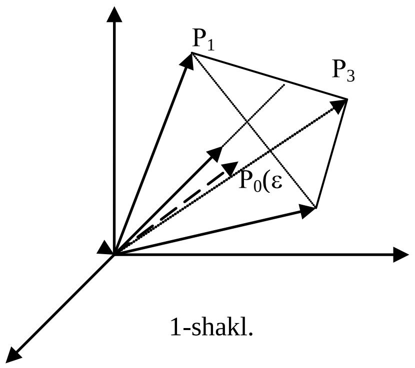
yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi **aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi** deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja esa aynigan reja bo'ladi. Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli programmalashtirish masalalarini aynumagan deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funksiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

Agar masalaning bazis rejasi aynigan reja bo'lsa,

$$\theta = \frac{b_k}{a_{lk}} = 0 \tag{4}$$

bo'lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o'tganda, chiziqli funksiyaning qiymati o'zgarmaydi. Ba'zan bunday masalalarni yechish jarayonida sikllanish holati, ya'ni ma'lum sondagi iteratsiyadan so'ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro'y berishi mumkin. Sikllanish holati ro'y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Sikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i = 0$ bo'lgan holatlarda ro'y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta = 0$ bo'lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to'g'ri aniqlash sikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko'rinadiki, aynigan masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo'lini ko'rsatishi kerak.

Aynigan ChPMsining geometrik tasvirini 1- shakldan ko'rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo'lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffisiyenti $x_3 = 0$ bo'lishi kerak.



1-shakl.

Agar P_3 vektorni $\varepsilon > 0$ ga siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo'ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = P_0$$

cheklamalarining o'ng tomoniga qo'shib yozamiz:

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 = P_0(\varepsilon) \quad (5)$$

Hosil bo'lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichida yotadi (1-shakl). Demak, P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + x_m P_m + \ldots + P_n x_n = P_0 \quad (6)$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + x_m P_m + \ldots + P_n x_n = \\ &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots + \varepsilon^m P_m + \ldots + \varepsilon^n P_n = P_0(\varepsilon) \end{aligned} \quad (7)$$

Faraz qilaylik, $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bazis vektorlar bo'lib, ular B matrisani tashkil qilsin. U holda

$$\overline{X} = B^{-1} P_0 \geq 0 \quad (8)$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1} P_0(\varepsilon) \geq 0 \quad (9)$$

o’zgartirilgan (5) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo’ladi.

$$\overline{X}_j = B^{-1}P_j \tag{10}$$

tenglik o’rinli bo’lgani uchun (8) ni ushbu ko’rinishda ifodalash mumkin.

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0 + \varepsilon B^{-1}P_1 + \varepsilon^2 B^{-1}P_2 + \ldots + \varepsilon^m B^{-1}P_m + \ldots + \varepsilon^n B^{-1}P_n =$$

$$= \overline{X} + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots + \varepsilon^m X_m + \ldots + \varepsilon^n X_n. \tag{11}$$

Demak, sistemaning o’ng tamoni $\overline{b_i}(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{b_i}(\varepsilon) = \overline{b_i} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \tag{12}$$

$$\overline{b_i}(\varepsilon) = \overline{b_i} + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \tag{13}$$

ε kichik son bolgani uchun $\overline{b_i}(\varepsilon) > 0$.

Simpleks usulini qo’llash jarayonida bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0 = \frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}} = \min_i \frac{\overline{b_i}(\varepsilon)}{a_{ik}} = \frac{b_l + \varepsilon^i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}} > 0 \tag{14}$$

formuladan foydalanamiz. Farazga asosan $\dfrac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$ nisbat $i = l$ da minimumga erishadi. Agar

$$\theta_0 = \min_i \frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik} > 0)$$

qiymat, $i = l$ indeks uchun o’rinli bo’lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so’ng, simpleks jadval ma’lum yo’l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja yetarli darajada kichik ε uchun aynimagan reja bo’ladi.

Amalda aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala amerika matematigi Bil tomonidan tuzilgan.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7},$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min .$$

Bu masala aynigan masala bo'lib, uni yuqorida keltirilgan “to'g'rilash” usulini qo'llamasak yechganda sikllanish holati ro'y beradi. Simpleks usulning 7-iteratsiyasidan so'ng 2-iteratsiyaga qaytish holati ro'y beradi. Agar yuqorida ko'rilgan “to'g'rilash” usulini qo'llamasak, bu sikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak masalaning optimal yechimini topish imkoniyati bo'lmaydi. Endi masalani “to'g'rilash” usulini qo'llab yechamiz. Eng avval berilgan masaladagi sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

Bu yerda ε kichik musbat son bo'lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o'ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo'shish yetarli bo'lsin. Masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I.

P_b	C_b	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$\frac{\varepsilon}{4} - 60\varepsilon^2$	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
P_6	0	$\frac{\varepsilon}{2} - 90\varepsilon^2$	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1

II.

P_1	-3/4	$\varepsilon-240\varepsilon^2$	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	3/50	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+160\varepsilon^2$	0	30	7/50	-33	-3	0	0

III.

P_1	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+150\varepsilon^2$	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	-3/4	$\varepsilon-160\varepsilon^2$	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P_7	0	$1-500\varepsilon^2$	0	-500	0	250	100/3	-50/3	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4}+110\varepsilon^2$	0	-40	0	2	5/3	-7/3	0

V.

P_1	-3/4	$\frac{2}{125}+\varepsilon-168\varepsilon^2$	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P_3	-1/50	1	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	$\frac{1}{250}-2\varepsilon^2$	0	-2	0	1	2/15	-1/15	1/250
		$-\frac{1}{125}-\frac{3\varepsilon}{4}-$ $-114\varepsilon^2$	0	-36	0	0	7/5	-11/5	3/125

VI.

P_1	-3/4	$\frac{1}{125}+\varepsilon-180\varepsilon^2$	1	-180	0	6	0	2	1/25
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2+1$	0	0	1	0	0	0	1
P_5	0	$\frac{3}{100}-15\varepsilon^2$	0	-15	0	15/2	1	-1/2	3/100
		$135\varepsilon^2-\frac{1}{20}-\frac{3\varepsilon}{4}$	0	-15	0	-21/5	0	-3/2	-1/100

Shunday qilib, yuqoridagi "to'g'irlash" usulini qo'llab masalani yechganda 6-bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon)=(180\varepsilon^2+\varepsilon+\frac{1}{25};\ 0;\ 500\varepsilon^2+1;\ 0;\ \frac{3}{100}-15\varepsilon^2),$$

$$Y_{\min}(\varepsilon)=-135\varepsilon^2-\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{1}{20}.$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon=0$ deb qabul qilamiz.

Javob: $X_0=(\frac{1}{25};\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{3}{100}),\ Y_{\min}=-\frac{1}{20}.$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi masalalarni sun'iy bazis usuli bilan yeching.[2]

1. $$Z=-4x_1-2x_2-8x_3\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3\le 30\\ x_1+2x_2+4x_3=40\end{cases}$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

2. $$Z=-4x_1-2x_2\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1-2x_2\ge 4\\ -2x_1+x_2=2\end{cases}$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

[2]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 156-159.

15-MAVZU. IKKILANISH NAZARIYASI

Tayanch so'z va iboralar: O'zaro qo'shma masalalar, simmetrik qo'shma masalalar, simmetrik bo'lmagan qo'shma masalalar, ikkilamchi baholar, ikkilangan masala.

REJA:

1. Ikkilangan masala.

2. Qo'shma masalalar.

3. O'zaro qo'shma masalalar orasidagi bog'lanishlar.

4. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalari.

Quyidagi ChPMsini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{2}$$

Bu masala matrisa shaklida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{3}$$

1-ta'rif.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m = c_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = c_n, \end{cases} \tag{4}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\tilde{F} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{6}$$

masala (1), (2) masalaga **ikkilangan masala** deyiladi. U holda (3) masalaga ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$A^T Y = C^T,$$
$$y_i \geq 0, \; i = \overline{1, n}, \tag{7}$$
$$\tilde{F} = B^T Y \to \min.$$

bu yerda $Y^T = (y_1 \; y_2 \; ... \; y_m)$, $C = (c_1 \; c_2 \; ... \; c_n)$.

Yuqoridagidan foydalanib ikkilangan masalani qurish qoidasini keltiramiz:

1. Berilgan masala koeffisiyentlaridan tashkil topgan asosiy matrisa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda ikkilangan masalaning asosiy matrisasi

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lib, *A* matrisaga transponirlangan bo'ladi.

2. Ikkilangan masaladagi noma'lumlar soni berilgan masaladagi cheklamalar soniga teng. Ikkilangan masaladagi cheklamalar soni esa berilgan masaladagi noma'lumlar soniga teng bo'ladi.

3. Ikkilangan masalaning maqsad funksiyasi koeffisiyentlari berilgan masalaning ozod hadlardan iborat bo'ladi. Ikkilangan masalaning ozod hadlari esa berilgan masalaning maqsad funksiyasi koeffisiyentlaridan iborat bo'ladi.

4. Agar berilgan masalada $x_j \geq 0$ bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi unga mos *j*-cheklamaga $\geq$ ko'rinishdagi tengsizlik qo'yiladi. Agarda x_j noma'lumning ishorasi noaniq bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi *j*-cheklamaga tenglik qo'yiladi.

5. Agar berilgan masaladagi *i*-cheklama tengsizlikdan iborat bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos noma'lumning ishorasi $y_i \geq 0$ bo'ladi. Agarda berilgah masaladagi *i*-cheklama tenglikdan iborat bo'lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos y_i noma’lumning ishorasi noaniq bo’ladi.

Har qanday chiziqli programmalash masalasi uchun ikkilangan masala mavjud va uni berilgan masaladagi maqsad funksiya va noma’lumlarga qo’yilgan cheklamalar orqali to’la aniqlash mumkin.

Biz quyida ChPMlarinig bazilariga ikkilangan masalani qurish qoidasi bilan tanishib chiqamiz.

Standart ChPMsi berilgan bo’lsin:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{8}$$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix}$; $\bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ belgilashlar kiritamiz, bu yerda E $n \times n$-o’lchovli birlik matrisa, 0 n-o’lchovli nol matrisa. U holda (8) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &\bar{A}X \le \bar{B}, \\ &Y = CX \to \max. \end{aligned} \tag{9}$$

Bu masalaning ko’rinishi (3) masala bilan mos tushadi. Demak, ikkilangan masalani yozishda tarifdan foydalanish mumkin. Shunday qilib, ta’rifga asosan (9) masala uchun ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &\bar{A}^T P = C^T, \\ &p_i \ge 0, \ i = \overline{1, n+m}, \\ &\tilde{F} = \bar{B}^T P \to \min. \end{aligned} \tag{10}$$

bu yerda, $P^T = \left(p_1 \ \ p_2 \ \ldots \ p_{n+m}\right) = \left(Y^T, Z^T\right) = (y_1 \ y_2 \ldots y_m \ z_1 \ z_2 \ldots z_n)$. $\bar{A}^T = \left(A^T, \ -E\right)$ ekanligini hisobga olib, oldingi belgilashlarga qaytsak (10) quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &A^T Y - Z = C^T, \\ &y_i \ge 0, \ z_j \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{aligned} \tag{11}$$

$z_j \ge 0$ bo’lgani uchun $A^T Y - Z = C$ tenglik $A^T Y \ge C$ bo’lgandagina o’rinli bo’ladi. Shuning uchun (8) masalaga ikkilangan masala

$$
\begin{aligned}
&A^T Y \geq C^T, \\
&y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\
&\tilde{F} = B^T Y \to \min
\end{aligned} \qquad (12)
$$

ko'rinishda bo'ladi.

ChPMsi quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$
\begin{aligned}
&AX = B, \\
&x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\
&F = CX \to \max.
\end{aligned} \qquad (13)
$$

Ma'lumki, $q = k \Leftrightarrow \begin{cases} q \leq k, \\ q \geq k. \end{cases}$. U holda (13) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&AX \leq B, \ -AX \leq -B, \\
&x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\
&F = CX \to \max.
\end{aligned} \qquad (14)
$$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida (14) masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}X \leq \tilde{B}, \\
&x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\
&F = CX \to \max.
\end{aligned} \qquad (15)
$$

(15) masalaga ikkilangan masalani, (12) ga asosan, yozamiz:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}^T S \geq C^T, \\
&s_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\
&\tilde{F} = \tilde{B}^T S \to \min.
\end{aligned}
$$

bu yerda $S^T = \left(s_1 \ s_2 \ \ldots \ s_{2m}\right) = \left(P^T, Q^T\right) = \left(p_1 \ p_2 \ \ldots \ p_m \ q_1 \ q_2 \ \ldots \ q_m\right)$.

Oldingi belgilashlarga qaytamiz, u holda

$$
\begin{aligned}
&A^T P - A^T Q \geq C^T, \\
&p_i \geq 0, \ q_i \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \\
&\tilde{F} = B^T P - B^T Q \to \min.
\end{aligned}
$$

$Y = P - Q$ belgilashdan so'ng

$$A^T Y \ge C^T,$$
$$\tilde{F} = B^T Y \to \min \tag{16}$$

masalani hosil qilamiz. Bu yerda Y ikkita matrisaning ayirmasi bo'lgani uchun uning ishorasi noaniq bo'ladi[1].

Berilgan masala va unga ikkilangan masala birgalikda o'zaro qo'shma masalalar deb ataladi. Agar qo'shma masalalardan birortasi yechimga ega bo'lsa, ularning ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo'ladi.

O'zaro qo'shma masalalarni ko'z oldiga keltirish va ularni iqtisodiy ma'nolarini tahlil qilish uchun quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz.

$$AX \le B,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{17}$$
$$F = CX \to \max.$$

Yuqoridagilardan xulosa qilib, o'zaro qo'shma masalalarning matematik modellarini quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

Simmetirik bo'lmagan qo'shma masalalar

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
I	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \ge C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$
II	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^T Y \le C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \max.$

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
I	$AX \le B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \ge C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 203-214.

II	$AX \ge B,$ $x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^T Y \le C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j=\overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^T Y \to \max.$

1-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masalani tuzing.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Yechish: Masalada barcha cheklamalar "≤" ko'rinishdagi tengsizliklardan iborat. Demak, berilgan masalaga simmetirik bo'lgan qo'shma masala 4-ko'rinishda tuziladi. Natijada quyidagi simmetirik qo'shma masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,$$
$$F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min.$$

2-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$Z = 4x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Yechish: Berilgan masaladagi ikkinchi cheklama tenglamadan, birinchi va uchinchi cheklamalar esa tengsizliklardan iborat. Shuning uchun qo'shma masalani tuzishda yuqoridagi 5-punktda keltirilgan qoidaga rioya qilamiz va quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge 4, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0,$$
$$F = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to \min.$$

Ikkilangan masalalar yechimlari orasida mavjud bolgan boglanishni ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi va birinchi teoremasi orqali aniqlash mumkin.

Ikkilanish nazariyasida berilgan masalaning ixtiyoriy X joiz rejasi, hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy Y joiz rejasi uchun

$$F(X) \leq \tilde{F}(Y)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi deb ataladi.

Agar X^* va Y^* joiz rejalar uchun

$$F(X^*) = \tilde{F}(Y^*)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu joiz rejalar mos ravishda berilgan va ikkilangan masalaning optimal rejasi bo'ladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy joiz ishlab chiqarish rejasi, hamda xom-ashyolarning ixtiyoriy joiz baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi xom-ashyolar bahosidan oshmasligini ko'rsatadi.

Ikkilanish nazariyasining asosini ikki teorema tashkil etadi. Ulardan biri ikkilanish teoremasi, ikkinchisi esa muvozanatlik teoremasi deb ataladi.

Muvozanatlik teoremasidan ikkilangan masalaning iqtisodiy tahlilida foydalanamiz, shu sababli biz bu teoremani keyinchalik keltiramiz.

Ikkilanish teoremasini keltirish uchun berilgan va ikkilangan masalalar orasidagi ba'zi bog'lanishlarni aniqlab o'lamiz.

2-ta'rif. $X = \left\{ x \middle| Ax \leq B \right\}$ to'plam (3) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami deyiladi.

3-ta'rif. Agar (3) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar to'plami $X = \left\{ x \middle| Ax \leq B \right\}$ bo'sh bo'lmasa, u holda **masala birgalikda** deyiladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz:

1-teorema (ikkilanish teoremasi). Agar (3) va (7) o'zaro qo'shma masalalarning har biri birgalikda bo'lsa, u holda ularning ikkalasi ham yechimga ega bo'ladi, hamda bu masalalardagi maqsad funksiyalarning ekstremal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, yani $F_{\min}(X^*) = \tilde{F}_{\max}(Y^*)$.

Bu teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

2-teorema. Agar o'zaro ikkilangan masalalardan biri yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo'ladi.

3-teorema. Agar o'zaro ikkilangan masalalardan biri birgalikda bo'lib, ikkinchisi esa birgalikda bo'lmasa, u holda birinchi masala o'zining yechimlar to'plamida chegeralanmagan bo'ladi

Bu teoremalar ikkilangan masalalarda quyidagi holatlar bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi:

1. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda (ikkalasi ham yechimga ega).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases} \qquad F = x_1 + x_2 \to \max.$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 1, \\ y_1 + 2y_2 = 1, \end{cases} \qquad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \qquad \tilde{F} = 4y_1 + 4y_2 \to \min.$$

$$X^* = \left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right) \qquad Y^* = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

2. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda emas.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le -4, \end{cases} \qquad F = x_1 + 3x_2 \to \max.$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 1, \\ -y_1 + y_2 = 3, \end{cases} \qquad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, \qquad \tilde{F} = 3y_1 - 4y_2 \to \min.$$

$$X = \varnothing \qquad X = \varnothing$$

3. Quyidagi masalardan biri birgalikda ikkinchisi birgalikda emas.

$$\{x_1 - x_2 \le 1, \qquad F = x_1 \to \max.$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ -y_1 = 1, \end{cases} \qquad y_1 \ge 0, \qquad \tilde{F} = y_1 \to \min.$$

Masala birgalikda $\qquad Y = \varnothing$

Agar berilgan masala yechimga ega bo'lsa, u holda ikkilangan masalaning yechimi

$$Y^0 = C^0 B^{-1}$$

formula orqali topiladi.

Xuddi shuningdek, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda berilgan masalaning optimal yechimi

$$X^0 = B^{-1} B^0$$

formula orqali topiladi. Bu formulalarda:

$C^0 -$ simpleks jadvalning oxirgi qadamidagi C_b vektor;

$B^0 -$ ikkilangan masala simpleks jadvalining oxirgi qadamidagi B vektor;

$B^{-1} -$ matrisani aniqlash uchun

$$AX \le B,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$
$$F = CX \to \max.$$

masala simpleks jadvalining oxirgi qadamini yozamiz

P_b	C_b	(X^0)	c_1	c_2	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_n
		P_0	P_1	P_2	$\ldots$	P_m	P_{m+1}	$\ldots$	P_k	$\ldots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\ldots$	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\ldots$	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	…	…	…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	$\ldots$	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	$\ldots$	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}

P_k vektorni $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ $\left(P_0 = (b_1, b_2, ..., b_m\right)$ optimal yechim bazislari $P_1, P_2, ..., P_m$ bo'yicha yoyilmasini yozamiz

$$P_k = x_{1k} P_1 + x_{2k} P_2 + ... + x_{mk} P_m, \quad k = \overline{0,n}.$$

Bu yoyilmani quyidagicha yozish mumkin:

$$P_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \dots \\ x_{mk} \end{pmatrix} = DX_k.$$

D matrisaga teskari D^{-1} matrisani B^{-1} bilan belgilaymiz, ya'ni $D^{-1} \equiv B^{-1}$. U holda $B^0 = P_0$; $C^0 = C_b$.

3-misol. Berilgan masala va unga ikkilangan masalaning yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6},$$

$$F = x_2 - 3x_3 + x_5 \to \min.$$

Yechish: Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

P_b	C_b	P_0	0	1	-3	0	2	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0	
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0	
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1	$\boxed{10/3}$
Δ_j		0	0	-1	$\boxed{3}$	0	-2	0	
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0	
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0	$\boxed{4}$
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1	
Δ_j		-9	0	$\boxed{1/2}$	0	-3/4	-2	0	

P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0	
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0	
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1	
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-7/5	0	

III bosqichda optimal yechimga ega bo'lamiz: $X^0 = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$, $F_{\min} = -11$.

$$C^0 = (1, -3, 0), \qquad B^0 = (4, 5, 11), \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y^0 = C^0 B^{-1} = (1 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan ikkilanish nazariyasining 1-teoremasi iqtisodiy nuqtai nazardan shunday talqin qilinadi: agar tashqaridan belgilangan c_j bahoda sotilgan mahsulotning pul miqdori y_i ichki bahoda o'lchangan xarajatlar (xom-ashyolar) miqdoriga teng bo'lsa, u holda mahsulotning ishlab chiqarish rejasi, hamda xom-ashyolarning baholari optimal bo'ladi. Bundan ko'rinadiki, ikkilangan masaladagi noma'lumlar (ularni ikkilangan baholar deb ataymiz) sarf qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdorlarini o'zaro teng bo'lishini taminlovchi vosita bolib xizmat qiladi.[2]

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

---

[2]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 214-215.

16-MAVZU. IQTISODIY MASALALARNING YECHIMLARINI TAHLIL QILISH

Tayanch so'z va iboralar: Kamyob xom-ashyo, kamyob bo'lmagan (ortiqcha) xom-ashyo, shartli optimal baho, shartli optimal yechim, muvozanatlik teoremasi.

REJA:

1. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalarining iqtisodiy talqini.

2. Iqtisodiy masalalarning yechimini tahlil qilish.

Ma'lumki, chiziqli programmalash usullari jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi. Lekin biz uchun buning o'zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so'ng iqtisodiy ob'ektlar (zavod, fabrika, firma) boshqaruvchilari oldida quyidagiga o'xshagan masalalarni yechishga to'g'ri keladi:

1. xom-ashyolarning ba'zilarini oshirib, ba'zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o'zgaradi?

2. optimal yechimni o'zgartirmasdan xom-ashyolar sarfini qanday darajaga o'zgartirish (kamaytirish) mumkin?

3. mahsulotga bo'lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o'zgaradi?

Shunga o'xshash boshqa muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasi teoremalaridan foydalaniladi. Bunda ikkilanish nazariyasining quyidagi teoremalariga asoslaniladi. Quyidagi o'zaro qo'shma masalalarni qaraymiz:

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{1}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} &A^T Y = C^T, \\ &y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{aligned} \tag{2}$$

1-teorema (muvozanatlik teoremasi). $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^* > 0$ bo'lsa, u holda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i . \tag{3}$$

Ikkilanish va muvozanatlik teoremalaridan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

2-teorema. $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (1) berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (2) ikkilangan masalaning joiz yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^* > 0$ tengsizlik bajarilganda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda X^*, Y^* mos ravishda (1) va (2) masalalarning optimal yechimlari bo'ladi.

Ikkilanish teoremalari ChPMsining standart, kanonik va boshqa turdagi masalalari uchun ham o'rinli. Masalan, muvozanatlik teoremasini standart ChPMsi:

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max . \end{aligned} \tag{5}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} &A^T Y \ge C^T , \\ &y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min \end{aligned} \tag{6}$$

uchun keltiramiz.

3-teorema. $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (5) berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (6) ikkilangan masalaning optimal yechimi bo'lsin.

Agar $y_i^* > 0$ bo'lsa,

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i . \tag{7}$$

Agar $x_j^* > 0$ bo'lsa,

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + ... + a_{mj}y_m^* = c_j \,. \qquad (8)$$

Bu shartlarni quyidagicha talqin qilish mumkin: agar birinchi masala yechimidagi noma'lum musbat qiymatga ega bo'lsa, u holda ikkinchi masalada tegishli shartlar optimal rejada tenglikka aylanadi.

Bundan ko'rinadiki: optimal yechimning ikkilangan bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o'lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xom-ashyo "**tanqis** (defitsit) xom-ashyo" deyiladi. Bunday xom-ashyoni oshirib sarf qilish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xom-ashyo "**notanqis** (kamyob bo'lmagan) xom-ashyo" hisoblanadi. Bunday xom-ashyolarni ikkilangan bahosi nolga teng bo'ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshirishga ta'sir qilmaydi.[1]

1-masala. Deylik, korxonada bir xil mahsulotni 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiyaga bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan xom-ashyolar miqdori, ularning zahirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan. Har bir texnologiya bo'yicha korxonaning ishlash vaqtini shunday topish kerakki, natijada korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning miqdori maksimal bo'lsin.

Resurslar	**Texnologiyalar**			**Zahira**
	T_1	T_2	T_3	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xom ashyo (t)	2	3	2,5	150
Elektroenergiya (Kvt/ch)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni ishlatish rejalari	x_1	x_2	x_3	Z→max

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 214-217.

Masalaning matematik modeli:

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max .$$

Masalani simpleks usuli bilan yechamiz.

X_b	C_b	B	300	250	450	0	0	0	a.k.
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0	$\boxed{48}$
X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0	60
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1	50
Δ_j		0	-300	-250	$\boxed{-450}$	0	0	0	
X_3	450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0	80
X_5	0	30	0,5	1	0	-0.1	1	0	$\boxed{60}$
X_6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1	-
Δ_j		21600	$\boxed{-30}$	110	0	18	0	0	
X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0	
X_1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0	
X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1	
Δ_j		23400	0	170	0	12	60	0	

Jadvaldan ko'rinadiki, $X^* = (60, 0, 12, 0, 0, 180)$, $Z(X^*) = 23400$.

Jumladan T_1 texnologiyani 60 soat, T_3 texnologiyani 12 soat qo'llash kerak. T_2 texnologiyani esa umuman qo'llamaslik kerak. Ikkilangan masalaning yechimi:

$$Y^* = (12, 60, 0), \qquad \tilde{Z}(Y^*) = 23400 .$$

Masalaning yechimidan ko'rinadiki, 1 va 2-resurslar (ish kuchi va birlamchi xom-ashyo) to'la ishlatiladi. Demak, ular kamyob resurslardir. 3-resurs (elektroenergiya) kamyob emas.

Berilgan masala yechimini uning cheklamalariga qo'yganda 1 va 2-shartlar tenglikka aylanadi. 3-shart qat'iy tengsizlikka aylanadi.

(5) va (6) masala misolida ikkilanish nazariyasining ba'zi tatbiqlarini ko'rib chiqamiz. Buning uchun quyidagicha belgilash kiritamiz: $d = F_{\max} = \tilde{F}_{\min}$. Biz d ning qiymati B^T vektorga bog'liqligini aniqlaymiz. Shu maqsadda $d = \tilde{F}(B^T)$ deb qaraymiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $\tilde{F}(B^T)$ – bir jinsli, ya'ni $\tilde{F}(\lambda B^T) = \lambda \tilde{F}(B^T),\ \ \lambda \geq 0$;
2. $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning aniqlanish sohasida botiq.

Qavariq funksiyalar nazariyasidan ma'lumki botiq funksiya aniqlanish sohasining ichida uzluksiz. Demak, $\tilde{F}(B^T)$ funksiya ham aniqlanish sohasida uzluksiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensiallanuvchanligi ikkilangan masala yechimlarining strukturasiga bog'liq.

4-teorema. Agar ikkilangan masala yagona Y^* yechimga ega bo'lsa, u holda $\tilde{F}(B^T)$ funksiya B^T nuqtada differensiallanuvchi bo'lib,

$$\frac{\partial \tilde{F}(B^T)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ m$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Agarda ikkilangan masala yechimi yagona bo'lmasa, u holda yuqoridagiga o'xshash tasdiqni keltirish qiyinroq. Ammo bu holda ham yechimlar to'plamining ko'pyog'ida chetki nuqtalar yagona $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensial xarakteristikalari bo'lib qoladi.

Quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi yechimini tahlil qilamiz.

2-masala. 3 ta *A*, *B*, *C*, mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xom-ashyolar (resurslar) ishlatilsin, I tur xom-ashyoning zahirasi 180 kg, II tur xom-ashyoning zahirasi 210 kg va III tur xom-ashyoning zahirasi 244 kg bo'lsin. Har bir mahsulotning 1 birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xom-ashyoning miqdori (normasi) va mahsulot birligining bahosi (narxi) quyidagi jadvalga joylashtirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini toping.

Xom-ashyo / Mahsulot turi	I	II	III	Mahsulot birligi bahosi (p.b.)
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
Xom-ashyo zahirasi (kg)	180	210	244	

Bu masala bor resurslardan optimal foydalanish masalasi bo'lib, uning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz.

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad (i = \overline{1,3}),$$

$$F = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min.$$

Berilgan masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz va simpleks jadvalga joylashtirib uni simpleks usul bilan yechamiz.

№	X_b	C_b	10	14	12	0	0	0	X_0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	X_4	0	4	2	1	1	0	0	$\boxed{180}$
2	X_5	0	3	1	3	0	1	0	210
3	X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
Δ_j			-10	$\boxed{-14}$	-12	0	0	0	
1	X_2	14	2	1	1/2	½	0	0	90
2	X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
3	X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	$\boxed{64}$
Δ_j			18	0	$\boxed{-5}$	7	0	0	1260
1	X_1	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
2	X_5	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
3	X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	¼	16
Δ_j			57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Optimal yechim berilgan masala uchun $X^* = (0,\ 82, 16)$, $Z(X^*) = 1340$; ikkilangan masala uchun $Y^* = \left(\frac{23}{4},\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$, $F(Y^*) = 1340$.

Endi berilgan masala yechimini tahlil qilamiz.

Ikkilangan masala yechimida $y_1^* = \frac{23}{4}$, $y_3^* = \frac{5}{4}$. Demak, 3-teoremaga asosan I va III tur xom-ashyolar to'la ishlatilgan. Chunki bu yerda

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 82 + 16 = 180, \quad 0 + 2 \cdot 82 + 5 \cdot 16 = 244$$

Shu sababli bu xom-ashyolar kamyob hisoblanadi.

$y_2^* = 0$. Demak II tur xom-ashyo to'la ishlatilmagan. Shu sababli bu xom-ashyo kamyob emas.

Ikkilangan masalaning yechimi "shartli optimal yechim" deyiladi. Ular yordamida xom-ashyolar 1 birlik ortiqcha sarf qilinganda maqsad funksiyasining qiymati, ya'ni daromad qanchaga o'zgarishi ko'rsatiladi.

Masalan, 1-tur resursni 1 kg ortiqcha sarf qilish natijasida maqsad funksiyaning qiymati $5,75$ birlikka oshadi.

Agar 1-tur resursdan ishlab chiqarishda 1 kg ortiqcha sarf qilinsa, uning ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Bu yangi rejaga muvofiq ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdori 5,75 ko'proq bo'ladi. Jadvaldagi x_4 ustunga qarab quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada B mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{5}{8}$ birlikka oshadi va C mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{1}{4}$ birlikka kamayadi. Buning natijasida 2-tur xom-ashyoni sarf qilish $\frac{1}{8}$ birlikka kamayadi.

Xuddi shuningdek, x_6 ustunga qaraymiz. 3-tur xom-ashyo xarajatini 1 birlikka oshirib sarf qilish natijasida yangi reja topiladi va bu rejaga ko'ra ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati 1,25 birlikka oshadi va daromad 1340+1,25=1341,25 birlikni tashkil qiladi. Bu natija B mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{8}$ birlikka kamaytirish, C mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{4}$ birlikka oshirish hisobiga bo'ladi. Bu holda 2 tur resurs $\frac{5}{8}$ kg. ko'proq sarf qilinadi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

17-MAVZU. IKKILANGAN SIMPLEKS USUL

Tayanch so'z va iboralar: Ikkilangan simpleks usul, chala joiz yechum, optimallik mezoni.

REJA:

1. Ikkilangan simpleks usulda bazis rejaning optimallik sharti.
2. Ikkilangan simpleks usuldagi masala optimal yechimining mavjud emaslik mezoni.
3. Ma'lumotlar o'zgarishining yechimga ta'sirini tahlil qilish.

Hozirgi paytgacha chiziqli programmalashtirish masalalarining optimal yechimini topish uchun foydalangan simpleks usulini biz boshlang'ich simpleks usuli deb ataymiz. Ma'lumki boshlang'ich simpleks usulida kanonik masala uchun optimallik sharti $\Delta_j \geq 0$ ko'rinishda bo'lib, undan ikkilangan masalaninng optimal yechimini aniqlashda ham foydalanish mumkin edi.

Biz ChPMlarining optimal yechimini aniqlashda yanada umumiy usul ikkilangan simpleks usuli bilan tanishib chiqamiz.

Ikkilangan simpleks usul oddiy simpleks usulga o'xshash bo'lsa ham unga nisbatan ba'zi qulayliklarga ega. Masalan, ikkilangan simpleks usul bo'yicha yechilayotgan masala shartlaridagi ozod hadlar musbat bo'lmasligi ham mumkin.
Oddiy simpleks usul singari ikkilangan simpleks usulining har bir qadamida n-o'lchovli X vektor boshqasiga almashib boradi va chekli qadamlardan so'ng masalaning optimal yechimi topiladi yoki uning yechimi mavjud emasligi aniqlanadi.

Faqat shunga e'tibor berish kerakki, simpleks usuldan farqli ravishda, ikkilangan simpleks usul bilan har qadamda topilgan X reja joiz reja bo'lmasligi ham mumkin. Chunki ikkilangan simpleks usul bilan topilgan bunday reja masalaning hamma shartlarini qanoatlantirgani bilan musbat bo'lishlik shartini qanoatlantirmasligi mumkin. Bunday reja chala joiz reja deb ataladi.

Ikkilangan simpleks usul bo'yicha chala joiz rejalarni almashtirish jarayoni joiz reja topilguncha takrorlanadi. Topilgan joiz reja esa optimal reja, ya'ni masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik, kanonik formadagi ChPMsi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Bu masaladagi b_i ozod hadlarning ba'zilari yoki hammasi manfiy ishorali bo'lsin.

Bunday masalalarni ikkilangan simpleks usul bilan yechish uchun eng avvalo masalaga qo'shma

$$\begin{gathered} A^TY \leq C^T, \\ F = B^TY \to \max. \end{gathered} \tag{1}$$

masala tuziladi.

So'ngra berilgan (1) masalani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \qquad + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\quad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0, \tag{3}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min. \tag{4}$$

(2)-(4) masalaning koeffisiyentlari va ozod hadlari simpleks jadvaliga joylashtiriladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\boxed{P_l}$	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}	$\dots$	$\boxed{a_{lk}}$	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
	Δ_j	Δ_0	Δ_1	Δ_2	$\dots$	Δ_m	Δ_{m+1}		$\boxed{\Delta_k}$		Δ_n

Agar b_i $(i=\overline{1,m})$ ozod hadlar uchun $b_i \geq 0$ shart bajarilsa masalaning optimal yechimini topishda simpleks usulidan foydalanamiz.

Agar b_i $(i=\overline{1,m})$ ozod hadlarning ba’zilari yoki hammasi uchun $b_i < 0$ shart bajarilsa masalaning optimal yechimini topishda ikkilangan simpleks usulidan foydalanamiz. Bunda quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. $\min\limits_{b_i<0} \{b_i\}$ shart asosida $\{P_1, P_2, ..., P_l, ..., P_m\}$ bazis vektorlar sistemasidan chiqarilishi kerak bo’lgan bazis vektorni aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{b_i<0} \{b_i\} = b_l$ bo’lsin. Demak, P_l bazis vektorni bazis vektorlar sistemasidan chiqarishimiz kerak.

2. P_l bazis vektor o’rniga yangi bazis vektorlar sistemasiga kiritilishi kerak bo’lgan vektorni $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(\dfrac{\Delta_j}{a_{lj}}\right)$ shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{lj}<0}\left(\dfrac{\Delta_j}{a_{lj}}\right) = \dfrac{\Delta_k}{a_{lk}}$ bo’lsin. Demak, P_k vector yangi bazis vektorlar sistemasiga kiritilishi kerak. Ya’ni $\{P_1, P_2, ..., P_k, ..., P_m\}$ bazis vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

Bu holda a_{lk} element boshlovchi (hal qiluvchi) element bo'lib, u joylashgan l qatordagi P_l vektor o'rniga k ustundagi P_k vektor kiritiladi. Simpleks jadvalda ham almashtirish oddiy simpleks usuldagidek bajariladi. Bu jarayon masalaning optimal yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Ikkilangan simpleks usulda berilgan masalaning optimal yechimini mavjud emaslik va chala yechimning optimal yechim bo'lishlik sharti quyidagi teoremalar orqali aniqlanadi.

1-teorema. Agar masalaning chala rejasidagi koordinatalaridan kamida bittasi, masalan, $b_k < 0$ bo'lib, a_{lj} koeffisiyentlardan birortasi ham manfiy bo'lmasa, u holda masala optimal yechimga ega bo'lmaydi.

Shuday qilib, ikkilangan simpleks usulida masalaning optimal yechimga ega b'lmaslik sharti: $\begin{cases} b_k < 0, & k = \overline{1,m}, \\ a_{kj} \geq 0, & j = \overline{1,n}. \end{cases}$

2-teorema. Agar masalaning chala rejasi uning joiz rejasidan iborat bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

1-misol. Quydagi berilgan masalani ikkilangan simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \qquad \text{(I)}$$
$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to min.$$

Yechish: Berilgan masalaga x_5 va x_6 qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritamiz va ayrim teng kuchli almashtirishlar bajarib uni quyidagi kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_6 = -4, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0, \ x_6 \geq 0, \qquad \text{(II)}$$
$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \min.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$\begin{cases} -2y_1 - 3y_2 \le 3, \\ -y_1 + 2y_2 \le 4, \\ y_1 - y_2 \le 5, \\ -5y_1 - 4y_2 \le 6, \end{cases}$$

$$y_1 \le 0,\ y_2 \le 0, \qquad \text{(III)}$$

$$F = -5y_1 - 4y_2 \to \max.$$

(П) masalani ikkilangan simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_{baz}	P_0	3	4	5	6	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_5	0	-5	-2	-1	1		1	0
P_6	0	-4	-3	2	-1	-4	0	1
		$Y_0 = 0$	$\Delta_1 = -3$	$\Delta_2 = -4$	$\Delta_3 = -5$	$\Delta_4 = -6$	$\Delta_5 = 0$	$\Delta_6 = 0$
P_4	6	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0
P_6	0	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$	$-\frac{9}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	1
		$Y_1 = 6$	$\Delta_1 = -\frac{3}{5}$	$\Delta_2 = -\frac{14}{5}$	$\Delta_3 = -\frac{31}{5}$	$\Delta_4 = 0$	$\Delta_5 = \frac{-6}{5}$	$\Delta_6 = 0$

Simpleks jadvaldan ko'rinadiki, I bosqichda har bir $j = \overline{1,6}$ uchun $\Delta_j \le 0$. Demak, $X^0 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -5,\ -4)$ vektor (II) masalaning chala rejasi bo'ladi.

(III) ikkilangan masalaning yechimi esa $Y^0 = (0,\ 0)$ bo'ladi. X^0 – chala rejaning eng kichik manfiy elementiga mos keluvchi P_5 vektorni bazisdan chiqarib $\theta = \min\limits_{a_{ij}<0} \frac{\Delta_4}{a_{14}} = 1{,}2$ shart asosida P_4 vektorni bazisga kiritamiz.

Simpleks jadvalni almashtirishlar bajarib yangi simpleks jadvaliga o'tamiz. $X^1 = (0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 8)$ vektor yangi chala joiz reja bo'ladi.

X^1 vektorning barcha koordinatalari nomanfiy bo'lgani uchun u berilgan masalaning joiz rejasi. Demak, (2-teoremaga asosan) u masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Yangi bazisdagi qo'shma masalaning yechimi

$$Y^1 = \left(-\frac{6}{5};\, 0 \right)$$

vektordan iborat bo'ladi. O'zaro qo'shma masalalar uchun $F_{\max} = Z_{\min} = 6$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Masaladagi ma'lumotlarning o'zgarishi ChPMsi yechimiga ta'siri bilan tanishib chiqamiz. Bu kabi tahlil masaladagi ko'rsatkichlarga ma'lum bir vaqtdan keying inflyatsiyaning ta'sirini o'rganishda yoki ma'lumotlar 700000 ± 5000 kabi berilganda kerak bo'ladi.

Yuqoridagi tahlillar yordamida quyidagi savollarga javob berish mumkin.

1. Ma'lumotlarga optimallik shartiga ta'sir etuvchi o'zgartirihs mumkinmi?
2. Optimallik sharti buzilgan bo'lsa uni qanday tiklash mumkin?

2-misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini toping va tahlil qiling.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0,$$

$$F = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

Yechish: Bu masalani simpleks usulida yechamiz va oxirgi jadvalni keltiramiz:

P_b	C_b	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	a.k.
			-1	-2	0	0	0	
P_2	-2	5	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Demak, quyidagi $P_b = \left(P_2, P_1, P_3\right)^T$ bazis vektorlarga tayanib optimal yechim topiladi. Bu quyidagucha amalga oshirilgan.

$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B^{-1}N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix},$$

$$c_b=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ c_N=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ y^T=c_b^TB^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\end{pmatrix},$$

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 3\end{pmatrix},\quad \hat{c}_N^T=c_N^T-y^TN=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

bu yerda y ikkilangan masalaning optimal yechimi.

Biz endi boshlang'ich ma'lumotlardagi o'zgarishlarning yechimga ta'sirini o'rganib chiqamiz.

Birinchi bo'lib ozod had $P^T=(b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T$ o'zgarishining ta'sirini va o'zgarish oralig'ini ko'rib chiqamiz. $\tilde{b}_2=b_2+\delta$ bo'lsin. U holda yangi masalaning o'ng tomoni $P=P+\Delta P$. Bu yerda $\Delta P=(0 \quad \delta \quad 0)^T$. Ma'lumki $B^{-1}\tilde{P}\geq 0$. U holda

$$B^{-1}\tilde{P}=B^{-1}(P+\Delta P)\geq 0\Rightarrow B^{-1}P\geq -B^{-1}\Delta P\Rightarrow \begin{pmatrix}5\\ 3\\ 3\end{pmatrix}\geq \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\delta\\ 0\\ \frac{1}{2}\delta\end{pmatrix}\Rightarrow -10\leq\delta\leq 6\Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \tilde{F}=F+\Delta F=F+y^T\delta=F+y_2\delta=-13-\delta.$$

Demak, masalaning ikkinchi shartidagi ozod had $-10\leq\delta\leq 6$ oraliqda o'zgarsa bazis o'zgarmaydi. Haqiqattan ham agar $\delta=-4$ bo'lsa, u holda

$$\tilde{x}_b=x_b+B^{-1}\Delta P=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 5\end{pmatrix}\geq 0,\ \ \tilde{F}=-13+4=-9,$$

bu yerda bazis o'zgarmaydi chunki $B^{-1}\tilde{P}\geq 0$ shart bajariladi; agar $\delta=8$ bo'lsa, u holda

$$\tilde{x}_b = x_b + B^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = -13 - 8 = -21,$$

bu yerda bazis o'zgaradi chunki $B^{-1}\tilde{P} \geq 0$ shart bajarilmadi.

Endi $c = (c_1 \quad c_2 \quad c_3)$ vektorning o'zgarishini qarab chiqamiz. $\tilde{c} = c + \Delta c = (c_1 \quad c_2 + \delta \quad c_3)^T$ bo'lsin. U holda

$$c_N^T - (c_b + \Delta c_b)^T B^{-1} N \geq 0 \Rightarrow \hat{c}_N^T = c_N^T - c_b^T B^{-1} N \geq \left(\Delta c_b\right)^T B^{-1} N$$

shartdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(1 \quad 2) \geq (\delta \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \quad 2) \geq \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta & \frac{1}{2}\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \delta \leq 2 .$$

Demak, $\delta \leq 2$ bo'lganda oldingi bazis optimal bazis bo'lb qoladi. Aks holda esa bazis o'zgaradi.

Masalan, $\delta = 1$ da boshlang'ich bazis bazis optimal bazis bo'lib qoladi, $\delta = 4$ da esa boshlang'ich bazis bazis optimal bazis bo'la olmaydi shu sababli masalaning optimal yechimini topish uchun yngi baziaga o'tishimiz kerak[1].

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009, pp. 213-218.

18-MAVZU. TRANSPORT MASALASI

Tayanch so'z va iboralar: Yopiq modelli transport masalasi, band katakchalar, ochiq modelli transport masalasi, "shimoliy-g'arb burchak" usuli, "minimal harajat" usuli.

REJA:

1. Transport masalasining qo'yilishi va uning matematik modeli.
2. Transport masalasi yechimining xossalariga doir teoremalar.
3. Transport masalasining boshlang'ich joiz rejasini topish usullari.

Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.

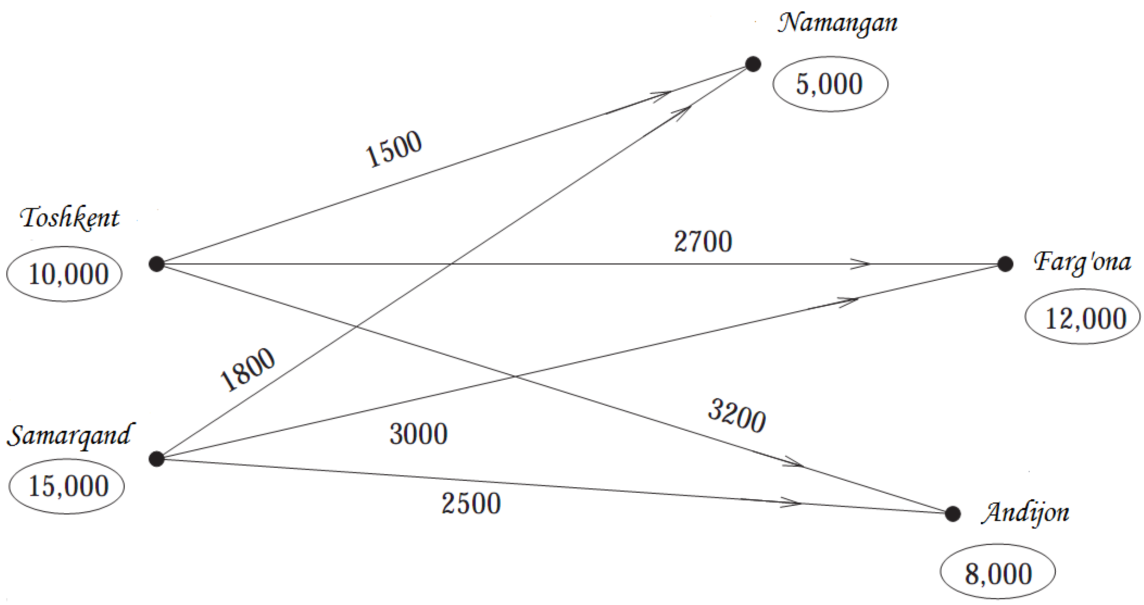
Zahirasida b_i birlik mahsuloti bo'lgan i-ta'minotchidan mavjud bo'lgan istemolchilarga zahirasidagi mahsulotni to'la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda $x_{i,j}$ – i-ta'minotchidan j-is'temolchiga tashilgan mahsulot hajmi.

1-misol. Faraz qilaylik, Toshkent va Samarqandga keltirilgan Xitoyda ishlab chiqariluvchi o'yinchoqlar Namangan, Farg'ona va Andijonga transport orqali tarqatilmoqda. Bunda Toshkentga 10000 ta va Samarqandga 15000 ta o'yinchoq keltirilgan bo'lib, Namanganga 5000 ta, Farg'onaga 12000 ta va Andijonga esa 8000 ta jo'natish rejalashtirilgan. Bitta o'yinchoqni yetkazib berishdagi transport harajatlari ta'minotchi va is'temolchilar orasidagi masofalarga to'g'ri proporsional bo'lib, masalaning tarmoq grafik ko'rinishi quyida keltirilgan.[1]

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 275-276.



Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta'minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i-ta'minotchidan har bir j-iste'molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo'l harajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i-ta'minotchidan j-iste'molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta’minotchilar	Iste’molchilar				Zahiralar miqdori
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda harajatlarning umumiy qiymati

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko’rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0 \leq x_{ij} \leq \min\left(a_i, b_j\right)$ tengsizlikning bajariliahi ko’rinib turibdi.

Transport masalalarii ikki turga ajratib o'rganiladi:

1. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday masala **yopiq modelli transport masalasi** deyiladi.

2. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5}$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday masalalar **ochiq modelli transport masalasi** deyiladi.

(1)-(3) masala uchun quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo'ladi.[2]

Transport masalasi matematik modeli tenglamalar sistemasidagi bazis vektorlar sistemasining o'lchovini aniqlaymiz. Buning uchun sistema asosiy matrisasining rangini aniqlash kerak.

Agar x_{ij} o'zgaruvchilarni

$$x_{11},\ x_{12},\ \ldots,\ x_{1n},\ x_{21},\ x_{22},\ \ldots,\ x_{2n},\ \ldots,\ x_{m1},\ x_{m2},\ \ldots,\ x_{mn}$$

ko'rinishda joylashtirsak, u holda transport masalasining cheklamalar matrisasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$A=\left(\begin{array}{l} m\left\{\begin{array}{l} \overbrace{1\ 1\ \ldots\ 1}^{n}\ \overbrace{0\ 0\ldots 0}^{n}\ \ldots\overbrace{0\ 0\ldots 0}^{n} \\ 0\ 0\ldots 0\ 1\ 1\ \ldots\ 1\ \ldots 0\ 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ldots 0\ 0\ 0\ldots\ 0\ \ldots 1\ 1\ \ldots\ 1 \end{array}\right. \\ n\left\{\begin{array}{l} 1\ 0\ldots 0\ 1\ 0\ \ldots 0\ \ldots 1\ 0\ \ldots 0 \\ 0\ 1\ldots 0\ 0\ 1\ \ldots\ 0\ \ldots 0\ 1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ldots 1\ 0\ 0\ldots\ 1\ \ldots 0\ 0\ \ldots 1 \end{array}\right. \end{array}\right)$$

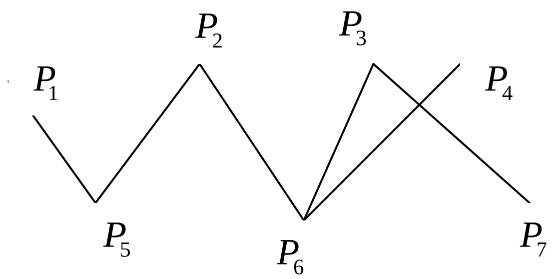
[2]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 145-146.

Bu matrisaning rangi: $rang(A) = m + n - 1$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham, matrisada $m + n$ ta satr bo'lib ular chiziqli bog'liq. Chunki birinchi m ta satrni qo'shib undan oxirgi n ta satr yig'indisini ayirsak nol vektorni hosil qilamiz. Bu matrisaning ixtiyoriy $m + n - 1$ satrini olsak chiziqli erkli vektorlar sistemasi hosil bo'ladi.

Demak, masalaning optimal yechimida musbat x_{ij} lar soni ko'pi bilan $m + n - 1$ ta bo'ladi.

Transport masalasi rejalari ko'p takrorlanish xususiyatiga ega.

1-ta'rif. P_i nuqtalarning (punktlarning) chekli $P = \{P_1, P_2, ..., P_l\}$ to'plami va har bir elementi yoy deb ataluvchi tartiblanmagan (P_i, P_j) juftliklarning Ω to'plami berilgan bo'lsin. (P_i, P_j) yoy P_i va P_j nuqtalarni tutashtiradi, bu nuqtalar esa (P_i, P_j) yoyning oxiri deb ataladi. (P, Ω) juftlik esa **transport tarmog'i** deb ataladi. Masalan,



rasmda elementlari 7 ta nuqtadan iborat $P = \{P_1, P_2, ..., P_7\}$ to'plam va oltita:

$$(P_1, P_5), (P_2, P_5), (P_2, P_6), (P_3, P_6), (P_3, P_7), (P_4, P_6)$$

yoylarni o'zichiga oluvchi Ω to'plam tasvirlangan.

2-ta'rif. $P_{i_0} P_{i_1} ... P_{i_k}$ $(P_{i_l} \in P,\ l = 0, 1, ..., k)$ ixtiyoriy chekli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar har qanday $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r = 0, 1, ..., k-1$, juftlik yoy bo'lib ($(P_{i_r}, P_{i_{r+1}}) \in \Omega$), bu juftlik $P_{i_0} P_{i_1} ... P_{i_k}$ ketma-ketlikda ko'pi bilan bir marta uchrasa, u holda $P_{i_0} P_{i_1} ... P_{i_k}$ ketma-ketlik **marshrut** (yo'nalish) deb ataladi.

Yuqoridagi rasmda ikkita marshrut bor: $P_1 P_5 P_2 P_6 P_4$, $P_1 P_5 P_2 P_6 P_3 P_7$.

3-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}P_{i_0}$ ko'rinishdagi **marshrut sikli** deb ataladi.

Demak, marshrutda boshlang'ich holatga qaytilsa u **sikl** deb ataladi

Rasmdagi marshrutda sikl yo'q, ammo unga (P_4, P_7) yoy qo'shilsa, u holda bu marshrutda $P_3P_7P_4P_6P_3$ ko'rinishdagi sikl hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi.

Yopiq transport masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bilan tanishib chiqamiz.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari. Masalaning aynimagan joiz rejasi $m+n-1$ ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, transport masalasining aynimagan joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, matrisaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi.

Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} lar joylashgan kataklar "**band kataklar**", qolganlari "**bo'sh kataklar**" deyiladi.

Yechim aynimagan bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, u yerda sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin.

b_j / a_i	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

Ma'lumki, har bir bo'sh katakka x_{ij} noma'lumlardan biri to'g'ri keladi. Bu usulda bo'sh kataklrni x_{ij}^0 qiymatlar bilan to'ldiriladi deb faraz qilamiz.

Jadvalning shimoliy-g’arbiy burchagiga x_{11} o’zgaruvchi to’g’ri keladi. $x_{11}^0 = \min\{a_1, b_1\}$ bo’lsin. Agar $x_{11}^0 = a_1$ $(a_1 \le b_1)$ bo’lsa, u holda birinchi ta’minotchining barcha mahsuloti birinchi iste’molchiga jo’natilgan bo’ladi. Demak, $x_{1j}^0 = 0,\ j = \overline{1,n}$ bo’ladi.

II qadamda $x_{21}^0 = \min\{b_1 - a_1, a_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz. Bunda, agar $x_{21}^0 = b_1 - a_1$ $(b_1 - a_1 \le a_2)$ bo’lsa, u holda $x_{s1}^0 = 0,\ s = \overline{3,m}$ bo’ladi. Bu jarayonni davom ettirib band kataklardagi x_{ij} larning qiymatlarini aniqlab olamiz.

Agar $x_{11}^0 = b_1$ $(b_1 \le a_1)$ bo’lsa, u holda birinchi ta’minotchida $a_1 - b_1$ miqdorda mahsulot qolgadi. Demak, $x_{i1}^0 = 0,\ i = \overline{2,m}$ bo’ladi. II qadamda $x_{12}^0 = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz va hakozo.[3]

2-misol. Shimoliy-g’arbiy burchak usulidan foydalanib, transport masalasining boshlang’ich yechimini toping.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal xarajatlar usuli. Bu usulda boshlang’ich yechim qurish uchun x_{ij}^0 qiymat avvalambor yo’l harajati eng kichik bo’lgan katakka, ya’ni $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}$ shart o’rinli bo’ladigan katakka yoziladi. Masalan, $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\} = c_{pq}$ bo’lsin. U

[3] David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 148-149.

holda $x_{pq}^0 = \min\{a_p, b_q\}$ qiymat aniqlanadi. $x_{pq}^0 = \min\{a_p, b_q\}$ $(a_p \le b_q)$ bo'lsin. Demak, $x_{pj} = a_p,\ j = 1, 2, ..., q-1, q+1, ..., n$ bo'ladi. Bundan keyingi qadamlarda ham $\min\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{c_{ij}\} = c_{pq}, i \ne p,\ j \ne q$ shart asosida x_{ij}^0 qiymatlar aniqlanib boriladi. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

3-misol. Minimal harajatlar usuli bilan boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

2. David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. 680 p.

19-MAVZU. TRANSPORT MASALASINING OPTIMAL YECHIMINI TOPISH

Tayanch so'z va iboralar: Band katakchalar, bo'sh katakchalar, harajatlar matrisasi, yopiq kontur, potensiallar, potensial tenglama, ochiq modelli transport masalasi, "soxta" ta'minotchi, "soxta" iste'molchi.

REJA:

1. Potensiallar usuli.

2. Bazis yechimning optimallik sharti.

3. Ochiq modelli transport masalasi.

4. Aynigan TM ni ε-usul bilan yechish.

Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari **L.V.Kantorovich** va **M.K.Gavurin** tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerikalik olim **Dansig** tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul **modifitsirlangan taqsimot usuli** deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal yechimini topishda foydalaniladigan potensiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin **aynigan** va **aynimagan** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

Ma'lumki, agar ChPM hech bo'lmaganda bitta aynigan tayanch yechimga ega bo'lsa, u holda bu masala **aynigan ChPMsi** deb ataladi.

1-ta'rif. Agar $X^0=(x_1^0,\, x_2^0,\, ...,\, x_n^0)$ tayanch rejadagi (yechimdagi) musbat komponentalar soni $rangA=m$ ga teng bo'lsa, u holda bu reja **aynimagan tayanch reja**, aks holda esa u **aynigan tayanch reja** deyiladi.

Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin: b_j-talablar miqdori; a_i-takliflar miqdori.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

1-teorema. Agar talablarning qismiy yig'ndisi takliflarning qismiy yig'indisiga teng, ya'ni $\sum\limits_{i\in G} a_i=\sum\limits_{j\in H} b_j$, $G\subset M=\{1,\,2,\,...,\,m\}$, $H\subset N=\{1,\,2,\,...,\,n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi **aynigan transport masalasi** deyiladi.

Aynimagan transport masalasini qaraymiz. Ma'lumki, bu masalaning matematik modeli kanonik ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, & i=\overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, & j=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij}\ge 0, \tag{2}$$

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to \min. \tag{3}$$

Bu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$U_i+V_j\le c_{ij}, \tag{4}$$

$$\tilde{Z}=\sum_{i=1}^{m}U_i a_i+\sum_{j=1}^{n}V_j b_j\to \max. \tag{5}$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda "**ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari**" deyiladi. Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

2-teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \tag{6}$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}. \tag{7}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechim optimal yechim bo'ladi.

(6) va (7) shartlar transport masalasi uchun **optimallik shartlari** deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch yechimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (6) shart yordamida potensiallar sistemasi quriladi va so'ngra (7) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: $S_i -$ta'minotchilar joylashgan nuqta; $Q_j -$iste'molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$. (P, Ω) juftlik transport tarmog'i.

Potensiallar usulida optimal yechimni topish algoritmi:

1. $\{x_{ij}^0\}$ boshlang'ich tayanch yechim topiladi. Masalan,

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} ... Q_{j_{k-1}} S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0} \tag{8}$$

marshrut topiladi;

2. (6) shart asosida U_i va V_j potensiallardan

$$V_{j_0} + U_{i_1} = c_{i_1 j_0},\ V_{j_1} + U_{i_1} = c_{i_1 j_1},\ ...,\ V_{j_k} + U_{i_k} = c_{i_k j_k},\ V_{j_k} + U_{i_0} = c_{i_0 j_k}, \tag{9}$$

tenglamalar sistemasini tuziladi. Bunda $n+m-1$ ta band katak uchun $n+m-1$ ta chziqli tenglama va $n+m$ ta noma'lum hosil bo'ladi. Noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo'lgani uchun bitta erkli noma'lumga ixtiyoriy qiymat, masalan nol, qiymat berilib qolganlari mos tenglamalardan topiladi;

3. Bo'sh kataklar uchun (7) shart tekshiriladi:

a) agar barcha bo’sh kataklar uchun (7) shart bajarilsa, u holda tayanch yechim optimal bo’ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi;

b) agar ba’zi bo’sh kataklar uchun (7) shart bajarilmasa, u holda tayanch yechim optimal bo’lmaydi va tayanch yechimni almashtirish jarayoni amalga oshiriladi;

4. Tayanch yechimni almashtirish jarayonini amalga oshirish uchun $x_{ij}^0 = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}$ shart o’rinli bo’lmagan bo’sh kataklardan biri

$$\max_{\Delta_{ij}>0}(\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}) \tag{10}$$

shart asosida tanlanadi va u band katakka aylantiriladi. Masalan,

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij} = \Delta_{i_0 j_0}$$

bo’lsin. Demak, (8) marshrutga (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni qo’shish kerak. U holda (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni o’zida saqlovchi

$$S_{i_0}Q_{j_0}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}...Q_{j_{k-1}}S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_0}$$

sikl hosil bo’ladi. Bu siklga

$$x_{i_0 j_0},\ x_{i_1 j_0},\ x_{i_1 j_1},\ ...,\ x_{i_k j_k},\ x_{i_0 j_k}.$$

ketma-ketlik mos keladi. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned}
&x_{i_0 j_0}^1 = x_{i_0 j_0}^0 + \theta = \theta,\\
&x_{i_1 j_0}^1 = x_{i_1 j_0}^0 - \theta,\\
&x_{i_1 j_1}^1 = x_{i_1 j_1}^0 + \theta,\\
&.....................,\\
&x_{i_k j_k}^1 = x_{i_k j_k}^0 + \theta,\\
&x_{i_0 j_k}^1 = x_{i_0 j_k}^0 - \theta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Boshqa barcha $(i,\ j)$ juftliklar uchun $x_{ij}^1 = x_{ij}^0$. (11) formula yordamida topilgan $\left\{x_{ij}^1\right\}$ yechim tayanch yechim bo’lishi uchun θ ni

$$\theta = \min_{0\le r\le k} x_{i_{r+1} j_r}^0 \tag{12}$$

shart asosida tanlash yetarli.[1]

Bu jarayonni tayanch yechim uchun (6), (7) optimallik sharti bajarilguncha davom ettiramiz.

Bu jarayon chekli son marta qaytarilgandan so’ng optimal yechim hosil bo’ladi. Chunki transport masalasi uchun quyidagi teoremalar o’rinli.

3-teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasining optimal yechimi mavjud.

4-teorema. Agar barcha a_i, b_j sonlar butun bo’lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch yechimi butun sonlardan iborat bo’ladi.

1-misol. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini toping.

b_j / a_i	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2
300	11	8	12	16	73

Yechish: Boshlang’ich tayanch yehimni minimal xarajatlar usuli bilan topamiz.

0-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1 100	4 0
250	2 200	7 50	10	6	11
200	8	5	3	2	2 200

[1]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 154-155.

300	11	8 150	12 100	16	73 50

Bu jadvalda band kataklar soni $n+m-2$ ta. Shuning uchun (a_1, b_5) katakka 0 yozib uni band katakka aylantiramiz. So’ngra band kataklardan foydalanib $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib, U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

1-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -16	7 -8	4 -1	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 1	6 θ 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 -2	2 -3	2 200	-2
300	11 -8	8 150+θ	12 100	16 -6	73 50-θ	9
V_j	-6	-1	3	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$ bo’lganligi sababli (a_2, b_4) katakka θ sonni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 1-jadvalni hosil qilamiz.

Endi $\theta = \min\,(100, 50, 50) = 50$ asosida yangi bazis rejaga o’tib, $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida

$\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz. U holda quyidagi 2-jadval hosil bo'ladi.

2-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -5	4 2	1 50	4 50	0
250	2 200	7 0	10 1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -5	3 1	2 -3	2 200	-2
300	11 -14	8 200	12 100	16 -9	73 -3	6
V_j	-3	2	6	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2$. Shuning uchun (a_1, b_3) katakka θ parametrni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 3a-jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda

$$\theta = \min\{0,\, 50,\, 100\} = 0.$$

Bu asosda yangi bazis yechimni 3-jadvalga joylashtiramiz. 3-jadvalda keltirilgan bazis yechim optimal yechim bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalarda $\Delta_{ij} \le 0$.

3a-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250

100	10 -13	7 -7	4 θ	1 50-θ	4 50
250	2 200	7 0-θ -2	10 -1	6 50+θ	11 -2
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200
300	11 -6	8 200+θ	12 100-θ	16 -7	73 -1

3-jadval

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -7	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200	-2
300	11 -6	8 200	12 100	16 -7	73 -1	8
V_j	-3	0	4	1	4	

Shunday qilib, uchinchi qadamda quyidagi optimal yechimga ega bo’ldik:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_{\min} = 4150.$$

Ochiq modelli transport masalasi. Agar talab va takliflarning umumiy miqdorlari teng bo’lmasa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

shart bajarilsa, u holda bu masala “**ochiq modelli transport masalasi**” deyiladi.

Ochiq modelli masalaning optimal yechimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potensiallar usuli qo’llaniladi.

Ochiq modelli masalani yopiq modelliga keltirish uchun qo’shimcha “soxta” ta’minotchi yoki “soxta” iste’molchi kiritiladi, ularning zahirasi yoki talab hajmi

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{yoki} \quad b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo’ladi. Soxta ta’minotchidan real iste’molchilarga yoki real ta’minotchilardan soxta iste’molchilarga amalda mahsulot tashilmagani uchun yo’l harajatlari nolga teng qilib olinadi. Natijada bu yerda yopiq modelli masala hosil bo’ladi.

2-misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yeching.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	

Yechish: $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$ bo'lgan hol uchun masalani yopiq modelli masalaga aylantiramiz: $B_6 = 100$. So'ngra potensiallar usulini qo'llaymiz.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar						Zahira
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	100	

Aynigan transport masalasi. $\varepsilon-$**potensiallar usuli.** Aynigan transprot masalasida tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni $k < m+n-1$ bo'ladi va bu tayanch reja aynigan reja bo'ladi. Bunday rejani aynimagan rejaga aylantirish uchun unga $m+n-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Ammo bu nol elementlarga mos x_{ij} noma'lumlar band kataklarga mos x_{ij} noma'lumlar o'zaro chiziqli bog'liq vektorlar esa chiziqli erkli bo'lishi kerak. Bu holatni nazorat qilish qiyin. Shu sababli aynigan transport masalasidagi siklni yo'qotib uni aynimagan transport masalasiga aylantirish kerak. Bunga erishish uchun quyidagi $\varepsilon-$potensiallar usulini qo'llash mumkin.

$\varepsilon-$**potensiallar usuli.** Ma'lumki, bir nechta a_i larning yig'indisi (hammasi emas) bir nechta b_j larning yig'indisiga teng bo'lsa transport masalasini aynigan transport masalasi deb ataymiz.

Masalada ayniganlikni yo'qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni o'zgartiramiz, ya'ni ε masala tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \quad (i = \overline{1,m}), \\ \overline{b_j} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}), \\ \overline{b_n} = b_n + m\varepsilon, \end{array}\right\} \tag{13}$$

ε yetarlicha kichik son bo'lganligi sababli hosil bo'lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon=0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

3-misol. Berilgan aynigan transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	3	4	5	3
4	4	5	6	3
3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Yechish: (13) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ε masalani hosil qilamiz:

a_i \ b_j	3	4	5	$3+3\varepsilon$
$4+\varepsilon$	4	5	6	3
$3+\varepsilon$	3	2	7	6
$8+\varepsilon$	5	9	1	3

Ushbu masalani yechib, $X(\varepsilon)$ rejani topamiz. Bundan $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} X(\varepsilon)=X^0$.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

2. David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. 680 p.

20-MAVZU. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

Tayanch so'z va iboralar: Butun sonli programmalashtirish, to'la butun sonli programmalashtirish, qisman butun sonli programmalashtirish, Bul o'zgaruvchili programmalashtirish, kesuvchi tenglama.

REJA:

1. Butun sonli programmalashtirishga doir ba'zi iqtisodiy masalalar.
2. Butun sonli programmalashtirish masalasining qo'yilishi, turlari va geometrik talqini.
3. Butun sonli programmalashtirish masalasini yechish ushun Gomori usuli.

O'zgaruvshilariga butun bo'lishlik sharti qo'yilgan ChPMlari katta amaliy ahamiyatga egadir. Butun sonli programmalashtirish masalalariga sayyoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish masalasi, optimal bichish masalasi, transrort vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash masalasi, bo'linmaydigan mahsulot ishlab shiqaruvshi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalasi va boshqa masalalar misol bo'la oladi. Bu masalalarning ayrimlari bilan tanishamiz.

Sayyoh haqida masala. A_0 shaharda yashovchi sayyoh n ta $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ shaharlarning har birida faqat bir martadan bo'lib, eng qisqa yo'l bilan A_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin.

Bu masalaning matematik modelini tuzish ushun A_i va A_j shaharlar orasidagi masofani c_{ij} bilan belgilaymiz. Bundan tashqari quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1,\ agar\ sayyoh\ A_i\ \ dan\ A_j\ \ ga\quad borsa,\ \ i \neq j, \\ 0,\ agar\ sayyoh\, A_i\ \ dan\ A_j\ \ ga\quad bormasa. \end{cases}$$

bu yerda $i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n.$

Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

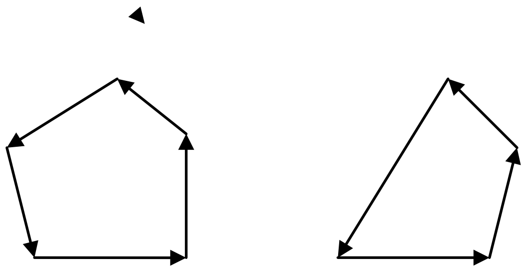
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n - 1, \ i, j = 1, 2, ..., n, \tag{3}$$

$$x_{ij} = 0 \ \ yoki \ \ x_{ij} = 1, \tag{4}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{5}$$

bu yerda (3) shart sayyoh yo’nalishining bog’liqligini ta’minlaydi. Aniqroq aytilsa bu shart A_0 dan o’tmaydigan har qanday tsikllarni yo’qqa chiqaradi. Masalan,



ko’rinishdagi yo’nalishlar bu masada bo’lishi mumkin emasligini (3) shart ta’minlaydi.

To’rt rang masalasi. 1976 yilda ajoyib teorema isbotlangan: kopi bilan to’rtta turli rangdan foidalanib ixtiyoriy geografik xaritani bo’yash mumkin.

Bu masala quyidagicha qo’yiladi: Har birning chegarasi yopiq uzluksiz egri chiziqdan iborat davlatlar tasvirlangan geofrafik xarita berilgan. Agar ikki davlatning umumiy chegarasi uzunligi musbat bo’lgan egri chiziqdan iborat bo’lsa, u holda bu davlatlar qo’shni davlatlar deb ataladi. Bu geofrafik xaritani to’rt rangdan foydalanib shunday bo’yash kerakki qo’shni davlatlar turli xil rangda bo’lsin.

Bu masalaning matematik modeli quyidagicha bo’ladi:

$$\begin{gathered} \begin{cases} x_i - x_j + 4u_{ij} \ge 1, \\ x_i - x_j - 4u_{ij} \ge -3, \end{cases} \\ x_j = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, ..., n, \\ u_{ij} = 0, 1; \qquad (i, j) \in \Gamma. \end{gathered} \tag{6}$$

bu yerda $\Gamma = \left\{ (i, j) \middle| \, i, j - \text{qo'shni davlatlar; } i, j = 1, 2, ..., n \right\}$.

Bo’linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi. Deylik, korxona n xil bo’linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarsin va buning ushun m xil resurslardan foydalansin. Korxonadagi resurslar zahirasi chegaralangan va ular $b_1, b_2, ..., b_m$ birliklarni tashkil qilsin. Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan turli resurslar miqdori, hamda har bir mahsulotdan korxonaning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

I/ch faktorlari / **Mahsulot turlari**	1	2	3	…	n	**Daromad**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	c_2
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	c_m
I/ch faktorining zahirasi	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Korxona daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlang. Ushbu masalaning matematik modeliga noma’lumlarning butun bo’lishlik shartini kiritish kerak:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad (i = \overline{1, m}) \tag{7}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n}) \tag{8}$$

$$x_j \in Z, \tag{9}$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \tag{10}$$

Agar butun sonli programmalashtirish masalalaridagi (BSPM) noma’lumlarning hammasi uchun butun bo’lishlilik sharti qo’yilsa, bunday masalalar **to’la butun sonli programmalashtirish masalalari** deb ataladi.

Noma’lumlarning ma’lum bir qismi uchun butun bo’lishlilik sharti qo’yilgan masalalar **qisman butun sonli programmalashtirish masalalari** deb ataladi.

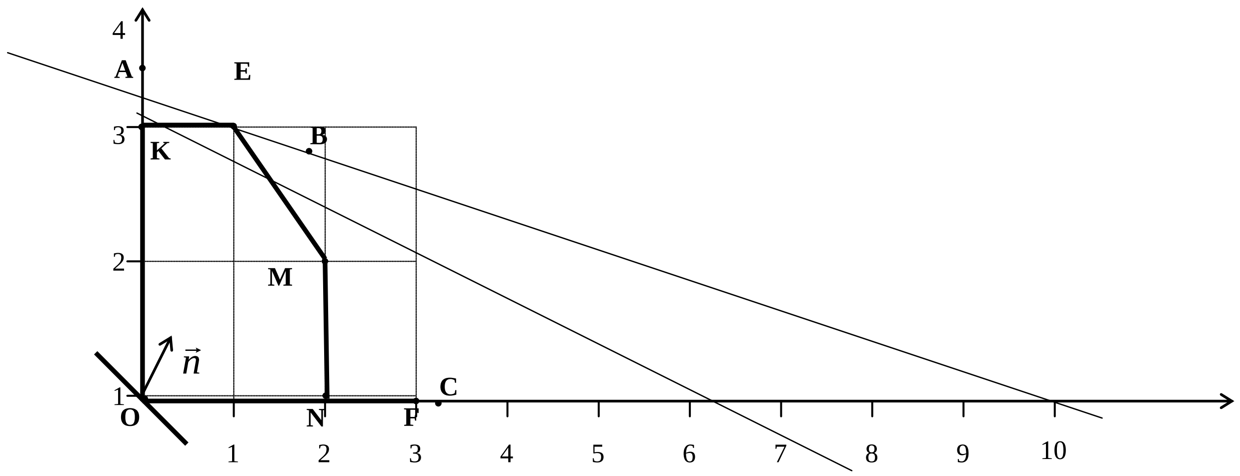
Agar BSPMsidagi noma’lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo’lsa, u holda bu masala **Bul programmalashtirish masalasi** deb ataladi.

BSPMsining geometirik talqini bilan tanishamiz.

Buning uchun quyidagi ikki o’zgaruvchili BSPMsiga murojaat qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$
$$x_j \in Z, \quad (j = 1, 2),$$
$$Y = 2x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Ushbu masaladagi noma’lumlarning butun bo’lishlilik shartiga e’tibor bermasdan uni grafik usulda yeshamiz (1-shakl).



1-shakl

Natijada *OABC* qavariq ko’rburchakni, joiz rejalar to’rlamini, hosil qilamiz. Bu ko’pburchakka tegishli bo’lgan nuqtalar ichida berilgan BSPMsining yechimi bo’la oladigan nuqtani topish uchun bu ko’pburchakni *OKEMNF* ko’pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko’pburchakning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo’ladi. Ana shu burchak nuqtalaridan birida maqsad funksiya maksimum qiymatga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun $2x_1 + 4x_2 = 0$ to’g’ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni normal vektor yo’nalishida o’z-o’ziga parallel ko’chirib, shu yo’nalishdagi burchak nuqta $E(1, 3)$ ni toramiz. Bu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan masalaning yechimi $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ Y_{\max} = 14$ bo'ladi.

R.Gomori usuli. Noma'lumlarga butun bo'lishlilik sharti qo'yilganligi sababli ChPMlarini yechish usullarini BSPlarini yechish uchun qo'llab bo'lmaydi.

BSPMlarini yechish uchun ularning xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ular orasida amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal butun sonli yechimni beruvchi eng aniq usullardan biri hisoblanadi. Gomori usuli yordami bilan to'la butun sonli, hamda qisman butun sonli masalalarni yechish mumkin.

Quyida biz Gomori usuli bilan to'la BSPMsini yechish jarayonda tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat:

1. Berilgan (7)-(10) masalani noma'lumlarning butun bo'lishlilik shartiga, $x_j \in Z$, e'tibor bermasdan, simpleks usuldan foydalanib yechamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda (7)-(10) masala uchun optimallik sharti bajarilgan bo'lsin. U holda masalaning optimal yechimi $X^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bo'ladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}	$\dots$	a_{lk}	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
		Δ_0	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Agar topilgan $X^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechimda $b_i \in Z$ bo'lsa, u holda bu yechim BSPMsining ham yechimi bo'ladi.

2. Agar $X^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechimda b_i larning ba’zilari yoki hammasi kasr sonlardan iborat bo’lsa, u holda $x_j \in Z$ shartning bajarilishi uchun “**kesuvchi tenglama**” deb ataluvchi qo’shimcha tenglama tuziladi.

Buning uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz:

Ixtiyoriy $a-$ratsional sonni

$$a = [a] + \{a\} \tag{11}$$

ko’rinishda yozish mumkin. Bu yerda $[a]-a$ sonning butun qismi; $\{a\}-a$ sonning kasr qismi ($0 \le \{a\} < 1,\ a-$butun bo’lsa $\{a\}=0$).

Masalan, $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$, chunki $\left[\frac{30}{7}\right] = 4,\ \left\{\frac{30}{7}\right\} = \frac{2}{7};$

$$-\frac{30}{7} = -5 + \frac{5}{7},\ \text{chunki}\ \left[-\frac{30}{7}\right] = -5,\ \left\{-\frac{30}{7}\right\} = \frac{5}{7}.$$

Jadvalning P_0 ustunidagi kasr sonlardan iborat bo’lgan b_i satrlardan $\max_i\{b_i\}$ shart asosida kerakli satrni ajratib olamiz. Masalan, $\max_i\{b_i\} = q_k$ bo’lsin. Demak, $k-$satr ajratib olindi. Bu satr uchun $\{a_{kj}\} = q_{kj}$ belgilash kiritib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + ... + q_{kn}x_n \ge q_k. \tag{12}$$

Bu tengsizlikdan

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - ... - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \tag{13}$$

kesuvchi tenglamani hosil qilamiz va bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga kiritib yoziladi. So’ngra bazis yechim almashtiriladi. Bunda ikkilangan simpleks usulidan foydalaniladi. Bu jarayon masalaning yechimda faqat butun sonlar hosil bo’lganicha yoki yechimning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Har bir bosqichda tuzilgan qo’shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab, bu tenglama yordamida berilgan BSPMsi yechimlar to’plamidagi kasr sonli yechimni o’z ichiga oluvchi qismi kesib boriladi.

Agar kasr sonli x_i ga mos keluvchi qatorda barcha x_{ij} lar butun sonli bo’lsa, u holda masala butun sonli yechimga ega bo’lmaydi.

Misol. Quyidagi ChPMsining butun sonli yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,4},$$

$$Y = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalani oddiy simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	1	-3	5	2
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-3	$37/3$	$1/3$	1	0	$-1/3$
P_3	5	$8/3$	$2/3$	0	1	$1/3$
Δ_j		$-71/3$	$4/3$	0	0	$2/3$

Jadvaldan ko'rinadiki, topilgan yechim BSPMsining yechimi bo'lmaydi. Bu yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun kesuvchi tenglama tuzamiz.

$$\left\{\frac{37}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \quad \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \quad \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Demak, 2-satr tanlandi

$$\{1\} = 0, \ \{0\} = 0, \ \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \ \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

munosabatlardan foydalanib

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{2}{3}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikning ikki tomonini (-1) ga ko'paytiramiz va qo'shimcha noma'lumni kiritib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvaliga joylashtiramiz.

P_b	C_b	P_0	1	-3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-3	$37/3$	$1/3$	1	0	$-1/3$	0

P_3	5	$8/3$	$2/3$	0	1	$1/3$	0
P_5	0	$-2/3$	$-2/3$	0	0	$\boxed{-1/3}$	1
Δ_j		$-71/3$	$4/3$	0	0	$2/3$	0

Bazisdan P_5 vektorni chiqarib, o'rniga P_4 vektorni kiritamiz. Natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	1	-3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-3	13	1	1	0	0	-1
P_3	5	2	0	0	1	0	1
P_4	2	2	2	0	0	1	-3
Δ_j		-25	0	0	0	0	2

Demak, $X^0 = (0, 13, 2, 2, 0)$, $Y_{\max} = -25$.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
2. David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. 680 p.

21-MAVZU. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI VA UNING GEOMETRIK TALQINI

Tayansh so'z va iboralar: Chiziqsiz programmalashtirish, mahalliy optimal reja, global optimal reja, qavariq programmalashtirish, kvadratik programmalashtirish, gipersirtlar oilasi, gipersirtlar sathi.

REJA:

1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uning turlari.

2. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining geometrik talqini.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uning turlari. Quyidagi

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{1}$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{2}$$

masala matematik programmalashtirish masalasini tashkil etadi. Bu yerda, $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ berilgan funksiyalar; b_i, $(i = \overline{1,m})$ o'zgarmas sonlardir. (1) shartlar masalaning chegaraviy shartlari, $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya esa "**maqsad funksiyasi**" deb ataladi.

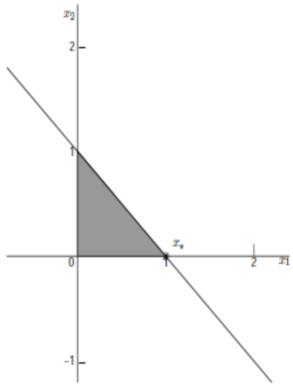
Matematik programmalashtirish masalalarida $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning ba'zilariga yoki hammasiga nomanfiylik sharti qo'yilgan bo'ladi. Ba'zi masalalarda esa noma'lumlarning bir qismi yoki hammasi butun bo'lishligi talab qilinadi.

1-ta'rif. Agar (1), (2) masaladagi barcha $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo'lsa, bu masala **chiziqli programmalashtirish masalasi** deyiladi.

Misol. Chekmalari

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min) \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani qaraymiz. Bu masaladagi chegaraviy shartlari chiziqli tengsizlikdan, maqsad funksiyasi chiziqli funksiyadan iborat va uning grafigi quyidagi 1-chizmada tasvirlangan[1]



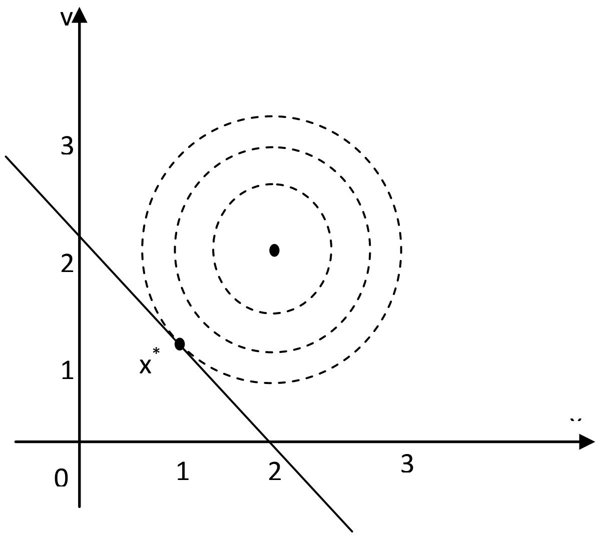
1-chizma

Bu masalaning optimal yechimi $X = (1;0)^T$ dan iborat bo'ladi.

2-ta'rif. Agar (1), (2) masaladagi $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda bu masala **"chiziqsiz programmalashtirish masalasi"** deyiladi.

Misol. $x_1 + x_2 = 2$ chizig'idagi nuqtalardan $(2;2)^T$ markazga eng yaqin bo'lgan nuqtani topish masalasini ko'ramiz. Bu masalani yechish quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasiga keladi.

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 = 2.$$



2-chizma

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp.5-6.

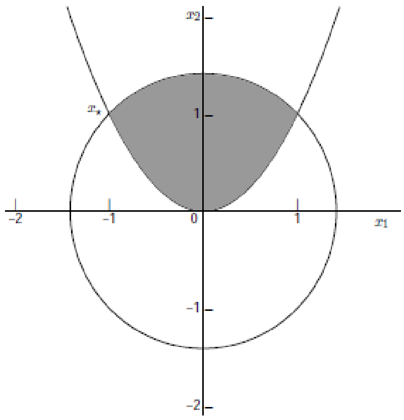
Chizmadan ko’rinib turibdiki, bu masala $X=(1,1)^T$ nuqtada optimal yechmga ega. Bu masala chiziqsiz programmalashtirish masalasiga misol bo’la oladi. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi odatda *S*-joiz nuqtalar to’plamida *f* maqsad funksiyasini minimallashtiradi yoki maksimallashtiradi. Odatda, joiz nuqtalar to’plami o’zgaruvchilarga qo’yilgan shartlar asosida aniqlanadi.Ushbu masalada bizning maqsad funksiyamiz $f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$ – chiziqsiz funksiya va joiz nuqtalar to’plami S bitta $x_1+x_2=2$ chiziqli shart orqali aniqlanadi.

Joiz nuqtalar to’plamibir qancha shartlar orqali ham aniqlanishi mumkin. Masalan:

$$f(x)=x_1 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1^2 \le x_{2,} \\ x_1^2+x_2^2 \le 2. \end{cases}$$

Bu masala uchun joiz nuqtalar to’plami *S* quyidagi 3-chizmada ko’rsatilgan.[2]



3-chizma

Bu masala $X=(-1,1)^T$ nuqtada optimal yechimga ega.

Bazida shartlar (cheklovlar) bo’lmagan paytda shartsiz optimallashtirish masalasi ham uchrashi mumkin. Masalan:

$$f(x)=(e^{x_1}-1)^2+(x_2-1)^2 \to \min$$

[2]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp 3-4.

Demak, S-joiz nuqtalar to'plami bu yerda ikki o'lchamli fazodadir. Minimallashtiruvchi nuqta $X=(0,1)^T$ ga teng va funksiyaning qiymati bu nuqtada nolga teng va boshqa o'rinlarda musbat.

Biz ushbu misollardan shuni ko'rishimiz mumkinki masalaning maqsad funksiyasi hamda shartlari chiziqli yoki chiziqsiz bo'lishi mumkin.Yuqoridagi misollar ba'zi shartlar chiziqsiz bo'lganligi sababli chiziqsiz optimallashtirish masalalari hisoblanadi.[3]

3-ta'rif. Agar (1), (2) masalada $m=0$ bo'lsa, ya'ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u holda bu masala **"shartsiz optimallashtirish masalasi"** deyiladi. Shartsiz optimallashtirish masalasi quyidagicha qo'iladi:

$$\begin{aligned} &f(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n) \to \max\ (\min), \\ &(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n) \in E \subset R^n. \end{aligned} \tag{3}$$

bu yerda $X=(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ n-o'lchovli (vektor) nuqta, R^n n-o'lchovli fazo.

Faraz qilamiz, (1) sistema tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmasin, hamda $m<n$ bo'lib, $q_i(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ va $f(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ funksiyalar uzluksiz va kamida 2-tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. U holda programmalashtirish masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i=\overline{1,m}) \tag{4}$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min \tag{5}$$

Bunday masala "**chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalasi**" deyiladi.

Shartsiz optimallashtirish va chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalalarni differensial hisobgaasoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo'lgani ushun ularni "**optimallashtirishning klassik masalalari**" deyiladi.

Quyidagi masalani ko'ramiz:

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \tag{6}$$

---

[3]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 5.

$$X(x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset R^n, \tag{7}$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min \tag{8}$$

bu yerda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – maqsad funksiyasi; $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – chegaraviy funksiyalar (6) shartlarni qanoatlantiruvchi $X \in G$ nuqtalar esa, masalaning **joiz rejalari** deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirishda lokal va global optimal reja tushunchalari mavjud bo'lib, ular quyidagicha ta'riflanadi.

Faraz qilamiz, $Z = f(X)$, $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset R^n$ bo'lsin.

4-ta'rif. X^* nuqta (6)-(8) masalaning rejasi bo'lib, uning ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ atrofida nuqtalar to'plami $U_\varepsilon(X^*) \subset G$ mavjud bo'lsin. Agar ixtiyoriy $X \in U_\varepsilon(X^*)$ uchun

$$f(X) \le f(X^*) \quad \left(f(X) \ge f(X^*) \right) \tag{9}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, X^* reja $f(X)$ maqsad funksiyaga lokal minimum (maksimum) qiymat beruvchi **lokal optimal reja** deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $f(X^*) \le f(X)$ $\left[f(X^*) \ge f(X) \right]$ tengsizlik ixtiyoriy $X \in G$ uchun o'rinli bo'lsa, u holda X^* reja maqsad funksiyaga global minimum (maksimum) qiymat beruvchi **global optimal reja** yoki **global optimal yechim** deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarni yechish uchun chiziqli programmalashdagi simpleks usulga o'xshagan universal usul kashf qilinmagan. Bu masalalar $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiyalar bo'lgan hollarda juda kam o'rganilgan. Ko'proq o'rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalarining ba'zilari bilan tanishib chiqamiz.

Hozirgi davrgacha eng yaxshi o'rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalari $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar qavariq (botiq) bo'lgan holdir. Bunday masalalar "**qavariq programmalashtirish masalalari**" deb ataladi.

Qavariq programmalashtirish masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday lokal optimal yechimi global yechimdan iborat bo’ladi.

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko’p masalalarda $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo’lib, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ maqsad funksiyasi kvadratik formada, ya’ni

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \tag{10}$$

ko’rinishda bo’ladi. Bunday masalalar “**kvadratik programmalashtirish masalalari**” deb ataladi.

Chegaraviy shartlari yoki maqsad funksiyasi yoki ularning har ikkisi *n* ta bir o’zgaruvchili funksiyalarning yig’indisidan iborat bo’lgan, ya’ni

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = q_{i1}(x_1) + q_{i2}(x_2) + ... + q_{in}(x_n),$$
$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n),$$

ko’rinishda bo’lgan masalalar “**separabel programmalashtirish masalalari**” deb ataladi.

Kvadratik va separabel programmalashtirish masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslanran taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz programmalashtirishga doir bo’lgan ishlab chiqarishni rejalashtirish va resurslarni boshqarishda uchraydigan muhim masalalardan biri stoxastik programmalashtirish masalalaridir. Bu masalalarda ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo’ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to’liq ma’lumot bo’lmagan optimallashtirish masalalari “**stoxastik masalalar**” deb ataladi.

Parametrlari o’zgaruvchan miqdor bo’lib, ular vaqtning funksiyasi deb qaralgan masalalar **“dinamik programmalashtirish masalasi”** deyiladi. O’zgaruvchilar faqatgina butun qiymatlardan iborat bo’lgan masalalar diskret programmalashtirish masalalari deb yuritiladi yoki ko’p hollarda qo’yilgan masalaning barcha funksiyalari chiziqli bo’lsa bunday masalalar **butun sonli programmalashtirish masalasi** deb yuritiladi. Bazan masalani yechish uchun muhim chegaralarini tashlab ketish va yechimga ega bo'lgandan keyin,butun songa yaqin bo'lgan o'zgaruvchilarni tanlab olishning o'zi kifoya. Lekin olingan so'nggi yechimhar doim ham optimal yechim bo'la olmaydi.[4]

ChPMlarining asosiy xusysiyatlarini takrorlab o'tamiz:

Birinchidan, uning joiz rejalar to'plami, ya'ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma'lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi;

Ikkinchidan, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ maqsad funksiyasi n-o'lchovli fazoning gipertekisliklar oilasini tashkil etadi;

Uchinchidan, maqsad funksiyaning joiz rejalar to'plamidagi har qanday minimumi (maksimumi) global minimumdan (maksimumdan) iborat bo'ladi;

To'rtinchidan, agar maqsad funksiya chekli qiymatga ega bo'lsa, joiz rejalar to'plamini ifodalovchi ko'pburchakning kamida bitta uchi optimal yechimni beradi.

Rejalar ko'pburchagining uchlari (burchak nuqtalari) bazis yechim deb ataladi. Bazis yechimdagi hamma noma'lumlar (bazis o'zgaruvchilar) qat'iy musbat bo'lgan holdagi yechim **aynimagan bazis yechim** va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, **aynigan bazis yechim** deyiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo'lishi uchun maqsad funksiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimlardagi qiymatlaridan kam (ko'p) bo'lmasligi kerak.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining geometrik talqini. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarida yuqoridagi chiziqli programmalash-tirishga doir xususiyatlarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi:

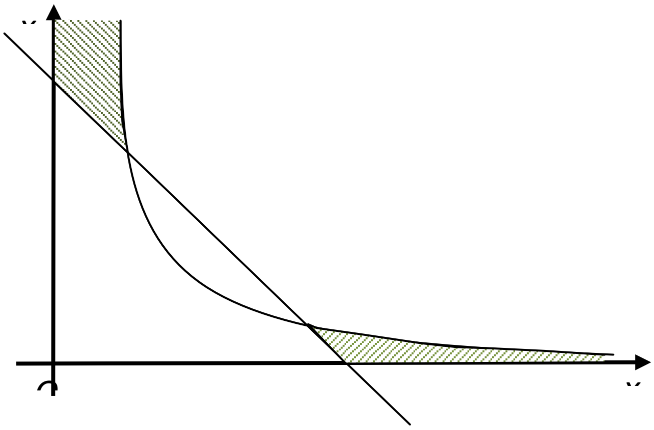
1) chiziqsiz programmalashtirishda rejalar to'plami qavariq bo'lmasligi ham mumkin.

Misol. Quyidagi cheklamalari

[4]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 6-7.

$$\begin{cases} (x_1-1)x_2 \le 1, \\ x_1+x_2 \ge 3{,}5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani ko'ramiz.



4-chizma

Masalaning joiz rejalar to'plami ikkita alohida qismlarga ajralgan bo'lib, u qavariq emas.

Agar joiz rejalar to'plami qavariq bo'lmasa, maqsad funksiya chiziqli bo'lgan holda ham masalaning global optimal yechimidan farq qiluvchi lokal yechimlari mavjud bo'ladi.

Masalan, quyidagi masalani ko'ramiz:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge 2, \\ x_1-x_2 \le -2, \\ x_1+x_2 \le 6, \\ x_1-3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

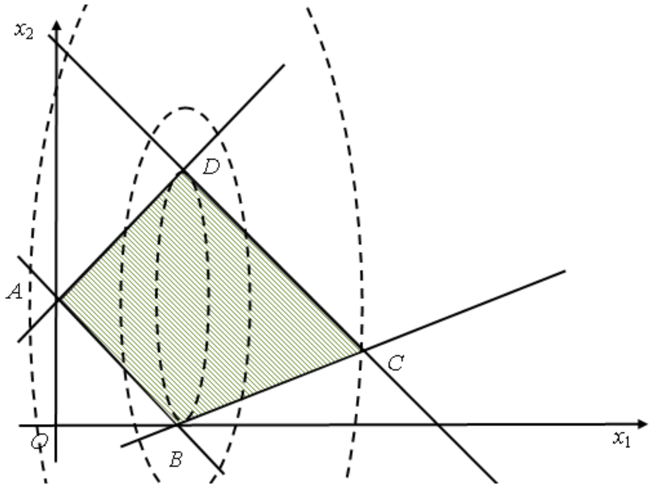
$$Z = f(x_1,x_2) = 25(x_1-2)^2+(x_2-2)^2 \to \max.$$

Bu masalaning cheklamalarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qavariq *ABCD* to'rtburshakdan iborat bo'ladi.

Masaladagi maqsad funksiya markazi (2;2) nuqtadan iborat bo'lgan ellipslar oilasidan tashkil topgan.

Bu masalaning optimal yechimi joiz rejalar to'plamining *C* uchidan iborat bo'ladi.

Umumiy holda, chiziqsiz programmalashtirish masalasining maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta (bazis yechim) mumkin bo'lgan rejalar to'plamining faqat burchak nuqtasida emas, balki ichki nuqtasida ham, chegaraviy nuqtasida ham bo'lishi mumkin.



5-chizma

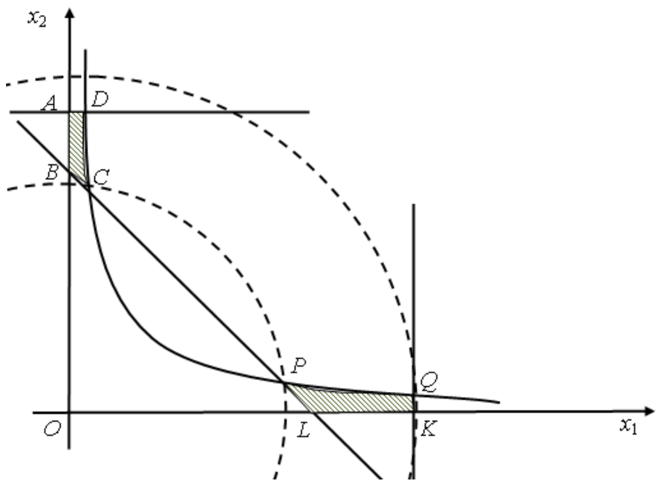
Umumiy holda berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini ko'ramiz va by masalaning geometrik talqini bilan tanishamiz. Masaladagi shartlar Evklid fazosida joiz rejalar to'plamini beradi. Bu to'plamning nuqtalari orasidan maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani (optimal nuqtani) topish kerak. Buning uchun joiz rejalar to'plamining $f(x_1, x_2, ..., x_n) = const$ gipersirtlar oilasi bilan kesishgan nuqtalari ichidan optimal nuqtani, $const$ ga eng kichik qiymat beruvchi nuqtani, topish kerak.

Misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini grafik usulda toping.

$$\begin{cases} x_1x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 7, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min).$$

Yechish: Bu masalaning joiz rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmaydi, aksincha, ikkita ayrim $ABDC$ va $PQKL$ qismlardan iborat bo'ladi. Maqsad funksiya o'zining minimal qiymatiga $D(1,4)$ va $P(1,4)$ nuqtalarda erishadi. Bu nuqtalarda $Z_{\min}=17$. $C\left(\frac{2}{3},6\right)$ va $Q\left(7,\frac{4}{7}\right)$ nuqtalarda Z funksiya lokal maksimum qiymatlarga erishadi. $Z(C)=36\frac{4}{9}$, $Z(Q)=49\frac{16}{49}$. $Z_{\max}=49\frac{16}{49}$.



6-chizma

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

22-MAVZU. SHARTSIZ MINIMUM MASALASI. LAGRANJ KO'PAYTUVCHILAR USULI

Tayanch so'z va iboralar: Statsionar nuqta, Gesse matrisasi, Lagranj funksiyasi, shartsiz optimallashtirish masalasi, egar nuqta.

REJA:

1. Shartsiz optimallashtirish masalasi ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti.
2. Gesse matrisasi va uning funksiya ekstremumini tekshirishdagi roli.
3. Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli.

Shartsiz optimallashtirish masalasi ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti. Shartsiz minimum masalasida

$$f(X) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$$

funksiyaning minimumini $X \in E \subset R^n$ nuqtalarda topish talab qilinadi.

Ma'lumki, bu holda $f(X)$ funksiyadan birinchi tartibli barcha xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsin

$$f(X) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \to \min \tag{1}$$

masala o'rganiladi.

Agar X^0 nuqta (1) masalaning optimal rejasi (ekstremum nuqtasi) bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{2}$$

Demak, berilgan $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{3}$$

sistemaning yechimi bo'lishi zarur.

(3) sistemaning yechimlari statsionar nuqtalar deb ataladi. Berilgan $f(X)$ funksiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funksiya ekstremumga erishavermaydi.

Demak, (3) shart funksiya ekstremumi bo'lishining zaruriy sharti, lekin u yetarli shart emas.

Quyidagi teorema statsionar nuqta birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari uzluksiz bo'lgan $f(X)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning ekstremal nuqtasi bo'lishi uchun yetarli shartni ko'rsatadi.

Gesse matrisasi va uning funksiya ekstremumini tekshirishdagi roli.

1-teorema. X^0 statsionar nuqta local ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matrisasi) ishorasi aniqlangan bo'lishi yetarli.

Agar $H\left[X^0\right]$ musbat bo'lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta;

Agar $H\left[X^0\right]$ manfiy bo'lsa, u holda X^0 nuqta maksimum bo'ladi.

Ishorasi aniqlangan matrisalar haqidagi ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz. $n\times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matrisa berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $A=(a_{ij})$ matrisaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi $1,\ 2,\ ...,\ n-$tartibli minorlar, ya'ni

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar bu **matrisaning bosh minorlari** deyiladi.

2-teorema. $A=(a_{ij})$ matrisaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat'iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matrisa musbat bo'ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matrisaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo'lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matrisa manfiy bo'ladi.

1-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechish: Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3=0.$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ nuqta bo'ladi. Demak, $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)-$statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matrisasini tuzamiz:

$$H\left[X^0\right]=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda -2, 4, -4. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti bir argumentli $f(x)$ funksiya uchun quyidagicha bo'ladi.

Faraz qilaylik, x^0 statsionar nuqta bo'lsin.

Agar $f''(x^0) < 0$ bo'lsa, u holda x^0 nuqta funksiyaning **maksimum** nuqtasi; agar $f''(x^0) > 0$ bo'lsa, u holda x^0 nuqta funksiyaning **minimum** nuqtasi deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya x^0 statsionar nuqtada $f''(x^0) = 0$ bo'lsa, u holda yuqori tartibli hosilalarning x^0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o'rinlidir.

3-teorema. x^0 statsionar nuqtada $f'(x^0) = 0,\ f''(x^0) = 0, ..., f^{(n-1)}(x^0) = 0$ va $f^{(n)}(x^0) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqta

a) n toq son bo'lganda burulish nuqta;

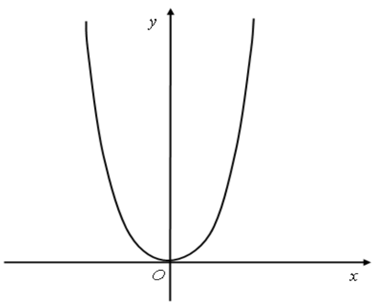
b) n juft son bo'lganda ekstremal nuqta bo'ladi.

2-misol. $f(x) = x^4$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish: $f'(x) = 4x^3 = 0$. Demak, $x^0 = 0$ statsionar nuqta bo'ladi.

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$$

$n = 4$ juft son. Demak, $x^0 = 0$ nuqta $f(x) = x^4$ funksiya uchun ekstremal nuqta bo'ladi. $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ bo'lgani uchun $x^0 = 0$ nuqtada berilgan funksiya minimumga erishadi.



$f(x) = x^4$

Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli. Faraz qilaylik,

$$\begin{aligned} &q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \\ &Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min, \end{aligned} \qquad (4)$$

masalani yechish talab qilinsin.

(4) masalani yechishning eng sodda klassik usuli noma’lumlarni yo’qotish usulidir. Bunda

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1,m})$$

tenglamalar sistemasidan m ta noma’lumlarni, masalan,

$$\begin{aligned} &x_1 = h_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), \\ &x_2 = h_2(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), \\ &......................................, \\ &x_m = h_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) \end{aligned}$$

noma’lumlar topilib $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min$ funksiyaga keltirib qo’yiladi va $n-m$ ta $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ noma’lumlarga nisbatan shartsiz optimallashtirish masalasi

$$\begin{aligned} &\varphi(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n) = \\ &= f\left(h_1(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), ..., h_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n), x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n\right) \to \min \end{aligned} \quad (5)$$

hosil qilinadi. Bu masala (4) masalaga ekvivalent:

1. Agar $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ (4) masalaning yechimi bo’lsa, u holda $(x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, ..., x_n^0)$ (5) masalaning yechimi bo’ladi;

2. Agar $(x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, ..., x_n^0)$ (5) masalaning yechimi bo’lsa, u holda $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ (4) masalaning yechimi bo’ladi.

(4) masalainig optimal yechimini topishning ikkinchi klassik usuli Lagranj ko’paytuvchilari usulidir.

$q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar va ularning $x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumlar bo’yicha xususiy hosilalari uzluksiz bo’lsin. Noma’lumlarga nomanfiylik sharti qo’yilmaganda (4) masalani Lagranjning aniqmas ko’paytuvchilar usuli bilan yechish mumkin.

(4) masalaning elementlaridan umumlashgan (kengaytirilgan) $(m+1)-$ Lagranj vektori $\vec{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ (λ_0 –skalyar, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$ – Lagranj vektori; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – Lagranj ko’paytuvchilari) yordamida

$$F(X,\vec{\lambda}) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)) \quad (6)$$

umumlashgan Lagranj funksiyasini tuzamiz. Shunday qilib, (4) masala $F(X,\vec{\lambda})$ – Lagranj funksiyasining oddiy ekstremumini o'rganishga keltiriladi.

4-teorema (umumlashgan Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). (4) masalaning har bir X^0 lokal optimal rejasi uchun shunday $\lambda^0 \neq 0$ umumlashgan Lagranj vektori mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$\frac{\partial F(X^0, \overrightarrow{\lambda^0})}{\partial X} = 0 \quad (7)$$

bo'ladi, ya'ni X^0 (6) umumlashgan Lagranj funksiyasining $\lambda = \lambda^0$ bo'lgandagi statsionar nuqtasi bo'ladi.

X^0 nuqtada (7) tenglik bajariladigan $\lambda^0 \neq 0$ vektor X^0 nuqtaga mos umumlashgan Lagranj vektori deb ataladi. X^0 nuqtaga bir nechta umumlashgan Lagranj vektorlari mos kelishi mumkin.

(7) tenglikni $-\lambda^0$ vektor ham qanoatlantiradi. Shu sababli $\lambda^0 \geq 0$ deb olinib, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga aniqlik kiritiladi.

Ko'p hollarda

$$F(X,\vec{\lambda}) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)), \quad (\lambda_0 = 1) \quad (8)$$

klassik Lagranj funksiyasidan foydalaniladi.

(8) Lagranj funksiyasi uchun, umuman olganda, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi o'rinli emas.

(4) masalani tekshirishda (8) Lagranj funksiyasidan qachon foydalanish mumkinligini aniqlaymiz.

2-ta'rif. Agar X^0 optimal rejaga mos umumlashgan $\vec{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ Lagranj vektorlari ichida $\lambda_0 = 0$ kabilar bo'lmasa, u holda (4) masala va uning X^0 optimal rejasi **normal** deb ataladi.

3-ta'rif. Agar X^0 rejada

$$\frac{\partial q_1(X^0)}{\partial X}, \ ..., \ \frac{\partial q_m(X^0)}{\partial X} \tag{9}$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 **oddiy reja** deb ataladi.

4-teorema. Optimal reja X^0 normal bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar u oddiy joiz reja bo'lsa.

Agar (4) masala normal bo'lsa, u holda $m \le n$ bo'ladi.

Endi asosiy natijani keltiramiz. Bundan keyin (4) masalada soddalik uchun $b_i = 0$ deb qaraymiz.

5-teorema (Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). Agar (4) masalaning X^0 optimal rejasida (9) vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda shunday yagona λ^0 Lagranj vektori topiladiki, $\{X^0, \lambda^0\}$ juftlikda

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0$$

tengliklar bajariladi. Masalan, (4) masalada $i = 1$, $j = 2$, bo'lsa, (8) funksiyaning (X^0, λ^0) statsionar nuqtasini topamiz. So'ngra

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(X^0) & g_{x_2}(X^0) \\ g_{x_1}(X^0) & F_{x_1x_1}(X^0,\lambda^0) & F_{x_2x_1}(X^0,\lambda^0) \\ g_{x_2}(X^0) & F_{x_2x_1}(X^0,\lambda^0) & F_{x_2x_2}(X^0,\lambda^0) \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz. Agar $\Delta > 0 \Rightarrow X^0 -$ $f(X)$ funksiyaning shartli minimum nuqtasi, agar $\Delta < 0 \Rightarrow X^0 -$ $f(X)$ funksiyaning shartli maksimum nuqtasi.

3-misol. $z = xy$ funksiyaning $x + y = 6$ dagi ekstremumini toping.[1]

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = xy + \lambda(6 - x - y)$$

bu funksiyadan x, y va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz

[1]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental Methods of Mathematical Economics". 2013. pp. 351-352.

$$\begin{cases} Z_\lambda = 6 - x - y = 0 \\ Z_x = y - \lambda = 0 \\ Z_y = x - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ -\lambda + y = 0 \\ -\lambda + x = 0 \end{cases}$$

sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^* = 3, \quad x^* = 3, \quad y^* = 3$$

Demak, $X^* = \left(x^*, y^*\right) = (3;3)$ nuqta $z = x\,y$ funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi. Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = 9$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko'rishimiz kerak. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\Delta < 0, \quad M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

demak, $x^* = (3;3)$ nuqtada z funksiya extremumga erishmaydi.

4-misol. $z = x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning $x_1 + 4x_2 = 2$ dagi ekstremumini toping.[2]

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2 - x_1 - 4x_2)$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz.

$$\begin{cases} Z_\lambda = 2 - x_1 - 4x_2 = 0 \\ Z_{x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \\ Z_{x_2} = 2x_2 - 4\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 2 \\ -\lambda + 2x_1 = 0 \\ -4\lambda + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechib, quyidagini topamiz:

$$\lambda^* = \frac{4}{17}, \quad x_1^* = \frac{2}{17}, \quad x_2^* = \frac{8}{17}$$

[2]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental Methods of Mathematical Economics". 2013. pp. 352.

Demak, $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{2}{17}; \frac{8}{17}\right)$ nuqta $z = x_1^2 + x_2^2$ funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi. Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = \frac{4}{17}$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko'rishimiz kerak. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta > 0, \quad M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$

Demak, $x^* = \left(\frac{2}{17}; \frac{8}{17}\right)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi.

(4) masalada funksiyalar o'zgaruvchili ikkitadan ko'p bo'lsa, u holda lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

bu sistemadan (X^0, λ^0) statsionar nuqtani topamiz.

Masalaning shartli ekstremumining mavjudligi Lagranj funksiyasining $d^2F -$ ikkinchi differensialini o'rganish bilan bog'liq: agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m),$ $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) < 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi; agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m),$ $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) > 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, (X^0,λ^0) nuqtada $d^2F(X^0,\lambda^0)=0$ bo’lsa, u holda (X^0,λ^0) nuqtani ekstremumga boshqa usul bilan qo’shimcha tekshirish kerak bo’ladi.

5-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasini yeching

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=9,$$
$$u=x_1-2x_2+2x_3\to \min(\max)$$

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\lambda)=x_1-2x_2+2x_3+\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2-9)$$
$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1+x_2+\lambda\left[1-(x_1-1)^2-(x_2-1)^2\right].$$

Bu funksiyadan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz

$$\begin{cases} F_{x_1}=1+2\lambda x_1=0, \\ F_{x_2}=-2+2\lambda x_2=0, \\ F_{x_3}=2+2\lambda x_3=0, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=9 \end{cases}$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda_1=\frac{1}{2},\ x_{11}=-1,\ \ x_{21}=2,\ x_{31}=-2,$$
$$\lambda_2=-\frac{1}{2},\ x_{12}=1,\ \ x_{22}=-2,\ x_{32}=2,$$

Bundan $d^2u\left(-1,\,2,-2,\,\frac{1}{2}\right)=1>0;$ $d^2u\left(1,-2,\,2,-\frac{1}{2}\right)=-1<0$. Demak, $\left(-1,\,2,-2,\,\frac{1}{2}\right)-$ nuqta shartli minimum nuqta, $u_{\min}=-9$; $\left(1,-2,\ 2,-\frac{1}{2}\right)-$shartli maksimum maksimum nuqta, $u_{\max}=9$.

Adabiyotlar ro’yxati

1. Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. “Fundamental Methods of Mathematical Economics”. 2013. 352 p.

23-MAVZU. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

Tayanch so'z va iboralar: Qavariq funksiya, qat'iy qavariq funksiya, qavariq funksiyaning mahalliy va global maksimumi, Lagranj funksiyasining egar nuqtasi, Kun-Takker shartlari, Kun-Takker teoremasi.

REJA:

1. Qavariq va botiq funksiyalar va ularning ekstremumi.
2. Qavariq funksiyaning xossalari.
3. Lagranj funksiyasining egar nuqtasi. Kun-Takker shartlari.
4. Kun-Takker teoremasi.
5. Kun-Takkerning yetarlilik teoremalari.

1. Qavariq programmalashtirish optimallashtirish masalasining bir bo'limi bo'lib, u qavariq funksiyani qavariq to'plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o'rgatadi. Qavariq programmalashtirish masalasi

$$\begin{aligned} & g_i(X) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \qquad (i = \overline{1, m}), \\ & x_j \ge 0, \qquad\qquad (j = \overline{1, n}), \quad X \in G \subset R^n, \\ & Z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min. \end{aligned} \tag{1}$$

ko'rinishda bo'lib, bunda $g_i(X)$, $f(X)$ funksiyalar $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan va qavariq funksiyalardir.

(1) masalaning yechish usullari bilan tanishishdan oldin qavariq funksiyalar haqidagi ayrim tushunchalar bilan tanishamiz.

1-ta'rif. Agar

$$G \subset R^n, \quad X_1 \in G, \quad X_2 \in G \Rightarrow X(\lambda) = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in G, \quad \lambda \in [0, 1]$$

bo'lsa, u holda $G-$ **qavariq to'plam** bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $f(X)$ funksiya $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $X_1 \in G$, $X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \alpha \le 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha) X_1) \le \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \tag{2}$$

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) \geq \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \qquad (3)$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, $f(X)$ funksiya **qavariq funksiya** deyiladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy ikkita $X_1 \in G,\ X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \leq \alpha \leq 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) < \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \qquad (4)$$

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) > \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \qquad (5)$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, u holda $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya **qat'iy qavariq funksiya** deyiladi.

Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiya bo'lsa, ixtiyoriy chekli sondagi $X_1,\ X_2,...,X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi

$$\begin{cases} f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{cases} \qquad (7)$$

munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi.

2. Qavariq funksiya va to'plamlar quyidagi xossalarga ega:

1. G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X) = const$ funksiyalar qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinasiyasidan iborat bo'lgan

$$g(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X), \quad \lambda_i \geq 0, \qquad (i = \overline{1,m});$$

funksiya ham qavariq bo'ladi.

2. Ixtiyoriy chekli sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'ladi.

3. Qavariq $f(X),\ X \in R^n$ funksiyaning sath to'plamlari $\{X : f(X) \leq c\}$ $\left(\{X : f(X) \leq c\}\right)$ bo'sh yoki qavariq to'plam bo'ladi.

4. G qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarining tayin qiymatlarida qavariq bo'lishligi zarur va yetarlidir.

5. Agar $f_1(X), f_2(X), ..., f_n(X)$ funksiyalar qavariq G to'plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo'lsa, $f(X) = \max_{1 \le i \le n} f_i(X)$ funksiya ham qavariq bo'ladi.

4-ta'rif. $f(X)$ qavariq funksiyaning $G \subset R^n$ to'plamdagi **global maksimumi (minimumi)** deb, har qanday $X \in G$ nuqtada

$$f(X^0) \ge f(X), \quad (f(X^0) \le f(X)), \tag{8}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^0 \in G$ nuqtaga aytiladi.

Agar (8) tengsizlik $X^0 \in U_\varepsilon(X^0)$ nuqta uchun o'rinli bo'lsa, X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaga lokal maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta bo'ladi. Bu yerda $U_\varepsilon(X^0) = \left\{X : \left|X - X^0\right| < \varepsilon\right\}$.

Qavariq funksiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremalar o'rinlidir.

1-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy qavariq funksiya bo'lsa, u ozining ixtiyoriy global ekstremumiga faqat bitta nuqtada erishadi.

2-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita $X_1, ..., X_n \in G$ nuqtalarda ham global ekstremumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

3-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtada $\nabla f(X^0) = 0$ bo'lsa, u holda $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada global ekstremumga erishadi.

3. (1) masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)) \tag{9}$$

Agar (X^0, λ^0) nuqta (1) masala uchun tuzilgan $F(X, \lambda)$ funksiyaning **egar nuqtasi** bo'lsa, u holda $X \in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda \in U_\delta(\lambda^0)$ $(\lambda \geq 0)$ ($U_\delta(\lambda^0) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \lambda^0\right| < \delta\right\}$ – λ^0 nuqtaning ixtiyoriy kichik $\delta > 0$ atofi uchun

$$F(X^0, \lambda) \leq F(X^0, \lambda^0) \leq F(X, \lambda^0) \tag{10}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

$$\begin{aligned} &g_i(X) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \\ &x_j \geq 0, \qquad (j = \overline{1,n}), \quad X \in G \subset R^n, \\ &Z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max. \end{aligned} \tag{11}$$

masala qaraymiz.

Agar (X^0, λ^0) nuqta (11) masala uchun tuzilgan $F(X, \lambda)$ **Lagranj funksiyasining egar nuqtasi** bo'lsa, u holda $X \in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda \in U_\delta(\lambda^0)$, $\lambda \geq 0$ uchun

$$F(X, \lambda^0) \leq F(X^0, \lambda^0) \leq F(X^0, \lambda) \tag{12}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4-teorema. Agar (X^0, λ^0), $X \in G$, $\lambda^0 \geq 0$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'lsa, u holda X^0 (1) masalaning optimal rejasi bo'ladi va $(b_i - g_i(X))\lambda_i^0 = 0$ shart bajariladi.

Bu teoremada G to'plam va $f(X)$, $g_i(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi shart emas. (1) masalaga ham yuqoridagidek teorema isbotlash mumkin.

Demak, (1) va (11) masalalarning optimal rejasini topish uchun Lagranj funksiyaning egar nuqtasini topish yetarli ekan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgan hol uchun Lagranj funksiyasining egar nuqtasi haqidagi mavjudlik teoremalariga ekvivalent teoremalar dastlab G.V.Kun va A.V.Takker tomonidan olingan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, u holda Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari (1) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} \geq 0; \tag{13}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0; \quad x_j^0 \geq 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} \leq 0; \tag{15}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0; \quad \lambda_i^0 \geq 0. \tag{16}$$

(11) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} \leq 0; \tag{17}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0; \quad x_j^0 \geq 0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} \geq 0; \tag{19}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0; \quad \lambda_i^0 \geq 0. \tag{20}$$

(13)-(16) va (17)-(20) munosabatlar Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligi haqidagi **Kun-Takker shartlari** deb ataladi.

5-teorema. $F(X, \lambda)$ funksiya egar nuqtaga ega bo'lishi uchun (1) masala uchun (13)-(16) shartlarning, (11) masala uchun (17)-(20) shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(11) masalani ko'ramiz. Agar kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g_i(X) < b_i$ tengsizlik (Sleyter sharti) bajarilsa, Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o'rinlidir.

4. Kun-Takker teoremasi. X^0 nuqta (11) masalaning optimal yechimi bo'lishi uchun bu nuqtada (17)-(20) munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(1) masala uchun ham bu kabi teorema o'rinli bo'ladi. Faqat bu yerda **Sleyter sharti** $g_i(X) < b_i$ ko'rinishida bo'ladi.

1-misol. Grafik usul bilan quyidagi

$$2x_1 + x_2 \geq 2,$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8,$$
$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$
$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max.$$

masalani yeching va Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiring.

Yechish: Masalani grafik usulda yechib, uning optimal yechimi $X^0(0{,}8;\ 0{,}4)$ ekanligini ko'rish mumkin. Bunda $f(X^0) = -0{,}8$.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(X,\lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3(6 - x_1 - x_2)$$

X^0 nuqtada masalaning 2, 3-chegaraviy shartlari qat'iy tengsizlikka aylanadi. Demak, masala uchun Sleyter sharti bajariladi. (13)-(16) shartlarni tekshiramiz.

Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz va Lagranj shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 2\cdot 0{,}8 + 0{,}4 - 2 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2\cdot 0{,}8 - 0{,}4 = 6 > 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3} = 6 - 0{,}8 - 0{,}4 = 4{,}8 > 0.$$

Demak, $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ $\left(\dfrac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2} > 0,\ \dfrac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3} > 0\right)$. $\dfrac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 0$

bo'lganligi sababli $\lambda_1 \neq 0$ bo'lishi mumkin.

$x_j^0 \dfrac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0$ tenglikda $x_j^0 > 0$. Demak, $\dfrac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = 1, 2)$

bo'ladi, ya'ni

$$\begin{cases} -2\cdot 0,8 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -2\cdot 0,4 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan $\lambda_1 = 0,8$. Demak, $(X^0; \lambda^0) = (0,8,\ 0,4;\ 0,8,\ 0,\ 0)$ egar nuqta bo'ladi.

Endi Kun-Takker teoremasidan foydalanib qavariq programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi masalaga murojaat qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max.$$

Bu masaladagi maqsad funksiya chiziqli $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ va $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ kvadratik funksiyalarning yig'indisidan iborat. Bunda $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ funksiya manfiy aniqlangan kvadratik formadan iborat bo'lgani uchun botiq funksiya bo'ladi. Chiziqli $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ funksiyani ham botiq funksiya deb qarash mumkin. Shunday qilib, berilgan masala chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa botiq funksiyadan iborat bo'lgan qavariq programmalashtirish masalasidan iborat. Ushbu masalaga Kun-Takker teoremasini qo'llash mumkin.

Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligini ifodalovchi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0; \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0; \\ \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0; \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \tag{II}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \tag{III}$$

(I) sistemaga v_1, v_2, w_1, w_2 nomanfiy qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases} \tag{IV}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$
$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

Ushbu sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} v_1 = (2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2), \\ v_2 = (4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2), \\ w_1 = (8 - x_1 - 2x_2), \\ w_2 = (12 - 2x_1 - x_2). \end{cases} \tag{V}$$

Ushbu tengliklarni va (II) sistemani nazarga olib quyidagini hosilqilamiz:

$$x_1 v_1 = 0, \;\; x_2 v_2 = 0, \; \lambda_1 w_1 = 0, \; \lambda_2 w_2 = 0 \tag{VI}$$

Endi (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimini topamiz. Bu yechim ifodalovchi nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi va berilgan masalaning optimal yechimini beradi.

(IV) sistemani sun'iy bazis usulidan foydalanib yechamiz. U holda

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,$$
$$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.$$

$$Z = Mz_1 + Mz_2 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	0	0	0	0	0	0	M	M	0	0
			P_1	P_2	Λ_1	Λ_2	V_1	V_2	Z_1	Z_2	W_1	W_2
Z_1	M	2	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
Z_2	M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	1	0	0
W_1	0	8	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
W_2	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
Δ_j		$6M$	$2M$	$4M^*$	$3M$	M	-M	-M	0	0	0	0
Z_1	M	$\boxed{2}$	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0
W_2	0	13	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1
Δ_j		$2M^*$	$2M$	0	M	$2M$	-M	0	0	-M	0	0
P_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	5	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0
W_2	0	11	0	0	-1/2	-9/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1
Δ_j		0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	0	0

Bu jadvaldan otimal yechimni topamiz:

$$x_1^0 = 1,\ \ x_2^0 = 1,\ \ \lambda_1^0 = 0,\ \ \lambda_2^0 = 0,$$
$$v_1^0 = 0,\ \ v_2^0 = 0,\ \ w_1^0 = 5,\ \ w_2^0 = 11.$$

Bu yechim (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimi bo’ladi. Demak, $(X^0, \Lambda^0) = (1;1;0;0)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo’ladi. $X^0 = (1;1)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo’lib, unda $f(X^0) = 3$ bo’ladi.

5. Kun-Takkerning yetarlilik teoremalari.[1] Yuqorida biz Kun-Takker shartlari bilan tanishdik va tengsizliklar bilan berilgan masalalarni optimallashtirishda zaruruiy shartlarni ko'rib o'tdik. Ba'zi bir holatlarda Kun-Takker shartlari uchun yetarlilik shartlarini o'zi ham yetarli hisoblanandi.

Klassik optimallashtirish masalalarida maksimum va minimum uchun yetarlilik sharti asosoan ikkinchi tartibli hosilalar orqali aniqlanandi. Bu yerda esa, chiziqsiz programmalashtirishda, qavariq va botiq funksiyalar uchun yetarlilik shartlari ham to'g'ridan to'g'ri olinishi mumkin. Masalani maksimallashtirish uchun, Kun va Takker quyidagicha yetarlilik teoremasini taklif qilishgan.

Teorema. Quyida berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz:

$$g^i(x) \le r_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x \ge 0$$

$$\pi = f(x) \to \min.$$

Yuqoridagi masala uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

(a) $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va botiq bo'lsa;

(b) $g^i(x)$) funksiya differensiallanuvchi va qavariq bo'lsa;

(c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi, u holda x^* nuqtada $\pi = f(x)$ funksiya maksimum nuqtaga erishadi.

Demak, yuqoridagi teoremaning (a), (b), (c) shartlari bajarilsa x^* nuqta **masalaning optimal yechimi** hisoblanadi.

Boshqa tomondan qaraganda, (a) va (b) shartlar bilan va Kun-Takker shartlari masalani maksimallashtiradi. Agar nazarda tutilgan tengsizlik (a) va (b) shartlar hisobga olinsa, u holda Kun-Takker shartlari funksiyani maksimallashtirish uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi. Yuqorida ko'rilgan teorema qavariq programmalshtirish deyiladi. Yetarlilik sharti faqat maksimallashtirish uchun kerak bo'ladi.

---

[1]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental methods of mathematical economics". 2013. pp. 424-425.

Qisman botiq programmalashtirish masalasi uchun Arrov-Enthovenning yetarlilik nazariyasi[2].

Kun-Takkerning yetarlilik nazariyasiga yuzlanadigan bo'lsak, ayrim qavariq botiq holatlarga duch kelamiz. Bular esa bir qancha murakkab shartlarni keltirib chiqaradi. Arrov-Enthoven yetarlilik nazariyasi deb nomlangan boshqa nazariyada esa bu holatlar maqsad va chekli funksiyalarda qisman qavariqlik va qisman botiqlik shartlarining o'zi qanoatlantiradi. Shartlar orqali ular osonlashtirilishi bilan bir qatorda, yetarlilik holatlarini o'rganish imkoniyatlari kengayadi.

Arrov-Enthoven ishining asl kelib chiqishi $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalari maksimallashtirish masalasi va nomanfiy ($\geq$) shaklidagi cheklovlar bilan bir vaqtda qisman botiq bo'lishi kerak. Bu esa qisman botiq programmalashtirish masalalarini keltirib chiqaradi. Bu muhokama jarayonida nomusbat ($\leq$) tengsizligidan maksimallashtirish masalasining cheklovlari va ($\geq$) tengsizligidan minimallashtirish masalasida foydalanamiz.

Berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz

$$g^i(x) \leq r_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m); \qquad x \geq 0;$$

$$\pi = f'(x) \to \max .$$

Yuqoridagi masala quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

(a) $f(x)$ maqsad funksiyasi differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman botiq;

(b) $g'(x)$ funksiya differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman qavariqdir;

(c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi;

(d) Quyidagilarning ixtiyoriy bittasi qanoatlantiriladi:

(d_1) kamida bitta x_j o'zgaruvchi uchun $f_j(x) < 0$ bo'lsa;

(d_2) musbat qiymatga erishadigan x_j o'zgaruvchi uchun $f_j(x^*) < 0$;

(d_3) $f_j(x^*)$ ning barcha n-tartibli hosilalari noldan farqli va $f(x)$ funksiya x^* nuqtada ikki marta differensiallanuvchi [ya'ni $f(x)$ ning x^* da barcha ikkinchi tartibli hosilalari mavjud];

[2]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental methods of mathematical economics". 2013. pp. 425-426.

(d_4) $f(x)$ funksiya botiq.

Demak, x^* nuqta $\pi = f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo’ladi.

Bu nazariyaning isboti juda uzun bo’lganligi sababli, uni shu yerda to’xtatamiz. Biroq shunga e’tibor qaratish kerakki, Arrov va Enthover o’zlarining qisman botiqlik qisman qavariqlik nazariyasida botiqlik qavariqlik holatlarini kamaytirishga erishgan vaqtda, ular yangi (d) shartni kiritishni muhim deb topishdi. Shunga qaramasdan, (d) shartda berilgan to’rtta holatdan faqat bittasi to’liq yetarlilik shartlarini shakllantirishi kerak. Shuning uchun natijada yuqoridagi nazariya maksimum uchun to’rtta turli yetarlilik shartlari guruhidan tashkil topgan. Botiq $f'(x)$ funksiya bilan (d_4) shart bajarilganda, Arrov-Enthoven yetarlilik nazariyasi Kun-Takker yetarlilik nazariyasi bilan bir xil bo’lib qoladi. Lekin bu to’g’ri emas. Shu bilan birgalikda, Arrov va Enthoven $g'(x)$ chekli funksiyani qisman qavariq bo’lishini talab qiladi, uning yetarlilik shartlari shunda ham kamroq bo’ladi. Demak, nazariya (a) dan (d) gacha bo’lgan barcha yetarlilik shartlarini qamrab oladi. Lekin buni boshqacharoq tarzda izohlash ham mumkin, ya’ni (a), (b) va (d) shartlar bajarilsa, u holda Kun-Takker shartlari maksimum uchun yetarli shartlar bo’ladi. Bundan tashqari, agar cheklanganlik xususiyati qanoatlantirilsa, unda Kun-Takker shartlari maksimum uchun zaruriy va yetarli bo’ladi. Kun-Takker nazariyasiga o’xshab, Arrov-Enthoven nazariyasi minimallashtirish shakliga osonlik bilan o’tkazilishi mumkin. Optimallashtirish yo’nalishini saqlab qolish uchun zarur bo’ladigan aniq o’zgarishlar bilan birgalikda, (a) va (b) holatlarida qisman botiq va qisman qavariq so’zlarini almashtirishimiz kerak, Kun-Takker maksimum holatlarini minimum holatlariga almashtirish, (d_1) va (d_2) dagi tengsizliklarni saqlab qoliishimiz, va (d_4) da botiq so’zini qavariqqa o’zgartirishimiz kerak bo’ladi.

Adabiyotlar ro’yxati

1. Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. “Fundamental Methods of Mathematical Economics”. 2013. 352 p.

24-MAVZU. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH ELEMENTLARI

Tayanch so’z va iboralar: Dinamik optimallashtirish, programmalashtirish, ko’p bosqichli jarayon, boshqarish, boshqariluvchi jarayon, strategiya, optimal strategiya, optimallik prinsipi, shartli boshqarish, Bellman funksional tenglamalari.

REJA:

1. Dinamik optimallashtirish masalasi.
2. Bellman funksional tenglamalari.
3. Dinamik programmalashtirishga keltiriladigan masalalar.

Dinamik optimallashtirish masalasi. Shu paytgacha o’rganilgan chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog’liqmas deb qaraldi, shuning uchun masalaning optimal yechimi rejalashtirishning faqat bir bosqichi uchun topildi. Bunday masalalar **bir bosqichli masalalar** deb ataladi.

Dinamik programmalashtirish masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog’liq deb qaraladi, hamda butun jarayonnig optimal rivojlanishiini ta’minlovchi bir qator (ketma-ket, har bir davr uchun) optimal yechimlar topiladi. Dinamik programmalashtirish masalalari **ko’p bosqichli** yoki **ko’p qadamli masalalar** deb ataladi.

Dinamik programmalashtirish – vaqtga bog’liq va ko’p bosqichli boshqariluvchi iqtisodiy jarayonlarni optimal rejalashtirish usullarini o’rganuvchi bo’limidir.

Agar iqtisodiy jarayonning rivojlanishiga ta’sir ko’rsatish mumkin bo’lsa, bunday jarayon **boshqariluvchi** deb ataladi. Jarayonnga ta’sir etish uchun qabul qilinuvchi qarorlar (yechimlar) to’plamiga boshqarish deb ataladi. Iqtisodiy jarayonlarni boshqarish bir bosqichidagi vositalarni taqsimlash, mablag’lar ajratish, direktiv hujjatlar qabul qilish kabilar bilan ifodalanishi mumkin.

Masalan, ixtiyoriy korxonada ishlab chiqarish – boshqariluvchi jarayondir, chunki u ishlab chiqarish vositalarining tarkibi, xom-ashyo ta’minoti, moliyaviy mablag’lar miqdori va hokazo bilan aniqlanadi. Rejalashtirish davridagi har bir yil boshida xom ashyo bilan ta’minlash, ishlab chiqarish jihozlarini almashtirish, qo’shimcha mablag’lar miqdori haqida qarorlar qabul qilinadi. Bu qarorlar to’plami jarayonni boshqarishdir. Bir qarashda, eng ko’p miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun korxonaga mumkin bo’lgan vositalarning hammasini berish va ishlab chiqarish jihozlaridan (stanoklardan, texnikadan va hokazolardan) to’la foydalanish zarurdek tuyuladi. Lekin, bu jihozlarni tezda eskirishiga (ishdan chiqishga) va kelgusida mahsulot ishlab chiqarish hajmining kamayishiga olib kelishi mumkin. Demak, korxonaning faoliyatida noma’qul oqibatlardan holi bo’lgan holda eskirgan jihozlarni almashtirish yoki o’rnini to’ldirish choralari belgilanishi lozim bo’ladi. Bu esa dastlabki bosqichda mahsulot ishlab chiqarish hajmi kamaysa ham, keyingi bosqichlarda korxonaning butun ishlab chiqarish faoliyatini kuchayishiga olib kelishi mumkin.

Shunday qilib, yuqoridagi iqtisodiy jarayon, har bir qadamda uning rivojlanishiga ta’sir etuvchi, bir qancha bosqichlardan iborat deb qaralishi mumkin. Ko’p bosqichli iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirish uchun, har bir oraliq bosqichda alohida qaror qabul qilishda, butun jarayonning tub maqsadi ko’zlanadi. Butun jarayonning yechimi o’zaro bog’langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo’ladi. O’zaro bog’langan bunday yechimlar ketma-ketligi **strategiya** deb ataladi. Oldindan tanlangan mezonga ko’ra eng yaxshi natijani ta’minlovchi strategiya **optimal strategiya** deb ataladi. Boshqacha aytganda optimal strategiya ko’p bosqichli iqtisodiy jarayonning optimal rivojlanishini ta’minlovchi strategiyadir. Dinamik programmalashtirish ko’p bosqichli tuzilishga ega bo’lgan yoki bunday tuzilishga keltiriladigan masalalarning optimal yechimini topish uchun ishlatiladigan matematik vositadir. Dinamik programmalashtirish masalasiga o’tishdan oldin bu masala bilan uzviy bog’liq bo’lgan dinamik optimallashtirish masalasi bilan tanishib chiqamiz:[1]

Iqtisodiy jarayon $t_0 \le t \le t_1$ vaqt oralig’ida ro’y bersin. U holda bu jarayon harakatini ifodalovchi tizimni $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ ustun vektor yordamida yozib olamiz. Ma’lumki, bu vektorlar E^n fazo nuqtalaridir. U holda $x_i(t), i = \overline{1,n}$ funksiyalarni uzluksiz deb faraz qilib,

$$\vec{x}(t) = \left\{ \vec{x}(t) \in E^n \middle| t_0 \le t \le t_1 \right\}$$

vektorni hosil qilamiz va bu vektorlarning geometrik o’rni $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ nuqta va $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$ nuqta oralig’idagi niqtalar to’plami hosil qilgan traektoriyadan iborat bo’ladi.

U holda bu tizimni boshqarish vektori quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\vec{u}(t) = \left\{ \vec{u}(t) \in E^r \middle| t_0 \le t \le t_1 \right\}, \ \vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))^T .$$

Bu vektorlarning geometrik o’rnini **boshqarish traektoriyasi** deb ataladi. Boshqarish vektori odatda qandaydir $\Omega -$kompakt sohada aniqlangan bo’ladi:

$$\vec{u}(t) \in \Omega \subset E^r .$$

$U -$barcha mumkin bo’lgan boshqarish traektoriyalar to’plami bo’lsin. U holda $\left\{ \vec{u}(t) \right\} \in U \subset \Omega \subset E^r$. $\{\vec{x}(t)\}$ traektoriya harakat tenglamasini ifodalaydi va boshqarish traektoriyasi bilan quyidagicha bog’langan bo’ladi:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t), \ \frac{dx_i(t)}{dt} = f(x_1(t), ..., x_n(t); u_1(t), ..., u_r(t); t) . \quad (1)$$

Agar (1) differentsial tenglamalar t vaqtga bog’liq bo’lmasa, u holda ular avtonom tenlamalar deb ataladi. Chiziqli avtonom tenglamalar quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x} + B\vec{u} . \quad (2)$$

Bu yerda $A - n \times n$ o’lchamli, $B - n \times r$ o’lchamli matritsa. (2) tenglama $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ boshlang’ich shart bilan yechiladi. $\vec{x} -$harakat vektori, $\vec{u} -$boshqarish

---

[1]Michael D.Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2002. pp. 330.

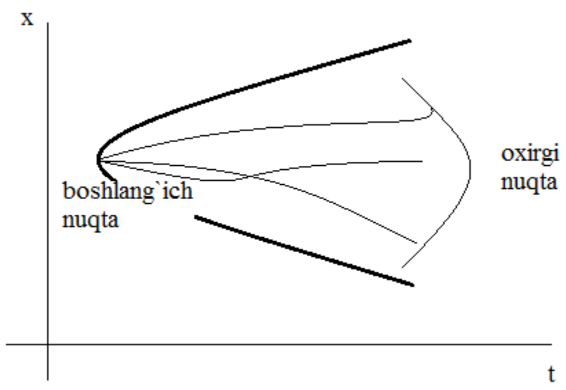
vektori va t – vaqt orasidagi bog'lanishni ko'rsatuvchi funksionalni $I(\vec{x},\vec{u},t)$ bilan, $\vec{x}_1$ va t_1 orasidagi bog'lanish ko'rsatuvchi funksionalni $F(\vec{x}_1,t_1)$ bilan belgilaymiz. Bu yerda

$$I(\vec{x},\vec{u},t) = I(x_1(t),...,x_n(t);u_1(t),...,u_r(t);t), \quad F(\vec{x}_1,t_1) = F(x_1(t_1),...,x_n(t_1);t)$$

Dinamik optimallashtirish masalasi umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \max\limits_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} I(\vec{x},\vec{u},t)dt + F(\vec{x}_1,t_1) \right\}, \\ \dfrac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x},\vec{u},t),\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,\ \ t = t_1 \Rightarrow (\vec{x},t) \in T,\ \{\vec{u}(t)\} \in U \end{cases} \tag{3}$$

Bu masalani geometrik nuqtai-nazardan quyidagicha tasvirlash mumkin:



Bellman funksional tenglamalari. Dinamik optimallashtirishning tatbiqlaridan biri bo'lgan dinamik programmalashtirish masalasi (3) bilan atroflicha tanishamiz:[2]

Faraz qilamiz, $\vec{x}^*(t), t_0 \le t \le t_1$ optimal traektoriya bo'lib, u ikki qismdan iborat bo'lsin. U holda traektoriyaning 1-qismi $t_0 \le t \le \tau$ oraliqda $\vec{x}(t_0)$ boshlang'ich shart bilan, 2-qismi esa $\tau \le t \le t_1$ oraliqda $\vec{x}(\tau)$ boshlang'ich shart bilan aniqlanadi.

Faraz qilamiz, $J^*(\vec{x},t)$ funksiya (3) masalaning yechimi bo'lsin. U holda $J^*(\vec{x},t)$ ni $(\vec{x},t)$ nuqtadagi optimal qiymat deb qarash mumkin. Xuddi shunday

[2]Michael D.Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2002. pp. 347.

$(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t)$ nuqtadagi optimal qiymat $J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t)$ ifoda bilan aniqlanadi. U holda $[t, t+\Delta t]$ oraliqdagi qiymat quyidagi rekurent formula bilan aniqlanadi:

$$J^*(\vec{x}, t) = \max_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ I(\vec{x}, \vec{u}, t)\Delta t + J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t) \right\}. \quad (4)$$

$J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t)$ funksiyani $(\vec{x}, t)$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t) = J^*(\vec{x}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}}\Delta\vec{x} + \frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t + \ldots \quad (5)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{\partial J^*}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial J^*}{\partial x_n} \right)$$

(4) va (5) dan foydalasak,

$$0 = \max_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ I(\vec{x}, \vec{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} + \frac{\partial J^*}{\partial t} + \ldots \right\}.$$

U holda $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$ tenglikni hisobga olib quyidagi **Bellman tenglamasini** hosil qilamiz:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ I(\vec{x}, \vec{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}} f(\vec{x}, \vec{u}, t) \right\}. \quad (6)$$

Ko’p bosqichli iqtisodiy masalalarni yechish uchun ularni yagona matematik modelini yoki bo’lmasa, har bir bosqichga mos keluvchi statik modellar sistemasini tuzib, so’ngra uni dinamik programmalashtirish usullari bilan yechish mumkin. Shu sababli ko’p bosqichli jarayon sifatida ifodalanuvchi matematik programmalashtirish masalalarini yechish ham dinamik programmalashtirish predmetini tashkil etadi.

Ko’p bosqichli jarayon vaqtga bog’liq ravishda rivojlanuvchi va o’z taraqqiyotida bir necha bosqichlarga bo’linuvchi jarayondir.

Dinamik programmalashtirish quyidagi xususiyatlarga ega:

1) dinamik programmalashtirish ko’p bosqichli jarayonning birdan-bir yagona yechimini emas, balki har bir bosqichga mos keluvchi va tub manfaatni ko’zlovchi yechimlar ketma-ketligini topishga yordam beradi;

2) dinamik programmalashtirish yordami bilan yechilayotgan ko’p bosqichli masalaning ma’lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog’liq bo’lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi faktlar nazarga olinadi;

3) dinamik programmalashtirish yordami bilan ko’p bosqichli masalani yechish jarayonining har bir bosqichida tub maqsadni ko’zlovchi yechimni aniqlash kerak, ya’ni yechimlar orasida provard maqsadga erishishga maksimal hissa qo’shuvchi yechimni topish kerak.

Demak, ma’lum bir bosqichda topilgan optimal reja faqat shu qadam nuqtai nazaridan emas, balki butun jarayonning tub (provard) maqsadi nuqtai nazaridan optimal reja bo’lishi kerak. Bunday prinsip “**dinamik programmalashtirishning optimallik prinsipi**” deb ataladi.

Optimallik prinsipiga amal qilish har qadamda qabul qilingan yechimni kelgusida qanday oqibatlarga olib kelishini nazarga olib borish demakdir. Bundan tashqari optimallik prinsipini yana quyidagicha talqin qilish mumkin.

Har bir bosqichdan avval sistemaning holati qanday bo’lishidan qat’iy nazar shu bosqichdagi optimal yutuq bilan undan keyingi bosqichlardagi optimal yutuqlarning yig’indisini maksimallashtiruvchi boshqarishni tanlash kerak.

Demak, boshqarishning optimal strategiyasini topish uchun eng avval n-qadamdagi optimal strategiyani topish kerak, keyin n va $(n-1)$-qadamlardagi optimal strategiyani va hokazo, barcha qadamlardagi optimal strategiyani topish kerak.

Bu prinsipga asosan dinamik programmalashtirish masalasini oxirgi n-qadamdagi optimal strategiyani topishdan boshlash kerak. Buning uchun undan oldingi qadamdagi yechim haqida ayrim taxminlar qilinadi va bu asosda W mezonni maksimallashtiruvchi U_n^0 boshqarish tanlanadi. Bunday boshqarish shartli **boshqarish** deb ataladi.

Demak, optimallik prinsipi har qadamda undan oldingi qadamning mumkin bo’lgan ixtiyoriy bir natijasi uchun shartli optimal boshqarishni topishni talab qiladi. Ko’p bosqichli masalada Bellman funksional tenlamasi bilan tanishamiz.

Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan va boshqarish mumkin bo'lgan sistemani ko'ramiz. Bu sistemani T ta bosqichlarga ajratish mumkin deb faraz qilamiz, ya'ni $t=1,2,...,T$. Har bir bosqichning boshidagi sistemaning holatini x_t bilan belgilaymiz. U holda

$$x_t=(x_{1t},x_{2t},...,x_{mt}).$$

Har bir jarayonida sistemaning holati o'zgaradi. Uning x_{t-1} holatdan x_t holatga o'tishiga u_t boshqarish ta'sir qiladi. Demak,

$$x_t=\varphi(x_{t-1},\ u_t).$$

Bu yerda u_t mumkin bo'lgan G_t-boshqarishlar to'plamiga tegishli, ya'ni

$$u_t\in G_t$$

Bunday aniqlashlarda sistemaning butun $[0,T]$ davr ichidagi taraqqiyoti $x_0,x_1,x_2,...,x_{T-1},x_T$ vektorlar ketma-ketligi orqali aniqlanadi. $\overline{X}(t)$ sistemaning t bosqichda mumkin bo'lgan holatlar to'plami. Sistemani boshlang'ich x_0 holatdan x_T holatga o'tkazish uchun $u_0,u_1,u_2,...,u_{T-1},u_T$ boshqarishlar ketma-ketligi, ya'ni strategiyalar xizmat qiladi. Sistemaning eng yaxshi x_T holatga o'tishini ta'minlash uchun $f_T(x)$ maqsad funksiyani kiritamiz.

$$f_T(x)=\sum_{t=1}^{T}Z_t(x_{t-1},x_t)$$

bu yerda $Z_t=(x_{t-1},x_t)$ sistemaning x_{t-1} holatdan x_t holatiga o'tishida hisoblanadigan va bu holatlarni solishtirib baholovchi funksiyadir.

Agar sistemaning t bosqichdagi holatlar to'plami $\overline{X}(t)$ mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami G_t, hamda sistemani bir holatdan ikkinchi holatga o'tkazish qoidasi, hamda bu holatlarni solishtiruvchi funksiya $Z_t=(x_{t-1},x_t)$ berilgan bo'lsa, T bosqichda sistema to'la aniqlangan bo'ladi. Bunday sistemani ifodalovchi dinamik programmalashtirish masalasi quyidagicha bo'ladi.

Sistemani boshlang'ich holati x_0 ma'lum bo'lganda shunday

$$u_t=(u_1,u_2,...,u_T)$$

strategiyani tanlash kerakki, u

$$x_t = \varphi(x_{t-1}, u_t), \quad x_t \in \overline{X}(t), \quad u_t \in G_t, \quad (t = \overline{1,T}) \tag{7}$$

shartlarni qanoatlantirib,

$$f_T(x) = \sum_{t=1}^{T} Z_t(x_{t-1}, x_t) \tag{8}$$

funksiyaga ekstremal qiymat bersin.

Bu munosabatlardan ko'rinadiki, dinamik programmalashtirish masalasi ko'p bosqichli tanlash masalasi bo'lib, uning u^* optimal yechimi bir nechta bosqichlarda topilgan, mumkin bo'lgan u_t boshqarishlar asosida tanlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan, dinamik programmalashtirish masalasini quyidagicha talqin qilish mumkin: Umumiy holda sistemaning boshlang'ich x_0 holati va oxirgi x_k holati aniq berilmaydi, balki boshlang'ich holatning X_0^* sohasi va oxirgi holatning X_k^* sohasi ko'rsatiladi.

Bu masala quyidagicha ta'riflanadi: biror boshqariluvchi X sistema boshlang'ich $x_0 \in X_0^*$ holatda bo'lsin. Vaqt o'tishi bilan sistemaning holati o'zgarib $x_k \in X_k^*$ oxirgi holatga o'tadi, deb hisoblaylik. Sistema holatlarining o'zgarishi W mezon (kriteriy) bilan bog'liq bo'lsin. Sistemaning o'zgarish jarayonini shunday tashkil etish kerakki, bunda W mezon o'zining optimal qiymatiga erishsin.

U mumkin bo'lgan boshqaruvlar to'plami bo'lsin, u holda masala X sistemani $x_0 \in X_0^*$ holatdan $x_k \in X_k^*$ holatga o'tkazishga imkon beruvchi shunday $u^* \in U$ boshqaruvni topishdan iboratki, bunda $W(u)$ mezon o'zining $W^* \in W(u^*)$ optimal qiymatiga erishsin.

Odatda sistemaning x_0 holatini sonli parametrlar bilan, masalan, ajratilgan fondlar miqdori, jalb qilingan investisiyalar miqdori, sarflangan yoqilg'i miqdori va h.k. bilan ifodalash mumkin. Bu parametrlarni sistemaning koordinatalari deb ataymiz.

(7), (8) masalani yechishdan avval

$$G_T,\ G_{T-1,T},\ \dots,\ G_{1,2,\dots,T} = G$$

belgilashlar kiritamiz. Bu yerda $G_T -$masalaning oxirgi T bosqichdagi aniqlanish sohasi, $G_{T-1,T} -$ T va $T-1$ bosqichlardagi aniqlanish sohasi, $G_{1,2,...,T-1,T} = G -$ berilgan masalaning aniqlanish sohasi.

Maqsad funksiyaning oxirgi bosqichdagi optimal qiymatini $f_1(x_{T-1})$ bilan belgilaymiz:

$$f_1(x_{T-1}) = \min_{u_T \in G_T} \{Z_T(x_{T-1}, x_T)\}. \quad (9)$$

$T-1$ qadamdagi shartli optimal qiymatni $f_2(x_{T-2})$ bilan belgilaymiz:

$$f_2(x_{T-2}) = \min_{u_{T-1} \in G_{T-1,T}} \{Z_{T-1}(x_{T-2}, x_{T-1}) + f_1(x_{T-1})\}. \quad (10)$$

Bu jarayonni davom ettiramiz

$$f_k(x_{T-k}) = \min_{u_{T-(k-1)} \in G_{T-(k-1),...,T}} \{Z_{T-k}(x_{T-k}, x_{T-(k-1)}) + f_{k-1}(x_{T-(k-1)})\} \quad (11)$$

$$f_T(x_0) = \min_{u_1 \in G} \{Z_1(x_0, x_1) + f_{T-1}(x_1)\}. \quad (12)$$

Bu yerda (9)-(12) ifodalar optimallik prinsipining matematik formadagi yozilishidan iborat bo’lib, ular “**Bellmanning funksional tenglamalari**” yoki “**dinamik programmalashtirishning asosiy funksional tenglamalari**” deb ataladi.

Dinamik programmalashtirishning optimallik prinsipiga asosan har bir qadamda topilgan yechim faqat shu qadam nuqtai nazaridan emas, balki so’nggi, tub maqsad nuqtai nazaridan optimal bo’lishi kerak ekanligini ko’rgan edik. Dinamik programmalashtirish masalalarini yechish usullari uchun ana shu prinsip asos qilib olingan.

Dinamik programmalashtirishga keltiriladigan masalalar. Dinamik programmalashtirish usullari bilan yechiladigan ba’zi iqtisodiy masalalar bilan tanishib chiqamiz:

1. Sanoat birlashmasini optimal rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, n ta korxonani o’z ichiga oluvchi sanoat birlashmasining T yillik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinsin. Rejalashtirilayotgan T davrning boshida birlashma uchun K_0 miqdorda mablag’ ajratilgan bo’lsin. Bu mablag’ korxonalararo taqsimlanadi. Korxonalar ajratilgan mablag'ni to'la yoki qisman ishlatadi va ma'lum miqdorda daromad oladi. Keyingi bosqichlarda mablag'lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin. Shunday qilib, quyidagi masala hosil bo'ladi: korxonalararo kapital mablag'ni shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki, natijada birlashmaning T yil davomida olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

Har yilning boshida birlashmadagi har bir korxonaga ajratiladigan xom-ashyo, kapital mablag' va yangilanishi kerak bo'lgan uskunalarning soni haqida yechim qabul qilinadi.

Bu yechimlar to'plami boshqarish deb ataladi. Demak, t qadamdagi boshqarish

$$U^t = (U_1^t, U_2^t, ..., U_n^t)$$

vektor orqali ifodalanadi, bu yerda $U_j^t - j$ korxona uchun t qadamning boshida ajratilgan xom-ashyo, kapital mablag' va hokazolarning miqdorini ko'rsatuvchi vektor.

Butun birlashmaning T davr ichida boshqarishni

$$U = (U^1, U^2, ..., U^T)$$

vektor orqali ifodalash mumkin. Bundan tashqari birlashmadagi har bir j korxonaning holatini ko'rsatuvchi X_j vektor kiritamiz.

$$X_j = (X_j^1, X_j^2, ..., X_j^T), \qquad (j = \overline{1,n}).$$

Bu yerda $X_j^t - t$ qadamning boshidagi j korxonaning moddiy-ashyoviy va moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatuvchi vektor bo'lib, uning komponentalari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar, moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatadi, ya'ni

$$X_j^t = (X_{j1}^t, X_{j2}^t, ..., X_{jl}^t),$$

Demak, yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori birlashmadagi korxonalar sistemasining t qadam boshidagi holatini ko'rsatuvchi vektordir, ya'ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Sistemaning boshlang'ich holati X_0 berilgan deb faraz qilamiz. Maqsad fuknsiya sifatida birlashmaning T davr ichida oladigan daromadlari yig'indisini ifodalovchi

$$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max$$

funksiyani kiritamiz. Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga chegaralovchi shartlar qo'yiladi. Bu shartlar birlashmasini G bilan belgilaymiz va uni mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami deb ataymiz.

Shunday qilib, quyidagi dinamik programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$U^t \in G, \tag{13}$$

$$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max \tag{14}$$

Hosil bo'lgan (13), (14) model ishlab chiqarishning dinamik modeli deb ataladi. Bu modelga asosan har bir t qadamdagi U^t boshqarishni shunday aniqlash kerakki, natijada sistemaning rejalashtirilayotgan davr ichida erishgan daromadlari yig'indisi maksimal bo'lsin.

2. Mahsulot ishlab chiqarish va uni saqlashni rejalashtirishning dinamik modeli. Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan talabni qondirishga qaratilgan ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz. Rejalashtirilayotgan davrning uzunligi T bo'lsin. Bu davrning har bir t qadamida mahsulotga bo'lgan talab $V(t)$ ma'lum deb faraz qilamiz. Xuddi shuningdek, t qadamdagi ishlab chiqarish rejasini $X(t)$ bilan belgilaymiz. T davr davomida korxonadagi mahsulotlar zahirasi kamayib yoki ortib borishi mumkin.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t = 0$ qadamda korxonadagi mahsulot zahirasi $Z(0)$ bo'lsin. U holda $X(t) > V(t)$ bo'lganda t qadamdagi mahsulot zahirasi quyidagicha aniqlanadi

$$Z(t) = X(t) - V(t) + Z(0).$$

Agar t qadamda ishlab chiqarilgan mahsulot talabdan kam: $X(t) < V(t)$ bo’lsa, u holda t qadamning boshida korxonada mavjud bo’lgan mahsulot zahirasi $V(t) - X(t)$ ga kamayadi, ya’ni zahira

$$Z(t) = Z(t-1) + X(t) - V(t)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Ixtiyoriy qadamdagi mahsulot zahirasi noldan kichik emas deb faraz qilamiz, hamda $t = 0$ boshlang’ich qadam bilan t qadam orasidagi mahsulotga bo’lgan umumiy talabni $\bar{V}(t)$ bilan, umumiy ishlab chiqarish hajmini $\bar{X}(t)$ bilan belgilaymiz. U holda

$$\bar{V}(t) = \int_0^t V(s)ds, \quad \bar{X}(t) = \int_0^t X(s)ds.$$

Faraz qilaylik, mahsulotni bir-birligini saqlash uchun sarf qilingan xarajat C birlik va ishlab chiqarish harajatlari funksiyasi $K(t)$ bo’lsin. Ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi $K(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori $X(t)$ ga bog’liq bo’ladi, ya’ni $K(t) = f\left(X(t)\right)$. Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada mahsulot ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan xarajatlar minimal bo’lsin, ya’ni

$$Y = \int_0^T f\left(X(t)\right)dt + C\int_0^T \left(X(t) - V(t) + Z(0)\right)dt \to \min. \tag{15}$$

Maqsad funksiya ikki qismdan iborat bo’lib, uning birinchi qismi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan harajatlarni, ikkinchi qismi esa mahsulotlarni saqalash uchun sarf qilingan harajatlarni ko’rsatadi.

Bundan tashqari masaladagi noma’lumlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\begin{aligned} &Z(0) \geq 0; \\ &X(t) - V(t) + Z(0) \geq 0; \\ &X(T) - V(T) = Z(T). \end{aligned} \tag{16}$$

Bunda birunchi shart rejalashtirilayotgan davrning boshidagi mahsulot zahirasi manfiy emasligini ko'rsatadi. Ikkinchi shart ixtiyoriy t bosqichdagi mahsulot zahirasining manfiy emasligini ko'rsatadi. Uchinchi shart rejalashtirilayotgan davrning oxirida korxonada ortib qolgan mahsulot miqdori $Z(T)$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

Hosil bo'lgan (15)-(16) model mahsulot ishlab chiqarish va saqlashni rejalashtirishning dinamik modeli deyiladi.

Bu modelga asosan har bir qadamdagi mahsulot ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada uni ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan xarajatlar yig'indisi minimal bo'lsin.

Misol. Xaridorgir mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish uchun mahsulot ishlab chiqaruvchi n ta korxonalarga S ming so'm kapital mablag' ajratilgan. Agar i korxonaga x_i ming so'm kapital mablag' ajratilsa, u holda bu korxonadagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi $f_i(x_i)$ miqdorga oshadi. Barcha korxonalarda ishlab chiqariladigan mahsulot hajmini maksimal oshirish uchun kapital mablag'ni korxonalarga qanday taqsimlash kerak?

Yechish: Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_i = S; \\ &x_i \geq 0; \\ &F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \min. \end{aligned} \tag{17}$$

Bu masalada $F(x)-$maqsad funksiyasi va $g(x)-$asosiy cheklashlar funksiyasi separabel funksiyadir.

Agar $f_i(x_i)$ qavariq funksiya bo'lsa, u holda masalani qavariq programmalashtirish masalalarining optimal yechimini topish usullaridan foydalanib yechish mumkin.

Agar $f_i(x_i)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda (16) masalani dinamik programmalashtirish usulini qo'llab yechish kerak bo'ladi. Buning uchun masalani ko'p bosqichli masala sifatida ifodalash kerak. Kapital mablag'ni n ta korxonaga taqsimlash variantlarini o'rganish va har bir variantga mos keluvchi samaradorlik darajasini aniqlash o'rniga S miqdordagi kapital mablag'ni, avval, bitta korxonaga, keyin ikkita, va hokazo, n ta korxonaga taqsimlash samaradorligini aniqlaymiz. Shunday yo'l bilan masala ko'p bosqichli dinamik programmalashtirish masalasiga aylanadi.

Masalan, (17) ixtiyoriy $k,\ 0 \le k \le n$ va $q,\ 0 \le q \le S$ uchun yozamiz:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} x_i = q; \\ &x_i \ge 0; \\ &B_k(q) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \min. \end{aligned} \tag{18}$$

Bu yerda $B_k(q)$ – Bellman funksiyasi deb ataladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Michael D.Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2002. 420 p.

25-MAVZU. O’YINLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI. MATRISALI O’YIN

Tayanch so’z va iboralar: O’yin, konflikt holat, nol summali o’yin, matrisali o’yin, strategiya, optimal strategiya, chekli va cheksiz o’yin, to’lovlar va yutuqlar matrisasi, o’yinning quyi va yuqori bahosi, maximin va minimax strategiyalar, egar nuqta, o’yinning yechimi, aralash va sof stategiyalar.

REJA:

1. O’yinlar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar.

2. O’yinning quyi va yuqori bahosi, egar nuqtasi va optimal bahosi.

1. O’yinlar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar. Matematikaning konfliktli (mojaroli) holatlarini, ya’ni qatnashuvchilarning (o’ynovchilarning) manfaatlari qarama-qarshi yoki bir-biriga mos kelmaydigan holatlarni o’rganuvchi bo’limi – “**o’yinlar nazariyasi**” deb ataladi. O’yinlar nazariyasi – konfliktli holatda qatnashayotgan har bir “o’ynovchi”ga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga) erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlashga, yo’llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko’pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o’yinlar nazariyasi nuqtai-nazaridan qarash mumkin. Masalan, o’yin ishtirokchilari – bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta’minotchilar va iste’molchilar bo’lib, o’yining yutug’i – ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag’lari, mahsulotning bahosi yoki tannarxi bo’lishi mumkin.

O’yinlar nazariyasining yaratilishi XX asrning buyik matematklaridan biri Jon von Nyuman bilan bog’liq. Uning Morgenshtern bilan hamkorlikda 1944 yil nashr etgan “**Iqtisodiy jarayonlar va o’yinlar nazariyasi**” monografiyasi o’yinlar nazariyasining rivojlanishida fundamental asos bo’ldi. Keyinchalik o’yinlar nazariyasi amaliy tatbiqlarga ega bo’lgan mustaqil yo’nalish sifatida rivojlandi.
Shuni ta’qidlash lozimki, o’yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko’p marta takrorlanadigan konfliktli holatlarga nisbatan ishlatiladi.

Amalda, konfliktli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhim bo'lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi. Bunday model **o'yin** deb ataladi. O'yinda konfliktli holat ma'lum qoida asosida rivojlanadi. O'yinning mohiyati shundaki, har bir ishtirokchi (o'yinchi) o'ziga eng yaxshi natijani beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi.

O'yinda ikkita yoki undan ko'p ishtirokchilarning manfaatlari to'qnashishi mumkin. Shunga muofiq, u ikki o'ynovchili va ko'p o'ynovchili bo'lishi mumkin. Yutuqlarning xarakteriga ko'ra o'yinlar nol summali va nol summali bo'lmagan o'yinlarga bo'linadi. Nol summali o'yinda o'yinchilarning umumiy kapitali o'zgarmaydi, faqat o'yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n = 0$, bu yerda ν_j $j-$ o'yinchining yutug'i.

Nol summali bo'lmagan o'yinlarda o'yinchilarning yutuqlari yig'indisi noldan farqli. Masalan, lotoreya o'yinida, o'yinchilardan to'plangan badalning bir qismi lotoreya tashkilotlariga beriladi. Shuning uchun $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n < 0$ bo'ladi. Biz bu yerda amaliy ahamiyati katta bo'lgan o'yinlar, ya'ni juft o'yinlarni qarash bilan cheklanamiz. Eng sodda va keng tarqalgan o'yinning ta'rifini beramiz.

1-ta'rif. Ikki ishtirokchidan iborat nol summali o'yinning **stratigik formasi** (X, Y, A) uchlik ko'rinishida beriladi.

Bu yerda $X -$I o'yinchining, $Y -$II o'yinchining strategiyalari, $A - X \times Y$ da aniqlangan funksiya bo'lib, $A(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ ko'rinishda yoziladi.

Bunda I o'yinchi $x \in X$ strategiyani, II o'yinchi esa $y \in Y$ strategiyani bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda tanlaydi. Ular tanlagan strategiya ma'lum bo'lgamda esa o'yin natijasiga ko'ra I o'yinchi II o'yinchidan oladigan yutig'i yoki II o'yinchi beradigan to'lovi $A(x, y)$ bilan aniqlanadi.

Masalan, ikki shaxmatchidan iborat o'yinda I shaxmatchi bilga barcha shaxmat programmalari uning strategiyasi hisoblanadi va hakozo.

Yana bir o'yinni ko'rib chiqamiz. U toq yoki juft deb ataladi. Bunda I va II o'yinchilar bir paytning o'zida $\{1\}, \{2\}$ raqamlardan birini aytadi. I o'yinchini toq deb nomlasak, u holda yuqorida I va II oyinchilar tomonidan aytilgan raqamlar yig'indisi toq bo'lgandagina shu yig'indigo teng miqdorda pul birligi yutadi. Aks holda esa I o'yinchi yutqazib II o'yinchi yutadi. Chunki II o'yinchining nomi juft.

Strategik formani aniqlaymiz: $X=\{1,2\}$; $Y\{1,2\}$; $A(x,y)-$ I o'inchi uchun yutuq II o'yinchi uchun esa to'lov bo'lib, u quyidagi jadvalda ifodalangan.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & II(juft) & y \\
 & & 1 & 2 \\
I(toq) & x & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & +3 \\ +3 & -4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bu yerda ikki o'yinchi ham teng imkoniyatli.

Bu o'yinni I o'yinchi nuqtai nazaridan tahlil qilamiz. Faraz qilamiz, u ixtiyoriy ravishda {1} raqamni vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida $\{2\}$ raqamni esa vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida tanlasin. U holda,

1. Agar II o'yinchi {1} ni tanlasa, u holda I o'yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 2 birlikda pul yutqazadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 3 birlikda pul yutadi. U holda uning o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: $-2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{2}{5}=0$.

2. Agar II o'yinchi {2} ni tanlasa, u holda I o'yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 3 birlikda pul yutadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 4 birlikda pul yutqazadi. U holda uning o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: $3\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Shunday qilib, II o'yinchi qanday strategiya tanlashidan qat'iy nazar har bir o'yinning oxirida I o'yinchi $\frac{1}{5}$ birlikdagi pul yutiqqa ega bo'ladi.

Endi yuqoridagi umumiy holatda ko'rib chiqamiz. Vaqt taqsimoti proportsiyasini p bilan belgilaymiz va p ning qiymatini I o'yinchining har qanday holatdagi yutig'i bir xil bo'lgan holda topamiz. Ma'lumki I o'yinchining o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: 1. $-2p+3(1-p)$; 2. $3p-4(1-p)$. U holda I o'yinchining yutig'ini o'zgarmaganligini e'tiborga olsak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-2p+3(1-p)=3p-4(1-p) \Rightarrow 12p=7 \Rightarrow p=\frac{7}{12}.$$

Demak, agar vaqt taqsimotini $p=\frac{7}{12}$, $q=\frac{5}{12}$ kabi olsak I o'yinchining yutig'i har doim bir xil, ya'ni o'zgarmas bo'lib, quyidagiga teng bo'ladi:

$$-2\cdot\frac{7}{12}+3\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{12}.$$

Shunday qilib, I o'yinchining har bir holatda o'rtacha yutig'i $\frac{1}{12}$ bo'lishi uchun $\{1\}$ raqamni $\frac{7}{12}$ ehtimollik bilan, $\{2\}$ raqamni esa $\frac{5}{12}$ ehtimollik bilan tanlash kerak.

Sof va aralash strategiyalarni birindan farlash keraj bo'ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan (X,Y,A) uchlikdagi X va Y strategiyalar alohida-alohida qaralganda sof strategiyalar hisoblanadi. Agarda sof atrategiyalar qandaydir proportsiyada qo'llanilsa, u holda biz aralash strategiyani hosil qilamiz. Shunday qilib, toq yoki juft o'yinidagi I o'yinchining optimal strategiyasi aralash strategiydir. Unda sof strategiyalar $\frac{7}{12}$ va $\frac{5}{12}$ nisbat bilan qo'llanilmoqda. Har qanday $x\in X$ strategiyani ham 1 ehtimollik bilan qo'llanilgan x sof strategiyaning aralash strategiyasi sifatida qarash mumkin.[1].

2. O'yinning quyi va yuqori bahosi, egar nuqtasi va optimal bahosi.

O'yinchining strategiyasi deb, o'yinchi mumkin bo'lgan har qanday holatda tanlaydigan rejasiga aytiladi.

Strategiyaning soniga qarab, o'yinlar chekli yoki cheksiz o'yinlarga bo'linadi.

---

[1]Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. pp. 3-12.

Optimal strategiya deb, berilgan o'yinchiga, o'yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo'lgan o'rtacha yutuqni ta'minlovchi strategiyaga aytiladi.

Faraz qilamiz, A o'yinchi m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyalarga, B o'yinchi esa n ta $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyalarga ega bo'lsin. Agar A o'yinchi A_i strategiyani B o'yinchi B_j strategiyani tanlasin. U holda A o'yinchining (A_i, B_j) juftlikka mos keluvchi yutug'ini a_{ij} bilani belgilaymiz.

Matrisa satrlarini A_i strategiyalarga, ustunlarini B_j strategiyalarga mos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

keltirib $A -$o'yin matrisasini hosil qilamiz. Bu matrisa **to'lov matrisasi** yoki **yutuq matrisasi** deb ataladi.

O'yin matrisasini qurishning mohiyatini tushunib olish uchun quyidagi misolni ko'ramiz.

Ikki o'yinchining har biri 1 yoki 2 sonlardan birini tanlaydi va shu bilan bir paytda raqib qaysi sonni tanlaganini topishga harakat qiladi. Agar o'yinchilardan ikkalasi ham raqibining tanlagan sonini topsa yoki adashsa o'yin durang bo'ladi. Agar faqat bitta o'yinchi raqib tanlagan sonni topsa ikkinchisi esa raqib o'ylagan sonni topa olmasa, u holda birinchi o'yinchining yutiq' tanlangan ikki sonning yig'indisidan ibotar bo'lib ikkinchi o'yinchi esa shuncha yutqazadi.

(s, t) sonlar juftligini o'yinchining strategiyasi deb ataymiz. Bu yerda $s -$o'yinchi tanlagan son; $t -$o'yinchining nazarida raqib tanlagan son. Shuday qilib har bir o'yinchining 4 ta strategiyasi mavjud: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$. Bu o'yin haqidagi barcha ma'lumotlarni quyidagi matrisaga joylashtirish mumkin:

	II				
I		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)

	(1, 1)	0	2	-3	0
	(1, 2)	-2	0	0	3
	(2, 1)	3	0	0	-4
	(2, 2)	0	-3	4	0

Matrisa elementlari I o’yinchining yutiqlarini bildiradi. Masalan, agar I o’yinchi (2, 2) strategiyani tanlaganda (I o’yinchi 2 sonni o’ylab II o’yinchi ham 2 sonni o’yladi deb faraz qilmoqda) II o’yinchi (2, 1) (II o’yinchi 2 sonni o’ylab I o’yinchini 1 sonni o’yladi deb faraz qilmoqda) strategiyani tanlasa, u holda I o’yinchining yutig’i 4 birlikka teng bo’ladi, chunki I o’yinchi II o’yinchi o’ylagan sonni, ya’ni 2 ni topgan II o’yinchi esa I o’yinchi o’ylagan sonni, ya’ni 2 ni topa olmagan. Agar I (1, 2) strategiyani tanlaganda II o’yinchi (1, 1) strategiyani tanlasa, u holda I o’yinchining yutig’i -2 birlikka teng bo’ladi.

Bu misol uchun o’yin matrisasi quyidagi ko’rinishga ega bo’ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

O’yin tugashining mohiyati quyidagicha: I o’yinchi quyidagicha fikr yuritishi kerak: agar A_{i_1} strategiyani tanlasa, u holda II o’yinchini B_j strategiyasini shinday tanlashi mumkinki, natijada $a_{i_1 j_1} = \max\limits_{1\le i\le 4} \min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$ munosabat bajarilishi kerak.

Optimal strategiyani bunday aniqlash minimax usuli deb ataladi. Bu usul bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o’yin matrisasini qaraymiz. Bu matrisada quyidagicha tanlash ishlarini amalga oshiramiz:

$$
\begin{array}{rl}
 & \overbrace{\begin{matrix} a_{31} & a_{52} & \dots & a_{kn} \end{matrix}}^{\max\limits_{1\le j\le m} a_{ij}} \\
A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \left\| \begin{matrix} a_{13} \\ a_{27} \\ \dots \\ a_{ms} \end{matrix} \right\} \min\limits_{1\le i\le n} a_{ij}
\end{array}
$$

Bu yerda har bir satr bo'yicha eng kichik sonlar tanlab olinib $\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = \{a_{13}, a_{27}, ..., a_{ms}\}$ hosil qilingan; har bir ustun bo'yicha eng katta sonlar tanlab olinib $\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij} = \{a_{13}, a_{27}, ..., a_{ms}\}$ hosil qilingan.

Bizning misolimizda bu tanlashlar $\min\limits_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{-3, -2, -4, -3\}$, $\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{3, 2, 4, 0\}$ ko'rinishda amalga oshirilgan.

Umuman olganda B o'yinchi B_{j_1} strategiyani A o'yinchining strategiyasini bilmagan holda tanlaydi. Shu sababli yuqoridagi tanlashlar bir-biriga bog'liq emas. Endi 2-marta tanlashni quyidagicha amalga oshiramiz:

$$
\max_{1\le j\le n}\left\{\min_{1\le i\le m} a_{ij} = \{a_{31}, a_{52}, ..., a_{kn}\}\right\} = \alpha
$$

$$
\min_{1\le i\le m}\left\{\max_{1\le i\le n} a_{ij} = \{a_{13}, a_{27}, ..., a_{ms}\}\right\} = \beta
$$

Biz qarayotgan misolimizda bu quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$
\max_{1\le i\le 4}\left\{\min_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{-3, -2, -4, -3\}\right\} = -2 \Rightarrow \alpha = -2
$$

$$
\min_{1\le i\le 4}\left\{\max_{1\le i\le 4} a_{ij} = \{3, 2, 4, 0\}\right\} = 0 \Rightarrow \beta = 0
$$

Demak, yuqoridagi fikrlash bo'yicha I o'yinchi $a_{21} = (1;2)$ stratrgiyani tanlaydi va u $\alpha = -2$ birlikdan ko'p yutqazmaydi.

Agar xuddi shuday fikrlashni II o'yinchiga nisbatan yuritsak II o'yinchida $\beta = 0$ bo'lib o'yin durang bo'ladi.

Ammo A o'yin matrisasi ikki o'yinchiga ham ma'lum bolib, I o'yinchi faqat o'zi uchun emas, balki II o'yinchi uchun ham o'ylashi mumkin va aksincha. Natijada strategiya tanlash cheksiz davom etishi mumkun.

Bu savolga javob berish uchun quyidagi o'yin matrisasini ko'ramiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \\ -10 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda

$$a_{i_1 j_1}=\max_{1\le i\le 4}\min_{1\le j\le 4} a_{ij}=\max\{-3,\ 4,\ -3,\ -10\}=4,$$

ya'ni $i_1=2,\ j_1=2$;

$$a_{i_2 j_2}=\min_{1\le j\le 4}\max_{1\le i\le 4} a_{ij}=\max\{7,\ 4,\ 8,\ 7\}=4,$$

ya'ni $i_2=2,\ j_2=2$.

Shuday qilib, $i=2,\ j=2$ juftlik ikki o'yinchi uchun ham optimal strategiya. Birinchi misolda har bir o'yinchi kamida -2 birlikda yutiq mavjud, ammo ular ko'proq yutiq olishga umid qilishadi.

Ikkinchi misolda esa ikki o'yinchi ham qanoatlantiradigan eng optimal strategiya topilgan.

Bu ikki holatni farqlash uchun quyidagi tushunchalarni ba'zi tushunchalar kiritamiz.

1-ta'rif. Matrisali o'yin uchun $\alpha=\max_{1\le j\le n}\left\{\min_{1\le i\le m} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},...,a_{kn}\}\right\}$ son o'yinning quyi qiymati, $\beta=\min_{1\le j\le m}\left\{\max_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},...,a_{kn}\}\right\}$ son esa **o'yinning yuqori qiymati** deb ataladi.

1-teorema. Matrisali o'yinning quyi va yuqori qiymatlari uchun quyidagi munosabat o'rinli: $\alpha\le\beta$.

2-ta'rif. Agar matrisali o'yinda $\alpha=\beta$ bo'lsa, u holda o'yin **egar nuqtaga ega** deyiladi.

Bu yerda $\alpha=\beta=V$ **o'yinning bahosi** deb ataladi.

3-ta'rif. Agar $\alpha=\min_{1\le j\le n} a_{i_0 j}=\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij}$ bo'lsa, u holda A o'yinchinning i_0 **strategiyasi maksimin** deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $\beta = \min\limits_{1\le i\le m} a_{ij_0} = \max\limits_{1\le j\le n}\min\limits_{1\le i\le m} a_{ij}$ bo'lsa, u holda B o'yinchinning j_0 strategiyasi **minimaks** deb ataladi.

Bu ikki strategiya **garantiyalovchi strategiyalar** deb ataladi.

2-teorema. Agar garantiyalovchi strategiyalarning ixtiyoriy $(i_0,\ j_0)$ juftliklari uchun

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$$

tengsizlik bajarilsagina matrisali o'yin egar nuqtaga ega bo'ladi. Demak, agar to'lov matrisasi egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda o'yinning yechimi ma'lum va har bir o'yinchi o'zining optimal strategiyasini qo'llaydi.

Biz quyida minimax teoremasini keltirish uchun ba'zi tushunchalarni kiritib olamiz. Agar X va Y strategiyalar chekli bo'lsa, u holda nol summali (X, Y, A) o'yin chekli bo'ladi.

Teorema. Har qanday nol summali chekli o'yin uchun quyidagilar o'rinli:

1. Bunda o'yin qiymati deb ataluvchi chekli V son mavjud;
2. I o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda I ning o'rtacha yutug'i V ning qiymati II o'yinchining harakatiga bog'liq emas;
3. II o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda uning o'rtacha to'lovi V ning qiymati I o'yinchining harakatiga bog'liq emas.

Bu yerda, agar $V > 0$ bo'lsa, demak, o'yin foydali; agar $V < 0$ bo'lsa, demak, o'yin foydasiz; agar $V = 0$ bo'lsa, demak, o'yin durrang deyiladi[2].

Adabiyotlar ro'yxati

1. Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. 420 p.

[2] Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. pp. 3-12.

26-MAVZU. MATRISALI O'YINNI CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASIGA KELTIRISH

Tayanch so'z va iboralar: Matrisa, chiziqli programmalashtirish, strategiya, optimal strategiya, tabiat bilan o'yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSh), yechim qabul qilish mezonlari.

REJA:

1. 2-tartibli matrisali o'yinning egar nuqtasini topish.

2. Matrisali o'yinning egar nuqtasini topishda chiziqli programmalashtirish usuli.

1. 2-tartibli matrisali o'yinning egar nuqtasini topish. (2×2) o'lchamli

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

o'yin matrisasini qaraymiz. Har bir o'yinchi uchun hech bo'lmaganda bitta optimal strategiya va V o'yin qiymatini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. Egar nuqtani topamiz;
2. Agar egar nuqta bo'lmasa, u holda optimal strategiyani topib, o'yinning yechimini aniqlaymiz.

Faraz qilamiz, o'yinning egar nuqtasi mavjud bo'lmasin. Agar $a \geq b$ bo'lsa, u holda $b < c$ bo'ladi. Aks holda b egar nuqta bo'lib qoladi. $b < c$ bo'lgani uchun $c > d$ aks holda c egar nuqta bo'lib qoladi. Demak, $d < a$, $a > b$. Boshqa tomondan agar $a \geq b$ bo'lsa, u holda $a > b < c > d < a$. Agar $a \leq b$ bo'lsa, u holda $a < b > c < d < a$. Bu shuni ko'rsatadiki:

Agar egar nuqta mavjud bo'lmasa, u holda $a > b,\ b < c,\ c > d$ va $d < a$ yoki $a < b, b > c,\ c < d$ va $d > a$.

Agar I o'yinchi $(p, 1-p)$ aralash strategiyani tanlasin. U holda

$$ap + d(1-p) = bp + c(1-p) \Rightarrow p = \frac{c-d}{(a-b)+(c-d)},\ 0 < p < 1,$$

Bundan foydalanib I o'yinchining o'rtacha yutug'ini topish mumkin:

$$V = ap + d(1-p) = \frac{ac-bd}{a-b+c-d}.$$

II o'yinchining strategiyasi $q = \frac{c-b}{a-b+c-d}$, $0 < q < 1$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisa uchun optimal strategiyani toping. Bu yerda

$$p = \frac{2-1}{0+10+2-1} = \frac{1}{11}, \quad q = \frac{2+10}{0+10+2-1} = \frac{12}{11}.$$

Ma'lumki, $0 < q < 1$ bo'lishi kerak, ammo bu misolda yuqoridagi tengsizlik bajarilmayapdi. Chunki biz bu yerda egar nuqtani tekshirmadik. Bu matrisaning egar nuqtasi mavjud bo'lib, u $V = 1$. Bu yerda $p = 0$, $q = 1$.

Ba'zi hollarda yuqori o'lchamli martitsani kichraytirib (2×2) o'lchamga keltiriladi so'ngra uning egar nuqtasi yoki optimal strategiyasi topiladi. Bu jarayon quyidagicha amalga oshiriladi.

Agar $A = (a_{ij})$ matrisada barcha j lar uchun $a_{ij} \geq a_{kj}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $k-$satr $i-$satrga **dominant** deyiladi. Xuddi shuda usulda i ustunga dominant k ustunni ham aniqlash mumkin $(a_{ij} \leq a_{ik})$.

Dominant ustun yoki dominant satrni matrisadan o'chirish mumkin. Bu jarayonni takrorlab matrisani (2×2) o'lchamli matrisaga ketirib olish mumkin. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ o'yin matrisasining optimal strategiyasini topamiz. Bu matrisada 3-ustun 2-ustunga dominant. U holda 3-ustunni o'chirib matrisani quyidagicha yozib olamish mumkin: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Yangi hosil bo'lgan matrisada esa 1-satr 3-satrga nisbatan dominant. U holda boshlang'ich matrisa quyidagi ko'rinishga keladi: $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Bu matrisa egar nuqtaga ega bo'lmaganligi sababli unga mos o'yinning optimal strategiyasini va qiymatini aniqlaymiz: $p=\frac{3}{4},\ q=\frac{1}{4},\ V=\frac{7}{4}$. Shunday qilib boshlang'ich o'yinda I o'yinchining optimal strategiyasi teng bo'ladi: $\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$; II o'yinchi uchun esa $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$.

Matrisaning satriga (ustuni) boshqa satrlarning (ustunlar) ehtimollar orqali kombinatsiyasi dominant bo'lsa ham bu satrni (ustun) o'chirish mumkin.

Bunda satr uchun $pa_{i_1 j}+(1-p)a_{i_2 k}\geq a_{kj},\ 0<p<1$; ustun uchun $pa_{ij_1}+(1-p)a_{ij_2}\leq a_{ik},\ 0<p<1$ tensizliklardan foydalaniladi.

2-misol. $A=\begin{pmatrix}0&4&6\\5&7&4\\9&6&3\end{pmatrix}$ o'yin matrisasini qaraymiz. $p=\frac{1}{2}$ ehtimollik orqali kombinatsiyasidan $\begin{pmatrix}0,5\cdot0+0,5\cdot6\\0,5\cdot5+0,5\cdot4\\0,5\cdot9+0,5\cdot3\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}4\\7\\6\end{pmatrix}$ tensizlik hosil qilamiz va 2-ustunni tashlab yuboramiz. Yangi hosil bo'lgan $A'=\begin{pmatrix}0&6\\5&4\\9&3\end{pmatrix}$ matrisadan $p=\frac{1}{3},\ 1-p=\frac{2}{3}$ ehtimollar yordamida 2-satrni tashlab yuboramiz va $A''=\begin{pmatrix}0&6\\9&3\end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Uning qiymati $V=\frac{9}{2}$.[1]

2. Matrisali o'yinni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish.

Egar nuqtaga ega bo'lmagan matrisali o'yinlarda $\alpha<\beta$ bo'ladi. Minimaks strategiyalarni qo'llash har bir o'ynovchiga α dan oshmaydigan yutuqni va β dan kam bo'lmagan yutqazishni beradi. Bunday hollarda o'yinchilar bitta emas, balki bir nechta strategiyalarni qo'llaydilar. Strategiyani tanlash tasodifan amalga oshiriladi.

Tasodifiy tanlash yo'li bilan aniqlangan strategiyalar **aralash strategiya** deb ataladi.

[1]Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. pp. 3-12.

$m \times n$ tartibli matrisali o'yinda, *A* o'yinchining strategiyasi $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor orqali aniqlanadi. Bunda *A* o'yinchi o'zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimollik bilan qo'llaydi, deb hisoblanadi. $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor komponentlari uchun

$$x_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

shart bajariladi.

Xuddi shuningdek, *B* o'yinchi uchun $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektor aniqlanadi:

$$y_j \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

x_i va y_j ehtimolliklari noldan farqli bo'lgan strategiyalar aktiv strategiyalar deb ataladi.

A o'yinchining aralash strategiyalarni qo'llagandagi yutug'i sifatida yutuqlarning matematik kutilishi olinadi, ya'ni

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

3-teorema. Aralash strategiyalarda har bir chekli matrisali o'yin egar nuqtaga ega.

A o'yinchi tomonidan $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ optimal strategiyaning qo'llanishi, unga *B* o'yinchining har qanday harakatida ham o'yinning bahosi *V* dan kam bo'lmagan yutuqni ta'minlash kerak. Shuning uchun quyidagi munosabat bajarilishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq V, \qquad j = \overline{1, n} \tag{1}$$

Xuddi shunga o'hshash, *B* o'ynovchi uchun $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ optimal strategiyasi, *A* o'ynovchining har qanday strategiyasida *V* dan oshmaydigan yutqazishni ta'minlashi zarur, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V, \qquad i = \overline{1, m} \tag{2}$$

munosabat bajarilishi kerak.

Eng sodda matrisali o'yinda yutuqlar matrisasi $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bo'lib, matrisa egar nuqtaga ega bo'lmasa, $X=(x_1,x_2)$ va $Y=(y_1,y_2)$ aralash strategiyalarni va V o'yinning bahosini topish uchun

$$x_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \qquad x_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};$$

$$y_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \qquad y_2=\frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};$$

$$V=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

$m\times n$ tartibli matrisa bilan berilgan quyidagi o'yinni qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisa egar nuqtaga ega emas, deb hisoblaylik va shuning uchun o'yinning yechimini $X=(x_1,x_2,...,x_m)$, $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ – aralash strategiyalar shaklida izlaymiz. A o'yinchining optimal strategiyasida (1) munosabat va B o'yinchining optimal strategiyasida (2) munosabat bajariladi. Shuning uchun, quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (A o'ynovchining) optimal strategiyasini topish masalasini qo'yish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...+a_{m1}x_m\ge V, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+...+a_{m2}x_m\ge V, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...+a_{mn}x_m\ge V, \end{cases} \qquad (3)$$

O'yinning bahosi bo'lgan V kattalik noma'lum, lekin doim $V>0$ deb hisoblash mumkin. Bunga, agar A matrisa elementlariga bir xil musbat son qo'shish sharti bilan erishish mumkin. (3) sistemani hamma cheklamalarini V ga bo'lib, quyidagi sistemani

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ ...., \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases} \tag{4}$$

hosil qilamiz.

Bunda $t_1 = x_1 / V,\ t_2 = x_2 / V, ..., t_m = x_m / V \cdot\ x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$ shartdan

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = 1 / V \tag{5}$$

tenglik kelib chiqadi.

O'yining yechimi V ning qiymatini maksimallashtirish kerak. Demak, $Z = t_1 + t_2 + ... + t_m$ funksiya minimal qiymat olishi kerak. Shunday qilib, quyidagi ChPMsi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ ...., \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases}$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, ..., t_m \geq 0, \tag{6}$$
$$Z = t_1 + t_2 + ... + t_m \to \min.$$

Bu masalani yechib, t_i qiymatlarni va $1/V$ kattalik topiladi, hamda undan foydalanib $x_i = Vt_i$ qiymatlar topiladi. B o'ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \leq V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \leq V, \\ ...., \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \leq V, \end{cases} \tag{7}$$

yoki tengsizliklarni V ga bo'lib,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \leq 1, \\ ...., \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \leq 1, \end{cases} \tag{8}$$

sistemani hosil qilamiz. $u_1, u_2, ..., u_n$ – noma'lumni shunday olish kerakki, bunda (8) shart bajarilib,

$$W = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1/V$$

funksiya maksimum qiymatga erishsin. Shunday qilib, matrisali o'yinning yechimini topish simmetrik bo'lgan ikkilangan ikkita ChPMsiga keltiriladi. Bu ikkilangan masalalardan birini yechib, ikkinchisining yechimini undan foydalanib hosil qilish mumkin.

3-misol. Quyidagi matrisa bilan berilgan o'yinning yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish: O'yinning optimal strategiyasini topish uchun quyidagi ChPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \geq 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1, \end{cases}$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0,$$
$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min.$$

B o'ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \leq 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \leq 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$u_i \geq 0, \qquad (i = \overline{1,4})$$
$$W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max.$$

Bu ikkilangan masala yechimi $U = \left(\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14}\right)$, $W_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{2}{7}$ bo'ladi. Demak, $V = \frac{7}{2}$, $Y = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$. Dastlabki masalaning yechimi $T = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$ va $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ bo'ladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. 420 p.

27-MAVZU. NOANIQLIK VA TAVAKKALCHILIK SHAROITIDA QARORLAR QABUL QILISH

Tayanch so'z va iboralar: "Tabiat"ga qarshi o'yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSh), yechim qabul qilish mezonlari.

REJA:

1. Tabiatga qarshi o'yin tushunchasi.

2. Tabiatga qarshi o'yinda optimal strategiyani tanlash mezonlari (Laplas, Bayes, Vald, Sevidj mezonlari, Gurvis mezoni).

Bu o'yinda tabiat va YQQSh qatnashadi. Tabiatda $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlar mavjud bo'lib, ularga qarshi YQQSh da m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ tadbirlar mavjud. Tabiatga qarshi o'yinni quyidagi matrisa ko'rinishida ifodalash mumkin:

A_i \ B_j	T_1	T_2	…	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Bu yerda a_{ij} tabiatning T_j holatida YQQSh A_i tadbirni amalga oshirganda uning ko'radigan foydasi yoki zararini ko'rsatadi. Agar a_{ij} foyda (yutuq) bo'lsa, bu matrisa "yutuqlar matrisasi" deyiladi. a_{ij} zarar bo'lganda eas bu matrisa "to'lovlar matrisasi" deyiladi.

Bu matrisa asosida YQQSh o'zining foydasini (zararini) maksimallashtiruvchi (minimallashtiruvchi) yo'lni (sof strategiyani) tanlaydi.

Bunday strategiyani tanlash uchun minimax, Vald, Laplas, Sevidj va Gurvis mezonlaridan foydalanish mumkin. Bu mezonlar bilan tanishamiz.

Laplas mezoni. Bu mezonda tabiatning barcha $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari teng ehtimollik bilan ro'y beradi degan fikr asos qilib olingan. Shu sababli tabiatning $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ehtimollik bilan ro'y beradi. U holda agar YQQSh A_1 yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}a_{11} + \frac{1}{n}a_{12} + ... + \frac{1}{n}a_{1n}, \text{ yoki } Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar YQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning yutug'i, $Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$ va hokazo. Agar YQQSh A_m yo'lni tanlasa, uning yutug'i, $Q_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$.

YQQSh maximum yutuq beruvchi yo'lni, ya'ni

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_j a_{1j}, \frac{1}{n}\sum_j a_{2j}, ..., \frac{1}{n}\sum_j a_{nj}\right] = \max_i \frac{1}{n}\sum_j a_{ij},$$

yo'lni tanlaydi.

1-misol. Quyidagi tabiatga qarshi uyinning optimal yechimini toping.

A_i \ B_j	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + ... + a_{in}p_n$
A_1	7	14	14	24	$0,25\cdot(7+14+14+24)=14,75$
A_2	20	16	14	22	$0,25\cdot(20+16+14+22)=18$
A_3	9	8	10	23	$0,25\cdot(9+8+10+23)=12,5$
A_4	18	26	18	14	$0,25\cdot(18+26+18+14)=19$
p_j	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\max_i \frac{1}{4}(a_{i1}+a_{i2}+...+a_{in})=19$

Yechish: Laplas mezoniga ko'ra YQQSh A_4 strategiyani tanlasa, uning yutug'i eng katta, ya'ni 19 ga teng bo'ladi.

Bayes mezoni. Bu mezonda tabiatning har bir T_j holati ma'lum bir q_j ehtimollik bilan ro'y berishi aniqlangan bo'ladi. Bu holda YQQSh o'z yutug'ini maksimal qiluvchi yo'lni, ya'ni $\max_i \sum_j a_{ij} q_i$ beruvchi yo'lni tanlaydi.

2-misol: Quyidagi jadval ko'rinishida berilgan o'yinning yechimini Bayes mezoni yordamida toping.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n$
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
q_j	0,1	0,2	0,5	0,2	$\max_i \left(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n\right) = 6,2$

Yechish: Bu misolda optimal strategiya A_3. Bu yo'lni tanlaganda YQQSh 6,2 yutuqqa ega bo'ladi.

Vald mezoni. Bu mezon o'yinlar nazariyasidagi maximin-minimax usuliga o'xshaydi. Agar a_{ij} yutuq bo'lsa, u holda YQQSh $\max_i (\min_j a_{ij})$ shartni ta'minlovchi yo'lni tanlaydi.

a_{ij} zarar bo'lsa, u $\min_i (\max_j a_{ij})$ ahartni ta'minlovchi A_i yo'lni tanlaydi.

3-misol. (a_{ij} zarar). Quyidagi jadvalda berilgan o'yinni Vald mezoni bilan yeching.

Yechish:

$$\min_j (\max_i a_{ij}) = \min(24,\ 22,\ 23,\ 26\ ) = 22.$$

Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutug'i 22 bo'ladi.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max_j \left(a_{ij}\right)$
A_1	7	11	14	24	24

A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	26	18	14	26
					$\min_i \left\{ \max_j (a_{ij}) \right\} = 22$

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimax prinsipiga asoslangan. Faqat bunda (a_{ij}) – to'lovlar yoki yutug'lar matrisasi o'rniga tavakkalchilik matrisasi deb ataluvchi (r_{ij}) matrisa ishlatiladi. Bu matrisa elementlari quyidagicha topiladi:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \ \ agar \ \ a_{ij} - \ yutug' \ bo'lsa, \tag{2}$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij} = a_{ij} - \alpha_i, \ \ agar \ \ a_{ij} - \ yutkazuv \ bo'lsa. \tag{3}$$

Bu yerda $\beta_i - a_{ij}$ tabiatning T_j holatidagi YQQShning maksimal yutug'i, (minimal yutkazuvi).

r_{ij} YQQSh "tabiat"ning T_j holatida to'la chora ko'rmagani oqibatida tavakkalchilikdan ko'rgan zarari yoki uning "afsuslanishi" sonini bildiradi.

4-misol. Quyidagi o'yinni Sevidj mezoni bilan yeching.

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max_j (a_{ij})$
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$\min_i \left\{ \max_j (a_{ij}) \right\} = 100000$

Bu o'yinda YQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu yerda tabiatning T_1 holati ham, T_2 holati ham bo'lishi mumkin. Tabiatning aniq holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matrisasini tuzamiz:

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max_j (r_{ij})$
A_1	10000	0	10000

A_2	0	99100	99100
			$\min_i\{\max_j (r_{ij})\}=10000$

Demak, optimal strategiya A_1 ekan.

Gurvis mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan a_{ij} miqdor daromadni bildirganda optimal strategiya sifatida quyidagi shartni qanoatlantiruvchi strategiya tanlanadi:

$$\max_i \left[\alpha \max_j a_{ij} + (1-\alpha) \min_j a_{ij}\right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

a_{ij} – yutqazuvni bildirganda esa,

$$\min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij}\right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

natijani ta'minlovchi A strategiyani tanlaydi.

Bu yerda α – yechim qabul qilish jarayonini sub'yektiv baholovchi parametr. Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, vaziyat og'ir va uni to'g'irlash uchun choralar ko'rish kerakligi talab qilinadi. $\alpha = 0$ da vaziyat yaxshi (optimal) hech qanday chora ko'rmasa ham bo'ladi deb faraz qilinadi. α ni [0;1] oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab belgilanadi.

5-misol. Tabiat bilan bo'lgan o'yin quyidagi to'lovlar matrisasi bilan berilgan bo'lsin. $\alpha = 0,4$

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Bu o'yinga Gurvis mezonini qo'llab optimal strategiyani topamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo'yicha tekshiramiz:

$$\gamma = \min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	$\min_j (a_{ij})$	$\max_j (a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51,8
A_2	24	75	23	23	75	54,2
A_3	70	16	20	16	70	48,4
A_4	16	27	13	13	27	21,4
						$\min_i \gamma = 21{,}4$

Demak, a_{ij} – yutqazuv bo'lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan. Agar a_{ij}– daromad bo'lsa, u holda yechim quyidagi ko'rinishda topiladi:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	$\min_j (a_{ij})$	$\max_j (a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	42,2
A_2	24	75	23	23	75	43,2
A_3	70	16	20	16	70	37,6
A_4	16	27	13	13	27	18,6
Optimal strategiya A_2						$\min_i \gamma = 43{,}2$

6-misol. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo'lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo'lsin. Endi savdo korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda uning ko'radigan zarari minimal bo'ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo'l), 30% (A_2 yo'l), 40% (A_3 yo'l), 50% (A_4 yo'l) tushirishga mo'ljallaydi. Bu yo'llarni YQQShning strategiyalari deb qaraymiz. "Tabiat"ning ikkita yo'li bor:

1) Talabning kam egiluvchan bo'lishligi (T_1 yo'l);

2) talabning ko’p egiluvchanligi (T_2 yo’l).

Ana shularni nazarga olib quyidagi jadvallarni tuzamiz:

YQQSh strategiya	**Narxining tushishi (%)**	**Eski bahosi**	**Yangi bahosi**	**Sotiladigan tovar miqdori**	**Ko’riladigan zarar**
A_1	20	20	16	100	4400
A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	4400=500·12-16·100 3360=500·12-12·220			3900=500·12-14·150 3700=500·12-10·230	

Bu yerda bir birlik mahsulotni savdo korxonasiga keltirish uchun sarf qilinadigan harajat 12 birlik, deb qabul qilingan.

Xuddi shuningdek, jadval talab egiluvchanligi kuchli bo’lgan hol uchun tuziladi.

YQQSh stratgiya	**Narxining tushishi (%)**	**Eski bahosi**	**Yangi bahosi**	**Sotiladigan tovar miqdori**	**Ko’riladigan zarar**
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I va II jadvaldan foydalanib to’lovlar matrisasini tuzamiz va yuqoridagi usullarni qo’llab yechamiz:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$\max\limits_i (a_{ij})$
A_1	4400	3600	4400
A_2	3900	1100	3900
A_3	3360	1200	3360

A_4	3700	1500	3700
			$\min_i \max_j a_{ij} = 3360$

Demak, savdo korxonasi mahsulot narxini 40% ga tushirganda zarar minimal bo'ladi, ya'ni 3360 ga teng bo'ladi.

Masalani Laplas mezoniga asosan yechamiz.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n$
A_1	4400	3600	4000
A_2	3900	1100	2500
A_3	3360	1200	2280
A_4	3700	1500	2600
Q	0,5	0,5	$\min_i \left(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n\right) = 2280$

Bu mezon bo'yicha ham narx 40% tushirilsa zarar 2280 bo'ladi.

Sevidj mezonini qo'llash uchun (r_{ij}) matrisa tuzamiz va optimal strategiyani topamiz.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$\max_j (a_{ij})$
A_1	1100	2500	2500
A_2	600	0	600
A_3	0	100	100
A_4	400	400	400
			$\min_i \max_j r_{ij} = 100$

Bu mezonga ko'ra ham narx 40% ga tushirilishi ma'qul.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. 420 p.

AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

10-MAVZU. IQTISODIY MASALALARNING CHIZIQLI MODELLARINI TUZISH

1-masala (Resurslardan optimal foydalanish masalasi). Korxonada *A*, *B* va *C* mahsulotlarni tayyorlash uchun tokarlik, frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalaniladi. Har bir mahsulotning bir birligini tayyorlash uchun sarf qilinadigan vaqt, har bir uskunaning umumiy ish vaqti fondi, hamda har bir turdagi birlik mahsulotni sotishdan olinadigan daromad quyidagi 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Uskunalar	**Har bir turdagi mahsulot birligini i/ch. uchun sarflanadigan vaqt (stanok-soat)**			**Uskunaning umumiy ish vaqti fondi (soat)**
	A	*B*	*C*	
Tokarlik	1	8	6	280
Frezerlik	2	4	5	120
Payvandlovchi	7	4	5	240
Silliqlovchi	4	6	7	360
Daromad (shartli birlik)	10	14	12	

Korxona mahsulotlarni sotishdan oladigan daromadi eng ko'p bo'lishi uchun qaysi turdagi mahsulotdan qancha ishlab chiqarishi kerakligini aniqlash talab qilinadi. Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Aytaylik, korxona x_1 dona *A*, x_2 dona *B* va x_3 dona *C* mahsulot tayyorlashni rejalashtirgan bo'lsin, u holda shuncha miqdordagi mahsulotni tayyorlash uchun $1 \cdot x_1 + 8x_2 + 6x_3$ stanok-soat tokarlik uskunasining vaqti sarflanadi. Tokarlik uskunasidan foydalanish vaqti jami 280 soatdan oshmasligi kerak, ya'ni

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$

tengsizlik bajarilishi lozim.

Xuddi shunga o’xshash mulohazalar bilan frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalanish vaqtiga nisbatan quyidagi tengsizliklar hosil bo’ladi.

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

Tayyorlanadigan mahsulotlar soni manfiy bo’la olmaydi, shu sababli

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Shuningdek, agar x_1 birlik *A*, x_2 birlik *B* va x_3 birlik *C* mahsulot tayyorlansa, ularni sotishdan korxona oladigan jami daromad $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ shartli birlikni tashkil etadi. Shunday qilib, quyidagi matematik masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360, \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvchi shunday

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

noma’lumlarni topish kerakki, ular

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3,$$

funksiyaga maksimal qiymat bersin. Yuqorida keltirilgan munosabatlar masalaning matematik modelini ifodalaydi.

2-masala (Optimal ratsion tuzish masalasi). Chorva mollarini to’yimli oziqlantirish uchun har bir chorva moli bir kunda *A* oziqa moddasidan kamida 60 birlik, *B* oziqadan kamida 50 birlik va *C* oziqa moddasidan kamida 12 birlik iste’mol qilishi kerak. Ko’rsatilgan oziqa moddalar 3 xil turdagi yem mahsulotlari tarkibida mavjud. Har 1 kg yem mahsuloti tarkibidagi oziqa moddalarning miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

2-jadval

Oziqa moddalar	**1kg yem mahsuloti tarkibidagi oziqa moddalar miqdori**		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Agar 1 kg I, II va III turdagi yem mahsulotlarining narxi mos ravishda 9, 12 va 10 shartli birlikdan iborat bo'lsa, narxi eng arzon bo'lgan hamda zarur to'yimlilikka ega bo'lgan kunlik ratsion qanday bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Kunlik ratsion tarkibidagi I xil yem miqdori x_1, II xiliniki x_2 va III xil yem miqdori x_3 bo'lsin. U holda ratsionning zarur to'yimlilikka ega bo'lishi talabi quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \end{cases}$$

O'z ma'nosiga ko'ra x_1, x_2, x_3 noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Kunlik ratsionning umumiy narxi esa

$$F = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3$$

funksiya bilan ifodalanadi. Shunday qilib, qaralayotgan masalaning matematik modeli quyidagi munosabatlardan iboratdir:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$F = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \min.$$

3-masala (Optimal bichish haqida masala). O'lchami 6x13 m^2 bo'lgan tunuka materiallarini shunday qirqish kerakki, unda ikki xildagi qirqimlar, ya'ni har biri 4x5 m^2 o'lchamli 400 ta, har biri 2x3 m^2 o'lchamli 800 ta qirqimlar hosil bo’lsin. Har bir tunukani qirqish usullari va bunda olinadigan turli o’lchamdagi qirqimlar soni quyidagi jadvalda berilgan.

3-jadval

Qirqimlar o’lchami (m^2)	**Tunukani qirqish usullari**			
	I	II	III	IV
4x5	3	2	1	0
2x3	1	6	9	13

Umumiy soni ko’rsatilgan miqdordan kam bo’lmagan va eng kam chiqindiga ega bo’lgan qirqimlar tayyorlash rejasini topish masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Masalaning noma’lumlarini belgilaymiz: x_1 – I usulda, x_2 – II usulda, x_3 – III usulda va x_4 – IV usulda qirqiladigan tunukalar soni bo’lsin. Unda,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

bo’lishi kerakligi ravshandir.

Agar bitta tunuka donasi I usulda qirqilsa, undan

$$6x13m^2\text{-}(3(4x5)+2x3)m^2=78m^2\text{-}66m^2=12m^2$$

chiqindi hosil bo’ladi. Shunga o’xshash, II usulda qirqilsa,

$$78m^2\text{-}(2(4x5)+6(2x3))m^2=78m^2\text{-}76m^2=2m^2$$

chiqindi, III usulda $78m^2\text{-}74m^2=4m^2$ va IV usulda chiqindi hosil bo’lmaydi. Tunukalarni qirqishda hosil bo’ladigan jami chiqindilar miqdori F=12x_1+2x_2+4x_3+0x_4 yig’indidan iborat bo’lib, maqsadimiz uni minimallashtirishdir. Masalaning matematik modeli quyidagicha

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 800, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 400, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$

$$F = 12x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min .$$

4-masala (Transport masalasi). Deylik, A_1, A_2, A_3 xo’jaliklar B_1, B_2, B_3, B_4 punktlarni har kuni mos ravishda 40, 50, 30 sentner sut bilan ta’minlashi kerak bo’lsin. Iste’molchi punktlarining mahsulotga bo’lgan bir kunlik talabi va 1 sentner sutni iste’molchilarga yetkazib berish uchun sarflanadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda berilgan.

4-jadval

Xo’jaliklar	**1s. sutni tashish xarajatlari**				**Tashish uchun mo’ljallan-gan sut hajmi (s)**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2,5	3,5	4	40
A_2	2	4,5	5	1	50
A_3	6	3,8	4,2	2,8	30
Iste’molchilar talabi (s)	20	40	30	30	120

Xo’jaliklardan iste’molchilarga sut tashishning shunday rejasini topingki, bunda xo’jaliklardan barcha sut tashib ketilsin, iste’molchilarning talabi to’la qondirilsin, hamda jami tashish xarajatlari eng kam bo’lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Bu masalada x_{ij} – orqali *i*-xo’jalikdan *j*-iste’molchi punktga tashish rejalashtirilgan sut miqdorini belgilaymiz. Xo’jaliklardagi jami sut hajmi va iste’molchilarga zarur bo’lgan jami sut miqdori bir-biriga teng bo’lib, 120 sentnerni tashkil etadi. Demak, xo’jaliklardagi jami sut miqdori butunlay tashib ketilishi va iste’molchilarning talablari to’laligicha qondirilishi kerak bo’ladi. Masalaning ma’nosiga ko’ra, x_{ij} noma’lumlar manfiy bo’lmasligi kerak, ya’ni

$$x_{ij} \geq 0, \ \ i = 1, 2, 3; \ j = 1, 2, 3, 4 .$$

Sutni tashishdagi jami transport xarajatlari

$$\begin{gathered} 3x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4,5x_{22} + 5x_{23} + \\ + x_{24} + 6x_{31} + +3,8x_{32} + 4,2x_{33} + 2,8x_{34} \end{gathered}$$

yig’indi bilan ifodalanadi. Shunday qilib, ushbu masalaning matematik modeli quyidagi munosabatlardan iboratdir:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30, \end{cases}$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, ..., x_{34} \geq 0,$$

$$\text{F} = 3x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4,5x_{22} +$$
$$+5x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3,8x_{32} + 4,2x_{33} + 2,8x_{34} \to \min.$$

Bu modeldagi munosabat xo'jaliklardagi jami sut miqdori butunlay tashib ketilishni va munosabat esa iste'molchilarning talablari to'la qondirilishini ifodalaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Qandolatchilik fabrikasi 3 turdagi *A*, *B* va *C* karamellarni ishlab chiqarish uchun 3 turdagi xom ashyodan, ya'ni shakar, meva qiyomi va shinnidan foydalanadi. Har bir turdagi karameldan 1 t ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) quyidagi jadvalda keltirilgan. Shuningdek, jadvalda fabrika ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori va har bir turdagi karamelning 1 tonnasini sotishdan olinadigan daromad ham keltirilgan.

5-jadval

Xom ashyo turi	**1 t. karamel uchun sarflanadigan xom ashyo normasi (t)**			**Xom ashyoning umumiy miqdori (t)**
	A	*B*	*C*	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Shinni	0,4	0,4	0,3	600
Meva qiyomi	-	0,1	0,1	120
1t. mahsulotni sotishdan keladigan daromad (sh. p.b.)*	108	112	126	

(*) – shartli pul birligi

Fabrikaning oladigan daromadini maksimallashtiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

2. Sutni qayta ishlash zavodi shisha idishlarda qadoqlangan sut, qatiq va qaymoq ishlab chiqaradi. 1 tonnadan sut, qatiq, qaymoq ishlab chiqarish uchun mos ravishda 1010 , 1010 va 9450 kg sut zarur bo'ladi. Bunda 1 tonna sut va qatiq tayyorlashda mos ravishda 0,18 va 0,19 mashina-soat ish vaqti sarflanadi. 1 tonna qaymoq tayyorlash uchun maxsus avtomatlar 3,25 soat ishlaydi. Zavod sut mahsulotlarini ishlab chiqarish uchun hammasi bo'lib 136000 kg sut ishlatishi mumkin. Asosiy ishlab chiqarish uskunalari 21,4 mashina-soat, qaymoq quyish avtomatlari esa 16,25 soat ishlashi mumkin. 1 tonna sut, qatiq va qaymoqni sotishdan olinadigan daromad mos ravishda 30, 22 va 136 shartli pul birligiga teng. Zavod bir kunda 100 tonnadan kam bo'lmagan miqdorda shisha idishga qadoqlangan sut ishlab chiqarishi kerak. Mahsulotning boshqa turlari uchun chegaralar yo'q. Zavod har kuni mahsulotlarni qanday miqdorda ishlab chiqarsa, uni sotishdan keladigan daromad maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

3. Tikuv fabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 artikuldagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini tikish uchun sarflanadigan turli artikuldagi gazlamalar normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir artikuldagi gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

6-jadval

Gazlama artikuli	**1 ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)**				**Gazlamalarning umumiy miqdori (m)**
	I	II	III	IV	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Mahsulotlar bahosi (sh.p.b.)	9	6	4	7	

4. Korxona 4 xildagi mahsulot ishlab chiqarishda: tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlaridan foydalanadi. Har bir turdagi jihozning mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning umumiy ish vaqti fondi, hamda turli mahsulot birliklarini sotishdan olinadigan daromad ham ushbu jadvalda berilgan.

7-jadval

Jihoz turi	**Har bir turdagi bir birlik mahsulot i/ch.ga sarflaydigan vaqt normasi**				**Umumiy ish vaqti fondi (stanok-soat)**
	I	II	III	IV	
Tokarlik	2	1	1	3	300
Frezerlik	1	-	2	1	70
Silliqlash	1	2	1	-	340
Bir birlik mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	8	3	2	4	

Eng ko'p daromad keltiradigan ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

5. Korxona 3 turdagi mahsulotni ishlab chiqarmoqda. Ishlab chiqarishning bir oylik dasturiga asosan korxona kamida 2000 ta 1-turdagi, 1800 ta 2-turdagi va 1500 ta 3-turdagi mahsulot ishlab chiqarish kerar. Mahsulot ishlab chiqarish uchun bir oylik xarajati 61000 kg dan oshmaydigan xom-ashyo ishlatiladi. 1-turdagi mahsulotning bittasini ishlab chiqarish uchun 8 kg xom-ashyo, 2 va 3-turdagi mahsulotlarning bittasini ishlab chiqarish uchun esa mos ravishda 10 kg va 11 kg xom-ashyo sarf qilinadi. 1-turdagi mahsulotning ulgurji bahosi 70 pul birligini, 2 va 3-mahsulotlarniki esa mos ravishda 100 va 70 pul birligini tashkil qiladi. Korxonaga maksimal daromad keltiradigan mahsulot ishlab chiqarish rejasini topilsh masalasining matematik modeli tuzilsin.

6. Mexanika zavodi 2 turdagi detalni ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va payvandlash jihozlarini ishlatadi. Shu borada har bir detalni 2 xil texnologik usul bilan ishlab chiqarish mumkin. Har bir jihozning samarali vaqt fondi berilgan. Har bir texnologik usul bilan turli moslamada detallar birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt normasi va detallarni sotishdan olinadigan foydalar quyidagi jadvalda keltirilgan. Korxonaga maksimal foydani ta'minlovchi jihozlar yuklanishining optimal rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

8-jadval

Jihoz turi	Detallar				Samarali vaqt fondi (stanok-soat)
	1		2		
	Texnologik usullar				
	1	2	1	2	
Tokarlik	3	2	3	0	20
Frezerlik	2	2	1	2	37
Payvandlovchi	0	1	1	4	30
Foyda (sh.p.b.)	11	6	9	6	

7. Korxona omborida uzunligi 8,1 metr bo'lgan temir quymalar mavjud. Bu quymalardan ancha kichik bo'lgan 100 ta quyma mahsulotlar komplektini tayyorlash zarur bo'lsin. Har bir komplekt tarkibiga 2 ta 3 metrli, 1 ta 2 metrli va 1 ta 1,5 metrli quyma mahsulotlar kiradi. Berilgan materiallardan shunday foydalanish kerakki, quyma mahsulotlar komplekti talab qilingan miqdorda minimal chiqim bilan tayyorlansin. Turli xil usullardagi kesish natijasida bir quymadan olinadigan xomaki mahsulotlar soni, hamda chiqindilar miqdori jadvalda keltirilgan.

9-jadval

Mahsulotlar o'lchami (m)	Kesish usullari								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 m	2	2	1	1	-	-	-	-	-
2 m	1	-	2	1	4	3	2	1	-
1,5 m	-	1	-	2	-	1	2	4	5
Chiqindilar (m)	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

8. Xo'jalik karam, kartoshka va ko'p yillik o'tlar ekishga moslashgan. Buning uchun xo'jalik ixtiyorida 850 ga haydaladigan yer maydoni, 1500 tonna organik o'g'itlar, 50000 kishi-kun mehnat resurslari mavjud. 1 ga yerga ekiladigan mahsulotlar uchun sarf qilinadigan organik o'g'it va mehnat resurslari xarajati quyidagi jadvalda keltirilgan. Xo'jalik karam, kartoshka va ko'p yillik o'tlardan qancha hajmda eksa, pul ifodasidagi jami mahsulot miqdori maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

10-jadval

Ko'rsatkichlar	**Ekin turi**		
	Karam	**Kartoshka**	**Ko'p yillik o't**
Mehnat sarfi, (kishi-kun)	50	30	10
Organik o'g'itlar sarfi (t)	20	15	10
1 ga yerdan olinadigan mahsulot bahosi (sh.p.b.)	1000	800	200

9. Quyidagi jadvalda berilgan ma'lumotlarga ko'ra hayvonlar ovqatlanishining optimal sutkalik ratsionini topish masalasining matematik modelini tuzing.

11-jadval

Ovqatbop mahsulotlar	**Bir birlik yemish turidagi ovqatbop mahsulotlar miqdori**		**Iste'molning minimal sutkalik normasi (sh.b.)**
Xashak	1	0,5	5
Hazm qilinadigan protein	80	200	560
Kaltsiy	1	8	20
Bir birlik yemish narxi (sh.p.b.)	3	5	

10. Ratsion P_1 va P_2 mahsulotlardan tayyorlanadi. Ularning har biriga A, B va C vitaminlar kiradi. Bir sutkalik minimal iste'mol A vitamin uchun 100 birlik, B dan 80 birlik, C dan esa 160 birlikni tashkil qiladi. Bir birlik P_1 mahsulotning bahosi 2 shartli pul birligiga, P_2 niki esa 3 shartli pul birligiga teng. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori keltirilgan. Eng arzon tushadigan ratsion variantini topish masalasining matematik modelini tuzing.

12-jadval

Vitaminlar	Bir birlik mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori	
	P_1	P_2
A	0,1	0,5
B	0,25	0,1
C	0,2	0,4

11. Savdo tashkiloti 3 turdagi tovarlarni sotish uchun quyidagi resurslardan foydalanmoqda: vaqt va sotuv muassasalarining maydoni. Har bir turdagi mahsulotning bir partiyasini sotish uchun resurslar xarajati jadvalda berilgan. 1-mahsulot turining 1-partiyasini ayirboshlashdan tushadigan daromad 50000 so'm, 2-sidan 80000 so'm va 3-sidan 60000 so'm. Savdo tashkilotiga maksimal foydani ta'minlovchi optimal tovar ayirboshlash rejasini topishning matematik modelini tuzing.

13-jadval

Resurslar	Tovarlar turlari			Resurslar hajmi
	1	2	3	
Vaqt (soat)	0,5	0,7	0,6	970
Maydon (m^2)	0,1	0,3	0,2	90

12. Aholining talabini hisobga olgan holda poyafzal do'koni reja davrida charm poyafzallardan kamida 140000 (sh.p.b.) va boshqa poyafzallardan kamida 40000 (sh.p.b.) sotishi kerak. Ayirboshlashdan tushadigan daromad va xarajatlarni bilgan holda, do'kon tovaroboroti kamida 200000 (sh.p.b.) va uning daromadi 2500 dan kam bo'lmaslik shartida xarajatlarni minimallashtiruvchi sotuv rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

14-jadval

Ko'rsatkichlar	Poyafzal	
	Charm poyafzal	**Boshqa poyafzallar**
Daromad (%)	1	2
Xarajatlar (%)	6	5

13. Kichik korhonada uch xil P_1, P_2 va P_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun to'rt xil S_1, S_2, S_3 va S_4 xom-ashyolar ishlatiladi. Xom-ashyolar zahirasi, har bir mahsulotga sarf qilinadigan xom-ashyolarning texnologik normalari va bitta mahsulotning bahosi jadvalda keltirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotning pul ifodasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

15-jadval

Xom-ashyo turlari	**Xom-ashyo zahirasi (kg)**	**Bir mahsulotga ketgan xom-ashyolar normasi (kg)**		
		P_1	P_2	P_3
S_1	1500	4	2	1
S_2	1700	6	0	2
S_3	1000	0	2	4
S_4	2000	8	7	0
Bitta mahsulotning bahosi (sh.p.b.)		100	150	200

14. 30-40 kg og'irlikdagi chorva mollarini oziqlantirib o'rtacha 300-400 kg og'irlikni ta'minlash uchun kunlik ratsion tarkibida quyidagi miqdorda oziqlantiruvchi moddalar bo'lishi kerak: yem-xashak birligi – 1,6 dan kam emas, hazm qilinadigan protein – 200 g dan kam emas, karotin – 10 mg dan kam emas. Oziqlantirishda arpadan, dukkakli mahsulotlardan va somonli undan foydalaniladi. 1 kg yemdagi oziq moddalarning tarkibi va 1 kg yemning bahosi jadvalda keltirilgan. Kunlik ratsionning optimal rejasini tuzing.

16-jadval

Oziqlantiruvchi moddalarning nomlari	**1 kg yem tarkibidagi oziq moddalarning miqdori**		
	Arpa	**Dukkakli mahsulotlar**	**Somonli un**
Yem-xashak birligi (sh.b)	1,2	1,4	0,8
Hazm qilinadigan protein (g)	80	280	240
Karotin (mg)	5	5	100
1 kg yemning bahosi (sh.p.b.)	3	4	5

15. Yuzasi mos ravishda 0,8 va 0,6 mln. ga bo'lgan ikkita tuproq zonasi bor. Zonalar bo'yicha ekinlarning hosildorligi va 1s donning bahosi jadvalda keltirilgan. Kuzgi ekinlarni 20 mln.s. dan kam bo'lmagan va bahorgi ekinlarni 6 mln.s. dan kam bo'lmagan miqdorda ishlab chiqarish talab qilinadi. Kuzgi va bahorgi donli ekinlar maydoni qanday bo'lganda pul ifodasidagi ishlab chiqarilgan jami mahsulotlar miqdori maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

17-jadval

Mahsulotlar turi	**Hosildorlik (s/ga)**		**1 s mahsulot bahosi**
	1-zona	**2-zona**	
Kuzgi ekinlar	20	25	8
Bahorgi ekinlar	25	20	7

16. Jadvalda berilgan ma'lumotlarga asoslanib mebel ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, bunda mehnat rezervlaridan to'liq foydalangan holda ishlab chiqarilgan jami mahsulotning pul qiymati maksimallashtirilsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

18-jadval

Ishlab chiqarish faktorlari	**Faner (m^3)**	**Taxta (m^3)**	**Mehnat (kishi/smena)**	**Narxi (ming so'm)**
1 ta servantga	0,2	0,1	2	150
1 ta shifonerga	0,1	0,2	1	120
I/ch faktorlari zahirasi	60	40	500	

17. Fermer xo'jalikka chorvachilikni rivojlantirish uchun 324 mln. so'm ajratilgan. Shundan 180 mln. so'mi ish haqiga, 144 mln. so'mi moddiy xarajatlar (texnik xizmat ko'rsatish) ga taqsimlangan. Jadvalda 1 s. sut va go'sht uchun sarflanadigan resurslar va sotuv narxlari ko'rsatilgan. Xo'jalik kamida 6000 s. sut va 1000 s. go'sht yetishtirishi kerak. Chorvachilik mahsulotlarini ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, unda xo'jalikning chorvachilikdan oladigan daromadi maksimal bo'lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

19-jadval

Mahsulotlar	Mehnat sarfi (ming so'm)	Moddiy xarajatlar	Sotuv narxi (ming so'm)
Sut	12	8	25
Go'sht	90	80	200

18. Qog'oz kombinati xilma-xil turdagi qog'ozlarni ishlab chiqarish rejasini bajardi. Shuningdek, xom-ashyodan iqtisod qilib qoldi. 50 t sellyuloza, 80 t yog'och massasi va 2 t kaolin foydalanilmay qoldi. Jadvalda 1 t har xil turdagi qog'ozdan ishlab chiqarish uchun sarflanadigan sellyuloza, yog'och massasi, kaolin normasi berilgan. 1 t bosmaxona qog'ozidan 5 birlik, 1 t muqova qog'ozidan 6 birlik, yozuv qog'ozidan 8 birlik foyda ko'riladi. Iqtisod qilingan xom-ashyolardan foydalanib qanday qog'oz turini ishlab chiqarilsa, korxona foydasi ko'proq bo'ladi? Bunda xom ashyoning qaysi turi va qancha miqdori ortib qoladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

20-jadval

Mahsulotlar	Xom-ashyolar		
	Sellyuloza	**Yog'och massasi**	**Kaolin**
Bosmaxona qog'ozi	206	829	20
Muqova qog'ozi	424	627	10
Yozuv qog'ozi	510	518	12

19. Maishiy xizmat uyidagi duradgorlik ustaxonasida savdo tarmoqlari uchun stol va tumbochkalar ishlab chiqarish yo'lga qo'yilgan. Ularni tayyorlash uchun ikki turdagi 72 m^3 va 56 m^3 yog'och bor. Jadvalda bir dona mahsulot uchun ketadigan yog'ochlar miqdori ko'rsatilgan. Bitta stolni ishlab chiqarishdan ustaxona 44 birlik sof foyda oladi, bitta tumbochkadan 28 birlik foyda oladi. Ustaxona o'zida bor materialdan qancha stol va tumbochka ishlab chiqarsa, ko'proq foyda olish masalasining matematik modelini tuzing.

21-jadval

Mahsulot	Xom-ashyolar	
	1-turdagi yog'och	**2-turdagi yog'och**
Stol	0,18	0,08
Tumbochka	0,09	0,28

20. Aviakompaniya ikki xildagi samolyotda ma'lum bir yo'nalishda yo'lovchilarni tashishni amalga oshiradi. Birinchi xil samolyot ekipaji 3 kishidan iborat bo'lib, bir reysda 45 ta yo'lovchini tashiydi, ikkinchi xil samolyot ekipaji 6 kishidan iborat bo'lib, bir reysda 80 ta yo'lovchini tashiydi. Birinchi xil samolyotni eksplutatsiya qilishga 600 (sh.p.b.), ikkinchi xil samolyotni eksplutatsiya qilishga 900 (sh.p.b.) sarflanadi. Rejadagi davr ichida ushbu yo'nalishda kamida 5000 ta yo'lovchini tashish kerakligi ma'lum. Agar samolyot ekipajini shakllantirishda 360 kishi-reysdan ortiq foydalanishi mumkin bo'lmasa, u holda ikkala xil samolyotlardagi reyslar miqdori qancha bo'lganda samolyotlarni eksplutatsiya qilish xarajatlari minimal miqdorda bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

21. Xususiy korxona ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Bir kunlik reja bo'yicha birinchi turdagi mahsulotdan (№ 1) kamida 60 dona, ikkinchi turdagi mahsulotdan (№ 2) kamida 80 ta ishlab chiqarilishi kerak. Bir kunlik resurslar esa quyidagicha: ishlab chiqarish uskunalari 600 stanok-soat, xom ashyo 300 kg, 420 kishi-soat mehnat resursi va 450 kvt/soat elektroenergiya. Bir dona mahsulotga sarf qilinadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda berilgan. Birinchi mahsulotning narxi 5000 so'm, ikkinchi turdagi mahsulotning narxi 6000 so'm. Ishlab chiqariladigan mahsulotlardan maksimal foyda ko'rish uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish kerak? Masalaning matematik modelini tuzing.

22-jadval

Mahsulotlar	I/ch uskunasi (st.-soat)	Xom-ashyo (kg)	Mehnat (kishi-soat)	Elektroenergiya (kvt/s)
№ 1	4	2	2	3
№ 2	3	1	3	2

22. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda *A* vitamindan 6 birlik, *B* vitamindan 12 birlik, *C* vitamindan 4 birlik bo'lishi kerak. Mollarni boqish uchun ikki turdagi yemdan foydalaniladi. Jadvalda yem tarkibidagi foydali oziqa moddalari ulushi, oziqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoj va yemlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo'lgan kundalik ratsionni aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

23-jadval

Oziqa moddalari	**Bir birlik yemdagi oziqa moddalari miqdori**		**Mollarning oziqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoji**
	I	II	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
Bir birlik yemning narxi (so'm)	5000	6000	

23. Benzinning 2 turidan *A* va *B* aralashmalar tayyorlanishi mumkin. *A* aralashma 60% 1-navli benzindan, 40% 2-nav benzindan tashkil topadi. *B* aralashma 80% 1-nav benzindan, 20% 2-nav benzindan tashkil topadi. 1 kg *A* aralashmasining narxi 10 birlik, 1 kg *B* aralashmasining narxi 12 birlik: 1-nav benzindan 50 t, 2-nav benzindan 30 t mavjud bo'lgan holda eng qimmat narxli aralashma hosil qilish masalasining matematik modelini tuzing.

24. Donli ekinlar uchun 900 ga yer maydoni ajratilgan. Mavjud zahiralar 1400 s. mineral o'g'it va 52000 kishi-kun mehnatdan iborat. Masalaga oid ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan.

24-jadval

Ko'rsatkichlar	**Ekinlar**		
	Kuzgi bug'doy	**Tariq**	**Arpa**
Hosildorlik (s/ga)	24	19	13
Mehnat sarfi (kishi-kun)	3	4	5
O'g'itlar sarfi (s/ga)	1,7	1,3	2

Tannarx (sh.p.b.)	2	3	14
Sotish narhi (sh.p.b.)	4,5	6	20

Eng ko'p foyda keltiradigan ekin ekish rejasini aniqlash masalaning matematik modelini tuzing.

25. Savdo tashkiloti 4 ta guruhdagi tovarlarni sotishda maksimal foydani ta'minlovchi tovarayirboshlash rejasi va hajmini aniqlashi kerak. Tovarlarni sotishda 3 xil resurslar: ish vaqti fondi – ko'pi bilan 1100 kishi-soat, savdo zallari hajmi – 900 kv.m., muomala xarajatlari – ko'pi bilan 1450 sh.p.b.da ishlatilishi mumkin. Guruhdagi bir birlik tovarlarni sotish uchun resurslarning sarflanish normasi quyidagicha:

25-jadval

Resurslar	**Guruhdagi bir-birlik tovarlarni sotish uchun sarf-xarajatlar**			
	1	2	3	4
Ish vaqti fondi (kishi-soat)	3	5	4	3
Savdo zallari (kv.m.)	4	3	2	4
Muomala xarajatlari (sh.p.b.)	2	2	5	2
Foyda (sh.p.b.)	7	6	5	8

Masalaning matematik modelini tuzing.

11-MAVZU. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI YECHIMLARINING XOSSALARI

1. Korxona 4 xildagi mahsulot ishlab chiqarishda: tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlaridan foydalanadi. Har bir turdagi jihozning mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning umumiy ish vaqti fondi, hamda turli mahsulot birliklarini sotishdan olinadigan daromad ham ushbu jadvalda berilgan.

Jihoz turi	**Har bir turdagi bir birlik mahsulot i/ch.ga sarflaydigan vaqt normasi**				**Umumiy ish vaqti fondi (stanok-soat)**
	I	II	III	IV	
Tokarlik	2	1	1	3	300
Frezerlik	1	-	2	1	70
Silliqlash	1	2	1	-	340
Bir birlik mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	8	3	2	4	

Eng ko'p daromad keltiradigan ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

2. Quyidagi jadvalda berilgan ma'lumotlarga ko'ra hayvonlar ovqatlanishining optimal sutkalik ratsionini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ovqatbop mahsulotlar	**Bir birlik yemish turidagi ovqatbop mahsulotlar miqdori**		**Iste'molning minimal sutkalik normasi (sh.b.)**
Xashak	1	0,5	5
Hazm qilinadigan protein	80	200	560
Kaltsiy	1	8	20
Bir birlik yemish narxi (sh.p.b.)	3	5	

3. Ratsion P_1 va P_2 mahsulotlardan tayyorlanadi. Ularning har biriga *A*, *B* va *C* vitaminlar kiradi. Bir sutkalik minimal iste'mol *A* vitamin uchun 100 birlik, *B* dan 80 birlik, *C* dan esa 160 birlikni tashkil qiladi. Bir birlik P_1 mahsulotning bahosi 2 shartli pul birligiga, P_2 niki esa 3 shartli pul birligiga teng. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori keltirilgan. Eng arzon tushadigan ratsion variantini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Vitaminlar	**Bir birlik mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori**	
	P_1	P_2
A	0,1	0,5
B	0,25	0,1
C	0,2	0,4

4. Savdo tashkiloti 3 turdagi tovarlarni sotish uchun quyidagi resurslardan foydalanmoqda: vaqt va sotuv muassasalarining maydoni. Har bir turdagi mahsulotning bir partiyasini sotish uchun resurslar xarajati jadvalda berilgan. 1-mahsulot turining 1-partiyasini ayirboshlashdan tushadigan daromad 50000 so'm, 2-sidan 80000 so'm va 3-sidan 60000 so'm. Savdo tashkilotiga maksimal foydani ta'minlovchi optimal tovar ayirboshlash rejasini topishning matematik modelini tuzing.

Resurslar	**Tovarlar turlari**			**Resurslar hajmi**
	1	2	3	
Vaqt (soat)	0,5	0,7	0,6	970
Maydon (m^2)	0,1	0,3	0,2	90

5. Aholining talabini hisobga olgan holda poyafzal do'koni reja davrida charm poyafzallardan kamida 140000 (sh.p.b.) va boshqa poyafzallardan kamida 40000 (sh.p.b.) sotishi kerak. Ayirboshlashdan tushadigan daromad va xarajatlarni bilgan holda, do'kon tovaroboroti kamida 200000 (sh.p.b.) va uning daromadi 2500 dan kam bo'lmaslik shartida xarajatlarni minimallashtiruvchi sotuv rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ko'rsatkichlar	**Poyafzal**	
	Charm poyafzal	**Boshqa poyafzallar**
Daromad (%)	1	2
Xarajatlar (%)	6	5

6. Kichik korhonada uch xil P_1, P_2 va P_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun to'rt xil S_1, S_2, S_3 va S_4 xom-ashyolar ishlatiladi. Xom-ashyolar zahirasi, har bir mahsulotga sarf qilinadigan xom ashyolarning texnologik normalari va bitta mahsulotning bahosi jadvalda keltirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotning pul ifodasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Xom-ashyo turlari	**Xom-ashyo zahirasi (kg)**	**Bir mahsulotga ketgan xom-ashyolar normasi (kg)**		
		P_1	P_2	P_3
S_1	1500	4	2	1
S_2	1700	6	0	2
S_3	1000	0	2	4
S_4	2000	8	7	0
Bitta mahsulotning bahosi (sh.p.b.)		100	150	200

7. 30-40kg og'irlikdagi chorva mollarini oziqlantirib o'rtacha 300-400kg og'irlikni ta'minlash uchun kunlik ratsion tarkibida quyidagi miqdorda oziqlantiruvchi moddalar bo'lishi kerak: yem-xashak birligi – 1,6 dan kam emas, hazm qilinadigan protein – 200g dan kam emas, karotin – 10 mgdan kam emas. Oziqlantirishda arpadan, dukkakli mahsulotlardan va somonli undan foydalaniladi. 1kg yemdagi oziq moddalarning tarkibi va 1kg yemning bahosi jadvalda keltirilgan. Kunlik ratsionning optimal rejasini tuzing.

Oziqlantiruvchi moddalarning nomlari	**1 kg yem tarkibidagi oziq moddalarning miqdori**		
	Arpa	**Dukkakli Mahsulotlar**	**Somonli un**
Yem-xashak birligi (sh.b)	1,2	1,4	0,8
Hazm qilinadigan protein (g)	80	280	240
Karotin (mg)	5	5	100
1 kg yemning bahosi (sh.p.b.)	3	4	5

8. Yuzasi mos ravishda 0,8 va 0,6 mln. ga bo'lgan ikkita tuproq zonasi bor. Zonalar bo'yicha ekinlarning hosildorligi va 1s donning bahosi jadvalda keltirilgan. Kuzgi ekinlarni 20 mln.s. dan kam bo'lmagan va bahorgi ekinlarni 6 mln.s.

dan kam bo'lmagan miqdorda ishlab chiqarish talab qilinadi. Kuzgi va bahorgi donli ekinlar maydoni qanday bo'lganda pul ifodasidagi ishlab chiqarilgan jami mahsulotlar miqdori maksimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar turi	**Hosildorlik (s/ga)**		**1 s mahsulot bahosi**
	1-zona	**2-zona**	
Kuzgi ekinlar	20	25	8
Bahorgi ekinlar	25	20	7

9. Fermer xo'jalikka chorvachilikni rivojlantirish uchun 324 mln. so'm ajratilgan. Shundan 180 mln. so'mi ish haqiga, 144 mln. so'mi moddiy xarajatlar (texnik xizmat ko'rsatish) ga taqsimlangan. Jadvalda 1 s. sut va go'sht uchun sarflanadigan resurslar va sotuv narxlari ko'rsatilgan. Xo'jalik kamida 6000 s. sut va 1000 s. go'sht yetishtirishi kerak. Chorvachilik mahsulotlarini ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, unda xo'jalikning chorvachilikdan oladigan daromadi maksimal bo'lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	**Mehnat sarfi (ming so'm)**	**Moddiy xarajatlar**	**Sotuv narxi (ming so'm)**
Sut	12	8	25
Go'sht	90	80	200

10. Qog'oz kombinati xilma-xil turdagi qog'ozlarni ishlab chiqarish rejasini bajardi. Shuningdek, xom-ashyodan iqtisod qilib qoldi. 50t sellyuloza, 80t yog'och massasi va 2t kaolin foydalanilmay qoldi. Jadvalda 1t har xil turdagi qog'ozdan ishlab chiqarish uchun sarflanadigan sellyuloza, yog'och massasi, kaolin normasi berilgan. 1t bosmaxona qog'ozidan 5 birlik, 1t muqova qog'ozidan 6 birlik, yozuv qog'ozidan 8 birlik foyda ko'riladi. Iqtisod qilingan xom-ashyolardan foydalanib qanday qog'oz turini ishlab chiqarilsa, korxona foydasi ko'proq bo'ladi? Bunda xom-ashyoning qaysi turi va qancha miqdori ortib qoladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	**Xom-ashyolar**		
	Sellyuloza	**Yog'och massasi**	**Kaolin**
Bosmaxona qog'ozi	206	829	20

Muqova qog'ozi	424	627	10
Yozuv qog'ozi	510	518	12

11. Quyida berilgan ChPMlarini vektor va matrisa ko'rinishida ifodalang.

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$

$F = x_1 + x_2 \to \max.$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max.$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$

$F = -2x_1 + x_2 \to \min.$

8. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5.$

$F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max.$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$

$F = -2x_1 + x_2 \to \min.$

10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5.$

$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max.$

11. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$

$F = 2x_1 - 3x_2 \to \max.$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 7, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ 5x_1 - x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 3, \end{cases}$

$x_2 \ge 0,$

$F = 4x_1 + 3x_2 \to \min.$

13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4.$

$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max, (\min).$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$

$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 \to \max.$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$

$Z = x_1 - x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 - x_2 \ge 3 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2 \end{cases}$

$Z = 4x_1 - x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 40 \end{cases}$

$Z = 6x_1 - 3x_2 \to \max$

$x_1, x_2 \le 15.$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 100 \\ x_1 + x_2 \le 80 \\ x_1 \le 40 \end{cases}$

$Z = x_1 + 9x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge 2 \end{cases}$

$Z = -x_1 - x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$

$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$

$x_1, x_2 \ge 0.$

12-MAVZU. CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASINING GEOMETRIK TALQINI

1-masala. Firma ikki xil *A* va *B* mahsulotlarni ishlab chiqaradi. Har bir mahsulotga I, II va III turdagi mashinalarning har birida ishlov beriladi. Mahsulotlarga mashinalarda ishlov berish soatlari quyidagicha berilgan:

	I	II	III
A	$0,5$	$0,4$	$0,2$
B	$0,25$	$0,3$	$0,4$

I, II, III mashinalarning haftalik vaqt fondlari mos ravishda 40, 36 va 36 soatni tashkil etadi. Sotilgan *A* va *B* mahsulotlardan mos ravishda 5 va 3 birlik foyda olinadi.

Firmaga maksimal foyda keltiradigan haftalik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinadi. Masalani ChPMsi shaklida ta'riflang va uni yeching.

Yechish: Hafta davomida ishlab chiqarish rejalashtirilgan *A* mahsulot miqdori x_1 va *B* mahsulot miqdori x_2 bo'lsin, u holda masalaning berilganlaridan foydalanib, quyidagi ChPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 \le 40, \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 \le 36, \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \le 36, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

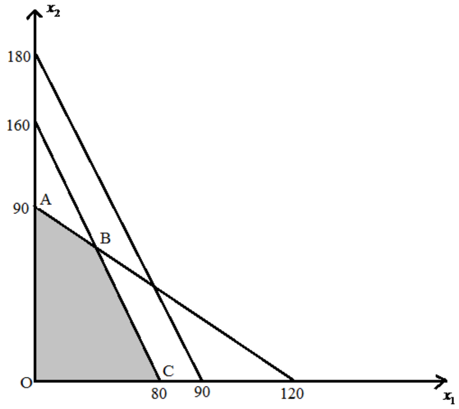
$$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Bu masalada noma'lumlar soni ikkita, hamda chegaraviy shartlar tengsizliklar shaklida bo'lganligi uchun grafik usulni qo'llash mumkin. Masaladagi chegaraviy shartlardagi har bir tengsizlik x_1Ox_2 koordinata tekisligida chegaralari mos

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40, & (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36, & (a_2) \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 = 36, & (a_3) \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlardan va koordinata o'qlaridan iborat yarim tekisliklarni ifodalaydi.

Ushbu yarim tekisliklarni va ularning kesishmasidan iborat bo'lgan rejalar ko'pburchagini chizib olamiz, hamda $\vec{N}=(5;3)$ yo'naltiruvchi vektor yordamida $F=5x_1+3x_2$ maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beruvchi nuqtani aniqlaymiz.



Chizmadan ko'rinib turibdiki, $F=5x_1+3x_2$ maqsad funksiyasi o'zining maksimal qiymatiga *ABCO* – rejalar ko'pburchagining *C* nuqtasida erishadi. Bu nuqta a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo'lganligi uchun uning koordinatasini

$$\begin{cases} 0,5x_1+0,25x_2=40, & (a_1) \\ 0,4x_1+0,3x_2=36, & (a_2) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib topamiz. Sistemaning yechimi $x_1=60$ va $x_2=40$. Bu yechimga maqsad funksiyasining $F_{\max}=5\cdot 60+3\cdot 40=420$ qiymati mos keladi.

Shunday qilib, firma 420 birlik foydaga erishish uchun *A* mahsulotdan 60 ta va *B* mahsulotdan 40 ta ishlab chiqarishni rejalashtirishi kerak bo'ladi. Bunda I va II tur mashinalarning ish vaqti fondidan to'laligicha foydalaniladi, hamda III tur mashina vaqtidan ($0,2x_1+0,4x_2\le 36$ tengsizlikka ko'ra) 8 soat ortib qoladi.

2-masala. Quyidagi ChPMni yeching.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=10, \\ -2x_1+3x_2+x_4=6, \\ 2x_1+4x_2-x_5=8, \end{cases}$$

$$x_j\ge 0, \quad j=1,2,3,4,5.$$

$$F=-16x_1-x_2+x_3+5x_4+5x_5\to \max.$$

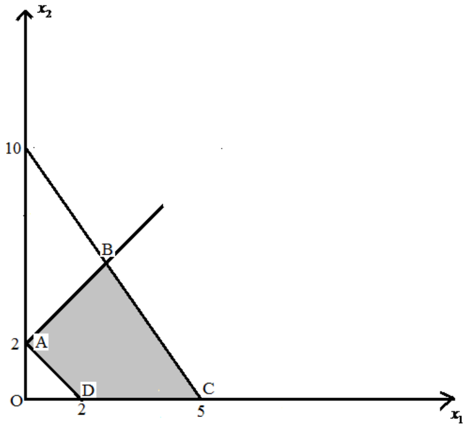
Yechish: Ushbu masaladagi tenglamalar sistemasidan nomanfiy x_3, x_4, x_5 noma'lumlarning har birini x_1 va x_2 noma'lumlar orqali ifodalab, ularni maqsad funksiyasiga qo'ysak, ikki noma'lumli, chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan iborat bo'lgan ChPM hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max. \tag{3}$$

Bu masalaning rejalar ko'pburchagini yasab olamiz:



Chizmadan rejalar ko'pburchagining *B* nuqtasi optimal yechim ekanligi ravshandir. Bu nuqtaning koordinatasini

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2.$$

tenglamalar sistemasining yechimi sifatida topamiz. Sistemani yechib $x_1 = 3$ va $x_2 = 4$ qiymatlarni olamiz. Bu qiymatlarni dastlabki berilgan (1) sistemaga qo'yib $x_3 = 0$ va $x_4 = 0$ va $x_5 = 14$ qiymatlarni va ularga mos keluvchi maqsad funksiyasining $F_{\max} = 18$ qiymatini hosil qilamiz.

Shunday qilib, berilgan (1), (2) va (3) masalaning yechimi $X_{opt}(3;4;0;0;14)$ va $F_{\max} = 18$ dan iborat ekanligini aniqlaymiz.

Umuman, chegaraviy shartlari n ta noma'lum va m ta chiziqli erkli tenglamalarni o'z ichiga olgan masalalarni ham, agar $n-m=2$ munosabat bajarilsa, grafik usul yordamida yechish mumkin. Bunga oid quyidagi masalani keltiramiz.

3-masala. ChPMsini grafik usul yordamida yeching.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \tag{5}$$

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max. \tag{6}$$

Yechish: Bu masalada $n=5$ va $m=3$ bo'lib, $n-m=2$ bo'lganligi uchun grafik usulni qo'llash mumkin. Dastlab, Jordan-Gauss usuli yordamida (4) sistemaning har bir tenglamasida bittadan bazis o'zgaruvchilarni (masalan, x_1, x_2, x_3 – o'zgaruvchilarni) ajratamiz.

Natijada (4) sistemaga teng kuchli bo'lgan quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20. \end{cases} \tag{7}$$

Bundan esa, bazis o'zgaruvchilarga nisbatan yechilgan sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5, \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5, \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5. \end{cases} \tag{8}$$

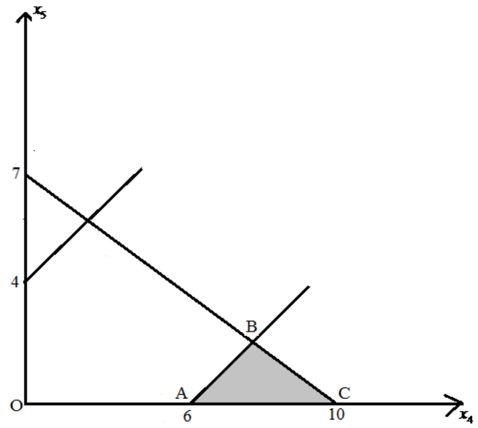
Bazis o'zgaruvchilarning bu qiymatlarini maqsad funksiyasiga qo'yib, hamda (7) sistemada bazis o'zgaruvchilarni tashlab yuborib, ikki noma'lumli quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6, \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70, \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0,$$

$$F = 6x_4 + 15x_5 - 38 \rightarrow \max.$$

x_4Ox_5 koordinata tekisligida rejalar ko'pburchagini, maqsad funksiyasini va yo'naltiruvchi vektorni tasvirlaymiz.



Chizmaga asosan maqsad funksiyani o'zining maksimal qiymatiga rejalar ko'pburchagining *B* nuqtasida erishishini ko'ramiz.

Bu nuqta koordinatalarini

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases}$$

sistemani yechib topamiz:

$$x_4 = 2; \quad x_5 = \frac{28}{5}. \; F_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58.$$

Dastlabki berilgan (4), (5), (6) masalaning yechimini hosil qilish uchun $x_4 = 2$ va $x_5 = \frac{28}{5}$ qiymatlarni (8) sistemaga qo'yamiz. Natijada $x_1 = \frac{104}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ qiymatlarni olamiz. Shunday qilib,

$$X_{opt} = \left(\frac{104}{5}; \quad 0; \quad 0; \quad 2; \quad \frac{28}{5} \right) \quad \text{va} \quad F_{\max} = 58.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalalarni grafik usulida yeching.

1. Mebel fabrikasi shkaf va stollar ishlab chiqarish uchun zarur resurslardan foydalanadi. Har bir turdagi mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi, 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad va bor bo'lgan resurslarning umumiy miqdori quyidagi jadvalda berilgan.

Resurslar	**1ta mahsulotga sarflanadigan resurslar miqdori**		**Resurslarning umumiy miqdori**
1-xil yog'och (m^2)	0,2	0,1	40
2-xil yog'och (m^2)	0,1	0,3	60
Mehnat sarfi (kishi-soat)	1,2	1,5	371,4
1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	6	8	

Fabrika qancha stol va shkaf ishlab chiqarsa, ularni sotishdan keladigan daromad maksimal bo'ladi.

2. *A* va *B* turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlari ishlatiladi. Har bir turdagi jihozning har bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqtlari normalari jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning ish vaqti umumiy fondi hamda 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Jihoz turi	**1 ta mahsulot tayyorlashga sarflanadigan vaqt (soat)**		**Jihozning foydali ish vaqti umumiy fondi (s)**
	A	*B*	
Frezerlik	10	8	168
Tokarlik	5	10	180
Silliqlash	6	12	144
1 ta mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	14	18	

A va *B* mahsulotlar ishlab chiqarishning shunday rejasi topilsinki, ulardan keladigan daromad maksimal bo'lsin.

3. Mebel fabrikasida standart faner listlardan 3 turdagi xom-ashyodan mos ravishda 24, 31 va 18 dona qirqishi kerak. Har bir faner listidan 2 usul bilan xom-ashyolar qirqish mumkin. Berilgan usul bo'yicha qirqish natijasida hosil bo'ladigan xom-ashyolar soni jadvalda berilgan. Berilgan usul bo'yicha 1 ta faner listni qirqishdan hosil bo'lgan chiqindilar o'lchami ham quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyolar turi	**Usul bo'yicha qirqishdan hosil bo'lgan xom-ashyolar soni (dona)**	
	1-usul	**2-usul**
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Qirqimlar (chiqindilar) o'lchami (kv.sm)	12	16

Qancha faner listi va qaysi usulda qirqilganda minimal chiqindi hosil bo'ladi, hamda zarur xom-ashyolar sonidan kam bo'lmagan xom-ashyo olinadi

4. Fermada qo'ng'ir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi oziqa ishlatiladi. Qo'ng'ir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur bo'lgan har bir turdagi oziqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi oziqaning umumiy miqdori va 1 ta qo'ng'ir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	**Kunlik zarur bo'lgan ozuqa birligi miqdori**		**Ozuqaning umumiy miqdori**
	Qo'ng'ir quyon	**Sariq quyon**	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

13-MAVZU. CHIZIQLI PROGRAMMALSHTIRISH MASALASINI SIMPLEKS USULIDA YECHISH

1-masala. Quyidagi ChPMni simpleks usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

$$\mathrm{F} = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min.$$

Yechish: Masalaning tenglamalar sistemasini vektor formada yozib olamiz:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0,$$

bunda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$C = (-2;-1;1;-1;1).$$

Berilgan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vektorlar orasida uchta birlik P_3, P_4 va P_5 vektorlar bo’lganligi uchun, masalaning boshlang’ich tayanch rejasini bevosita yozish mumkin: X_0= (0; 0; 0; 5; 9; 7).

Birlik vektorlarga mos x_3, x_4 va x_5 – o’zgaruvchilar bazis o’zgaruvchilar bo’lib, qolgan x_1, x_2 – o’zgaruvchilar esa bazismas o’zgaruvchilardir. Bazis o’zgaruvchilarga mos keluvchi chiziqli funksiya koeffitsientlaridan tuzilgan vektor C_{baz}(1;-1;1) dan iborat.

Masalaning berilganlarini quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz. Jadvalning m+1 qatoriga rejaning bahosi deb ataluvchi va

$$\Delta_j = F_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i - C_j$$

formula orqali aniqlanuvchi ko’rsatkichlar joylashtiriladi. Agar barcha $\Delta_j \leq 0 \quad (j = \overline{1,n})$ bo’lsa, topilgan tayanch yechim optimal yechim bo’ladi. Agar birorta $j=k$ uchun $\Delta_k > 0$ bo’lsa, u holda topilgan tayanch yechim optimal bo’lmaydi. Uni boshqa tayanch rejaga almashtirish kerak. Tayanch rejalarni almashtirish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki masalaning chekli yechimi yo’q ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Simpleks usulni qo’llab, I qadamda $\max\limits_{\Delta_j>0} \Delta_j = 3$ ga mos keluvchi P_2 vektor bazisga kiritilib, P_5 vektor bazisdan chiqariladi. II qadamda $\Delta_1 = 1/2$ ga mos keluvchi P_1 vektor bazisga kiritilib, P_3 bazisdan chiqariladi va nihoyat III qadamda optimal yechim topiladi.

i	Bazis	C_b	P_0	-2	-1	1	-1	1	a.k.
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	1	5	1	1	1	0	0	5
2	P_4	-1	9	2	1	0	1	0	9
3	P_5	1	7	1	2	0	0	1	7/2*
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		3	2	3*	0	0	0	
1	P_3	1	3/2	1/2	0	1	0	-1/2	3*
2	P_4	-1	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
3	P_2	-1	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15/2	1/2*	0	0	0	-3/2	
1	P_1	-2	3	1	0	2	0	-1	
2	P_4	-1	1	0	0	-3	1	1	
3	P_2	-1	2	0	1	-1	0	1	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-9	0	0	-1	0	-1	

Bu jadvaldan ko’rinib turibdiki, berilgan masalaning optimal rejasi $X^*=(3;2;0;1;0)$ bo’lib, unga maqsad funksiyaning $F_{\min}= -9$ qiymati mos keladi. Topilgan yechim yagonadir, chunki nolga teng Δ_j baholar faqat bazis vektorlar uchun o’rinlidir.

2-masala. Quyidagi ChPMni simpleks usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

$$\mathrm{F} = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Yechish: Berilgan masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3.$$

$$\mathrm{F} = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min.$$

Chegaraviy shartlarda qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib tengsizliklardan tengliklarga o'tamiz. (Qo'shimcha o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyadagi koeffisiyentlari nolga mos kelishini eslatib o'tamiz).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Sistemani vektor formada yozib olamiz:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

bunda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},\quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

C=(1;-1;-3;0;0;0), $\quad C_{baz}$=(0;0;0).

Birlik vektorlarga mos bo'lgan x_4, x_5, x_6 – bazis o'zgaruvchilarni mos ozod hadlarga tenglab, bazismas x_1, x_2, x_3 o'zgaruvchilarni esa nolga teng deb, boshlang'ich tayanch rejani hosil qilamiz.

X_0= (0; 0; 0; 1; 2; 5).

Keyingi hisoblash jarayonlarini quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz:

i	Bazis	C_b	P_0	1	-1	-3	0	0	0	a.k.
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	0	1	2	-1	$\boxed{1}$	1	0	0	1*
2	P_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0	-
3	P_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		0	-1	1	3*	0	0	0	
1	P_3	-3	1	2	-1	1	1	0	0	-
2	P_5	0	3	-2	$\boxed{1}$	0	1	1	0	3*
3	P_6	0	4	1	1	0	-1	0	1	4
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-3	-7	4*	0	-3	0	0	
1	P_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	-
2	P_2	-1	3	-2	1	0	1	1	0	-
3	P_6	0	1	$\boxed{3}$	0	0	-2	-1	1	1/3
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	1*	0	0	-7	-4	0	
1	P_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
2	P_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	
3	P_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-46/3	0	0	0	-19/3	-11/3	-1/3	

To'rtinchi qadamda (m+1) – satrda $\Delta_j = F_j - C_j \leq 0$ optimallik sharti bajarilganligi uchun

$$X^* = (1/3;\ 11/3;\ 4;\ 0;\ 0;\ 0)$$

reja optimal bo'lib, unga $F_{\min} = -46/3$ qiymat mos keladi. Dastlabki berilgan masalaning yechimi esa

$$X_{\text{opt}} = (1/3;\ 11/3;\ 4), \qquad F_{\max} = 46/3$$

bo'lib, ushbu yechim yagona ekanligini simpleks jadvalda ko'rish mumkin, ya'ni nolga teng $\Delta_j = F_j - C_j$ baholar faqat bazis vektorlar uchun o'rinlidir.

Boshlang'ich tayanch rejasi berilmagan ChPMlarning chegaraviy shartlaridan iborat tenglamalar sistemasida elementar almashtirishlar bajarib, biror tayanch yechimni (nomanfiy bazis yechimni) topish, so'ngra simpleks usul yordamida optimal yechimni aniqlash mumkin. Chegaraviy shartlarda ozod hadi manfiy bo'lgan tenglamalar qatnashsa, bunday tenglamalarning chap va o'ng tomonini (–1) ga ko'paytirib, ozod hadni musbat qilib olish kerak.

3-masala. Dastlab ChPMsining biror tayanch rejasini toping va simpleks usuli yordamida optimal yechimni aniqlang.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5, \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 7x_5 = -8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,5}.$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max.$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamaning ozod hadi manfiy bo'lganligi uchun, uning ikkala qismini (-1) koeffisiyentga ko'paytirib, ozod hadni musbat qilib olamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6. \end{cases}$$

Bu sistemaning nomanfiy bazis yechimlaridan birini, (yoki chiziqli programmalashtirish masalasining tayanch rejalaridan birini) yuqorida ko'rilgan usul yordamida topib olaylik.

Hisoblash jarayonlarini quyidagi jadvalda bajaramiz.

I	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	a.k
1	1	2	-3	1	-5	5	5
2	2	3	-5	2	-7	8	4
3	3	1	-2	6	2	5	1*
n.t.	6	6	-10	9*	-10	19	
1	1/2	11/6	-8/3	0	-16/3	4	24/11*
2	1	8/3	-13/3	0	-23/3	6	9/4
3	1/2	1/6	-1/3	1	1/3	1	6
n.t.	3/2	9/2*	-7	0	-13	10	

1 2 3	3/11 3/11 5/11	1 0 0	-16/11 -5/11 -1/11	0 0 1	-32/11 1/11 9/11	24/11 2/11 7/11	8 2/3* 7/5
n.t.	3/11	0	-5/11	0	1/11	2/11	
1 2 3	0 1 0	1 0 0	-1 -5/3 2/3	0 0 1	-3 1/3 2/3	2 2/3 1/3	
n.t.	0	0	0	0	0	0	

Jadvalning oxirgi bosqichida dastlab berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 3x_5 = 2, \\ x_1 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3}, \\ \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

sistemani va boshlang'ich $X_0 = \left(\frac{2}{3};2;0;\frac{1}{3};0\right)$ tayanch rejani hosil qilamiz.

Bu tayanch rejani optimallikka tekshirish uchun simpleks jadvalni tuzamiz va $\Delta_j = F_j - C_j -$baholarning qiymatlarini hisoblaymiz.

i	Bazis	C_{baz}	P_0	-3	-4	-1	-2	1	a.k
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1 2 3	P_2 P_1 P_4	-4 -3 -2	2 2/3 1/3	0 1 0	1 0 0	-1 -5/3 2/3	0 0 1	-3 1/3 2/3	- - 1/2
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-32/3	0	0	26/3*	0	26/3	
1 2 3	P_2 P_1 P_3	-4 -3 -1	5/2 3/2 1/2	0 1 0	1 0 0	0 0 1	3/2 5/2 3/2	-2 2 1	
m+1	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	0	0	0	-13	0	

Shunday qilib, masalaning optimal rejasi $X_{opt}=\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0\right)$ bo'lib, unga $F_{\max}$=15 qiymat mos keladi. Shuni ta'kidlash kerakki, olingan $X_{opt}=\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0\right)$ – optimal reja yagona emas, chunki bazisga kirmagan P_5 vektorga 0 ga teng bo'lgan baho mos keladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalalarda dastlab ChPMning biror tayanch rejasini toping va simpleks usulini qo'llab optimal yechimni aniqlang.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$
$F = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max.$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$
$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \to \min.$

3. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$
$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min.$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$
$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max.$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$
$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \min.$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$
$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \to \max.$

7. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$
$F = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max.$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 2x_5 = 7, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 4, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5.$
$F = -x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 - x_5 \to \min.$

9. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6.$

$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max.$

10. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6.$

$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max.$

11. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$

12. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ x_2 \leq 4, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max.$

13. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 15, \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

$F = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min.$

14. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

$F = 7x_1 + 9x_2 - 5x_3 \to \max.$

15. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq -2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -1, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

$F = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max.$

16. $$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 15, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$

$F = -5x_1 + 5x_2 \to \min.$

17. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \leq 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \leq 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 2, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$

$F = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max.$

18. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$

$F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min.$

19. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6.$

$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max.$

20. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24, \end{cases}$$
$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6.$

$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max.$

14-MAVZU. SUN'IY BAZIS USULI

Masala.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4.$$
$$\mathrm{F} = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalaning shartlaridagi tenglamalarda bazis o'zgaruvchilar yo'q. Har bir tenglamaga mos ravishda x_5, x_6 – sun'iy bazis o'zgaruvchilarni qo'shamiz va maqsad funksiyani (-1) ga ko'paytirib, quyidagi kengaytirilgan masalani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$
$$\mathrm{F} = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min.$$

Kengaytirilgan masala uchun $X = (0;0;0;0;3;3)$ boshlang'ich tayanch reja hisoblanadi. Keyingi hisoblashlarni quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz.

i	Bazis	C_b	P_0	-5	-3	-4	1	M	M	a.k
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	1^*
2	P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	3/2
	$\Delta_j = F_j - C_j$		6M	3M+5	5M+3	3M+4	3M-1	0	0	
1	P_2	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
2	P_6	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	3/4*
	$\Delta_j = F_j - C_j$		M-3	4M/3+1	0	-M/3+2	-M/3-3	-5M/3-1	0	
1	P_2	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4	1^*
2	P_1	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4	-
	$\Delta_j = F_j - C_j$		-6	0	0	3*	-2	-M+1	-M-3	

1	P_3	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3	
2	P_1	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3	
	$\Delta_j = F_j - C_j$		-9	0	-4	0	-5	-*M*-1	-*M*-2	

Oxirgi qadamdan ko'ramizki, masala yagona $X = (1;0;1;0;0;0)$ optimal yechimga va $F_{min} = -9$ minimal qiymatga ega. Dastlabki berilgan masala yechimi esa $X_{opt} = (1;0;1;0); F_{max} = 9$.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi ChPMlarini sun'iy bazis usulida yeching.

1. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,$
$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max.$

2. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 90, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 70, \\ x_1 + x_2 = 20, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,$
$F = 16x_1 + 10x_2 \to \min.$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,$
$F = 3x_1 + 6x_2 + 30x_3 \to \min.$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 14, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \ge 4, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,$
$F = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max.$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,$
$F = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \max.$

6. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,$
$F = -2x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 \to \min.$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16, \end{cases}$
$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$
$\mathrm{F} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min.$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12, \end{cases}$
$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$
$\mathrm{F} = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max.$

9. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15, \end{cases}$
$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5.$
$\mathrm{F} = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max.$

10. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50, \end{cases}$
$x_j \ge 0, j = 1,2,3,4.$
$\mathrm{F} = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \to \max.$

2. (Optimal bichish haqida masala). O’lchami 6x13 m^2 bo’lgan tunuka materiallarini shunday qirqish kerakki, unda ikki xildagi qirqimlar, ya’ni har biri 4x5 m^2 o’lchamli 400 ta, har biri 2x3 m^2 o’lchamli 800 ta qirqimlar hosil bo’lsin. Har bir tunukani qirqish usullari va bunda olinadigan turli o’lchamdagi qirqimlar soni quyidagi jadvalda berilgan.

Qirqimlar o’lchami (m^2)	**Tunukani qirqish usullari**			
	I	II	III	IV
4x5	3	2	1	0
2x3	1	6	9	13

Umumiy soni ko’rsatilgan miqdordan kam bo’lmagan va eng kam chiqindiga ega bo’lgan qirqimlar tayyorlash rejasini topish masalaning matematik modelini tuzing va sun’iy bazis usulida optimal yechimni toping.

3. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda *A* vitamindan 6 birlik, *B* vitamindan 12 birlik, *C* vitamindan 4 birlik bo’lishi kerak. Mollarni boqish uchun ikki turdagi yemdan foydalaniladi. Jadvalda yem tarkibidagi foydali oziqa moddalari ulushi, oziqa moddalariga bo’lgan kundalik ehtiyoj va yemlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo’lgan kundalik ratsionni aniqlash masalasining matematik modelini tuzing va simpleks usulda optimal yechimini toping.

Oziqa moddalari	**Bir birlik yemdagi oziqa moddalari miqdori**		**Mollarning oziqa moddalariga bo’lgan kundalik ehtiyoji**
	I	II	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
Bir birlik yemning narxi (so’m)	5000	6000	

15-MAVZU. IKKILANISH NAZARIYASI

1-masala. Quyidagi masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0,$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Yechish: Qaralayotgan masala simmetrik bo'lmagan masalaning II shakliga doir. Ikkilangan masalada o'zgaruvchilarning soni berilgan masala sistemasining tenglamalari soniga teng, ya'ni uchga teng. Ikkilangan masala maqsad funksiyasining koeffisiyentlari berilgan masala tenglamalar sistemasining ozod hadiga, ya'ni 12, 24 va 18 sonlariga teng bo'ladi.

Berilgan masala funksiyasining maksimumini topish talab qilingan bo'lib, shartlar sistemasi faqat tenglamalardan iborat. Shu sababdan ikkilangan masalada maqsad funksiyasining minimumi topiladi va uning o'zgaruvchilari ixtiyoriy qiymatlarni (jumladan, manfiy qiymatlarni ham) qabul qilishi mumkin bo'ladi.

Berilgan masalaning har uchala o'zgaruvchilari faqat nomanfiy qiymatlar qabul qilganligi sababli ikkilangan masala cheklamalari "≥" ko'rininshdagi tengsizlikdan iborat bo'ladi. Binobarin, berilgan masala uchun ikkilangan masala quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3, \end{cases}$$

$$G = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min.$$

2-masala. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0,$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min.$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Yechish: Bu masala shu ko'rinishda jadvaldagi berilgan masalalarning hech biriga mos kelmaydi, lekin birinchi tengsizlikni chap va o'ng qismlarini (-1) ga ko'paytirib, III shakldagi simmetrik masalani hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0,$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min.$$

Bu masalaga ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \geq 0,$$

$$G = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to max.$$

3-masala. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0,$$

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max.$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Yechish: Bu masala ham jadvalda berilgan masalalarning hech biriga mos kelmaydi. Qaralayotgan masalani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_5 = 11, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max.$$

Bu II shaklda berilgan nosimmetrik masalaga mos keladi. Shu sababdan ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0,$$
$$G = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to \min.$$

4-masala. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,6.$$
$$F = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min.$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin va uning yechimi topilsin.

Yechish: Ikkilangan masalaning ko’rinishi quyidagicha bo’ladi.

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1, \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3, \end{cases}$$
$$y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0,$$
$$G = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max.$$

Berilgan masalani simpleks usulda yechamiz.

Bazis	C_b	P_0	0	1	0	-1	-3	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	1	1	2	0	-1	**1**	0
P_3	0	2	0	-4	1	2	-1	0
P_6	0	5	0	3	0	0	1	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		0	0	-1	0	1	3	0
P_5	-3	1	1	2	0	-1	1	0
P_3	0	3	1	-2	1	**1**	0	0
P_6	0	4	-1	1	0	1	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		-3	-3	-7	0	4	0	0
P_5	-3	4	2	2	1	0	1	0

P_4	-1	3	1	-2	1	1	0	0
P_6	0	1	-2	**3**	-1	0	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		-15	-7	1	-4	0	0	0
P_5	-3	4	2	0	1	0	1	0
P_4	-1	11/3	-1/3	0	1/3	1	0	2/3
P_2	1	1/3	-2/3	1	-1/3	0	0	1/3
$\Delta_j = F_j - C_j$		-46/3	-19/3	0	-11/3	0	0	-1/3

Berilgan masalani optimal yechimi: X_{opt}=(0;1/3;0;11/3;4;0) bo'ladi. Aytib o'tamizki,

$$D = \begin{pmatrix} P_5, & P_4, & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

va

$$D^{-1}B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Birinchi ikkilanish teoremasi asosida ikkilangan masalaning optimal yechimini topamiz:

$$Y_{opt} = C_b D^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(-\frac{19}{3}; \quad -\frac{11}{3}; \quad -\frac{1}{3} \right)$$

ya'ni, ikkilangan masalaning optimal yechimi Y_{opt} ning *i*-komponentasini topish uchun simpleks jadvalning oxirgi satridagi boshlang'ich bazis vektorlari ustuniga mos keluvchi sonlarga qarash kerak.

$$y_1 = -\frac{19}{3}; \quad y_2 = -\frac{11}{3}; \quad y_3 = -\frac{1}{3}.$$

5-masala. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0,$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min.$$

masala berilgan bo'lsin.

Yechish. Bu masalaga ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2, \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \leq 3, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0,$$

$$G = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \to \max.$$

Berilgan masalani simpleks usulda yechish uchun 4 ta qo'shimcha va 1 ta sun'iy o'zgaruvchi kiritish zarur bo'ladi. Boshlang'ich simpleks jadval 6 satr va 9 ustundan iborat bo'ladi.

Ikkilangan masalani yechish uchun esa 3 ta qo'shimcha o'zgaruvchi kerak bo'ladi. Uning boshlang'ich simpleks jadvali 4 satr va 8 ustundan iborat bo'ladi.

Bu holda albatta ikkilangan masalani yechish maqsadga muvofiqdir. Ushbu masalani simpleks usul bilan yechib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

B	C_b	P_0	2	3	6	3	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	1	2	-1	1	2	1	0	0
P_6	0	2	2	1	1	-1	0	1	0
P_7	0	3	-1	4	-2	-2	0	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		0	-2	-3	-6	-3	0	0	0
P_3	6	1	2	-1	1	2	1	0	0
P_6	0	1	0	2	0	-1	-1	1	0
P_7	0	5	3	2	0	2	2	0	1

$\Delta_j = F_j - C_j$		6	10	-9	0	9	6	0	0
P_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	½	0
P_2	3	1/2	0	1	0	-1/2	-1/2	1/2	0
P_7	0	4	3	0	0	3	3	-1	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Ikkilangan masalaning optimal yechimi Y_{opt}=(0;1/2;3/2;0), G_{max}=21/2 bo'ladi. Berilgan masalaning yechimi esa X_{opt}=(3/2; 9/2; 0), F_{min}=21/2.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalalar uchun ikkilangan masalalar tuzilsin va ularning yechimi topilsin.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max.$$

2. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0,$$
$$F = 3x_1 + x_2 \to \max.$$

3. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \to \min.$$

4. $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$F = x_1 - x_2 \to max.$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max.$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 2x_1 - 3x_2 \to \max.$$

7. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max.$$

8. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \le 12, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1{,}5x_4 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$F = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max.$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 50, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max.$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 40, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 30, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min.$$

11. $$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min.$$

12. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max.$$

13. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0,$$
$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max.$$

14. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \ge 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$F = 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min.$$

15. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$
$$F = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max.$$

16-MAVZU. IQTISODIY MASALALARNING YECHIMLARINI TAHLIL QILISH

Masala. Korxona uch xil M_1, M_2 va M_3 mahsulotlar ishlab chiqarish uchun to’rt xil *A*, *B*, *C* va *D* xom-ashyolardan foydalanadi. Ushbu xom-ashyolarning rejalashtirilgan davr uchun belgilangan zahiralari, har bir mahsulot birligiga sarflanish normalari hamda bir birlik mahsulotlarni sotishdan olinadigan daromadlar quyidagi jadvalda berilgan.

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyo normasi**			**Xom-ashyolar zahirasi**
	M_1	M_2	M_3	
A	1	2	1	18
B	2	1	1	16
C	1	1	0	8
D	0	1	1	6
Bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad (sh.b.)	3	4	2	

a) korxonaga eng katta daromad keltiruvchi mahsulot ishlab chiqarish rejasini toping.

b) ikkilangan baholarni aniqlang va yechimni tahlil qiling.

Yechish: Dastlab masalaning matematik modelini tuzamiz. Aytaylik, x_1, x_2 va x_3 noma’lumlar mos ravishda ishlab chiqariladigan M_1, M_2 va M_3 mahsulotlar soni bo’lsin. Masalaning matematik modeli quyidagicha bo’ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 + x_3 \le 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3},$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max.$$

Ushbu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 4, \\ y_1 + y_2 + y_4 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4},$$

$$G = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 \to \min.$$

Bunda y_1, y_2, y_3 va y_4 o'zgaruvchilar mos ravishda *A*, *B*, *C* va *D* xom-ashyolar bir birligining ikkilangan baholarini ifodalaydi.

Berilgan masalalardan birortasini simpleks usul bilan yechamiz. Bizning holda dastabki masalani yechish maqsadga muvofiqdir. Avvalo, masalaning matematik modelini quyidagi shaklga keltiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 16, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 8, \\ x_2 + x_3 + x_7 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7},$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max.$$

Bu modeldagi x_4, x_5, x_6 va x_7 – qo'shimcha o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar bo'lib, ular quyidagicha iqtisodiy ma'noga ega: x_4 – ortib qoladigan *A* xom-ashyo miqdori; x_5 – ortib qoladigan *B* xom-ashyo miqdori; x_6 – ortib qoladigan *C* xom-ashyo miqdori; x_7 – ortib qoladigan *D* xom-ashyo miqdori; Masalaning boshlang'ich tayanch yechimi $X_0 = (0;0;0;18;16;8;6)$ bo'lib, bu yechimdan optimal yechimga o'tishni quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz.

i	Bazis	C_b	P_0	3	4	2	0	0	0	0	a.k.
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0	9
2	P_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0	16
3	P_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0	8
4	P_7	0	6	0	**1**	1	0	0	0	1	6*

m+1	$\Delta_j=F_j$-C_j		0	-3	-4*	-2	0	0	0	0	
1	P_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2	6
2	P_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1	5
3	P_6	0	2	**1**	0	-1	0	0	1	-1	2*
4	P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	-
m+1	$\Delta_j=F_j$-C_j		24	-3*	0	2	0	0	0	4	
1	P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1	-
2	P_5	0	6	0	0	**2**	0	1	-2	1	3*
3	P_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1	-
4	P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	6
m+1	$\Delta_j=F_j$-C_j		30	0	0	-1*	0	0	3	1	
1	P_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1	
2	P_3	2	3	0	0	1	0	1/2	-1	1/2	
3	P_1	3	5	1	0	0	0	1/2	0	-1/2	
4	P_2	4	3	0	1	0	0	-1/2	1	1/2	
m+1	$\Delta_j=F_j$-C_j		33	0	0	0	0	1/2	2	3/2	

a) oxirgi simpleks jadvaldan berilgan masalaning optimal yechimini, ya’ni korxonaga eng katta daromad keltiruvchi yechimni topamiz.

$$X_0=(5;3;3;4;0;0;0),\quad F_{\max}=33.$$

Optimal rejaga ko’ra, korxona M_1 mahsulotdan 5 dona, M_2 mahsulotdan 3 dona, M_3 mahsulotdan 3 dona ishlab chiqarsa, uning maksimal daromadi 33 shartli birlikdan iborat bo’ladi. Bunda *A* xom-ashyodan 4 birlik ($x_4=4$) ishlatilmay qoladi va *B*, *C* va *D* xom-ashyolar esa butunlay ishlatiladi.

b) oxirgi simpleks jadvaldan ikkilangan masala yechimini ham topamiz:

$$Y_0=(0;1/2;2;3/2),\quad G_{\min}=33.$$

Bu yechimga ko’ra, $y_1=0$, ya’ni *A* xom-ashyoning bahosi 0 ga tengdir. Shu sababli *A* xom-ashyo tanqis emas. Aksincha, *B*, *C* va *D* xom-ashyolarning baholari mos ravishda $y_2=1/2>0, y_3=2>0$ va $y_4=3/2>0$ bo’lganligi uchun ular tanqis hisoblanadi hamda ularning miqdorini oshirish, korxona optimal rejasiga binoan topilgan daromadni oshishiga olib keladi.

Ikkilanish nazariyasining uchinchi teoremasiga asosan, quyidagi xulosalarni qilish mumkin. *A* – xom-ashyoning miqdorini qo'shimcha oshirish ishlab chiqarishning optimal rejasiga ta'sir qilmaydi $(y_1 = 0)$. *B* – xom ashyo miqdorini bir birlikka oshirish umumiy daromadni 0,5 birlikka oshirish $(y_2 = 0,5)$ imkonini beradi. *C* – xom-ashyo miqdorini bir birlikka oshirish daromadni 2 birlikka $(y_3 = 2)$ oshishiga imkon beradi. Shunga o'xshash, *D* xom-ashyo bir birlikka oshirilsa, daromad 1,5 birlikka oshadi $(y_4 = 1,5)$.

Ikkilangan baholarning qiymatlariga qarab yuqori tanqislikka ega xom-ashyo yoki resurslarni aniqlash mumkin. Bizning masalada *C* xom-ashyo eng tanqis hisoblanadi, chunki uning ikkilangan bahosi $(y_3 = 2)$ mavjud baholar ichida eng kattasidir. Yakuniy simpleks jadvaldagi ma'lumotlarga ko'ra, yana quyidagilarni aytish mumkin:

Agar ishlab chiqarishda *C* turdagi xom-ashyodan bir birlik ortiqcha sarflansa, ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Yangi rejaga ko'ra, daromad $F_{max} = 33 + 2 = 35$ (sh.b.) ni tashkil qiladi.

Jadvalning P_6 ustuniga qarab, quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada M_2 mahsulotni ishlab chiqarish bir birlikka oshadi, M_1 mahsulot hajmi o'zgarmaydi va M_3 mahsulot esa bir birlikka kamayadi. Buning natijasida *A* xom-ashyodan bir birlik ko'proq sarflanadi. Shu kabi xulosalarni P_5 va P_7 ustunlarga nisbatan ham aytish mumkin.

Ikkilangan optimal baholarni $(y_1 = 0, y_2 = 0,5, y_3 = 2, y_4 = 3/2)$ ikkilangan masala shartlariga qo'ysak,

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3, \\ 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4, \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2, \end{cases}$$

shartlar tenglikka aylanadi. Bu esa korxona tomonidan har uchala mahsulotni ham ishlab chiqarish maqsadga muvofiq ekanligini bildiradi. Uchala M_1, M_2 va M_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish berilgan masalaning optimal yechimida ham nazarda tutiladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Korxona 4 xil mahsulotni ishlab chiqarishi uchun 3 tur resurslardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilinadigan resurslar normasi, resurslarning zahiralari, hamda bir birlik mahsulot narxi quyidagi jadvalda berilgan.

Resurs turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi**				**Resurslar zahirasi**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Bir birlik mahsulotning narxi	9	6	4	7	

Ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

I tur resurs zahirasi 60 birlikka kamaytirilib, II va III tur resurs zahiralari 120 va 160 birlikka oshirilganda mahsulot ishlab chiarishning eng katta daromadining o’zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

2. Korxona har xil *A*, *B*, *C* buyumlarni ishlab chiqarishi uchun 3 tur xom-ashyolardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilingan

xom-ashyolar normasi, xom-ashyolar zahiralari, hamda bir birlik mahsulotdan keladigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyolar normasi (kg)**			**Xom-ashyolar zahiralari (kg)**
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Bir birlik buyumdan olinadigan daromad	9	10	16	

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va III tur xom-ashyolar zahiralari mos ravishda 30, 40 va 50 kg ga oshirilganda mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromadining o'zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

3. Uch xil *A*, *B* va *C* mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom-ashyolardan foydalanadi. Har bir xom-ashyodan mos ravishda 180, 210 va 236 kg hajmdan ko'p bo'lmagan miqdorda ishlatish mumkin. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun har bir tur xom-ashyolar sarfi, hamda bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyolar normasi (kg)**		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Bir birlik buyumdan keladigan daromad	10	14	12

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va III tur xom-ashyolar zahiralari mos ravishda 30, 40 va 50 kg ga oshirilganda maqsad funksiya maksimumining o'zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

4. Korxona ikki xil M_1 va M_2 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun A va B xom-ashyolardan foydalanadi. Bir birlik M_1 va M_2 xil mahsulotga sarf qilinadigan turli xom-ashyolar normasi, mahsulotning bir birligidan olinadigan daromad, hamda xom-ashyolar zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyo normasi**		**Xom-ashyolar zahirasi**
	M_1	M_2	
A	2	3	9
B	3	2	13
Bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad	3	4	

Ish tajribasi shuni ko'rsatadiki, sutkasiga M_1 mahsulotga bo'lgan talab M_2 mahsulotga bo'lgan talabdan bir birlikdan ko'p bo'lmaydi. Bundan tashqari sutkasiga M_2 mahsulotga bo'lgan talab 2 birlikdan ko'p bo'lmaydi.

a) mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) ikkilangan baholarni aniqlang va yechimni tahlil qiling.

17-MAVZU. IKKILANGAN SIMPLEKS USUL

Masala. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3.$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min.$$

masalani ikkilangan simpleks usulda yeching.

Yechish: Bu masalani quyidagi ko’rinishga keltirish qiyin emas.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5.$$

$$F(x) = -x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min.$$

P_3, P_4, P_5 vektorlarni bazis ekanligini nazarga olib boshlang’ich simpleks jadvalni tuzamiz:

Bazis	C_b	P_0	-1	-1	-2	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	-2	8	1	1	1	0	0
P_4	0	-4	-1	1	0	1	0
P_5	0	-6	-1	-2	0	0	1
Δ_j		-16	-1	-1	0	0	0

P_0 ustunda ikkita manfiy sonlar (-4;-6) bor . Bazisdan chiqariladigan vektor min(-4;-6)=-6 sharti asosida tanlanadi. Ya’ni, P_5 vektorni bazisdan chiqariladi. Bazisga kiritiladigan vektorni aniqlash uchun

$$\min_{a_{3j}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{3j}}\right) = \min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-2}\right\} = \frac{1}{2}$$

ni topamiz. Demak, bazisga P_2 vektorni kiritamiz. Natijada simpleks javdval almashadi.

Bazis	C_b	P_0	-1	-1	-2	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	-2	5	1/2	0	1	0	1/2
P_4	0	-7	-3/2	0	0	1	1/2
P_2	-1	3	1/2	1	0	0	1/2
Δ_j		-13	-1/2	0	0	0	-1/2

P_0 vektorning ustunida -7 manfiy son bor va bu satrning boshqa elementlari ichida bitta manfiy son -3/2 mavjud. Demak, bazisdan P_4 ni chiqarib, uning o'rniga P_1 ni kiritamiz:

Bazis	C_b	P_0	-1	-1	-2	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_3	-2	8/3	0	0	1	1/3	2/3
P_1	-1	14/3	1	0	0	-2/3	-1/3
P_2	-1	2/3	0	1	0	1/3	-1/3
Δ_j		-32/3	0	0	0	-1/3	-2/3

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, berilgan va ikkilangan masalalarning optimal yechimlari mos ravishda X=(14/3;2/3;8/3;0) va Y=(-2;-1/3;-2/3) bo'lib, $F_{\min} = G_{\max} = -\dfrac{32}{3}$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalalarni ikkilangan simpleks usulida yeching.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3. \end{cases}$

$F(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max.$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max.$

3. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + 2x_3 - 4x_4 \geq 24, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = 5x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \to \min.$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \geq 24, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min.$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \geq 12, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$

$F(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max.$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \geq 16 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

$F(x) = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max$

7. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 30, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max.$

8. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$

$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max.$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 18, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 \geq 24, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,5,6. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 8x_5 + 3x_6 \to \max.$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3. \end{cases}$

$F(x) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \min.$

18-MAVZU. TRANSPORT MASALASI

1-masala. Quyidagi transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini "shimoliy-g'arb burchak" usuli bilan toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Talab hajmi	150	120	80	50	

Yechish: Masalaning shartlarini quyidagi hisoblash matrisasi ko'rinishda yozamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
170	5	8	12	7

Bu yerda a_i-ta'minotchilardagi mahsulot zahirasini, b_j-iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabini bildiradi.

Shimoliy-g'arbdagi (1;1) katakka $x_{11} = \min(100;150) = 100$ ni joylashtiramiz va 1-qatorni o'chiramiz hamda b_1 ni $b_1' = 150 - 100 = 50$ ga almashtiramiz. So'ngra (2;1) katakka $x_{21} = \min(130,50) = 50$ ni joylashtiramiz. Bu holda 1-ustun o'chiriladi va 2-qatordagi a_2 ni $a_2' = 130 - 50 = 80$ ga almashtiramiz. Keyin (2;2) katakka o'tib $x_{22} = \min(80,120) = 80$ ni yozamiz. Shunday yo'l bilan (3;2) katakka $x_{32} = \min(170,40) = 40$ ni, (3;3) katakka $\min(130,80) = 80$ ni va (3;4) katakka $\min(50,50) = 50$ ni yozamiz. Natijada rejalar matrisasini hosil qilamiz:

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

topilgan boshlang'ich bazis yechim quyidagidan iborat:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Tuzilgan rejaga mos keluvchi harajatni hisoblaymiz.

$$F(X)=100\cdot 3+50\cdot 1+80\cdot 4+40\cdot 8+80\cdot 12+50\cdot 7=2300.$$

2-masala. Yuqorida berilgan transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini "minimal harajatlar" usuli bilan toping.

Yechish: Masalaning shartlarini quyidagi hisoblash matrisasi ko'rinishda yozamiz.

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
170	5	8	12	7

So'ngra $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 1$ ni topib (2;1) katakka $x_{21} = \min(130,150) = 130$ ni yozamiz. 2-ta'minotchida mahsulot qolmagani uchun ikkinchi qatorni o'chiramiz, b_1 ning qiymatini esa $b_1' = 150 - 130 = 20$ ga almashtiramiz. Ikkinchi qadamda qolgan harajatlar ichida eng kichigini topamiz:

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{11} = 3$$

bo'lgani uchun (1;1) katakka $x_{11} = \min(20,100) = 20$ ni yozamiz. Bu holda birinchi ustun ham o'chiriladi va a_1 ning qiymati $a_1' = 100 - 20 = 80$ ga almashadi. Shunday yo'l bilan 3-qadamga (1;2) katakka $x_{12} = 80$ ni, 4-qadamda (3;4) katakka $x_{34} = 50$ ni, 5-qadamda (3;2) katakka $x_{32} = 40$ ni va 6-qadamda (3;3) katakka $x_{33} = 80$ ni yozamiz. Natijada quyidagi rejalar matrisasiga ega bo'lamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3 20	5 80	7	11
130	1 130	4	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

Bu holda bazis yechim quyidagicha bo'ladi.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Bunda ham band katakchalar soni n+m–1=3+4–1=6 ga teng bo'ldi, ya'ni tuzilgan boshlang'ich bazis yechim xosmas bazis yechim bo'ladi. Bunday yechim tuzilayotganda yo'l harajati inobatga olinadi. Shu sababdan tuzilgan rejaga mos keluvchi transport harajati ko'pincha "shimoliy-g'arb burchak" usuldagi harajatdan kichik va optimal yechimga yaqinroq bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$F(X)=20\cdot3+80\cdot5+130\cdot1+40\cdot8+80\cdot12+50\cdot7=2200.$$

Boshlang'ich bazis yechim qurishning yana boshqa usullari ham mavjud.

Masalan, "ustundagi minimal harajatlar usuli", "qatordagi minimal harajatlar" usuli va boshqalar.

Bunday usullar yordamida transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish mumkin. Odatda optimal yechimga yaqin bo'lgan boshlanqich bazis yechimni topishga yordam beruvchi usullardan foydalangan ma'qul.

Tuzilgan boshlang'ich bazis yechimni optimal yechimga aylantirish uchun potensiallar usuli deb ataluvchi algoritmdan foydalanish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalalarning matematik modelini tuzing hamda "shimoliy-g'arb burchak" usuli va "minimal harajatlar" usulidan foydalanib boshlang'ich bazis yechimlarini toping.

1.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
Talab hajmi	70	40	70	45	

2.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**			
	75	80	60	85
100	6	7	3	5
150	1	2	5	6
50	8	10	20	1

3.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	120	160	120
90	9	8	10
85	11	12	8
75	7	10	13

150	12	7	10

4.

Ta’minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste’molchilarning mahsulotga bo’lgan talabi		
	400	380	120
330	6	5	3
270	5	9	8
300	8	3	7

5.

Ta’minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste’molchilarning mahsulotga bo’lgan talabi		
	300	300	220
270	5	3	2
290	1	6	7
260	3	1	3

6.

Ta’minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste’molchilarning mahsulotga bo’lgan talabi		
	450	450	450
500	7	9	3
370	3	7	9
480	9	3	5

7.

Ta’minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste’molchilarning mahsulotga bo’lgan talabi		
	240	240	240
278	8	9	7
192	7	8	9
250	9	7	8

8.

Ta’minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste’molchilarning mahsulotga bo’lgan talabi		
	180	360	360
150	7	6	5
180	5	7	6

270	6	5	7
300	7	8	9

9.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	300	200	200
125	10	9	8
190	8	10	9
210	9	7	10
175	7	8	7

10.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	500	450	350
310	6	7	9
290	9	8	6
300	5	9	4
400	7	5	7

19-MAVZU. TRANSPORT MASALASINING OPTIMAL YECHIMINI TOPISH

1-masala. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini potensiallar usulidan foydalanib toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Iste'molchilarning talabi	150	120	80	50	

Yechish: Masalaning berilganlaridan foydalanib hisoblash jadvalini tuzamiz va boshlang'ich bazis rejani "minimal xarajatlar" usulidan foydalanib topamiz.

1-jadval

a_i \ b_j	150	120	80	50	U_i
100	3 20	5 80- θ	7 2 θ	11 -7	$U_1 = 0$
130	1 130	4 -1	6 1	2 0	$U_2 = -2$
170	5 1	8 40+ θ	12 80- θ	7 50	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 3$	$V_2 = 5$	$V_3 = 9$	$V_4 = 4$	θ=80

Topilgan boshlang'ich reja

$$X_0 = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Ushbu rejaga mos kelgan umumiy transport xarajati

$$F(X_0) = 2220.$$

Topilgan boshlang'ich bazis rejani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun ta'minotchilarga mos ravishda U_1, U_2, U_3 iste'molchilarga mos ravishda V_1, V_2, V_3, V_4 potensiallarni mos qo'yamiz hamda band kataklar uchun potensial tenglamalar tuzamiz:

$$U_1 + V_1 = 3; \quad U_1 + V_2 = 5; \quad U_2 + V_1 = 1;$$
$$U_3 + V_2 = 8; \quad U_3 + V_3 = 12; \quad U_3 + V_4 = 7.$$

Hosil bo'lgan sistemaning aniq bir yechimini topish uchun $U_1 = 0$ deb qabul qilamiz va qolgan potensiallarning son qiymatini topamiz.

$$U_1 = 0;\ U_2 = -2; U_3 = 3;$$
$$V_1 = 3;\ V_2 = 5; V_3 = 9; V_4 = 4.$$

Topilgan potensiallarning son qiymatini 1-jadvalning o'ng tomoni va pastiga (m+1 – qator va n+1 – ustunga) joylashtiramiz. Ushbu hisob kitoblarni jadvalning o'zida bajarsa ham bo'ladi.

Endi bo'sh katakchalarda optimallik baholarini hisoblaymiz:

$$\Delta_{13} = 9 + 0 - 7 = 2; \quad \Delta_{14} = 0 + 4 - 11 = -7;$$
$$\Delta_{22} = 5 - 2 - 4 = -1; \quad \Delta_{23} = 9 - 2 - 6 = 1;$$
$$\Delta_{24} = 4 - 2 - 2 = 0; \quad \Delta_{31} = 3 + 3 - 5 = 1.$$

Topilgan sonlarni 1-jadvaldagi bo'sh kataklarning pastki chap burchagiga joylashtiramiz. Optimallik baholari orasida musbatlari ham bor:

$$\Delta_{13} = 2 > 0;\ \ \Delta_{23} = 1 > 0;\ \ \Delta_{31} = 1 > 0.$$

Demak, topilgan bazis reja optimal reja emas. Unda

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \max(2;1;1) = 2$$

shartni qanoatlantiruvchi (A_1, B_3) katakchaga $x_{13} = \theta$ sonni kiritamiz va to'rtburchakli

$$(A_1, B_3) \to (A_3, B_3) \to (A_3, B_2) \to (A_1, B_2) \to (A_1, B_3)$$

yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymatini topamiz:

$$\theta = \min(80;80) = 80.$$

Yuqoridagi (5) formulalar yordamida yangi X_1 bazis rejani aniqlaymiz. X_1 xos reja bo'lmasligi uchun (A_2, B_2) va (A_3, B_3) katakchalardan bittasini, ya'ni xarajati katta bo'lgan (A_3, B_3) ni bo'sh katakchaga aytantirib, (A_2, B_2) katakchadagi taqsimotni esa 0 ga teng, deb qabul qilmiz va bu katakchani band katakcha deb qaraymiz. Bu holda yangi bazis reja quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

2-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 20- θ	5 0+ θ	7 80	11 -7	$U_1 = 0$
130	1 130	4 -1	6 -1	2 0	$U_2 = -2$
170	5 Θ 1	8 120-θ	12 -2	7 50	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 3$	$V_2 = 5$	$V_3 = 7$	$V_4 = 4$	θ=20

Jadvaldan foydalanib band katakchalarga mos keluvchi potensial tenglamalar tuzib, potensiallarning son qiymatini topamiz:

$$U_1 + V_1 = 3; \quad U_1 + V_2 = 5; \quad U_1 + V_3 = 7;$$
$$U_2 + V_1 = 1; \quad U_3 + V_2 = 8; \quad U_3 + V_4 = 7.$$

$$U_1 = 0;\ U_2 = -2; U_3 = 3;$$
$$V_1 = 3;\ V_2 = 5; V_3 = 7; V_4 = 4.$$

Endi bo'sh katakchalar uchun optimallik baholarini tuzamiz:

$$\Delta_{14} = 0 + 4 - 11 = -7; \quad \Delta_{23} = -2 + 7 - 6 = -1;$$
$$\Delta_{22} = -2 + 5 - 4 = -1; \quad \Delta_{31} = 3 + 3 - 5 = 1;$$
$$\Delta_{24} = -2 + 4 - 2 = 0; \quad \Delta_{33} = 3 + 7 - 12 = -2.$$

Bundan ko'rinadiki, (A_3, B_1) katakchadagi optimallik bahosi $\Delta_{31} = 1 > 0$. Demak, X_1 reja optimal reja emas. (A_3, B_2) katakchaga $x_{31} = \theta$ ni kiritib, bazis rejani optimal rejaga yaqinlashtirish mumkin. (A_3, B_2) katakchaga θ ni kiritib, uni band katakchaga aytantiramiz va

$$(A_3, B_1) \to (A_3, B_2) \to (A_1, B_2) \to (A_1, B_1)$$

to'rtburchakli yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymati 20 ga teng bo'ladi. (5) formulalar yordamida yangi X_2 bazis rejani aniqlaymiz.

3-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	^{3} $\boxed{-1}$	^{5} 20	^{7} 80	^{11} $\boxed{-7}$	$U_1 = 0$
130	^{1} 130-θ	^{4} $\boxed{0}$	^{6} $\boxed{0}$	^{2} $\boxed{1}$ θ	$U_2 = -1$
170	^{5} 20+ θ	^{8} 100	^{12} $\boxed{-2}$	^{7} 50- θ	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 7$	$V_4 = 4$	θ=50

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}; \qquad F(X_2) = 2040.$$

Yangi X_2 bazis rejani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun potensiallarning son qiymatini va bo'sh kaktaklardagi optimallik baholarini jadvalning o'zida hisoblaymiz.

Jadvaldan ko'riladiki, $\Delta_{24} = 1 > 0$. Demak, X_2 bazis reja optimal reja bo'lmaydi. (A_3, B_4) katakchaga θ sonni kiritib,

$$(A_2, B_4) \to (A_3, B_4) \to (A_3, B_1) \to (A_2, B_1)$$

yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymatini topamiz.

$$\theta = \min(130; 50) = 50.$$

(5) formuladan foydalanib yangi bazis yechimni topamiz.

4-jadval

a_i \ b_j	150	120	80	50	U_i
100	3 -1	5 20	7 80	11 -8	$U_1 = 0$
130	1 80	4 0	6 0	2 50	$U_2 = -1$
170	5 70	8 100	12 -2	7 -1	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 7$	$V_4 = 3$	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad F(X_4) = 1990.$$

X_4 xosmas bazis yechim. Bu yechim optimal yechim bo’ladi, chunki u optimallik shartlarini qanoatlantiradi:

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - c_{11} = -1; \qquad \Delta_{23} = (U_2 + V_3) - c_{23} = 0;$$
$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - c_{14} = -8; \qquad \Delta_{33} = (U_3 + V_3) - c_{33} = -2;$$
$$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) - c_{22} = 0; \qquad \Delta_{34} = (U_3 + V_4) - c_{34} = -1.$$

Demak, $X_4 = X_{opt}$; $F_{\min} = F(X_4) = 1990.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi transport masalalarining boshlang'ich bazis yechimlarini hamda optimal yechimi potensiallar usuli bilan topilsin.

1.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahra hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190
A_3	3	5	8	9	90
Talab hajmi	80	60	170	80	

2.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Talab hajmi	40	60	80	60	

3.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Talab hajmi	30	30	10	20	

4.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Talab hajmi	110	90	120	80	150	

5.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	230
A_3	3	8	1	2	160
Talab hajmi	130	220	90	70	

6.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Talab hajmi	80	100	80	100	

7.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	70
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	80
Talab hajmi	80	50	50	110	

8.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Talab hajmi	95	85	100	160	

9.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	3	5	2	180
A_2	4	1	6	7	140
A_3	1	9	4	3	200
Talab hajmi	100	60	280	80	

10.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B$_1$	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	1	3	3	40
A_2	2	6	4	7	40
A_3	3	3	6	4	40
Talab hajmi	20	30	20	50	

11.

b_j \ a_i	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

12.

b_j \ a_i	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

13.

b_j \ a_i	100	110	120	90
115	9	8	10	11
125	11	10	9	8
160	3	7	5	6

14.

b_j \ a_i	90	90	90	90
100	2	7	9	10
120	3	3	6	8
180	4	2	7	4

15.

b_j \ a_i	60	90	40	60
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
70	6	7	8	9
90	9	6	5	4

16.

b_j \ a_i	120	45	90	55
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

17.

b_j \ a_i	35	25	20
20	5	2	3
30	3	5	2
20	2	5	3

18.

b_j \ a_i	120	120	120
150	2	1	3
140	1	3	2
110	3	2	4

19.

b_j \ a_i	45	75	90	90
80	1	5	3	2
120	6	3	2	1
120	2	6	5	3

20.

b_j \ a_i	150	170	80	70
117	5	6	3	1
123	1	4	7	8
160	6	9	5	4

21. 3 ta omborxonaning har birida mos ravishda 750, 350 va 200 tonna bir jinsli mahsulot joylashgan. Ushbu mahsulotlarni talablari mos ravishda 300, 400, 250 va 350 tonna bo’lgan 4 ta do’konga yuborish kerak. Har bir omborxonadan har bir do’konga bir tonna mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi xarajatlar matritsasi ko’rinishida berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Omborxonalardan do’konlarga minimal xarajat sarf qilib mahsulot tashish rejasini aniqlang.

22. Uchta zavodda ishlab chiqarilgan betonlar 4 ta qurilish ob’ektiga yuboriladi. Har bir zavodning ishlab chiqarish quvvati, har bir qurilish ob’ektining betonga bo’lgan talabi hamda har bir zavoddan har bir qurilish ob’ektiga bir tonna betonni tashish xarajatlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Beton zavodlari	**Qurilish ob’ektlari**				**Zavodlarning ishlab chiqarish quvvati**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	13	11	15	500
A_2	12	21	16	14	850
A_3	10	16	14	15	600
Betonga bo’lgan talab hajmi	400	550	700	300	

Umumiy transport xarajatlarini minimallashtiruvchi tashish rejasini aniqlang.

23. 3 ta omborxonada guruch saqlanadi. Ulardan birinchisida 135 tonna, ikkinchi va uchinchisida mos ravishda 165 va 160 tonnadan guruch zaxirasi mavjud. Bu guruchlar 4 ta do’konga yuboriladi. Birinchi do’konning guruchga bo’lgan talabi 110 tonna, ikkinchisiniki 120 t., uchinchi va to’rtinchi do’konlarning talabi mos ravishda 110 tonna va 120 tonnani tashkil qiladi. 1 tonna mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari matritsasi quyidagi ko’rinishga ega.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Qaysi omborxonani qaysi do’koniga biriktirilganda sarf qilinadigan umumiy transport xarajatlari minimal bo’ladi?

24. Uchta fermer xo'jaligidan 4 ta paxta tozalash zavodlariga paxta yuboriladi. Fermer xo'jaliklardagi paxta zaxirasi, paxta tozalash zavodlarining talabi va bir tonna paxtani tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda aks ettirilgan.

Fermer xo'jaliklari	**Paxta tozalash zavodlari**				**Paxta zahirasi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	6	125
A_2	2	5	6	3	155
A_3	5	2	3	5	150
Paxtaga bo'lgan talab hajmi	100	110	105	115	

Xo'jaliklardagi paxtani paxta tozalash zavodlariga optimal taqsimlash rejasini toping.

25. Uchta fermer xo'jaligidan 4 ta omborga kartoshka tashish rejalashtirilmoqda. Fermer xo'jaliklardagi kartoshka zahirasi, omborlarining kartoshkani saqlash imkoniyati (quvvati) va bir tonna kartoshkani tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Fermer xo'jaliklari	**Omborlar**				**Kartoshka zahirasi (t)**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	4	5	8	145
A_2	4	7	8	5	175
A_3	7	4	5	7	170
Omborxonalar quvvati (t)	120	130	115	125	

Fermar xo'jaliklaridan omborxonalarga kartoshkani optimal tashish rejasini toping.

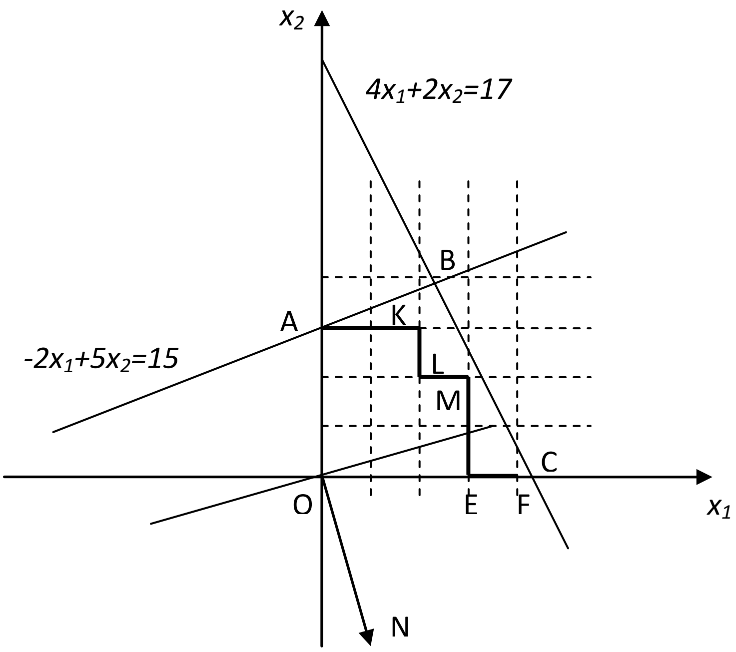
20-MAVZU. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

1-masala.

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 17, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 4x_2 \to \max.$$

Yechish: R^2 tekislikda berilgan masala o'zgaruvchilarining butun sonli bo'lishi shartiga e'tibor bermasdan, uni oddiy chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida grafik usulda yechamiz (1-chizma).



1-chizma

Natijada *OABC* qavariq ko'pburchakni, ya'ni joiz rejalar to'plamini hosil qilamiz hamda *C*(17/4;0) nuqta maqsad funksiyasiga maksimum qiymat beruvchi nuqta ekanligini aniqlaymiz. Bu holda masalani optimal yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$X^0 = \left(\frac{17}{4};0\right), \qquad F_{\max} = \frac{17}{4}.$$

Topilgan yechim butun sonli emas. Shuning uchun *OABC* ko'pburchakni uchlari butun sonlardan iborat bo'lgan *OAKLMEF* ko'pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalarining koordinatlari butun sonlardan iborat bo'ladi. Ana shu burchak nuqtalarning birida maqsad funksiya maksimumga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun $x_1 - 4x_2 = 0$ chiziqni $N(1;-4)$ vektor yo'nalishida o'z-o'ziga parallel ravishda surib boramiz va shu yo'nalishdagi burchak nuqta $F(4;0)$ ni topamiz. Ushbu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan butun sonli programmalashtirish masalasining optimal yechimi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$X^0 = (4;0), \qquad F_{\max} = 4.$$

2-masala. Quyidagi butun sonli programmalashtirish masalasini Gomori usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \le 40, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 29, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \to \min.$$

Masalaga x_3 va x_4 qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib quyidagi, kanonik ko'rinishdagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 + x_3 = 40, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \to \min.$$

Chegaraviy shartlarning barcha koeffisiyentlari butun sonlardir. Shu sababdan x_1, x_2 o'zgaruvchilarning butunligi x_3, x_4 o'zgaruvchilarning butun bo'lishligiga olib keladi.

Demak, kanonik ko'rinishga keltirilgan masalani to'la butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida qarash mumkin. Gomori usulidan foydalanamiz.

Masalani oldin simpleks usuli yordamida yechamiz.

Bazis	C_{baz}	P_0	1	-20	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4
X_3	0	40	-1	10*	1	0
X_4	0	29	4	2	0	1
Δ_j		0	-1	**20**	0	0
X_2	-20	4	-1/10	1	1/10	0
X_4	0	21	21/5*	0	-1/5	1
Δ_j		-80	**2**	0	-2	0
X_2	-20	9/2	0	1	2/21	1/42
X_1	1	5	1	0	-1/21	5/21
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21

X_{opt}=(5; 9/2; 0; 0), $F_{\min} = -85$. Yechimning butun bo'lishlik shartini qanoatlantirmaydi. Shu sababdan oxirgi simpleks jadvalga qo'shimcha satr kiritamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlar kiritish orqali

$$q_1 = \frac{9}{2} - \left[\frac{9}{2}\right] = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}; \qquad q_{11} = q_{12} = 0;$$

$$q_{13} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21}; \qquad q_{14} = \frac{1}{42} - 0 = \frac{1}{42}.$$

quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz.

$$q_{13}x_3 + q_{14}x_4 \geq q_1;$$

ya'ni

$$\frac{2}{21}x_3 + \frac{1}{42}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Ushbu tengsizlikdan quyidagi kesuvchi tenglamani hosil qilamiz.

$$-\frac{2}{21}x_3 - \frac{1}{42}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Ana shu tenglamalardagi x_5 ni bazis o'zgaruvchi deb qabul qilib simpleks jadvalining 4-satriga joylashtiramiz. So'ng ikkilangan simpleks usulni qo'llab x_5 ni bazisdan chiqarib x_4 ni kiritamiz.

Bazis	C_{baz}	P_0	1	-20	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_2	-20	9/2	0	1	2/21	1/42	0
X_1	1	5	1	0	-1/21	5/21	0
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21	0
X_5	0	-1/2	0	0	-2/21	-1/42	1
X_2	-20	4	0	1	0	0	1
X_1	1	0	1	0	-1	0	10
X_4	0	21	0	0	4	1	-42
Δ_j		-80	0	0	-1	0	-10

Hosil bo'lgan yechim butun sonli yechim bo'ladi. Demak, u butun sonli programmalashtirish masalasining optimal yechimi bo'ladi. Bu yechim quyidagidan iborat.

$$\tilde{X}_{opt}(0;4), \quad F_{\min} = -80.$$

Eslatib o'tamizki, shartlari tengsizlik

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (*)$$

bilan berilgan to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasidan kanonik ko'rinishga o'tishda, umuman olganda, to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasi hosil bo'lmaydi, chunki x_{n+i} qo'shimcha o'zgaruvchilar butun bo'lish shartiga bo'ysunmaydi.

Ammo (*) da barcha a_{ij} va b_i lar butun sonlar bo'lgan holda butun bo'lishlik shartini x_{n+i} larga ham tarqatish mumkin bo'ladi.

Agar (*) a_{ij} va b_i lar ratsional sonlar bo'lganda ham, kanonik ko'rinishga o'tishda to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini hosil qilish mumkin.

Buning uchun (*) ni a_{ij} va b_i lar maxrajlarining eng kichik umumiy karralisiga ko'paytirib faqat shundan so'ng x_{n+i} qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritish kerak bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. To'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini grafik usul bilan yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36, \\ x_1 \le 13, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \to \min.$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5, \\ x_1 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$

4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min.$

5. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = 3x_1 + x_2 \to \min.$

6. $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, \ j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min.$

7. Mebel fabrikasi stol va stullar ishlab chiqarishga moslashgan. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ikki xil yog'och va mehnat sarf qilinadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan resurslar miqdori (normasi), resurslar zahirasi va mahsulotlar birligidan olinadigan daromad miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	**Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan resurslar miqdori**		**Resurslar zahirasi**
	Stol	**Stul**	
1 tur yog'och	0,2	0,1	40

2 tur yog'och	0,1	0,3	60
Mehnat	1,2	1,5	371,4
Mahsulot birligidan olinadigan daromad (sh.b.)	6	8	

Fabrika qancha stol va stul ishlab chiqarsa uning daromadi maksimal bo'ladi?

8. Zavodda ikki *A* va *B* turdagi detallarni ishlab chiqarish uchun 3 xil uskunalar ishlatiladi. Mahsulot birligini ishlab chiqarishga uskunalarning sarf qiladigan vaqt normasi, ularning umumiy vaqt fondi hamda detallar birligidan zavodga keladigan daromadlar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Uskunalar	**Bitta detalni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vaqt normasi**		**Uskunalarning umumiy ish vaqti fondi (soat)**
	A	*B*	
I	10	8	168
II	5	10	180
III	6	12	144
Mahsulot birligidan olinadigan daromad (sh.b.)	14	18	

A va *B* detallardan qanchadan ishlab chiqarilganda zavodning oladigan daromadi maksimal bo'ladi?

9. Ikki xil mahsulot – kir yuvish mashinalari va muzlatgichlarni sotish uchun do'konda 4 xil resursdan foydalaniladi. Mahsulotlarning bittasini sotish uchun sarf qilinadigan turli resurslar miqdori, har bir resursning zahirasi hamda mahsulot birligidan olinadigan daromadlar quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	**Mahsulot birligini sotishga sarf qilinadigan resurslar miqdori**		**Resurslar zahirasi**
	Kir yuvish mashinasi	**Muzlatgich**	
I	2	2	12
II	1	3	9
III	4	2	16
IV	3	4	12

Mahsulot birligidan olinadigan daromad	12	15	

Chegaralangan resurslardan foydalanib savdo korxonasining daromadini maksimallashtiruvchi mahsulotlar sotish rejasini tuzing.

10. Fermer xo'jaligida qo'y va echkilar parvarish qilinadi. Ularni boqish uchun 3 turdagi ozuqa ishlatiladi. Bir kunda qo'y va echkilar uchun zarur bo'lgan turli ozuqalar miqdori, ozuqalarning zahirasi hamda har bir qo'y va echkini boqishdan fermerning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Ozuqa turlari	**Bir kunlik zarur bo'ladigan ozuqa miqdori**		**Ozuqa zahirasi**
	Qo'ylar	**Echkilar**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Har bir molni boqishdan fermerning oladigan daromadi	16	12	

Fermer eng katta daromad olishi uchun nechta qo'y va echki boqishi kerak?

II. Quyidagi to'la butun sonli chiziqli programmalashtirish masalalarini Gomori usuli bilan yeching.

11. $$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, \; j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 + x_4 \to \min.$$

12. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, \; j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$
$$F(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min.$$

13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, \; j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min.$$

14. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, \; j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, \; j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min.$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, \; j = 1,2,3,4. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$

17. Tikuv fabrikasida 4 xil ayollar ko'ylagi tikiladi. Buning uchun 3 xil gazmoldan foydalaniladi. Har bir ko'ylakka sarf qilinadigan gazmollar miqdori, gazmollar zahirasi va har bir tikilgan kiyimning narxi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Gazmol turlari	**Bitta ko'ylakka sarf qilinadigan gazmol miqdori (m)**				**Gazmollar zahirasi**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Tikilgan ko'ylaklar narxi	9	6	4	7	

Tikuv fabrikasida qaysi ko'ylakdan qancha tikilganda uning daromadi maksimal bo'ladi?

18. Bolalar tuflisi, botinkasi va yengil poyafzalini ishlab chiqarish uchun 4 xil xom ashyodan foydalaniladi. Bir juft oyoq kiyimini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom-ashyolar miqdori, xom-ashyolar zahirasi hamda bir juft oyoq kiyimini sotishdan olinadigan daromadlar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turlari	**Bir juft poyafzalga sarf qilinadigan xom-ashyo miqdori**			**Xom-ashyolar zahirasi**
	Tufli	**Botinka**	**Yengil poyafzal**	
I	4	3	3	6600
II	1	2	4	7200
III	3	3	5	5000
IV	2	5	5	4300
Bir juft poyafzaldan olinadigan daromad	8	6	9	

Daromadni maksimallashtiruvchi bolalar poyafzalini ishlab chiqarishning optimal rejasini tuzing.

19. Korxonada 3 xil *A*, *B*, *C* rusumdagi avtomobillar ta'mirlanadi. Buning uchun 3 xildagi uskunalardan foydalaniladi. Har bir avtomobilni ta'mirlashga turli uskunalarning sarf qiladigan vaqti, uskunalarning bir kunlik quvvati hamda avtomobillarni ta'mirlashdan olinadigan daromad hajmi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Uskunalar	**Bitta avtomobilni ta'mirlashga uskunalarning sarf qilinadigan vaqti**			**Uskunalarning bir kunlik quvvati**
	A	*B*	*C*	
I	1	2	4	32
II	2	1	2	42
III	3	2	2	30
Bitta avtomobilni ta'mirlashdan olinadigan daromad	6	10	12	

Daromadni maksimallashtiruvchi avtomobillarni ta'mirlashning optimal rejasini aniqlang.

20. Zavodda 3 xil *A*, *B*, *C* turdagi motorlar ishlab chiqariladi. Ushbu motorlarni ishlab chiqarishga sarf qilinadigan resurslar miqdori, resurslarning bir smenadagi sarfi, har bir motorni ishlab chiqarishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	**Bitta motorni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan resurslar miqdori**			**Resurslarning bir smenadagi sarfi**
	A	*B*	*C*	
I	3	2	-	51
II	1	4	-	48
III	3	3	1	67
Bitta motorni sotishdan olinadigan daromad	4	5	1	

Har bir motordan qancha miqdorda ishlab chiqarilganda zavodning daromadi maksimal bo'ladi?

21-MAVZU. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI VA UNING GEOMETRIK TALQINI

Grafik usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \min(\max).$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = x_1 \cdot x_2 \to \max.$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \to \min(\max).$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$

6. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = x_1 \cdot x_2 \to \max.$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min.$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min(\max).$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min\ (\max).$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min.$

11. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = 2x_1 + x_2 \to \min(\max).$

12. $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 8, \\ 0 \le x_1 \le 6, \\ 0 \le x_2 \le 4, \end{cases}$

$Z = x_1 + 3x_2 \to \min(\max).$

13. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min(\max).$

14. $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \\ Z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_2 \le 6. \\ Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max) \end{cases}.$

16. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le -20, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \\ Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min(\max). \end{cases}$

17. Korxonaning ikki sexida bir xil mahsulot ishlab chiqariladi. Kelgusi yilda ushbu mahsulotga bo’lgan talab ko’pi bilan 50 tonna bo’lishi kutilmoqda. Birinchi sexda ishlab chiqariladigan x_1 miqdordagi mahsulot uchun $9(x_1 - 30)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Ikkinchi sexda ishlab chiqariladigan x_2 tonna mahsulot uchun $4(x_2 - 50)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Har bir sexda qancha mahsulot ishlab chiqarilganda sarf qilingan xarajat miqdori eng kam bo’ladi va mahsulotga bo’lgan talab qondiriladi?

18. Ma’lum bir xududda *A* mahsulotga bo’lgan maksimal talab 70 birlikni tashkil qiladi. Ushbu mahsulot 2 ta korxonada ishlab chiqariladi. Birinchi korxonada ishlab chiqarilgan x_1 mahsulotga $4(x_1 - 40)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Ikkinchi korxonada ishlab chiqarilgan x_2 miqdordagi mahsulotga $25(x_2 - 60)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Har bir korxonada qanchadan mahsulot ishlab chiqarilganda mahsulotga bo’lgan talab qondiriladi va sarf qilingan jami xarajat miqdori minimal bo’ladi?

19. Do’konda ikki xil mahsulot sotiladi. Birinchi mahsulotning x_1 birligini $(x_1 - 40)^2$ so’mdan, ikkinchi mahsulotning x_2 birligini $(x_2 - 15)^2$ so’mdan sotiladi.

Tovarlarning maksimal sotish hajmi 54 birlikni tashkil qiladi. Do'konda qaysi mahsulotdan qanchadan sotilganda uning daromadi maksimal bo'ladi?

20. Firma o'zi ishlab chiqargan mahsulotlarni 2 xil yo'l bilan, ya'ni do'kon orqali yoki savdo agentlari orqali sotadi. Firma x_1 miqdordagi mahsulotni do'konlarda sotish uchun $(x_1 - 60)^2$ sh.b. miqdorida, x_2 miqdordagi mahsulotni savdo agentlari orqali sotganda $(x_2 - 80)^2$ sh.b. miqdorida xarajat sarf qiladi. Firmada ko'pi bilan 120 birlik mahsulot ishlab chiqariladi. Ushbu mahsulotlarni qanday yo'l bilan sotganda firmaning umumiy xarajati minimal bo'ladi?

22-MAVZU. SHARTSIZ MINIMUM MASALASI. LAGRANJ KO'PAYTUVCHILAR USULI

1-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasini yeching.

$$x_1 + x_2 = 1;$$
$$Z = x_1 x_2 \to \max.$$

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Bu funksiyadan x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^0 = -1/2,\ x_1^0 = x_2^0 = 1/2,\ Z = 1/4.$$

2-misol. Lagranj usulidan foydalanib quyidagi masalaning optimal yechimini toping.

$$x_1 + x_2 = 4$$
$$Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min)$$

Yechish: Logranj funksiyasini topamiz.

$$F\left(x_1, x_2, \lambda\right) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\left(4 - x_1 - x_2\right)$$

Ushbu funksiyadan x_1, x_2 va λ bo'yicha xususiy hosilalar olib ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 - \lambda = 0 \\ 2x_2 - \lambda = 0 \\ 4 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = 4 \\ x_1 = x_2 = 2 \end{matrix}$$

Demak, $X^0=\left(x_1^0,x_2^0\right)=\left(2;2\right)$ nuqta $Z=x_1^2+x_2^2$ funksiya uchun stasionar nuqta bo'ladi. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0, \qquad \Delta>0, \qquad A=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=2>0$$

Demak, $x^0=\left(2;2\right)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. Quyidagi funksiyalarning lokal ekstremumini toping.

1. $Z=x^2-y^2-3xy,$
$J: X^0(0;0); \quad Z_{\max}=0.$

2. $Z=x^2-xy+y^2+x-y+1,$
$J: X^0\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right); \quad Z_{\min}=\frac{4}{9}.$

3. $Z=4x_1^2+2x_2^2-5x_1-3x_2,$
$J: X^0\left(-\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right); \quad Z_{\min}=-\frac{43}{16}.$

4. $Z=5x_1+7x_2-3x_1^2-3x_2^2,$
$J: X^0\left(\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right); \quad Z_{\max}=-2.$

5. $Z=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$
$J: X^0\left(0;0;0\right); \quad Z_{\min}=0.$

6. $Z=3x_1-6x_1x_2+3x_2^2-x_3^2+4x_2x_3,$
$J: X^0\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2};-1\right); \quad Z_{\min}=-\frac{9}{4}.$

7. $Z=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3,$
$J: X^0(0;0;0); \quad Z_{\max}=0.$

8. $Z=-x_1^2-x_2^2+6x_1+2x_2,$
$J: X^0\left(3;1\right); \quad Z_{\min}=10.$

9. $Z=9x_1^2+4x_2^2-2x_1-4x_2,$
$J: X^0\left(\frac{1}{9};\frac{1}{2}\right); \quad Z_{\min}=-\frac{10}{9}.$

10. $Z=4x_1^2+4x_2^2+8x_1-2x_2,$
$J: X^0\left(-1;\frac{1}{4}\right); \quad Z_{\min}=-\frac{17}{4}.$

II. Quyidagi masalalarni Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilari usuli bilan yeching.

11. $x_1+x_2=180,$
$Z=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2\to\min.$
$J: x_1=91; \quad x_2=89; \quad Z_{\min}=17278.$

12. $x_1+x_2=5,$
$Z=x_1^2+x_2^2\to\min(\max).$
$J: x_1=\frac{5}{2}; \ x_2=\frac{5}{2}; \ Z_{\min}=\frac{25}{2}.$

13. $\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & 2x_1 - 3x_2 = 12, \\ & Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \min(\max). \\ & J: x_1 = \frac{63}{26}; \quad x_2 = -\frac{62}{26}; \quad x_3 = \frac{103}{26}; \\ & Z_{\max} = 15\frac{27}{52}. \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} & x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 = 12, \\ & 2x_1 - x_2 = 8, \\ & Z = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \to \min(\max). \\ & J: X^0 = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{28}{39}\right); \\ & Z_{\min} = -\frac{56}{27}. \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} & x_1 + x_2 = 4, \\ & x_2 + x_3 = 4, \\ & Z = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \to \min(\max), \\ & J: X^0 = (2;2;2), \quad Z_{\max} = 8. \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 = 2, \\ & Z = x_1 + x_2 \to \min(\max). \\ & J: X^0 = (-1;-1), \; Z_{\min} = -2. \\ & \quad X^0 = (1;1), \qquad Z_{\max} = 2. \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} & 2x_1 + 3x_2 = 12, \\ & Z = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min). \\ & J: X^0 = \left(\frac{6}{13}; \frac{48}{13}\right); \quad Z_{\min} = \frac{204}{13}. \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} & x_1 + 3x_2 = 15, \\ & 2x_1 + x_2 = 2, \\ & Z = 4x_1^2 + 3x_2^2 \to \max(\min). \\ & J: X^0 = \left(\frac{1}{5}; \frac{8}{5}\right); \quad Z_{\min} = \frac{196}{25}. \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} & x_1 + 5x_2 = 10, \\ & Z = 6x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \to \max. \\ & J: X^0 = \left(\frac{180}{106}; \frac{88}{53}\right); \quad Z_{\max} = 14{,}5. \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} & x_1 \cdot x_2 = 9, \\ & Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min). \\ & J: X_1^0 = (-3;-3); \quad X_2^0 = (3;3); \\ & Z_{\min} = 18. \end{aligned}$

21. Ikkita korxonada bir xil mahsulot ishlab chiqarish rejalashtirilgan bo’lib, ushbu mahsulotga bo’lgan talab 200 birlikni tashkil qiladi. I korxonada ishlab chiqiladigan x_1 miqdordagi mahsulotga $4x_1^2$ miqdorda, II korxonada x_2 miqdordagi mahsulot ishlab chiqarish uchun esa $20x_2 + 6x_2^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Har bir korxonada qanchadan miqdorda mahsulot ishlab chiqarilganda umumiy xarajatlar miqdori eng kam bo’ladi? $J: X^0 = (121;\, 79); \quad Z_{\min} = 97890.$

22. Korxonada ikkita texnologiya asosida mahsulot ishlab chiqariladi. Birinchi texnologiya bo’yicha ishlab chiqariladigan x_1 miqdordagi mahsulotga $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$ miqdorda, ikkinchi texnologiya asosida ishlab chiqariladigan x_2

miqdordagi mahsulotga $b_0 + b_1 x_2 + b_2 x_2^2$ miqdordagi xarajat qilinadi. Korxonada d birlik mahsulot ishlab chiqarishi kerakligini nazarda tutib, har bir texnologiya bo'yicha qancha mahsulot ishlab chiqarilganda sarf qilingan umumiy xarajatlar miqdori minimal bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

23. Korxonada bir xil mahsulot 2 xil texnologiya asosida ishlab chiqariladi. Birinchi texnologiya bo'yicha x_1 miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun $3x_1^2 - 5x_1$ miqdorda, ikkinchi texnologiya bo'yicha x_2 miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun $4x_2^2 - 2x_2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Korxona bozor talabini inobatga olgan holda 60 birlik mahsulot ishlab chiqarishni rejalashtirgan. Umumiy xarajatlarni minimallashtirish uchun har bir texnologiya bo'yicha qancha mahsulot ishlab chiqarish kerakligini aniqlang. $J: X^0 = \left(\frac{69}{2}; \frac{51}{2}\right); \quad Z_{\min} = \frac{23793}{4}.$

24. Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotni savdo do'konlari va bozorda sotish rejalashtirilgan. x_1 miqdordagi mahsulotni savdo do'konlarida sotish uchun $x_1^2 - 2x_1$ sh.b. da, x_2 miqdordagi mahsulotni savdo agentlari yordamida sotish uchun $3x_2^2 - 6x_2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Firmada ishlab chiqarilgan 100 birlik mahsulotni eng kam harajat sarf qilib sotish yo'lini aniqlang.

$J: X^0 = \left(\frac{149}{2}; \frac{51}{2}\right); \quad Z_{\min} = 7199.$

25. Korxonada ishlab chiqariladigan 120 tonna mahsulotning x_1 tonnasi avtotransport vositasida, x_2 tonnasi esa poyezdda iste'molchilarga yetkazib beriladi. Poyezdda tashilgan mahsulotga $(x_2 - 2)^2$ miqdorda, avtotransportda tashilgan mahsulotga $(x_1 - 3)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Ishlab chiqariladigan mahsulotni iste'molchilarga qanday yo'l bilan yetkazib berilganda sarf qilingan xarajatlar miqdori minimal (eng kam) bo'ladi? $J: X^0 = \left(\frac{121}{2}; \frac{119}{2}\right); \quad Z_{\min} = \frac{13457}{2}.$

23-MAVZU. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

1-misol. Quyidagi funksiyaning qavariqligini tekshiring.

$$F(X) = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 + 6.$$

Yechish: $F(X)$ funksiyadan x_1 va x_2 lar bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_1} = 10x_1 - 3x_2 + 3,$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_2} = 4x_2 - 3x_1 - 4,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = -3, \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = -3.$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalardan foydalanib Gesse matritsani tuzamiz:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ushbu matritsaning bosh minorlari

$$\Delta_1 = 10 > 0, \quad \Delta_2 = |H| = 31 > 0.$$

Demak, $F(X)$ funksiya qat\`iy botiq funksiya bo'ladi.

2-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 \rightarrow \min.$$

masalani grafik usulda yeching va topilgan yechim uchun Kun-Takker shartlari o'rinli ekanligini ko'rsating.

Yechish: Masalani grafik usulda yechib, $X^0(2;2)$ va $f(2;2) = 0$ ekanligini aniqlaymiz.

Endi shunday Λ^0 mavjud bo'lib, (X^0, Λ^0) nuqtada Kun-Takker shartlarining bajarilishini ko'rsatamiz.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$f(X, \Lambda) = \lambda_0 \left(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8\right) + \lambda_1 \left(2x_1 + x_2 - 2\right) +$$
$$+ \lambda_2 \left(8 - 2x_1 - x_2\right) + \lambda_3 \left(6 - x_1 - x_2\right)$$

X^0 nuqtada masalaning barcha shartlari qat'iy tengsizlikka aylanadi, ya'ni Sleyter sharti bajariladi, bu holda $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilishimiz mumkin.

Lagranj funksiyasidan $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_{3,}; \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2; \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2; \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda_3} = 6 - 2x_1 - x_2;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot 2 + 2 - 2 = 4 > 0. \qquad \frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2 \cdot 2 - 2 = 4 > 0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_3} = 6 - 2 - 2 = 2 > 0; \qquad \lambda_i^0 \frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_i} = 0$$

shartga ko'ra, λ_1, λ_2 va λ_3 larning qiymatlari nolga teng.

Demak, $(X^0, \Lambda^0) = \left(2; 2; 0; 0; 0\right)$ nuqtada haqiqatdan ham, Kun-Takker shartlari bajarilayapti. Demak u egar nuqta bo'ladi.

3-misol. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, $X_0 = \left(1; 0\right)$ nuqta quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini ko'rsating.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z = f\left(x_{1,} x_{_2}\right) = x_1^{\,2} - 2x_1 + 3x_2^{\,2} \to \min.$$

Yechish: $X^0\left(1; 0\right)$ nuqtada chegaraviy shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi, demak Sleyter sharti bajariladi. Bu holda $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilish mumkin, u holda Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F\left(x_{1,} x_{2,} \lambda_{1_2} \lambda_2\right) = x_1^{\,2} - 2x_1 + 3x_2^{\,2} + \lambda_1\left(4x_1 + 5x_2 - 8\right) + \lambda_2\left(2x_1 + x_2 - 4\right),$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial x_1} = \left(2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2\right)_{X^0} \ge 0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial x_2} = \left(6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2\right)_{X^0} \ge 0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_1}=\left(4x_1+5x_2-8\right)_{X^0}=-4<0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_1}\cdot\lambda_1^0=0\Rightarrow\lambda_1^0=0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_2}=(2x_1+x_2-4)_{X^0}=-2<0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_2}\cdot\lambda_2^0=0,\qquad\Rightarrow\qquad\lambda_2^0=0.$$

Demak, $\left(X^0,\Lambda^0\right)=\left(1;0;0;0\right)$ nuqta Kun-Takker shartlarini qanoatlantiradi. Bundan u Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun $X^0\left(1;0\right)$ nuqta berilgan masalaning yechimi bo'ladi.

Endi Kun-Takker teoremasidan foydalanib qavariq programmalashtirish masalasini yechish jarayoni bilan tanishamiz.

Buning uchun quyidagi masalaga murojaat qilamiz.

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 8,\\ 2x_1-x_2\le 12,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\end{cases}$$

$$Z=f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2\to\max.$$

Bu masaladagi maqsad funksiya chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ va $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ kvadratik funksiyalarning yig'indisidan iborat. Bunda $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ funksiya manfiy aniqlangan kvadratik formadan iborat bo'lgani uchun botiq funksiya bo'ladi. Chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ funksiyani ham botiq funksiya, deb qarash mumkin. Shunday qilib, berilgan masalaning chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa botiq funksiyadan iborat bo'lgan qavariq programmalashtirish masalasidan iborat. Ushbu masalaga Kun-Takker teoremasini qo'llash mumkin.

Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+\lambda_1(8-x_1-2x_2)+$$
$$+\lambda_2(12-2x_1+x_2)$$

Lagranj funksiyasining egar nuqtasining mavjudligini ifodalovchi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0; \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0; \\ \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0; \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \tag{II}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \tag{III}$$

(I) sistemaga v_1, v_2, w_1, w_2 nomanfiy qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases} \tag{IV}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$
$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

Ushbu sistemani yana quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{cases} v_1 = (2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2); \\ v_2 = (4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2); \\ w_1 = (8 - x_1 - 2x_2); \\ w_2 = (12 - 2x_1 - x_2); \end{cases} \tag{V}$$

$$x_1 v_1 = 0, \quad x_2 v_2 = 0, \quad \lambda_1 w_1 = 0, \quad \lambda_2 w_2 = 0. \tag{VI}$$

Ushbu tengliklarni (II) ni nazarga olib quyidagicha yozish mumkin. Endi (IV) sistemaning (VI) shartni qanoatlantiruvchi bazis yechimini topamiz.

Demak, ushbu yechimni ifodalovchi nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi va berilgan masalaning optimal yechimini beradi.

(IV) sistemaning (1) va (2) tenglamasiga mos ravishda z_1 va z_2 sun'iy o'zgaruvchilarni kiritib quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini tuzamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,$$

$$v_1 \geq 0, v_2 \geq 0, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0.$$

$$Z = Mz_1 + Mz_2 \to \min.$$

Ushbu masalani sun'iy bazis vektor usuli bilan yechamiz.

Baz.	C_{baz}	P_0	0	0	0	0	0	0	M	M	0	0
			X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	V_1	V_2	Z_1	Z_2	W_1	W_2
Z_1	M	2	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
Z_2	M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	1	0	0
W_1	0	8	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
W_2	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		6M	2M	**4*M****	3M	M	-M	-M	0	0	0	0
Z_1	M	$\boxed{2}$	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
X_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0
W_2	0	13	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		**2*M****	2M	0	M	2M	-M	0	0	0	0	0
X_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0
X_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	5	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0
W_2	0	11	0	0	-1/2	-9/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tuzilgan chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi:

$$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 1,\ \lambda_1^0 = 0,\ \lambda_2^0 = 0,$$

$$v_1^0 = 0,\quad v_2^0 = 0,\quad w_1^0 = 5,\quad w_2^0 = 11.$$

Ushbu yechim (IV) sistemaning (VI) shartni qanoatlantiruvchi bazis yechimi bo'ladi.

Demak, $(X^0,\Lambda^0)=(1;1;0;0)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Bunda $X^0=(1;1)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'lib, unda $f(X^0)=3$ bo'ladi.

4-misol. [1]Chiziqsiz programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin.

$$G^i(x)\geq r_i, \qquad (i=1,2,...,m)$$

$$x>0,$$

$$C=F(x)\to \min .$$

I. (a) maximallashtirish masalasiga aylantiring;

(b) masalada F va G^i funsiyalarning Kun-Takkerning yetarlilik teoremasidagi ekvivalaentlari qaysilar?

(c) F va G^i funksiyalarida yetarli maksimallashtirish shartlarini tuzish uchun botiqlik yoki qavariqlik shartlari qanday qo'yiladi?

(d) yuqoridagilar asosida, funksiyani minimallashtirish uchun Kun Takkerning yetarlilik shartlarini qanday qilib qo'llash mumkin?

II. Kun-Takkerning yetarlilik teoremasini qo'llab masalani yeching.

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2\leq 1 \\ x_1x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$C=x_1\to \min .$$

$$\begin{cases} x_1+x_2\geq 4 \\ x_1x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$C=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2\to \min .$$

$$\begin{cases} x_1^2-4x_1+x_2\geq 0 \\ x_1x_2\geq 0 \end{cases}$$

$$C=2x_1+x_2\to \min .$$

---

[1] Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. “Fundamental methods of mathematical economics”. 2013. pp. 427.

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. Quyidagi funksiyalarning qavariq yoki qavariq emasligini ko'rsating.

1. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=2x_{1}^{2}+x_{2}^{2}-x_{1}x_{2}+5x_{1}-6x_{2}+8;$

2. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=x_{1}^{2}-2x_{1}x_{2}+x_{2}^{2}+2x_{1}+x_{2};$

3. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=x_{1}^{2}+x_{2}^{2}-4x_{1}+5x_{2};$

4. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=3x_{1}^{2}-4x_{1}x_{2}+5x_{2}^{2}-5x_{1}-12x_{2};$

5. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=5x_{1}^{2}-x_{1}x_{2}-2x_{2}^{2}-2x_{1}+3x_{2};$

6. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=2x_{1}^{2}-3x_{1}x_{2}+2x_{2}^{2}+3x_{1}+5x_{2};$

7. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=8x_{1}+6x_{2}+3x_{1}x_{2}-2x_{1}^{2}-x_{2}^{2};$

8. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=3x_{1}^{2}+3x_{2}^{2}+5x_{1}x_{2}-6x_{1}-4x_{2}+20;$

9. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=4x_{1}^{2}+2x_{2}^{2}-x_{1}x_{2}-4x_{1}-2x_{2};$

10. $f\left(x_{1,}x_{2}\right)=5+x_{1}^{2}-x_{2}^{2}+2x_{1}x_{2}+5x_{1}+7x_{2};$

II. Quyidagi 11-14- masalalarda Kun-Takker shartlaridan foydalanib, berilgan nuqta qavariq programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini aniqlang.

11. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8, \\ 3x_1+x_2\le 15, \\ x_1+x_2\ge 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$

$$Z=f(x_1;x_2)=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2\to\max.$$

12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24, \\ x_1+2x_2\le 15, \\ 3x_1+2x_2\ge 24, \\ x_2\le 4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$

$$Z=f(x_1;x_2)=x_2^2+6x_1^2-6x_1+6\to\max.$$

13. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 \to \min.$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min.$

III. Quyidagi 15-19-masalalarni grafik usulda yeching va topilgan yechim Kun-Takker shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 8x_1 - x_2 \le 8, \\ -6x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = (x_1 - 3+)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min.$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = 4x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 + 10 \to \max.$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 + 17 \to \max.$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 6 \to \max.$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - 90x_1 - 48x_2 + 369 \to \max.$

IV. Quyidagi 20-25- masalalarni Kun-Takker teoremasidan foydalanib yeching.

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \to \min.$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_1 + 4 \to \max.$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 \to \min.$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 \to \min.$

24. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq -8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

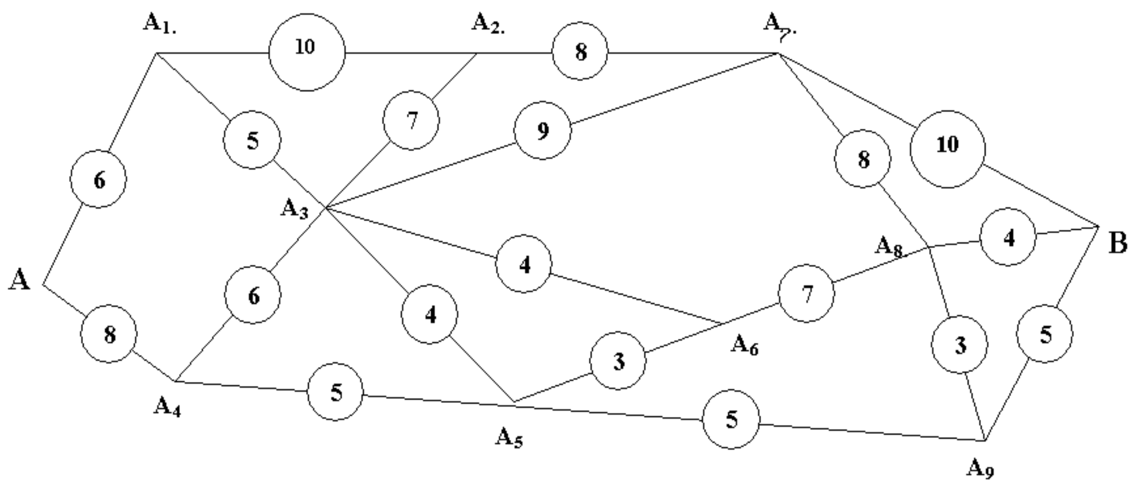
$Z = f(x_1, x_2) = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max.$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min.$

24-MAVZU. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH ELEMENTLARI

1-misol. Faraz qilaylik, *A* va *B* punktlarni o’zaro bog’lovchi temir yo’llar to’ri berilgan bo’lsin (1-chizma). Bunda har qanday ikki qo’shni punkt orasidagi masofa ma’lum va bu masofaning uzunligi 1-chizmadagi har ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma oraligidagi aylanachalarga yozilgan sonlardan iborat bo’lsin. *A* va *B* punktlarni eng qisqa yo’l bilan tutashtiruvchi marshrutni aniqlash talab qilinadi.



1-chizma

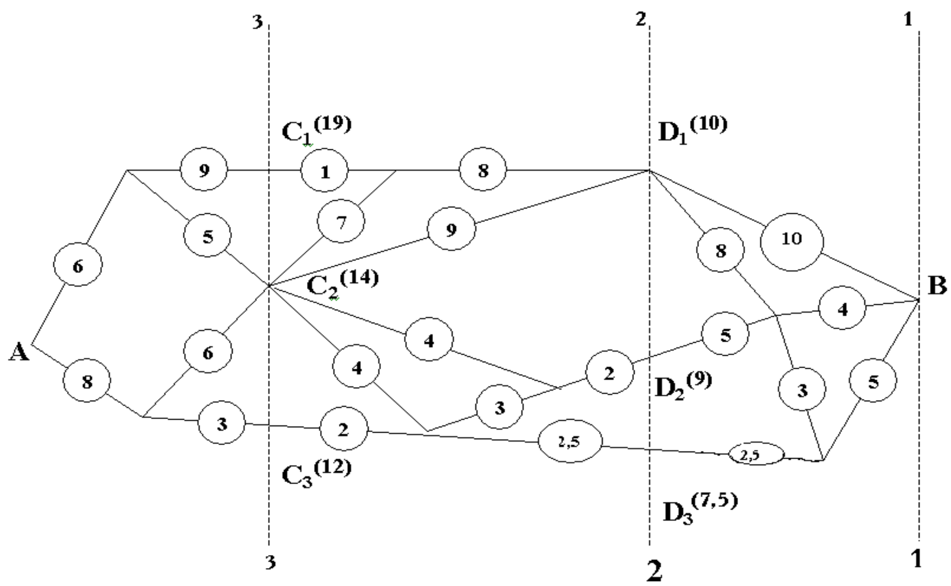
Masalani yechish uchun (1-1), (2-2), (3-3) chiziqlar yordamida berilgan temir yo’llar to’rini ayrim qismlarga (bosqichlarga) ajratamiz (2-chizma).

(2-2) chiziqning transport yo’llari to’ri bilan kesishgan nuqtalarini D_1, D_2, D_3 lar bilan, (3-3) chiziqning kesishgan nuqtalarini esa C_1, C_2, C_3 lar bilan belgilaymiz. Birinchi qadamda *B* nuqtadan D_1, D_2 va D_3 nuqtalargacha bo’lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz:

$B - D_1$:min (10, 8+4, 5+3+8)=10;

$B - D_2$:min(10+8+5, 4+5, 5+3+5)=9;

$B - D_3$:min (5+2,5, 4+3+2,5)=7,5.



2-chizma

2-chizmada D_1, D_2 , D_3 nuqtalardan so'nggi B punktgacha bo'lgan eng qisqa masofa qavs ichida yozilgan. So'ngra (3-3) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan C_1, C_2, C_3 nuqtalarni ko'ramiz. Bu nuqtalardan B nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz. Bu masofa

C_1 nuqta uchun min(1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+4+3+2+9, 1+7+4+2,5+7,5) =

= min(19, 23, 26, 22) = 19.

C_2 nuqta uchun min(7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9, 4+2,5+7,5) =

= min(25, 19, 15, 16, 14) = 14.

C_3 nuqta uchun min(2+2,5+7,5, 4+3+2+9) = min(12, 18) = 12.

Bu masofalar shaklda C_1, C_2, C_3 nuqtalar yonidagi qavs ichida yozilgan. 3 bosqichda A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofa topiladi. Bu masofa quyidagicha aniqlanadi:

min(6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12) = 23.

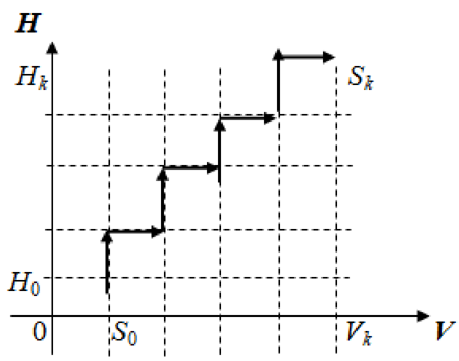
So'ngra A nuqtadan eng qisqa masofa bo'ylab B nuqtaga boradigan yo'lni belgilaymiz: $A \to A_4 \to A_5 \to A_9 \to B.$

2-misol. Samolyot dastlab H_0 balandlikda V_0 tezlik bilan uchayotgan bo'lsin. Uning uchish balandligini H_k va tezligini V_k gacha ko'tarish kerak bo'lsin. Samolyotning uchish balandligini H_0 dan H_k gacha, tezligini esa V_0 dan V_k gacha oshirishda sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini minimallashtirish masalasini hal qilish talab etiladi. Bunda aniq bir tezlik bilan uchayotgan samolyotning H_1 balandlikdan $H_2>H_1$ balandlikkacha ko'tarilishi uchun, hamda aniq bir balandlikda uchayotgan samolyotning tezligini V_1 dan $V_2>V_1$ gacha ko'tarish uchun sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorlari ma'lum deb qaraladi. Bu masala dinamik programmalashtirish masalasi sifatida quyidagicha tavsiflanadi: Samolyotning uchish balandligi va tezligini shunday boshqarish kerakki, natijada sarf qilingan umumiy yoqilg'i miqdori minimal bo'lsin.

Yechish: Samolyotning osmondagi holati ikkita parametr – tezlik (V) va balandlik (H) bilan aniqlanadi. Shuning uchun yechimni VOH tekislikda qidiramiz, ya'ni shu tekislikdagi $H=H_0$, $H=H_k$ va $V=V_0$, $V=V_k$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka qaraymiz.

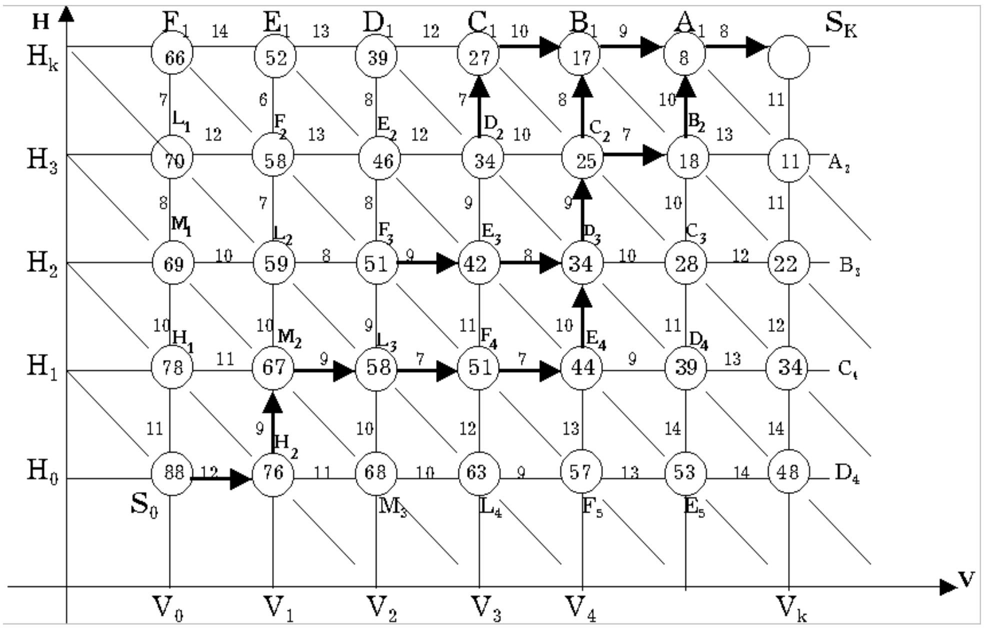
Samolyotni $S_0(V_0, H_0)$ holatdan $S_k(V_k, H_k)$ holatga, eng kam xarajat qilib, o'tkazish masalasi qo'yiladi. Bu masalani dinamik programmalashtirish usullari bilan yechish uchun $(H_k - H_0)$ kesmani n_1 ta teng kesmachalarga, $(V_k - V_0)$ kesmani esa n_2 ta teng kesmachalarga bo'lamiz, hamda har bir qadamda samolyot yo balandligini ($\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ birlikka), yoki tezligini ($\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ birlikka) oshiradi, deb qabul qilamiz.

S nuqtani S_0 holatdan S_k holatga turli yo'llar bilan o'tkazish mumkin. Bu yo'llar ichida eng kam yoqilg'i miqdoriga mos keluvchisini tanlash kerak.



3-chizma

3-misol. Masaladagi aniq ma'lumotlar quyidagi jadvalda tasvirlangan. Samolyotning H_k balandlikka ko'tarilishi va tezligini V_k gacha oshirishda sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorini minimallashtiruvchi yechimni aniqlang.



4-chizma

Ushbu shakldagi vertikal chiziqlardagi sonlar samolyot balandligini oshirgandagi, gorizontal chiziqlardagi sonlar esa u tezligini oshirgandagi sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini ko'rsatadi.

Masalani yechish jarayonini $n_1+n_2=4+6=10$ qadamlarga bo'lamiz.

Optimallashtirish jarayonini eng oxirgi qadamdan boshlaymiz. Bunda S_k ni o'z ichiga oluvchi o'ng tomondagi eng yuqori to'rtburchakka qaraymiz. Jadvaldan ko'rinadiki, S_k nuqtaga A_1 va A_2 nuqtalardan o'tish mumkin. Agar A_1 dan S_k ga o'tilsa (tezlik oshirilsa), u holda 8 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Agar A_2 nuqtadan S_k ga o'tilsa (balandlik oshirilsa), u holda 11 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Ushbu raqamlarni A_1 va A_2 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga yozamiz. Bu qadamda eng kam yoqilg'i sarfiga mos keluvchi $A_1 \to S_k$ yo'nalish shartli optimal yechim deb qabul qilinadi va strelka bilan belgilanadi.

9-qadamda B_1, B_2, B_3 nuqtalardan S_k nuqtaga eng kam yoqilg'i sarf qilib o'tish yo'lini aniqlaymiz. B_1 nuqtadan S_k ga $B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalishi orqali o'tib 17 birlik yoqilg'i sarf qilish mumkin. B_2 nuqtadan S_k ga ikkita yo'l bilan o'tish mumkin: I. $B_2 \to A_1 \to S_k$; II. $B_2 \to A_2 \to S_k$

Bunda I yo'lda 18 birlik, II yo'lda esa 24 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. B_3 nuqtadan S_k ga yagona $B_3 \to A_2 \to S_k$ yo'l bilan o'tish va 22 birlik yoqilg' sarf qilish mumkin. B_1, B_2, B_3 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga ulardan S_k nuqtagacha sarf qilinadigan xarajatlardan eng kami yoziladi. Eng kam xarajat bilan bog'liq bo'lgan $B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalish shartli optimal yo'nalishi sifatida strelka bilan belgilanadi.

8-qadamda C_1, C_2, C_3, C_4 nuqtalardan S_k nuqtagacha eng kam xarajat sarf qilib o'tiladigan yo'l qidiriladi. Bunda C_1 nuqtadan S_k ga yagona $C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalish orqali o'tib, 27 birlik yoqilg'i sarflash mumkin.

C_2 nuqtadan B_1 va B_2 nuqtalar orqali S_k nuqtaga o'tilganda teng miqdordagi (25 birlik) yoqilg'i sarf qilinadi.

C_3 nuqtadan S_k ga 2 ta o'tish yo'li mavjud:

I. $C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;   II. $C_3 \to B_3 \to A_2 \to S_k$.

Bunda I yo'l bilan o'tilganda 28 birlik va II yo'l bilan o'tilganda esa 34 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

C_4 nuqtadan S_k nuqtaga yagona

$$C_4 \to B_3 \to A_2 \to S_k$$

yo'l bilan o'tiladi va 34 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

Bu bosqichda shartli optimal boshqarish eng kam yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan $C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ va $C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$ yo'nalishlardan iborat bo'ladi. Bu yo'nalishlar strelka bilan ko'rsatiladi.

Shunday yo'l bilan davom etib, 7-qadamda 34 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 3 ta shartli optimal yo'nalish aniqlanadi:

a) $D_2 \to C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

b) $D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

c) $D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$.

6-qadamda 42 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 2 ta shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi:

a) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

b) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$.

5-qadamda 51 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan shartli optimal yo'nalishlar quyidagilar bo'ladi:

a) $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

b) $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

c) $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

d) $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$.

4-qadamda 58 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan shartli optimal yo'nalish topiladi:

$$L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k.$$

3-qadamda 67 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k;$$

$$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k;$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

2-qadamda 76 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k;$$

$$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k;$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

Oxirgi 1-qadamda 88 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k;$$

$$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k;$$

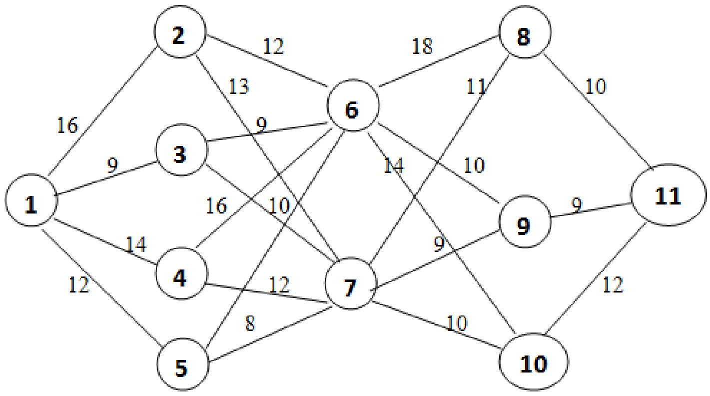
shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi. Bu yo'nalishlar optimal yo'nalish bo'ladi.

Optimal yechimga, asosan, samolyot 1-qadamda tezligini $V_0 + \Delta V$ darajagacha oshiradi, 2-qadamda u balandligini $H_0 + \Delta H$ gacha oshiradi. 3, 4, 5-qadamlarda samolyotning tezligi mos ravishda $V_0 + 2\Delta V$, $V_0 + 3\Delta V$, $V_0 + 4\Delta V$ ga oshishi, 6, 7, 8-qadamlarda esa uning balandligi mos ravishda $H_0 + 2\Delta H$, $H_0 + 3\Delta H$, $H_0 + 4\Delta H$ darajagacha oshishi kerak.

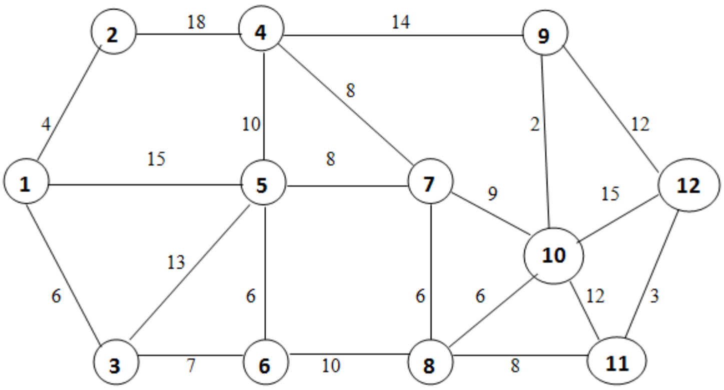
9 va 10-qadamlarda samolyot tezligini mos ravishda $V_0 + 5\Delta V$ va $V_0 + 6\Delta V$ darajagacha oshirishi kerak. Natijada u eng kam, ya'ni 88 birlik yoqilg'i sarf qiladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

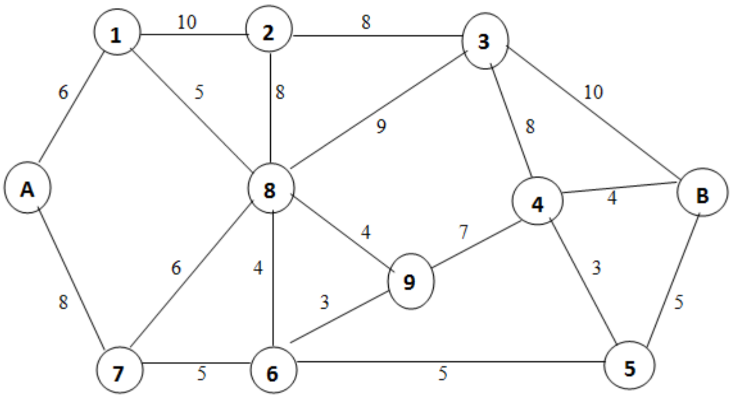
1. Quyidagi shaklda keltirilgan ma'lumotlar asosida 1-punktdan 11-punktgacha eng qisqa yo'lni aniqlang. Har ikkita punktni tutashtiruvchi kesma ustiga ular orasidagi masofa yozilgan.



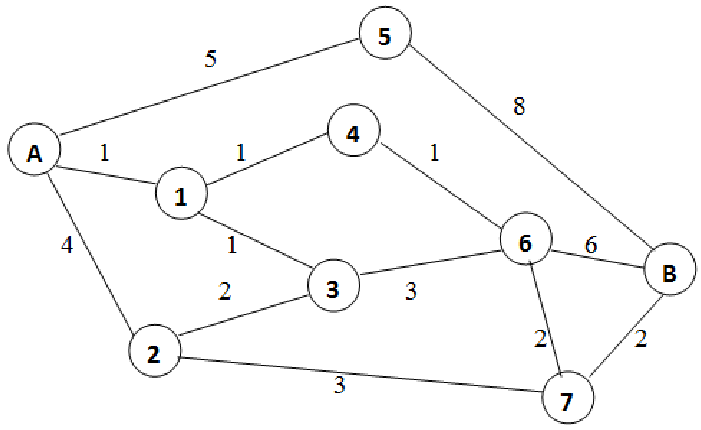
2. Quyidagi shaklda keltirilgan ma'lumotlar asosida 1-punktdan 12-punktgacha eng qisqa yo'lni aniqlang.



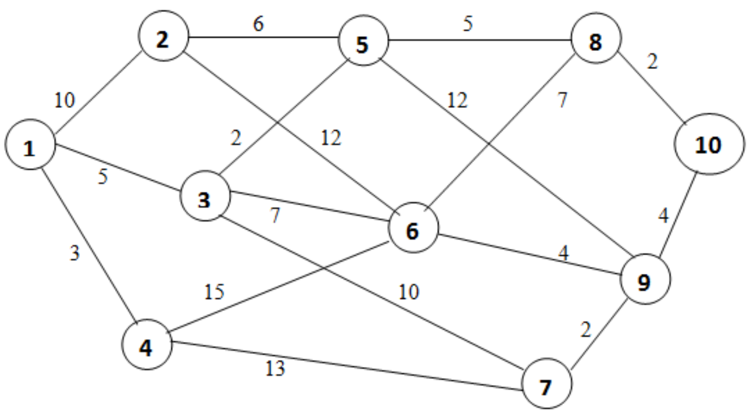
3. Quyida *A* va *B* punktlarni tutashtiruvchi yo'llar to'ri tasvirlangan. *A* - punktdan *B* punktgacha bo'lgan eng qisqa marshrutni aniqlang.



4. *A* punktdan *B* punktga mahsulot tashish rejalashtirilgan. Har bir oraliq punktlarda mahsulot birligini tashish uchun sarf qilinadigan xarajatlar ma’lum va ular tegishli kesmalar ustiga yozilgan. Mahsulotni *A* punktdan *B* punktga qaysi yo’nalish bo’yicha tashiganda umumiy transport xarajatlari minimal bo’ladi.

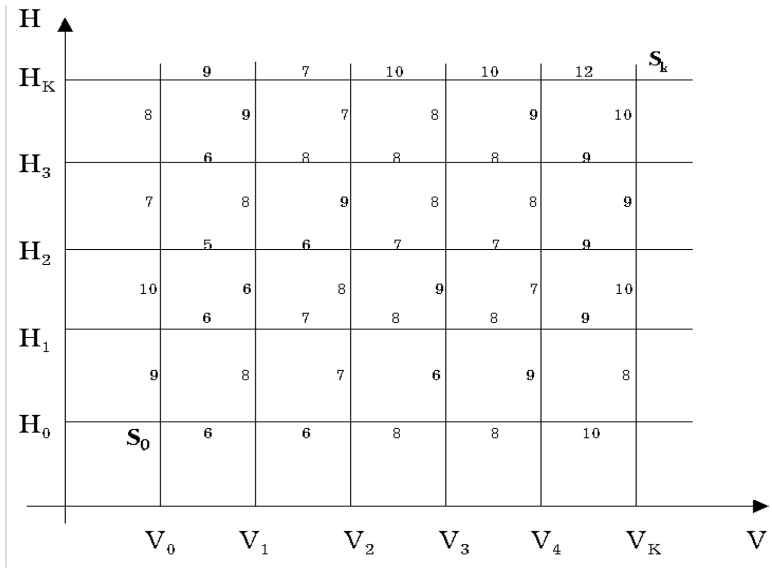


5. Quyidagi skakldа keltirilgan ma’lumotlar asosida 1-10 punktlar orasidagi eng qisqa masofani aniqlang.

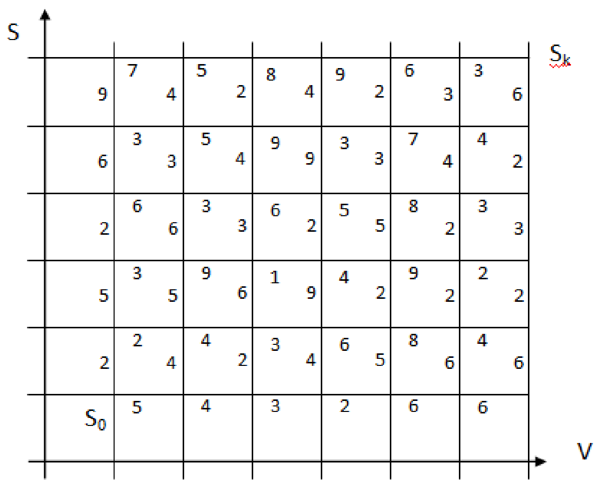


6-8-masalalarda samolyotning tezligi va balandligini boshqarish masalasini quyidagi jadvalda tasvirlangan ma’lumotlar asosida yeching va sarf qilinadigan eng kam yoqilg’i miqdorini aniqlang.

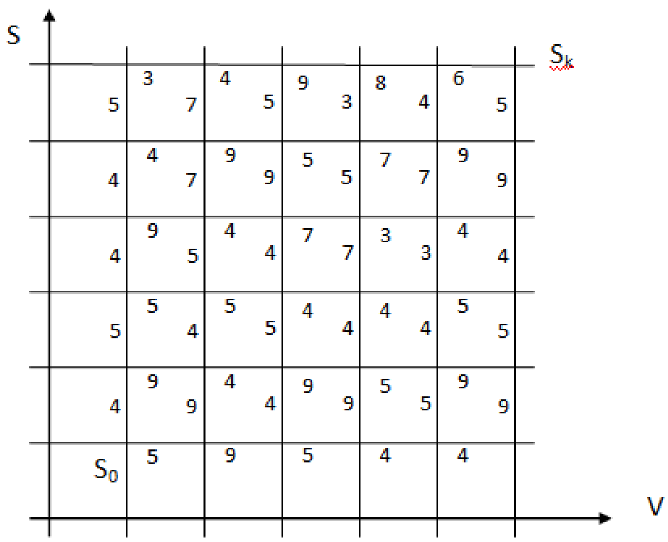
6.



7.



8.



25-MAVZU. O'YINLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI. MATRISALI O'YIN

Misol. Berilgan matrisali o'yin uchun quyi va yuqori baholarni, hamda o'yinning optimal bahosini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Yechish: Matrisaning qatorlaridagi eng kichik elementlar quyidagidan iborat:

$$\min_j (3, \quad 1, \quad 2) = 1;$$
$$\min_j (2, \quad 4, \quad -1) = -1;$$
$$\min_j (5, \quad 7, \quad 6) = 5.$$

Demak, o'yinning quyi bahosi

$$\alpha = \max_i(\min_j a_{ij}) = \max_i(1, \quad -1, \quad 5) = 5$$

bo'ladi. Endi har bir ustundagi eng katta elementlarni topamiz:

$$\max_i (3, \quad 2, \quad 5) = 5;$$
$$\max_i (1, \quad 4, \quad 7) = 7;$$
$$\max_i (2, \quad -1, \quad 6) = 6.$$

U holda o'yinning yuqori bahosi quydagiga teng bo'ladi:

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min(5, \quad 7, \quad 6) = 5.$$

Ushbu o'yindagi quyi va yuqori baholar o'zaro teng. Demak, o'yinning optimal bahosi

$$V = \alpha = \beta = 5$$

bo'ladi. Ushbu bahoni (yechimni) ta'minlovchi a_{31} element o'yinning egar nuqtasi, A_3 va B_1 strategiyalar esa optimal strategiyalar bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. Quyidagi matrisali o'yinlarni minimax va maxmin usullari bilan yeching.

1. $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 15 & 24 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

26-MAVZU. MATRISALI O’YINNI CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASIGA KELTIRISH

Misol.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisali o’yinni aralash strategiyalardagi yechimini toping.

Yechish: 1-o’ynovchi uchun o’yinni ChPMsiga aylantiramiz. Buning uchun eng avval quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geq V; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq V; \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq V; \end{cases}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

sistemadagi har bir tengsizlikning ikki tomonini (V>0) ga bo’lib va $t_i = \dfrac{x_i}{V}$ belgilash kiritib quydagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1; \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1; \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1; \end{cases}$$
$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V};$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0.$$

Bu sistemani quyidagi ChPMsi ko’rinishida yozish mumkin:

$$\begin{cases} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \geq 1; \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \geq 1; \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \geq 1; \end{cases}$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0;$$
$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \rightarrow \min.$$

2-o’ynovchi uchun berilgan matrisali o’yin quyidagi ChPMsiga aylanadi.

$$\begin{cases} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 \le 1; \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 \le 1; \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 \le 1; \end{cases}$$
$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0, u_3 \ge 0;$$
$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \to \max.$$

Bu masalalar o'zaro ikkilangan masalalardir. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining yechimini osonlikcha topish mumkin.

Biz masalani simpleks usuli bilan yechamiz. Buning uchun uni normal holga keltirib, simpleks jadvalga joylashtiramiz:

$$\begin{cases} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 = 1; \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 + u_5 = 1; \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 + u_6 = 1; \end{cases}$$
$$u_j \ge 0; \quad \left(j = \overline{1,6} \right),$$
$$F = -u_1 - u_2 - u_3 \to \min.$$

Bazis	C_b	P_0	-1	-1	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_4	0	1	5	3	2	1	0	0
P_5	0	1	3	5	5	0	1	0
P_6	0	1	6^*	3	4	0	0	1
Δ_j		0	**1**	1	1	0	0	0
P_4	0	$1/6$	0	$1/2$	$-4/3$	1	0	$-5/6$
P_5	0	$1/2$	0	$7/2^*$	3	0	1	$-1/2$
P_1	-1	$1/6$	1	$1/2$	$2/3$	0	0	$1/6$
Δ_j		-1/6	0	**1/2**	1/3	0	0	-1/6
P_4	0	$2/21$	0	0	$-25/21$	1	$-1/7$	$-16/21$
P_2	-1	$1/7$	0	1	$6/7$	0	$2/7$	$-1/7$
P_1	-1	$2/21$	1	0	$5/21$	0	$-1/7$	$5/21$
Δ_j		-5/21	0	0	-2/21	0	-1/7	-2/21

Optimal yechim:

$$U = \left(\frac{2}{21}; \quad \frac{1}{7}; \quad 0 \right); \ F_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{5}{21};$$

$$V = \frac{21}{5}. \ y_1 = V \cdot u_1 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5};$$

$$y_2 = V \cdot u_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5};$$

$$y_3 = V \cdot u_3 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0; \ Y = \left(\frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad 0 \right).$$

Endi 1-o'ynovchi uchun optimal aralash strategiyani topamiz.

$$T = \left(t_1; \quad t_2; \quad t_3 \right) = \left(0; \quad \frac{1}{7}; \quad \frac{2}{21} \right)$$

hamda quyidagi munosabatlar asosida $X = (x_1, x_2, x_3)$ aralash strategiyani topamiz:

$$x_1 = V \cdot t_1 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0; \qquad x_3 = V \cdot t_3 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5};$$

$$x_2 = V \cdot t_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5}; \qquad X^* = \left(0; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{2}{5} \right);$$

Javob: $X^* = \left(0; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{2}{5} \right), \quad Y^* = \left(\frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad 0 \right), \quad V = \frac{21}{5}.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. Quyidagi matrisali o'yinlarni chiziqli programmalashtirish usullari bilan yeching:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ **5.** $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ **6.** $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

II. O'yinlar nazariyasiga doir quyidagi masalalarni yeching.

9. Ikkita *A* va *B* o'ynovchi bir vaqtning o'zida 1, 2 yoki 3 ta barmog'ini ko'rsatadi. Agar ikkala o'ynovchi ko'rsatgan raqamlarining ikkalasi ham juft yoki toq bo'lsa, u holda *A* o'ynovchi shu raqamlar summasiga teng bo'lgan yutuqqa ega bo'ladi. Agar bu o'ynovchilar ko'rsatgan raqamlarining biri juft, ikkinchisi toq son bo'lsa, u holda *B* o'ynovchi shu raqamlar yig'indisi miqdorida yutuqqa ega bo'ladi. Ushbu o'yin uchun yutug'lar matrisasini tuzing va ikkala o'ynovchi uchun optimal strategiyani va o'yinning bahosini aniqlang.

10. Ikkita o'ynovchining birinchisi 1 dan 3 gacha bo'lgan ixtiyoriy butun sonni tanlaydi. Ikkinchi o'ynovchi ushbu sonni o'ylab topishi kerak. Agar ikkinchi o'ynovchi to'g'ri topsa, u holda u topgan soni miqdorida yutuqqa ega bo'ladi. Aks holda shunday miqdordagi yutuqqa birinchi o'ynovchi ega bo'ladi. Masalaning yutug'lar matrisasini tuzing hamda o'yinning optimal yutug'ini hisoblang.

11. Ikkita o'zaro raqobatli yuridik shaxslar 3 ta korxonani qayta ta'mirlashda ishtirok etmoqda. Ushbu yuridik shaxslarning foydasi ular sarf qilgan kapital mablag' hajmiga va investisiya sharoitiga bog'liq bo'ladi. Birinchi yuridik shaxsning foydasi ikkinchisining yutqazuviga teng deb qaralganda *A* o'ynovchining yutug'lar matrisasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A shaxsning yutug'ini maksimallashtiruvchi optimal strategiyani toping va o'yinning yutug'ini aniqlang.

12. *A* va *B* tarmoqlar 4 ta korxonani qayta ta'mirlash uchun kapital mablag' sarf qiladi. Sarflangan kapital mablag' va mahalliy sharoitga bog'liq ravishda *A* korxonaning foydasi quyidagi matrisa elementlari ko'rinishida ifodalangan:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A va *B* tarmoqlarning optimal strategiyalarini toping.

13. Ikkita *A* va *B* o’ynovchi 3 dan 6 gacha bo’lgan ixtiyoriy bir sonni yozadi. Agar *A* o’ynovchi *x* sonni yozib, *B* o’ynovchi *y* sonni yozsa, u holda agar $\frac{x}{y}>1$ bo’lsa, *A* o’ynovchi xy miqdordagi yutug’ga ega bo’ladi. Aks holda, agar $\frac{x}{y}<1$ bo’lsa, *B* o’ynovchi $x+y$ miqdordagi yutuqqa ega bo’ladi. Agar $\frac{x}{y}=1$ bo’lsa, u holda o’yin durang natija bilan tugaydi. To’lovlar matrisasini tuzib o’yinning yechimini toping.

14. *A* o’ynovchi 2 ta joydan bittasiga berkinishi mumkin. *B* o’ynovchi uni qidirib topsa, *A* o’ynovchidan bir pul birligidagi jarima undiradi. Aks holda *B* o’ynovchi *A* o’ynovchiga bir pul birligidagi jarima to’laydi. Ushbu o’yin uchun yutug’lar matrisasini tuzing va o’yinning yutug’ini aniqlang.

27-MAVZU. NOANIQLIK VA TAVAKKALCHILIK SHAROITIDA QARORLAR QABUL QILISH

1. Quyida berilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida yutug'larni maksimallashtiruvchi strategiyani toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
P	0,2	0,7	0,1

2. Quyidagi keltirilgan daromadlar matrisasidan foydalanib, YQQShning optimal strategiyasini Laplas mezoni asosida toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	17	21	24	34
A_2	30	26	24	32
A_3	19	18	20	33
A_4	28	36	28	24

3. Tabiat bilan o'yin quyidagi to'lovlar matrisasi orqali berilgan.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	61	14	13
A_2	14	65	13
A_3	60	6	10
A_4	6	17	3

Vald, Sevidj va Gurvis mezonlari asosida optimal strategiyani toping.

4. Deylik, fermer ho'jaligi paxta yetishtirishga ixtisoslashgan bo'lsin. Paxta hosildorligiga "tabiat" ning 4 xil holati ta'sir ko'rsatishi mumkin bo'lsin. Tabiatning bu holatlariga qarshi fermer 3 xil chora tadbirlarni ko'rishi oqibatida turli miqdorda daromad olishi mumkin. Quyida daromadlar matrisasi keltirilgan.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	2	3	6
A_2	2	5	4	3
A_3	4	7	6	2
P	0,3	0,3	0,2	0,2

Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta'minlovchi optimal strategiyani toping.