

Министерство образования Российской Федерации  
Томский политехнический университет  
Томский государственный университет  
Московский институт электроники и математики

---

*В. Г. Багров, В. В. Белов,  
В. Н. Задорожный, А. Ю. Трифонов*

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**  
Основы комплексного анализа  
Элементы вариационного исчисления  
и теории обобщенных функций

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов инженерно-физических специальностей высших учебных заведений*

Томск 2002

УДК 581

**Багров В. Г., Белов В. В., Задорожный В. Н., Трифонов А. Ю.** Методы математической физики: I. Основы комплексного анализа. II. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. – Томск: Изд-во НТЛ, 2002. – 672 с.

Настоящее учебное пособие посвящено изложению методов теории функций комплексного переменного, основ вариационного исчисления и теории обобщенных функций. Оно содержит теоретический материал в объеме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями (30 вариантов) для самостоятельного решения по разделу «Теория функций комплексного переменного» курса «Высшая математика и математическая физика».

Пособие предназначено для студентов и аспирантов физических и инженерно-физических специальностей.

Рецензенты: академик РАН, профессор В.П. Маслов  
кафедра математики физического факультета  
Московского государственного университета

© В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов, 2002

© Издательство научно-технической литературы, 2002

## Содержание

От авторов	4
Часть I. Основы комплексного анализа	8
Глава 1. Введение в теорию функций комплексного переменного	8
1. Комплексные числа и действия над ними	8
2. Множества на комплексной плоскости	17
3. Последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка	20
4. Ряды комплексных чисел	23
5. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывность	32
6. Степенные ряды комплексных чисел	35
7. Элементарные функции комплексного переменного	37
7.1. Степенная функция . . . . .	37
7.2. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции . . . . .	40
7.3. Логарифмическая функция . . . . .	45
7.4. Общая степенная функция . . . . .	47
7.5. Обратные тригонометрические функции . . . . .	48
8. Дифференцирование функций комплексного переменного	50
9. Гармонические функции	58
10. Кривые в комплексной плоскости	65
11. Интегралы от функций комплексного переменного	67
12. Теорема Коши	71
13. Интеграл Коши	80
14. Интеграл типа Коши	84
15. Некоторые следствия из интегральной формулы Коши	86
Глава 2. Теория вычетов и ее приложения	90
16. Ряд Тейлора	90
17. Ряд Лорана	97
18. Изолированные особые точки аналитических функций	114
18.1. Классификация изолированных особых точек . .	114
18.2. Устранимая особая точка . . . . .	115
18.3. Полус . . . . .	117
18.4. Существенно особая точка . . . . .	119
18.5. Бесконечно удаленная точка . . . . .	123
19. Аналитическое продолжение	125
20. Римановы поверхности	133
21. Теория вычетов	136

22. Логарифмический вычет и его приложения	151
22.1. Логарифмический вычет . . . . .	151
22.2. Принцип аргумента . . . . .	153
22.3. Основная теорема алгебры . . . . .	156
22.4. Задача Рауса–Гурвица . . . . .	158
23. Приложения теории вычетов	160
23.1. Интегралы, содержащие рациональные функции от тригонометрических функций . . . . .	160
23.2. Несобственные контурные интегралы . . . . .	163
23.3. Несобственные интегралы от дробно-рациональных функций . . . . .	168
23.4. Несобственные интегралы от осциллирующих функций . . . . .	172
23.5. Интегралы Бромвича–Вагнера . . . . .	174
23.6. Несобственные интегралы типа интегралов Эйлера . . . . .	178
23.7. Другие несобственные интегралы . . . . .	191
23.8. Представление функций контурными интегралами . . . . .	200
23.9. Целые и мероморфные функции . . . . .	203
23.10. Разложение мероморфной функции на простей- шие дроби . . . . .	209
23.11. Суммирование рядов . . . . .	216
23.12. Разложение целой функции в бесконечное про- изведение . . . . .	219
Приложение. Несобственные интегралы.	
Сходимость и главное значение	227
П1.1. Интегралы на неограниченных промежутках . .	227
П1.2. Интегралы от неограниченных функций . . . . .	232
П1.3. Несобственные кратные интегралы . . . . .	239
Глава 3. Введение в теорию конформных отображений	244
24. Геометрический смысл производной аналитической функции	244
24.1. Геометрический смысл аргумента производной .	245
24.2. Геометрический смысл модуля производной . . .	246
24.3. Понятие конформного отображения . . . . .	248
25. Линейная функция	250
26. Инверсия	252
27. Дробно-линейная функция	258
28. Степенные функции	266
29. Показательная и логарифмическая функции	271
30. Функция Жуковского	275
31. Тригонометрические и гиперболические функции	280

32. Основная задача теории конформных отображений	285
33. Интеграл Кристоффеля–Шварца	299
Глава 4. Элементы операционного исчисления	303
34. Преобразование Лапласа	303
35. Изображения простейших функций	309
36. Свойства преобразования Лапласа	312
37. Приложения операционного исчисления	333
37.1. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	333
37.2. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	333
37.3. Интеграл Дюамеля . . . . .	338
37.4. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами . . . . .	340
37.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	343
37.6. Вычисление несобственных интегралов . . . . .	344
38. Гамма-функция	346
39. Обобщенные оригиналы	360
40. Бета-функция	370
41. Биномиальные коэффициенты	380
42. Интеграл ошибок	383
Глава 5. Методы асимптотических оценок	385
43. Простейшие асимптотические оценки несобственных интегралов	385
44. Простейшие асимптотические оценки интегралов	387
45. Асимптотические ряды	393
46. Метод Лапласа	401
47. Метод стационарной фазы	407
Часть II. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций	415
Глава 1. Элементы вариационного исчисления в классической механике	416
1. Функционалы. Основные понятия и определения	416
1.1. Функционалы и близость функций . . . . .	416
1.2. Вариация и экстремум функционала . . . . .	424
2. Уравнение Эйлера	431

3. Уравнения Эйлера, допускающие понижение порядка. Самосопряженная форма уравнений Эйлера	440
4. Вариационная задача с естественными граничными условиями	468
5. Вариационная задача с функционалами, зависящими от нескольких функций одной переменной	470
6. Вариационная задача для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных	474
7. Вариационная задача для функционалов, зависящих от производных высших порядков	479
8. Условия Лежандра и Якоби	485
9. Уравнения Лагранжа в классической механике	488
10. Канонические уравнения Гамильтона	509
11. Первые интегралы системы Гамильтона. Скобки Пуассона	519
12. Канонические преобразования	521
13. Теорема Лиувилля	524
14. Уравнения движения классических частиц со спином во внешних полях	527
14.1. Уравнения Френкеля–Найборга . . . . .	527
14.2. Уравнения Тамма–Гуда . . . . .	531
14.3. Уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди . . . . .	533
Глава 2. Основы теории обобщенных функций	536
15. Основные и обобщенные функции	537
16. Действия над обобщенными функциями	545
17. Дельта-функция Дирака и ее свойства	548
18. Дельтообразные последовательности	554
19. Примеры обобщенных функций	559
19.1. Тета-функция Хевисайда . . . . .	561
19.2. Характеристическая функция отрезка . . . . .	562
19.3. Обобщенные функции, порождаемые главными значениями несобственных интегралов . . . . .	563
19.4. Псевдофункции Адамара . . . . .	564
19.5. Формулы Сохоцкого . . . . .	565
20. Некоторые представления основных функций	566
21. Дифференцирование обобщенных функций	572
22. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	583
23. Свертка обобщенных функций	590
24. Дельта-функция Дирака и ортонормированные системы функций	595

---

25. Классические и обобщенные решения дифференциальных уравнений*	612
26. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов*	619
27. Построение фундаментального решения линейного дифференциального оператора*	622
28. Функция Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*	627
29. Другие методы построения функции Грина*	635
30. Краевая задача для линейных дифференциальных уравнений с параметром*	638
30.1. Функция Грина краевой задачи с параметром . . . . .	639
30.2. Краевая задача для уравнения Бесселя . . . . .	646
30.3. Нормальная разрешимость краевых задач . . . . .	650
31. Обобщенная задача Коши*	660
Задания для самоконтроля	664
Теоретические вопросы . . . . .	664
Индивидуальные задания . . . . .	671
Список литературы	744

*22 октября 1900 года в Томском технологическом институте профессором В.Л. Некрасовым была прочитана первая лекция. Это была лекция по аналитической геометрии. Столетию этого события и посвящается настоящая книга.*

## ОТ АВТОРОВ

Еще одна книга по математической физике? Какую цель преследовали авторы, какие ставили задачи? Попробуем объяснить это.

Курс математической физики для физиков и инженеров в том или ином виде читается в вузах практически с начала прошлого века и имеет устойчивую традицию, вполне себя оправдавшую. В последние лет пятьдесят математическая физика оформилась в виде общеобразовательного курса, с которым студенты всех физических и инженерно-физических специальностей знакомятся на 2-3 году обучения. Этот курс вобрал в себя достаточно разнородные сведения из различных разделов математики, которые, с одной стороны, необходимы для завершения общего математического образования физиков и инженеров и являются базой для изучения специальных разделов математики и физики и, с другой стороны, выходят за рамки стандартных курсов математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, линейной алгебры и аналитической геометрии, образуя математическую основу для изложения общеобразовательных курсов теоретической физики.

По отдельным разделам курса математической физики есть хорошие пособия различного уровня [?, 11, 23, 35, 39, 43, 44, 50, 51, 55] и др. (правда, большинство их издано не менее десяти лет назад). Но, как ни удивительно, нет книги, где бы под одной обложкой были изложены все (достаточно разнородные) разделы математики примерно на одном уровне строгости и в



объемах, соответствующих содержанию того курса математической физики, который в последние десятилетия сформировался в вузах. Существует несколько книг [21, 33, 40, 46, 47], написанных известными математиками, которые могли бы претендовать на такую роль. Однако книги [46] и [47] по своему уровню рассчитаны на физиков-теоретиков – для инженеров и физиков-экспериментаторов содержание этих книг малоинтересно, а книги [21, 33, 40] изданы столь давно, что являются сейчас библиографической редкостью, да и уже не полностью охватывают содержание современного курса. Следует отметить высокие методические достоинства всех этих книг и, если имеется возможность ознакомиться с ними, также рекомендовать их читателю, изучающему математическую физику.

Целью авторов было собрать воедино весь материал, который составляет (в разных вузах в разном объеме) общеобразовательный курс математической физики. Объем каждой части всегда превышает необходимый минимум, предоставляя тем самым всем желающим возможность получить дополнительные сведения, а преподавателю – свободу маневра.

Другой, на наш взгляд, важной особенностью предлагаемого издания является сопровождение каждой части курса набором задач с детальными решениями и задач (без решений) для самостоятельной работы. По некоторым отдельным частям курса есть неплохие сборники задач [5, 7, 12, 16, 18, 30, 32, 49, 61, 64], но не было осуществлено сопровождение задачами всего курса в едином комплексе. Задачи с решениями несут и самостоятельную нагрузку – они демонстрируют практические приемы математической техники. Задания для самоконтроля собраны в тридцать приблизительно равноценных вариантов. Использование типовых индивидуальных заданий отражает специфику методики преподавания в технических вузах, а подбор задач – особенности применения математического аппарата в курсах по специальности. Читателю мы рекомендуем прорешать один из вариантов типовых индивидуальных заданий, поскольку, как хорошо известно, «математику учат, решая задачи, а не наблюдая, как их решают другие» (М. Рид, Б. Саймон [46]).

Таким образом, авторы попытались собрать вместе все достаточно разнородное содержание общеобразовательного курса математической физики и дать к нему сопровождение в виде задач (с решениями и без них). Сколь успешно это нам удалось – судить читателю.

Сам характер курса и его место в системе высшего инженерно-технического образования обуславливают и некоторые

другие его особенности. В курсе не следует искать новейших достижений математики: с научной точки зрения содержание курса – это математика, достаточно прочно вошедшая в повседневный обиход всех физиков и инженеров (ее новейшие разделы – это предмет спецкурсов последних лет обучения). Общеобразовательный курс математической физики имеет устоявшиеся и оправдавшие себя традиции методики его изложения и уровня математической строгости. Особо следует отметить уровень строгости изложения. Авторами принят так называемый физический уровень строгости (как правило, его персонифицированными носителями являются физики-теоретики и профессиональные математики, занимающиеся глубоко физическими проблемами). Такой уровень предполагает во всех случаях математически корректную постановку задач и методы доказательства в каждой конкретной проблеме, однако в некоторых общих вопросах (типа существования решений, априорного определения области сходимости ряда, который будет представлять еще не полученное решение) отступления от идеальной математической корректности допускаются (существование решений доказывается фактом их предъявления; область сходимости разложения определяется после его фактического получения и т.д.). Иногда этот уровень строгости вызывает раздражение у «чистых» профессиональных математиков. Однако он общепринят в физических и инженерных исследованиях и всегда, если уж возникает такая необходимость, может быть доведен до идеала (что, как правило, требует больших затрат времени и сил).

Учитывая различную математическую подготовку читателей, авторы включили в каждый раздел материал различной трудности, от простого до сложного. Материал повышенной сложности отмечен в тексте звездочкой или набран мелким шрифтом. Читатель, пропустивший этот материал, не будет испытывать затруднений в понимании последующего текста. Для удобства читателя, которого могут интересовать отдельные разделы книги, мы старались излагать материал одинаково подробно, вне зависимости от того, применялись ли используемые приемы в предыдущих разделах.

Авторы приложили максимум усилий для устранения опечаток и ошибок, неизбежных в работе такого объема, однако они отдают себе отчет в том, что отдельные ошибки и неточности в тексте могли остаться, и будут признательны всем, кто укажет на них.

В тексте пособия используется сплошная нумерация параграфов в каждой части. При нумерации формул, теорем и

лемм из данной части первое число указывает номер параграфа, а второе – порядковый номер формулы, теоремы, леммы. При ссылке на формулы из другой части перед номером параграфа римскими цифрами обозначается номер части. При нумерации следствий из теорем и лемм первое число указывает номер параграфа, второе – номер теоремы или леммы в этом параграфе и третье – номер собственно следствия. Для обозначения определений и замечаний нами используются символы  $\blacklozenge$  и  $\blacklozenge$ , соответственно.

Авторы признательны А.Р. Данилину, А.М. Ильину, М.Р. Куваеву, Б.Ф. Назарову и особенно прочитавшим рукопись в полном объеме (за исключением позднейших вставок) С.П. Гулько и В.В. Кравцову за критические замечания, которые стимулировали работу над рукописью. Авторы признательны также всем сотрудникам кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета и кафедры прикладной математики Московского института электроники и математики, кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета и особенно А.Г. Давтяну и В.Ф. Зальмежу за полезные обсуждения и замечания. Авторам удалось опробовать отдельные части книги в преподавании курса математической физики студентам ТПУ, ТГУ и МИЭМ. Мы благодарны всем студентам, особенно В.Д. Баранову, В.А. Долгушеву и Г.Н. Сережникову, обратившим наше внимание на неточности и опечатки.

# ЧАСТЬ I

## ОСНОВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Данный раздел посвящен теории функций комплексного переменного и основным методам этой теории, широко используемым в приложениях.

Этот раздел отнесен к курсу математической физики, поскольку сама теория функций комплексного аргумента и, в частности, центральный ее объект – аналитическая (голоморфная) функция, возникли и развивались на основании физических представлений, связанных с математическими моделями плоских течений жидкости и тепловых потоков. С другой стороны, математический аппарат этой теории позволил разработать новые методы построения и исследования решений задач математической физики в гидро- и аэродинамике, электростатике, теории упругости и квантовой теории.

Материал, включенный авторами в этот раздел курса, определяется следующими учебными целями. Первая – дать, по возможности, полное и строгое изложение основ комплексного анализа. Вторая – выработать практические навыки использования математического аппарата теории функций комплексного переменного на большом количестве подробно разобранных учебных примеров и задач. Третья – продемонстрировать работу ряда методов комплексного анализа, широко используемых в инженерных и физических расчетах (операционное исчисление, вычисление интегралов). И, наконец, – ознакомить с асимптотическими методами оценки интегралов, зависящих от параметра (метод Лапласа, метод стационарной фазы), играющими важную роль в современной теоретической физике.

### ГЛАВА 1

## Введение в теорию функций комплексного переменного

### 1. Комплексные числа и действия над ними

◆ Комплексным числом  $z$  называется упорядоченная пара действительных чисел  $z = (x, y)$  с определенными ниже операциями над ними. Первое число пары  $x$  называется действительной частью комплексного числа  $z$  и обозначается  $x = \operatorname{Re} z$ ; второе число пары  $y$  называется мнимой частью числа

$z$  и обозначается  $y = \text{Im } z$ .

◇ Два комплексных числа  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Множество комплексных чисел  $z$  можно взаимно однозначно сопоставить точки плоскости ( $xOy$ ) с декартовыми координатами  $x, y$ . Такую плоскость в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс – действительной, а ось ординат – мнимой осью комплексной плоскости.

В свою очередь, каждой точке  $(x, y)$  соответствует вполне определенный вектор – радиус-вектор этой точки, а каждому радиус-вектору, лежащему в плоскости, – вполне определенная точка – его конец. Поэтому будем в дальнейшем комплексные числа представлять также в виде векторов на плоскости (рис. 1).

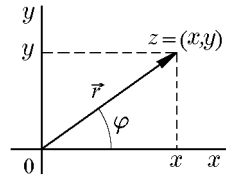


Рис. 1

Геометрическое представление комплексных чисел показывает, что при сравнении двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  понятия «больше» и «меньше» теряют смысл, и наглядно иллюстрирует, что равенство двух комплексных чисел  $z_1 = z_2$  всегда подразумевает два равенства действительных чисел:  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ .

## Операции над комплексными числами

### 1. Сложение

◆ Суммой комплексных чисел  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \quad (1.1)$$

Данное определение сводит операции сложения комплексных чисел к операции сложения двух действительных чисел. Из определения вытекают следующие законы сложения:

- коммутативность  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ,
- ассоциативность  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .

◇ Сложение допускает обратную операцию: для двух комплексных чисел  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  можно найти такое число  $z$ , что  $z_2 + z = z_1$ . Такое число  $z$  называется разностью чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначается символом  $z = z_1 - z_2$ . Очевидно, что

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2). \quad (1.2)$$

Можно показать, что существует единственное комплексное число  $0 = (0, 0)$  такое, что для любого комплексного числа  $z$  выполняется  $z + 0 = z$ .

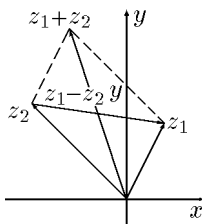


Рис. 2

Геометрический смысл операций сложения и вычитания комплексных чисел совершенно ясен: сумма и разность комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  изображаются, соответственно, векторами, направленными по диагоналям параллелограмма, построенного на векторах  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 2).

## 2. Умножение

◆ Произведением комплексных чисел  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  называется комплексное число  $z = z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x, y)$  такое, что

$$x = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad y = y_1 x_2 + y_2 x_1. \quad (1.3)$$

Из определения вытекают следующие законы умножения:

- коммутативность  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ ;
- ассоциативность  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ ;
- дистрибутивность  $(z_1 + z_2)z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ .

Любое действительное число  $x$  можно считать комплексным числом  $(x, 0)$ . Точнее, подмножество комплексных чисел вида  $(x, 0)$  взаимно однозначно соответствует множеству вещественных чисел (с сохранением арифметических операций). В дальнейшем будем отождествлять эти числа и записывать  $x = (x, 0)$ .

Умножение на действительную единицу  $1 = (1, 0)$  не меняет комплексного числа  $1 \cdot z = z$ .

Комплексное число вида  $z = (0, 1)$  называется мнимой единицей и будет обозначаться символом  $i = (0, 1)$ . Несложно убедиться, что  $i \cdot i = i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$ .

Комплексное число вида  $z = (0, y)$  называется чисто мнимым числом. Легко установить, что чисто мнимое число  $(0, y)$  можно рассматривать как произведение мнимой единицы  $i = (0, 1)$  и действительного числа  $y = (y, 0)$ , т.е.  $(0, y) = iy$ .

Мнимая единица позволяет придать прямой алгебраический смысл так называемой алгебраической форме записи комплексных чисел. Действительно,

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy. \quad (1.4)$$

В результате операции сложения и умножения комплексных чисел можно проводить по правилам алгебры многочленов, не

обращаясь каждый раз непосредственно к определениям (1.1) и (1.3).

**Пример 1.1.** Найти  $z_1 + z_2$  и  $z_1 z_2$ , если  $z_1 = 1 - 3i$ ,  $z_2 = -5 + 2i$ .

**Решение.** Воспользовавшись алгебраической записью, получим

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 - 3i) + (-5 + 2i) = -4 - i, \\ z_1 z_2 &= (1 - 3i)(-5 + 2i) = -5 + 15i + 2i - 6i^2 = 1 + 17i. \end{aligned}$$

Для удобства работы с комплексными числами введем операцию комплексного сопряжения.

◆ Комплексное число  $w$  называется комплексно сопряженным числу  $z = x + iy$ , если  $w = x - iy$ , и обозначается  $w = z^*$ .

◇ В литературе для обозначения комплексно сопряженного числа иногда используется символ  $\bar{z} = x - iy$ .

Геометрически точки  $z$  и  $z^*$  симметричны относительно вещественной оси (см. рис. 3), причем  $zz^* = x^2 + y^2$ . Соотношение  $z = z^*$  равносильно тому, что  $z$  — вещественное число.

Умножение также допускает обратную операцию. Пусть  $z_2 \neq 0$ , тогда можно найти такое число  $z$ , что

$$z_2 \cdot z = z_1. \quad (1.5)$$

Для этого, согласно (1.3), нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1, \\ x_2 y + y_2 x = y_1. \end{cases} \quad (1.6)$$

◆ Число  $z$  (1.5) называется частным двух чисел  $z_1$  и  $z_2$  и обозначается  $z = z_1/z_2$ . Из системы (1.6) при условии  $z_2 \neq 0$  получим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.7)$$

◇ Без труда можно установить, что операция комплексного сопряжения удовлетворяет следующим свойствам:

$$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}.$$

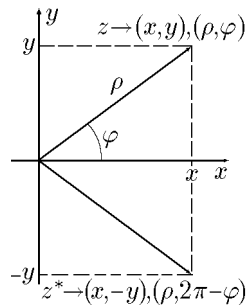


Рис. 3

**Пример 1.2.** Найти действительную и мнимую части числа

$$w = \frac{1 - 3i}{-1 + 2i}.$$

**Решение.** Домножим числитель и знаменатель дроби на число  $-1 - 2i$ , сопряженное знаменателю дроби, и получим

$$w = \frac{1 - 3i}{-1 + 2i} = \frac{(1 - 3i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{-1 + 3i - 2i - 6}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{-7 + i}{5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} w = -\frac{7}{5}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{1}{5}.$$

Наряду с алгебраической формой комплексных чисел (1.4) удобно использовать и так называемую тригонометрическую форму. Для этого напомним, что точку на плоскости можно задавать не только декартовыми, но и полярными координатами  $(\rho, \varphi)$  (см. рис. 1). Причем  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Подставив  $x, y$  в (1.2), получим

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.8)$$

Такая форма записи называется тригонометрической. Показательная форма записи комплексных чисел будет введена позднее [см. выражение (7.5)].

◆ Число  $\rho$  в (1.8) называют модулем, а  $\varphi$  — аргументом комплексного числа  $z$  и обозначают

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*} \geq 0, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Модуль комплексного числа  $z$  равен нулю тогда и только тогда, когда  $z = 0$ .

Непосредственно из рис. 2 видно, что для модуля комплексного числа  $z$  справедливы неравенства

$$|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Поскольку длина стороны треугольника не больше суммы длин двух других его сторон и не меньше абсолютной величины их разности, то из рис. 3 с очевидностью следует неравенство

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.9)$$



Величина  $\text{Arg } z$  неоднозначна и определяется с точностью до любого слагаемого, кратного  $2\pi$ . Наряду с символом  $\text{Arg } z$ , обозначающим всю совокупность значений аргумента, будем употреблять символ  $\arg z$ , называемый главным значением аргумента и обозначающий одно какое-либо значение  $\text{Arg } z$ , т.е.  $\alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Величину  $\arg z$ , если не оговорено особо, будем рассматривать в пределах  $0 \leq \arg z < 2\pi$ , когда  $\alpha = 0$  (или  $-\pi \leq \arg z < \pi$ , когда  $\alpha = -\pi$ ). Тогда  $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число, а из рис. 1 следует, что

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \varphi_0 & x > 0, y > 0 \\ \pi - \varphi_0 & x < 0, y > 0 \\ \pi + \varphi_0 & x < 0, y < 0 \\ 2\pi - \varphi_0 & x > 0, y < 0 \end{cases}, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{|x|}{\rho}, \quad (1.10)$$

причем для всех действительных положительных чисел  $\varphi = 0$ , а для отрицательных  $\varphi = \pi$ . Соответственно, для чисто мнимых чисел, лежащих в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ),  $\varphi = \pi/2$ , а для лежащих в нижней полуплоскости ( $y < 0$ )  $\varphi = 3\pi/2$ .

Введение полярных координат и, соответственно, тригонометрической формы комплексных чисел (1.8) позволяет записать некоторые операции с комплексными числами в более удобной форме. Пусть  $z_1 = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . тогда равенство двух комплексных чисел  $z_1 = z_2$  эквивалентно условиям

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Из соотношений (1.3) и (1.7) с учетом тригонометрических формул  $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \mp \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$  и  $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \pm \sin \varphi_2 \cos \varphi_1$  непосредственно следуют формулы умножения и деления комплексных чисел

$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, а при делении их модули делятся, а аргументы вычитаются (см. рис. 4).

### 3. Возведение в целую степень

◆ Произведение  $n$  равных комплексных чисел  $z$  называется  $n$ -ой степенью числа  $z$  и обозначается  $z^n$ .

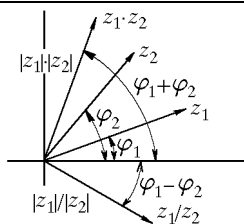


Рис. 4

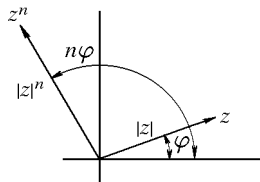


Рис. 5

Аналогично вводится понятие возведения в целую отрицательную степень

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^{2n}} (z^*)^n.$$

Операцию возведения в целую положительную степень с помощью (1.11) и метода математической индукции можно определить формулой

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (1.12)$$

которая называется формулой Муавра и остается справедливой и для отрицательных целых  $n$ . Геометрический смысл формулы Муавра иллюстрирует рис. 5.

◇ Из формулы Муавра (1.12), в частности, следует, что

$$(z^*)^n = (z^n)^* \quad \text{и} \quad |z^n| = |z|^n. \quad (1.13)$$

**Пример 1.3.** Представить в алгебраической форме  $z^3$ ,  $z^{-3}$ , если  $z = 1 + i$ .

**Решение.** *Первый способ.* Воспользуемся алгебраической формой числа  $z$ :

$$\begin{aligned} z^3 &= (1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i, \\ z^{-3} &= \frac{1}{(1 + i)^3} = \frac{1}{-2(1 - i)} = -\frac{1}{4}(1 + i). \end{aligned}$$

*Второй способ.* Представим число  $z$  в тригонометрической форме

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Тогда, согласно формуле Муавра (1.12),

$$z^3 = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$z^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Легко проверить, что

$$z^3 = 2\sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2 + 2i,$$

$$z^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{4}(1 + i).$$

#### 4. Извлечение корня

◆ Комплексное число  $w$  называется корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$ , если  $z = w^n$ , и обозначается  $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ .

Если обозначить  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , то, согласно операции возведения в степень, имеем

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

$$k = \overline{-\infty, \infty}.$$

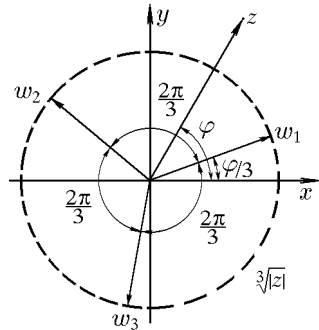


Рис. 6

Следовательно,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). \quad (1.14)$$

Первое соотношение показывает, что модули всех корней одинаковы, второе – что их аргументы различаются на значение, кратное  $2\pi/n$ . Функции  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  имеют период  $2\pi$ . Поэтому, хотя формула (1.14) справедлива для всех целых  $k$ , она определяет различные значения корня  $n$ -й степени из  $z$  лишь для  $k = 0, n-1$ . Отсюда следует, что корень  $n$ -й степени из любого комплексного числа  $z \neq 0$  имеет  $n$  различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность  $|w| = \sqrt[n]{|z|}$  (см. рис. 6, где  $n = 3$ ).

**Пример 1.4.** Найти все значения корня  $\sqrt[3]{8}$ .

**Решение.** Имеем  $x = 8$ ,  $y = 0$ . Найдем модуль и аргумент числа  $z$

$$\rho = |z| = \sqrt{8^2 + 0^2} = \sqrt{8^2} = 8.$$

Число  $z = 8$  лежит на положительной части действительной оси, следовательно,  $\varphi = 0$ . По формуле (1.14) при  $n = 3$  получим:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right),$$

где  $k = \overline{0, 2}$ . Придадим индексу  $k$  значение  $k = 0$ . Тогда

$$w_0 = 2 \left( \cos \frac{2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 0}{3} \right) = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2.$$

Пусть теперь  $k = 1$ . Имеем

$$w_1 = 2 \left( \cos \frac{2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 1}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3}.$$

Наконец, когда  $k = 2$ ,

$$w_2 = 2 \left( \cos \frac{2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 2}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

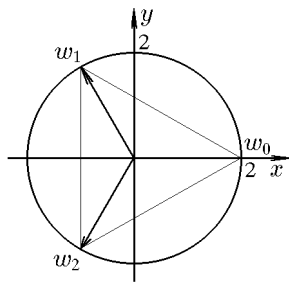


Рис. 7

Изобразим найденные значения корней в комплексной плоскости. Для этого воспользуемся рис. 6, где положим  $\varphi = 0$ . Полученный рисунок дает наглядное представление о расположении корней в плоскости  $xOy$ . Они лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2 (см. рис. 7). Одна из вершин треугольника — точка  $w_0 = (2, 0)$ .

**Пример 1.5.** Найти все значения корня  $\sqrt[4]{-1}$ .

**Решение.** Имеем  $z = -1$ . Следовательно,  $x = -1$ ,  $y = 0$ . Найдем модуль и аргумент числа  $z$

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1.$$

Число  $z = -1$  лежит на отрицательной части действительной оси, следовательно,  $\varphi = \pi$ . Совокупность корней определяется формулой (1.14), в которой положим  $n = 4$ , а  $k = \overline{0, 3}$ :

$$w_k = \sqrt[4]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right).$$

Придадим индексу  $k$  значение  $k = 0$ . Тогда

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

Положим теперь  $k = 1, 2, 3$ . Получим

$$w_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i);$$

$$w_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i);$$

$$w_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

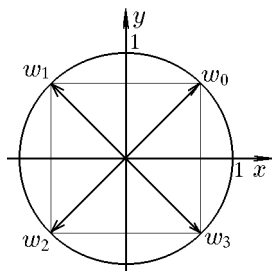


Рис. 8

Изобразим найденные значения корней в комплексной плоскости. Все значения корня  $\sqrt[4]{-1}$  лежат в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 8), причем одна из вершин квадрата – точка  $w_0 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ .

## 2. Множества на комплексной плоскости

Приведем основные определения и свойства множеств комплексных чисел, которые необходимы нам для дальнейшей работы.

♦ Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющих условию  $|z - z_0| < \varepsilon$ , называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $z_0$  и обозначается  $C(z_0, \varepsilon)$ .

◇ Нетрудно заметить, что геометрически множество  $C(z_0, \varepsilon)$  содержит все внутренние точки круга радиусом  $\varepsilon$  с центром в точке  $O(x_0, y_0)$  ( $z_0 = x_0 + iy_0$ ).

♦ Множество  $E$  называется ограниченным, если существуют такие  $z_0$  и  $\varepsilon > 0$ , что  $E \subset C(z_0, \varepsilon)$ .

♦ Точка  $z_0$  называется предельной точкой множества  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  множество  $C(z_0, \varepsilon) \cap E$  содержит по

крайней мере одну точку, принадлежащую множеству  $E$  и отличную от  $z_0$ .

◆ Множество  $E'$  называется производным множеством множества  $E$ , если оно состоит из всех предельных точек множества  $E$ .

◆ Точка  $z_0$  называется изолированной точкой множества  $E$ , если существует окрестность точки  $z_0$ , не содержащая других точек множества  $E$ .

◆ Точка  $z_0$  называется внутренней точкой множества  $E$ , если существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $C(z_0, \varepsilon) \subset E$ .

◆ Точка  $z_0$  комплексной плоскости называется граничной точкой множества  $E$ , если любая окрестность  $C(z_0, \varepsilon)$  содержит, кроме самой точки  $z_0$ , также точки, принадлежащие множеству  $E$ , и точки, не принадлежащие множеству  $E$ .

◆ Совокупность всех граничных точек множества  $E$  называется границей этого множества и обозначается  $\gamma_E$ ,  $\Gamma_E$  или  $\partial E$ .

◆ Множество, состоящее только из внутренних точек, называется открытым.

◆ Множество  $\bar{E} = E' \cup E$  называется замыканием множества  $E$ .

◆ Множество  $E$  называется линейно связным (или связным), если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в  $E$ .

◆ Множество  $E$  называется односвязным, если его граница  $\gamma_E$  – связное множество.

◆ Открытое связное множество называется областью.

**Пример 2.1.** Определить, какое множество на комплексной плоскости определено условием

$$|\arg z| < \frac{\pi}{4}.$$

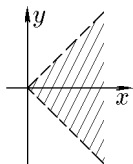


Рис. 9

**Решение.** В полярных координатах неравенство принимает вид

$$-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

и определяет угол между биссектрисами первого и четвертого координатных углов (рис. 9), причем сами биссектрисы не включаются.

**Пример 2.2.** Какое множество на комплексной плоскости определяется условием

$$|z - 1| \geq 2|z - i|.$$

**Решение.** Положим  $z = x + iy$ . Тогда

$$|x - 1 + iy| \geq 2|x + i(y - 1)|$$

или

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \geq 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Избавившись от квадратных корней, получим

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 &\geq 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4; \\ 0 &\geq 3x^2 + 2x + 3y^2 - 8y + 3; \\ 0 &\geq 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 3\left(y - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{3} + 3. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{9}.$$

Последнее неравенство задает круг радиуса  $2\sqrt{2}/3$  с центром в точке  $O(-1/3, 4/3)$ .

**Пример 2.3.** Какое множество на комплексной плоскости определяется условием

$$|z + 3| + |z - 3| = 10. \quad (2.1)$$

**Решение.** *Первый способ.* Аналогично примеру 2.2 находим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Таким образом, уравнение (2.1) определяет эллипс с центром в начале координат и полуосями  $a = 5$ ,  $b = 4$ .

*Второй способ.* По определению, модули  $|z + 3|$  и  $|z - 3|$  определяют расстояние от произвольной точки  $z$  до точек  $z_1 = -3$ ,  $z_2 = 3$ . Согласно (2.1), их сумма постоянна. Следовательно, уравнение (2.1) определяет геометрическое множество точек, сумма расстояний которых до точек  $z_1$  и  $z_2$  постоянна и равна 10, т.е. эллипс с фокусами в точках  $z_1 = -3$ ,  $z_2 = 3$  и с

$$c = 3, \quad 2a = 10, \quad a = 5, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4.$$

### 3. Последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка

◆ Если каждому натуральному числу  $n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) поставлено в соответствие некоторое комплексное число  $z_n$ , то говорят, что на множестве комплексных чисел задана последовательность, которая отображает множество  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{C}$  и обозначается  $\{z_n\}$ . Комплексные числа  $z_n$ , образующие последовательность, называются ее элементами.

Заметим, что поскольку комплексное число  $z_n = x_n + iy_n$  характеризуется парой вещественных чисел, то последовательность комплексных чисел определяется двумя вещественными последовательностями  $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$ .

◆ Число  $z = x + iy$  называется пределом последовательности  $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$  и обозначается

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n,$$

если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_\varepsilon$  такое, что для всех  $n > N_\varepsilon$  справедливо  $|z - z_n| < \varepsilon$ .

◆ Последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$  называется сходящейся, если она имеет конечный предел и расходящейся в противном случае.

**Теорема 3.1.** *Последовательность комплексных чисел  $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$  имеет своим пределом число  $z = x + iy$  тогда и только тогда, когда*

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** 1. Пусть последовательность  $\{z_n\}$  сходится к точке  $z$ . Тогда, по определению, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_\varepsilon$  такое, что для любого  $n > N_\varepsilon$  справедливо  $|z - z_n| < \varepsilon$ . Из неравенств  $|x - x_n| \leq |z - z_n|$  и  $|y - y_n| \leq |z - z_n|$  следует, что формулы (3.1) справедливы.

2. Аналогично из сходимости последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  и из неравенства

$$|z - z_n| = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \leq |x - x_n| + |y - y_n|$$

следует сходимость последовательности  $\{z_n\}$ .

◆ Поскольку определение предела последовательности комплексных чисел дословно повторяет определение предела последовательности вещественных чисел, то для предела ком-



плексных последовательностей справедливы доказанные в курсе математического анализа основные свойства предела вещественных последовательностей. В частности, если  $\{z_n\}$  и  $\{w_n\}$  – последовательности комплексных чисел, а  $\alpha$  и  $\beta$  – комплексные постоянные, то выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha z_n + \beta w_n) &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}, \quad w_n \neq 0, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) справедливы при условии, что в их правых частях не возникает неопределенностей.

◆ Последовательность  $\{z_n\}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$  называется ограниченной, если существует такое положительное число  $R > 0$ , что для всех  $n$  справедливо неравенство  $|z_n| < R$ . В противном случае последовательность называется неограниченной.

◆ Пусть дана последовательность комплексных чисел  $\{z_n\}$  такая, что для любого  $R > 0$  существует  $N_R$ , такое что для всех  $n > N_R$  справедливо  $|z_n| > R$ . В этом случае пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$  и говорят, что последовательность стремится к бесконечности  $z \rightarrow \infty$ .

Проведем следующие рассуждения.

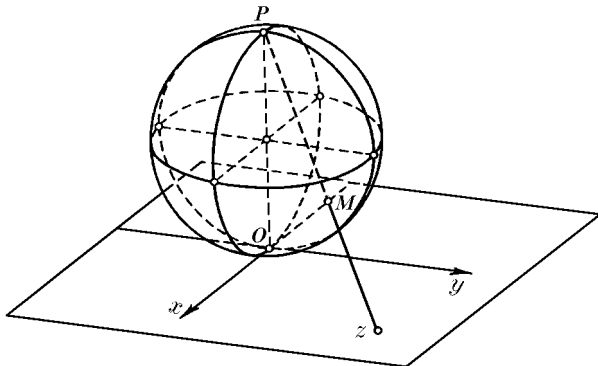


Рис. 10

Рассмотрим сферу  $S$ , касающуюся комплексной плоскости в точке  $O$  (рис. 10). Обозначим через  $P$  точку сферы, диаметрально противоположную точке  $O$ . Каждой точке  $z$  комплексной плоскости поставим в соответствие точку  $M$ , которая

является точкой пересечения сферы  $S$  с прямой, проходящей через точки  $P$  и  $z$  (рис. 10). Очевидно, что последовательности  $\{z_n\}$ , стремящейся к бесконечности, соответствует последовательность точек сферы, сходящаяся к точке  $P$ . Поэтому добавим к комплексной плоскости так называемый бесконечно удаленный элемент – точку  $z = \infty$  и поставим ему в соответствие точку  $P$ .

◆ Комплексная плоскость называется расширенной, если она состоит из обычной комплексной плоскости и единственного бесконечно удаленного элемента  $z = \infty$ .

◇ Соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы  $S$  является взаимно однозначным и называется стереографической проекцией, а сфера  $S$  – сферой Римана.

Аргумент комплексного числа  $z = \infty$  не определен, так же как и его действительная и мнимая части.

**Пример 3.1.** Найти пределы последовательностей  $\{w_n\}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , если

$$\text{а) } w_n = \frac{n+1}{n-i}, \quad \text{б) } w_n = \left| \frac{i^n}{n} \right|, \quad \text{в) } w_n = \arg \frac{i^n}{n}.$$

**Решение.** а) Найдем действительную и мнимую части числа  $w_n = u_n + iv_n$ :

$$w_n = \frac{n+1}{n-i} = \frac{n^2 + n + ni + i}{n^2 + 1} = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} + i \frac{n+1}{n^2 + 1} = u_n + iv_n.$$

Найдем пределы вещественных последовательностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n}{1 + 1/n^2} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{1 + 1/n^2} = 0.$$

Следовательно, по теореме 3.1  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1 + i0 = 1$ .

б) Последовательность  $w_n = |z_n|$  – вещественная. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

в) Представим число  $z_n = i^n/n$  в тригонометрической форме

$$z_n = \frac{1}{n} \left( \cos \frac{\pi n}{2} + i \sin \frac{\pi n}{2} \right).$$

Следовательно,

$$\arg z_n = \begin{cases} 0 & n = 4k \\ \pi/2 & n = 4k + 1 \\ \pi & n = 4k + 2 \\ 3\pi/2 & n = 4k + 3 \end{cases}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

и последовательность  $\{w_n\}$  имеет вид

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

и предела не имеет.

◇ Таким образом, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , то последовательность  $\arg z_n$  может расходиться. Покажем, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \neq 0$ , то последовательность  $\arg z_n$  также может расходиться.

**Пример 3.2.** Найти пределы последовательностей  $\{w_n\}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , если

$$\text{а) } w_n = z_n, \quad \text{б) } w_n = \arg z_n$$

при  $z_n = 1 + i(-1)^n/n$ .

**Решение.** а) В силу линейности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1.$$

б) Согласно формуле (1.10)

$$\arg z_n = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2}}, & n = 2k + 2; \\ 2\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n^2}}, & n = 2k + 1; \end{cases} \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Следовательно, последовательность имеет две предельные точки: 0 и  $2\pi$  и поэтому расходится.

## 4. Ряды комплексных чисел

◆ Пусть дана некоторая последовательность комплексных чисел  $\{w_n\}$  с общим элементом  $w_n = u_n + iv_n$ . Тогда выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad (4.1)$$

называется бесконечным рядом с комплексными членами. Величину  $w_n$  называют  $n$ -м членом ряда. Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^n w_k \quad (4.2)$$

называется  $n$ -частичной суммой.

♦ Ряд (4.1) называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число  $S$  называется суммой ряда.

**Теорема 4.1.** *Ряд (4.1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = U, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = V. \quad (4.3)$$

**Доказательство.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  сходится. Обозначим  $\operatorname{Re} S_n = U_n$ ,  $\operatorname{Im} S_n = V_n$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = U + iV,$$

т.е. оба ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  сходятся в силу теоремы 3.1. Ана-

логично из сходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ .

Теорема переносит основные свойства рядов с вещественными членами на ряды с комплексными членами.

**Теорема 4.2 (необходимый признак сходимости).** *Если ряд (4.1) сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ .*

**Доказательство.** Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} v_n,$$

и ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  сходятся. Следовательно, по необходимому признаку сходимости ряда с вещественными элементами  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0 + i0 = 0$ , что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются все остальные свойства рядов с комплексными членами.

♦ Ряд (4.1) называется сходящимся абсолютно (или безусловно), если сходится ряд, составленный из модулей его элементов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|. \quad (4.4)$$

♦ Сходящийся ряд (4.1) называется условно (неабсолютно) сходящимся, если ряд, составленный из модулей его элементов, расходится.

**Теорема 4.3.** *Если ряд (4.1) сходится абсолютно, то он сходится.*

**Доказательство.** Так как  $|u_n| \leq |w_n|$ ,  $|v_n| \leq |w_n|$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$  на основании первого признака сравнения

знакоположительных рядов следует сходимость рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

и  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ . Следовательно, ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$  сходятся аб-

солютно, а ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  сходятся. Тогда из теоремы 4.1 следует сходимость искомого ряда.

**Теорема 4.4.** *Если оба ряда (4.3) сходятся абсолютно, то ряд (4.1) также сходится абсолютно.*

**Доказательство** следует непосредственно из неравенства треугольника (1.9):

$$|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq |u_n| + |v_n|$$

и первого признака сравнения для знакоположительных рядов.

♦ В качестве достаточного признака абсолютной сходимости можно использовать любой достаточный признак сходимости знакоположительных (вещественных) числовых рядов.

Приведем формулировки основных достаточных признаков сходимости, которые мы будем использовать для исследования комплексных рядов.

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (4.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (4.6)$$

– знакоположительные числовые ряды.

1. *Первый признак сравнения.* Если существует такое  $N$ , что справедливо неравенство

$$a_n \leq |w_n| \leq b_n, \quad n = \overline{N, \infty}$$

и если ряд (4.6) сходится, то ряд (4.4) также сходится, а ряд (4.1) сходится абсолютно. Если же ряд (4.5) расходится, то ряд (4.4) расходится.

2. *Второй признак сравнения.* Если существует конечный и отличный от тождественного нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_n|}{a_n} = \alpha, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

то ряды (4.5) и (4.4) сходятся или расходятся одновременно.

3. *Признак Даламбера.* Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = q,$$

то ряд (4.4) сходится [ряд (4.1) сходится абсолютно] при  $q < 1$  и расходится при  $q > 1$ . При  $q = 1$  вопрос о сходимости остается открытым.

4. *Признак Коши.* Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|} = q,$$

то ряд (4.4) сходится [ряд (4.1) сходится абсолютно] при  $q < 1$ , расходится при  $q > 1$ , а при  $q = 1$  вопрос о сходимости ряда (4.4) остается открытым.

5. *Интегральный признак Коши.* Если  $|w_n| = f(n)$ , где функция  $f(x)$  монотонно убывает и непрерывна при  $x \geq a \geq 1$ , то ряд (4.4) и интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

6. *Признак Дирихле.* Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

сходится, если частичные суммы ряда (4.6) ограничены, т.е. существует такое  $M > 0$ , что

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| < M, \quad n = \overline{1, \infty},$$

а последовательность  $\{a_n\}$  монотонно стремится к нулю.

**Пример 4.1.** Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (1+i)^n.$$

**Решение.** Рассмотрим ряд из модулей. С учетом соотношения (1.13) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n}{3^n} (1+i)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (\sqrt{2})^n.$$

Применим признак Коши сходимости знакоположительных рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n} (\sqrt{2})^n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Здесь мы воспользовались известным предельным соотношением  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Следовательно, искомый ряд сходится абсолютно.

**Пример 4.2.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i}.$$

**Решение.** Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i} \right|,$$

составленный из модулей. Из ограниченности функции  $\sin x$  для вещественных переменных следуют неравенства

$$|w_n| = \left| \frac{\sin 3^n}{3^n + 2^n i} \right| \leq \left| \frac{1}{3^n + 2^n i} \right| = \frac{1}{\sqrt{3^{2n} + 2^{2n}}} \leq \frac{1}{3^n} = a_n.$$

Следовательно, исходный ряд мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}.$$

Применим к нему признак Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Тогда в соответствии с первым признаком сравнения сходится и ряд, составленный из модулей, а исходный ряд сходится абсолютно.

**Пример 4.3.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n/2} (1+i)^n.$$

**Решение.** Найдем действительную и мнимую части ряда. Для этого представим  $z_n$  в виде

$$z_n = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \right]^n = \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n = \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n.$$



Согласно формуле Муавра (1.12)

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^n = \cos \frac{\pi n}{4} + i \sin \frac{\pi n}{4}.$$

Следовательно,

$$z_n = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} = u_n + i v_n,$$

где

$$u_n = \cos \frac{n\pi}{4}; \quad v_n = \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. Пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

не существуют. Следовательно, необходимый признак не выполняется и ряд расходится.

**Пример 4.4.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + i}{n^2}.$$

**Решение.** Исходный ряд сходится, так как сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

являющиеся его действительной и мнимой частями. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, составленный из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n n + i}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + 1/n^2}}{n}.$$

Согласно первому признаку сравнения, в силу неравенства

$$\frac{\sqrt{1 + 1/n^2}}{n} > \frac{1}{n}$$

и расходимости гармонического ряда, составленный из модулей, расходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

**Пример 4.5.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n, \quad (4.7)$$

где знакоположительная последовательность  $\{a_n\}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , монотонно стремится к нулю, а  $\varphi$  – вещественная постоянная. Рассмотрим два частных случая:

$$\text{а) } a_n = \frac{1}{n^2}, \quad \text{б) } a_n = \frac{1}{n}.$$

**Решение.** 1. Обозначим  $n$ -ый член ряда через  $w_n$ . Тогда по формуле Муавра (1.12)

$$\operatorname{Re} w_n = a_n \cos n\varphi, \quad \operatorname{Im} w_n = a_n \sin n\varphi, \quad |w_n| = a_n.$$

Таким образом, ряд (4.7) сходится абсолютно, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (4.8)$$

2. Пусть ряд (4.8) расходится. Исследуем ряд (4.7) на условную сходимость. Обозначим

$$C_n(\varphi) = \sum_{k=1}^n \cos k\varphi, \quad S_n(\varphi) = \sum_{k=1}^n \sin k\varphi$$

и с учетом соотношений

$$2 \sin k\varphi \sin \frac{\varphi}{2} = \cos \left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi;$$

$$2 \cos k\varphi \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi - \sin \left(k - \frac{1}{2}\right)\varphi$$

получим

$$C_n(\varphi) = \frac{\cos[(n+1)\varphi/2] \sin(n\varphi/2)}{\sin \varphi/2},$$

$$S_n(\varphi) = \frac{\sin[(n+1)\varphi/2] \sin(n\varphi/2)}{\sin \varphi/2}.$$

Если  $\varphi \neq 2\pi m$ ,  $m = \overline{-\infty, \infty}$ , то справедливы неравенства

$$|C_n(\varphi)| \leq \frac{1}{|\sin \varphi/2|}, \quad |S_n(\varphi)| \leq \frac{1}{|\sin \varphi/2|},$$

и по признаку Дирихле ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} w_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} w_n$$

сходятся. Если  $\varphi = 2\pi m$ , то  $\cos n\varphi = 1$ ,  $\sin n\varphi = 0$ ,  $n = \overline{-\infty, \infty}$ . Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi \quad (4.9)$$

сходится для всех  $\varphi$ . Аналогично ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi \quad (4.10)$$

сходится при  $\varphi \neq 2\pi m$ ,  $m = \overline{-\infty, \infty}$  [ряд (4.7) сходится условно] и расходится в противном случае.

3. Рассмотрим частные случаи.

а) Ряд (4.8) при  $a_n = 1/n^2$  сходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

– обобщенный гармонический ряд, показатель которого больше единицы. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{n^2}$$

сходится абсолютно.

б) Если  $a_n = 1/n$ , то ряд (4.8) расходится, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

– гармонический ряд. Таким образом, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n}{n}$$

сходится условно при  $\varphi \neq 2\pi m$  и расходится при  $\varphi = 2\pi m$ ,  $m = -\infty, \infty$ .

## 5. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывность

◆ Пусть даны две плоскости комплексных чисел  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Рассмотрим некоторое множество  $E$  в плоскости  $z$  и множество  $G$  в плоскости  $w$ . Если каждому числу  $z$  из множества  $E$  поставлены в соответствие одно или несколько комплексных чисел  $w$  из множества  $G$ , то говорят, что на множестве  $E$  задается функция комплексного переменного, отображающая множество  $E$  в  $G$ . Символически это обозначается

$$w = f(z), \quad (5.1)$$

при этом точку  $w \in G$  называют образом точки  $z \in E$ , а точку  $z$  – прообразом точки  $w$ .

◆ Множество  $E$  называют областью определения функции  $f(z)$ , а множество всех комплексных чисел вида  $f(z) \in G$ , где  $z$  пробегает все множество  $E$ , – множеством значений функции  $f(z)$  (см. рис. 11).

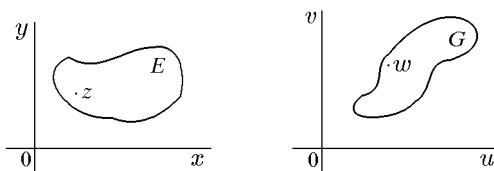


Рис. 11

◆ Если каждому числу  $z$  из множества  $E$  соответствует только одно число  $w$  из множества  $G$ , то функция  $w = f(z)$  называется однозначной, в противном случае – многозначной.

◆ Однозначная функция  $f(z)$  называется однолистной в области  $E$ , если для всех  $z_1$  и  $z_2$ , лежащих в области  $E$ , из условия  $f(z_1) \neq f(z_2)$  следует, что  $z_1 \neq z_2$ , а из условия  $z_1 \neq z_2$ ,

– что  $f(z_1) \neq f(z_2)$ . В противном случае функция называется многолистной.

◆ Функция  $f(z)$ , однолистная в некоторой окрестности точки  $z_0$ , называется однолистной в этой точке.

◇ Очевидно, что функция  $w = f(z)$ , однозначно отображающая область  $E$  в область  $G$ , будет однолистной, если обратная функция  $z = \varphi(w)$  будет однозначна в области  $G$ .

◇ Заметим, что суперпозиция однолистных отображений также является однолиственным отображением. Другими словами, если функция  $\zeta = f(z)$  взаимно однозначно отображает область  $E$  в область  $D$ , а функция  $w = \varphi(\zeta)$  взаимно однозначно отображает область  $D$  в область  $G$ , то сложная функция  $w = \varphi(f(z))$  взаимно однозначно отображает область  $E$  в область  $G$ .

◇ Смысл терминов «однолистная» и «многолистная» функции мы поясним позднее.

Функцию  $f(z)$  можно записать в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = (x, y) \in E,$$

где

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Перейдем к понятию непрерывности функции. Как и в случае вещественных функций, для этого дадим сначала определение предела функции.

◆ Комплексное число  $a$  называется пределом функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что для всех  $z \in E$ , таких что  $|\Delta z| = |z - z_0| < \delta$ , выполняется  $|f(z) - a| < \varepsilon$ . Для обозначения предела функции используется символ

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a. \quad (5.2)$$

◇ Поскольку определение предела функции комплексного переменного дословно повторяет определение предела функции вещественного переменного, то для первого предела справедливы все основные свойства второго, доказанные в курсе математического анализа и полностью аналогичные свойствам предела последовательности комплексных чисел [см. соотношения (3.2)].

**Пример 5.1.** Вычислить

$$\text{а) } \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}; \quad \text{б) } \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right).$$

**Решение.** а) Числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к нулю. Для устранения неопределенности сделаем замену  $z = w - i$ . Тогда если  $z \rightarrow -i$ , то  $w \rightarrow 0$  и

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w(w + i)}{w} = \lim_{w \rightarrow 0} (w + i) = i.$$

б) Пусть  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Поскольку  $z \rightarrow 0$ , то  $\rho \rightarrow 0$  и, соответственно,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{\rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)} - \frac{\rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)}{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} 2i \sin 2\varphi = 2i \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что пределы различны для различных направлений, по которым произвольная точка  $z$  стремится к  $z = 0$  и, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right)$$

не существует.

Заметим, что такой же результат получается, если произвольную точку  $z$  устремить к  $z = 0$  по произвольной прямой  $y = kx$ . Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x(1 + ik)}{x(1 - ik)} - \frac{x(1 - ik)}{x(1 + ik)} \right) = \frac{4ik}{1 + k^2}.$$

Отсюда в силу произвольности углового коэффициента  $k$  следует, что предел не существует.

♦ Функция  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0 \in E$ , если выполняется равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0), \quad z \in E. \quad (5.3)$$

Равенство (5.3) эквивалентно двум равенствам

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0). \quad (5.4)$$

**Пример 5.2.** Доказать, что функция  $f(z) = z^n$  непрерывна в каждой точке комплексной плоскости.

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(z) = z^n$  при  $n = 1$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon$ . Тогда из выполнения неравенства  $|z - z_0| < \delta$  следует

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| < \delta = \varepsilon.$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Delta w = 0,$$

и функция  $f(z) = z^n$  при  $n = 1$  непрерывна на всей комплексной плоскости в силу произвольности  $z_0$ . Но тогда и функция  $f(z) = z^n$  при произвольном целом  $n$  непрерывна как произведение  $n$  непрерывных функций.

◆ Функция  $f(z)$  называется непрерывной на множестве  $E$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $E$ .

Достаточно очевидно

**Утверждение 5.1.** Если непрерывная в области  $E$  функция  $w = f(z)$  однозначно отображает эту область на множество  $G$ , то обратная функция  $w = \varphi(z)$  также является непрерывной, а множество  $G$  – областью,

доказательство которого мы оставляем читателю.

## 6. Степенные ряды комплексных чисел

◆ Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (6.1)$$

где  $C_n$  – комплексные числа,  $z_0$  – фиксированное комплексное число,  $z$  – независимая переменная, называется степенным рядом.

◆ Областью сходимости степенного ряда называется множество  $E$ , состоящее из точек  $z$ , в которых ряд (6.1) сходится.

**Теорема 6.1 (Абеля).** Если степенной ряд (6.1) сходится в точке  $z_1$ , то он сходится абсолютно в круге  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  и равномерно в любом круге  $|z - z_0| \leq R$ ,  $R < |z_1 - z_0|$ . Если ряд (6.1) расходится в точке  $z_1$ , то он расходится для всех  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .

**Доказательство** повторяет доказательство теоремы Абеля для вещественного ряда.

◆ Число  $R = \sup_{z \in E} |z - z_0|$  где  $E$  – область сходимости ряда (6.1), называется радиусом сходимости ряда (6.1), а круг  $|z - z_0| < R$  – кругом его сходимости.

◇ Аналогично вещественному случаю из признаков сходимости Коши и Даламбера для радиусов сходимости степенных рядов нетрудно получить соотношения

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|. \quad (6.2)$$

Соотношения (6.2) написаны в предположении, что пределы, стоящие в их правых частях, существуют. В противном случае для определения радиуса сходимости следует применять признаки Коши и Даламбера непосредственно, как это делается в примере 6.2.

**Пример 6.1.** Найти область и радиус сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n!$ .

**Решение.** Рассмотрим ряд, составленный из модулей

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!},$$

где  $z$  – произвольная фиксированная точка. Здесь мы воспользовались соотношением (1.13). Применим к этому ряду признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1} \frac{n!}{(n+1)!}}{|z|^n \frac{n!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно для всех конечных  $z$ . Таким образом, областью сходимости является вся комплексная плоскость, а радиус сходимости равен бесконечности.

**Пример 6.2.** Найти область и радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n2^n}. \quad (6.3)$$



**Решение.** Обозначим через  $w_n = (z + 1)^n / (n2^n)$  общий член ряда и вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z + 1|^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} \frac{n2^n}{|z + 1|^n} = \frac{|z + 1|}{2}.$$

Тогда по признаку Даламбера ряд (6.3) сходится, если  $|z + 1|/2 < 1$ , и расходится, если  $|z + 1|/2 > 1$ . Радиус сходимости ряда (6.3) равен двум ( $R = 2$ ).

Исследуем вопрос о сходимости ряда (6.3) на границе области сходимости. Сделаем в (6.3) замену

$$z + 1 = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{n}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

В примере 4.5 показано, что последний ряд сходится при  $\varphi \neq 0$  и расходится при  $\varphi = 0$ .

Таким образом, область сходимости ряда (6.3) представляет собой круг  $|z + 1| \leq 2$  с выколотой точкой  $z = 1$ .

## 7. Элементарные функции комплексного переменного

По аналогии с вещественным анализом определим функции комплексного переменного, которые будем называть элементарными.

### 7.1. Степенная функция

Понятие степенной функции

$$w = z^n, \quad n = \overline{1, \infty} \quad (7.1)$$

естественным образом вытекает из определения операции возведения в степень (1.12), а функции

$$z = \sqrt[n]{w} \quad (7.2)$$

– из определения операции извлечения корня (1.14). Для заданного  $n$  их можно рассматривать как пару обратных друг

другу функций. Общий вид степенной функции и отображение, осуществляемое ей, будут рассмотрены позже. Здесь же мы на простом примере  $w = z^2$  поясним введенные выше понятия однозначности, многозначности, а также однолиственности и многолиственности функций.

Пусть  $(\rho, \varphi)$  и  $(r, \theta)$  – полярные координаты точек в плоскостях  $z$  и  $w$ , соответственно. Тогда из (7.1) следует

$$r = \rho^2, \quad \theta = 2\varphi. \quad (7.3)$$

Согласно (7.3), верхняя полуплоскость  $\rho > 0$ ,  $0 < \varphi < \pi$  функцией  $w = z^2$  однозначно отображается на всю комплексную плоскость  $w$  (лист комплексной плоскости) с разрезом по положительной части действительной оси:  $r > 0$ ,  $0 < \theta < 2\pi$  (рис. 12). Для того чтобы пояснить появление разреза, рассмотрим более подробно отображение границы полуплоскости – действительной оси  $\text{Im } z = 0$ , обход которой совершается в направлении от точки  $A$ , соответствующей числу  $z_1 = 1$  ( $\rho_1 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0$ ), к точке  $B$ , соответствующей числу  $z_2 = -1$  ( $\rho_2 = 1$ ,  $\varphi_2 = \pi$ ) (см. рис. 12, а). Оба комплексных числа  $\pm 1$  отобразятся в одно число  $w = 1$ . Однако, как это следует из рис. 12, б, точке  $A$  ( $z = 1$ ) будет соответствовать точка  $A'$  ( $w = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\theta = 0$ ), а точке  $B$  ( $z = -1$ ) – находящаяся как бы «под точкой  $A'$ » точка  $B'$  ( $w = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\theta = 2\pi$ ). В таких случаях принято считать, что положительная действительная полуось плоскости  $w$  состоит из двух «частей»: «верхнего берега» и «нижнего берега». «Верхний берег», обход которого совершается от  $A'$  к нулю, является образом положительной действительной полуоси плоскости  $z$ , а «нижний берег», обход которого совершается от нуля к  $B'$ , – образом отрицательной действительной полуоси плоскости  $z$ . Комплексную плоскость, изображенную на рис. 12, б, принято называть комплексной плоскостью (листом) с разрезом по положительной части действительной оси.

Покажем, что рассматриваемое отображение является не только однозначным, но и взаимнооднозначным, или одноли-

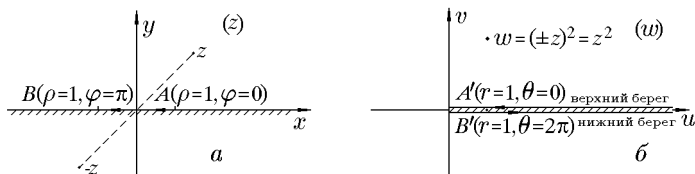


Рис. 12

ным. Действительно, хотя функция  $z = \sqrt{w}$ , обратная к рассматриваемой, двузначна (за исключением точек  $z = 0$ ,  $z = \infty$ ), т.е. заданному значению  $w$  соответствуют два значения  $z$  и  $-z$ , таких что  $z^2 = (-z)^2 = w$ , лишь одно из них принадлежит верхней полуплоскости. Последнее и означает, что отображение в рассматриваемой области является взаимнооднозначным.

Поскольку точки  $z$  и  $-z$  симметричны относительно начала координат, областью однолиственности может служить любая полуплоскость, которая получается при рассеении плоскости  $z$  любой прямой, проходящей через начало координат. Если граница полуплоскости образует с действительной осью угол  $\varphi$  (рис. 13,а), то образ этой полуплоскости – плоскость  $w$  с разрезом, образующим с осью  $Ou$  угол  $\theta = 2\varphi$  (рис. 13,б).

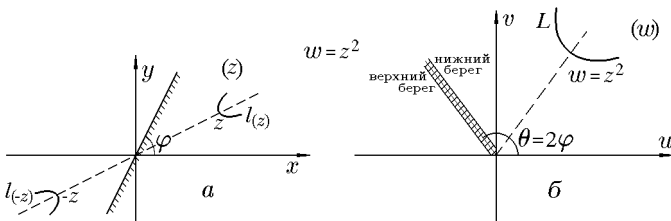


Рис. 13

Нетрудно видеть, что полуплоскость является максимальным множеством, в котором  $w = z^2$  осуществляет однолистное отображение, и любое его расширение нарушает это свойство. Действительно, если рассматривать функцию  $w = z^2$  на всей комплексной плоскости  $z$ , то она отобразит эту плоскость на комплексную плоскость  $w$ , пройденную дважды, или на два листа плоскости  $w$ .

В этом случае обратная функция  $z = \sqrt{w}$  уже не является однозначной, так как одному значению  $w$  соответствуют два различных значения  $z$  и  $-z$ , принадлежащих рассматриваемой области. В этой ситуации можно поступить следующим образом: во-первых, указать, какое из двух значений следует иметь в виду. Если рассматриваемая точка  $w$  принадлежит некоторой кривой  $L$  (не проходящей через  $z = 0$ ,  $z = \infty$ , рис. 13), то выбор одной точки из двух осуществляет, как говорят, выбор однозначной ветви  $l_{(z)}$  ( $l_{(-z)}$ ) двузначной (многозначной) функции. Во-вторых, вместо одного листа комплексной плоскости  $w$  можно рассматривать два, соединенных определенным образом в так называемую риманову поверхность, на

которой функцию  $z = \sqrt{w}$  можно считать уже однозначной.

Более подробно задача выбора однозначных ветвей многозначных функций и построение римановых поверхностей будет рассмотрена позже.

## 7.2. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

♦ Функции комплексного переменного  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  определяются как суммы следующих рядов:

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \\ \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \\ \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

Нетрудно показать, что ряды, определяющие функции (7.4), сходятся абсолютно во всей комплексной плоскости (см. пример 6.1), а при вещественном аргументе ( $z = x$ ) совпадают с соответствующими функциями вещественного переменного.

**Теорема 7.1.** Для любого комплексного числа  $z$  справедливо соотношение

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (7.5)$$

Формула (7.5) является обобщением известной из курса математического анализа формулы Эйлера на случай комплексных  $z$  и также называется формулой Эйлера.

**Доказательство.** Формулы (7.4) справедливы для любого  $z$ . Например, для  $e^{iz}$  получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Поскольку  $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ , то

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам понадобится правило замены индексов суммирования в двойных суммах. Поэтому рассмотрим ряд примеров.

**Пример 7.1.** Показать, что

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f(n, m) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n + m, m). \quad (7.6)$$

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(x, y)$  в области  $0 \leq y \leq x$ . Тогда

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n f(n, m)$$

есть сумма значений функции  $f(x, y)$ , взятых в точках  $x = n$ ,  $y = m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа. Сначала проводится суммирование по  $m$  при фиксированном  $n$ , а затем по  $n$ . Такой

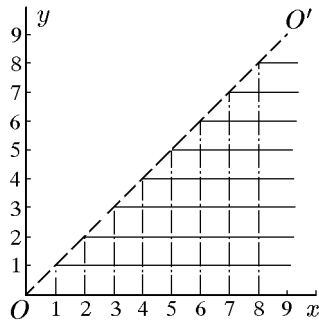


Рис. 14

порядок вычисления суммы можно проиллюстрировать графически следующим образом: значения  $f(x, y)$  вычисляются в точках пересечения горизонтальных и вертикальных линий (рис. 14). Вертикальные линии нумеруются значениями  $n$ , горизонтальные — значениями  $m$ . Суммируются по  $m$  значения  $f(n, m)$  при фиксированном  $n$ , что графически соответствует нахождению конечных сумм по точкам пересечения при движении по вертикальным линиям снизу вверх. Каждой вертикальной линии номера  $n$  соответствует своя сумма

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^n f(n, m).$$

Затем вычисляется бесконечная сумма «по горизонтальным линиям»

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n.$$

Предположим, что все возникшие двойные ряды сходятся абсолютно, т.е.  $\sigma$  не зависит от порядка суммирования. Поэтому сначала просуммируем по точкам, лежащим на каждой горизонтальной линии (фиксированного номера  $m$ ), двигаясь по ней слева направо, а затем просуммируем «по вертикальным линиям», т.е. по  $m$

$$\delta_m = \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m), \quad \sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f(n, m).$$

Заменяв индекс суммирования по  $n$  ( $n \rightarrow n + m$ ) в последнем выражении, получим правило (7.6).

**Пример 7.2.** Доказать соотношение

$$\sigma = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k f(k, m) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} f(k + m, m). \quad (7.7)$$

**Решение.** Рассуждения, аналогичные рассуждениям примера 7.1, дают

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k f(k, m) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n f(k, m).$$

Заменяв  $k$  на  $k + m$ , получим

$$\sum_{m=0}^n \sum_{k=m}^n f(k, m) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^{n-m} f(k + m, m).$$

**Следствие 7.1.1.** Справедливо соотношение

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (7.8)$$

**Доказательство.** Из определения показательной функции (7.4) с учетом бинома Ньютона получим

$$e^{z_1 + z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k z_1^k z_2^{n-k}}{n!}.$$

Воспользовавшись определением биномиальных коэффициентов  $C_n^k$ , запишем

$$e^{z_1 + z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Поменяв порядок суммирования аналогично примеру 7.1, получим

$$e^{z_1+z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^m}{k!m!} = e^{z_1} e^{z_2},$$

что и требовалось доказать.

◇ Из формулы (7.8), в частности, следует, во-первых, что

$$(e^{iz})^n = e^{inz},$$

а во-вторых, что

$$e^{z_1+2\pi i} = e^{z_1} e^{2\pi i} = e^{z_1}.$$

Последнее равенство означает, что на комплексной плоскости функция  $e^z$  становится периодической с чисто мнимым периодом  $T = 2\pi i$ .

**Следствие 7.1.2.** Справедливо соотношение

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) является обобщением формулы Муавра (1.12) на случай комплексных  $z$  и также называется формулой Муавра.

**Доказательство.** Из формулы Эйлера (7.5) следует

$$(\cos z + i \sin z)^n = (e^{iz})^n = e^{inz} = \cos nz + i \sin nz,$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 7.1.3.** Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), & \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}); & (7.10) \\ \operatorname{sh} zi &= i \sin z, & \operatorname{ch} zi &= \cos z, \\ e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Эти соотношения нетрудно получить из формулы Эйлера.

◇ Из формул (7.11) следует, что на комплексной плоскости функции  $\cos z$  и  $\sin z$  по-прежнему остаются периодическими с периодом  $T = 2\pi$ , однако уже не являются ограниченными, поскольку выражаются через гиперболические функции.

Сами гиперболические функции, так же как и показательная функция  $e^z$ , становятся периодическими с чисто мнимым периодом  $T = 2\pi i$ .

◇ Используя формулу Эйлера, из тригонометрической формы комплексного числа (1.8) получим так называемую показательную форму комплексного числа

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{где } \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z, \quad (7.11)$$

удобную для возведения в степень и извлечения корня.

Пусть  $\nu$  – произвольное вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} z^\nu &= (|z|e^{i\varphi})^\nu = (|z|e^{i(\varphi+2k\pi)})^\nu \Rightarrow \\ z^\nu &= |z|^\nu e^{i(\varphi\nu+2k\pi\nu)}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В частности,  $\nu$  может быть равно  $1/n$ .

Для функций (7.4) справедливы все основные соотношения, полученные для вещественных функций.

**Пример 7.3.** Доказать соотношение

$$\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 = \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(z_1 + z_2) + \operatorname{sh}(z_1 - z_2)].$$

**Доказательство.** Из определения гиперболических функций (7.4) можно записать

$$\operatorname{sh} z_1 = \frac{1}{2}[e^{z_1} - e^{-z_1}], \quad \operatorname{ch} z_2 = \frac{1}{2}[e^{z_2} + e^{-z_2}].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 &= \frac{1}{4}(e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2}) = \\ &= \frac{1}{4}[e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)} - e^{-(z_1-z_2)} + e^{z_1-z_2}] = \\ &= \frac{1}{2}[\operatorname{sh}(z_1 + z_2) + \operatorname{sh}(z_1 - z_2)]. \end{aligned}$$

**Пример 7.4.** Представить число

$$w = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{i}{2} \ln 2 \right)$$

в алгебраической форме.



**Решение.** По определению,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

С учетом формул (7.11) получим

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{i}{2} \ln 2 \right) &= -i \frac{e^{2i(\pi/6 - i \ln 2/2)} - 1}{e^{2i(\pi/6 - i \ln 2/2)} + 1} = \\ &= -i \frac{e^{i\pi/3} e^{\ln 2} - 1}{e^{i\pi/3} e^{\ln 2} + 1} = -i \frac{1 + i\sqrt{3} - 1}{1 + i\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3i}{7}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\operatorname{Re} w = \frac{2\sqrt{3}}{7}, \quad \operatorname{Im} w = \frac{3}{7}.$$

### 7.3. Логарифмическая функция

♦ Функция, обратная функции  $z = e^w$ , называется логарифмической и обозначается  $\operatorname{Ln} z = w$ .

Пусть  $w = \operatorname{Ln} z = u + iv$ . Из (7.11)  $z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$ . С другой стороны,  $z = e^{u+iv}$ , т.е.  $|z|e^{i \operatorname{Arg} z} = e^u e^{iv}$ . Отсюда  $v = \operatorname{Arg} z$ ,  $e^u = |z|$ , т.е.  $u = \ln |z|$ . Таким образом,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z; \quad (7.13)$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi, \quad (7.14)$$

где  $k = \overline{-\infty, \infty}$ .

♦ Значение логарифма числа  $z$  ( $z \neq 0$ ), равное  $\ln |z| + i \arg z$ , называется главным значением  $\operatorname{Ln} z$  и обозначается

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (7.15)$$

С учетом (7.14)

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki, \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \quad (7.16)$$

Свойства логарифма  $\operatorname{Ln} z$ :

1.  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ,

$$2. \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

◇ Функция  $\operatorname{Ln} z$  является многозначной, поэтому указанные равенства (если иное не оговорено особо) следует рассматривать с точностью до  $2\pi ki$  или как равенства множеств, состоящих из одних и тех же чисел. Естественные для действительных чисел равенства  $\ln x + \ln x = 2 \ln x$ ,  $\ln x^2 = 2 \ln x$  на комплексной плоскости некорректны, т.е., вообще говоря,  $\operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z \neq 2 \operatorname{Ln} z$ ,  $\operatorname{Ln} z^2 \neq 2 \operatorname{Ln} z$ , поскольку правые и левые части представляют собой разные множества. Так, для последнего соотношения  $2 \operatorname{Arg} z = 2(\arg z + 2\pi k) = 2 \arg z + 4\pi k$ , тогда как  $\operatorname{Arg} z^2 = 2 \arg z + 2\pi k$ . В качестве иллюстрации рассмотрим также множество  $M = \{0, 1\}$ , состоящее из двух элементов: нуля и единицы. Множество  $M + M$  состоит из трех элементов:  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 1 = 2$ , тогда как множество  $2M$  состоит только из двух элементов:  $2 \cdot 0 = 0$  и  $2 \cdot 1 = 2$ .

**Пример 7.5.** Представить в алгебраической форме число

$$\text{а) } w = \operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}), \quad \text{б) } w = \ln(-a), \quad a > 0.$$

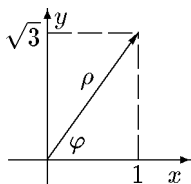


Рис. 15

**Решение.** а) Согласно (7.13)

$$\operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k),$$

где  $\rho = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$  (см. рис. 15). Запишем число  $z = 1 + i\sqrt{3}$  в виде показательной функции:

$$z = \rho e^{i\varphi + 2i\pi k},$$

$$\rho = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = 2.$$

Поскольку  $\operatorname{Re} z = 1 > 0$  и  $\operatorname{Im} z = \sqrt{3} > 0$ , число  $z$  находится в первой четверти комплексной плоскости. Согласно (1.10),  $\varphi = \varphi_0$ , где

$$\varphi_0 = \arccos \frac{|x|}{\rho} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} \operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln \rho = \ln 2,$$

$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} \operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Окончательно получим

$$w = \operatorname{Ln}(1 + i\sqrt{3}) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

б) Аналогично

$$\ln(-a) = \ln|a| + \pi i = \ln a + \pi i, \quad a > 0.$$

В частности,  $\ln(-1) = i\pi$ .

#### 7.4. Общая степенная функция

♦ Общей степенной функцией называется функция вида

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}, \quad (7.17)$$

где  $\alpha$  – заданное комплексное число.

**Пример 7.6.** Представить в алгебраической форме число

$$w = (-12 + 5i)^{-i}.$$

**Решение.** По определению (7.17)

$$z_1^{z_2} = e^{\operatorname{Ln} z_1^{z_2}} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1},$$

где  $z_1 = -12 + 5i$ ,  $z_2 = -i$ . Запишем

$$\operatorname{Ln} z_1 = \operatorname{Ln}(-12 + 5i) = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k).$$

Найдем модуль и аргумент числа  $z_1$ :  $\rho = |z_1| = 13$ . Поскольку  $\operatorname{Re} z_1 = -12 < 0$ ,  $\operatorname{Im} z_1 = 5 > 0$ , число  $z_1$  находится во II-ой четверти. Согласно (1.10),

$$\varphi = \pi - \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arccos \frac{12}{13}.$$

Тогда

$$\varphi = \pi - \arccos \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ln} z_1 = \operatorname{Ln}(-12 + 5i) = \ln 13 + i\left(\pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} w &= e^{-i \operatorname{Ln}(-12+5i)} = \exp \left\{ -i \left[ \ln 13 + i \left( \pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right) \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -i \ln 13 + \left( \pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right\} \exp(-i \ln 13). \end{aligned}$$

С учетом формулы Эйлера (7.5) получим

$$w = \exp \left( \pi - \arccos \frac{12}{13} + 2\pi k \right) (\cos \ln 13 - i \sin \ln 13).$$

## 7.5. Обратные тригонометрические функции

◆ Функция, обратная функции  $z = \cos w$ , называется арккосинусом и обозначается  $w = \operatorname{Arccos} z$ .

Из формулы Эйлера следует, что

$$z = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}).$$

Следовательно,  $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ . Отсюда получаем  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ , т.е.

$$w = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}) = \operatorname{Arccos} z. \quad (7.18)$$

В отличие от вещественного случая знак  $\pm$  перед корнем не ставится, так как  $\sqrt{z^2 - 1}$  уже является многозначной функцией.

Аналогично записываем

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}); \\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}; \\ \operatorname{Arsh} z &= \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 + 1}); \\ \operatorname{Arch} z &= \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \operatorname{Arth} z &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

◇ В вещественном анализе основными элементарными функциями принято считать полиномы, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Все остальные элементарные функции получаются из основных с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций (построения сложных функций), применяемых конечное число раз. Из проведенного выше рассмотрения видно, что в теории функций комплексного переменного основными элементарными функциями являются только полиномы, показательные и логарифмические функции.

**Пример 7.7.** Представить в алгебраической форме число

$$w = \operatorname{Arcsin} \frac{5}{3}.$$

**Решение.** Согласно формуле (7.19),

$$w = -i \operatorname{Ln} \left( \frac{5}{3}i + \sqrt{1 - \frac{25}{9}} \right) = -i \operatorname{Ln} \left( \frac{5}{3}i \pm \frac{4}{3}i \right).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} w^1 &= -i \operatorname{Ln} 3i = -i \left( \ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2i\pi k \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - i \ln 3, \\ w^2 &= -i \operatorname{Ln} \frac{i}{3} = -i \left( \ln \frac{1}{3} + \frac{\pi i}{2} + 2i\pi k \right) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + i \ln 3. \end{aligned}$$

Объединим полученные результаты в одну формулу

$$w_k = \operatorname{Arcsin} \frac{5}{3} = \pi \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \pm i \ln 3, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

**Пример 7.8.** Представить в алгебраической форме число

$$w = \operatorname{Arth} (-1 + 2i).$$

**Решение.** Согласно формуле (7.19), для  $k = \overline{-\infty, \infty}$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + (-1 + 2i)}{1 - (-1 + 2i)} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{-1 + i}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\pi}{4}i + 2i\pi k \right) = -\frac{1}{4} \ln 2 + \pi \left( \frac{3}{8} + k \right) i. \end{aligned}$$

## 8. Дифференцирование функций комплексного переменного

◆ Функция  $f(z)$  называется дифференцируемой в точке  $z$ , если при  $\Delta z \rightarrow 0$  существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (8.1)$$

не зависящий от способа стремления  $\Delta z$  к нулю. Этот предел называется производной функции  $f(z)$  в точке  $z$  и обозначается  $f'(z)$ :

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}. \quad (8.2)$$

◇ Если функция  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z$ , то она и непрерывна в этой точке.

**Теорема 8.1.** Если функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируема в точке  $z = x + iy$ , то в точке  $(x, y)$  существуют частные производные функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  по переменным  $x, y$ , причем имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (8.3)$$

Соотношения (8.3) называются условиями Коши–Римана.

**Доказательство.** Так как функция  $f(z)$  дифференцируема, то существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z},$$

который, по определению предела, не зависит от способа стремления  $\Delta z$  к нулю.

а) Пусть  $\Delta z = \Delta x$ . Тогда

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

б) Пусть  $\Delta z = i\Delta y$ . Получим

$$f'(z) = -i \left\{ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} \right\} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Но, по определению предела, результаты, полученные в случаях а) и б), должны быть равны, что и доказывает теорему.

◇ Не представляет особого труда показать, что если функция  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ , то функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  не только имеют частные производные в точке  $x_0, y_0$ , но и дифференцируемы как функции двух переменных в этой точке. Ответ на вопрос о дифференцируемости функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , если ее реальная и мнимая части дифференцируемы как функции двух переменных в точке  $x_0, y_0$ , дает следующая теорема:

**Теорема 8.2.** *Если каждая из функций  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  дифференцируема в точке  $x, y$  как функция двух переменных, а их частные производные удовлетворяют условиям Коши – Римана (8.3), то функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  является дифференцируемой функцией комплексного переменного  $z = x + iy$ .*

**Доказательство.** Поскольку функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $(x, y) \in E$ , то

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \\ \Delta v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y) \Delta y,\end{aligned}$$

где  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , а  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \Delta u + i \Delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) + \\ &\quad + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y + \\ &\quad + i [\varepsilon_3(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y) \Delta y] = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) (\Delta x + i \Delta y) + [\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y)] \Delta x + \\ &\quad + [\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) + i \varepsilon_4(\Delta x, \Delta y)] \Delta y.\end{aligned}$$

Из последнего соотношения с учетом неравенства

$$\begin{aligned} & |[\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\varepsilon_3(\Delta x, \Delta y)]\Delta x + \\ & + [\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) + i\varepsilon_4(\Delta x, \Delta y)]\Delta y| \leq \\ & \leq [|\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)| + |\varepsilon_3(\Delta x, \Delta y)|]|\Delta x| + \\ & + [|\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)| + |\varepsilon_4(\Delta x, \Delta y)|]|\Delta y| \leq \\ & \leq [|\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)| + |\varepsilon_3(\Delta x, \Delta y)| + \\ & + |\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)| + |\varepsilon_4(\Delta x, \Delta y)|]\rho. \end{aligned}$$

следует существование предела (8.2), что и доказывает теорему.

**Пример 8.1.** Показать, что условия Коши–Римана (8.3) эквивалентны условию

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0. \quad (8.4)$$

**Решение.** Функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  с учетом соотношений

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}$$

формально можно рассматривать как функцию двух переменных  $z$  и  $z^*$ , т.е.

$$f(z) = u\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right) + iv\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right).$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} + i \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям Коши–Римана (8.3), то

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

и наоборот.



Из рассмотренного примера вытекает удобное в практических приложениях замечание.

◇ Если функция  $f(z)$  в точке  $z$  удовлетворяет условию (8.4), то функция дифференцируема в этой точке, причем

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

и, следовательно, производные для дифференцируемых функций можно получать формальным дифференцированием  $f(z)$  по переменной  $z$ .

**Пример 8.2.** Исследовать на дифференцируемость функцию  $f(z) = z^*$ .

**Решение.** *Первый способ.* Для данной функции имеем

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (8.5)$$

Рассмотрим два случая:

- а)  $\Delta y = 0$ , т.е.  $\Delta z = \Delta x \neq 0$ , тогда  $\Delta f/\Delta z = 1$ ;  
 б)  $\Delta x = 0$ , т.е.  $\Delta z = i\Delta y \neq 0$ , тогда  $\Delta f/\Delta z = -1$ .

Следовательно, отношение (8.5) при  $\Delta z \rightarrow 0$  предела не имеет и функция  $f(z) = z^*$  не дифференцируема.

*Второй способ.* Так как  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

и условия Коши–Римана не выполняются ни в одной точке комплексной плоскости.

*Третий способ.* Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 1$$

на всей комплексной плоскости, то функция  $f(z) = z^*$  не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости.

◇ Условия (8.3) иногда называют условиями Даламбера–Эйлера, что более правомерно с исторической точки зрения, так как они впервые были исследованы Даламбером и в особенности Эйлером в работах, посвященных приложениям функций комплексного переменного к гидромеханике, картографии и интегральному исчислению.

◆ Функция  $f(z)$ , определенная в области  $E$ , называется аналитической (регулярной или голоморфной) в точке  $z_0 \in E$ , если она  $f(z)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $z_0$ , целиком лежащей в  $E$ .

◇ Поскольку определение производной в бесконечно удаленной точке  $z_0 = \infty$  теряет смысл, условимся считать функцию  $f(z)$  аналитической в этой точке, если функция  $\varphi(z) = f(1/z)$  аналитична в точке  $z_0 = 0$ .

◆ Точка  $z_0$ , в которой функция  $f(z)$  является аналитической, называется правильной точкой этой функции, в противном случае она называется особой.

◆ Функция  $f(z)$  называется аналитической в области  $E$ , если  $f(z)$  аналитична во всех точках области  $E$ .

◇ Подчеркнем, что определение аналитической функции предполагает ее однозначность в области  $E$ , поскольку только в этом случае понятия предела и производной имеют смысл. Понятие аналитичности будет распространено позднее на многозначные функции.

Из условий Коши–Римана (8.3) следует, что для производной функции  $f(z)$  справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

**Следствие.** В полярной системе координат  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  условия Коши–Римана (8.3) для функции  $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$  имеют вид ( $z = \rho e^{i\varphi}$ )

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}. \quad (8.6)$$

**Доказательство.** Перейдем в полярную систему координат:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), & v(x, y) &= v(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi); \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi; \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= \frac{\partial v}{\partial x} \rho (-\sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} \rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Сравнив последние два соотношения, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Аналогично доказывается второе соотношение в (8.6).

Так как определение производной (8.2) дословно повторяет определение производной функции одной действительной переменной, то в комплексной плоскости сохраняются все правила дифференцирования, справедливые для функции одной вещественной переменной:

1.  $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$ ,
2.  $[Cf(z)]' = Cf'(z)$ ,  $C = \text{const}$ ,
3.  $[[f(z)g(z)]]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ ,
4.  $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ ,
5.  $[f(\varphi(z))]' = \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi(z)} \varphi'(z)$ ,
6.  $\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}$ ,  $w = f(z)$ ,  $z = \varphi(w)$  и т.д.

Отметим, что функции  $f(z)$ ,  $g(z)$  и  $\varphi(z)$  предполагаются дифференцируемыми, причем последнее равенство, определяющее производную обратной функции, справедливо в области ее однолиственности.

Сформулируем утверждение, имеющее важное практическое значение, справедливость которого вытекает из теоремы 5.1.

**Утверждение 8.1.** Если функция  $f(z)$  аналитична в некоторой области  $E$  и не является постоянной, то при отображении, осуществляемом функцией  $w = f(z)$ , образом области  $E$  является множество  $G$ . Тогда множество  $G$  также является областью.

**Пример 8.3.** Показать, что функция  $f(z) = e^z$  аналитична во всей комплексной плоскости.

**Решение.** По формуле Эйлера  $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ . Следовательно,

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y,$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия Коши–Римана выполняются на всей комплексной плоскости. Следовательно, функция  $f(z) = e^z$  – аналитическая на этой плоскости. Вычислив производную из (8.5), получим

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z, \text{ т.е. } (e^z)' = e^z.$$

◇ Так как функции  $e^{\pm z}$  и  $e^{\pm iz}$  – аналитические, то являющиеся их линейными комбинациями функции  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\operatorname{sh} z$  также аналитичны.

**Пример 8.4.** Показать, что функция  $f(z) = \ln z$  аналитична в комплексной плоскости, кроме точки  $z = 0$ , при условии  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(z) = \ln z$ . Положим  $u(\rho, \varphi) = \ln \rho$ ,  $v(\rho, \varphi) = \varphi$ . Из условий Коши–Римана в полярной системе координат (8.3) найдем

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial \rho},$$

т.е. функция  $f(z) = \ln z$  – аналитическая всюду, кроме точки  $z = 0$ .

Найдем производную функции  $f(z) = \ln z$ . По определению,  $z = e^f$ . Дифференцируя это равенство, получим  $1 = e^f f'$  или  $f' = e^{-f} = 1/z$ , т.е.

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

◇ Так как функция  $\ln z$  – аналитическая в области  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , функции  $\operatorname{arcsin} z$ ,  $\operatorname{arccos} z$ , и  $\operatorname{arch} z$ ,  $\operatorname{arsh} z$  также аналитические всюду, кроме точек  $z = \pm 1$  и  $z = \pm i$ , соответственно.

**Пример 8.5.** Найти производную функции  $f(z) = \operatorname{arcsin} z$  ( $z$  не принадлежит лучу  $[-1, \infty[$ ).

**Решение.** С учетом (7.19) и правил дифференцирования сложных функций получим

$$\begin{aligned} (\arcsin z)' &= -i(\ln(iz + \sqrt{1-z^2}))' = \\ &= \frac{-i}{iz + \sqrt{1-z^2}} \left( i - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1-z^2} + iz}{iz + \sqrt{1-z^2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$f'(z) = (\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

**Теорема 8.3.** Действительная и мнимая части аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  связаны соотношениями

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right) + C; \quad (8.7)$$

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dx - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dy \right) + C, \quad (8.8)$$

где интегрирование ведется по произвольному пути, соединяющему  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$  и принадлежащему области аналитичности.

**Доказательство.** Из курса математического анализа известно, что

$$dv(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy$$

и функцию  $v(x, y)$  можно представить криволинейным интегралом

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C,$$

который не зависит от кривой, соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ . С помощью соотношений Коши–Римана

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy$$

получим

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C.$$

Доказательство соотношения (8.8) аналогично.

## 9. Гармонические функции

◇ Мы установили соотношения (8.7) и (8.8), связывающие функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в предположении, что функция  $f(z) = u + iv$  — аналитическая. Возникает вопрос: любая ли непрерывная вместе со своими частными производными функция двух переменных может являться действительной или мнимой частью аналитической функции? В общем случае ответ отрицателен.

**Пример 9.1.** Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , если  $v(x, y) = x^2 + y^2$  и  $f(0) = 1$ .

**Решение.** Функция  $u(x, y)$  должна удовлетворять условиям Коши–Римана, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = 2xy + \varphi(y).$$

Из второго условия Коши–Римана найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x.$$

Таким образом,  $\varphi'(y) = -4x$ , что невозможно, т.е. исходная задача некорректна. Следовательно, не всякая функция двух переменных может являться действительной  $u(x, y)$  или мнимой  $v(x, y)$  частью аналитической функции. Такие функции должны удовлетворять дополнительным условиям, а именно: быть гармоническими.

◆ Функция  $\Phi(x, y)$  называется гармонической в области  $E$ , если она непрерывна в области  $E$  вместе со своими частными

производными до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in E. \quad (9.1)$$

Уравнение (9.1) называется двумерным уравнением Лапласа.

В дальнейшем мы покажем, что аналитическая в области  $E$  функция имеет в этой области непрерывные производные любого порядка.

**Теорема 9.1.** Действительная и мнимая части аналитической в области  $E$  функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  являются в этой области гармоническими функциями, если они имеют непрерывные вторые частные производные.

**Доказательство.** По определению аналитических функций, функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  во всех точках  $E$  удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (9.2)$$

Продифференцируем первое равенство по  $x$ , а второе – по  $y$  и сложим полученные выражения. Получим

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x} = 0, \quad (9.3)$$

т.е. функция  $u(x, y)$  – гармоническая. Теперь первое тождество (9.2) продифференцируем по  $y$ , а второе – по  $x$  и вычтем из первого второе, тогда

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} = 0. \quad (9.4)$$

Таким образом, теорема доказана.

◆ Две гармонические в области  $E$  функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , связанные в этой области условиями Коши–Римана, называются сопряженными.

◇ Действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряженными гармоническими функциями.

**Теорема 9.2.** Для любой функции  $u(x, y)$ , гармонической в односвязной области  $E$ , существует сопряженная к ней гармоническая функция  $v(x, y)$ , определяемая соотношением

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right) + \text{const}, \quad (9.5)$$

где интегрирование проводится по произвольной кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$  и целиком лежащей в  $E$ .

**Доказательство.** Поскольку функция  $u(x, y)$  – гармоническая, то из теоремы Грина следует, что значение криволинейного интеграла, стоящего в правой части соотношения (9.5), не зависит от пути интегрирования. Выберем в качестве кривой, соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ , ломаную с отрезками, параллельными осям координат. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left( -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right) + \text{const} = \\ & = -\int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy + \text{const} = v(x, y). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное соотношение по  $x$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} dy = \\ &= -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} - \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} dy = \\ &= -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y_0}^y = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается справедливость первого соотношения Коши–Римана.



◇ Из теорем 9.1 и 9.2 вытекает, что действительная и мнимая части аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  связаны соотношением

$$v(x, y) = - \int_{x_0}^x \frac{\partial u(t, y_0)}{\partial y} dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt + C, \quad (9.6)$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(t, y_0)}{\partial y} dt - \int_{y_0}^y \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dt + C, \quad (9.7)$$

если ломаная  $ABC$  лежит в области аналитичности  $f(z)$ . Здесь  $A = (x_0, y_0)$ ,  $B = (x, y_0)$ ,  $C = (x, y)$ .

**Пример 9.2.** Найти аналитическую функцию  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3,$$

если  $f(0) = 0$ .

**Решение.** Проверим, является ли функция  $v(x, y)$  гармонической. Для этого найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= 3x^2 + 12xy - 3y^2, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 6x + 12y, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 6x^2 - 6xy - 6y^2. & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -6x - 12y. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $v(x, y)$  является гармонической и существует сопряженная ей функция  $u(x, y)$ . Применяя формулу (9.7), получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (6x^2 - 6xy - 6y^2) dx + (-3x^2 - 12xy + 3y^2) dy = \\ &= \int_0^x (6t^2 - 6ty_0 - 6y_0^2) dt + \int_0^y (-3x^2 - 12xt + 3t^2) dt. \end{aligned}$$

Здесь мы положили  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ . Получим

$$u(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + C.$$

Из условия  $f(0) = 0$  находим  $C = 0$ . Тогда

$$f(z) = (2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3) + i(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3),$$

и окончательно получим

$$f(z) = 2z^3 + iz^3.$$

**Пример 9.3.** Найти аналитическую функцию  $f(z)$  по известной действительной части

$$u(x, y) = -y^3 + 3x^2y + 2x,$$

если  $f(1) = 2 - 4i$ .

**Решение.** Функция  $u(x, y)$  – гармоническая, так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y + 6y = 0.$$

Из первого условия Коши–Римана находим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2.$$

Следовательно,

$$v(x, y) = 3y^2x - x^3 + \varphi(y).$$

Подставим функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  во второе условие Коши–Римана и получим

$$6xy + \varphi'(y) = 6xy + 2.$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = 2 \quad \text{и} \quad \varphi(y) = 2y + C.$$

Тогда

$$v(x, y) = 3y^2x - x^3 + 2y + C.$$

Постоянную  $C$  определим из условия  $f(1) = 2 - 4i$ . Поскольку  $\operatorname{Re} 1 = 1$  и  $\operatorname{Im} 1 = 0$ , то

$$f(1) = u(1, 0) + iv(1, 0) = 2 + i(-1 + C) = 2 - 4i$$

и  $C = -3$ . Тогда

$$v(x, y) = 3y^2x - x^3 + 2y - 3.$$

Окончательно получим

$$f(z) = -iz^3 + 2z - 3i.$$

**Пример 9.4.** Найти аналитическую функцию  $f(z)$  по известной мнимой части

$$v(x, y) = y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x,$$

если  $f(0) = 0$ .

**Решение.** Проверим функцию  $v(x, y)$  на гармоничность:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y \cos y \operatorname{ch} x + \sin y [\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = y \cos y \operatorname{sh} x + \sin y \operatorname{sh} x + \sin y [\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x];$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{sh} x [\cos y - y \sin y] + x \operatorname{ch} x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\operatorname{sh} x \sin y - x \operatorname{sh} x \sin y - \operatorname{sh} x [\sin y + y \cos y].$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. функция  $v(x, y)$  – гармоническая, и для нее существует сопряженная функция  $u(x, y)$ . Из первого условия Коши–Римана находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sh} x [\cos y - y \sin y] + x \operatorname{ch} x \cos y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \operatorname{ch} x [\cos y - y \sin y] + \cos y \int_0^x t \operatorname{ch} t \, dt + \varphi(y).$$

Вычислим интеграл

$$\int t \operatorname{ch} t \, dt.$$

Для этого проинтегрируем один раз по частям, положив  $U = t$ ,  $dU = dt$ ,  $dV = \operatorname{ch} t \, dt$ ,  $V = \operatorname{sh} t$ . Тогда

$$\int t \operatorname{ch} t \, dt = t \operatorname{ch} t - \int \operatorname{ch} t \, dt = t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + C.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \operatorname{ch} x[\cos y - y \sin y] + \cos y[x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \varphi(y).$$

Воспользуемся вторым условием Коши–Римана. Для этого найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \operatorname{ch} x[-\sin y - (\sin y + y \cos y)] - \sin y[x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x] + \varphi'(y), \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= -y \cos y \operatorname{ch} x - \sin y \operatorname{sh} x - x \operatorname{sh} x \sin y. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y + C.$$

Из условия  $f(0) = 0$  находим, что  $C = 0$ .

Рассмотрим второй способ решения задачи. Найдем функцию  $u(x, y)$  из соотношения (9.7). Запишем

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \int_0^x \{\operatorname{sh} t[\cos y - y \sin y] + t \operatorname{ch} t \cos y\} dt = \\ &= \operatorname{ch} t[\cos y - y \sin y] \Big|_0^x + \cos y \int_0^x t \operatorname{ch} t dt. \end{aligned}$$

Возьмем интеграл по частям, положив, как и ранее,  $U = t$ ,  $dU = dt$ ,  $dV = \operatorname{ch} t dt$ ,  $V = \operatorname{sh} t$ . Тогда

$$u_1(x, y) = \operatorname{ch} t[\cos y - y \sin y] \Big|_0^x + \cos y[t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t] \Big|_0^x.$$

Запишем теперь

$$u_2(x, y) = \int_0^y \{t \cos t \operatorname{ch} x + \sin t[\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x]\} dt.$$

Возьмем интеграл по частям, положив теперь  $U = t$ ,  $dU = dt$ ,  $dV = \cos t dt$ ,  $V = \sin t$ . Тогда

$$u_2(x, y) = \operatorname{ch} x[t \sin t + \cos t] \Big|_0^y - \cos t[\operatorname{ch} x + x \operatorname{sh} x] \Big|_0^y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = u_1(x, 0) + u_2(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y$$

и

$$f(z) = (x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y) + i(y \cos y \operatorname{sh} x + x \sin y \operatorname{ch} x).$$

Окончательно получим

$$f(z) = (1 + iz) \operatorname{sh} z.$$

◇ Переход от переменных  $x, y$  к комплексной переменной  $z$  в более сложных выражениях может быть осуществлен с помощью соотношений

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}.$$

## 10. Кривые в комплексной плоскости

◆ Если каждому значению  $t$  из интервала  $a < t < b$  поставлено в соответствие комплексное число

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (10.1)$$

где  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ , а  $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$ , то мы будем говорить, что на интервале  $]a, b[$  задана комплексная (комплекснозначная) функция действительного переменного  $t$ .

◆ Для комплекснозначной функции действительного переменного определим понятия предела, производной и интеграла при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \\ z'(t) &= x'(t) + iy'(t), \\ \int_a^b z(t) dt &= \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt. \end{aligned} \quad (10.2)$$

◆ Пусть дана комплекснозначная функция  $z(t)$ , непрерывная на отрезке  $[a, b]$ . При этом отрезку  $[a, b]$  отвечает некоторое множество в комплексной плоскости. Это множество вместе с

указанием порядка, в котором проходятся его точки, называется непрерывной кривой  $\Gamma$ , а уравнение  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  – параметрическим уравнением этой кривой  $\Gamma$ .

◆ Точка  $z$  называется точкой самопересечения кривой, если  $z = z(t_1) = z(t_2)$  при  $t_1 \neq t_2$ .

◆ Простой кривой, или кривой Жордана, называется непрерывная кривая, не имеющая точек самопересечения.

◆ Простую кривую, у которой конец совпадает с началом, называют замкнутой кривой.

◆ Кривая  $\Gamma$  называется гладкой, если существует параметрическое уравнение  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , с функцией  $z(t)$ , имеющей на отрезке  $[a, b]$  непрерывную и отличную от нуля производную.

◆ Непрерывная кривая  $\Gamma$  называется кусочно-гладкой кривой, если ее можно разбить на конечное число частей, каждая из которых является гладкой кривой.

◆ Замкнутый контур без самопересечений, лежащий в комплексной плоскости, будем называть положительно ориентированным, если обход совершается против часовой стрелки, и обозначать  $\Gamma^+$ . В противном случае контур будем называть отрицательно ориентированным и обозначать  $\Gamma^-$ .

◇ Если это не приводит к недоразумениям, индекс ‘+’ у положительно ориентированных контуров может быть опущен, т.е.  $\Gamma = \Gamma^+$ .

**Пример 10.1.** Выяснить, какие линии определяются уравнением

$$z = 2e^{it} + e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi[.$$

**Решение.** Найдем действительную и мнимую части комплексного числа  $z$ . По формуле Эйлера (7.5) получим

$$x = 3 \cos t, \quad y = \sin t.$$

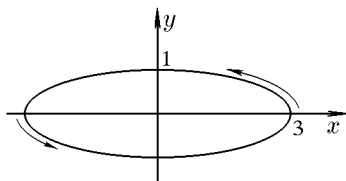


Рис. 16

Исключив  $t$ , получим

$$\frac{x^2}{3^2} + y^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями  $a = 3$ ,  $b = 1$ . С учетом изменения параметра  $t$  видим, что точка  $z$  делает полный оборот по эллипсу от точки  $z = 3$  против часовой стрелки (см. рис. 16).

**Пример 10.2.** Написать в комплексной форме уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0. \quad (10.3)$$

**Решение.** Имеем  $x^2 + y^2 = zz^*$ ,  $2y = i(z - z^*)$ . Подставив эти выражения в уравнение (10.3), получим

$$zz^* - 2iz^* + 2iz - 8 = 0$$

или

$$(z - i)(z^* + i) - 9 = 0.$$

Окончательно получим

$$|z - i|^2 = 9.$$

## 11. Интегралы от функций комплексного переменного

♦ Интеграл от функции комплексного переменного  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  вдоль кривой  $\Gamma$  определяется следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} (u + iv)(dx + idy) = \\ &= \int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \end{aligned} \quad (11.1)$$

◇ Таким образом, интеграл от функции комплексного переменного определяется как сумма двух криволинейных интегралов второго рода от функции двух вещественных переменных.

Пусть  $z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , – параметрическое уравнение гладкой кривой  $\Gamma$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . В этом случае интеграл от функции комплексного переменного может быть преобразован в интеграл от комплекснозначной функции действительных переменных (10.2)

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (11.2)$$

Если  $\Gamma$  – кусочно-гладкая кривая, то в правой части (11.2) будет стоять сумма определенных интегралов, каждый из которых соответствует гладкому участку кривой.

**Пример 11.1.** Вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}, \quad n = \overline{-\infty, \infty},$$

где  $\Gamma$  – окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат.

**Решение.** Параметрическое уравнение окружности имеет вид  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ . Тогда  $z = x + iy = Re^{it}$ ,  $dz = [x'(t) + iy'(t)] dt = R(-\sin t + i \cos t) dt = iR(\cos t + i \sin t) dt = iRe^{it} dt$ .

1. Пусть  $n = 1$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{Re^{it}} = 2\pi i.$$

2. Рассмотрим случай, когда  $n \neq 1$ . Получим

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{(Re^{it})^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{it(n-1)} dt = 0.$$

Легко увидеть, что если окружность обходится  $k$  раз, то для  $n = 1$

$$\int_{\Gamma_k} \frac{dz}{z} = 2\pi ik,$$

тогда как для  $n \neq 1$  интеграл по-прежнему равен нулю.



Следовательно,

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{z^n} = 2\pi k i \delta_{1,n}, \quad (11.3)$$

где  $\delta_{1n}$  – символ Кронекера,  $k$  – количество обходов окружности  $|z| = R$ .

Отметим, что результат интегрирования зависит от  $n$  и  $k$ , но не зависит от радиуса окружности  $R$ , что станет очевидным после того, как мы докажем теорему Коши.

**Пример 11.2.** Вычислить  $I = \int_{\Gamma} z^2 dz$ , где  $\Gamma$  – отрезок прямой, соединяющей точки  $z_1 = 1$  и  $z_2 = i$ .

**Решение.** Параметрическое уравнение отрезка  $z_1 z_2$  имеет вид  $x(t) = 1 - t$ ,  $y(t) = t$ ,  $t \in [0, 1]$ , т.е.  $z = (1 - t) + it$ ,  $dz = z'(t)dt = (-1 + i)dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} z^2 dz = \int_0^1 [(1 - t) + it]^2 (-1 + i) dt = \\ &= (-1 + i) \left\{ \int_0^1 [(1 - t)^2 - t^2] dt + 2i \int_0^1 t(1 - t) dt \right\} = \\ &= (-1 + i) \left\{ (t - t^2) + 2i \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \right\} \Big|_0^1 = \\ &= (-1 + i) 2i \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}(1 + i). \end{aligned}$$

**Пример 11.3.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{\Gamma} z|z| dz$$

по контуру  $\Gamma : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ .

**Решение.** Контур  $\Gamma$  можно представить в параметрической форме следующим образом:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in \left[ \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right].$$

Тогда

$$z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}, \quad |z| = 1$$

и

$$dz = ie^{it} dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} 1 \cdot ie^{it} e^{it} dt = i \int_{3\pi/2}^{2\pi} e^{2it} dt = \frac{1}{2} e^{2it} \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} = \frac{1}{2} [e^{4\pi i} - e^{3\pi i}] = \\ &= \frac{1}{2} [\cos 4\pi + i \sin 4\pi - \cos 3\pi - i \sin 3\pi] = \frac{1}{2} [2] = 1. \end{aligned}$$

Непосредственно из определения (11.1) вытекают следующие свойства интеграла от функции комплексного переменного:

### 1. Линейность.

$$\int_{\Gamma} [C_1 f_1(z) + C_2 f_2(z)] dz = C_1 \int_{\Gamma} f_1(z) dz + C_2 \int_{\Gamma} f_2(z) dz. \quad (11.4)$$

Здесь и в дальнейшем  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  непрерывны, кривая  $\Gamma$  – кусочно-гладкая, а  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

**Доказательство** этого свойства непосредственно следует из свойства линейности криволинейного интеграла второго рода.

**2. Ориентированность.** Пусть  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  – один и тот же путь, проходимый в прямом и обратном направлениях. Тогда

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = - \int_{\Gamma^-} f(z) dz. \quad (11.5)$$

**Доказательство** непосредственно следует из зависимости криволинейного интеграла второго рода от направления на кривой.

**3. Аддитивность.** Пусть  $\Gamma$  состоит из кусочно-гладких кривых  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz, \quad (11.6)$$

причем направление обхода кривых  $\Gamma_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , совпадает с направлением обхода  $\Gamma$ .

**Доказательство** следует из свойства аддитивности криволинейного интеграла второго рода.

#### 4. Оценка интегралов.

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz|,$$

где  $|dz| = dl$  – длина дуги, а в правой части стоит криволинейный интеграл первого рода.

## 12. Теорема Коши

**Теорема 12.1 (Коши).** *Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $E$ , то интеграл от этой функции по произвольному кусочно-гладкому замкнутому контуру  $\Gamma \subset E$  равен нулю.*

**Доказательство** проведем при дополнительном (упрощающем) предположении, что функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в области  $E$ . По определению интеграла в комплексной плоскости

$$J = \oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \oint_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Подынтегральные функции в криволинейном интеграле удовлетворяют условиям теоремы Грина. Следовательно,

$$J = \iint_{D_{\Gamma}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{D_{\Gamma}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy,$$

где  $D_{\Gamma} \subset E$  – область, ограниченная контуром  $\Gamma$ . В силу условий Коши–Римана  $J = 0$  и теорема доказана. Доказательство для общего случая см., например, в [39].

**Следствие.** Пусть  $E$  – односвязная область  $z_1, z_2 \in E$ , а  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset E$  – две произвольные кривые с началом в  $z_1$  и концом в  $z_2$  (см. рис. 17). Тогда для аналитической в области  $E$

функции  $f(z)$  справедливо

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz. \quad (12.1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим разность интегралов от функции  $f(z)$ , вычисленных по контурам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz - \int_{\Gamma_2} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^-} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz = 0,$$

что и требовалось доказать.

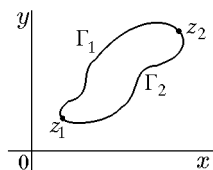


Рис. 17

◆ Аналитическая функция  $F(z)$  называется первообразной функции  $f(z)$  в области  $E$ , если  $F'(z) = f(z)$  для всех  $z$ , принадлежащих области  $E$ .

◇ Если  $F(z)$  – первообразная функции  $f(z)$  в области  $E$ , то функция  $\Phi(z) = F(z) + C$ , где  $C$  – произвольная комплексная константа, также является первообразной функции  $f(z)$  в области  $E$ .

◆ Совокупность всех первообразных функции  $f(z)$  называется неопределенным интегралом от функции  $f(z)$  и обозначается  $\int f(z)dz$ . При этом, если  $F(z)$  – какая-либо первообразная функции  $f(z)$ , то

$$\int f(z)dz = F(z) + C.$$

**Теорема 12.2.** Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $E$ , а точки  $z_1$  и  $z_2$  принадлежат  $E$ , то для любой кусочно-гладкой кривой  $\Gamma$ , соединяющей точку  $z_1$  с точкой  $z_2$ , целиком лежащей в  $E$ , справедливо соотношение

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1), \quad (12.2)$$

где  $F(z)$  – произвольная первообразная функции  $f(z)$  в области  $E$ . Соотношение (12.2) называется формулой Ньютона–Лейбница.

**Доказательство** дословно повторяет доказательство аналогичного свойства криволинейных интегралов второго рода.

**Пример 12.1.** Вычислить  $\int_{\Gamma} z^2 dz$ , где  $\Gamma$  – кривая, соединяющая точки  $z_1 = 1$  и  $z_2 = i$ .

**Решение.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $F'(z) = z^2$ , где  $F(z) = z^3/3 + C$ . Поскольку функция  $f(z) = z^2$  аналитична во всей комплексной плоскости, то

$$\int_{\Gamma} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_1^i = \frac{1}{3}(i^3 - 1^3) = -\frac{1+i}{3}.$$

**Пример 12.2.** Вычислить

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

где  $\Gamma: |z| = 4, \operatorname{Im} z \geq 0$ . Для  $\sqrt{z}$  выбирается однозначная ветвь, на которой  $\sqrt{4} = -2$  (см. разд. «Степенная функция»).

**Решение.** *Первый способ.* Искомый интеграл можно вычислить непосредственно по формуле (11.2), положив  $z = \rho e^{i\varphi}$ , где аргумент  $\varphi$  меняется от нуля до  $\pi$ . Согласно (1.12),

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i(\varphi+2\pi k)/2}, \quad k = 0, 1.$$

Так как интегрирование проводится по окружности  $|z| = 4$ , то  $z = 4e^{i\varphi}$ ,  $dz = 4ie^{i\varphi} d\varphi$ , а

$$\sqrt{z} = 2e^{i(\varphi/2+\pi k)},$$

откуда в силу условия  $\sqrt{4} = -2$  следует, что  $k = 1$  и, соответственно,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{4ie^{i\varphi} d\varphi}{2e^{i(\varphi/2+\pi)}} = 2i \int_0^{\pi} e^{i(\varphi/2-\pi)} d\varphi = \\ &= 4e^{i(\varphi/2-\pi)} \Big|_0^{\pi} = 4(e^{-i\pi/2} - e^{i\pi}) = 4(1-i). \end{aligned}$$

*Второй способ.* Так как точки  $z = 4$  и  $z = -4$  принадлежат односвязной области аналитичности подынтегральной функции, то применение формулы Ньютона–Лейбница (12.2) дает

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_4^{-4} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} \Big|_4^{-4} = 2[\sqrt{-4} - \sqrt{4}].$$

Согласно выбору ветви, для которой  $\sqrt{4} = -2$ , т.е.  $k = 1$ , находим

$$\sqrt{-4} = 2e^{i(\pi/2+k\pi)} \Big|_{k=1} = 2e^{3\pi i/2} = -2i,$$

откуда

$$I = 2(-2i + 2) = 4(1 - i).$$

Теорема 12.1 допускает важное обобщение (доказательство мы не приводим, см. [39]).

**Теорема 12.3 (Коши, основная).** *Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $E$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{E} = E + \Gamma_E$ , то интеграл от функции  $f(z)$  по границе этой области равен нулю:*

$$\int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0.$$

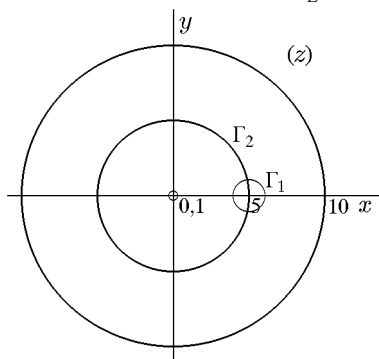


Рис. 18

До сих пор рассматривались только односвязные области. Для выяснения роли связности области рассмотрим функцию  $f(z) = 1/z$ . Эта функция аналитична в кольце  $r < |z| < R$ , которое является двусвязной областью. Положим для определенности  $r = 0,1$ ,  $R = 10$  и сравним результаты интегрирования

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} \quad (12.3)$$

по контурам  $\Gamma = \Gamma_1: |z - 5| = 1$  и  $\Gamma = \Gamma_2: |z| = 5$ , целиком лежащим в рассматриваемом кольце  $0,1 < |z| < 10$  (рис. 18).

Очевидно, что интеграл по первому контуру  $\Gamma_1$  равен нулю:

$$\int_{|z-5|=1} \frac{dz}{z} = 0, \quad (12.4)$$

так как в двусвязной области  $0,1 < |z| < 10$  можно выделить односвязную область, например  $|z - 5| \leq 2$ , полностью содержащую внутри себя контур интегрирования  $|z - 5| = 1$ . Что

касается интегрирования по контуру  $\Gamma_2$ , то, согласно примеру 11.1, в этом случае интеграл будет отличен от нуля:

$$\int_{|z|=5} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \quad (12.5)$$

Сравнение формул (12.4) и (12.5) позволяет сделать вывод, что теорема 12.1 остается справедливой только для тех контуров в многосвязной области, для которых удается выделить односвязную подобласть, полностью содержащую этот контур. В противном случае теорема 12.1 в многосвязной области неверна.

Отметим различие между рассматриваемыми выше контурами: если контур  $|z - 5| = 1$  путем непрерывной деформации можно стянуть в точку, не выходя при этом за границу области, то для контура  $|z| = 5$  это оказывается невозможным. Именно этот факт может служить критерием применимости теоремы 12.1 для контура, расположенного в многосвязной области.

**Теорема 12.4 (Коши для многосвязной области).** Если функция  $f(z)$  аналитична в области  $E$  и непрерывна в замкнутой области  $\bar{E} = E + \Gamma_E$ , то интеграл от функции  $f(z)$  по границе этой области равен нулю, если область  $E$  во время обхода границы все время остается с одной стороны.

$$\int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0. \quad (12.6)$$

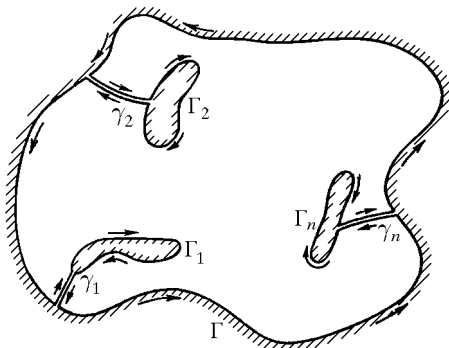


Рис. 19

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  – внешняя и внутренние части границы области  $\Gamma_E$ . Проведем разрезы  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  (рис. 19), превращающие многосвязную область  $E$  в односвязную с границей

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_E + \gamma_1^+ + \gamma_1^- + \dots + \gamma_n^+ + \gamma_n^-.$$

Тогда, согласно теореме 12.3 и с учетом того, что разрезы проходятся дважды в противоположных направлениях, имеем

$$\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = \int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0,$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 12.4.1.** Если обход замкнутых контуров  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \dots, \Gamma_n$  в формуле (12.6) считать положительным (против часовой стрелки), то она может быть записана в виде

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k} f(z) dz. \quad (12.7)$$

Другими словами, интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам.

**Доказательство.** Согласно (12.6), имеем

$$\int_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\Gamma_k^-} f(z) dz = 0.$$

Изменение направления обхода контуров  $\Gamma_k$  непосредственно приводит к формуле (12.7).

**Следствие 12.4.2.** Для двусвязной области интеграл по внешнему (внутреннему) контуру равен интегралу по любому замкнутому контуру, расположенному в этой области и охватывающему ее внутреннюю границу.

**Доказательство** очевидно.

◇ Утверждение следствия 12.4.2 хорошо иллюстрируется примером 11.1, в котором результат интегрирования не зависит от радиуса окружности, по которой ведется интегрирование.



**Пример 12.3.** Вычислить

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}, \quad n = \overline{-\infty, \infty},$$

где  $\Gamma$  – произвольный замкнутый контур, охватывающий точку  $z = 0$ .

**Решение.** *Первый способ.* Рассмотрим двусвязную область, внешней границей которой является контур  $\Gamma$ , а внутренней – окружность  $\Gamma_0 : |z| = R$  с радиусом, меньшим кратчайшего расстояния между началом координат и контуром  $\Gamma$  (рис. 20). В такой области функция  $z^{-n}$  аналитична при любых значениях  $n$  и согласно следствию 12.4.1 можно записать

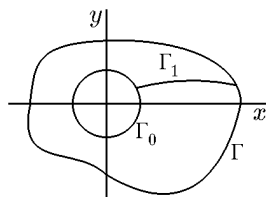


Рис. 20

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_{|z|=R} \frac{dz}{z^n},$$

откуда с учетом результата примера 11.1 получаем

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = 2\pi i \delta_{1,n}.$$

*Второй способ.* Обозначим (см. рис. 20)

$$\tilde{\Gamma} = \underbrace{\Gamma + \Gamma_1^+ + \Gamma_1^- + \Gamma_0^-}_{\gamma} + \Gamma_0^+,$$

где  $\Gamma_0$  – окружность радиуса  $R$ , а  $R$  меньше кратчайшего расстояния между началом координат и контуром  $\Gamma$ ;  $\Gamma_1$  – произвольная жорданова кривая, соединяющая контуры  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$ . Знаки  $+$  и  $-$  определяют направление обхода контура против и по часовой стрелки, соответственно. Тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{dz}{z^n} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^n} + \int_{\Gamma_0^+} \frac{dz}{z^n} = \int_{\Gamma_0^+} \frac{dz}{z^n} = 2\pi i \delta_{1,n},$$

где  $n = \overline{-\infty, \infty}$ . Здесь мы воспользовались результатом примера 11.1, а также теоремой 12.4 для контура  $\gamma$ .

**Пример 12.4.** Вычислить интегралы

$$\text{а) } \oint_{\Gamma_k} \frac{dz}{z}, \quad \text{б) } \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z},$$

где  $\Gamma_k$  – произвольный замкнутый контур, а  $\gamma_k$  – произвольный контур с началом в точке  $z_1 = 1$  и с концом в точке  $z_2 = z$ . По обоим контурам точка  $z = 0$  обходится  $k$  раз.

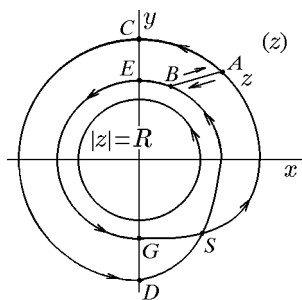


Рис. 21

в этом же направлении (рис. 21), причем разрез  $AB$  обходится дважды в противоположных направлениях. Тогда

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = \oint_{ACDSBA} \frac{dz}{z} + \oint_{ABEGSA} \frac{dz}{z}. \quad (12.8)$$

Далее так же, как и в примере 11.1, находим

$$\oint_{\Gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i. \quad (12.9)$$

Изменив в (12.9) направление обхода, получим

$$\oint_{\Gamma_2^-} \frac{dz}{z} = -4\pi i. \quad (12.10)$$

Из (12.9) и (12.10) следует достаточно очевидный результат для произвольного  $k$

$$\oint_{\Gamma_k} \frac{dz}{z} = 2\pi ki, \quad k = \overline{-\infty, \infty}, \quad (12.11)$$

**Решение.** а) Случай  $k = 1$  рассмотрен в примере 11.1. Рассмотрим случай  $k = 2$ , т.е. замкнутый контур  $\Gamma_2$  обходит начало координат два раза (рис. 21). Трудность, возникающая в этом случае, заключается в появлении точки самопересечения  $S$ , в результате чего контур  $\Gamma_2$  перестает быть простым. Эту трудность можно преодолеть введением разреза  $AB$ , разбивающего контур  $\Gamma_2$  на два простых:  $ACDSBA$  и  $ABEGSA$ , проходимых

где положительным значениям  $k$  соответствует положительное направление обхода  $\Gamma_k$ , отрицательным – отрицательное.

б) Поскольку функция  $f(z) = 1/z$  аналитична в комплексной плоскости с вырезанной отрицательной частью вещественной оси  $-\pi < \arg z < \pi$  и  $(\ln z)' = 1/z$ , то

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln z - \ln 1 = \ln z,$$

где  $\gamma$  – простой контур, соединяющий точки  $z_1 = 1$  и  $z_2 = z$ , не проходящий через начало координат и не пересекающий отрицательную часть действительной оси.

Рассмотрим теперь контур  $\gamma_1$ , который один раз пересекает отрицательную часть действительной оси при обходе точки  $z = 0$  в положительном направлении (рис. 22).

Контур  $\gamma_1$ , в отличие от контура  $\gamma$ , не является простым, так как имеет точку самопересечения  $S$ . Введем разрез  $AD$ , разбивающий контур  $\gamma_1$  на два простых: замкнутый  $ASCDA$  и незамкнутый  $ADSB$ , проходимых в том же направлении, причем сам разрез  $AD$  обходится дважды в противоположных направлениях.

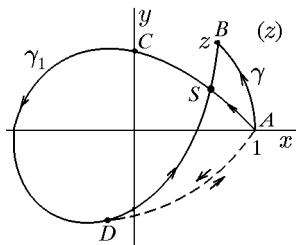


Рис. 22

Тогда

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \oint_{ASCDA} \frac{dz}{z} + \int_{ADSB} \frac{dz}{z}.$$

Учтя, что

$$\oint_{ASCDA} \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad \int_{ADSB} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \ln z,$$

найдем

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \ln z + 2\pi i. \quad (12.12)$$

Изменив в (12.12) направление обхода, получим

$$\oint_{\gamma_1^-} \frac{dz}{z} = \ln z - 2\pi i. \quad (12.13)$$

Из (12.12) и (12.13) следует достаточно очевидный результат для произвольного  $k$

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z} = \ln z + k2\pi i = \text{Ln } z, \quad (12.14)$$

где положительным значениям  $k$  соответствует положительное направление обхода  $\gamma_k$ , отрицательным – отрицательное, а для  $k = 0$  контур  $\gamma$  не пересекает отрицательную часть действительной оси.

Подводя итог, можно отметить, что интеграл (12.14) представляет собой многозначную функцию, однозначные ветви которой определяются выбором контура  $\gamma_k$ .

### 13. Интеграл Коши

**Теорема 13.1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $E$ . Тогда для всех  $z$ , принадлежащих  $E$ , и кусочно-гладкого контура  $\Gamma$ , целиком лежащего в  $E$ , справедливо

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & z \in D_{\Gamma} \\ 0 & z \notin D_{\Gamma} \end{cases}, \quad (13.1)$$

где  $D_{\Gamma}$  – область, ограниченная контуром  $\Gamma$  (рис. 23).

Интеграл, стоящий в правой части равенства (13.1), называется интегралом Коши (интегральной формулой Коши), а функция  $\mathcal{K}(z, \zeta) = 1/(\zeta - z)$  – ядром интеграла Коши.

**Доказательство.** 1. Запишем

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta = J_1 + J_2,$$

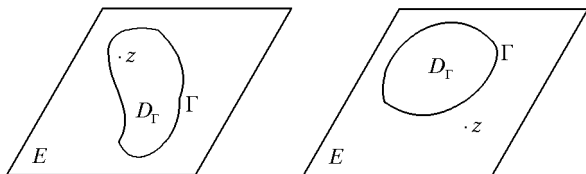


Рис. 23

где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta, \quad J_2 = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

2. Рассмотрим интеграл  $J_2$ . Пусть  $z \notin D_{\Gamma}$ , тогда подынтегральное выражение – аналитическая функция  $\zeta$  и по теореме Коши  $J_2 = 0$ .

Пусть теперь  $z \in D_{\Gamma}$ , тогда, поступая так же, как и при решении примера 12.3, получим  $J_2 = f(z)$ .

3. Рассмотрим интеграл  $J_1$ :

а)  $z \notin D_{\Gamma}$ . В этом случае подынтегральное выражение является аналитической функцией и, следовательно,  $J_1 = 0$ .

б)  $z \in D_{\Gamma}$ . Рассмотрим двусвязную область, получаемую из  $D_{\Gamma}$  удалением круга  $|\zeta - z| < \varepsilon$ . В полученной области выражение  $[f(\zeta) - f(z)]/(\zeta - z)$  аналитично и, следовательно, согласно следствию 12.4.1 можно записать

$$J_1 = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Последний интеграл, согласно теореме Коши 12.1, не зависит от  $\varepsilon$ . Заметим, что предел

$$\lim_{|\zeta - z| = \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z)$$

существует и ограничен в силу аналитичности функции  $f(z)$ , а следовательно, и функции  $[f(\zeta) - f(z)]/(\zeta - z)$ . Тогда

$$\begin{aligned} |J_1| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \oint_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{|\zeta - z| = \varepsilon} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| = \\ &= |f'(z)| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{|\zeta - z| = \varepsilon} |d\zeta| = |f'(z)| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $J_1 = 0$ , что и доказывает теорему.

◇ Для заданных  $z$  и  $f(z)$  существует бесконечное множество контуров  $\Gamma$ , охватывающих точку  $z$  и целиком лежащих в односвязной области  $E$ , для которых

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

Формула Коши допускает обобщение формулы (13.1) на случай неодносвязных областей.

**Теорема 13.2.** Пусть  $f(z)$  аналитична в области  $E$  и непрерывна на границе этой области. Тогда для всех  $z \in E$  справедливо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (13.2)$$

где  $\Gamma_E$  – граница области  $E$  (см. рис. 19). При обходе контура область  $E$  всегда должна находиться слева.

Интеграл (13.2) называется интегралом Коши для многосвязной области.

**Доказательство.** Пусть область  $E$  (см. рис. 19) –  $(n + 1)$ -связная, а  $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  – внешняя и внутренние части границы  $\Gamma_E$  этой области. Рассмотрим  $(n + 2)$ -связную область, полученную из  $E$  удалением круга  $|\zeta - z| < \varepsilon$ . Функция  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  аналитична во внутренних точках полученной области и непрерывна на ее границе. Значит, согласно следствию 12.4.1, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (13.3)$$

причем при обходе  $\Gamma_E$  слева остается область  $E$ , а при обходе окружности – внутренняя часть круга  $|\zeta - z| < \varepsilon$ . К интегралу в правой части применима теорема 13.1, в силу чего

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z),$$

и формула (13.3) переходит в (13.2), что и требовалось доказать.

◇ Теорему 13.2 в случае односвязной области можно рассматривать как обобщение теоремы 13.1, когда контур расширяется до границы области  $E$ .

◇ Для двусвязной области с внешней границей  $\Gamma$  и внутренней  $\Gamma_1$  формула (13.2) принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz - \int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \right\}. \quad (13.4)$$

Обход этих контуров положителен относительно области, ими ограниченной.

◇ Интегральная формула Коши (13.2) показывает, что многие свойства аналитических функций определяются свойствами простейшей из них  $\mathcal{K}(z, \zeta) = 1/(\zeta - z)$  — ядра Коши.

**Пример 13.1.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{1+z^2} dz.$$

**Решение.** Исходный интеграл можно представить в виде

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)} dz.$$

Обозначим

$$\varphi(z) = \frac{\cos z}{z+i}.$$

Функция  $\varphi(z)$  аналитична в области  $|z-i| < 1$  и непрерывна на ее границе. Тогда с учетом интегральной формулы Коши (13.2) получим

$$I = \oint_{|z-i|=1} \frac{\varphi(z)}{z-i} dz = 2\pi i \varphi(i) = 2\pi i \frac{\cos i}{i+i} = \pi \cos i = \pi \operatorname{ch} 1.$$

**Пример 13.2.** Вычислить интеграл

$$I = \oint_{|z|=1/2} \frac{e^z}{z^2+z} dz.$$

**Решение.** Поскольку  $z(z+1) = (z-0)(z+1)$ , обозначим

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{z+1}.$$

Функция  $\varphi(z)$  аналитична в области  $|z| < 1$  и контур интегрирования  $|z| = 1/2$  целиком лежит в этой области. Тогда

$$I = \oint_{|z|=1/2} \frac{\varphi(z)}{z-0} dz = 2\pi i \varphi(0) = 2\pi i \frac{e^0}{0+1} = 2\pi i.$$

◇ Отметим, что интеграл в формуле Коши (13.2) определяется лишь значениями  $f(z)$  на границе  $\Gamma_E$  области  $E$ . Таким образом, значения функции внутри области аналитичности задаются ее значениями на границе. Формула Коши позволяет вычислять значения функции во всех точках области, если известны граничные значения этой функции.

**Теорема 13.3 (о среднем).** Если функция  $f(z)$  аналитична в круге  $|z - z_0| < R$  и непрерывна на его границе  $|z - z_0| = R$ , то значение этой функции в центре круга (точка  $z_0$ ) равно среднему арифметическому ее значений на окружности:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (13.5)$$

**Доказательство.** Формула (13.5) следует непосредственно из (13.2) после замены  $\zeta = z_0 + Re^{i\varphi}$ .

## 14. Интеграл типа Коши

◆ Пусть  $\Gamma$  – произвольная кусочно-гладкая ориентированная кривая, не обязательно замкнутая, и  $\varphi(z)$  – непрерывная функция, определенная вдоль  $\Gamma$ . Выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma \quad (14.1)$$

называется интегралом типа Коши.



**Теорема 14.1.** *Интеграл типа Коши есть аналитическая функция  $F(z)$  для всех  $z$ , не принадлежащих  $\Gamma$  и*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z \notin \Gamma. \quad (14.2)$$

**Доказательство.** Если выполняется соотношение (14.2), то функция  $F(z)$  аналитична для всех  $z$ , не принадлежащих  $\Gamma$ .

Докажем справедливость соотношения (14.2). Для этого рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)} [(\zeta - z)^2 - (\zeta - z)(\zeta - z - \Delta z) - \\ &- \Delta z(\zeta - z - \Delta z)] d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta) \Delta z}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу  $\Delta z \rightarrow 0$  и получим (14.2), что и требовалось доказать.

**Следствие 14.1.1.** Производные  $n$ -ого порядка функции (14.1)  $F(z)$  определяются путем  $n$ -кратного дифференцирования по  $z$  подынтегральной функции

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (14.3)$$

**Доказательство** следует из соотношений (14.1) и (14.2) при использовании метода математической индукции.

**Следствие 14.1.2.** Функция  $f(z)$ , аналитическая в области  $E$  и непрерывная на границе  $\Gamma_E$  этой области, бесконечно дифференцируема во внутренних точках области, и ее производная  $n$ -ого порядка находится по формуле

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_E} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (14.4)$$

Здесь  $\Gamma_E$  – граница области  $E$ .

**Доказательство.** Из формулы (13.1) следует, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_E^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

т.е. аналитическая в области  $E$  функция представляется интегралом Коши. Формула (14.4) следует из (14.3) как частный случай.

**Следствие 14.1.3.** Производные аналитической в области  $E$  функции  $f(z)$  также являются аналитическими в области  $E$  функциями.

**Доказательство.** Аналитическая функция бесконечно дифференцируема. Следовательно, функция  $\varphi(z) = f^{(n)}(z)$  является дифференцируемой, а ее производная – непрерывной, т.е. функция  $\varphi(z)$  – аналитическая, что и требовалось доказать.

**Пример 14.1.** Вычислить

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz,$$

где  $\Gamma$  – окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $z = 0$ .

**Решение.** Из (14.4), в частности, следует

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z). \quad (14.5)$$

Подставим в формулу (14.5)  $f(z) = \cos z$ ,  $n = 2$ ,  $z = 0$ . Тогда

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)''|_{z=0} = -\pi i.$$

## 15. Некоторые следствия из интегральной формулы Коши

В этом разделе мы рассмотрим несколько теорем, полезных не столько в практических, сколько в теоретических приложениях.

Первой мы рассмотрим теорему Морера, являющуюся обращением теоремы Коши.

**Теорема 15.1 (Морера).** *Если функция  $f(z)$  непрерывна в области  $E$  и*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

*для любого кусочно-гладкого замкнутого контура  $\Gamma$ , целиком лежащего в  $E$  ( $\Gamma \subset E$ ), тогда функция  $f(z)$  аналитична в области  $E$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Согласно условию теоремы, ее значение не зависит от пути интегрирования и

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

где в качестве пути интегрирования можно выбрать отрезок прямой, соединяющей точки  $z$  и  $z + \Delta z$ . Предельный переход  $\Delta z \rightarrow 0$  в полученном равенстве дает

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta,$$

откуда в силу непрерывности функции  $f(z)$  получим

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF(z)}{dz} = f(z).$$

Таким образом, функция  $F(z)$  является аналитической и ее производная есть функция  $f(z)$ . Но, как следует из следствия 14.1.3, производная аналитической функции также аналитическая функция, что и требовалось доказать.

**Теорема 15.2 (принцип максимума модуля).** *Если  $f(z)$  не равна тождественно постоянной, аналитична в области  $E$  и непрерывна на границе  $\Gamma_E$ , то ее модуль может достигать наибольшего значения только на границе области  $E$ .*

**Доказательство.** Пусть  $z_0$  – произвольная фиксированная внутренняя точка области  $E$ . Согласно утверждению 8.1, точка  $w_0 = f(z_0)$  принадлежит множеству значений функции  $f(z)$  вместе с некоторой окрестностью  $|w - w_0| < \delta$ . Выберем в этой окрестности некоторую точку  $w_1$ , такую что  $|w_1| > |w_0|$ . Точке  $w_1$  соответствует точка  $z_1 \in E$ , такая что  $w_1 = f(z_1)$ . Обозначим  $|z_1 - z_0| = \varepsilon$ . Если  $\delta \rightarrow 0$ , то  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу аналитичности функции  $f(z)$ . Следовательно, в любой окрестности точки  $z_0$  существует точка  $z_1$ , такая что  $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ , т.е. точка  $z_0$  не может быть точкой максимума. В силу произвольности  $z_0$   $|f(z)|$  не может достигать наибольшего значения во внутренних точках области  $E$ . Следовательно, он достигает его на границе, что и требовалось доказать.

◇ Минимальное значение модуля функции  $|f(z)|$  также не может достигаться внутри области  $E$ , что доказывается аналогично.

**Теорема 15.3 (Лиувилля).** *Функция, аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости, есть постоянная.*

**Доказательство.** Пусть  $z_0$  и  $z_1$  – любые две точки, расположенные внутри замкнутого контура  $\Gamma$ . Используя формулу (13.2), можно записать

$$f(z_1) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right] f(\zeta) d\zeta.$$

Выберем в качестве контура интегрирования окружность  $|\zeta| = R$  с радиусом  $R$ , большим обоих чисел  $|z_0|, |z_1|$ . Тогда оценка интеграла дает

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{(z_0 - z_1)f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z_1)} d\zeta \right|.$$

Учтя, что  $|f(\zeta)| < M$ , даже когда  $|\zeta| \rightarrow \infty$ , найдем

$$|f(z_1) - f(z_0)| < \frac{|z_0 - z_1|MR}{(R - |z_0|)(R - |z_1|)}.$$

Устремим  $R$  к бесконечности ( $R \rightarrow \infty$ ), сохранив  $z_0$  и  $z_1$  неподвижными. Тогда ясно, что  $f(z_1) - f(z_0) = 0$ , так как предел правой части неравенства равен нулю. В силу произвольности  $z_0$  и  $z_1$  заключаем, что функция  $f(z)$  есть постоянная.

Отметим, что эта теорема допускает несколько очевидных обобщений. Одно из них заключается в том, что если условие ограниченности заменить условием возрастания модуля  $|f(z)|$  не быстрее, чем  $M|z|^n$ , то  $f(z)$  — полином степени не выше  $n$ . Еще одно обобщение мы приведем позднее, после того, как рассмотрим ряд Лорана.

# Теория вычетов и ее приложения

Эта глава посвящена изложению основных положений теории вычетов. Теоретический материал иллюстрируется примерами. Глава снабжена приложением, где в удобной для использования в теории вычетов форме приведены необходимые сведения из теории функций вещественной переменной, касающиеся несобственных интегралов.

## 16. Ряд Тейлора

◆ Функциональная последовательность  $\{u_n(z)\}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ ,  $z \in E$ , называется равномерно сходящейся к функции  $u(z)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_\varepsilon$ , не зависящее от  $z$  и такое, что для всех  $n > N_\varepsilon$  и для всех  $z$ , принадлежащих области  $E$ , справедливо

$$|u(z) - u_n(z)| < \varepsilon.$$

◆ Функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = f(z), \quad z \in E, \quad (16.1)$$

называется равномерно сходящимся к  $f(z)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_\varepsilon$ , не зависящее от  $z$  и такое, что для всех  $n > N_\varepsilon$  и для всех  $z$ , принадлежащих области  $E$ , справедливо

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z) \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 16.1 (признак Вейерштрасса).** *Если для всех  $z$ , принадлежащих области  $E$ ,*

1)  $|u_n(z) - u_{n-1}(z)| \leq a_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$  и числовая последовательность  $\{a_n\}$  сходится к нулю, то последовательность  $\{u_n(z)\}$  сходится равномерно в области  $E$ ;

2)  $|u_n(z)| \leq b_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$  и числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то ряд (16.1) сходится равномерно в области  $E$ .

Последовательность  $\{a_n\}$  называется мажорирующей для последовательности  $\{u_n(z)\}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — мажорирующим для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ .

**Доказательство** дословно повторяет доказательство соответствующей теоремы для вещественных функциональных рядов.

**Теорема 16.2 (Вейерштрасса).** Пусть  $u_n(z)$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , — аналитические в области  $E$  функции. Тогда, если ряд (16.1) сходится в  $E$  равномерно к функции  $f(z)$ , то

1.  $f(z)$  — аналитическая в  $E$  функция;
2. ряд можно почленно дифференцировать любое число раз:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), \quad k = \overline{1, \infty}; \quad (16.2)$$

3. ряд (16.2) сходится равномерно в любой замкнутой подобласти  $G$  области  $E$ ;
4. ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} u_n(z) dz \quad (16.3)$$

для любого контура  $\Gamma$ , лежащего в  $E$ .

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [?, 50].

**Теорема 16.3.** Всякий степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = f(z) \quad (16.4)$$

внутри его круга сходимости сходится к аналитической функции и

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n(z - z_0)^{n-1}.$$

**Доказательство.** Согласно теореме Абеля, внутри круга сходимости степенной ряд сходится равномерно, что в силу теоремы Вейерштрасса является доказательством сделанного утверждения.

**Теорема 16.4.** Функция  $f(z)$ , аналитическая внутри круга  $|z - z_0| < R$ , разлагается в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (16.5)$$

где

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = \overline{0, \infty}; \quad (16.6)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (16.7)$$

а  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, целиком лежащий в круге  $|z - z_0| < R$  и охватывающий точку  $z_0$ .

Ряд (16.5) называется рядом Тейлора функции  $f(z)$ .

◇ Из формулы (14.4) следует, что (16.6) является следствием (16.7).

**Доказательство.** Пусть  $z$  принадлежит открытому кругу радиуса  $\rho$  ( $\rho < R$ ) с центром в точке  $z_0$ , а  $\zeta$  лежит на окружности радиуса  $\rho$  с центром в точке  $z_0$ . Тогда

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left( \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right).$$

Но  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$  и, следовательно,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n. \quad (16.8)$$

Ряд (16.8) сходится равномерно по  $\zeta$  для  $|z - z_0| < \rho$ , так как он мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}},$$

т.е. его можно почленно интегрировать. Домножим (16.8) на  $f(\zeta)/(2\pi i)$  и проинтегрируем по окружности  $|z - z_0| = \rho$ . Тогда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$



С другой стороны, с учетом разложения (16.8) получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned}$$

Обозначим

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Под интегралом стоит функция, аналитическая в кольце  $0 < |z-z_0| < R$ . Заменяв здесь окружность  $|z-z_0| = \rho$  любым кусочно-гладким замкнутым контуром  $\Gamma$ , целиком лежащим в круге  $|z-z_0| < R$  и охватывающим точку  $z_0$ , получим формулу (16.5), (16.7), что и требовалось доказать.

◇ Круг сходимости степенного ряда (16.5)  $|z-z_0| < R$  является максимальным кругом, в котором функция  $f(z)$ , представляемая этим рядом, является аналитической. В силу этого радиус сходимости  $R$  ряда Тейлора (16.5) определяет кратчайшее расстояние от центра разложения  $z_0$  до ближайшей особой точки.

◇ Отметим, что теорема 16.3 является следствием определения аналитической функции как функции, дифференцируемой в окрестности некоторой точки  $z$ , т.е. удовлетворяющей условию Коши–Римана. Однако такой подход не единствен. Аналитическую функцию  $f(z)$  можно определить выражением (16.4), тогда условия Коши–Римана становятся следствием такого определения. В этом случае очень часто (хотя и не всегда) вместо термина «аналитическая» (в смысле «однозначная аналитическая») используют термин «голоморфная функция». Выражение «голоморфная» в переводе с греческого имеет значение «подобная целой», что соответствует явному виду (16.4), представляющему собой сумму слагаемых, содержащих  $(z-z_0)$  в целой степени.

Обобщение понятия голоморфной функции приводит к понятию аналитической функции, что в нашем случае соответствует термину «многозначная аналитическая» (полная аналитическая) функция (подробнее см. разд. «Аналитическое продолжение»).

**Следствие.** Разложение аналитической в области  $E$  функции  $f(z)$  в ряд Тейлора единственно.

**Доказательство** этого утверждения для более общего случая (ряда Лорана) приведено в следующем разделе.

Соотношения (7.4), посредством которых были определены элементарные функции, с учетом теоремы 16.3 можно рассматривать как разложения этих функций в ряд Тейлора, сходящиеся на всей комплексной плоскости. Из формулы (16.6) следуют дополнительные тейлоровские разложения в круге  $|z| < 1$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \quad (16.9)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n. \quad (16.10)$$

Разложения (16.9) и (16.10) написаны для тех однозначных ветвей, на которых функции равны нулю и единице, соответственно, при  $z = 0$ . Для того чтобы получить ряды Тейлора для других значений многозначных функций, например  $\text{Ln}(1+z)$ , следует к ряду (16.9) добавить слагаемое  $2k\pi i$ , соответствующее выбранной однозначной ветви.

В формуле (16.10) в общем случае  $\alpha$  – произвольное комплексное число, так что для многозначной функции  $(1+z)^\alpha = \exp[\alpha \text{Ln}(1+z)]$  выбрана однозначная ветвь

$$(1+z)^\alpha = \exp[\alpha \ln(1+z)].$$

В частных случаях, когда

а)  $\alpha = n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , функция  $(1+z)^\alpha$  однозначна и разлагается по биному Ньютона в полином, сходящийся на всей комплексной плоскости;

б)  $\alpha = -1$ , функция представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии с показателем  $q = -z$ ,  $|z| < 1$ :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \quad (16.11)$$

**Пример 16.1.** Разложить в ряд Тейлора по  $z - i$  функцию  $f(z) = z^3$ . Найти радиус сходимости полученного ряда.

**Решение.** Перейдем в функции  $f(z)$  к переменной  $w = z - i$ . Тогда  $z = w + i$  и

$$f(w) = z^3 \Big|_{z=w+i} = (w+i)^3 = w^3 + 3iw^2 - 3w - i.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$f(z) = f(w) \Big|_{w=z-i} = (z-i)^3 + 3(z-i)^2i - 3(z-i) - i.$$

В силу единственности разложения в ряд Тейлора это и есть искомое разложение. Областью сходимости этого ряда является вся комплексная плоскость, за исключением бесконечно удаленной точки  $z = \infty$  и радиус сходимости  $R = \infty$ .

**Пример 16.2.** Разложить в ряд Тейлора по степеням  $z - \pi i/2$  функцию  $f(z) = e^z$ . Найти радиус сходимости полученного ряда.

**Решение.** Введем новую переменную  $w = z - \pi i/2$ , т.е.  $z = w + \pi i/2$  и

$$f(w) = e^z \Big|_{z=w+\pi i/2} = e^{w+\pi i/2} = e^{\pi i/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

Здесь мы воспользовались известным разложением функции  $f(w) = e^w$  в ряд Тейлора. Возвращаясь к исходным переменным, получим ряд

$$f(z) = e^z = f(w) \Big|_{z=w+\pi i/2} = e^{\pi i/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i/2)^n}{n!},$$

сходящийся на всей комплексной плоскости, за исключением бесконечно удаленной точки  $z = \infty$ , радиус сходимости которого  $R = \infty$ .

**Пример 16.3.** Найти первые три члена разложения функции  $f(z) = e^z/z$  в ряд Тейлора по степеням  $z - 1/2$  и указать радиус сходимости этого ряда.

**Решение.** Найдем первые две производные этой функции

$$f'(z) = \frac{e^z z - e^z}{z^2} = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2},$$

$$f''(z) = \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z^2} + 2\frac{e^z}{z^3} - \frac{e^z}{z^2}.$$

В точке  $z = 1/2$  получим

$$f(1/2) = 2\sqrt{e}, \quad f'(1/2) = -2\sqrt{e}, \quad f''(1/2) = 10\sqrt{e}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n = \\ &= 2\sqrt{e} - 2\sqrt{e}\left(z - \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{2}\sqrt{e}\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Для определения радиуса сходимости ряда отметим, что ближайшей к центру разложения  $z_0 = 1/2$  особой точкой является точка  $z_1 = 0$ , в которой функция  $f(z)$  не определена. Расстояние между этими точками определяет радиус сходимости, равный  $R = |z_1 - z_0| = 1/2$ . Таким образом, областью сходимости ряда Тейлора является круг  $|z - 1/2| < 1/2$ .

**Пример 16.4.** Функцию

$$f(z) = \frac{1}{3 - 2z}$$

разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z_0 = 1 + i$  и указать радиус сходимости.

**Решение.** Преобразуем аргумент функции, выделив выражение  $(z - 1 - i)$ :

$$\frac{1}{3 - 2z} = \frac{1}{(1 - 2i) - 2(z - 1 - i)}.$$

Вынесем множитель  $(1 - 2i)$  и воспользуемся разложением (16.11). Тогда

$$\frac{1}{3 - 2z} = \frac{1}{\left[1 - \frac{2(z-1-i)}{1-2i}\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(1 - 2i)^{n+1}} (z - 1 - i)^n.$$

Радиус сходимости можно определить как расстояние от центра разложения  $z_0 = 1 + i$  до ближайшей особой точки  $z - 1 = 3/2$ , т.е.

$$R = \left| \frac{3}{2} - 1 - i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

или из условия сходимости разложения (16.11)

$$\left| \frac{2(z-1-i)}{1-2i} \right| < 1, \quad |z-1-i| < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Пример 16.5.** Функцию

$$f(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$$

разложить в ряд Тейлора по степеням  $z$ . Указать радиус сходимости.

**Решение.** Заметим, что

$$\frac{2}{(1+z)^3} = \left( \frac{1}{1+z} \right)''$$

и учтем возможность почленного дифференцирования ряда Тейлора в круге его сходимости. Тогда из (16.11) двукратным дифференцированием находим

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1+z)^3} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+2)(k+1) z^k. \end{aligned}$$

## 17. Ряд Лорана

**Определение.** Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = f(z) \quad (17.1)$$

называется *рядом Лорана*. Здесь  $z_0$  – фиксированная точка комплексной плоскости,  $z$  – переменная, а  $C_n$ ,  $n = -\infty, \infty$ , – некоторые константы.

Ряд (17.1) сходится в точке  $z$ , если в этой точке сходятся ряды

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad (17.2)$$

и

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (17.3)$$

т.е. областью сходимости ряда (17.1) является общая часть области сходимости рядов (17.2) и (17.3).

◆ Ряд (17.2) называется правильной частью ряда Лорана, а ряд (17.3) – его главной частью.

Областью сходимости ряда (17.2) является круг  $|z - z_0| < R$ , где  $R$  – радиус сходимости этого ряда. Внутри круга ряд сходится к аналитической функции  $\varphi(z)$ . Вопрос о сходимости ряда на границе круга решается индивидуально для каждой ее точки.

Рассмотрим теперь ряд (17.3). Сделаем в нем замену переменных

$$\tilde{z} = \frac{1}{z - z_0}.$$

Тогда получим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \tilde{z}^n.$$

Обозначим его радиус сходимости  $1/r$ , тогда

$$\psi(\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} \tilde{z}^n, \quad |\tilde{z}| < 1/r.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Таким образом, ряд (17.3) вне круга  $|z - z_0| < r$  сходится к аналитической функции  $\psi(z)$ . Если  $r < R$ , то существует общая область сходимости рядов (17.2) и (17.3) – круговое кольцо  $r < |z - z_0| < R$ , в котором ряд (17.1) сходится к аналитической функции

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \quad (17.4)$$

**Теорема 17.1.** Функция  $f(z)$ , аналитическая в круговом кольце  $r < |z - z_0| < R$ , представляется в этом кольце рядом Лорана  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$  с коэффициентами

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega, \quad (17.5)$$

где  $\Gamma$  – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце  $r < |z - z_0| < R$  и охватывающий точку  $z_0$ .

**Доказательство.** Согласно теореме Коши 12.4 (для многосвязной области), справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - z},$$

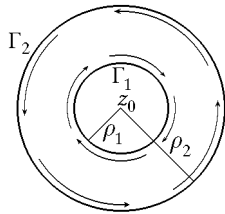


Рис. 24

где  $\tilde{\gamma} = \Gamma_1^- + \Gamma_2^+$ , а  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – окружности радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ ), соответственно, с центром в точке  $z_0$  (см. рис. 24). Тогда, согласно (13.4),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega,$$

где  $z \in D_{\tilde{\gamma}}$ :  $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ . Рассмотрим дробь

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\omega-z_0}} = \frac{1}{\omega - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\omega - z_0} \right)^n. \quad (17.6)$$

Ряд (17.6) сходится равномерно, так как для всех  $|z - z_0| < R$  выполняется  $\left| \frac{z-z_0}{\omega-z_0} \right| < 1$  для  $\omega \in \Gamma_2$ .

Аналогично для  $\omega \in \Gamma_1$

$$\frac{1}{\omega - z} = -\frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\omega-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\omega - z_0}{z - z_0} \right)^n. \quad (17.7)$$

Ряд (17.7) также сходится равномерно по  $\omega$ . Подставим ряды (17.6) и (17.7) в выражение для  $f(z)$ . Получим

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{\omega-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\omega-z_0}\right)^n d\omega + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} \frac{f(\omega)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega-z_0}{z-z_0}\right)^n d\omega = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} f(\omega)(\omega-z_0)^n d\omega = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n},
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_2} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega, \quad n = \overline{0, \infty}; \\
 C_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho_1} f(\omega)(\omega-z_0)^{n-1} d\omega, \quad n = \overline{1, \infty}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральные выражения в коэффициентах  $C_n$  и  $C_{-n}$  являются аналитическими функциями в кольце  $r < |z-z_0| < R$ , поэтому значения соответствующих интегралов не изменятся при произвольном деформировании контуров в области аналитичности. Можно положить  $\rho_2 = \rho_1$  и, деформируя контур, получить

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega-z_0)^{n+1}} d\omega, \quad n = \overline{-\infty, \infty},$$

где  $\Gamma$  – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце  $r < |z-z_0| < R$  и охватывающий точку  $z_0$ . Таким образом, теорема доказана.



**Следствие 17.1.1.** Ряд Лорана (17.1), (17.5) сходится равномерно в кольце  $r/k \leq |z - z_0| \leq kR$ , где  $0 < k < 1$ .

**Доказательство.** Правильная часть ряда Лорана, согласно теореме Абеля, сходится абсолютно в круге  $|z - z_0| < R$  и равномерно в замкнутом круге  $|z - z_0| \leq kR$ . Главная часть представляет собой степенной ряд по переменной  $\zeta = 1/(z - z_0)$  и, следовательно, также равномерно сходится в области  $|\zeta| < k/r$ , т.е. всюду вне круга  $|z - z_0| > r/k$ .

**Следствие 17.1.2.** Разложение в ряд Лорана единственно.

**Доказательство.** Пусть во всех точках  $z$  внутри некоторого кольца одновременно имеют место два разложения

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n(z - z_0)^n.$$

Умножим оба разложения на  $(z - z_0)^{-k-1}$  и проинтегрируем вдоль окружности радиуса  $\rho_0$  с центром в точке  $z_0$ , лежащей внутри кольца, в которой оба ряда сходятся равномерно. Тогда с учетом

$$\int_{|z-z_0|=\rho_0} (z - z_0)^{n-k-1} dz = 2\pi i \delta_{n,k}$$

получим

$$2\pi i C_k = 2\pi i \tilde{C}_k, \quad \text{или} \quad C_k = \tilde{C}_k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Таким образом, следствие доказано.

Аналогично доказывается единственность разложения в ряд Тейлора.

**Следствие 17.1.3.** Коэффициенты  $C_n$  (17.5) удовлетворяют неравенству Коши

$$|C_n| \leq \frac{M}{R_0^n},$$

где

$$M = \max_{\omega \in \Gamma_0} |f(\omega)|, \quad \Gamma_0 : |\omega - z_0| = R_0, \quad r < R_0 < R.$$

**Доказательство.** Из формулы (17.5) в силу произвольности  $\Gamma$  следует

$$\begin{aligned} |C_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega-z_0|=R_0} \frac{|f(\omega)|}{|\omega-z_0|^{n+1}} |d\omega| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi R_0^{n+1}} \int_{|\omega-z_0|=R_0} |d\omega| = \frac{M}{R_0^n}, \end{aligned}$$

для  $n = \overline{-\infty, \infty}$ .

**Следствие 17.1.4.** Если функция  $f(z)$  аналитична в многосвязной области  $E$ , ограниченной внешним контуром  $\Gamma$  и внутренними  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ , а точка  $z_0$  расположена внутри (или на границе) одного из контуров  $\Gamma_n$ , например  $\Gamma_1$  (рис. 25), и можно указать такие  $r < R$ , что

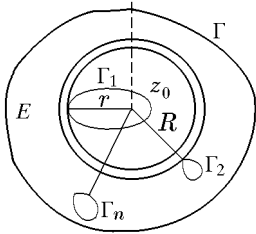


Рис. 25

$$\begin{aligned} r &= \max_{\zeta \in \Gamma_1} |\zeta - z_0| < \\ < R &= \min_{\zeta \in \Gamma + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n} |\zeta - z_0|, \end{aligned}$$

то функция  $f(z)$  может быть представлена рядом Лорана (17.1) с коэффициентами (17.5) в кольце  $r < |z - z_0| < R$ .

**Доказательство** очевидно.

◇ Следствие остается справедливым, если контуры  $\Gamma_n$  вырождаются в особые точки  $z_n$ .

**Пример 17.1.** Функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$$

разложить в ряд Лорана по степеням  $(z - 1)$ .

**Решение.** Подынтегральная функция имеет две особые точки  $z_0 = 1, z_1 = -1$ . Поскольку точка  $z_0 = 1$  является центром разложения, то согласно следствию 17.1.4 для кольца аналитичности  $r < |z - 1| < R$  имеем  $r = |1 - 1| = 0, R = |-1 - 1| = 2$ , и, следовательно, областью сходимости является

кольцо  $0 < |z - 1| < 2$ , представляющее собой в данном случае круг  $|z - 1| < 2$  с выколотым центром  $z = 1$ .

Если из комплексной плоскости удалить круг  $|z - 1| \leq 2$ , то получится еще одно кольцо:  $|z - 1| > 2$ , в котором функция  $f(z)$  аналитична. Рассмотрим последовательно обе области.

I.  $0 < |z - 1| < 2$ .

*Первый способ.* Чтобы найти коэффициенты  $C_n$ , воспользуемся непосредственно формулой (17.5). Тогда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1/(z^2 - 1)^2}{(z - 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z + 1)^2(z - 1)^{n+3}},$$

где  $\Gamma_1$  — произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце  $0 < |z - 1| < 2$ .

Если  $n \leq -3$ , то подынтегральная функция аналитична во всех точках внутри контура  $\Gamma_1$ , включая точку  $z_0 = 1$ , и, следовательно,

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z + 1)^2(z - 1)^{n+3}} = 0.$$

Если же  $n > -3$ , то, согласно (17.5), для функции  $1/(z + 1)^2$ , аналитической внутри  $\Gamma_1$ , имеем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{1/(z^2 - 1)^2}{(z - 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{(n + 2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[ \frac{1}{(z + 1)^2} \right] \Big|_{z=1} = \\ &= \frac{1}{(n + 2)!} \frac{(-1)^n (n + 3)!}{(z + 1)^{n+4}} \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n (n + 3)}{2^{n+4}}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Лорана для рассматриваемой функции в кольце  $0 < |z - 1| < 2$  будет иметь вид

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - 1)^n = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 3)}{2^{n+4}} (z - 1)^n.$$

*Второй способ.* С учетом того, что функция  $1/(z^2 - 1)$  просто разлагается на элементарные дроби

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right),$$

функцию  $f(z)$  можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} \right] \end{aligned}$$

или с учетом предыдущего разложения

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right].$$

Два первых слагаемых уже имеют нужный вид, являясь степенями разности  $(z-1)$ , а два последних связаны соотношением

$$\frac{1}{(z+1)^2} = - \left( \frac{1}{z+1} \right)'$$

Таким образом, с помощью тождественных преобразований вся задача свелась к разложению функции  $1/(1+z)$  в ряд Лорана. Для этого представим ее в виде

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{2[1+(z-1)/2]},$$

позволяющем воспользоваться разложением (16.11), так как  $|z-1|/2 < 1$  (или  $|z-1| < 2$ ), откуда

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z-1}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)^2} &= - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n \right)' = \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+1) (z-1)^n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n + \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+1) (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+3) (z-1)^n \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{z - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n + 3)(z - 1)^n \right].$$

Объединив выражение в квадратных скобках в одну сумму, окончательно имеем разложение

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n + 3)(z - 1)^n,$$

совпадающее с тем, которое мы получили ранее.

II.  $|z - 1| > 2$

*Первый способ.* Воспользуемся непосредственно формулой (17.5). Тогда

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz / [(z^2 - 1)^2]}{(z - 1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z + 1)^2 (z - 1)^{n+3}},$$

где  $\Gamma_2$  – произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в кольце  $|z - 1| > 2$  и охватывающий точки  $z_0 = 1$  и  $z_1 = -1$ . Если  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  – произвольные непересекающиеся контуры, охватывающие точки  $z_0 = 1$  и  $z_1 = -1$ , то, согласно (12.7), для коэффициентов  $C_n$  имеем

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z + 1)^2 (z - 1)^{n+3}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\gamma_0} \frac{dz / [(z + 1)^2]}{(z - 1)^{n+3}} + \int_{\gamma_1} \frac{dz / [(z - 1)^{n+3}]}{(z + 1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл уже вычислялся:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dz / [(z + 1)^2]}{(z - 1)^{n+3}} = \begin{cases} 0, & n \leq -3; \\ (-1)^n (n + 3) / 2^{n+4}, & n > -3. \end{cases}$$

Аналогично вычисление второго интеграла дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz / [(z - 1)^{n+3}]}{(z + 1)^2} &= \left[ \frac{1}{(z - 1)^{n+3}} \right]' \Big|_{z=-1} = \\ &= -\frac{n + 3}{(z - 1)^{n+4}} \Big|_{z=-1} = -\frac{(-1)^n (n + 3)}{2^{n+4}}. \end{aligned}$$

С учетом этого коэффициенты  $C_n$  можно записать

$$C_n = \begin{cases} -\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}, & n \leq -3; \\ \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}} - \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}} = 0, & n > -3 \end{cases}$$

или

$$C_n = \begin{cases} -\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}, & n \leq -4; \\ 0, & n > -4. \end{cases}$$

Таким образом, в кольце  $|z-1| > 2$  получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= -\sum_{n=-\infty}^{-4} \frac{(-1)^n(n+3)(z-1)^n}{2^{n+4}} = \\ &= -\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n(-n+3)}{2^{-n+4}(z-1)^n} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-3)}{2^{-n+4}(z-1)^n}, \end{aligned}$$

которое после изменения индекса суммирования примет вид

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{(z-1)^{n+4}}.$$

*Второй способ.* Как и в предыдущем случае, воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right], \\ \frac{1}{(z+1)^2} &= -\left( \frac{1}{z+1} \right)'. \end{aligned}$$

Однако для того чтобы воспользоваться разложением (17.1) в кольце  $|z-1| > 2$ , представим  $1/(z+1)$  в виде

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2+(z-1)} = \frac{1}{(z-1)[1+2/(z-1)]},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2}{z-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Поменяв индекс суммирования  $n - 3 \rightarrow n$ , получим

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+3}}{(z-1)^{n+4}}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)^2} &= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}\right)' = \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{(z-1)^{n+2}}, \end{aligned}$$

или после замены индекса суммирования ( $n - 2 \rightarrow n$ )

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3) 2^{n+2}}{(z-1)^{n+4}}.$$

Таким образом, получим разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{2}{(z-1)^2} + \right. \\ &+ \frac{4}{(z-1)^3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+3}}{(z-1)^{n+4}} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-1)^3} + \\ &\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3) 2^{n+2}}{(z-1)^{n+4}} \right] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+2}}{(z-1)^{n+4}} (-2+n+3) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 2^n}{(z-1)^{n+4}}, \end{aligned}$$

совпадающее с разложением, полученным первым способом.

**Пример 17.2.** Разложить в ряд Лорана в окрестности нуля функцию  $f(z) = e^{1/z}$ .

**Решение.** Используя известное разложение

$$e^{\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!},$$

получим

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}.$$

Этот ряд сходится для всех  $z$ , кроме  $z = 0$ , т.е. в кольце  $|z| > 0$ . Кольцо  $|z| > 0$  представляет собой всю комплексную плоскость с выколотым началом координат.

**Пример 17.3.** Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

в кольце  $1 < |z| < 3$ .

**Решение.** В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z-3)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} \right); \\ \frac{1}{z-3} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{1-z/3} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n}, \quad |z| < 3; \\ \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \right).$$

**Пример 17.4.** Найти и построить области сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left( \frac{z}{1+i} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{z^2}. \quad (17.8)$$

**Решение.** 1) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left( \frac{z}{1+i} \right)^n \quad (17.9)$$



и исследуем его на сходимость методом Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1+i)[z/(1+i)]^{n+1}}{(n+i)[z/(1+i)]^n} \right| = \\ &= \left| \frac{z}{1+i} \right| = \frac{|z|}{\sqrt{2}} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд (17.9) сходится в круге  $|z| < \sqrt{2}$ .

2) Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{z^2}. \quad (17.10)$$

Применим признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 z^n}{z^n z n^2} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| < 1.$$

Следовательно, ряд (17.10) сходится вне круга единичного радиуса  $|z| > 1$ .

3) Область сходимости ряда (17.8) представляет собой пересечение областей сходимости рядов (17.9) и (17.10), т.е.  $1 < |z| < \sqrt{2}$ .

4) Исследуем сходимость ряда на границе кольца. В параметрической форме внешняя граница кольца определяется уравнением

$$z = \sqrt{2}e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

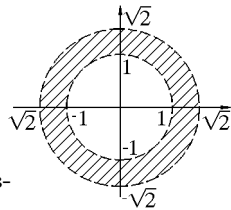


Рис. 26

Исследуем на сходимость ряд

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left( \frac{\sqrt{2}e^{i\varphi}}{1+i} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) \left( \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\pi/4}} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) e^{i(\varphi-\pi/4)n}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Проверяем выполнение необходимого признака

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+i) \left\{ \cos \left[ \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] + i \sin \left[ \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} = \infty.$$

Следовательно, внешняя граница кольца не входит в область сходимости. Аналогично сходимость ряда (17.8) на внутренней границе кольца определяется сходимостью ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{in\varphi}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\cos n\varphi - i \sin n\varphi). \quad (17.11)$$

Проверим выполнение необходимого признака

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = \infty,$$

т.е. ряд (17.11) расходится. Окончательно для области сходимости получим  $1 < |z| < \sqrt{2}$  (см. рис. 26).

**Пример 17.5.** Найти все лорановские разложения функции

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

по степеням  $z - z_0$ , где  $z_0 = 3 - i$ .

**Решение.** 1) Разложим функцию  $f(z)$  на элементарные дроби, применив метод неопределенных коэффициентов. Поскольку знаменатель дроби имеет корни  $z_{1,2} = \pm i$ , то

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{A}{z + i} + \frac{B}{z - i}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю

$$z = A(z - i) + B(z + i)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $z$

$$\begin{array}{l|l} z^1 & 1 = A + B, \\ z^0 & 0 = -Ai + Bi, \end{array}$$

из второго уравнения получим равенство  $A = B$ , подставив которое в первое уравнение системы, найдем  $A = 1/2$ ,  $B = 1/2$ . Следовательно,

$$\frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{2(z + i)} + \frac{1}{2(z - i)}.$$

В дальнейшем воспользуемся известным разложением (16.11).

2) Преобразуем первую дробь к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{(i-3)+3+z} = \frac{1/3}{1+(z+i-3)/3} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z+i-3}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (z+i-3)^n, \\ &\quad \left|\frac{z+i-3}{3}\right| < 1. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+i} &= \frac{1}{(z+i-3)+3} = \frac{1/(z+i-3)}{1+3/(z+i-3)} = \\ &= \frac{1}{z+i-3} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3}\right)^n, \quad \left|\frac{3}{z+i-3}\right| < 1. \end{aligned}$$

3) Аналогично преобразуем вторую дробь

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{(z+i-3)-2i+3} = \\ &= \frac{1}{3-2i} \frac{1}{1-\frac{z+i-3}{2i-3}} = \\ &= \frac{1}{3-2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i-3}\right)^n (z+i-3)^n, \\ &\quad \left|\frac{z+i-3}{2i-3}\right| < 1 \end{aligned}$$

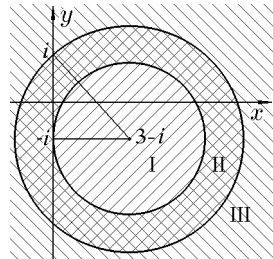


Рис. 27

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{z+i-3} \frac{1}{1+\frac{3-2i}{z+i-3}} = \frac{1}{z+i-3} \sum_{n=0}^{\infty} (2i-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3}\right)^n, \\ &\quad \left|\frac{2i-3}{z+i-3}\right| < 1. \end{aligned}$$

4) Полученные разложения определяют функцию в разных областях:

$$1. f(z) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (z+i-3)^n + \frac{1}{2(3-2i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i-3}{2i-3}\right)^n.$$

Разложение справедливо в области I:  $|z+i-3| < 3$  (см. рис. 27).

$$2. f(z) = \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3}\right)^n + \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{2i-3}{z+i-3}\right)^n.$$

Разложение справедливо в области III:  $|z+i-3| > \sqrt{13}$  (см. рис. 27).

$$3. f(z) = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n (z+i-3)^n + \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{2i-3}{z+i-3}\right)^n.$$

Пересечение областей сходимости рядов, стоящих в правой части, пусто, т.е.  $z \in \emptyset$ .

$$4. f(z) = \frac{1}{2(z+i-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \left(\frac{1}{z+i-3}\right)^n + \frac{1}{2(3-2i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i-3}{2i-3}\right)^n.$$

Разложение справедливо в области II:  $3 < |z+i-3| < \sqrt{13}$  (см. рис. 27).

**Пример 17.6.** Разложить функцию

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$$

в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = 0$ .

**Решение.** Перепишем функцию  $f(z)$  в виде

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sin z$$

и воспользуемся разложением функции  $\sin z$  в ряд Тейлора. Получим

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Область сходимости полученного ряда – кольцо  $|z| > 0$ .

**Пример 17.7.** Установить связь между рядами Лорана и рядами Фурье.

**Решение.** Ряд Фурье функции  $f(t)$ , интегрируемой на отрезке  $[0, 2\pi]$ , в комплексной форме определяется соотношением

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}, \quad (17.12)$$

где для коэффициентов Фурье справедлива формула

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = \overline{-\infty, \infty}. \quad (17.13)$$

Положим  $e^{it} = z$ ,  $\tilde{f}(z) = f(t)$ . Тогда формула (17.12) примет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n. \quad (17.14)$$

Учтем, что, во-первых,  $dt = dz/(iz)$  и, во-вторых, при изменении  $t$  от нуля до  $2\pi$  переменная  $z$  пробегает замкнутый контур  $|z| = 1$  в положительном направлении. Тогда коэффициенты (17.13) можно записать

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\tilde{f}(z) dz}{z^{n+1}}. \quad (17.15)$$

Сравнив (17.14), (17.15) с (17.1), (17.5), можно сделать вывод, что ряд Фурье (17.12), (17.13) функции  $f(t)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  является рядом Лорана функции  $\tilde{f}(z) = f(t)$ , если  $z = e^{it}$ . Об интегралах (17.15) см. также разд. 23.1.

## 18. Изолированные особые точки аналитических функций

### 18.1. Классификация изолированных особых точек

◆ Точка  $z_0 \in E$  называется правильной точкой функции  $f(z)$ , если существует сходящийся степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n,$$

который в общей части области  $E$  и своего круга сходимости  $|z - z_0| < R$  сходится к функции  $f(z)$ . Точки  $z \in \bar{E}$ , не являющиеся правильными для  $f(z)$ , называются ее особыми точками.

Это определение эквивалентно определению правильных точек, данному нами в первой главе с использованием понятия аналитичности функции  $f(z)$ . Такая формулировка более удобна для целей данной главы.

◆ Особая точка  $z_0$  аналитической функции  $f(z)$  называется изолированной особой точкой, если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $z_0$ , не содержащая других особых точек функции  $f(z)$ .

◇ В дальнейшем мы ограничим рассмотрение изолированными особыми точками, классификацию которых будем проводить в зависимости от вида лорановского разложения (ряда Лорана) функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$ .

Разложим функцию  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n = \psi(z) + \varphi(z); \quad (18.1)$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

◆ Особая точка  $z_0$  называется **устранимой особой точкой** функции  $f(z)$ , если в разложении (18.1) функции  $f(z)$  в ряд Лорана нет слагаемых с отрицательными степенями, т.е.  $\psi(z) = 0$ .

◆ Особая точка называется **полюсом порядка  $m$**  функции  $f(z)$ , если в разложении функции  $f(z)$  в ряд Лорана содержится конечное число слагаемых с отрицательными степенями  $(z - z_0)$ . Здесь  $m$  – старшая отрицательная степень  $z - z_0$ ,

$C_{-m} \neq 0$ . При  $m = 1$  полюс называется простым, а при  $m > 1$  – кратным.

♦ Точка  $z_0$  называется **существенно особой точкой** функции  $f(z)$ , если в разложении функции  $f(z)$  в ряд Лорана содержится неограниченное число отличных от нуля слагаемых с отрицательными степенями  $(z - z_0)$ .

♦ Функция  $f(z)$  называется **целой**, если она представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (18.2)$$

радиус сходимости которого равен бесконечности.

♦ Из определения целой функции следует, что функция, аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением, может быть, бесконечно удаленной точки, является целой. Очевидно, что функции  $e^z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ , а также полиномы от них – целые функции.

♦ Функция  $f(z)$  называется **мероморфной**, если ее можно представить в виде

$$f(z) = \frac{g(z)}{\varphi(z)}, \quad (18.3)$$

где  $g(z)$  и  $\varphi(z)$  – целые функции.

♦ Нетрудно заметить, что функции  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{ctg} z$ ,  $\operatorname{th} z$ ,  $\operatorname{cth} z$ , а также полиномы от них – мероморфные функции.

Более подробное и полное рассмотрение свойств целой и мероморфной функций будет проведено в разд. «Приложение теории вычетов».

## 18.2. Устраняемая особая точка

Рассмотрим простейшие свойства устранимых изолированных особых точек.

**Теорема 18.1.** *Если точка  $z_0$  – устранимая особая точка аналитической функции  $f(z)$ , то существует конечный предел*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0, \quad |C_0| < \infty. \quad (18.4)$$

**Доказательство.** Так как правая часть равенства (18.1) является степенным рядом, сходящимся в круге  $|z - z_0| < R$ , то, по теореме Вейерштрасса, его сумма аналитична в круге

и, следовательно, непрерывна в точке  $z_0$ , поэтому при  $z \rightarrow z_0$  сумма ряда имеет предел, который равен  $C_0$ .

Справедлива и обратная

**Теорема 18.2.** *Если для функции  $f(z)$ , аналитической в окрестности изолированной особой точки  $z_0$ , справедливо соотношение (18.4), то  $z_0$  – устранимая особая точка этой функции.*

**Доказательство.** В силу существования предела (18.4) и аналитичности функции  $f(z)$  можно указать некоторую окрестность  $|z - z_0| < R$  точки  $z_0$ , в которой эта функция ограничена, т.е.  $|f(z)| < M$ , и, кроме того, может быть разложена в ряд Лорана (17.1) с коэффициентами (17.5), удовлетворяющему неравенству Коши в силу следствия 17.1.3, т.е.

$$C_n < MR_0^{-n}.$$

Согласно (17.5),  $R_0$  может быть выбран сколь угодно малым. Но тогда из неравенства Коши следует, что коэффициенты  $C_n = 0$  для всех  $n < 0$ . Это означает, что главная часть ряда Лорана полностью отсутствует и точка  $z_0$  является устранимой особой точкой.

**Пример 18.1.** Показать, что точка  $z = 0$  является устранимой особой точкой функции

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

**Решение.** Функция  $f(z)$  не определена при  $z = 0$ . При  $z \neq 0$  ее можно представить рядом

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

т.е. точка  $z = 0$  – устранимая особая точка. Из разложения следует

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Если положить  $f(0) = 1$ , то функция  $f(z)$  будет аналитической и в точке  $z = 0$ . Именно поэтому особая точка называется устранимой. В силу этого свойства при необходимости в дальнейшем будем рассматривать эту точку как правильную.



**18.3. Полюс**

**Теорема 18.3.** Если точка  $z_0$  является полюсом порядка  $m$  аналитической функции  $f(z)$ , то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = C_{-m}, \quad (18.5)$$

где  $0 < |C_n| < \infty$ .

**Доказательство.** Если  $z_0$  – полюс порядка  $m$  аналитической функции, то, по определению,

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$$

или

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z - z_0)^n,$$

причем  $|C_{-m}| \neq 0$ .

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z - z_0)^{n+m} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-m}(z - z_0)^n.$$

Таким образом, для функции  $\Phi(z)$  точка  $z_0$  является устранимой особой точкой и, следовательно, согласно предыдущей теореме,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = C_{-m}.$$

Так как  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m = 0$  и  $|C_{-m}| \neq 0$ ,  $|C_{-m}| < \infty$ , то получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi(z)}{(z - z_0)^m} = \infty,$$

что и требовалось доказать.

Справедлива также обратная

**Теорема 18.4.** Если для функции  $f(z)$ , аналитической в окрестности изолированной особой точки  $z_0$ , справедливо соотношение (18.5), то точка  $z_0$  – полюс этой функции порядка  $m$ .

**Доказательство.** Согласно теореме 18.2, точка  $z_0$  является устранимой особой точкой для произведения  $f(z)(z - z_0)^m$ , которое по этой причине может быть разложено в ряд Тейлора

$$f(z)(z - z_0)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

причем  $a_0 = C_{-m} \neq 0$ , поскольку

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} = a_0.$$

Разделив указанное разложение на  $(z - z_0)^m$ , для функции  $f(z)$  получим лорановское разложение

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-m},$$

определяющее точку  $z_0$  как полюс порядка  $m$ .

◆ Точка  $z_0$  называется нулем функции  $f(z)$  порядка  $m$ , если

$$f(z_0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = 0, \quad k = \overline{1, m-1},$$

а

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0 < \infty.$$

Кроме того, для практического решения задач нужно напомнить, что если точка  $z_0$  является нулем порядка  $m$  функции  $f(z)$ , то

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0,$$

а сама функция  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  может быть представлена в виде

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0.$$

С учетом сказанного из теоремы 18.4 вытекает

**Следствие 18.4.1.** Если точка  $z_0$  является нулем порядка  $m$  функции  $f(z)$ , то она является полюсом порядка  $m$  функции  $1/f(z)$ .

**Доказательство.** Действительно, функцию  $1/f(z)$  можно записать как  $1/[(z - z_0)^m g(z)]$ , откуда следует

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m \frac{1}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{1}{g(z_0)} = C_{-m} \neq 0, \quad |C_{-m}| < \infty.$$

**Пример 18.2.** Показать, что для функции  $1/(\sin z - z)$  точка  $z_0 = 0$  является полюсом третьего порядка.

**Решение.** Достаточно показать, что  $z_0 = 0$  есть нуль третьего порядка для знаменателя  $\sin z - z$ . Для этого найдем  $(\sin z - z)|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z - z)'|_{z=0} = (\cos z - 1)|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z - z)''|_{z=0} = \sin z|_{z=0} = 0$ ,  $(\sin z - z)'''|_{z=0} = \cos z|_{z=0} = 1$ . Так как производная третьего порядка отлична от нуля, точка  $z_0 = 0$  — нуль третьего порядка.

**Следствие 18.4.2.** Если точка  $z_0$  является нулем порядка  $m$  функции  $\varphi(z)$  и порядка  $k$  функции  $\psi(z)$ , то для функции  $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$  точка  $z_0$  является

- а) нулем порядка  $n$ , если  $m - k = n > 0$ ;
- б) устранимой особой точкой, если  $m - k = 0$ ;
- в) полюсом порядка  $n$ , если  $k - m = n > 0$ .

**Пример 18.3.** Показать, что для функции  $z^2/(\sin z - z)$  точка  $z = 0$  является простым полюсом.

**Решение.** Так как  $z = 0$  есть нуль порядка  $m = 2$  для числителя и порядка  $k = 3$  для знаменателя (см. предыдущий пример), то  $n = k - m = 1$ , т.е.  $z = 0$  — простой полюс.

## 18.4. Существенно особая точка

**Теорема 18.5 (Сохоцкого–Вейерштрасса).** Предел функции  $f(z)$  в ее существенно особой точке не существует. Другими словами, для любого наперед заданного комплексного числа  $A$  существует последовательность  $\{z_n\}$ , сходящаяся к существенно особой точке  $z_0$ , такая что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A. \quad (18.6)$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $A = \infty$ . Очевидно, что в этом случае существует, по меньшей мере, одна последовательность  $\{z_n\} \rightarrow z_0$ , для которой справедливо соотношение (18.6). Действительно, если такой последовательности не существует, то функция  $f(z)$  будет ограниченной в окрестности точки  $z_0$ , а сама точка в соответствии с теоремой 18.2 и вопреки условию доказываемой теоремы будет устранимой особой точкой.

2. Пусть  $A \neq \infty$ . Будем снова исходить из противного. Пусть соотношение (18.6) не выполняется. Тогда должны существовать окрестность  $0 < |z - z_0| < \delta$  и число  $\varepsilon > 0$  такие, что  $|f(z) - A| > \varepsilon$  при  $0 < |z - z_0| < \delta$ .

Построим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

Эта функция является аналитической в окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$  и, кроме того, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} < \frac{1}{|\varepsilon|}.$$

Последнее означает, что функция  $\varphi(z)$  в окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$  является ограниченной. Поскольку точка  $z_0$  — изолированная особая точка для функции  $f(z)$ , то такова же она и для функции  $\varphi(z)$ . Ограниченность функции  $\varphi(z)$  позволяет утверждать (теорема 18.2), что существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = B < \infty.$$

Определив зависимость  $f(z)$  от  $\varphi(z)$

$$f(z) = A + \frac{1}{\varphi(z)}, \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

и вычислив предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \begin{cases} A + 1/B, & B \neq 0; \\ \infty, & B = 0, \end{cases}$$

приходим к заключению, что точка  $z_0$  — либо устранимая особая точка, либо полюс функции  $f(z)$ , что противоречит условию теоремы и доказывает ее справедливость.

Из доказанных теорем 18.2 и 18.4 непосредственно вытекает

**Теорема 18.6.** Если для функции  $f(z)$ , аналитической в окрестности изолированной особой точки  $z_0$ , предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует (даже бесконечный), то точка  $z_0$  — существенно особая точка функции  $f(z)$ .

◇ Таким образом, если в изолированной особой точке

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C, \quad |C| < \infty,$

то  $z_0$  — устранимая особая точка функции  $f(z)$ ;

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m = C_{-m}, \quad 0 < |C_{-m}| < \infty,$

то  $z_0$  — полюс функции  $f(z)$  порядка  $m$ ;

- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует, даже бесконечный,

то  $z_0$  — существенно особая точка функции  $f(z)$ .

Значение предела функции  $f(z)$  в особой точке  $z_0$  можно положить в основу классификации изолированных особых точек функции  $f(z)$ .

**Пример 18.4.** Показать, что функция

$$f(z) = e^{-1/z^2}$$

имеет существенно особую точку  $z = 0$ .

**Решение.** *Первый способ.* Рассмотрим  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

1. Пусть  $z = x$ . Тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

2. Пусть  $z = iy$ , тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} e^{1/y^2} = \infty.$$

Следовательно,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  не существует и точка  $z = 0$  — существенно особая.

*Второй способ.* Разложим функцию  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 0$ . Воспользуемся известным разложением

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

и получим

$$f(z) = e^{-1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n}.$$

Полученное разложение содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых с отрицательными степенями  $z$ . Следовательно, точка  $z = 0$  – существенно особая.

**Пример 18.5.** Найти изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

и определить их тип.

**Решение.** *Первый способ.* Особые точки определяются условием  $e^z = 1$ , или

$$z = \operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + i \operatorname{Arg} 1 = 0 + i2\pi k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Достаточно определить тип одной точки, например при  $k = 0$ . Представим  $e^z$  в виде ряда. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 / \left( -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = 1 / \left( z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \right) = \\ &= 1 / \left( z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) = 1 / \left[ z \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) \right] \end{aligned}$$

или

$$1 / \left[ z \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right) \right] = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \right]^n.$$

В этом разложении существует только одно слагаемое с отрицательной степенью  $z$ . Тогда  $z = 0$  – полюс первого порядка, а функция  $f(z)$  имеет простые полюса в точках  $z = 0 + i2\pi k$ ,  $k = \overline{-\infty, \infty}$ .

*Второй способ.* Особые точки определяются условием  $e^z = 1$ , или

$$z = \operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + i \operatorname{Arg} 1 = 0 + i2\pi k, \quad k = \overline{-\infty, \infty}.$$

Так как точки  $z_k = 2\pi i k$  являются простыми нулями функции  $f(z) = e^z - 1$ , то они являются простыми полюсами функции  $1/f(z)$ .

Заметим, что  $z = \infty$  также является особой точкой функции  $f(z)$ . К рассмотрению таких особых точек мы и переходим.

**18.5. Бесконечно удаленная точка**

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки  $z = \infty$ , т.е. она аналитична в кольце  $R < |z| < \infty$ . Рассмотрим функцию

$$\varphi(\omega) = f\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \text{где } \omega = \frac{1}{z}.$$

Функция  $\varphi(\omega)$  – аналитическая в кольце  $0 < |\omega| < 1/R$  кроме, может быть, самой точки  $\omega = 0$ . Разложим функцию  $\varphi(\omega)$  в ряд Лорана

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \omega^n, \quad 0 < |\omega| < 1/R. \quad (18.7)$$

Возвратившись к переменной  $z$ , получим

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n, \quad R < |z| < \infty, \quad (18.8)$$

где  $C_n = \tilde{C}_{-n}$ .

♦ Разложение (18.8) называется разложением функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

♦ Бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой функции  $f(z)$ , если существует  $R > 0$  такое, что функция  $f(z)$  вне круга  $|z| > R$  не имеет особых точек, находящихся на конечном расстоянии от точки  $z = 0$ .

◇ Будем классифицировать особенности в бесконечно удаленной точке в соответствии с классификацией точки  $\omega = 0$  функции  $\varphi(\omega)$  (18.7). В результате приходим к следующему определению.

♦ Точка  $z = \infty$  функции  $f(z)$  называется

1) устранимой особой точкой, если разложение (18.8) не содержит отличных от нуля слагаемых с положительными степенями  $z$ ;

2) полюсом порядка  $m$ , если разложение (18.8) содержит конечное число  $m$  отличных от нуля слагаемых с положительными степенями  $z$ ;

3) существенно особой точкой, если разложение (18.8) содержит бесконечное число отличных от нуля слагаемых с положительными степенями  $z$ .

◆ Если точка  $z = \infty$  является устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , то говорят, что функция  $f(z)$  – аналитическая в точке  $z = \infty$  и полагают  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ .

**Пример 18.6.** Найти особые точки функций

$$\text{а) } f_1(z) = \frac{1}{e^z - 1} e^{1/(z-1)}; \quad \text{б) } f_2(z) = \frac{z}{\sin^2[\pi/(z-1)]};$$

$$\text{в) } f_3(z) = \frac{z-1}{z^2}.$$

**Решение.** а) Особые точки функции  $f_1(z)$  определяются из уравнений  $z-1 = 0$ ,  $e^z - 1 = 0$ , т.е.  $z = 1$ ,  $z_k = 2\pi ki$ ,  $k = \overline{-\infty, \infty}$ .

Так как  $\lim_{z \rightarrow 1} e^{1/(z-1)}$  не существует, то точка  $z = 1$  является существенно особой. Так как точки  $z_k = 2\pi ki$  – простые нули функции  $e^z - 1$ , то они являются простыми полюсами функции  $f_1(z)$ . Точка  $z = \infty$ , будучи предельной точкой полюсов  $z_k$ , не является изолированной особой точкой.

б) Аналогично точки  $z_k = 1 + 1/k$ , будучи нулями функции  $\sin[\pi/(z-1)]$ , являются полюсами второго порядка функции  $f_2(z)$ . Точка  $z = 1$  является предельной точкой полюсов  $z_k$  (неизолированной особой точкой). Точка  $z = \infty$  в силу эквивалентности

$$\sin \frac{\pi}{z-1} \sim \frac{\pi}{z}, \quad z \rightarrow \infty$$

является полюсом третьего порядка функции  $f_2(z) \sim z^3$  при  $z \rightarrow \infty$ .

в) Точка  $z = \infty$  является устранимой особой точкой функции  $f_3(z)$ , так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z^2} = 0,$$

а точка  $z = 0$  – полюсом второго порядка.

**Теорема 18.7.** Если функция  $f(z)$  аналитична в расширенной комплексной плоскости, то она постоянна.

**Доказательство.** Рассмотрим окружность  $|z| = R$ . Из аналитичности функции  $f(z)$  в точке  $z = \infty$  следует ее ограниченность вне круга  $|z| > R$ . С другой стороны, из аналитичности функции в замкнутом круге  $|z| \leq R$  следует ее ограниченность в этом круге. Но тогда функция ограничена во всей плоскости, т.е. она постоянна.



## 19. Аналитическое продолжение

**Теорема 19.1 (о единственности).** *Если две аналитические в области  $D$  функции  $f(z)$  и  $g(z)$  совпадают на множестве  $E \subset D$ , имеющем хотя бы одну предельную точку, принадлежащую  $D$ , то они тождественно совпадают в  $D$ .*

**Доказательство.** 1. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = f(z) - g(z).$$

2. По определению предельной точки, существует последовательность различных точек  $\{z_k\}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , такая что  $z_k \in E \subset D$  для всех  $k = \overline{1, \infty}$ , и  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ , причем  $z_0 \in D$ .

По условию теоремы,  $f(z) = g(z)$  при  $z \in E$ , следовательно,  $f(z_k) = g(z_k)$ ,  $k = \overline{1, \infty}$  и  $\Phi(z_k) = 0$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ .

3. Разложим функцию  $\Phi(z)$  в ряд Тейлора по степеням  $z - z_0$ , причем радиус сходимости  $R$  данного ряда  $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$  не меньше расстояния  $R_0$  от точки  $z_0$  до границы области  $E$ . По условию теоремы  $C_0 = 0$  и  $\Phi(z_0) = 0$ . Следовательно, разложение функции  $\Phi(z)$  в окрестности точки  $z_0$  имеет вид

$$\Phi(z) = (z - z_0)\Phi_1(z), \quad \text{где} \quad \Phi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(z - z_0)^n.$$

4. Поскольку точки  $z_k$  различны и  $\Phi_1(z_k) = 0$  для всех  $k = \overline{1, \infty}$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_1(z_k) = 0.$$

Следовательно, по свойству непрерывных функций  $\Phi_1(z_0) = 0$  и коэффициент  $C_1 = 0$ , и

$$\Phi(z) = (z - z_0)^2\Phi_2(z), \quad \text{где} \quad \Phi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(z - z_0)^n.$$

Аналогично предыдущему, получим  $\Phi_2(z_0) = 0$ , т.е.  $C_2 = 0$ . Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты  $C_n$  в разложении функции  $\Phi(z)$  в ряд

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$$

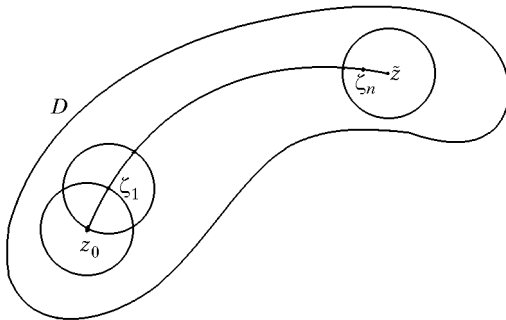


Рис. 28

в окрестности точки  $z_0$  равны нулю. Следовательно,  $\Phi(z) \equiv 0$  внутри круга  $|z - z_0| < R_0$ .

5. Докажем, что функция  $\Phi(z)$  тождественно равна нулю во всей области  $D$ . Пусть  $\tilde{z}$  — произвольная точка области  $D$ , лежащая вне круга  $|z - z_0| < R_0$ . Соединим точку  $z_0$  с точкой  $\tilde{z}$  простой непрерывной кривой  $\gamma$  (см. рис. 28), целиком лежащей в области  $D$  и отстоящей от границы области  $D$  на расстояние  $d > 0$ . Пусть  $\zeta_1$  — точка пересечения кривой  $\gamma$  с окружностью  $|z - z_0| = R_0$ . Рассмотрим разложение функции  $\Phi(z)$  в ряд Тейлора по степеням  $z - \zeta_1$ :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 (z - \zeta_1)^n. \quad (19.1)$$

Поскольку  $\Phi(z) \equiv 0$  в круге  $|z - z_0| < R_0$ , то аналогично пункту 4 данной теоремы  $C_n^1 \equiv 0$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Обозначим через  $R_1$  радиус сходимости ряда (19.1). Тогда  $\Phi(z) \equiv 0$  в круге  $|z - \zeta_1| < R_1$ .

Пусть  $\zeta_2$  — последняя по направлению к  $\tilde{z}$  точка пересечения кривой  $\gamma$  с окружностью  $|z - \zeta_1| = R_1$  (см. рис. 28). Разложим функцию  $\Phi(z)$  в ряд Тейлора по степеням  $z - \zeta_2$ :

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (z - \zeta_2)^n. \quad (19.2)$$

Аналогично (19.1) находим  $C_n^2 \equiv 0$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , и  $\Phi(z) \equiv 0$  в круге  $|z - \zeta_2| < R_2$ .

Совершая подобные построения достаточно большое число раз, получим круг  $|z - \zeta_l| < R_l$ , содержащий точку  $\tilde{z}$ , для всех точек которого  $\Phi(z) = 0$ . Следовательно,  $\Phi(\tilde{z}) = 0$ . Из

произвольности  $\tilde{z}$  следует, что  $\Phi(z) \equiv 0$  для всех  $z \in D$ . Следовательно,  $f(z) = g(z)$  для всех  $z \in D$ , что и требовалось доказать.

♦ Функция  $F(z)$  называется аналитическим продолжением функции  $f(z)$  с множества  $E$  в область  $G$ , если:

1. функция  $f(z)$  определена на множестве  $E$ ;
2. функция  $F(z)$  – аналитическая в области  $G$ , причем  $E \subset G$ ;
3.  $F(z) = f(z)$  при  $z \in E$ .

**Теорема 19.2 (принцип аналитического продолжения).** Пусть множество  $E$  имеет предельную точку  $z_0$ , принадлежащую области  $G$ . Тогда аналитическое продолжение с множества  $E$  в область  $G$  единственно.

**Доказательство.** Допустим, что функция  $f(z)$ , определенная на  $E$ , имеет два аналитических продолжения  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  в область  $G$ . Так как  $F_1(z) = F_2(z)$  при  $z \in E$ , то по теореме о единственности  $F_1(z) = F_2(z)$  при  $z \in G$ , что и требовалось доказать.

**Следствие 19.2.1.** Пусть даны функция  $f_1(z)$ , аналитическая в области  $G_1$ , и функция  $f_2(z)$ , аналитическая в  $G_2$  (см. рис. 29). Пусть  $G_1 \cap G_2 = g \neq \emptyset$  и множество  $g$  содержит предельную точку  $z_0$ , в которой  $f_1(z_0) = f_2(z_0)$ . Тогда существует единственная функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1, \\ f_2(z) & z \in G_2, \end{cases} \quad (19.3)$$

аналитическая в области  $G = G_1 \cup G_2$  функция  $F(z)$  (19.3), совпадающая с  $f_1(z)$  в  $G_1$  и с  $f_2(z)$  в  $G_2$ .

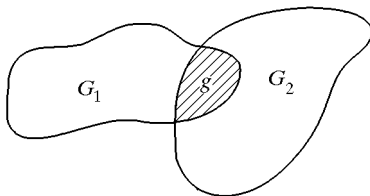


Рис. 29

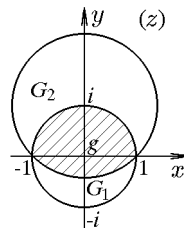


Рис. 30

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $f(z)$ , определенную на множестве  $g = G_1 \cap G_2$  и совпадающую на этом множестве с функциями  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ . Аналитическим продолжением функции  $f(z)$  на область  $G_1$  является функция  $f_1(z)$ , а на область  $G_2$  — функция  $f_2(z)$ . Аналитическое продолжение функции  $f(z)$  на область  $G = G_1 \cup G_2$  единственно и определяется соотношением (19.3), что и требовалось доказать.

◆ Функция  $F(z)$  (19.1) называется аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$  ( $f_2(z)$ ) на область  $G = G_1 \cup G_2$ .

◆ Функцию  $f_2(z)$  ( $f_1(z)$ ) также называют аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$  ( $f_2(z)$ ) на область  $G_2$  ( $G_1$ ).

**Пример 19.1.** Пусть

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad G_1 : |z| < 1,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-i}{1-i} \right)^n, \quad G_2 : |z-i| < \sqrt{2}.$$

В области  $g = G_1 \cap G_2$  (см. рис. 30) функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  совпадают. Функции  $f_1$  и  $f_2$  являются аналитическими продолжениями друг друга и элементами одной функции  $F(z) = 1/(1-z)$ , аналитической в области  $G = G_1 \cup G_2$ .

Рассмотрим некоторые специальные случаи множества  $g$ . Пусть множество  $g$  является общим участком границ областей  $G_1$  и  $G_2$ .

◇ Функция  $f_2(z)$  называется непосредственным аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$  в область  $G_2$  через дугу  $g$ , если существует аналитическая в области  $G_1 \cup g \cup G_2$  функция  $F(z)$ , удовлетворяющая условиям (19.3).

**Теорема 19.3 (принцип непрерывного продолжения).**

*Если  $g$  является общей частью границ областей  $G_1$  и  $G_2$ , в которых функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  аналитичны, а кроме того, непрерывны в  $G_1 \cup g$ ,  $G_2 \cup g$  и равны на границе  $g$ , то  $f_2(z)$  [ $f_1(z)$ ] является непосредственным аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$  [ $f_2(z)$ ] на область  $G_2$  ( $G_1$ ).*

**Доказательство.** По условиям теоремы существует непрерывная в области  $G_1 \cup g \cup G_2$  функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in g; \\ f_2(z), & z \in G_2. \end{cases} \quad (19.4)$$

Рассмотрим произвольный замкнутый контур  $\Gamma = \gamma_1^+ + \gamma_2^+$ , составленный из дуг  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , целиком лежащих в  $G_1$ ,  $G_2$  и отсекающих от общей границы  $g$  одну и ту же дугу  $\gamma_g$  (рис. 31).

Рассмотрим далее интеграл

$$I = \int_{\Gamma} F(z) dz.$$

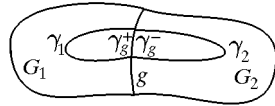


Рис. 31

Для вычисления этого интеграла добавим к нему слагаемые, сумма которых тождественно равна нулю

$$I = \int_{\Gamma} F(z) dz + \int_{\gamma_g^+} F(z) dz + \int_{\gamma_g^-} F(z) dz.$$

Согласно определению функции  $F(z)$  (19.4), интеграл  $I$  можно записать в виде

$$I = \int_{\gamma_1^+} f_1(z) dz + \int_{\gamma_2^+} f_2(z) dz + \int_{\gamma_g^+} f_1(z) dz + \int_{\gamma_g^-} f_2(z) dz$$

или

$$I = \int_{\gamma_1^+ + \gamma_g^+} f_1(z) dz + \int_{\gamma_2^+ + \gamma_g^-} f_2(z) dz.$$

Поскольку контуры  $\gamma_1^+ + \gamma_g^+$  и  $\gamma_2^+ + \gamma_g^-$  — замкнутые и целиком лежат, соответственно, в  $G_1$  и  $G_2$ , то

$$I = \int_{\Gamma} F(z) dz = 0.$$

Отсюда в соответствии с теоремой Морера и в силу произвольности контура  $\Gamma$  заключаем, что функция  $F(z)$  аналитична в  $G_1 \cup g \cup G_2$ , а это и означает, что  $f_2(z)$  является непосредственным аналитическим продолжением  $f_1(z)$  через дугу  $g$ .

Таким образом, если существует аналитическая функция  $f_2(z)$ , являющаяся непрерывным продолжением аналитической функции  $f_1(z)$  через дугу  $g$ , то она является и аналитическим продолжением этой функции, причем единственным.

Рассмотрим теперь следующий специальный случай, когда  $g = g_1 \cup g_2$ . Пусть  $f_1(z)$  аналитична в области  $G_1$ , а  $f_2(z)$  – в  $G_2$  (см. рис. 32). Пусть  $G_1 \cap G_2 = g$ , причем  $g_1$  и  $g_2$  такие, что

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_2(z), & z \in g_1, \\ f_2(z) &\neq f_1(z), & z \in g_2. \end{aligned}$$

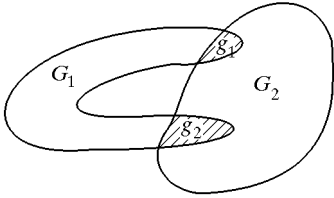


Рис. 32

Рассмотрим область  $\tilde{G} = G \setminus g_2$ ,  $G = G_1 \cup G_2$ . Согласно следствию, определена единственная аналитическая функция  $\tilde{F}(z)$ , являющаяся аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$ ,  $z \in G_1 \setminus g_2$ , в область  $\tilde{G}$ ,

$$\tilde{F}(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1 \setminus g_2, \\ f_2(z) & z \in G_2 \setminus g_2. \end{cases}$$

Функция  $\tilde{F}$  может быть аналитически продолжена в область  $g_2$  двумя способами:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \begin{cases} \tilde{F}(z), & z \in \tilde{G}, \\ f_1(z), & z \in g_2; \end{cases} \\ F_2(z) &= \begin{cases} \tilde{F}(z), & z \in \tilde{G}, \\ f_2(z), & z \in g_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (19.5)$$

Равенства (19.5) определяют двузначную аналитическую в области  $G$  функцию  $F(z)$ , принимающую различные значения в одних и тех же точках области  $g_2 \subset G$ .

В общем случае алгоритм построения аналитического продолжения был предложен Вейерштрассом и заключается в следующем.

### Метод Вейерштрасса

Пусть в области  $E$  задана аналитическая функция  $f(z)$ . Выберем произвольную точку  $z_0$  и разложим функцию  $f(z)$  в точке  $z_0$  в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (19.6)$$

Пусть  $R_0$  – радиус сходимости ряда (19.6). Возможны два случая.

**Случай 1.** Радиус сходимости ряда  $R_0$  не превосходит расстояния от точки  $z_0$  до  $\gamma$  – границы области  $E$ . В этом случае круг сходимости ряда не выходит за границу области  $E$ .

**Случай 2.** Радиус сходимости ряда  $R_0$  больше расстояния от точки  $z_0$  до границы  $\gamma$  области  $E$ . В этом случае область  $G_1$ , представляющая собой круг  $|z - z_0| < R_0$ , уже не является подобластью области  $E$ . В области  $G_1$  ряд (19.6) определяет аналитическую функцию  $f_1(z)$ , совпадающую с  $f(z)$  в области  $G_1 \cap E$ . Функция  $f_1(z)$  является аналитическим продолжением функции  $f(z)$  в область  $E_1 = G_1 \cup E$ .

Выберем произвольную точку  $z_1 \in E_1$  и разложим функцию

$$F_1(z) = \begin{cases} f(z), & z \in E, \\ f_1(z), & z \in G_1 \end{cases}$$

в степенной ряд

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_1^{(n)}(z_1)(z - z_1)^n. \quad (19.7)$$

Проводя для функции  $F_1(z)$  рассуждения, аналогичные тем, что проведены для функции  $f(z)$ , получим аналитическую функцию

$$F_2(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in E_1, \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

где  $G_2$  – область сходимости ряда (19.7).

Повторяя этот процесс, мы получим аналитическое продолжение функции  $f(z)$  вдоль цепочки областей  $E, G_1, E_1, G_2, \dots, G_n, \dots$

Понятие аналитического продолжения естественным образом приводит к понятию полной аналитической функции, которая, вообще говоря, многозначна.

♦ Функция  $F(z)$ , полученная путем аналитического продолжения вдоль всех возможных цепочек областей, выходящих из области  $E$  первоначального определения функции  $f(z)$ , называется полной аналитической функцией. Ее область определения называется естественной областью существования полной аналитической функции.

◇ Отметим, что аналитическое продолжение функции  $F(z)$  через границу  $\Gamma$  ее естественной области существования невозможно. При этом все точки границы  $\Gamma$  являются особыми точками функции  $F(z)$ . В противном случае ее можно было бы аналитически продолжить методом Вейерштрасса.

**Пример 19.2** Исследовать возможность аналитического продолжения функции

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}.$$

**Решение.** Очевидно, что  $z = 1$  – особая точка функции  $f(z)$ , поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty,$$

но

$$f(z) = 1 + z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^{k+1}} = z^2 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^2)^{2^k} = z^2 + f(z^2),$$

и поскольку

$$\lim_{z^2 \rightarrow 1} f(z^2) = \infty,$$

то имеем уже две особые точки:  $z_{1,2} = \sqrt{1} = \pm 1$ .

Аналогично

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + z^2 + z^4 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^{k+2}} = \\ &= z^2 + z^4 + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (z^4)^{2^k} = z^2 + z^4 + f(z^4), \\ \lim_{z^4 \rightarrow 1} f(z^4) &= \infty, \end{aligned}$$

и получаем уже четыре особые точки  $z_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i$ . В общем случае

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + z^4 + \dots + 2^{2n} + f(z^{2n}), \\ \lim_{z^{2n} \rightarrow 1} f(z^{2n}) &= \infty, \end{aligned}$$

и, следовательно, имеем  $2n$  особых точек  $\sqrt[2n]{1}$ . Но все эти точки лежат на окружности  $|z| = 1$ , и при  $n \rightarrow \infty$  на любой сколь угодно малой дуге их число неограниченно. Таким образом, возможность аналитического продолжения отсутствует ввиду существования этой сплошной линии особенностей, через которую невозможно пройти. Сама окружность  $|z| = 1$  является естественной границей рассматриваемой функции.



Аналитическое продолжение методом Вейерштрасса в практических приложениях малоэффективно. При продолжении конкретных функций мы будем использовать и другие приемы, например интегральные представления функций.

◇ Обобщение понятия аналитических функций на многозначные функции порождает новый тип изолированных особых точек – точки ветвления (разветвления) аналитической функции.

◆ Точка  $z_0$  называется точкой ветвления (разветвления) многозначной аналитической функции  $f(z)$ , если в любой ее  $\varepsilon$ -окрестности нельзя разделить регулярные (однозначные) ветви этой функции.

◆ Точка ветвления  $z_0$  многозначной аналитической функции  $f(z)$  называется алгебраической точкой ветвления порядка  $n$ , если после  $n$  обходов вокруг этой точки по замкнутому контуру  $\gamma$ , не охватывающему других особых точек, функция  $f(z)$  принимает исходное значение (возвращается к исходной ветви). Если такого конечного  $n$  не существует, то точка  $z_0$  называется логарифмической (или трансцендентной) точкой ветвления.

## 20. Римановы поверхности

◇ *Оперировать с многозначными функциями неудобно. Удобнее рассматривать функцию  $F(z)$  как однозначную, но определенную на более сложных множествах, чем комплексная плоскость.*

Рассмотрим теперь двузначную аналитическую функцию (19.5) и склеим области  $G_1$  и  $G_2$  в области  $g_1$ , где функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  совпадают, а два экземпляра области  $g_2$ , принадлежащие областям  $G_1$  и  $G_1$ , оставлены свободными.

Тогда на полученном множестве, представляющем собой объединение областей  $G_1$  и  $G_2$ , склеенных по  $g_1$ , функция  $F(z)$  является однозначной аналитической функцией.

◆ Построенное таким образом множество называется римановой поверхностью аналитической функции  $F(z)$ , являющейся аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$ , а отдельные экземпляры повторяющихся областей – различными листами римановой поверхности  $W$ .

**Пример 20.1** Показать, что функция  $f(z) = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$  является многолистной.

**Решение.** Согласно правилу извлечения корня,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt[n]{|\rho|} e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, & k = \overline{0, n-1}; \\ \rho &= |z|, & \varphi = \arg z; & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Выберем ту ветвь функции  $f(z) = \sqrt[n]{z}$ , которая является аналитическим продолжением функции  $u = \sqrt[n]{x}$ ,  $x > 0$ , т.е.

$$w = f_1(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{i\varphi/n}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Область определения  $G_1$  является плоскостью  $z$ , разрезанной по положительной части действительной оси (разрез можно провести по любому лучу, соединяющему точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = \infty$ , в которых функция  $f(z) = z^{1/n}$  является однозначной). Областью  $W_1$  значений функции  $f_1$  является сектор

$$0 \leq \arg w < \frac{2\pi}{n}; \quad w \in W.$$

Рассмотрим теперь область  $G_2$  – ту же плоскость  $z$  с разрезом по положительной части действительной оси  $Ox$ , но  $2\pi \leq \arg z < 4\pi$ . Рассмотрим в  $G_2$  функцию

$$f_2(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi+2\pi)/n}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Областью значений  $W_2$  функции  $f_2(z)$  является сектор

$$\frac{2\pi}{n} \leq \arg w < \frac{4\pi}{n}$$

плоскости  $w \in W$ .

Заметим, что  $\bar{G}_1 \cap G_2 = \Gamma_1$  – луч  $\arg z = 2\pi$ , на котором совпадают функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ . Поскольку функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  в одной и той же точке  $z$  имеют различные значения, то для того чтобы функция

$$F_1(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in G_1, \\ f_2(z) & z \in G_2 \end{cases}$$

была однозначной в  $R_1 = G_1 \cup G_2$ , будем считать  $R_1$  римановой поверхностью, склеенной из листов  $G_1$  и  $G_2$  по общей границе  $\Gamma_1$  – лучу  $\arg z = 2\pi$ , или, как принято говорить, склеивают нижний берег разреза листа  $G_1$  с верхним берегом разреза листа  $G_2$ . Аналогично

$$f_k(z) = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\varphi+2\pi k)/n}, \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_2(z), & z \in G_2; \\ \dots\dots \\ f_n(z), & z \in G_n \end{cases}$$

– однозначная аналитическая функция, определенная на римановой поверхности

$$R = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n,$$

склеенной из  $n$  листов. Отметим, что нижний берег разреза листа  $G_n$  склеен с верхним берегом разреза листа  $G_1$ . Естественно, что в трехмерном пространстве при последнем склеивании нельзя избежать самопересечений. Однако мы не будем отождествлять принадлежащие разным листам

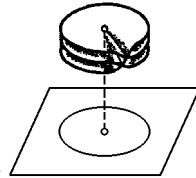


Рис. 33

$G_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  точки луча, по которому происходит самопересечение. Существуют лишь две точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = \infty$ , называемые алгебраическими точками ветвления (разветвления), которые принадлежат всем листам  $G_k$ , соединяя их между собой. На рис. 33 изображена риманова поверхность функции  $f(z) = \sqrt[3]{z}$ .

Пусть  $f(z) = \text{Ln } z$ . Риманова поверхность логарифма

$$w = \text{Ln } z \quad (20.1)$$

бесконечнолистка. Ее устройство показано на рис. 34. Мы опять берем область  $D$  – плоскость  $C$  с разрезом вдоль отрицательной полуоси – и в ней главную ветвь логарифма

$$w = f_0(z) = \ln |z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z < \pi).$$

Эта функция однолистно отображает  $D$  на полосу

$$D_0^* = \{-\pi < \text{Im } w < \pi\};$$

соответствие берегов разреза и границ полосы указано на рис. 34.

Логарифм имеет в области  $D$  бесконечно много ветвей

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i \quad (k = \overline{-\infty, \infty}),$$

отображающих  $D$  на полосы  $D_k^*$ , сдвинутые по отношению к  $D_0^*$  на целое, кратное  $2\pi i$ . В соответствии с этим мы берем

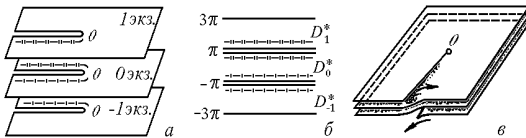


Рис. 34

счетное множество экземпляров области  $D$  и склеиваем верхний берег разреза на нулевом экземпляре с нижним берегом разреза на первом экземпляре, а нижний берег разреза на нулевом экземпляре – с верхним берегом разреза на первом экземпляре и т.д. Точки  $z_1 = 0$  и  $z_2 = \infty$  являются логарифмическими точками ветвления. Поскольку в этих точках функция  $f(z) = \text{Ln } z$  не определена, считается, что ее риманова поверхность не содержит точек над точками  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = \infty$  (см. рис. 34).

## 21. Теория вычетов

◆ Комплексное число, которое обозначено  $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$  и равно значению интеграла

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\omega) d\omega, \quad (21.1)$$

называется вычетом аналитической функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$ . Здесь  $\gamma$  – произвольный кусочно-гладкий контур без самопересечений, лежащий в области аналитичности функции  $f(z)$  и охватывающий только одну особую точку  $z_0$  функции  $f(z)$ , который при интегрировании обходится в положительном направлении (против часовой стрелки).

**Теорема 21.1** В изолированной особой точке справедливо равенство

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}, \quad (21.2)$$

где  $C_{-1}$  – коэффициент при  $(z - z_0)^{-1}$  в разложении функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0$ .

**Доказательство.** Так как в окрестности изолированной особой точки  $z_0$  функцию  $f(z)$  можно разложить в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

где

$$C_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega.$$

Тогда, по определению,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \oint_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^n \frac{dz}{2\pi i}.$$

Поскольку (см. пример 12.3)

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \text{и} \quad \oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0, \quad \text{если} \quad n \neq -1,$$

то, следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1},$$

что и требовалось доказать.

◇ Из равенства (21.2) следует, что вычет в правильной и устранимой особых точках равен нулю.

**Теорема 21.2 (Коши, основная)** Если функция  $f(z)$  аналитична в односвязной области  $E$ , то интеграл от функции  $f(z)$  по границе этой области равен нулю:

$$\int_{\Gamma_E} f(z) dz = 0.$$

**Теорема 21.3 (основная теорема теории вычетов).**

Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $E$  и непрерывна в замкнутой области  $\overline{E} = E + \gamma_E$  за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ,  $z_k \notin \gamma_E$ ). Тогда

$$\oint_{\gamma_E} f(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (21.3)$$

Здесь контур  $\gamma_E$  – граница области  $E$  – обходится в положительном направлении.

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma_k$  – окружность достаточно малого радиуса (т.е. внутри  $\Gamma_k$  не содержится особых точек, отличных от  $z_k$ ) с центром в точке  $z_k$ , ориентированная в положительном направлении. В силу теоремы Коши

$$\oint_{\gamma} f(\omega) d\omega = \oint_{\gamma_E} f(\omega) d\omega + \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k^-} f(\omega) d\omega = 0,$$

где  $\gamma = \gamma_E + \sum_{k=1}^n (\gamma_k^+ + \gamma_k^- + \Gamma_k^-)$  (см. рис. 35). Следовательно,

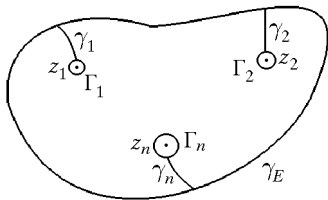


Рис. 35

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_E} f(\omega) d\omega &= \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} f(\omega) d\omega = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 21.4 (простой полюс).** Пусть  $z_0$  – простой полюс. Тогда вычет функции  $f(z)$  в точке  $z = z_0$  определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (21.4)$$

**Доказательство.** В случае простого полюса справедливо следующее разложение:

$$f(z) = C_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n.$$

Следовательно,

$$(z - z_0) f(z) = C_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^{n+1},$$

т.е.

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

В силу (21.2) теорема доказана.

**Следствие 21.4.1.** Если  $z_0$  – простой полюс функции  $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ , а  $z_0$  – простой полюс функции  $\psi(z)$  (т.е.  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ ), то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \left[ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

**Доказательство.** Согласно (21.4),

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} \left[ \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} / \frac{1}{z - z_0} = \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) / \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} &= \varphi(z_0) / \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 21.5 (кратный полюс).** Пусть  $z_0$  – полюс аналитической функции  $f(z)$  кратности  $m$ . Тогда вычет функции  $f(z)$  в точке  $z = z_0$  определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1} [(z - z_0)^m f(z)]}{dz^{m-1}}. \quad (21.5)$$

**Доказательство.** Так как  $z_0$  – полюс кратности  $m$ , то

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

т.е.

$$f(z)(z - z_0)^m = C_{-m} + \dots + C_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^{n+m}.$$

Продифференцируем полученное равенство  $m - 1$  раз. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1} [f(z)(z - z_0)^m]}{dz^{m-1}} &= \\ = C_{-1}(m-1)! + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^{n+1} (n+m) \dots (n+2). \end{aligned}$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу, получим (21.5), что и требовалось доказать.

**Пример 21.1.** Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{1}{z(z-i)^2}$$

относительно точки  $z_0 = i$  и  $z_0 = 0$ .

**Решение.** Точка  $z_0 = i$  для функции  $f(z)$  – полюс второго порядка, так как для функции  $1/f(z) = z(z-i)^2$  она – нуль второго порядка. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z-i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{z(z-i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z} \right) = - \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2} = 1.$$

Для точки  $z_0 = 0$ , являющейся простым полюсом, из (21.4) имеем

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z-i)^2} = \frac{1}{(-i)^2} = -1.$$

**Пример 21.2.** Найти вычет функции  $f(z) = \operatorname{cth} z$  в точке  $z_0 = 0$ .

**Решение.** Так как точка  $z_0 = 0$  является простым полюсом функции  $\operatorname{cth} z$ , то, согласно следствию 21.4.1, имеем

$$\operatorname{Res}_{z=0} \operatorname{cth} z = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \left. \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{ch} z} \right|_{z=0} = 1.$$

**Пример 21.3.** Найти вычет функции  $f(z) = e^{1/z}$  в точке  $z_0 = 0$ .

**Решение.** Разложение функции  $f(z) = e^{1/z}$  в окрестности точки  $z = 0$  содержит бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями  $z$  (см. пример 17.2). Следовательно, точка  $z = 0$  – существенно особая точка. Разложим  $f(z)$  в ряд Лорана

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{-n} \frac{1}{z^n}, \quad \text{где} \quad C_{-n} = \frac{1}{n!}.$$

Следовательно,  $C_{-1} = 1$ . Таким образом,

$$\operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1.$$



**Пример 21.4.** Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z + 1)(z - 2i)^3}$$

в изолированной особой точке  $z_0 = 2i$ .

**Решение.** Определим тип особой точки. Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow 2i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^2 f(z) = \infty$$

и

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^3 - 1}{z + 1} = \frac{-8i - 1}{2i + 1} \neq \infty,$$

то точка  $z_0 = 2i$  является полюсом третьего порядка (см. также пример 21.1). Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=2i} f(z) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \left[ (z - 2i)^3 \frac{z^3 - 1}{(z + 1)(z - 2i)^3} \right]'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 2i} \left[ \frac{z^3 - 1}{z + 1} \right]'' = \frac{53 - 4i}{25}. \end{aligned}$$

**Пример 21.5.** Найти вычет функции

$$f(z) = z^3 \exp\left(\frac{7}{z^2}\right)$$

в изолированной особой точке  $z_0 = 0$  и определить тип этой точки.

**Решение.** Согласно (21.2),

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}.$$

Найдем разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в точке  $z_0 = 0$ . Получим

$$f(z) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \frac{1}{z^{3-2n}} = z^3 + 7z + \frac{49}{4z} + \dots$$

Поскольку в разложении присутствует бесконечное количество слагаемых с отрицательными степенями  $z$ , то  $z_0$  — существенно особая точка. Из явного вида разложения находим

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = C_{-1} = \frac{49}{4}.$$

**Пример 21.6.** Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1 - z^2}{\sin z - z + z^3/6}$$

в изолированной особой точке  $z_0 = 0$ , определив тип этой точки.

**Решение.** *Первый способ.* Представим функцию  $f(z)$  в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2n} - 1 - z^2}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - z + \frac{z^3}{6}} = \\ &= \frac{1 + z^2 + \frac{z^4}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} - 1 - z^2}{z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} - z + \frac{z^3}{6}} = \\ &= \frac{z^4 \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{2n-4}}{n!} \right)}{z^5 \left( \frac{1}{5!} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} \right)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = 60,$$

т.е.  $z_0 = 0$  – простой полюс. Тогда

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = 60.$$

*Второй способ.* Обозначим

$$\varphi(z) = e^{z^2} - 1 - z^2, \quad \psi(z) = \sin z - z + \frac{z^3}{6}.$$

Так как, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \varphi(z)|_{z=0} &= 0, \\ \varphi'(z)|_{z=0} &= 2z(e^{z^2} - 1)|_{z=0} = 0, \\ \varphi''(z)|_{z=0} &= 2[(1 + 2z^2)e^{z^2} - 1]|_{z=0} = 0, \\ \varphi^{(3)}(z)|_{z=0} &= 4z(3 + 2z)e^{z^2}|_{z=0} = 0, \\ \varphi^{(4)}(z)|_{z=0} &= 4(3 + 4z + 6z^2 + 4z^3)e^{z^2}|_{z=0} = 12, \end{aligned}$$

а с другой,

$$\begin{aligned}\psi(z)|_{z=0} &= 0, \\ \psi'(z)|_{z=0} &= \cos z - 1 + \frac{z^2}{2}|_{z=0} = 0, \\ \psi''(z)|_{z=0} &= -\sin z + z|_{z=0} = 0, \\ \psi^{(3)}(z)|_{z=0} &= -\cos z + 1|_{z=0} = 0, \\ \psi^{(4)}(z)|_{z=0} &= \sin z|_{z=0} = 0, \\ \psi^{(5)}(z)|_{z=0} &= \cos z|_{z=0} = 1,\end{aligned}$$

мы заключаем, что точка  $z_0 = 0$  – нуль четвертого порядка для  $\varphi(z)$  и пятого для  $\psi(z)$ . Следовательно, эта точка – простой полюс функции  $f(z)$ . Согласно (21.4), имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{[z\varphi(z)]^{(5)}}{\psi^{(5)}(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z\varphi^{(5)}(z) + 5\varphi^{(4)}(z)}{\cos z} = 5\varphi^{(4)}(z)|_{z=0} = 5 \cdot 12 = 60.\end{aligned}$$

Здесь для раскрытия неопределенности мы воспользовались правилом Лопиталья. Второй способ более удобен при малых  $n$  и  $k$ .

Понятие вычета распространяется и на случай бесконечно удаленной точки.

◆ Вычетом аналитической функции  $f(z)$  в точке  $z = \infty$  называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(\omega) d\omega = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(\omega) d\omega = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z), \quad (21.6)$$

где  $\Gamma^{+(-)}$  – произвольный замкнутый контур, обход которого совершается в положительном (отрицательном) направлении и вне которого функция  $f(z)$  является аналитической и не имеет особых точек, отличных от точки  $z = \infty$ .

**Теорема 21.6.** Для вычета функции  $f(z)$  в бесконечно удаленной точке справедлива формула

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1}. \quad (21.7)$$

**Доказательство.** Так как по определению изолированной бесконечно удаленной точки функция  $f(z)$  является аналитической в кольце  $R < |z| < \infty$ , то ее можно разложить в нем в ряд Лорана, сходящийся в этом кольце,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n, \quad R < |z| < \infty; \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

где  $\Gamma$  – произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в том же кольце. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1},$$

т.е. теорема доказана.

**Следствие 21.6.1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в точке  $z = \infty$ . Тогда справедливо соотношение

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)). \quad (21.8)$$

**Доказательство.** Поскольку  $f(z)$  аналитична в точке  $z = \infty$ , то в окрестности бесконечно удаленной точки функция  $f(z)$  представляется рядом Лорана

$$f(z) = f(\infty) + \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2} + \dots$$

Следовательно,

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - f(\infty)]z.$$

В силу (21.7) следствие доказано.

**Следствие 21.6.2.** Пусть для функции  $f(z)$  точка  $z = \infty$  является нулем порядка  $k > 1$ , тогда

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

**Доказательство** очевидно, поскольку разложение функции в окрестности точки  $z = \infty$ , являющейся нулем порядка  $k > 1$ , имеет вид

$$f(z) = \frac{C_{-k}}{z^k} + \frac{C_{-k-1}}{z^{k+1}} + \dots, \quad C_0 = C_{-1} = \dots = C_{-k+1} = 0,$$

и в этом разложении отсутствует слагаемое  $C_{-1}/z$ .

**Следствие 21.6.3.** Пусть функция  $f(z)$  имеет в бесконечно удаленной точке полюс порядка  $m$ . Тогда справедливо соотношение

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} f^{(m+1)}(z)]. \quad (21.9)$$

**Доказательство.** По определению полюса  $m$ -ого порядка, в бесконечно удаленной точке имеем

$$f(z) = C_m z^m + \dots + \frac{C_{-1}}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}.$$

Продифференцируем это соотношение  $m+1$  раз по  $z$ . Домножим полученный результат на  $z^{m+2}$  и перейдем к пределу при  $z \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} f^{(m+1)}(z)] = (-1)^{m+1} (m+1)! C_{-1}.$$

В силу (21.7) следствие доказано.

**Пример 21.7.** Найти вычет функции  $f(z) = 1/z$  в точке  $z_0 = \infty$ .

**Решение.** Функцию  $f(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

где  $C_n = \delta_{n,-1}$ . Тогда, согласно формуле (21.7), получим

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z} = -C_{-1} = -1.$$

◇ В рассмотренном примере

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Следовательно, точка  $z = \infty$  есть устранимая особая точка. Тем не менее, вычет в этой точке отличен от нуля.

**Пример 21.8.** Найти вычет функции

$$f(z) = \frac{2z + i}{z^2 + 4} \sin\left(\pi \frac{z + 3}{z}\right)$$

в бесконечно удаленной точке  $z_0 = \infty$ .

**Решение.** *Первый способ.* Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

то функция  $f(z)$  аналитична в точке  $z = \infty$ . Следовательно, по формуле (21.8)

$$\operatorname{Res}_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)] = 0.$$

*Второй способ.* Так как точка  $z = \infty$  является нулем второго порядка функции  $f(z)$ , то, согласно следствию 21.6.2,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{2z + i}{z^2 + 4} \sin\left(\pi \frac{z + 3}{z}\right) = 0.$$

**Пример 21.9.** Найти вычет функции

$$f(z) = z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z}$$

в бесконечно удаленной точке  $z_0 = \infty$ .

**Решение.** *Первый способ.* Найдем разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi + i)^{2n+1} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \\ &= z(2\pi + i) - \frac{(2\pi + i)^3}{6z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2\pi + i)^{2n+1} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_{-1} = -\frac{1}{6}(2\pi + i)^3.$$

Согласно (21.7)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_{-1} = \frac{1}{6}(2\pi + i)^3.$$

*Второй способ.* Так как точка  $z = \infty$  является простым полюсом функции  $f(z)$ , то, согласно формуле (21.9),

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z} &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left( z^2 \sin \frac{2\pi + i}{z} \right)'' = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left[ 2 \sin \frac{2\pi + i}{z} - \frac{2(2\pi + i)}{z} \cos \frac{2\pi + i}{z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2\pi + i)^2}{z^2} \sin \frac{2\pi + i}{z} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[ 2 \sin \frac{2\pi + i}{z} - \frac{2(2\pi + i)}{z} \cos \frac{2\pi + i}{z} - \frac{(2\pi + i)^2}{z^2} \sin \frac{2\pi + i}{z} \right]'}{\left( \frac{1}{z^3} \right)'} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \frac{(2\pi + i)^3}{z^4} \cos \frac{2\pi + i}{z} \right] / \left( -\frac{3}{z^4} \right) \right\} = \frac{1}{6} (2\pi + i)^3. \end{aligned}$$

**Теорема 21.7.** Если функция  $f(z)$  является аналитической на расширенной комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ), включая и  $z = \infty$  ( $z_N = \infty$ ), то

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0. \quad (21.10)$$

**Доказательство.** Рассмотрим круг  $|z| < R$  радиуса  $R$  такого, что  $|z_k| < R$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ . Тогда по основной теореме о вычетах имеем

$$\oint_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz = \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz,$$

где  $\Gamma$  принадлежит кольцу  $R < |z| < \infty$  и охватывает точку  $z = 0$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz$$

или

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = - \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

что и требовалось доказать.

**Пример 21.10.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} z^3 \cos\left(\frac{2i}{z}\right) dz.$$

**Решение.** Согласно основной теореме теории вычетов,

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где  $z_k$  – все изолированные особые точки внутри контура  $|z| = 2$ . В контур интегрирования попадает одна изолированная особая точка  $z = 0$ . Найдём разложение функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{2i}{z}\right)^{2n} = \\ &= z^3 - \frac{1}{2}(2i)^2 z + \frac{(2i)^4}{24z} + z^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{2i}{z}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_{-1} = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{2}{3}.$$

Окончательно получим

$$I = 2\pi i \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi i.$$

**Пример 21.11.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=1/4} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{ch}(z\pi i)} dz.$$



**Решение.** *Первый способ.* Согласно основной теореме теории вычетов,

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где  $z_k$  – все изолированные особые точки внутри контура интегрирования. В круге  $|z| = 1/4$  находится одна изолированная особая точка:  $z = 0$ . Определим ее тип. Для этого представим функцию  $f(z)$  в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (9z)^{2n}}{z \operatorname{ch} \pi i z} = \\ &= \frac{1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} - 1 + \frac{(9z)^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (9z)^{2n}}{z \operatorname{ch} \pi i z} = \\ &= \frac{2 + \frac{85}{2}z + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 9^{2n} z^{2n-1}}{\operatorname{ch} \pi i z}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 2.$$

Следовательно, точка  $z = 0$  – устранимая особая точка функции  $f(z)$ . Поэтому ее разложение в ряд Лорана не содержит отрицательных степеней  $z$ . Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$$

и

$$I = 0.$$

*Второй способ.* Так как точка  $z = 0$  является простым нулем числителя

$$(e^{2z} - \cos 9z)' \Big|_{z=0} = (2e^{2z} + 9 \sin 9z) \Big|_{z=0} = 2 \neq 0$$

и знаменателя

$$(z \operatorname{ch} z\pi i)' \Big|_{z=0} = (\operatorname{ch} z\pi i + z\pi i \operatorname{sh} z\pi i) \Big|_{z=0} = 1 \neq 0,$$

то, согласно следствию 18.4.2, точка  $z = 0$  является устранимой особой точкой функции  $f(z)$ , и, следовательно,  $I = 0$ .

**Пример 21.12.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z} - 1}{z} dz.$$

**Решение.** Представим подынтегральное выражение в виде

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} - 1}{z} = \frac{z^2 \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \right) - 1}{z} = \\ &= z + 1 + \frac{1}{2z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} - \frac{1}{z} = z + 1 - \frac{1}{2z} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$C_{-1} = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку в круг  $|z| < 1$  попадает одна изолированная особая точка  $z = 0$ , то

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \left( -\frac{1}{2} \right) = -\pi i.$$

**Пример 21.13.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10} + 1}.$$

**Решение.** Внутри контура интегрирования  $|z| = 2$  подынтегральная функция имеет десять особых точек

$$z_k = \exp \left[ \frac{(2k+1)\pi i}{10} \right], \quad k = \overline{0, 9},$$

являющихся простыми полюсами, лежащими на единичной окружности. Вне контура особых точек нет, следовательно, по теореме 21.7

$$\sum_{k=0}^9 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

Поскольку точка  $z = \infty$  является нулем десятого порядка функции  $f(z)$ , можно записать  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$ , откуда

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{10} + 1} = 2\pi i \sum_{k=0}^9 \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

## 22. Логарифмический вычет и его приложения

### 22.1. Логарифмический вычет

♦ Логарифмической производной функции  $f(z)$  называется функция  $\varphi(z)$ , определяемая выражением

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = [\ln f(z)]'. \quad (22.1)$$

♦ Логарифмическим вычетом аналитической функции  $f(z)$  в точке  $z = z_0$  называется вычет в этой точке логарифмической производной функции  $f(z)$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

**Теорема 22.1.** Если точка  $z_0$  является нулем аналитической функции  $f(z)$  порядка  $m$ , то логарифмический вычет этой функции в точке  $z_0$  определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \varphi(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m. \quad (22.2)$$

**Доказательство.** Так как  $z_0$  — нуль функции  $f(z)$  порядка  $m$ , то в окрестности этой точки

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^k \quad \text{и} \quad f'(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k C_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Следовательно,

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k-m} = (z - z_0)^m \psi(z);$$

$$f'(z) = (z - z_0)^{m-1} \sum_{k=m}^{\infty} k C_k (z - z_0)^{k-m} = (z - z_0)^{m-1} g(z),$$

где  $\psi(z_0) \neq 0$ ,  $g(z_0) \neq 0$ . Тогда

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{\sum_{k=m}^{\infty} k C_k (z - z_0)^{k-m}}{\sum_{k=m}^{\infty} C_k (z - z_0)^{k-m}} = \frac{1}{z - z_0} \frac{g(z)}{\psi(z)}.$$

Из полученного выражения следует, что  $z_0$  – простой полюс функции  $\varphi(z)$ . Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \varphi(z) = \frac{m C_m}{C_m} = m.$$

По формуле (21.4) получим

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \varphi(z) = \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = m,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 22.2.** Если точка  $z_0$  является полюсом аналитической функции  $f(z)$  порядка  $n$ , тогда логарифмический вычет функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  определяется выражением

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -n. \quad (22.3)$$

**Доказательство.** Функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  полюс порядка  $n$ . Тогда функция  $g(z) = 1/f(z)$  будет иметь в точке  $z_0$  нуль порядка  $n$ , и  $[\ln f(z)]' = -[\ln g(z)]'$ . Поэтому согласно теореме 22.1, утверждение доказано.

◆ Логарифмическим вычетом функции  $f(z)$  относительно замкнутого контура  $\Gamma$  называется комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (22.4)$$

**Теорема 22.3.** Если функция  $f(z)$  мероморфна внутри замкнутого контура  $\Gamma$ , то ее логарифмический вычет относительно этого контура равен разности между числом нулей и числом полюсов функции  $f(z)$  внутри  $\Gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k m_j - \sum_{l=1}^p n_l = N - P, \quad (22.5)$$

причем каждый нуль и каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

**Доказательство.** Обозначим  $f'(z)/f(z) = \varphi(z)$ . Интеграл от  $\varphi(z)$  по контуру  $\Gamma$  может быть вычислен по основной теореме теории вычетов. Поскольку все особые точки функции  $\varphi(z)$  – это нули и полюсы функции  $f(z)$ , а вычеты в этих точках определяются соотношениями (22.2) и (22.3), то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \varphi(z) dz = \sum_{j=1}^M \operatorname{Res}_{z=z_j} \varphi(z) = \sum_{j=1}^k m_j - \sum_{l=1}^p n_l = N - P,$$

что и требовалось доказать.

◇ Отметим, что если вместо нулей функции  $f(z)$  рассматривать так называемые  $a$ -точки, т.е. корни уравнения  $f(z) = a$ , то формула (22.5) примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = N_a - P, \quad (22.6)$$

где  $N_a$  – общее число  $a$ -точек функции  $f(z)$  внутри контура  $\Gamma$ . Для доказательства (22.6) достаточно заменить в наших рассуждениях функцию  $f(z)$  выражением  $[f(z) - a]$ .

## 22.2. Принцип аргумента

Геометрический смысл формул (22.5), (22.6) раскрывает следующая

**Теорема 22.4 (принцип аргумента).** Пусть справедливы условия теоремы 22.3. Тогда разность между числом нулей  $N$  и числом полюсов  $P$  функции  $f(z)$  внутри  $\Gamma$  равна числу оборотов точки  $w$  при обходе кривой  $\Gamma'$ , являющейся образом кривой  $\Gamma$  при отображении  $w = f(z)$ , или, что то же самое, приращению аргумента  $\Delta_{\Gamma} \operatorname{Arg} f(z)$  функции  $f(z)$  при положительном обходе замкнутой кривой  $\Gamma$ , деленному на  $2\pi$ .

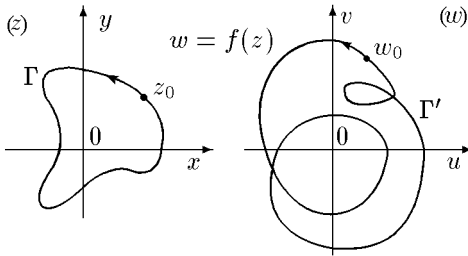


Рис. 36

**Доказательство.** Отметим на кривой  $\Gamma$  произвольную точку  $z_0$ , которую будем считать начальной и конечной точкой пути интегрирования (см. рис. 36).

При обходе кривой  $\Gamma$  значение  $\text{Ln } f(z)$  будет непрерывно меняться и после возвращения  $z$  в точку  $z_0$  его значение, вообще говоря, будет отличаться от значения  $\text{Ln } f(z_0)$ . Это различие при одном значении  $f(z_0)$  может осуществляться только за счет разных значений аргумента, приписываемых  $\text{Ln } f(z)$ :  $\Phi_0 = \text{Arg}(f(z_0))$  до и  $\Phi_1 = \text{Arg}(f(z_0))$  после обхода. Теперь, если воспользоваться формулой (22.5), то с учетом сказанного ее можно записать

$$\begin{aligned} N - P &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d}{dz} (\text{Ln } f(z)) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\ln |f(z_0)| + i\Phi_1 - \ln |f(z_0)| - i\Phi_0] = \\ &= \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{2\pi} = n = \frac{\Delta_{\Gamma} \text{Arg } f(z)}{2\pi}, \end{aligned} \quad (22.7)$$

что и требовалось доказать.

Если вместо нулей функции  $f(z)$  рассматривать ее  $a$ -точки, то выражение (22.7) примет вид

$$N_a - P = n = \frac{\Delta_{\Gamma} \text{Arg } [f(z) - a]}{2\pi}. \quad (22.8)$$

**Теорема 22.5 (Руше).** Если аналитические внутри  $\Gamma$  и непрерывные на  $\Gamma$  функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  удовлетворяют неравенству

$$|f(z)|_{\Gamma} > |\varphi(z)|_{\Gamma}, \quad (22.9)$$

то функции  $f(z)$  и  $f(z) + \varphi(z)$  имеют внутри  $\Gamma$  одинаковое количество нулей.

**Доказательство.** Из соотношения

$$\begin{aligned} \arg(f(z) + \varphi(z)) &= \arg\left[f(z)\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right] = \\ &= \arg f(z) + \arg\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) \end{aligned}$$

и в силу принципа аргумента имеем

$$\Delta_{\Gamma} \arg(f(z) + \varphi(z)) = \Delta_{\Gamma} \arg f(z) + \Delta_{\Gamma} \arg\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right). \quad (22.10)$$

Последнее слагаемое в (22.10) определяет приращение аргумента для функции  $w = 1 + \varphi(z)/f(z)$ , но так как при движении  $z$  по  $\Gamma$

$$|w - 1| = \left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

то точка  $w$  не может обойти начало координат  $w = 0$ . И, следовательно,

$$\Delta_{\Gamma} \arg\left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) = 0$$

и

$$\Delta_{\Gamma} \arg(f(z) + \varphi(z)) = \Delta_{\Gamma} \arg f(z).$$

Последнее равенство, согласно принципу аргумента, означает, что функции  $f(z) + \varphi(z)$  и  $f(z)$  имеют внутри  $\Gamma$  одинаковое число нулей, что и требовалось доказать.

**Пример 22.1.** Найти число корней уравнения  $z^9 + 6z^5 + z + 1 = 0$  а) в круге  $|z| \leq 1$ ; б) в круге  $|z| \leq 2$ .

**Решение.** а) В круге  $|z| \leq 1$  положим  $f(z) = 6z^5 + 1$ ,  $\varphi(z) = z^9 + z$ . Так как для точек окружности  $|z| = 1$ , имеем  $|f(z)| = |6z^5 + 1| \geq 6|z|^5 - 1 = 5$  и, соответственно,  $|\varphi(z)| = |z^9 + z| \leq |z|^9 + |z| = 2$ , то

$$|f(z)|_{|z|=1} > |\varphi(z)|_{|z|=1},$$

и по теореме Руше число корней исходного уравнения совпадает с числом корней уравнения  $6z^5 + 1 = 0$ , т.е. равно пяти.

б) Найдем число корней в круге  $|z| \leq 2$ . Положим  $f(z) = z^9 + 1$ ,  $\varphi(z) = 6z^5 + z$ . Так как для точек окружности  $|z| = 2$ ,

имеем  $|f(z)| = |z^9 + 1| \geq |z|^9 - 1 = 511$  и, соответственно,  $|\varphi(z)| \leq 6|z|^5 + |z| = 194$ , то

$$|f(z)|_{|z|=2} > |\varphi(z)|_{|z|=2},$$

и по теореме Руше число корней исходного уравнения совпадает с числом корней уравнения  $z^9 + 1 = 0$ , т.е. равно девяти.

### 22.3. Основная теорема алгебры

**Теорема 22.6 (основная теорема алгебры).** *Полином степени  $n$  имеет на комплексной плоскости ровно  $n$  нулей (с учетом их кратности).*

**Доказательство.** Пусть

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n \neq 0,$$

— полином степени  $n$ . Найдем логарифмическую производную функции  $P_n(z)$ :

$$\varphi(z) = \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}}{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \frac{n}{z} \psi(z), \quad (22.11)$$

где

$$\psi(z) = \frac{\sum_{k=1}^n (k a_k / n a_n) z^{k-n}}{\sum_{k=0}^n (a_k / a_n) z^{k-n}} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l}{z^l}.$$

Здесь мы воспользовались разложением

$$\frac{1}{1+q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n, \quad |q| < 1,$$

ПОЛОЖИВ В НЕМ

$$q = q(z) = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}.$$



Условие  $|q| < 1$  будет выполняться при  $|z| > R$ , где  $R$  определяется из уравнения  $|q(R)| = 1$ . Из вышесказанного и формулы (22.11) следует, что коэффициент  $C_{-1}$  в разложении функции

$$\varphi(z) = \frac{P'_n(z)}{P_n(z)}$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки  $z = \infty$  определяется соотношением

$$C_{-1} = n.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \varphi(z) = -C_{-1} = -n.$$

Выберем контур  $\Gamma$  так, чтобы все особые точки функции  $\varphi(z)$  (кроме  $z = \infty$ ) содержались внутри контура. Тогда по теореме 21.7

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{P'_n(z)}{P_n(z)} dz = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \varphi(z) = n.$$

В силу (22.5) последний интеграл равен разности между числом нулей и числом полюсов функции  $P_n(z)$  с учетом их кратности. Однако полином  $n$ -ой степени не имеет полюсов, что и доказывает теорему.

◇ Отметим, что доказательство теоремы можно упростить, если использовать теорему Руше. Действительно, разобьем полином  $P_n(z)$  на два:

$$\tilde{P}_n(z) = a_n z^n \quad \text{и} \quad Q_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Легко видеть, что при любых заданных коэффициентах  $a_k$  всегда найдется такое  $R$ , что на окружности  $|z| = R$  будет выполняться неравенство

$$0 < \frac{|Q_{n-1}(z)|}{|\tilde{P}_n(z)|} \Big|_{|z|=R} < 1,$$

поскольку

$$\begin{aligned} |\tilde{P}_n(z)| \Big|_{|z|=R} &= |a_n| R^n, \\ |Q_{n-1}(z)| \Big|_{|z|=R} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k, \end{aligned}$$

и  $R^n$  при больших  $R$  растет быстрее, чем любой полином степени  $(n-1)$ . В силу установленного неравенства и теоремы Руше заключаем, что число нулей полинома  $P_n(z)$  в круге  $|z| = R$  равно числу нулей полинома  $\tilde{P}_n(z) = a_n z^n$  в этом круге. Но полином  $\tilde{P}_n(z) = a_n z^n$  на всей комплексной плоскости имеет единственный  $n$ -кратный нуль: точку  $z = 0$ . Следовательно, такое же число нулей имеет и полином  $P_n(z)$ , что и требовалось доказать.

## 22.4. Задача Рауса–Гурвица

Широкий класс физических задач (например задач о механических или электрических колебаниях) сводится, в конечном счете, к решению дифференциальных уравнений, причем особую роль играют уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, соответствующими различным физическим характеристикам процесса, т.е.

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} u}{dt^{n-2}} + \dots + a_n u = 0. \quad (22.12)$$

Характер общего решения уравнения (22.12), как известно, определяется нулями так называемого характеристического полинома  $P_n(p)$  или, что то же самое, корнями уравнения

$$P_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (22.13)$$

Из основной теоремы алгебры следует, что на комплексной плоскости уравнение (22.13) имеет  $n$  корней. Пусть  $p_k$  –  $k$ -ый простой корень этого уравнения, т.е.

$$p_k = s_k + ir_k.$$

Частное решение  $u_k(t)$ , соответствующее этому корню, имеет вид

$$u_k(t) = e^{s_k t} (\cos r_k t + \sin r_k t).$$

При этом экспонента с показателем  $s_k = \operatorname{Re} p_k$  характеризует амплитуду колебаний соответствующей гармонике, а  $r_k = \operatorname{Im} p_k$  – его частоту.

Естественно, что при  $s_k < 0$  колебания являются затухающими, а при  $s_k > 0$  амплитуда колебаний неограниченно возрастает с течением времени. Если мы хотим ограничиться устойчивыми колебаниями, не допускающими неограниченного возрастания амплитуды, мы должны потребовать, чтобы все  $s_k$  были нулевыми или отрицательными. Другими словами, все нули полинома  $P_n(p)$

должны лежать в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} p_k \leq 0$  (включая мнимую ось). Таким образом, мы приходим к задаче, называемой задачей Рауса–Гурвица, смысл которой можно сформулировать следующим образом: найти условия, при которых все нули полинома (22.13) лежат в левой полуплоскости.

Существует несколько методов решения этой задачи. Мы ограничимся одним, сформулированным самим Гурвицем в теореме, которую мы приведем без доказательства (см. [35]).

**Теорема 22.7 (Гурвица).** *Для того чтобы все корни полинома (22.13) лежали в левой полуплоскости, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0, \quad (22.14)$$

где

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix},$$

в предположении, что  $a_k = 0$  при  $k > n$ .

**Пример 22.2.** Установить характер нулей полинома:

а)  $P_3(p) = p^3 + 2p^2 + 3p + 1$ ;   б)  $P_3(p) = p^3 + 2p^2 + p + 3$ .

**Решение.** Согласно теореме Гурвица, вычислим  $\Delta_n$ :

а)  $\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5.$

Так как все  $\Delta_n > 0$ , то корни полинома лежат в левой полуплоскости.

б)  $\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,$

и, следовательно, хотя бы один корень лежит в правой полуплоскости или на мнимой оси. Для проверки последнего выберем один из корней в виде  $p = is$  и подставим в уравнение

$$(is)^3 + 2(is)^2 + is + 3 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(3 - 2s^2) - is(s^2 - 1) \neq 0.$$

Таким образом, исходный полином не имеет мнимых корней и хотя бы один его корень расположен в правой полуплоскости.

В заключение отметим, что в более общей постановке задачи Рауса–Гурвица речь идет не только о полиномах, но и об общих видах мероморфных функций.

## 23. Приложения теории вычетов

Теория вычетов может быть успешно использована для вычисления определенных интегралов, разложения функций в ряды, суммирования рядов и др. В этом разделе мы рассмотрим ряд задач, которые можно решить с помощью теории вычетов.

### 23.1. Интегралы, содержащие рациональные функции от тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi. \quad (23.1)$$

где  $R$  – рациональная функция от  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ . Схему вычисления интегралов (23.1) удобно задать следующим утверждением.

**Утверждение 23.1.** Пусть  $R(u, v)$  – рациональная функция. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z), \quad (23.2)$$

где  $z_k$  – особые точки функции

$$f(z) = -\frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{-i}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right)$$

в круге единичного радиуса, причем на границе этого круга функция  $f(z)$  не имеет особых точек.

Действительно, проведем под знаком интеграла замену

$$z = e^{i\varphi}, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi = iz d\varphi,$$

тогда

$$d\varphi = -i \frac{dz}{z}.$$

Кроме того,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin \varphi = \frac{-i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Если  $\varphi$  изменяется от нуля до  $2\pi$ , то  $z$  пробегает замкнутый контур – окружность  $|z| = 1$  в положительном направлении.

Таким образом,

$$I_1 = -i \oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{-i}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) \frac{dz}{z}.$$

В силу общих свойств аналитических функций подынтегральное выражение представляет собой аналитическую функцию внутри круга  $|z| = 1$ , за исключением конечного числа точек, являющихся нулями знаменателя, что и доказывает утверждение.

**Пример 23.1.** Вычислить интеграл

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2},$$

где  $0 < a < 1$ .

**Решение.** Сделаем в интеграле замену переменных  $\cos \varphi = (z + z^{-1})/2$ ,  $d\varphi = -i dz/z$ . Тогда

$$I_1 = -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z[1 - a(z + z^{-1}) + a^2]} = -i \oint \frac{dz}{(1 - az)(z - a)}.$$

Функция  $f(z) = (-i)/[(1-az)(z-a)]$  имеет внутри круга  $|z| < 1$  один простой полюс  $z = a$  (функция  $1/f(z)$  имеет в этой точке простой нуль). По формуле (21.4) находим

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \frac{-i}{1-a^2}.$$

Тогда

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(1-az)(z-a)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Окончательно получим

$$I_1 = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

**Пример 23.2.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6 + \sqrt{35} \sin t} dt.$$

**Решение.** Сделаем в интеграле замену

$$\sin t = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = ie^{it} dt, \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} f(z) dz = \int_{|z|=1} \frac{-i dz}{z [6 + \sqrt{35} (z - 1/z) / (2i)]} = \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-i dz}{6z + \sqrt{35} z^2 / (2i) - \sqrt{35} / (2i)} = \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{12iz + \sqrt{35} z^2 - \sqrt{35}} = 4\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \end{aligned}$$

Найдем корни знаменателя

$$\sqrt{35} z^2 + 12iz - \sqrt{35} = 0.$$

Поскольку дискриминант  $D = -144 + 4 \cdot 35 = -4$ , то

$$z_1 = \frac{-12i + 2i}{2\sqrt{35}} = -5\frac{i}{\sqrt{35}},$$

$$z_2 = \frac{-12i - 2i}{2\sqrt{35}} = -7\frac{i}{\sqrt{35}}.$$

Точка  $z = z_2$  не попадает в круг  $|z| < 1$ . Точка  $z = z_1$  является простым полюсом функции  $f(z)$ . Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=-5i/\sqrt{35}} f(z) = \lim_{z \rightarrow -5i/\sqrt{35}} \frac{1}{\sqrt{35} \left( z + \frac{7i}{\sqrt{35}} \right)} = -\frac{i}{2}.$$

Окончательно получим

$$I = 4\pi i \left( -\frac{i}{2} \right) = 2\pi.$$

### 23.2. Несобственные контурные интегралы

В курсе математического анализа (см. также Приложение П1) было введено понятие несобственных интегралов от функции действительного переменного, содержащих либо особые точки на контуре (области) интегрирования, либо неограниченные контуры (области) интегрирования. Аналогичные понятия можно ввести для функции комплексного переменного и, более того, это можно сделать в более компактной форме.

Поскольку на комплексной плоскости бесконечно удаленная точка единственна, то оба типа интегралов можно объединить, дополнив в случае необходимости конечные особые точки аналитической функции  $f(z)$  на контуре  $\gamma$  бесконечно удаленной точкой. Ясно, что в силу аддитивности контурного интеграла (см. (11.6)) достаточно определить несобственный интеграл с особой точкой, расположенной в одном из концов контура, например в точке  $a$ , независимо от того, является  $a$  конечной или бесконечно удаленной точкой.

Несобственным интегралом от функции  $f(z)$  по контуру  $\gamma$  с особенностью в точке  $a$  называют

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz, \quad (23.3)$$

где  $\gamma_{\varepsilon}$  — часть контура  $\gamma$ , лежащая вне произвольной окрестности точки  $a$ , характеризуемой максимальным диаметром  $\varepsilon$ .

Если предел (23.3) существует и конечен, несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае – расходящимся. Так же как и для функций действительного переменного (см. формулу (П1.7)), интеграл (23.3) называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{\gamma} |f(z)| |dz| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} |f(z)| |dz|.$$

В тех случаях, когда точка  $a$  – внутренняя точка контура  $\gamma$ , его можно разбить на два:  $\bar{\gamma}$  и  $\tilde{\gamma}$  так, что  $\gamma = \bar{\gamma} + \tilde{\gamma}$ , а точка  $z = a$  является граничной для каждого контура. В результате несобственный интеграл можно представить в виде суммы

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}_{\varepsilon_1}} f(z) dz + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\tilde{\gamma}_{\varepsilon_2}} f(z) dz. \quad (23.4)$$



Рис. 37

Интеграл (23.4) будет сходящимся, если существуют оба предела, стоящие в правой части, и расходящимся, если хотя бы один из пределов не существует. Если интеграл (23.4) расходится, когда  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  стремятся к нулю независимо друг от друга, может оказаться, что сумма этих пределов конечна, когда  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  (см. рис. 37). В этом случае несобственный интеграл называют сходящимся в смысле главного значения (по Коши) и обозначают

$$\text{V.п.} \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\bar{\gamma}_{\varepsilon}} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_{\varepsilon}} f(z) dz \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz. \quad (23.5)$$

Здесь  $\gamma_{\varepsilon} = \bar{\gamma}_{\varepsilon} + \tilde{\gamma}_{\varepsilon}$  – часть контура  $\gamma$ , лежащая вне окружности  $|z - a| = \varepsilon$  (или  $|z| = 1/\varepsilon$ , если  $a = \infty$ ).

Из теоремы П1.2 очевидно, что значение сходящегося интеграла (23.3) совпадает с его главным значением (23.5).

Введение несобственных интегралов позволяет существенным образом расширить область применения теоремы 21.3 (основной теоремы о вычетах).

Пусть, как и в теореме 21.3,  $E$  – область, ограниченная кривой  $\gamma$  и  $z = a \in \gamma$ , обозначим через  $\gamma_{\rho}$  часть контура  $\gamma$ , лежащую вне круга  $|z - a| \leq \rho$  (или  $|z| \geq 1/\rho$ , если  $a = \infty$ ),



а через  $\bar{\gamma}_\rho$  – часть границы этого круга, принадлежащую области  $E$ , т.е.  $\gamma = \gamma_\rho + \bar{\gamma}_\rho$ . С помощью введенных обозначений сформулируем одно из обобщений теоремы 21.3.

**Теорема 23.1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в области  $E$  за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и одна из особых точек, например  $z_n$ , принадлежит контуру  $\gamma$ . Тогда, если

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\bar{\gamma}_\rho} f(z) dz \right| = 0, \quad (23.6)$$

то интеграл в смысле главного значения существует и

$$\text{V.p.} \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \text{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (23.7)$$

**Доказательство.** Если несобственный интеграл (23.7) существует, то, согласно (23.5),

$$\text{V.p.} \int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz. \quad (23.8)$$

С другой стороны, с учетом  $\gamma = \gamma_\rho + \bar{\gamma}_\rho$  и теоремы 21.3 можно записать

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz + \int_{\bar{\gamma}_\rho} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \text{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (23.9)$$

Предельный переход при  $\rho \rightarrow 0$  в формуле (23.9) с учетом (23.6) приводит к (23.7). Таким образом, теорема доказана.

Естественно, что если границе принадлежит  $m$  особых точек, удовлетворяющих условию (23.6), то суммирование в правой части (23.7) ведется до  $n - m$  вместо  $n - 1$ .

Аналогично теоремам П1.1, П1.2 рассмотрим требования к функции  $f(z)$ , необходимые для выполнения условия (23.6). Пусть

$$M(\rho) = \max_{z \in \bar{\gamma}_\rho} |f(z)|. \quad (23.10)$$

Тогда справедлива

**Лемма 23.1.** *Функция  $f(z)$  удовлетворяет условию (23.6), если*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) \bar{l}(\rho) = 0, \quad (23.11)$$

где  $\bar{l}(\rho)$  – длина контура  $\bar{\gamma}_\rho$ .

**Доказательство** непосредственно вытекает из теоремы об оценке интеграла. Действительно, согласно (23.6),

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{\bar{\gamma}_\rho} f(z) dz \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\bar{\gamma}_\rho} |f(z)| |dz| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} M(\rho) \bar{l}(\rho) = 0.$$

Для практических целей условия (23.11) можно расписать в зависимости от того, является особая точка  $a$  конечной или бесконечно удаленной. Так как для  $a \neq \infty$ ,  $\bar{l}(\rho) \leq 2\pi\rho$ , то из

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) = 0 \quad (23.12)$$

следует (23.11). В свою очередь, для  $a = \infty$ ,  $\bar{l}(\rho) \leq 2\pi/\rho$ , соответственно

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} M(\rho) = 0 \quad (23.13)$$

или, если обозначить  $1/\rho = R$ ,  $M(1/\rho) = \varepsilon(R) = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$ ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \varepsilon(R) = 0. \quad (23.14)$$

Отметим, что если подынтегральную функцию можно представить в виде  $f(z)e^{iaz}$ , то условие (23.14) можно заменить более мягким условием, которое определяет

**Лемма 23.2 (Жордана).** *Если функция  $f(z)$  в полуплоскости  $\text{Im } z \geq y_0$  (см. рис. 38) удовлетворяет условию*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0, \quad (23.15)$$

то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = 0, \quad (23.16)$$

если  $a > 0$  и  $\gamma_R$  – дуга окружности  $|z - iy_0| = R$ , лежащая в полуплоскости  $\text{Im } z \geq y_0$ .

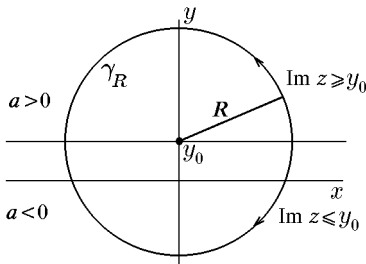


Рис. 38

**Доказательство.** Непосредственное вычисление интеграла (23.16) проведем заменой  $z = Re^{i\varphi} + iy_0$ :

$$\int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz = \int_0^{\pi} e^{ia(Re^{i\varphi} + iy_0)} f(Re^{i\varphi} + iy_0) Rie^{i\varphi} d\varphi. \quad (23.17)$$

Оценка интеграла (23.17) по модулю дает

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma_R} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \\ & \leq \int_0^{\pi} \left| e^{ia[R \cos \varphi + i(R \sin \varphi + y_0)]} \right| |f(Re^{i\varphi} + iy_0)| R d\varphi \leq \\ & \leq R\varepsilon(R) e^{-ay_0} \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = 2R\varepsilon(R) e^{-ay_0} \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi, \quad (23.18) \end{aligned}$$

поскольку функция  $\sin \varphi$  симметрична относительно  $\varphi = \pi/2$ .

В силу очевидного на  $[0, \pi/2]$  соотношения  $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$  оценку (23.18) можно записать

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} e^{iaz} f(z) dz \right| & \leq 2R\varepsilon(R) e^{-ay_0} \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi} d\varphi = \\ & = \frac{\pi}{a} \varepsilon(R) e^{-ay_0} (1 - e^{-aR}). \quad (23.19) \end{aligned}$$

Если  $a > 0$ , то предельный переход в (23.19) при  $R \rightarrow \infty$  приводит к утверждению (23.16), что и требовалось доказать.

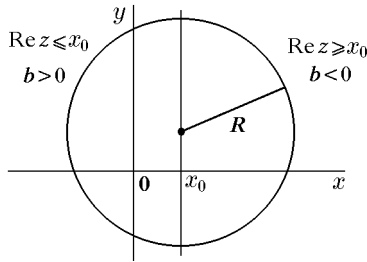


Рис. 39

При повороте системы координат из леммы Жордана нетрудно получить очевидные следствия.

**Следствие 23.2.1.** Пусть  $f(z)$  удовлетворяет условиям леммы Жордана в полуплоскости  $\text{Im } z \leq y_0$ . Тогда формула (23.15) остается справедливой, если  $a < 0$  и  $\gamma$  — дуга окружности  $|z - iy_0| = R$ , лежащая в полуплоскости  $\text{Im } z \leq y_0$  (см. рис. 38).

**Следствие 23.2.2.** Пусть  $a = -ib$ . Формула (23.15) в этом случае преобразуется к виду

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{bz} f(z) dz = 0 \quad (23.20)$$

и остается справедливой, если функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям леммы Жордана:

1. в полуплоскости  $\text{Re } z \geq x_0$ , причем  $b < 0$  и  $\gamma_R$  — дуга полуокружности  $|z - x_0| = R$ , расположенная в этой полуплоскости;
2. в полуплоскости  $\text{Re } z \leq x_0$ , причем  $b > 0$  и  $\gamma_R$  — дуга полуокружности  $|z - x_0| = R$ , расположенная в этой полуплоскости (см. рис. 39).

### 23.3. Несобственные интегралы от дробно-рациональных функций

Рассмотрим интегралы вида

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx, \quad (23.21)$$

где  $\mathcal{R}(x)$  – дробно-рациональная функция. Схему вычисления таких интегралов сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 23.2.** Пусть функция  $\mathcal{R}(z)$ , заданная на действительной оси  $]-\infty, \infty[$ , может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , не лежащих на действительной оси. Тогда, если существуют  $M > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $R > 0$  такие, что

$$|\mathcal{R}(z)| \leq \frac{M}{R^{1+\varepsilon}}, \quad \text{Im } z \geq 0, \quad |z| > R. \quad (23.22)$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \sum_{z=z_k}^N \text{Res } \mathcal{R}(z), \quad (23.23)$$

где  $z_k$  – особые точки функции  $\mathcal{R}(z)$  в верхней полуплоскости.

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{R}(z)$  – аналитическое продолжение функции  $\mathcal{R}(x)$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ . Рассмотрим замкнутый контур  $\Gamma$ , состоящий из кривой  $\gamma$  – лежащей в верхней полуплоскости части окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат и диаметра этой окружности, являющегося отрезком оси  $Ox$  (см. рис. 40). Выберем радиус  $R$  таким, чтобы внутри контура  $\Gamma$  лежали все особые точки функции  $\mathcal{R}(z)$ , находящиеся в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$ , т.е. чтобы выполнялось неравенство (23.22). Согласно основной теореме теории вычетов, имеем

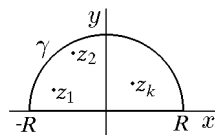


Рис. 40

$$\oint_{\Gamma} \mathcal{R}(z) dz = \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx + \int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{z=z_k}^N \text{Res } \mathcal{R}(z).$$

Согласно четвертому свойству интегралов от функции комплексного переменного  $\mathcal{R}(z)$  по кривой  $\gamma$

$$J = \left| \int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |\mathcal{R}(z)| |dz| \leq \frac{\pi M}{R^{\varepsilon+1}} R.$$

Здесь мы учли, что  $|dz| = R d\varphi$  на контуре  $\gamma$  и  $\varphi \in [0, \pi]$ .  
Перейдя в последнем равенстве к пределу  $R \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz = 0.$$

Приняв во внимание, что в силу (23.22)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \mathcal{R}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx,$$

в пределе  $R \rightarrow \infty$  получим

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} \mathcal{R}(z),$$

что и требовалось доказать.

**Пример 23.3.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Решение.** Нетрудно заметить, что аналитическое продолжение подынтегральной функции удовлетворяет условиям теоремы 23.2. С одной стороны, для любого  $R > 0$  существует  $M > 0$  такое, что для всех  $|z| > R$  справедливо

$$\left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

С другой стороны, представление

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

говорит о том, что функция  $f(z)$  имеет два простых полюса:  $z_1 = i$  и  $z_2 = -i$ , не лежащих на действительной оси. Полюс  $z_1 = i$  принадлежит верхней полуплоскости. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z).$$

Для вычета функции  $f(z)$  в простом полюсе  $z_1 = i$  получим

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{1+z^2} = \frac{1}{2i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi,$$

что совпадает с результатом, известным из курса математического анализа.

**Пример 23.4.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}.$$

**Решение.** Аналитическое продолжение

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 10z^2 + 9}$$

подынтегральной функции удовлетворяет условиям теоремы 23.2. Действительно, для любого  $R > 0$  существует  $M > 0$  такое, что для всех  $|z| > R$  справедливо

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{z^4 + 10z^2 + 9} \right| \leq \frac{M}{|z|^4}.$$

Биквадратное уравнение  $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$  имеет корни

$$z_{1,2} = \pm i, \quad z_{3,4} = \pm 3i,$$

которые не лежат на вещественной оси и являются простыми полюсами функции  $f(z)$ . Следовательно, функцию  $f(z)$  можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}.$$

Найдем вычеты функции  $f(z)$  в полюсах  $z_1 = i$ ,  $z_3 = 3i$ , лежащих в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} f(z)(z-i) = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)} = \frac{1}{16i} = -\frac{i}{16}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} f(z)(z-3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z+3i)} = \frac{i}{48}.$$

Окончательно получим

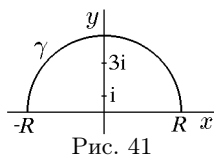


Рис. 41

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4 + 10z^2 + 9} = \\ &= 2\pi i [\operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname{Res}_{z=3i} f(z)] = \\ &= 2\pi i \left[ \frac{i}{48} - \frac{i}{16} \right] = \frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

где контур  $\Gamma$  выбирается аналогично тому, как это сделано в предыдущем примере (см. рис. 41).

### 23.4. Несобственные интегралы от осциллирующих функций

Рассмотрим интегралы вида

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx, \quad a > 0. \quad (23.24)$$

Схему вычисления таких интегралов удобно сформулировать в виде следующей теоремы.



**Теорема 23.3.** Пусть функция  $f(x)$ , заданная на всей действительной оси  $-\infty < x < \infty$ , может быть аналитически продолжена на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z \geq 0$  за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ), не лежащих на действительной оси, и удовлетворяет в этой полуплоскости условиям леммы Жордана. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{z=z_k} e^{iaz} f(z), \quad (23.25)$$

где  $z_k$  – особые точки функции  $f(z)$  в верхней полуплоскости.

**Доказательство** с учетом леммы Жордана полностью аналогично доказательству теоремы 23.2.

**Пример 23.5.** Вычислить интегралы

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a > 0$ .

**Решение.** 1. Из формулы Эйлера следует, что

$$I_1 = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx,$$

где аналитическое продолжение подынтегрального выражения удовлетворяет условию теоремы 23.3 и в верхней полуплоскости имеет только одну особую точку  $z_0 = ib$  – простой полюс, так как

$$\lim_{z \rightarrow ib} \frac{z - ib}{z^2 + b^2} = \frac{1}{2ib}.$$

Следовательно,

$$I_1 = \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx = \text{Re} \left\{ 2\pi i \text{Res}_{z=z_0} f(z) e^{i\alpha z} \right\}.$$

Поскольку

$$\operatorname{Res}_{z=ib} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + b^2} = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{e^{i\alpha z}(z - ib)}{z^2 + b^2} = \frac{e^{i^2 \alpha b}}{2ib},$$

то

$$I_1 = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{e^{-\alpha b}}{2ib} \right\} = \frac{\pi e^{-\alpha b}}{b}.$$

Окончательно получим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-\alpha b}}{b}, \quad \alpha > 0, \quad b > 0.$$

2. Аналогично с учетом четности подынтегральной функции

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2} \right] = \operatorname{Im} i\pi \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z e^{iz}}{z + ia} = \frac{\pi}{2} e^{-a}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

### 23.5. Интегралы Бромвича–Вагнера

Рассмотрим интегралы вида

$$I_4 = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{bz} f(z) dz, \quad b > 0. \quad (23.26)$$

◇ Контур интегрирования, соответствующий прямой

$$\operatorname{Re} z = \alpha, \quad -\infty < \operatorname{Im} z < \infty,$$

называют контуром Бромвича, а интеграл (23.26), в котором все особые точки функции  $f(z)$  расположены слева от контура

Бромвича и  $\alpha > 0$ ,  $b > 0$ , – интегралом Бромвича–Вагнера. Если все особые точки функции  $f(z)$  лежат левее оси  $Oy$ , то за контур Бромвича принимают ось  $Oy$ .

Отметим, что интегралы вида (23.26) имеют важное значение в приложениях, использующих интегральные преобразования (Лапласа и др.). Схему вычисления таких интегралов удобно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 23.4.** Если функция  $f(z)$  допускает аналитическое продолжение с прямой  $\operatorname{Re} z = \alpha$  на полуплоскость  $\operatorname{Re} z \leq \alpha$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , не лежащих на прямой  $\operatorname{Re} z = \alpha$ , и удовлетворяет в этой полуплоскости условиям леммы Жордана, то при  $b > 0$

$$I_A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} f(z) e^{bz} dz = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) e^{bz}, \quad (23.27)$$

где  $z_k$  – особые точки функции  $f(z)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} z < \alpha$ .

**Доказательство.** Рассмотрим контур  $\gamma_R$ , представляющий собой окружность радиуса  $R$  с центром, лежащим на прямой  $\operatorname{Re} z = \alpha$ , содержащую внутри себя все особые точки  $z_k$  функции  $f(z)$  (рис. 42). Обозначим через  $\gamma_R^+$  левую полуокружность  $\gamma_R$  и через  $\delta_R$  диаметр окружности  $\gamma_R$ , совпадающий с прямой  $\operatorname{Re} z = \alpha$ . Выберем положительное направление обхода контура  $\gamma_R^+ + \delta_R$  и рассмотрим интеграл

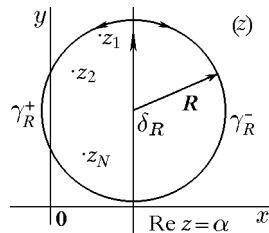


Рис. 42

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\delta_R} f(z) e^{bz} dz + \int_{\gamma_R^+} f(z) e^{bz} dz \right). \quad (23.28)$$

Согласно основной теореме теории вычетов (теорема 21.3), имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\delta_R} f(z) e^{bz} dz + \int_{\gamma_R^+} f(z) e^{bz} dz \right) = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) e^{bz}. \quad (23.29)$$

Из (23.29) предельным переходом  $R \rightarrow \infty$  с учетом следствия 23.2.2 леммы Жордана приходим к формуле (23.28), что и требовалось доказать.

**Пример 23.6.** Вычислить интегралы

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z} dz, \quad \alpha > 0; \quad (23.30)$$

$$I(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{(t-\tau)z}}{z} dz; \quad (23.31)$$

$$I(t, \tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} \frac{e^{-z\tau_1} - e^{-z\tau_2}}{z} dz \quad (23.32)$$

при  $\tau_1 < \tau_2$ .

**Решение.** а) При  $t > 0$ , согласно (23.27), имеем

$$I(t) = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{zt}}{z} = 1, \quad t > 0. \quad (23.33)$$

При  $t < 0$ , выбрав замкнутый контур в виде  $\delta_R + \gamma_R^-$  (рис. 42) и используя следствие 23.2.2 леммы Жордана и свойство аналитичности функции  $e^{zt}/z$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > \alpha$ , имеем

$$\int_{\delta_R} \frac{e^{tz}}{z} dz + \int_{\gamma_R^-} \frac{e^{tz}}{z} dz = 0,$$

откуда при  $R \rightarrow \infty$  получим

$$I(t) = 0, \quad t < 0. \quad (23.34)$$

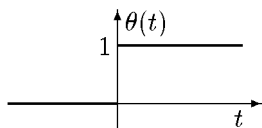


Рис. 43

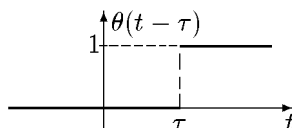


Рис. 44

Таким образом, формулы (23.33) и (23.34) задают интегральное представление единичной функции  $\theta(t)$  (рис. 43)

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z} dz = \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (23.35)$$

б) Из (23.35) непосредственно следует (рис. 44)

$$I(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{(t-\tau)z}}{z} dz = \theta(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t > \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}. \quad (23.36)$$

◇ Формула (23.36) соответствует теореме запаздывания в операционном исчислении (см. разд. «Свойства преобразования Лапласа»).

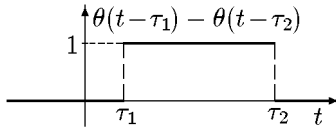


Рис. 45

в) Из (23.36) непосредственно следует (рис. 45)

$$\begin{aligned} I(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} \frac{e^{-z\tau_1} - e^{-z\tau_2}}{z} dz = \\ &= \theta(t - \tau_1) - \theta(t - \tau_2) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1; \\ 1, & \tau_1 < t < \tau_2; \\ 0, & \tau_2 < t. \end{cases} \end{aligned} \quad (23.37)$$

Функцию  $I(t, \tau_1, \tau_2)$  называют характеристической функцией отрезка  $[\tau_1, \tau_2]$  и обозначают  $h(t, \tau_1, \tau_2)$ .

**Пример 23.7.** Вычислить

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2 + 1} dz, \quad \alpha > 0.$$

**Решение.** Аналогично предыдущему примеру

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+1} dz = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{tz}}{z^2+1} + \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{e^{tz}}{z^2+1} = \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} = \sin t, \quad t > 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{array} \right\} = \\
 &= \theta(t) \sin t.
 \end{aligned}$$

### 23.6. Несобственные интегралы типа интегралов Эйлера

Рассмотрим интегралы вида

$$I_5 = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx, \quad (23.38)$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) (\ln x)^m dx, \quad (23.39)$$

$$I_7 = \int_0^1 \left( \frac{x}{1-x} \right)^{\alpha} \mathcal{R}(x) dx, \quad (23.40)$$

где  $\mathcal{R}(x)$  – рациональная функция, а  $\alpha \in ]0, 1[$ . Ниже будет показано, что интегралы  $I_6, I_7$  сводятся к интегралу  $I_5$ , который, заметим, является преобразованием Меллина функции  $\mathcal{R}(x)$ .

**Теорема 23.5.** Пусть функция  $\mathcal{R}(x)$ , заданная на действительной полуоси  $[0, \infty[$ , допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, за исключением конечного числа полюсов  $z_k, k = \overline{1, N}$ , функции  $\mathcal{R}(z)$ , не лежащих на указанной полуоси. Тогда, если интеграл (23.38) существует, то он равен

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z)]. \quad (23.41)$$

**Доказательство.** Напомним, что интеграл (23.38) сходится, если

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha |\mathcal{R}(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^\alpha |\mathcal{R}(x)| = 0. \quad (23.42)$$

В силу условий теоремы подынтегральная функция (23.38) допускает соответствующее аналитическое продолжение в виде  $x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) \rightarrow z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z)$ . В этом случае условия (23.42) в комплексной плоскости принимают вид

$$\lim_{z \rightarrow 0} |z|^\alpha |\mathcal{R}(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^\alpha |\mathcal{R}(z)| = 0. \quad (23.43)$$

Не ограничивая общности задачи, будем считать, что точка  $z = 0$  не является ни нулем, ни полюсом функции  $\mathcal{R}(z)$ . В противном случае, выделив из  $\mathcal{R}(z)$  множитель  $z^n$  ( $n$  — целое число), мы получим подынтегральную функцию вида  $z^{\alpha+n} \mathcal{R}_1(z)$ , где  $\mathcal{R}_1(0) \neq 0; \infty$ . Отсюда с помощью соответствующих переобозначений приходим к функции, удовлетворяющей высказанному предположению.

С другой стороны, для рациональной функции  $\mathcal{R}(z)$  справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\mathcal{R}(z) \sim \frac{A}{z^k}, \quad z \rightarrow \infty, \quad k - \text{целое}. \quad (23.44)$$

Такое поведение функции  $\mathcal{R}(z)$  позволяет удовлетворить условиям (23.43) только для  $\alpha > 0$  и  $k - \alpha > 0$ , т.е.

$$0 < \alpha < k. \quad (23.45)$$

Далее в комплексной плоскости проведем разрез вдоль действительной полуоси  $[0, \infty]$  и рассмотрим контур  $\gamma$  (рис. 46). Он состоит из отрезка  $[\rho, R]$ , проходимого вдоль верхнего берега (в.б.) разреза, затем в положительном направлении вдоль окружности  $\gamma_R$  радиуса  $R$  с центром в начале координат ( $|z| = R$ ), затем вдоль нижнего берега (н.б.) разреза по отрезку  $[R, \rho]$  и, наконец, в отрицательном направлении вдоль окружности  $\gamma_\rho$  радиуса  $\rho$  с центром в начале координат ( $|z| = \rho$ ). Контур  $\gamma$  замкнут и не охватывает начало координат. Подобный

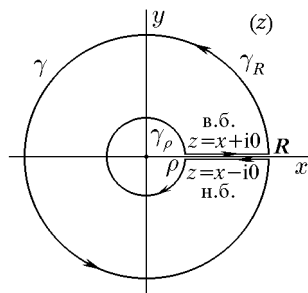


Рис. 46

контур необходим затем, что функция  $z^{\alpha-1}$  неоднозначна в области, содержащей начало координат ( $z = 0$  – точка разветвления), а, следовательно, к контуру, охватывающему точку  $z = 0$ , не применима теорема о вычетах.

Разрез и выбранная конфигурация контура  $\gamma$  позволяют выделить однозначную ветвь функции  $z^{\alpha-1}$ , если задать значение аргумента  $z$  в какой-либо точке плоскости. Будем считать, что на верхнем берегу разреза  $\arg z = 0$ . При обходе по замкнутому контуру  $\gamma$  вокруг начала координат мы с верхнего берега разреза попадаем на нижний, при этом аргумент  $z$  получает дополнительное слагаемое  $2\pi$ , и, следовательно, на нижнем берегу разреза  $\arg z = 2\pi$ .

Обозначив  $|z| = r$ , будем иметь на верхнем берегу:  $z = x + i0$

$$r = x, \quad z = x, \quad z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}; \quad (23.46)$$

на нижнем берегу:  $z = x - i0$

$$r = x, \quad z = xe^{i2\pi}, \quad z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}; \quad (23.47)$$

на  $\gamma_R$ :  $|z| = r = R, \quad z = Re^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi$ ;

на  $\gamma_\rho$ :  $|z| = r = \rho, \quad z = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi$ .

Рациональная функция  $\mathcal{R}(z)$ , содержащая только целые степени, как на верхнем, так и на нижнем берегах имеет вид  $\mathcal{R}(x)$ .

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz,$$

который с учетом (23.46), (23.47) и согласно основной теореме о вычетах 21.3 можно записать

$$\begin{aligned} & \int_{\rho}^R x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx + \int_{\gamma_R} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz + \int_R^{\rho} x^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} \mathcal{R}(x) dx + \\ & + \int_{\gamma_\rho} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz]. \quad (23.48) \end{aligned}$$

Предельный переход  $\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$  в (23.48) дает

$$(1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz +$$



$$+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz]. \quad (23.49)$$

Покажем, что оба предела в левой части (23.49) равны нулю. Действительно, предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz \quad (23.50)$$

равен нулю, если, согласно формуле (23.12), обращается в нуль предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) \quad (23.51)$$

где

$$M(\rho) = \max_{z \in \gamma_\rho} [z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z)] = \rho^{\alpha-1} R(\rho). \quad (23.52)$$

Подставив (23.52) в (23.51), находим с учетом (23.43), (23.45)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^\alpha \mathcal{R}(\rho) = 0,$$

откуда и следует равенство нулю предела (23.50).

Утверждение, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} z^{\alpha-1} \mathcal{R}(z) dz = 0, \quad (23.53)$$

доказывается аналогично с использованием формулы (23.14).

Таким образом, из (23.49) с учетом (23.50), (23.53) следует (23.41), что и требовалось доказать.

Перейдем к рассмотрению интегралов (23.39), (23.40). Легко заметить, что интегралы (23.39) можно получить из (23.38), продифференцировав последний по параметру  $\alpha$ . Действительно,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) (\ln x)^m dx = \frac{d^m}{d\alpha^m} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx. \quad (23.54)$$

В свою очередь, интеграл (23.40) можно свести к (23.38) заменой

$$\frac{x}{1-x} = y. \quad (23.55)$$

Действительно, после замены (23.55) интеграл (23.40) принимает вид

$$\int_0^{\infty} y^{\alpha} \bar{\mathcal{R}}(y) dy, \quad (23.56)$$

где

$$\bar{\mathcal{R}}(y) = (1+y)^{-2} \mathcal{R}\left(\frac{y}{1+y}\right).$$

Поскольку для функции  $\bar{\mathcal{R}}(y)$  справедлива асимптотическая оценка

$$\bar{\mathcal{R}}(y) \sim \frac{A}{y^2}, \quad y \rightarrow \infty,$$

то интегралы (23.56), а соответственно, и (23.40) будут сходиться, согласно (23.45), только для  $0 < \alpha + 1 < 2$  или  $-1 < \alpha < 1$ .

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 23.8.** Вычислить интеграл Эйлера

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx. \quad (23.57)$$

**Решение.** Прежде всего, отметим, что для функции  $\mathcal{R}(z) = 1/(1+z)$  справедлива асимптотическая оценка

$$\frac{1}{1+z} \sim \frac{A}{z}, \quad z \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, согласно (23.45), интеграл (23.57) будет сходиться при  $0 < \alpha < 1$ . С учетом того, что функция  $1/(1+z)$  имеет простой полюс в точке  $z = -1 = e^{i\pi}$ , по формуле (23.41) находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi}} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} = \\ &= \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha})} \lim_{z=e^{i\pi}} z^{\alpha-1} = \\ &= -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})/2i} [e^{i\pi}]^{\alpha-1} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}. \quad (23.58)$$

**Пример 23.9.** Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx. \quad (23.59)$$

**Решение.** Заменой  $e^x = y$  интеграл приводится к виду

$$I = \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{1+y} dy,$$

откуда, согласно (23.58),

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}.$$

**Пример 23.10.** Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx. \quad (23.60)$$

**Решение.** Для аналитического продолжения подынтегральной функции

$$\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2} \quad (23.61)$$

условие сходимости (23.45) выполняется при  $0 < \alpha < 2$ . Функция (23.61) имеет в точке  $z = -1$  единственный полюс второго порядка. Тогда по формуле (23.41) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \operatorname{Res}_{z=e^{i\pi}} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2}. \quad (23.62)$$

Вычислим вычет в правой части (23.62):

$$\operatorname{Res}_{z=e^{i\pi}} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^2} = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} \frac{d}{dz} (z^{\alpha-1}) =$$

$$= (\alpha - 1) \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} z^{\alpha-2} = (\alpha - 1)e^{i\pi\alpha}. \quad (23.63)$$

Подставив (23.63) в (23.62), найдем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha}. \quad (23.64)$$

Из (23.64), например, для  $\alpha = 1/2$  получим

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 23.11.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx. \quad (23.65)$$

**Решение.** Согласно соотношению (23.54), исходный интеграл можно записать в виде

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx = \frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^2} \Big|_{\alpha=1/2}. \quad (23.66)$$

Воспользовавшись соотношением (23.64), выражение (23.66) перепишем как

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2} dx &= \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\pi(1-\alpha)}{\sin \pi\alpha} \right) \Big|_{\alpha=1/2} = \\ &= \frac{\pi}{\sin^2 \pi\alpha} [\pi(\alpha-1) \cos \pi\alpha - \sin \pi\alpha] \Big|_{\alpha=1/2} = -\pi. \end{aligned}$$

**Пример 23.12.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(2+x)^2}. \quad (23.67)$$

**Решение.** Сравнив (23.67) с (23.40), найдем  $\alpha = -1/2$ . Отсюда следует, что интеграл сходится, так как  $\alpha$  удовлетворяет неравенству  $-1 < \alpha < 1$ . Заменой переменной (23.55) исходный интеграл сводится к виду

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}(2+3y)^2} = \frac{1}{9} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}(2/3+y)^2}. \quad (23.68)$$

Из (23.68), согласно (23.41), найдем

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{9(1-e^{i\pi})} \operatorname{Res}_{z=(2e^{i\pi})/3} \left[ \frac{1}{\sqrt{z}(2/3+z)^2} \right] = \\ &= \frac{\pi i}{9} \lim_{z \rightarrow (2e^{i\pi})/3} \frac{d}{dz} (z^{-1/2}) = -\frac{\pi i}{18} \left( \frac{2}{3} e^{i\pi} \right)^{-3/2} = \frac{\pi}{4\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

**Пример 23.13.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+\sqrt[3]{x}} dx.$$

**Решение.** Интеграл сходится, если  $0 < \beta < 1/3$ . Замена переменной  $x = y^3$  приводит интеграл к виду (23.38)

$$I = 3 \int_0^{\infty} \frac{y^{3\beta-1}}{1+y} dy.$$

Положив в (23.58)  $\alpha = 3\beta$ , получим

$$I = \frac{3\pi}{\sin 3\pi\beta}.$$

◇ До сих пор в интегралах (23.38)–(23.40) мы рассматривали нецелые  $\alpha$ . В случае целых  $\alpha$  формула (23.41) перестает «работать», так как ее знаменатель обращается в нуль. Не излагая общих методов и приемов вычисления интегралов такого типа, мы их проиллюстрируем на ряде конкретных примеров. Начнем с интегралов вида (23.40).

**Пример 23.14.** Вычислить

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx, \quad a > 0. \quad (23.69)$$

**Решение.** Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz, \quad (23.70)$$

где контур  $\gamma$  изображен на рис. 47.

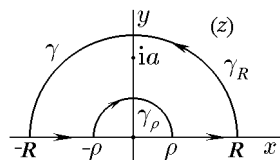


Рис. 47

Такой контур позволяет обойти точку  $z = 0$ , являющуюся логарифмической точкой разветвления, и выделить однозначную ветвь логарифма, принимающего действительные значения для  $z = x > 0$ . Внутри контура  $\gamma$  расположена точка  $z = ia$ , являющаяся простым полюсом подынтегральной функции.

Используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3, интеграл (23.70) можно записать в виде

Используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3, интеграл (23.70) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\gamma_{\rho}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = \\ = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{\ln z}{z^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (23.71)$$

С учетом того, что

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \int_{\rho}^R \frac{\ln(-x)}{x^2 + a^2} dx = \int_{\rho}^R \frac{\ln x + i\pi}{x^2 + a^2} dx,$$

предельный переход  $\rho \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  в (23.71) дает

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_{\gamma_{\rho}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \\ + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = \frac{\pi}{a} \left( \ln a + i\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (23.72)$$

Следуя формуле (23.12), вычислим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho),$$

где

$$M(\rho) = \max_{z \in \gamma_\rho} \left| \frac{\ln z}{z^2 + a^2} \right| \leq \frac{|\ln \rho| + \pi}{a^2 - \rho^2}, \quad \rho < a.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho M(\rho) \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho(|\ln \rho| + \pi)}{a^2 - \rho^2} = 0,$$

а это, согласно лемме 23.1, означает, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = 0. \quad (23.73)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = 0. \quad (23.74)$$

Подставив (23.73) и (23.74) в (23.72), получим

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi \ln a}{a} + i \frac{\pi^2}{2a}. \quad (23.75)$$

Сравнив действительные и мнимые части (23.75), найдем

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}. \quad (23.76)$$

Отметим, что для вычисления интегралов общего вида

$$\int_0^\infty (\ln x)^m \mathcal{R}(x) dx,$$

где  $m$  – целое, следует рассмотреть контурный интеграл

$$\int_\gamma (\ln z)^{m+1} \mathcal{R}(z) dz, \quad (23.77)$$

контур  $\gamma$  которого изображен на рис. 46. Правда, если  $\mathcal{R}(x)$  – четная функция, вместо (23.77) можно рассматривать более простой интеграл

$$\int_{\gamma} (\ln z)^m \mathcal{R}(z) dz$$

с более простым контуром  $\gamma$ , изображенным на рис. 47.

Вычисление интегралов (23.38) с целым  $\alpha$  проиллюстрируем следующим примером:

**Пример 23.15.** Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}. \quad (23.78)$$

**Решение.** Рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{\ln z}{1+z^3} dz, \quad (23.79)$$

где контур  $\gamma$  изображен на рис. 46. Такой контур позволяет обойти точку  $z = 0$ , являющуюся логарифмической точкой разветвления, и выделить однозначную ветвь логарифма, принимающего действительные значения на верхнем берегу  $z = x$  и значения  $z = xe^{i2\pi}$  на нижнем берегу. Внутри контура  $\gamma$  расположены три особые точки  $z_1 = e^{i\pi/3}$ ,  $z_2 = e^{i\pi}$  и  $z_3 = e^{i5\pi/3}$ , являющиеся простыми полюсами подынтегральной функции (23.79).

Используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3, интеграл (23.79) можно записать

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{1+x^3} dx + \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz + \int_R^{\rho} \frac{\ln x}{1+x^3} dx + \int_{\gamma_{\rho}} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^3 \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{\ln z}{1+z^3}. \end{aligned} \quad (23.80)$$

Учтем, что на нижнем берегу

$$\int_R^{\rho} \frac{\ln x}{1+x^3} dx = - \int_{\rho}^R \frac{\ln x + 2\pi i}{1+x^3} dx.$$



Тогда предельный переход  $\rho \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  в (23.80) дает

$$\begin{aligned}
 & -2i\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{1+z^3} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \\
 & = 2\pi i \left[ \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/3}} \frac{\ln z}{(e^{i\pi/3} - e^{i\pi})(e^{i\pi/3} - e^{i5\pi/3})} + \right. \\
 & \quad + \lim_{z \rightarrow e^{i\pi}} \frac{\ln z}{(e^{i\pi} - e^{i\pi/3})(e^{i\pi} - e^{i5\pi/3})} + \\
 & \quad \left. + \lim_{z \rightarrow e^{i5\pi/3}} \frac{\ln z}{(e^{i5\pi/3} - e^{i\pi/3})(e^{i5\pi/3} - e^{i\pi})} \right]. \quad (23.81)
 \end{aligned}$$

С помощью леммы 23.1 легко показать (см. предыдущие примеры), что

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\ln z}{1+z^3} dz = 0. \quad (23.82)$$

Тогда формула (23.81) примет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = -\frac{i\pi}{3} \left[ \frac{2}{\sqrt{3}i(3+\sqrt{3}i)} - \frac{10}{\sqrt{3}i(3-\sqrt{3}i)} + 1 \right] = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Отметим, что интеграл (23.78) можно было вычислить проще с помощью замены переменной  $x^3 = y$ . Тогда, согласно (23.58),

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{y^{1/3-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{3 \sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

◇ Следует отметить, что для интегралов (23.38) от четных функций с целым  $\alpha$  можно использовать формулу (23.23), так как в этом случае

$$\int_0^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx.$$

В заключение рассмотрим интегралы типа (23.38) с комплексным показателем.

**Пример 23.16.** Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{a^2 + x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0. \quad (23.83)$$

**Решение.** Интегралы (23.83) можно рассматривать как действительную и мнимую части интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx.$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$\int_{\gamma} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz, \quad (23.84)$$

где  $\gamma$  – контур, изображенный на рис. 47 и содержащий внутри себя точку  $z = ia$ , являющуюся простым полюсом. Выберем однозначную ветвь логарифма так, чтобы  $\ln z = \ln x$  для  $x > 0$  и  $\ln z = \ln x + i\pi$  для  $x < 0$  на действительной оси  $z = x$ . Как и в предыдущих примерах, распишем (23.84)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx + \\ + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (23.85)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{i(\ln x + i\pi)}}{a^2 + x^2} dx, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{e^{i \ln z}}{a^2 + z^2} dz = 0, \end{aligned}$$

формулу (23.85) можно переписать

$$(1 + e^{-\pi}) \int_0^{\infty} \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{i(\ln a + i\pi/2)},$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{i \ln x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2} e^{i \ln a}}{a(1 + e^{-\pi})} = \frac{\pi e^{i \ln a}}{2a \operatorname{ch} \pi/2}. \quad (23.86)$$

Приравняв действительные и мнимые части (23.86), найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{a^2 + x^2} dx &= \frac{\pi \cos(\ln a)}{2a \operatorname{ch} \pi/2}, \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin(\ln x)}{a^2 + x^2} dx &= \frac{\pi \sin(\ln a)}{2a \operatorname{ch} \pi/2}. \end{aligned} \quad (23.87)$$

### 23.7. Другие несобственные интегралы

Здесь мы рассмотрим обобщение предыдущих теорем на интегралы, содержащие конечные особые точки на контуре интегрирования.

**Теорема 23.6.** Пусть функция  $\mathcal{R}(x)$  удовлетворяет требованиям теоремы 23.2 при условии, что часть простых полюсов  $N_1$  из общего числа  $N$  особых точек лежит на действительной оси  $\gamma_x$ . Тогда

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \left[ \sum_{k=1}^{N-N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \gamma_x} \mathcal{R}(z) \right]. \quad (23.88)$$

**Доказательство.** Если мы докажем равенство (23.88) для  $N_1 = 1$ , то доказательство для произвольного  $N_1 \leq N$  очевидно. Итак, для функции  $\mathcal{R}(z)$ , имеющей на действительной оси полюс  $z = x_1$ , рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma} \mathcal{R}(z) dz,$$

по контуру  $\gamma$ , изображенному на рис. 48.

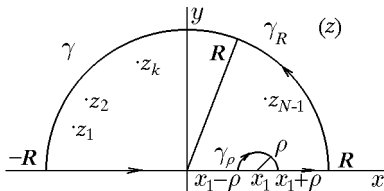


Рис. 48

Радиусы полуокружностей  $\gamma_\rho$  и  $\gamma_R$  выбраны так, чтобы все особые точки, не принадлежащие действительной оси, находились внутри контура  $\gamma$ . Используя свойство аддитивности контурного интеграла и основную теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z) dz + \int_{-R}^{x_1 - \rho} \mathcal{R}(x) dx + \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz + \int_{x_1 + \rho}^R \mathcal{R}(x) dx = \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma} \mathcal{R}(z). \end{aligned} \quad (23.89)$$

Предельный переход  $\rho \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  в (23.89) дает

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z) dz + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz + \int_{-\infty}^{x_1} \mathcal{R}(x) dx + \int_{x_1}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = \\ = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z). \end{aligned} \quad (23.90)$$

При доказательстве теоремы 23.2, было показано, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \mathcal{R}(z) dz = 0,$$

тогда (23.90) можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z). \quad (23.91)$$

Рассмотрим более подробно интеграл

$$\int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz. \quad (23.92)$$

Так как точка  $z = x_1$  является простым полюсом, то в кольце  $0 < |z - x_1| < \rho_1$ , не содержащем других особых точек, функцию  $\mathcal{R}(z)$  можно разложить в равномерно сходящийся ряд Лорана, если  $\rho_1 > \rho$  и сколь угодно близко к  $\rho$ . Тогда интеграл (23.92) можно записать

$$\int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz = C_{-1} \int_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - x_1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_{\gamma_\rho} (z - x_1)^k dz.$$

Положив  $z - x_1 = \rho e^{i\varphi}$ , получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz &= iC_{-1} \int_{\pi}^0 d\varphi + \sum_{k=0}^{\infty} C_k i \int_{\pi}^0 \rho^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \\ &= -i\pi C_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{\rho^{k+1}}{k+1} [1 - e^{i(k+1)\pi}], \end{aligned}$$

предельный переход в котором дает

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz = -i\pi C_{-1}$$

или

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \mathcal{R}(z) dz = -i\pi \operatorname{Res}_{z=x_1} \mathcal{R}(z) \quad (23.93)$$

с учетом того, что

$$C_{-1} = \operatorname{Res}_{z=x_1} \mathcal{R}(z).$$

Подстановка (23.93) в (23.91) приводит к

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \left[ \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma} \mathcal{R}(z) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{z=x_1} \mathcal{R}(z) \right]. \quad (23.94)$$

В случае произвольного числа полюсов  $N_1$ , лежащих на действительной оси, формула (23.94) очевидным образом переходит в (23.88).

**Теорема 23.7.** Пусть функция  $\mathcal{R}(x)$  удовлетворяет требованиям теоремы 23.3 при условии, что часть простых полюсов  $N_1$  из общего числа особых точек  $N$  лежит на действительной оси  $\gamma_x$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} \mathcal{R}(x) dx &= 2\pi i \left[ \sum_{k=1}^{N-N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z) e^{iaz} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \gamma_x} \mathcal{R}(z) e^{iaz} \right]. \end{aligned} \quad (23.95)$$

**Доказательство** аналогично доказательству предыдущей теоремы с необходимыми извлечениями из доказательства теоремы 23.2.

**Теорема 23.8.** Пусть функция  $\mathcal{R}(x)$  удовлетворяет требованиям теоремы 23.5 при условии, что  $\alpha$  – некоторое комплексное число, а часть простых полюсов  $N_1$  из общего числа особых точек  $N$  лежит на луче  $\gamma_x : ]0, \infty[$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \mathcal{R}(x) dx &= \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \left[ \sum_{k=1}^{N-N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \notin \gamma_x} \mathcal{R}(z) z^{\alpha-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + e^{i2\pi\alpha}}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \operatorname{Res}_{z=z_k \in \gamma_x} \mathcal{R}(z) z^{\alpha-1} \right]. \end{aligned} \quad (23.96)$$

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 23.6 с необходимыми извлечениями из доказательства теоремы 23.5.

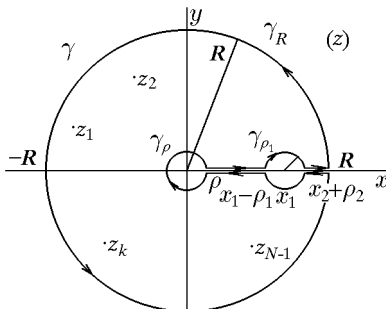


Рис. 49

Отметим лишь, что замкнутый контур выбирается как комбинация контуров, изображенных на рис. 46, 48, и изображен на рис. 49.

**Пример 23.17.** Вычислить

$$I = \text{V.р.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - b)}, \quad a > 0. \quad (23.97)$$

**Решение.** Функция

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)(z - b)}, \quad (23.98)$$

во-первых, при  $z \rightarrow \infty$  справедливо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}(z)}{z^3} = A, \quad A = \text{const}, \quad |A| < \infty,$$

а во-вторых, имеет три простых полюса  $z_1 = ia$ ,  $z_2 = -ia$  и  $z_3 = b$ , из которых  $z_1$  расположен в верхней полуплоскости,  $z_2$  – в нижней, а  $z_3$  – на действительной оси. Вычислив согласно (23.88)

$$\text{Res } \mathcal{R}(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z + ia)(z - b)} = \frac{1}{2ia(ia - b)},$$

$$\text{Res } \mathcal{R}(z) = \lim_{z \rightarrow b} \frac{1}{(z^2 + a^2)} = \frac{1}{b^2 + a^2}$$

и подставив в (23.97) найденные вычеты, получим

$$\begin{aligned} \text{V.р.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x - b)} &= 2\pi i \left[ \frac{1}{2ia(ia - b)} + \frac{1}{2(b^2 + a^2)} \right] = \\ &= -\frac{\pi b}{a(a^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (23.99)$$

Отметим, что вычисление интеграла (23.97) обычным способом гораздо более громоздко. Действительно, разложим (23.98) на простейшие дроби:

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x - b)} =$$

$$= \frac{1}{b^2 + a^2} \left[ -\frac{x}{x^2 + a^2} - \frac{b}{x^2 + a^2} + \frac{1}{x - b} \right]. \quad (23.100)$$

Тогда

$$I = \frac{1}{b^2 + a^2} \left[ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + a^2} - b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - b} \right]. \quad (23.101)$$

В предыдущих примерах и Приложении П1 показано, что первый и последний интегралы в (23.101) сходятся в смысле главного значения к нулю, а второй интеграл сходится в обычном смысле

$$\begin{aligned} I &= \frac{b}{b^2 + a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = -\frac{b}{a(b^2 + a^2)} \left[ \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \\ &= -\frac{b\pi}{a(b^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

Заметим, что при  $a \rightarrow +0$  значение  $I \rightarrow -\infty$ , т.е. интеграл (23.97) расходится, так как два простых полюса  $z = \pm ia$  сливаются в один двукратный  $z = 0$ . Такой же результат следует из (23.101) при  $a = 0$ :

$$I = \frac{1}{b^2} \left[ -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} - b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - b} \right],$$

так как второй интеграл (см. пример П1.7) содержит четную степень  $x$  и в смысле главного значения расходится.

**Пример 23.18.** Вычислить

$$I = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx.$$

**Решение.** Заметим, что аналитическое продолжение подынтегральной функции при  $\alpha > 0$  удовлетворяет условиям теоремы 23.8 и имеет один простой полюс  $z = 0$ , лежащий на действительной оси. Следовательно, согласно (23.95) имеем

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{i\alpha z}}{z} = \pi i. \quad (23.102)$$



Для  $\alpha = -|\alpha| < 0$  заменой  $x \rightarrow -x$  получим

$$\text{V.п.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|\alpha|x}}{x} dx = -\pi i. \quad (23.103)$$

В примере П1.8 показано, что при  $\alpha = 0$

$$\text{V.п.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0.$$

Таким образом,

$$\text{V.п.} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx = \begin{cases} 1/2, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -1/2, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (23.104)$$

**Пример 23.19.** Вычислить

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

**Решение.** Воспользуемся результатом предыдущей задачи:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{Im} \left( \text{V.п.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \text{Im} (i\pi) = \pi. \quad (23.105)$$

**Пример 23.20.** Вычислить интеграл

$$\text{V.п.} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx.$$

**Решение.** Для функции  $\mathcal{R}(z) = 1/(1-z)$  справедливо предельное соотношение

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z(1-z)} = 0,$$

и, следовательно, согласно (23.45), исходный интеграл сходится для  $0 < \alpha < 1$ . Функция  $\mathcal{R}(z)$  имеет единственный простой

полюс  $z = 1$ , принадлежащий лучу  $]0, \infty[$ , и удовлетворяет условиям теоремы 23.8. Вычислив

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{z^{\alpha-1}}{1-z} = -1,$$

согласно соотношению (23.96) найдем

$$\text{V.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx = -\pi i \frac{1 + e^{i2\pi\alpha}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \pi \operatorname{ctg} \alpha\pi. \quad (23.106)$$

◇ В заключение отметим, что сформулированные выше теоремы охватывают достаточно узкий класс интегралов. Поэтому интерес представляют не только сами теоремы, но также приемы и методы, использованные в доказательствах этих теорем, которые нередко позволяют вычислять интегралы более широких классов.

**Пример 23.21.** Вычислить

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx.$$

**Решение.** Рассмотрим контурный интеграл

$$I = \int_{\gamma} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz, \quad \alpha > 0, \quad (23.107)$$

где контур  $\gamma$  изображен на рис. 48 при условии  $x_1 = 0$ . Внутри такого контура подынтегральная функция не имеет особых точек. Тогда, с одной стороны, согласно теореме Коши  $I = 0$ , а с другой – согласно свойству аддитивности контурных интегралов

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^{-\rho} \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x^2} dx + \int_{\gamma_{\rho}} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz + \\ &+ \int_{\rho}^R \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz = 0. \end{aligned} \quad (23.108)$$

Пределный переход  $\rho \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  в (23.108) с учетом равенства

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x^2} dx = \int_{\rho}^R \frac{1 - e^{-i\alpha x}}{x^2} dx$$

дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{2 - (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})}{x^2} dx + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz + \\ + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{-i\alpha z}}{z^2} dz = 0. \end{aligned} \quad (23.109)$$

Согласно лемме 23.1 при  $\alpha > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{-i\alpha z}}{z^2} dz = 0. \quad (23.110)$$

Для вычисления интеграла по контуру  $\gamma_{\rho}$  воспользуемся тем, что точка  $z = 0$  для подынтегральной функции (23.107) является полюсом первого порядка с вычетом, равным

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} = -i\alpha,$$

и, следовательно, в окрестности точки  $z = 0$  может быть разложена в ряд Лорана

$$\frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} = -\frac{i\alpha}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \quad (23.111)$$

Тогда

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \left[ -\frac{i\alpha}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \right] dz. \quad (23.112)$$

Если  $z \in \gamma_{\rho}$ , то  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , и выражение (23.112) можно записать

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\rho}} \frac{1 - e^{i\alpha z}}{z^2} dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \left[ -\frac{i\alpha}{\rho e^{i\varphi}} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \rho^n e^{in\varphi} \right] i\rho e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \alpha \int_{\pi}^0 d\varphi = -\alpha\pi. \quad (23.113)$$

Подставив (23.110), (23.113) в (23.109) получим

$$2 \int_0^{\infty} \frac{1 - (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})/2}{x^2} dx = \alpha\pi$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx = \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (23.114)$$

### 23.8. Представление функций контурными интегралами

Рассмотрим подробней интегралы от функции

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{z} \quad (23.115)$$

по контурам  $l$ ,  $l_+$ ,  $l_-$ , изображенным на рис. 50.

Первый контур  $l$  (рис. 50,а) представляет собой всю действительную ось  $Ox$ . Простой полюс  $z = x = 0$  функции (23.115) принадлежит контуру интегрирования, и, следовательно, соответствующий интеграл можно рассматривать в смысле главного значения на неограниченном промежутке от  $-\infty$  до  $\infty$  вдоль действительной оси  $Ox$

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx. \quad (23.116)$$

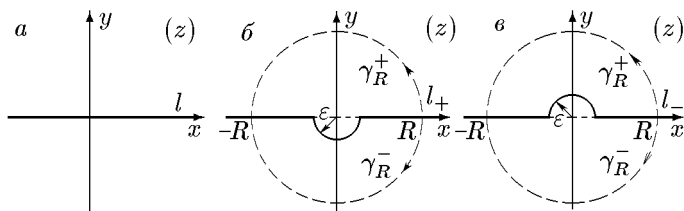


Рис. 50

Контуры  $l_+$ ,  $l_-$  выбраны так, что они обходят полюс  $z = 0$  по окружности радиуса  $\varepsilon$  сверху и снизу, соответственно, совпадая вне этой окружности с контуром  $l$ , т.е. действительной осью  $Ox$ . В этом случае вместо интеграла (23.116) рассматриваются сходящиеся интегралы

$$\int_{l_+} \frac{e^{itz}}{z} dz \quad \int_{l_-} \frac{e^{itz}}{z} dz. \quad (23.117)$$

Если ввести две разрывные функции: знаковую (signatura)

$$\text{sign } t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0, \end{cases} \quad (23.118)$$

и единичную функцию Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (23.119)$$

то для трех интегралов (23.116), (23.117) можно сформулировать следующие леммы.

**Лемма 23.3.** *Для функции  $\text{sign } t$  справедливо следующее интегральное представление:*

$$\text{sign } t = V.p. \left( \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x} \right). \quad (23.120)$$

**Доказательство** следует непосредственно из решения примера 23.18.

**Лемма 23.4.** *Для функции Хевисайда  $\theta(t)$  справедливо следующее интегральное представление:*

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_-} e^{-itz} \frac{dz}{z}. \quad (23.121)$$

**Доказательство.** Пусть  $t > 0$ . Рассмотрим контур  $\gamma$ , состоящий из двух контуров  $l_{+R}$  и  $\gamma_R^+$ . Контур  $l_{+R}$  представляет собой часть контура  $l_+$  на отрезке  $[-R, R]$ , а  $\gamma_R^+$  – верхняя часть окружности радиуса  $R$  (рис. 50, б). Проинтегрируем функцию

(23.115) по составленному таким образом замкнутому контуру  $\gamma$ , используя свойство аддитивности контурных интегралов и основную теорему о вычетах 21.3,

$$\frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{l_{+R}} e^{itz} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_R^+} e^{itz} \frac{dz}{z} \right] = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{itz}}{z}. \quad (23.122)$$

Предельный переход  $R \rightarrow \infty$  в (23.122) с учетом того, что второй интеграл удовлетворяет лемме Жордана и, следовательно,

$$\int_{\gamma_R^+} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0,$$

а

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{itz}}{z} = 1,$$

дает

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = 1. \quad (23.123)$$

Пусть теперь  $t < 0$ . Рассмотрим интеграл от функции (23.115) по контуру  $\gamma = l_{+R} + \gamma_R^-$  (рис. 50, б). По теореме Коши

$$\int_{\gamma} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{l_{+R}} e^{itz} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_R^-} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0, \quad (23.124)$$

так как точка  $z = 0$  находится вне контура  $\gamma$ .

Предельный переход  $R \rightarrow \infty$  в (23.124) дает

$$\int_{l_{+R}} e^{itz} \frac{dz}{z} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0.$$

Из следствия 1 леммы Жордана имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0$$

и, следовательно,

$$\int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = 0. \quad (23.125)$$

Совокупность (23.121), (23.125) и доказывает утверждение (23.119).

Доказательство для контура  $l_-$  проводится аналогично, следует лишь учесть, что обход контура  $\gamma_R^-$  (рис. 50, в) совершается в отрицательном направлении.

Соотношения, аналогичные (23.119), были получены ранее с помощью интегралов Бромвича–Вагнера и если последние связаны с приложениями, использующими преобразование Лапласа, то соотношения (23.119) связаны с преобразованием Фурье.

В заключение отметим, что интегралы (23.117) иногда удобно записывать в виде

$$\int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x - i0}, \quad \int_{l_-} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x + i0}. \quad (23.126)$$

Поясним эти обозначения. Поскольку значение  $\varepsilon$  может быть сколь угодно малым, интегрирование в (23.117) идет фактически по действительной оси  $Ox$  за исключением сколь угодно малой окрестности точки  $z = 0$ . Если полюс функции (23.115) сместить на величину  $\varepsilon$  по мнимой оси вверх (так, чтобы он находился над осью  $Ox$ ), то интегрирование можно распространить на всю действительную ось с последующим предельным переходом  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Такая процедура будет полностью соответствовать правилу обхода полюса  $z = 0$ , предписываемого контуром  $l_+$ , т.е.

$$\int_{l_+} e^{itz} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x - i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{dx}{x - i\varepsilon}. \quad (23.127)$$

Аналогично, смещение полюса в точку  $-i\varepsilon$  соответствует правилу обхода полюса  $z = 0$ , предписываемого контуром  $l_-$  (под осью  $Ox$ ).

### 23.9. Целые и мероморфные функции

Теория вычетов может быть успешно использована не только для вычисления интегралов, но и в других приложениях, к рассмотрению которых мы и переходим. Напомним предварительно некоторые понятия.

◆ Однозначная аналитическая функция, не имеющая особых точек в конечной комплексной плоскости, называется целой.

Согласно приведенному определению и утверждению теоремы 16.4, целая функция  $f(z)$  может быть разложена в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k \quad (23.128)$$

в круге  $|z| < R$  сколь угодно большого радиуса  $R$ . С другой стороны, это разложение можно рассматривать как лорановское разложение функции  $f(z)$  в окрестности  $z = \infty$ , позволяющее классифицировать все целые функции по их поведению в бесконечно удаленной точке. Действительно, если

а)  $C_1 = C_2 = \dots = C_k = \dots = 0$ , то  $f(z) = C_0$ , а это означает, что целая функция является постоянной, для которой точка  $z = \infty$  – правильная (в полном соответствии с теоремой Лиувилля);

б)  $C_n \neq 0$ ,  $C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = 0$ , то

$$f(z) = \sum_{k=0}^n C_k z^k,$$

а это означает, что целая функция является полиномом степени  $n$ , т.е.  $f(z) = P_n(z)$ , для которого точка  $z = \infty$  – полюс порядка  $n$ ;

в) разложение (23.128) содержит бесконечное число слагаемых. В этом случае целая функция называется трансцендентной, а точка  $z = \infty$  является для нее существенно особой, как, например для функций  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ .

Что касается полиномов, то основная теорема алгебры позволяет представить любой полином в виде конечного произведения

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad (23.129)$$

Возникает вопрос: возможно ли получить разложение типа (23.129) для целой трансцендентной функции в виде бесконечного произведения, т.е. заменить сумму

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k,$$



произведением

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} (z - z_k), \quad (23.130)$$

что в некоторых приложениях оказывается более удобным. Прежде чем ответить на этот вопрос, рассмотрим еще один класс функций.

♦ Функция  $w(z)$ , которую можно представить в виде отношения двух целых функций  $f(z)$  и  $\varphi(z)$ , т.е.

$$w(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}, \quad (23.131)$$

называется мероморфной.

Из (23.131) с учетом определения целых функций следует, что в конечной комплексной плоскости мероморфная функция не может иметь других особых точек, кроме полюсов.

Из общего класса мероморфных функций можно выделить функции, называемые рациональными или дробно-рациональными.

♦ Мероморфная функция называется рациональной, если  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  являются полиномами, т.е.  $f(z) = F_n(z)$ ,  $\varphi(z) = \Phi_k(z)$ .

Представление (23.131) с учетом (23.129) в виде

$$w(z) = \frac{\prod_{l=1}^n (z - z_l)}{\prod_{j=1}^k (z - z_j)}$$

позволяет сделать вывод, что рациональная функция имеет на всей расширенной комплексной плоскости ограниченное число полюсов. Справедливо и обратное утверждение.

**Теорема 23.9.** *Если мероморфная функция  $w(z)$  имеет конечное число полюсов  $z_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , и, кроме того,  $z_{N+1} = \infty$  является либо правильной ее точкой, либо полюсом, то эта функция представляется в виде суммы постоянной  $C_0$  и*

главных частей  $w_n$  ее лорановских разложений в окрестностях точек  $z_n$  и  $z_{N+1} = \infty$

$$w(z) = C_0 + \sum_{n=1}^{N+1} w_n(z) \quad (23.132)$$

и, следовательно, рациональна.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$C(z) = w(z) - \sum_{n=1}^{N+1} w_n(z), \quad (23.133)$$

где

$$w_{N+1}(z) = \sum_{s=1}^{m_{N+1}} a_s z^s \quad (23.134)$$

есть главная часть ряда Лорана функции  $w(z)$  в точке  $z = \infty$ , которая присутствует в том случае, если  $z = \infty$  является полюсом, а

$$w_n(z) = \sum_{s=1}^{m_n} \frac{b_{ns}}{(z - z_n)^s}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (23.135)$$

– соответственно, главные части рядов Лорана в полюсах  $z_n$ .

Функция (23.133) является аналитической в любой точке расширенной комплексной плоскости, ибо все главные части устранены вычитанием сумм (23.134), (23.135) и в силу теоремы Лиувилля есть некоторая постоянная  $C_0$ , тогда

$$C_0 = w(z) - \sum_{n=1}^{N+1} w_n(z). \quad (23.136)$$

Значение  $C_0$  можно найти из (23.136) предельным переходом  $z \rightarrow \infty$ . Учтя, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w_n(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^{m_n} \frac{b_{ns}}{(z - z_n)^s} = 0,$$

найдем

$$C_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} [w(z) - w_{N+1}(z)]. \quad (23.137)$$

Формула (23.132) доказана, а из нее после приведения всех дробей (23.135) к общему знаменателю вытекает, что  $w(z)$  является отношением двух полиномов, т.е. рациональной функцией.

Заметим, что в процессе доказательства мы попутно установили известную из математического анализа формулу разложения любой рациональной функции на целую часть  $C_0 + w_{N+1}(z)$  и простейшие дроби (23.135).

**Пример 23.22.** Рациональную функцию

$$w(z) = \frac{z^4 - z^3 - 4}{z^2(z - 2)} \quad (23.138)$$

разложить на простейшие дроби, т.е. записать как сумму главных частей лорановских разложений и постоянной.

**Решение.** Функция (23.138) имеет два конечных полюса:  $z_1 = 0$  – двукратный и  $z_2 = 2$  – простой. Точка  $z_3 = \infty$  также является простым полюсом. Для нахождения главной части лорановского разложения в точке  $z = 0$

$$w_1 = \frac{C_{-1}}{z} + \frac{C_{-2}}{z^2}$$

воспользуемся формулой (17.5)

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z^4 - z^3 - 4)/[z^2(z - 2)]}{z^{n+1}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z^4 - z^3 - 4)/(z - 2)}{z^{n+3}} dz, \end{aligned} \quad (23.139)$$

где контур  $\Gamma$  можно выбрать, например, в виде  $|z - 2| = 0,1$ . Как следует из (23.139), если  $n + 3 \leq 0$ , т.е.  $n \leq -3$ , то подынтегральная функция аналитична во всех точках, лежащих внутри окружности  $\Gamma$ , в том числе и в точке  $z = 0$ . В этом случае

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z^4 - z^3 - 4}{(z - 2)z^{n+3}} dz = 0,$$

т.е.  $C_n = 0$  при  $n = -3, -4, \dots$ . Если  $n > -3$ , то, используя следствие 14.1.2, получим

$$C_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z^4 - z^3 - 4)/(z-2)}{z} dz = \left( \frac{z^4 - z^3 - 4}{z-2} \right) \Big|_{z=0} = 2,$$

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(z^4 - z^3 - 4)/(z-2)}{z^2} dz = \left( \frac{z^4 - z^3 - 4}{z-2} \right)' \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{(4z^3 - 3z^2)(z-2) - (z^4 - z^3 - 4)}{(z-2)^2} \Big|_{z=0} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$w_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2}. \quad (23.140)$$

Аналогично найдем главную часть лорановского разложения функции (23.138) в точке  $z = 2$

$$w_2(z) = \frac{C_{-1}}{z-2} = \frac{1}{z-2}.$$

Для нахождения  $w_3(z)$  — главной части лорановского разложения функции в точке  $z = \infty$  — преобразуем (23.138) к виду

$$w(z) = \frac{z^4 - z^3 - 4}{z^2(z-2)} = \left( z - 1 - \frac{4}{z^3} \right) \frac{1}{1 - 2/z}.$$

Отсюда следует, что в любом круге  $|z| > 2$  функцию  $w(z)$  можно представить лорановским разложением

$$w(z) = \left( z - 1 - \frac{4}{z^3} \right) \left( 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \dots \right) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{1}{z^n}. \quad (23.141)$$

Из (23.138) следует, что главная часть

$$w_3(z) = z.$$

Для нахождения постоянной  $C_0$  воспользуемся выражением (23.136)

$$C_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[ \frac{z^4 - z^3 - 4}{z^2(z-2)} - z \right] = 1.$$

Подставив найденные выражения  $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$ ,  $w_3(z)$  и  $C_0$  в (23.132), найдем

$$w(z) = \frac{z^4 - z^3 - 4}{z^2(z-2)} = 1 + z + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z-2}. \quad (23.142)$$

Подчеркнем, что мы намеренно не воспользовались известной и многократно примененной (см. примеры 17.3–17.5) процедурой разложения дроби на простейшие для того, чтобы на конкретном примере проиллюстрировать смысл слагаемых в (23.132) как главных частей соответствующих лорановских разложений.

В формуле (23.132) важно то, что фигурирующая там сумма содержит конечное число слагаемых, соответствующих конечному числу полюсов рациональной функции. Здесь, как и для целой функции, возникает вопрос: возможно ли обобщение формулы разложения рациональной функции на полином и простейшие дроби (23.132) на мероморфную функцию, имеющую бесконечное число полюсов. Оказывается, что в случае счетного множества числа полюсов такое обобщение возможно и основная трудность состоит в том, чтобы обеспечить сходимость ряда, возникающего в (23.132) вместо конечной суммы  $\sum_{l=1}^{N+1} w_l$ , когда число полюсов бесконечно.

### 23.10. Разложение мероморфной функции на простейшие дроби

Итак, мы переходим к рассмотрению мероморфных функций, имеющих счетное число полюсов

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$$

Покажем, что при некоторых дополнительных условиях рациональная функция  $\mathcal{R}(z)$  на множестве так называемых правильных контуров  $\gamma_n$  может быть представлена бесконечным рядом, являющимся обобщением (23.132).

♦ Последовательность замкнутых контуров  $\gamma_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , содержащих внутри себя начало координат  $z = 0$  и таких, что всякий последующий контур  $\gamma_{n+1}$  содержит внутри себя предыдущий  $\gamma_n$ , называется правильной, если отношение длины каждого контура  $l_n$  к кратчайшему расстоянию  $d_n$  от него до точки  $z = 0$  остается ограниченным при неограниченном

расширении контуров  $\gamma_n$  по всем направлениям, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{d_n} \leq L \quad \text{при} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty. \quad (23.143)$$

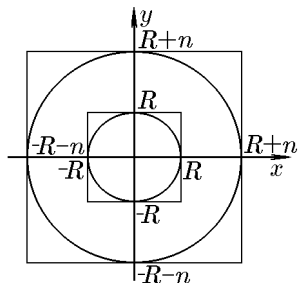


Рис. 51

Так, например, последовательность окружностей  $|z| = R_0 + n$  является правильной, ибо выполняются все указанные требования, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| = \lim_{n \rightarrow \infty} (R_0 + n) = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi(R_0 + n)}{R_0 + n} = 2\pi.$$

Правильные последовательности будут образовывать также периметры правильных многоугольников, вписанных в указанные окружности или описанных вокруг них (рис. 51).

Перейдем к доказательству теоремы Миттаг–Леффлера, обобщающей разложение (23.132). Остановимся на наиболее часто встречающемся в приложениях случае – мероморфной функции с простыми полюсами.

**Теорема 23.10 (Миттаг–Леффлера).** *Если мероморфная функция  $f(z)$ , аналитическая в точке  $z = 0$ , а в точках*

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$$

*имеющая простые полюсы и не имеющая других особых точек, ограничена на некоторой правильной системе контуров  $\gamma_n$*

$$|f(z)| \leq M, \quad (23.144)$$

*то она может быть представлена в виде ряда*

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right) \operatorname{Res} f(z), \quad (23.145)$$

*который сходится равномерно в любой ограниченной области с выколотыми в ней точками  $z_k$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$F(z, \omega) = \frac{zf(\omega)}{\omega(\omega - z)}, \tag{23.146}$$

для которой переменная  $z$  принадлежит некоторой области  $D$ , полностью расположенной в некотором круге  $|z| \leq R$ , а через  $\omega$  обозначены значения  $z$ , принадлежащие некоторому правильноному контуру, содержащему внутри себя все полюсы  $z_1, z_2, \dots, z_n$  (рис. 52).

Выбор функции  $F(z, \omega)$  в виде (23.146) не случаен и обусловлен тем, чтобы при вычислении интеграла

$$\int_{\gamma_n} F(z, \omega) d\omega$$

с использованием основной теоремы о вычетах получить выражение, совпадающее с (23.145). Это – с одной стороны, а с другой – тем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_n} F(z, \omega) d\omega \right| = 0. \tag{23.147}$$

В этом нетрудно убедиться, используя условия теоремы. Действительно, поскольку

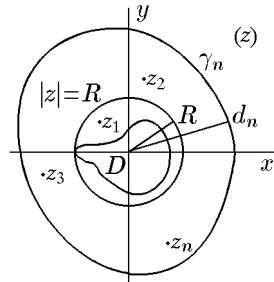


Рис. 52

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{zf(\omega)}{\omega(\omega - z)} d\omega \right| < |z| \int_{\gamma_n} \frac{|f(\omega)|}{|\omega||\omega - z|} |d\omega| < |z|M \int_{\gamma_n} \frac{|d\omega|}{|\omega||\omega - z|}$$

и приняв во внимание, что  $|z| \leq R$ ,  $|\omega| \geq d_n$ ,  $|\omega - z| \geq d_n - R$ , получаем оценку интеграла

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_n} F(\omega, z) d\omega \right| &< RM \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n}{d_n(d_n - R)} < \\ &< RML \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n - R} = 0. \end{aligned} \tag{23.148}$$

Возвратившись к выражению (23.147), отметим, что функция  $F(z, \omega)$ , наряду с полюсами  $z_n$  функции  $f(z)$ , содержит

еще два простых полюса  $\omega = z$  и  $\omega = 0$  (если  $f(0) \neq 0$ ). Поэтому применение основной теоремы о вычетах дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \operatorname{Res}_{\omega=0} F(z, \omega) + \operatorname{Res}_{\omega=z} F(z, \omega) + \sum_k^{(\gamma_n)} \operatorname{Res}_{\omega=z_k} F(z, \omega) \right] = 0, \quad (23.149)$$

где суммирование ведется по всем полюсам, расположенным внутри контура  $\gamma_n$ .

Вычисление вычетов в простых полюсах не вызывает затруднений

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\omega=0} \frac{zf(\omega)}{\omega(\omega-z)} &= -f(0), \\ \operatorname{Res}_{\omega=z} \frac{zf(\omega)}{\omega(\omega-z)} &= f(z), \\ \operatorname{Res}_{\omega=z_k} \frac{zf(\omega)}{\omega(\omega-z)} &= \frac{z}{z_k(z_k-z)} \operatorname{Res}_{\omega=z_k} f(\omega). \end{aligned} \quad (23.150)$$

Соотношение (23.149) с учетом (23.150) можно записать в виде равенства

$$f(z) = f(0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k^{(\gamma_n)} \frac{z}{z_k(z_k-z)} \operatorname{Res}_{\omega=z_k} f(\omega),$$

которое с помощью очевидного тождества

$$\frac{z}{z_k(z_k-z)} = -\left( \frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} \right)$$

принимает вид

$$f(z) = f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k^{(\gamma_n)} \left( \frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} \right) \operatorname{Res}_{\omega=z_k} f(\omega). \quad (23.151)$$

Строго говоря, суммирование в (23.151) предполагает соединение в одно тех слагаемых, которые относятся к полюсам, лежащим между  $\gamma_n$  и  $\gamma_{n+1}$ . Если ряд сходится и без такой группировки, то вместо (23.151) можно рассматривать обычный ряд

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} \right) \operatorname{Res}_{\omega=z_k} f(\omega). \quad (23.152)$$



Теорема доказана.

Если вместо условия (23.144) функцию  $f(z)$  для всех  $z \in \gamma_n$  подчинить более мягкому условию

$$\left| \frac{f(z)}{z^p} \right| \leq M, \quad p - \text{целое},$$

то вместо (23.152) будем иметь разложение вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(0)z^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_k} + \sum_{m=1}^p \frac{z^{m-1}}{z_k^m} \right) \operatorname{Res}_{\omega=z_k} f(\omega). \quad (23.153)$$

Разложения (23.152), (23.153) обычно называют разложениями мероморфных функций на простейшие дроби, но иногда их называют миттаг-леффлеровскими разложениями по имени шведского математика, первым их получившего.

Возвращаясь к теореме Миттаг-Леффлера, отметим, что она может быть обобщена на случай кратных полюсов  $z_k$ .

**Пример 23.23.** Разложить функцию  $\operatorname{ctg} z$  на простейшие дроби.

**Решение.** Функция  $f(z) = \operatorname{ctg} z$  имеет счетное число полюсов  $z_k = k\pi$ ,  $k = -\infty, \infty$ , которые являются решениями уравнения  $\sin z = 0$ . Вычисление вычетов в точках  $z_k = k\pi$  дает

$$\operatorname{Res}_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{\cos z}{(\sin z)'} = 1. \quad (23.154)$$

Покажем, что функция  $f(z) = \operatorname{ctg} z$  является ограниченной по модулю на всей комплексной плоскости, за исключением внутренних частей кругов  $|z - \pi k| < \varepsilon$ ,  $k = \overline{-\infty, \infty}$ , где  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Для этого в силу периодичности этой функции достаточно рассмотреть замкнутую полосу  $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$  с удаленными внутренними частями полукругов радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $z = 0$  и  $z = \pi$ . В указанной полосе конечной длины  $f(z) = \operatorname{ctg} z$  является непрерывной и ограниченной. Оценка  $|\operatorname{ctg} z|$  при неограниченном удалении по полосе вверх или вниз дает

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg} z| &= \left| i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \frac{|e^{iz} + e^{-iz}|}{|e^{iz} - e^{-iz}|} \leq \\ &\leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{\left| |e^{iz}| - |e^{-iz}| \right|} < \frac{1 + e^{-2|y|}}{1 - e^{-2|y|}}, \end{aligned}$$

причем

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} |\operatorname{ctg} z| < \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + e^{-2|y|}}{1 - e^{-2|y|}} = 1.$$

Последнее неравенство и позволяет сделать вывод об ограниченности функции  $\operatorname{ctg} z$ .

Выберем в качестве правильной последовательности контуров окружности  $|z| = \pi(n + 1/2)$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Если принять во внимание, что эти окружности не проходят через внутренние части вырезанных кругов  $|z - \pi k| < \varepsilon$ , например при  $\varepsilon < \pi/4$ , то в силу доказанного выше на этих окружностях функция  $\operatorname{ctg} z$  будет ограниченной по модулю. То же самое можно, очевидно, утверждать и относительно функции

$$\varphi(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}, \quad (23.155)$$

так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0.$$

Функция (23.155), в отличие от функции  $\operatorname{ctg} z$ , в точке  $z = 0$  уже не имеет полюса, и к ней можно применить теорему Миттаг-Леффлера. Учитывая, что

$$\varphi(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) = 0,$$

а также (23.154), из (23.145) находим

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ' \left( \frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right), \quad (23.156)$$

где штрих означает, что  $k \neq 0$ .

В силу нечетности функции  $\varphi(z)$  из уравнения

$$|z| = \left( \frac{1}{2} + k \right) \pi$$

следует, что между соседними контурами  $\gamma_k$  и  $\gamma_{k+1}$  располагаются два полюса:  $z_k = k\pi$ ,  $z_{-k} = -k\pi$ . Объединив в (23.156) слагаемые, соответствующие этим полюсам, получим

$$\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi} = \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (23.157)$$

Таким образом, функцию  $\operatorname{ctg} z$  можно представить разложением

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}. \quad (23.158)$$

**Пример 23.24.** Разложить на простейшие дроби мероморфные функции

$$\text{а) } \operatorname{ctg} az, \quad \text{б) } \operatorname{cth} az, \quad \text{в) } \frac{1}{\sin^2 \pi z}, \quad \text{г) } \frac{1}{e^{2\pi z} - 1}.$$

**Решение.** а) Заменяя в (23.158)  $z \rightarrow az$ , получим

$$\operatorname{ctg} az = \frac{1}{az} + 2az \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 z^2 - k^2 \pi^2}. \quad (23.159)$$

б) Используя тождество  $\operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz$  и формулу (23.159), найдем

$$\operatorname{cth} az = \frac{1}{az} + 2az \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 z^2 + k^2 \pi^2}. \quad (23.160)$$

в) Продифференцировав (23.159) по  $z$  или  $a$ , получим

$$\frac{1}{\sin^2 az} = \frac{1}{a^2 z^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^2 z^2 + k^2 \pi^2}{(a^2 z^2 - k^2 \pi^2)^2}. \quad (23.161)$$

г) Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{2\pi z} - 1} &= \frac{e^{-\pi z}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-\pi z} - e^{\pi z} + e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} = \frac{1}{2} [\operatorname{cth} \pi z - 1], \end{aligned}$$

то с учетом (23.160) найдем

$$\frac{1}{e^{2\pi z} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi z} + \frac{z}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + k^2}. \quad (23.162)$$

**Пример 23.25.** Просуммировать ряды

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}, \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + a^2)^2}.$$

**Решение.** а) Из (23.160) при  $z = \pi$  получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left[ \operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right]. \quad (23.163)$$

б) Дифференцирование (23.163) по  $a$  дает

$$-2a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{2}{a^3\pi} - \frac{1}{a^2} \operatorname{cth} a\pi - \frac{\pi}{a \operatorname{sh}^2 a\pi} \right],$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + a^2)^2} = \frac{1}{4a^4} \left[ \pi a \operatorname{cth} a\pi + \frac{(\pi a)^2}{\operatorname{sh}^2 a\pi} - 2 \right]. \quad (23.164)$$

### 23.11. Суммирование рядов

В примере 23.25 мы нашли сумму ряда с использованием разложения (23.145). В общем случае такой подход неудобен, поскольку по известной сумме подбирается нужный ряд, тогда как в приложениях требуется, как правило, найти сумму ряда по его общему члену. В таких случаях полезной оказывается следующая

**Теорема 23.11.** Если  $R(z)$  — рациональная функция с полюсами  $z_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ), отличными от целых чисел, а степень ее числителя ниже степени знаменателя не менее, чем на две единицы, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) = -\pi \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} [R(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \quad (23.165)$$

**Доказательство.** В примере 23.23 было показано, что функция  $\operatorname{ctg} \pi z$  является ограниченной на всей комплексной плоскости с выколотыми  $\varepsilon$ -окрестностями точек  $z_k = k$ ,  $k = \overline{-\infty, \infty}$ . Выберем в качестве правильной последовательности контуров

последовательность окружностей  $|z| = n + 1/2$ . Принимая во внимание, что по условиям теоремы

$$\max_{|z|=n+1/2} |R(z)| \leq \frac{M}{(n+1/2)^2},$$

заключаем, что

$$\max_{|z|=n+1/2} |R(z) \operatorname{ctg} \pi z| \leq \frac{MM_c}{(n+1/2)^2}. \quad (23.166)$$

Рассмотрим контурный интеграл

$$\int_{|z|=n+1/2} R(z) \operatorname{ctg} \pi z dz. \quad (23.167)$$

С одной стороны, его можно вычислить с помощью теоремы о вычетах:

$$\int_{|z|=n+1/2} R(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = 2\pi i \sum_k^{(|z|=n+1/2)} \operatorname{Res}_{z=z_k} [R(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \quad (23.168)$$

Выражение ( $|z| = n + 1/2$ ), стоящее над знаком суммы, означает, что суммирование ведется по всем полюсам, находящимся внутри контура  $|z| = n + 1/2$ . Так как совокупность всех полюсов подынтегральной функции состоит из полюсов функции  $R(z)$ , равных  $z_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ), и полюсов  $z_k$  ( $k = \overline{-\infty, \infty}$ ) функции  $\operatorname{ctg} \pi z$ , то предельный переход  $n \rightarrow \infty$  в (23.168) дает

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|z|=n+1/2} R(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = \\ & = 2\pi i \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res}_{z=z_k} [R(z) \operatorname{ctg} \pi z] + \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} [R(z) \operatorname{ctg} \pi z] \right\}. \end{aligned} \quad (23.169)$$

Учтя, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|z|=n+1/2} |R(z)| \cdot |\operatorname{ctg} \pi z| dz \leq 2\pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{MM_c}{(n+1/2)^2} = 0,$$

а также что

$$\operatorname{Res}_{z=n} R(z) \operatorname{ctg} \pi z = \pi R(n),$$

выражение (23.169) можно записать

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} [R(z) \operatorname{ctg} \pi z],$$

что и требовалось доказать.

Для знакопеременных рядов справедлива

**Теорема 23.12.** Если рациональная функция  $R(z)$  удовлетворяет условиям теоремы 23.11, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k R(k) = -\pi \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_n} \left[ \frac{R(z)}{\sin \pi z} \right]. \quad (23.170)$$

**Доказательство** аналогично доказательству предыдущей теоремы.

**Пример 23.26.** Для нецелого  $a$  найти суммы рядов

$$\text{а) } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^2}; \quad \text{б) } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}.$$

**Решение.** а) Согласно (23.165), имеем

$$R(k) = \frac{1}{(a+k)^2}.$$

Функция  $R(z) = 1/(a+z)^2$  имеет в точке  $z = -a$  полюс второго порядка и, следовательно,

$$\operatorname{Res}_{z=-a} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{(z+a)^2} = \lim_{z \rightarrow -a} (\operatorname{ctg} \pi z)' = -\frac{\pi}{\sin^2 \pi a}.$$

Подставив найденное выражение в (23.165), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a}. \quad (23.171)$$

б) Согласно (23.170), имеем

$$R(k) = \frac{1}{k^2 + a^2}.$$

Функция  $R(z) = 1/(z^2 + a^2)$  имеет два простых полюса  $z_{1,2} = \pm ia$ , и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{1}{(z + ia) \sin \pi z} = \\ &= \frac{1}{2ia \sin i\pi a} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a}, \\ \operatorname{Res}_{z=-ia} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} &= \lim_{z \rightarrow -ia} \frac{1}{(z - ia) \sin \pi z} = \\ &= \frac{1}{2ia \sin i\pi a} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a}. \end{aligned}$$

Подставив найденные выражения в (23.170), получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Расписав полученную сумму как

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^k \frac{1}{k^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \operatorname{sh} \pi a}$$

и учтя четность выражения  $1/(k^2 + a^2)$ , окончательно найдем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} - 1 \right).$$

### 23.12. Разложение целой функции в бесконечное произведение

Мы переходим к обобщению формулы (23.129) для полиномов на целые функции.

Рассмотрим конечное произведение

$$P_n = C_1 \cdot C_2 \cdots C_n = \prod_{k=1}^n C_k, \quad (23.172)$$

где  $C_k$  – некоторые комплексные числа, отличные от нуля. Если число сомножителей неограниченно возрастает, то такое произведение называется бесконечным

$$C_1 \cdot C_2 \cdots C_n \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} C_k. \quad (23.173)$$

Как и для рядов, для бесконечных произведений существенным является вопрос сходимости.

◆ Если при  $n \rightarrow \infty$   $P_n$  стремится к конечному, отличному от нуля пределу  $P \neq 0$ , то бесконечное произведение (23.173) называется сходящимся, а число

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n C_k \neq 0 \quad (23.174)$$

– значением этого произведения. В противном случае бесконечное произведение называется расходящимся.

◆ Бесконечное произведение (23.173), содержащее множители  $C_k$ , равные нулю, называется сходящимся, если после удаления всех этих множителей оно остается сходящимся в указанном выше смысле (23.174).

◇ Для того чтобы сходящиеся бесконечные произведения обладали обычными свойствами конечных произведений, будем считать, что бесконечное произведение обращается в нуль только при наличии хотя бы одного сомножителя  $C_k = 0$ .

**Пример 23.27.** Исследовать на сходимость бесконечные произведения

$$\text{а) } \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k)^2}{(1+k)^2 - 1}, \quad \text{б) } \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \quad \text{в) } 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdots n \cdot \frac{1}{n} \cdots$$

**Решение.** Рассмотрим конечные произведения

$$\begin{aligned} \text{а) } P_n &= \frac{2^2}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} \cdots \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - 1} = \\ &= \frac{2^2}{(2-1)(2+1)} \cdot \frac{3^2}{(3-1)(3+1)} \cdots \\ &\cdots \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

Примем во внимание, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2 \neq 0.$$

Согласно определению, бесконечное произведение а) сходится.

$$\text{б) } P_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$



В силу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

делаем заключение, что бесконечное произведение б) расходится.

$$в) \quad P_n = \begin{cases} 1 & \text{для четных } n, \\ \frac{n+3}{2} & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

Предел (23.174) в этом случае не существует и произведение в) расходится.

**Теорема 23.13 (о сходимости произведения).** *Для сходимости бесконечного произведения*

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} C_k, \quad (23.175)$$

где  $C_k \neq 0$  для всех  $k$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \ln C_k \quad (23.176)$$

при надлежащем выборе значений  $\ln C_k$ . При этом  $P = e^S$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $n$ -частичную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln C_k$$

ряда (23.176) и конечное произведение

$$P_n = \prod_{k=1}^n C_k$$

бесконечного произведения (23.175). Они связаны соотношениями

$$\ln P_n = \ln \prod_{k=1}^n C_k = \sum_{k=1}^n \ln C_k = S_n, \quad P_n = e^{S_n}. \quad (23.177)$$

Положим, что при некотором выборе значений логарифмов ряд (23.176) сходится. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

но отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{S_n} = e^S = P. \quad (23.178)$$

Таким образом, из сходимости ряда (23.176) следует сходимость произведения (23.175), причем из необходимого признака сходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln C_k = 0$$

следует необходимый признак сходимости бесконечного произведения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_k = 1. \quad (23.179)$$

Положим теперь, наоборот, что произведение (23.175) сходится, т.е. существует отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq 0. \quad (23.180)$$

Выбрав в (23.177) главное значение логарифма, имеем

$$S_n = \ln |P_n| + i \arg P_n = \ln P_n, \quad -\pi < \arg P_n \leq \pi. \quad (23.181)$$

Предельный переход  $n \rightarrow \infty$  в (23.181) при условии (23.180) дает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n = \ln P = S.$$

Таким образом, из сходимости произведения (23.175) следует сходимость ряда (23.176). Отметим, что при необходимости условие на аргумент  $P_n$  в (23.181) может быть заменено на  $0 \leq \arg P_n < 2\pi$  и т.д.

◆ Бесконечное произведение (23.175) называется абсолютно сходящимся, если абсолютно сходящимся является ряд (23.176).

**Теорема 23.14.** *Величина абсолютно сходящегося бесконечного произведения не меняется при произвольном изменении порядка сомножителей.*

**Доказательство** очевидно в силу определения абсолютной сходимости и справедливости предыдущей теоремы.

Рассмотрим теперь бесконечные произведения, сомножители которого являются функциями от  $z$ , т.е.

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} U_k(z). \quad (23.182)$$

♦ Бесконечное функциональное произведение (23.182) называется сходящимся в области  $D$ , если оно сходится в каждой точке этой области после удаления конечного числа множителей, обращающихся в нуль (если они существуют).

♦ Бесконечное функциональное произведение (23.182) с отличными от нуля в области  $D$  множителями  $U_k(z)$  называется равномерно сходящимся в этой области, если последовательность конечных произведений

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^n U_k(z) \quad (23.183)$$

сходится в области  $D$  равномерно.

**Теорема 23.15.** Если бесконечное функциональное произведение (23.182) равномерно сходится в области  $D$  к функции  $P(z)$ , то эта функция является аналитической в области  $D$  и выполняется правило дифференцирования, аналогичное правилу дифференцирования конечного произведения (23.183)

$$P'(z) = P(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U'_k(z)}{U_k(z)}. \quad (23.184)$$

**Доказательство.** Аналитичность функции  $P(z)$  вытекает непосредственно из теоремы Вейерштрасса. Продифференцировав равномерно сходящийся ряд

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln U_k(z),$$

найдем

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U'_k(z)}{U_k(z)}.$$

Но

$$P(z) = e^{S(z)}$$

и, следовательно,

$$P'(z) = e^{S(z)} S'(z) = P(z) S'(z)$$

или

$$P'(z) = P(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U'_k(z)}{U_k(z)}.$$

**Теорема 23.16.** *Если мероморфная функция*

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} [\ln f(z)] \quad (23.185)$$

*удовлетворяет условиям теоремы Миттаг–Леффлера, то целую функцию  $f(z)$ , имеющую только простые нули, можно представить равномерно сходящимся бесконечным произведением*

$$f(z) = f(0) e^{zF(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{z/z_k}, \quad (23.186)$$

*если  $f(0) \neq 0$ .*

**Доказательство.** Так как функция  $F(z)$  имеет простые полюсы в точках  $z_k$ , то для функции  $f(z)$  эти точки являются простыми нулями, причем точка  $z = 0$  в число указанных нулей, согласно условию теоремы, не входит. С учетом того, что

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} F(z) = \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{f'(z)}{f'(z)} = 1,$$

формула (23.145) для  $F(z)$  примет вид

$$F(z) = F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right).$$

Проинтегрируем этот равномерно сходящийся ряд по любой кривой, соединяющей точки  $z = 0$  и  $z$ , не проходящей через

нули функции  $f(z)$  (т.е. точки  $z_k$ ) и лежащей на выбранной ветви функции  $\ln f(z)$  (23.185). Такое интегрирование дает

$$\ln f(z) - \ln f(0) = F(0)z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \ln(z - z_k) - \ln(-z_k) + \frac{z}{z_k} \right].$$

Отсюда

$$\ln f(z) - \ln f(0) = F(0)z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \ln \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right) + \frac{z}{z_k} \right],$$

и после потенцирования получим формулу

$$f(z) = f(0)e^{zF(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right) e^{z/z_k},$$

полностью совпадающую с (23.186), что и требовалось доказать.

◇ Отметим, что если точка  $z = 0$  является нулем функции  $f(z)$  кратности  $p$ , то для получения формулы, аналогичной (23.186), достаточно применить указанные выше рассуждения для функции  $f(z)z^{-p}$ .

**Пример 23.28.** Найти представление целых функций

$$\text{а) } \sin z; \quad \text{б) } e^z - 1; \quad \text{в) } \cos z$$

бесконечными произведениями.

**Решение.** а) Поскольку функция  $\sin z$  среди всех своих нулей содержит точку  $z = 0$ , рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\sin z}{z},$$

для которой нулями являются точки  $z_k = k\pi$ ,  $k = \overline{\pm 1, \pm \infty}$ . Учтя, что

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\sin z}{z} \Big|_{z=0} = 1, \\ f'(0) &= \left( \frac{\sin z}{z} \right)' \Big|_{z=0} = 0, \\ F(0) &= \frac{f'(0)}{f(0)} = 0, \end{aligned}$$

из формулы (23.186) получим

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{z/(k\pi)} \left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-z/(k\pi)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

или

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right). \quad (23.187)$$

б) По аналогии с примером а) рассмотрим

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Так как  $z_k = 2ki\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm\infty$ , то

$$\begin{aligned} f(0) &= \left. \frac{e^z - 1}{z} \right|_{z=0} = 1, \\ f'(0) &= \left. \left( \frac{e^z - 1}{z} \right)' \right|_{z=0} = \frac{1}{2}, \\ F(0) &= \frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e^z - 1 = z e^{z/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right). \quad (23.188)$$

в) Воспользуемся известным тригонометрическим соотношением

$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2 \sin z}.$$

Из разложения (23.187) нетрудно получить выражение

$$\begin{aligned} \sin 2z &= 2z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{k^2\pi^2}\right) = \\ &= 2z \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2l)^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{(2l-1)^2\pi^2}\right), \end{aligned}$$

разделив которое на  $\sin z$ , представленный в виде (23.187), найдем

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right). \quad (23.189)$$

## Приложение. Несобственные интегралы. Сходимость и главное значение

### П1.1. Интегралы на неограниченных промежутках

Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $[a, \infty[$  и интегрируема в любой его конечной части  $[a, A]$ , т.е. интеграл

$$\int_a^A f(x) dx \quad (\text{П1.1})$$

существует.

Предел интеграла (П1.1) при  $A \rightarrow \infty$  называют несобственным интегралом функции  $f(x)$  в промежутке от  $a$  до  $\infty$  и обозначают

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (\text{П1.2})$$

Если предел (П1.2) существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся.

Если предел (П1.2) бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называют расходящимся.

**Пример П1.1.** Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Решение.** По определению,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \arctg x \Big|_0^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (\arctg A - 0) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

и, следовательно, интеграл сходится.

**Пример П1.2.** Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \cos x \, dx.$$

**Решение.** а) По определению,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln x|_1^A) = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty, \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

и, следовательно, интеграл  $I_1$  расходится.

б) Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos x \, dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (\sin A - \sin 0) = \lim_{A \rightarrow \infty} \sin A. \end{aligned}$$

Последний предел не существует, и, следовательно, интеграл  $I_2$  расходится.

**Пример П1.3.** Исследовать на сходимость интеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx, \quad a > 0.$$

**Решение.** По определению,

$$I = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^A = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad a > 0. \quad (\text{П1.5})$$

Наряду с интегралом (П1.2), рассмотрим несобственный интеграл вида

$$\int_a^{\infty} |f(x)| \, dx. \quad (\text{П1.6})$$

В силу очевидного для любого  $a > 0$  неравенства

$$\int_a^{\infty} |f(x)| \, dx \geq \left| \int_a^{\infty} f(x) \, dx \right| \quad (\text{П1.7})$$



можно утверждать, что если интеграл (П1.6) сходится, то сходится и интеграл (П1.2), который в этом случае называется абсолютно сходящимся. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку из расходимости интеграла (П1.6) не следует обязательная расходимость интеграла (П1.2). В тех случаях, когда интеграл (П1.6) расходится, а сам интеграл (П1.2) сходится, последний называют условно сходящимся несобственным интегралом.

Не останавливаясь подробно на признаках сходимости, излагаемых в курсе математического анализа, напомним основной критерий сходимости для абсолютно сходящихся интегралов.

**Теорема П1.1.** *Интеграл (П1.6) сходится, если функция  $f(x)$  обращается на бесконечности в нуль порядка выше первого, в противном случае интеграл (П1.6) расходится.*

**Доказательство.** Условие теоремы означает, что если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu |f(x)| = N < \infty, \quad N \neq 0, \quad (\text{П1.8})$$

то интеграл (П1.6) при  $\nu > 1$  сходится, а при  $\nu \leq 1$  – расходится. Из определения предела (П1.8) следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $L > 0$ , что

$$|x^\nu |f(x)| - N| < \varepsilon$$

для всех  $x > L$ . Не уменьшая общности, будем считать, что  $\varepsilon < N$ . Тогда

$$\int_a^\infty |f(x)| dx = \int_a^L |f(x)| dx + \int_L^\infty |f(x)| dx. \quad (\text{П1.9})$$

Первый интеграл в (П1.9) существует как обыкновенный, а из второго с учетом очевидного неравенства

$$(N - \varepsilon) \int_L^\infty \frac{dx}{x^\nu} \leq \int_L^\infty |f(x)| dx \leq (N + \varepsilon) \int_L^\infty \frac{dx}{x^\nu}$$

и значения интеграла

$$\int_L^\infty \frac{dx}{x^\nu} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_L^A \frac{dx}{x^\nu} = \begin{cases} \frac{1}{\nu - 1} \left[ \frac{1}{L^{\nu-1}} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A^{\nu-1}} \right] = \frac{L^{1-\nu}}{\nu - 1}, & \nu > 1; \\ \frac{1}{\nu - 1} \left[ \frac{1}{L^{\nu-1}} - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A^{\nu-1}} \right] = \infty, & \nu < 1; \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{L} = \infty, & \nu = 1 \end{cases}$$

следует утверждение теоремы.

**Пример П1.4.** Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt[3]{1+x^3}},$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} dx, \quad I_3 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-x^2} dx.$$

**Решение.** Согласно (П1.8), имеем

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\nu}{\sqrt{1+x^2} \sqrt[3]{1+x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\nu}{x^2} = 1$$

при  $\nu = 2 > 1$ , следовательно, интеграл сходится.

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\nu \sqrt[3]{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\nu}{x^{1/3}} = 1$$

при  $\nu = 1/3 < 1$ , следовательно, интеграл расходится.

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\nu x^5 e^{-x^2} = 0$$

при всех  $1 < \nu < \infty$ , следовательно, интеграл сходится.

◇ Аналогично (П1.1), (П1.2) определяется несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на промежутке  $] -\infty, a]$

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^a f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx. \quad (\text{П1.10})$$

Естественным обобщением (П1.2), (П1.10) является несобственный интеграл от функции  $f(x)$  на промежутке от  $-\infty$  до  $\infty$

$$\lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_{-B}^A f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad (\text{П1.11})$$

поскольку в этом случае, выбрав произвольно любое  $a$ , можно положить

$$\int_{-B}^A f(x) dx = \int_{-B}^a f(x) dx + \int_a^A f(x) dx, \quad (\text{П1.12})$$

и существование предела (П1.11) равносильно существованию пределов (П1.2), (П1.10) (случай  $\infty - \infty$  исключается). Другими словами, несобственный интеграл (П1.11) будет сходиться только в том случае, когда предел (П1.11) будет существовать при независимом стремлении  $A$  и  $B$  к бесконечности.

Как следует из (П1.11), (П1.12) для «двусторонних» несобственных интегралов возникает возможность доопределить понятие сходимости следующим образом. В тех случаях, когда интеграл (П1.11) расходится, т.е. не существует как предел при независимом стремлении  $A$  и  $B$  к бесконечности, может оказаться, что существует предел, отвечающий условию  $A = B$  (одинакового стремления  $A$  и  $B$  к  $\infty$ ). В этом случае несобственный интеграл (П1.11) называют сходящимся в смысле главного значения, или просто главным значением несобственного интеграла, и обозначают V.p. (Valeur principale)

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx. \quad (\text{П1.13})$$

Связь интегралов (П1.11) и (П1.13) раскрывает следующая

**Теорема П1.2.** *Если несобственный интеграл (П1.11) сходится в обычном смысле, то его значение совпадает с его главным значением (П1.13).*

**Доказательство.** Предел (П1.11) можно рассматривать как предел функции двух переменных  $F(A, B)$ , т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} F(A, B) = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_{-B}^A f(x) dx.$$

Если этот предел существует, то он не зависит от пути, по которому  $A$  и  $B$  стремятся к бесконечности, и, следовательно, совпадает с пределом, который можно получить, устремляя  $A$  и  $B$  к бесконечности по прямой  $A = B$ , что и требовалось доказать.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Легко убедиться, что этот интеграл, вычисленный по формулам

(П1.11) и (П1.13), дает одно и то же значение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} \int_{-B}^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \rightarrow \infty \\ B \rightarrow \infty}} (\operatorname{arctg} A + \operatorname{arctg} B) = \\ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi, \\ \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg} A = 2 \frac{\pi}{2} = \pi. \end{cases}$$

Поэтому в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, символ V.p. опускается.

## П1.2. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция  $f(x)$  определена, непрерывна и ограничена во всех точках отрезка  $[a, b]$ , за исключением особой точки  $x = a$ , в которой

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

Если вместо отрезка  $[a, b]$  рассматривать отрезок  $[a + \alpha, b]$ , где  $0 < \alpha < b - a$ , то на этом отрезке функция в силу наложенных на нее требований будет интегрируемой. Это означает, что интеграл

$$\int_{a+\alpha}^b f(x) dx \quad (\text{П1.14})$$

существует.

Предел интеграла (П1.14) при  $\alpha \rightarrow +0$  называют несобственным интегралом функции  $f(x)$  в интервале от  $a$  до  $b$  и обозначают

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{a+\alpha}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{П1.15})$$

Если предел (П1.15) существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае – расходящимся. Так, например, интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

будет сходящимся, так как

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = 2 \lim_{\alpha \rightarrow +0} (1 - \sqrt{\alpha}) = 2,$$

а интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

– расходящимся, поскольку

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{\alpha}^1 = - \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) = \infty.$$

Отметим, что определение (П1.15) очень похоже на определение (П1.2). И действительно, интеграл (П1.15) прямо сводится к интегралу (П1.2) с помощью подстановки  $x - a = 1/y$ . Поэтому все, сказанное относительно несобственных интегралов (П1.2) (понятие абсолютной сходимости, критерий сходимости и т.д.), можно достаточно просто переформулировать для интегралов типа (П1.15). В силу этого мы ограничимся некоторыми сведениями, существенными в приложениях.

Аналогично (П1.15) определяется несобственный интеграл на промежутке  $[a, b]$ , если особой точкой является точка  $x = b$ :

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \int_a^{b-\beta} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (\text{П1.16})$$

Если обе точки  $a$  и  $b$  оказываются особыми, то определение несобственного интеграла является обобщением (П1.15), (П1.16) и дается равенством

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +0}} \int_{a+\alpha}^{b-\beta} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad (\text{П1.17})$$

аналогичным равенству (П1.11), поскольку и в этом случае можно положить

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad (\text{П1.18})$$

выбрав произвольно любое  $a < c < b$ .

Рассмотрим еще один случай, когда особой точкой является внутренняя точка  $c$  отрезка  $[a, b]$ . В этом случае вместо интегралов (П1.17), (П1.18) имеем несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \left[ \int_a^{c-\beta} f(x) dx + \int_{c+\alpha}^b f(x) dx \right], \quad (\text{П1.19})$$

который будет сходиться, если будут сходиться оба несобственных интеграла в правой части (П1.19). В тех случаях, когда интеграл (П1.19) расходится, т.е. не существует как предел при независимом стремлении  $\alpha$  и  $\beta$  к  $+0$ , может оказаться, что существует предел, отвечающий условию  $\alpha = \beta$ . Такой несобственный интеграл (П1.19) называют сходящимся в смысле главного значения, или просто главным значением, и обозначают (см. формулу (П1.13))

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[ \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \int_{c+\alpha}^b f(x) dx \right]. \quad (\text{П1.20})$$

Для (П1.19), (П1.20) справедлива теорема, аналогичная теореме П1.2.

**Пример П1.5.** Исследовать на сходимость интегралы

$$I_1 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad I_2 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3}, \quad I_3 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}.$$

**Решение.** Для всех подынтегральных выражений точка  $x = 0$  является особой. Следовательно, согласно (П1.15), (П1.16), (П1.18),

1) интеграл сходится:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \frac{3}{2} [x^{2/3} |_{-1}^{-\beta} + x^{2/3} |_{\alpha}^2] = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} [\sqrt[3]{4} - 1 + \beta^{2/3} - \alpha^{2/3}] = \frac{3}{2} (\sqrt[3]{4} - 1); \end{aligned}$$

2) интеграл расходится в обычном смысле:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{x^2} \Big|_{-1}^{-\beta} + \frac{1}{x^2} \Big|_{\alpha}^2\right] = \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right), \end{aligned}$$

но сходится в смысле главного значения:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{x^2} \Big|_{-1}^{-\alpha} + \frac{1}{x^2} \Big|_{\alpha}^2\right] = \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{3}{8}; \end{aligned}$$

3) интеграл расходится во всех случаях:

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} - \left[ \frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\beta} + \frac{1}{x} \Big|_{\alpha}^2 = \\
 &= - \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \left[ -\frac{1}{\beta} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right] = -\frac{3}{2} + \lim_{\substack{\beta \rightarrow +0 \\ \alpha \rightarrow +0}} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) = \infty.
 \end{aligned}$$

Рассмотренный выше случай легко обобщается на любое число особых точек как на конечном промежутке  $[a, b]$ , так и на бесконечном  $[a, \infty[$  или  $] - \infty, \infty[$ . В последнем случае особых точек может быть бесконечно много при условии, что в каждом конечном промежутке  $[a, A]$  ( $[-B, A]$ ) их должно быть конечное число, которое может расти до бесконечности вместе с  $A$  или  $B$ .

Очевидно, что все сказанное выше справедливо и для точек, в которых функция не определена.

**Пример П1.6.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{2/\pi} \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) dx.$$

**Решение.** Подынтегральная функция в точке  $x = 0$  не определена. Тем не менее, согласно (П1.10), имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2/\pi} \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) dx &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^{2/\pi} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)' dx = \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) \Big|_{\alpha}^{2/\pi} = \frac{2}{\pi} - \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha \sin \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Критерий сходимости для несобственного интеграла (П1.15) дает следующая

**Теорема П1.3.** *Интеграл (П1.15) сходится, если функция  $f(x)$  в особой точке  $x = a$  обращается в бесконечность ниже первого порядка, в противном случае интеграл (П1.15) расходится.*

**Доказательство** полностью аналогично доказательству теоремы П1.2. Результаты примера П1.5 полностью соответствуют указанному критерию сходимости.

Рассмотренный критерий сходимости справедлив и для интегралов (П1.16), (П1.17), (П1.19). Что касается интеграла (П1.20), то здесь дело обстоит несколько иначе. Рассмотрим

**Пример П1.7.** Вычислить интеграл ( $a < c < b$ )

$$I = \text{V.п.} \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (\text{П1.21})$$

**Решение.** Согласно (П1.20), имеем

при  $n = 1$

$$\begin{aligned} \text{V.п.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} [\ln(c-x)|_a^{c-\alpha} + \ln(x-c)|_{c+\alpha}^b] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} [\ln \alpha - \ln(c-a) + \ln(b-c) - \ln \alpha] = \ln \frac{b-c}{c-a}; \end{aligned}$$

при  $n = 2k + 1, k = \overline{1, \infty}$

$$\begin{aligned} \text{V.п.} \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^{2k+1}} &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left( -\frac{1}{2k} \right) \left[ \frac{1}{(x-c)^{2k}} \Big|_a^{c-\alpha} + \frac{1}{(x-c)^{2k}} \Big|_{c+\alpha}^b \right] = \\ &= -\frac{1}{2k} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{\alpha^{2k}} - \frac{1}{(a-c)^{2k}} + \frac{1}{(b-c)^{2k}} - \frac{1}{\alpha^{2k}} \right] = \\ &= \frac{1}{2k} \left[ \frac{1}{(a-c)^{2k}} + \frac{1}{(b-c)^{2k}} \right]; \end{aligned}$$

при  $n = 2k, k = \overline{1, \infty}$

$$\begin{aligned} \text{V.п.} \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^{2k}} &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left( \frac{1}{1-2k} \right) \left[ \frac{1}{(x-c)^{2k-1}} \Big|_a^{c-\alpha} + \frac{1}{(x-c)^{2k-1}} \Big|_{c+\alpha}^b \right] = \\ &= \frac{1}{1-2k} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left[ \frac{1}{(b-c)^{2k-1}} - \frac{1}{(a-c)^{2k-1}} - \frac{2}{\alpha^{2k-1}} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Из рассмотренного примера следует, что интеграл (П1.21) в смысле главного значения может сходиться для некоторых значений  $n \geq 1$ , а именно нечетных.

**Пример П1.8.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k}}, \quad -\infty < c_1 < \cdots < c_k < \infty \quad (\text{П1.22})$$



для случаев

- а)  $c_1 = 0, \quad , n_1 = 1, \quad k = 1;$
- б)  $c_1 = c, \quad , n_1 = n = \overline{2, \infty}, \quad k = 1;$
- в)  $n_1 = n_2 = 1, \quad k = 2;$
- г)  $n_1 = \overline{2, \infty}, \quad n_2 = \overline{2, \infty}, \quad k = 2.$

**Решение.** а) Интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{\substack{A, B \rightarrow \infty \\ \alpha, \beta \rightarrow +0}} \left[ \int_{-B}^{-\beta} \frac{dx}{x} + \int_{\alpha}^A \frac{dx}{x} \right] = \\ &= \lim_{\substack{A, B \rightarrow \infty \\ \alpha, \beta \rightarrow +0}} \left[ \ln x \Big|_{-B}^{-\beta} + \ln x \Big|_{\alpha}^A \right] = \\ &= \lim_{\substack{A, B \rightarrow \infty \\ \alpha, \beta \rightarrow +0}} [\ln \beta - \ln B + \ln A - \ln \alpha] = \lim_{\substack{A, B \rightarrow \infty \\ \alpha, \beta \rightarrow +0}} \left[ \ln \frac{\beta A}{\alpha B} \right] \quad (\text{П1.23}) \end{aligned}$$

расходится в обычном смысле, но сходится в смысле главного значения ( $\alpha = \beta, A = B$ ). Из (П1.23) следует, что интегралы

$$\int_{-\infty}^c \frac{dx}{x-c}, \quad \int_c^{\infty} \frac{dx}{x-c}$$

всегда расходятся.

б) Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c)^n}, \quad n = \overline{2, \infty}$$

в обычном смысле расходится, однако, как следует из примера П1.5, сходится в смысле главного значения для нечетных  $n$ .

в) Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)(x-c_2)}$$

сходится при  $|x| \rightarrow \infty$ , а для внутренних точек, будучи разложенным на простейшие дроби

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-c_1)(x-c_2)} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-c_1} + B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-c_2},$$

сводится к случаю а).

г) Интеграл

$$\text{V.п.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x - c_1)^{n_1} (x - c_2)^{n_2}}, \quad n_1 > 1, \quad n_2 > 1,$$

заведомо расходится, если хотя бы один из показателей степени  $n_1$  или  $n_2$  четный.

Рассмотрим еще один интеграл

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x - c} dx. \quad (\text{П1.24})$$

Будем говорить, что функция  $f(x)$  удовлетворяет в некотором промежутке условию Липшица (или Гельдера–Липшица) с показателем  $0 < p \leq 1$ , если для любых значений  $x_1$  и  $x_2$  из этого промежутка выполняется условие

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|^p. \quad (\text{П1.25})$$

Легко видеть, что условие (П1.25) является более сильным, чем условие простой непрерывности, поскольку из (П1.25) вытекает условие непрерывности, а из условия непрерывности, вообще говоря, не следует, что функция удовлетворяет условию Липшица.

Возвращаясь к интегралу (П1.24), предположим, что на отрезке  $[c - \alpha, c + \alpha]$  функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Липшица, а в остальной части промежутка  $]a, b[$  является непрерывной или даже только интегрируемой. Тогда

$$\text{V.п.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - c} dx = \text{V.п.} \left[ \int_a^b \frac{f(x) - f(c)}{x - c} dx + f(c) \int_a^b \frac{dx}{x - c} \right]. \quad (\text{П1.26})$$

В силу условия (П1.25) для оценки первого интеграла (П1.26) имеем

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \leq \frac{k}{|x - c|^{1-p}}, \quad (\text{П1.27})$$

и, следовательно, этот интеграл будет абсолютно сходящимся в обычном смысле, а второй интеграл равен (см. пример П1.5)

$$f(c) \ln \frac{b - c}{c - a}.$$

Таким образом, интеграл (П1.26) сходится.

В заключение отметим, что в некоторых случаях существуют замены переменных, позволяющие свести несобственный интеграл к обычному.

**Пример П1.9.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Решение.** Сделаем в интеграле замену переменных  $x = \sin \varphi$ . Тогда

$$dx = \cos \varphi d\varphi, \quad x_1 = 0, \varphi_1 = 0, \quad x_2 = 1, \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

и исходный интеграл примет вид

$$I = \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

### П1.3. Несобственные кратные интегралы

#### I. Интеграл по бесконечной области

Пусть дана функция

$$f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{П1.28})$$

определенная и непрерывная внутри некоторой ограниченной или неограниченной области  $D$  (бесконечно удаленная точка причисляется к границе области).

♦ Последовательность ограниченных областей  $D_k$  ( $k = \overline{1, \infty}$ ) называют исчерпывающей область  $D$ , если все эти области содержатся в  $D$  и любая замкнутая частичная область, лежащая внутри  $D$ , при достаточно больших  $k$  лежит также внутри  $D_k$ . Если при этом  $D_{k+1}$  содержит в себе  $D_k$  для любых  $k$ , то последовательность называют монотонной.

Например, последовательность кругов с радиусами  $R_k = k$ , является монотонной и исчерпывает плоскость  $\mathbb{R}^2$ .

Пусть для функции (П1.28) и некоторой монотонной последовательности интеграл

$$\int_{D_k} f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (\text{П1.29})$$

существует.

Предел интеграла (П1.29) при  $k \rightarrow \infty$  называют несобственным интегралом функции  $f(\vec{x})$  по бесконечной области  $D$  и обозначают

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_D f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (\text{П1.30})$$

Если предел (П1.30) существует, конечен и не зависит от выбора последовательностей областей  $D_k$ , то несобственный интеграл называют сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Определение (П1.30) несобственного интеграла по бесконечной области является обобщением определения (П1.11) одномерного несобственного интеграла. Аналогично ему вводится понятие абсолютной сходимости, критерий абсолютной сходимости и др. Кроме того, из определения (П1.30) следует связь между кратными несобственными интегралами и повторными интегралами с бесконечными пределами, которую задает

**Теорема П1.4.** Пусть  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , а  $D$  совпадает с  $\mathbb{R}^n$  и интеграл (П1.30) сходится. Тогда

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (\text{П1.31})$$

**Доказательство.** Поскольку интеграл (П1.30) сходится, то предел (П1.30) существует, конечен и не зависит от последовательности  $D_k$ , которую можно выбрать в виде  $n$ -мерных кубов (квадратов) с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям и равными  $2, 4, \dots, 2k, \dots$ . Отсюда и следует (П1.31).

**Пример П1.10.** Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad \text{б) } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

**Решение.** а) Согласно формулам (П1.30), (П1.31), запишем

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_k} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad (\text{П1.32})$$

а в качестве последовательностей  $D_k$  выберем круги с центром в начале координат и радиусами  $r_k = k$ . Тогда

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k e^{-r^2} r dr = \pi \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - e^{-k^2}) = \pi.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \left( 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi, \end{aligned}$$

откуда и следует случай

$$б) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Пример П1.11.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

или установить его расходимость.

**Решение.** Вычислим предварительно интеграл

$$I_k = \int_{D_k} \sin(x^2 + y^2) dx dy,$$

где область  $D_k$  представляет собой круг с центром в начале координат и радиусом  $r_k$ . Тогда

$$I_k = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_k} \sin(r^2) r dr = \pi [1 - \cos(r_k^2)].$$

Перейдя к пределу  $k \rightarrow \infty$ , найдем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \begin{cases} \pi \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \cos 2\pi k) = 0, & r_k^2 = 2\pi k; \\ \pi \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi k + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi, & r_k^2 = 2\pi k + \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (\text{П1.33})$$

Из (П1.33) следует, что существуют две различные монотонные последовательности кругов, исчерпывающие плоскость  $xOy$  и дающие два различных значения интеграла (П1.33) и, следовательно, существуют две последовательности квадратов с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям. Отсюда следует, что двойной и повторный интегралы расходятся.

## II. Интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим подынтегральную функцию (П1.28) с одним дополнительным условием: функция обращается в бесконечность в единственной точке  $M(\vec{x}_0)$  конечной области интегрирования  $D$  или не определена в этой точке.

Несобственный интеграл

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (\text{П1.34})$$

в этом случае определяется формулами (П1.29), (П1.30) с той лишь разницей, что последовательность замкнутых областей  $D_k$ , исчерпывающих область  $D$ , определяется как  $D_k = D - U_k$ , где  $U_k$  — некоторые окрестности точки  $M$ , которые можно выбрать различными способами, например как шары (круги) с центром в точке  $M$  и радиусами  $r_k = 1/k$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ .

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример П1.12.** Вычислить интеграл

$$I = \int_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

где  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Решение.** Пусть  $U_k$  — произвольная окрестность точки  $M(0, 0)$ , в которой подынтегральная функция обращается в бесконечность. Любая окрестность  $U_k$ , диаметр которой меньше  $r_k$ , наверняка лежит внутри круга такого же радиуса с центром в начале координат  $U_{r_k}$ . Рассмотрим область  $D_k = D - U_{r_k}$ , где перейдем к полярным координатам. В полученном кольце  $r_k \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , исходный интеграл можно записать

$$\begin{aligned} I &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_{r_k}^1 (\ln r) r dr = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi r^2 \left( \ln r - \frac{1}{r} \right) \Big|_{r_k}^1 = \\ &= \pi \left[ -\frac{1}{2} - \lim_{k \rightarrow \infty} r_k^2 \left( \ln r_k - \frac{1}{r_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.35})$$

Если радиусы кругов  $U_{r_k}$  выбрать равными  $r_k = 1/k$ , тогда последовательность  $D_k = D - U_{r_k}$  и тем более  $D_k = D - U_k$  исчерпывают область  $D$ , а предел (П1.35) дает

$$I = -\frac{\pi}{2}.$$

Сходимость исходного интеграла можно также установить, если вместо (П1.35) записать сразу интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\ln r) r dr,$$

который в силу соотношения

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \ln r = 0$$

становится обыкновенным (собственным), так как функция  $r \ln r$  становится непрерывной и ограниченной на отрезке  $[0, 1]$ , если в точке  $r = 0$  приписать ей значение, равное нулю.

**Пример П1.13.** Исследовать на сходимость интеграл

$$I_1 = \int_D \frac{d\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}, \quad \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{П1.36})$$

**Решение.** Рассмотрим круг радиуса  $R$ . Произвольная область  $D$ , расположенная внутри круга, представляет собой несобственный интеграл от неограниченной в начале координат функции

$$\frac{1}{|\vec{x}|^\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha},$$

тогда как неограниченная область, лежащая вне этого круга, представляет собой несобственный интеграл по неограниченной области. При переходе от декартовой системы координат к полярной имеем

а)  $D: x^2 + y^2 \leq R^2;$

$$\begin{aligned} \int_D \frac{d\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{r^\alpha} \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{1}{r^\alpha} r dr = 2\pi \int_0^R \frac{dr}{r^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (\text{П1.37})$$

Интеграл (П1.37), как указывалось ранее, сходится, если  $\alpha - 1 < 1$  или  $\alpha < 2$ , и расходится, если  $\alpha - 1 \geq 1$ , т.е. при  $\alpha \geq 2$ .

б)  $D: x^2 + y^2 \geq R^2;$

$$\int_D \frac{d\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha} = 2\pi \int_R^\infty \frac{dr}{r^{\alpha-1}}. \quad (\text{П1.38})$$

Интеграл (П1.38) расходится, если  $\alpha \leq 2$ , и сходится при  $\alpha > 2$ .

Несложно установить, что для произвольного  $\mathbb{R}^n$  интеграл  $I_1$  (П1.36) внутри ограниченной области  $D$  сходится при  $\alpha < n$  и расходится при  $\alpha \geq n$ , а вне этой области сходится при  $\alpha > n$  и расходится при  $\alpha \leq n$ .

Понятие несобственного кратного интеграла, обращающегося в бесконечность в некоторой точке, можно обобщить на случай, когда подынтегральная функция обращается в бесконечность (либо не определена) вдоль некоторой кривой  $\gamma$ , целиком лежащей в области  $D$ . В этом случае в последовательности  $D_k = D - U_k$ , исчерпывающей область  $D$ , под  $U_k$  подразумевается произвольная окрестность не точки, а соответствующей кривой  $\gamma$ .

ГЛАВА 3  
Введение в теорию  
конформных отображений

## 24. Геометрический смысл производной аналитической функции

Пусть  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  – аналитическая в области  $E$  функция. Значение функции  $w = u + iv$  будем изображать точкой плоскости  $uOv$ . Рассмотрим условия, при которых точке  $z = x + iy$  в плоскости независимого переменного  $z$  будет соответствовать одна точка  $w = u + iv$  в плоскости  $w$  и наоборот.

**Утверждение 24.1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична в точке  $z$ . Тогда отображение, осуществляемое функцией  $f$ , однолистно (взаимно однозначно) в некоторой окрестности этой точки, если

$$f'(z) \neq 0. \quad (24.1)$$

Справедливость этого утверждения следует из аналогичной теоремы для функции двух вещественных переменных: отображение будет взаимно однозначным, если якобиан перехода от переменных  $(x, y)$  к переменным  $(u, v)$  отличен от нуля, т.е.

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (24.2)$$

Вычислим этот якобиан

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из условия Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

следует (24.1)

$$J = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$



Поскольку

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = u_x(x, y) + iv_x(x, y),$$

то условие (24.2) эквивалентно условию (24.1), что и доказывает утверждение.

◇ Заметим, что из однолиственности функции  $f(z)$  в окрестности каждой точки области  $E$ , вообще говоря, не следует ее однолиственность во всей области. Например, функция  $f(z) = z^3$  однолистка в каждой точке кольца  $1 < |z| < 2$ , поскольку  $f'(z) = 3z^2 \neq 0$ , но она не однолистка во всем кольце.

### 24.1. Геометрический смысл аргумента производной

Пусть  $z_0$  – произвольная точка области  $E$  и  $\gamma$  – гладкая кривая, целиком лежащая в  $E$ ,  $z_0 \in \gamma$ . Тогда при однолистном отображении области  $E$  в область  $G$ , осуществляемом функцией  $f$ , кривая  $\gamma$  отображается кривой  $\Gamma$  (см. рис. 53).

Если  $\gamma$  задается параметрическим уравнением  $z(t)$ , то  $\Gamma$  задается уравнением  $w(t) = f(z(t))$ . Следовательно,

$$w'(t) = f'(z(t)) z'(t) \neq 0,$$

и в точке  $z_0 = z(t_0)$ , соответствующей значению параметра  $t = t_0$ , можем записать

$$\text{Arg } w'(t_0) = \text{Arg } (f'(z_0) z'(t_0))$$

или

$$\text{Arg } f'(z_0) = \text{Arg } w'(t_0) - \text{Arg } z'(t_0). \quad (24.3)$$

◇ Таким образом, в геометрический смысле  $\text{Arg } f'(z_0)$  есть разность между углом  $\text{Arg } w'(t_0)$ , который составляет касательная к кривой  $\Gamma$  в точке  $w_0 = f(z_0)$  с осью  $Ou$ , и углом  $\text{Arg } z'(t_0)$ , который составляет касательная к кривой  $\gamma$  в точке  $z_0$  с осью  $Ox$ .

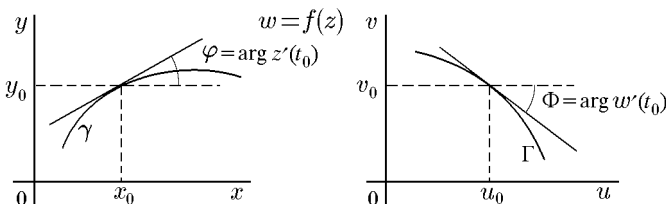


Рис. 53

**Теорема 24.1 (свойство сохранения углов).** При отображении, осуществляемом аналитической функцией  $f(z)$ , удовлетворяющей условию  $f'(z_0) \neq 0$ , угол  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  между любыми кривыми  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , пересекающимися в точке  $z_0$ , равен углу  $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$  между их образами, пересекающимися в точке  $w_0 = f(z_0)$ , с тем же направлением отсчета.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi = (\widehat{\gamma_1 \gamma_2})$  и  $\Phi = (\widehat{\Gamma_1 \Gamma_2})$ . Тогда

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \Phi = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Согласно (10.2)

$$\Phi_1 = \text{Arg } f'(z_0) + \varphi_1, \quad \Phi_2 = \text{Arg } f'(z_0) + \varphi_2.$$

Таким образом,

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi = \beta,$$

что и доказывает теорему (см. рис. 54).

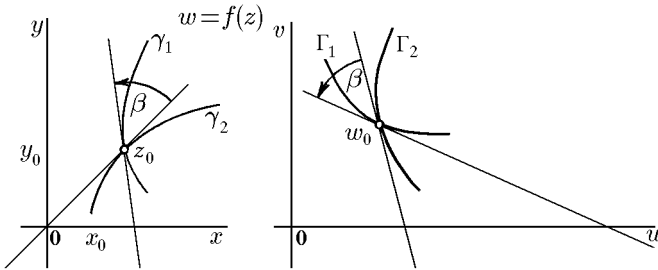


Рис. 54

## 24.2. Геометрический смысл модуля производной

Выясним геометрический смысл модуля производной аналитической функции  $f(z)$ . Для этого из точки  $z_0 = z(t_0)$  перейдем в точку  $z$  вдоль кривой  $\gamma$  (в заданном направлении). Обозначим хорду, соединяющую эти точки, через  $\Delta z$  (рис. 55). На плоскости  $w$  точкам  $z_0$  и  $z$  будут соответствовать точки  $w_0$  и  $w$ , принадлежащие кривой  $\Gamma$  – образу кривой  $\gamma$ , а хорде  $\Delta z$  отвечает хорда  $\Delta w$  (см. рис. 55).

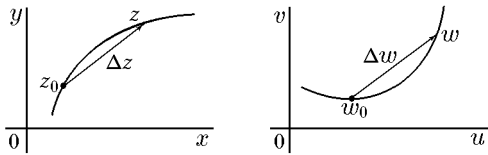


Рис. 55

Согласно определению производной, имеем

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}, \quad z \in \gamma$$

или

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}, \quad z \in \gamma. \quad (24.4)$$

Особенностью этого предела является то, что точка  $z$  стремится к точке  $z_0$  не произвольным образом, а по кривой  $\gamma$ . Однако аналитичность функции  $w = f(z)$  позволяет утверждать, что этот и аналогичные пределы по любым другим кривым, проходящим через точку  $z_0$ , существуют и равны между собой.

Поэтому соотношение (24.4) можно записать в виде, в котором предел не зависит от способа стремления  $z$  к  $z_0$ :

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|} = \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

◇ Геометрически  $|\Delta w|$  – длина вектора  $\Delta w$ , а  $|\Delta z|$  – длина вектора  $\Delta z$ . Поэтому геометрический смысл последнего соотношения заключается в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, удовлетворяющей условию  $f'(z_0) \neq 0$ , бесконечно малые элементы преобразуются подобным образом в любом направлении, причем  $|f'(z_0)|$  – коэффициент подобия. Это свойство означает постоянство растяжения (сжатия) отображения в точке  $z_0$ .

**Пример 24.1.** Найти коэффициент подобия  $k$  и угол поворота  $\alpha$  кривых, проходящих через точку  $z_0 = i$ , при отображении  $w = z^2$ .

**Решение.** Точка  $z_0 = i$  отображается в точку  $w_0 = i^2 = -1$ . Поскольку  $w' = 2z$ , значение производной в точке  $z_0 = i$  равно  $w'(i) = 2i = 2e^{i\pi/2}$ . Отсюда следует, что  $k = 2$ ,  $\alpha = \pi/2$ . Таким образом, окрестность точки  $z_0 = i$  при отображении

$w = z^2$  переходит в окрестность точки  $w_0 = -1$  с радиусом, в два раза большим исходного. При этом все кривые, проходящие через точку  $z_0 = i$ , поворачиваются на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки.

### 24.3. Понятие конформного отображения

♦ Отображение, осуществляемое функцией  $w = f(z)$ , называется конформным в точке  $z_0$ , если оно обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений.

♦ Однолистное отображение  $w = f(z)$  области  $E$  на область  $G$  называется конформным в области  $E$ , если оно конформно в каждой точке множества  $E$ .

**Теорема 24.2.** *Если функция  $f(z)$  – однолистная и аналитическая в области  $E$ , то отображение  $w = f(z)$  конформно.*

**Доказательство** следует непосредственно из геометрического смысла модуля и аргумента производной аналитической функции и определения конформного отображения.

Справедливо и обратное утверждение.

Отсюда вытекают два очевидных следствия.

**Следствие 24.2.1.** Отображение, обратное к конформному в некоторой области, конформно.

**Следствие 24.2.2.** Суперпозиция конформных отображений является конформным отображением.

Если рассматривать функцию  $w = f(z)$  в замкнутой области, то справедлива

**Теорема 24.3 (принцип соответствия границ).** *Пусть  $E$  и  $G$  – односвязные области, ограниченные жордановыми кривыми  $\gamma$  и  $\Gamma$ , соответственно. Тогда функцию  $w = f(z)$ , конформно отображающую  $E$  на  $G$ , можно непрерывно продолжить на границу  $\gamma$  и продолженная функция  $w = f(z)$  отображает взаимно однозначно кривую  $\gamma$  на кривую  $\Gamma$  с сохранением ориентации.*

Сформулированный выше принцип соответствия границ имеет важное практическое значение. Действительно, в тех случаях, когда этот принцип применим, для отыскания области  $G$ , на которую функция  $w = f(z)$  отображает конформно заданную область  $E$  с границей  $\gamma$ , достаточно найти образ  $\Gamma$

границы  $\gamma$  и установить соответствие направлений обхода образа  $\gamma$  и образа  $\Gamma$  – границы области  $G$ . Тогда, если обход границы  $\gamma$  был таким, что область  $E$  оставалась слева (справа), то искомой областью  $G$  будет та, которая остается слева (справа) при установленном направлении обхода границы  $\Gamma$ .

Последние рассуждения мы проводили в предположении, что существует функция  $w = f(z)$ , реализующая конформное отображение области  $E$  в  $G$ . Перейдем теперь к определению условий, обеспечивающих существование такого отображения. Соответствующая теорема – теорема Римана – является основной теоремой теории конформных отображений. Однако прежде чем перейти к теореме Римана, докажем теорему о так называемых «исключительных» областях.

**Теорема 24.4.** *Вся расширенная комплексная плоскость или вся комплексная плоскость с одной выколотой точкой не может быть конформно отображена на ограниченную область.*

**Доказательство.** Достаточно доказать теорему для расширенной плоскости с одной выколотой точкой, которую без ограничения общности можно считать бесконечно удаленной (см. разд. «Дробно-линейная функция»). Предположим, что конечная плоскость (точка  $z = \infty$  выколота) функцией  $w = f(z)$  отображается на какую-либо ограниченную область. Но тогда  $f(z)$  – целая функция, ограниченная на всей плоскости, и по теореме Лиувилля такая функция является постоянной, что и доказывает невозможность подобного конформного отображения ( $f'(z) = 0$ ).

**Теорема 24.5 (Римана).** *Каковы бы ни были односвязные области  $E$  и  $G$  с границами, состоящими более чем из одной точки, существует функция  $w = f(z)$ , конформно отображающая области  $E$  на  $G$ , причем эта функция единственна, если*

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha,$$

где  $z_0, w_0$  – заданные точки областей  $E$  и  $G$ , соответственно, а  $\alpha$  – заданное действительное число.

Отметим, что теоремы 24.3 и 24.5 приведены без доказательств. Строгое их доказательство (см. [17, 35]) выходит за рамки нашего курса, для практических же целей этих формулировок вполне достаточно.

◇ Заметим, что теорема Римана, гарантируя существование конформных отображений, не указывает способ их отыскания. Поэтому следующим нашим шагом будет исследование отображений, осуществляемых элементарными функциями, среди которых мы выделим функции, осуществляющие конформные отображения некоторых стандартных областей.

## 25. Линейная функция

Отображение, осуществляемое линейной функцией

$$w = az + b \quad (25.1)$$

можно рассматривать как композицию трех простейших отображений. Действительно, положим  $w_1 = |a|z$ ,  $w_2 = e^{i \arg a} w_1$ ,  $w_3 = w_2 + b$ . Тогда нетрудно видеть, что  $w = w_3(w_2(w_1(z)))$ . Из геометрического смысла произведения и суммы комплексных чисел ясно, что отображение  $w_1$  есть отображение подобия (сжатие при  $|a| < 1$ , растяжение при  $|a| > 1$ ); отображение  $w_2$  представляет поворот всей плоскости ( $w_1$ ) относительно начала координат на угол  $\arg a$  и, наконец, отображение  $w_3$  есть параллельный перенос плоскости ( $w_2$ ) на вектор, изображающий комплексное число  $b$ .

Так как  $w'(z) = a \neq 0$ , то отображение, осуществляемое линейной функцией (25.1), конформно во всей расширенной плоскости, причем оно имеет две неподвижные точки  $z_1 = c = b/(1-a)$  (при  $a \neq 1$ ) и  $z_2 = \infty$ .

Следовательно, классификацию отображений, осуществляемых линейной функцией, можно провести иначе. Так, при  $a = 1$  отображение сводится только к параллельному переносу на вектор, изображающий комплексное число  $b$ , с одной неподвижной точкой  $z = \infty$ . При  $a = |a|e^{i\alpha} \neq 1$  функцию (25.1) можно записать

$$w - c = a(z - c), \quad b = c - ac,$$

откуда следует, что каждый вектор  $z - c$ , выходящий из точки  $c$ , в результате отображения поворачивается на угол, равный  $\alpha = \arg a$  и подвергается растяжению в  $|a|$  раз, превращаясь в вектор  $w - c$ , выходящий из той же точки. Это означает, что отображение сводится к повороту всей плоскости как целого вокруг точки  $c = b/(1-a)$  на угол  $\alpha = \arg a$  и растяжению относительно этой точки в  $|a|$  раз. Обратная функция

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$$

тоже линейна.

**Пример 25.1.** Найти функцию, отображающую равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами  $A, B, C$ , соответствующих числам  $3 + 2i, 7 + 2i, 5 + 4i$ , лежащих в плоскости  $z$ , на равнобедренный прямоугольный треугольник с вершинами в точках  $A', B', C'$  в плоскости  $w$ , соответствующих числам  $0, -2i, 1 - i$ .

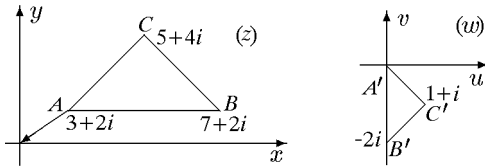


Рис. 56

**Решение.** Поскольку треугольники подобны, то отображение может быть осуществлено с помощью линейной функции.

*Первый способ.* Отображение можно разложить на следующие:

а) параллельный перенос, смещающий точку  $A$  в начало координат. Этот сдвиг производится вектором  $\vec{AO}$ , соответствующий числу  $-(3 + 2i)$ , и, следовательно, осуществляется функцией (см. рис. 56)

$$w_1 = z - (3 + 2i);$$

б) поворот около начала координат на угол  $-\pi/2$ , соответствующий преобразованию

$$w_2 = e^{-i\pi/2}w_1 \quad \text{или} \quad w_2 = -iw_1;$$

в) преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия, равным  $1/2$ . Это преобразование осуществляется функцией

$$w = \frac{1}{2}w_2.$$

Таким образом,

$$w = -\frac{1}{2}i[z - (3 + 2i)]$$

или окончательно

$$w = -\frac{i}{2}z + \left(\frac{3}{2}i - 1\right). \quad (25.2)$$

*Второй способ.* Пусть искома функция есть  $w = az + b$ , где  $a$  и  $b$  – пока неопределенные константы. Поскольку точки  $z_1 = 3 + 2i$  и  $z_2 = 7 + 2i$  должны перейти, соответственно, в точки  $w_1 = 0$  и  $w_2 = -2i$ , получаем систему для вычисления  $a$  и  $b$

$$\begin{cases} 0 = a(3 + 2i) + b, \\ -2i = a(7 + 2i) + b, \end{cases}$$

откуда  $a = -i/2$ ,  $b = 3i/2 - 1$ .

В заключение заметим, что точка

$$z = \frac{b}{1-a} = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}i$$

остается неподвижной. Из явного вида линейной функции (25.2) легко убедиться, что указанное отображение треугольников можно получить поворотом всей плоскости вокруг этой неподвижной точки на  $\pi/2$  по часовой стрелке и преобразованием подобия с коэффициентом подобия  $b = 1/2$ .

## 26. Инверсия

Как указывалось ранее, любую прямую на комплексной плоскости можно рассматривать как окружность бесконечного радиуса. Дополним понятие симметрии двух точек относительно прямой (окружности бесконечного радиуса) понятием симметрии двух точек относительно окружности конечного радиуса  $R$ .

◆ Две точки  $A$  и  $B$  будем называть взаимно симметричными относительно окружности  $C_R$ , если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности, а произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса  $R$  окружности, т.е.  $OA \cdot OB = R^2$ .

◇ Можно показать, что любая окружность или прямая, проходящая через точки  $A$  и  $B$ , ортогональна данной окружности.

Естественно, что если точка  $A$  будет приближаться к окружности, то точка  $B$  также приблизится к ней. Следовательно, всякая точка, лежащая на окружности, симметрична самой себе. В свою очередь, точкой, симметричной центру окружности, является бесконечно удаленная точка. Рис. 57 достаточно наглядно иллюстрирует способ построения симметричных точек  $A$  и  $B$ .



Если центр окружности  $C_R$  совпадает с началом координат комплексной плоскости, а точка  $A$  соответствует комплексному числу  $z$ , то симметричная ей относительно окружности  $C_R$  точка  $B$  будет соответствовать числу  $R^2/z^*$ . Действительно,

$$OA \cdot OB = |z| \cdot \left| \frac{R^2}{z^*} \right| = R^2$$

и, кроме того, числа  $z$  и  $R^2/z^*$  изображаются точками, лежащими на одном луче, выходящем из начала координат, так как

$$\text{Arg} \frac{R^2}{z^*} = -\text{Arg} z^* = \text{Arg} z.$$

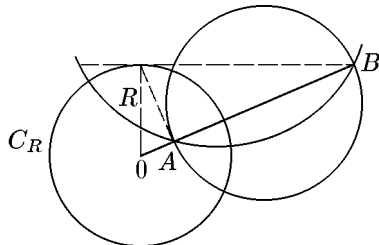


Рис. 57

В частности, точки  $z$  и  $1/z^*$  взаимно симметричны относительно окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

◆ Инверсией называется переход от точки  $z$  к точке  $w = 1/z^*$ .

Перейдем к отображению, осуществляемому функцией

$$w = \frac{1}{z}, \quad (26.1)$$

аналитической на полной комплексной плоскости, кроме точки  $z = 0$ , в которой она имеет полюс первого порядка. В полярных координатах  $z = |z|e^{i\arg z} = \rho e^{i\varphi}$ ,  $w = |w|e^{i\text{Arg} w} = r e^{i\theta}$  отображение (26.1) перепишется в виде

$$r = \frac{1}{\rho}, \quad \theta = -\varphi. \quad (26.2)$$

Удобно рассматривать отображение (26.2) как составленное из двух, геометрически более наглядных

$$r_1 = \frac{1}{\rho}, \quad \theta_1 = \varphi, \quad r = r_1, \quad \theta = -\theta_1.$$

Первое отображение есть преобразование симметрии относительно единичной окружности, а второе – преобразование симметрии относительно действительной оси (см. рис. 58).

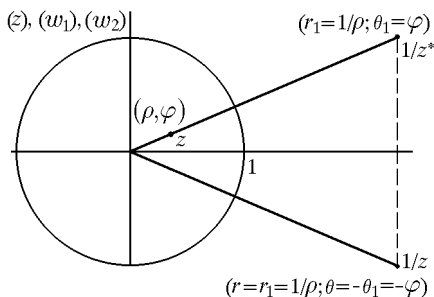


Рис. 58

Таким образом, преобразование, осуществляемое функцией (26.1), состоит из двух симметричных отображений относительно единичной окружности и действительной оси.

Так как при инверсии единичная окружность  $|z| = 1$  отображается в единичную окружность  $|w| = 1$ , а действительная ось плоскости  $z$  отображается в действительную ось плоскости  $w$ , то обе плоскости можно разбить на четыре области, изображенных на рис. 59.

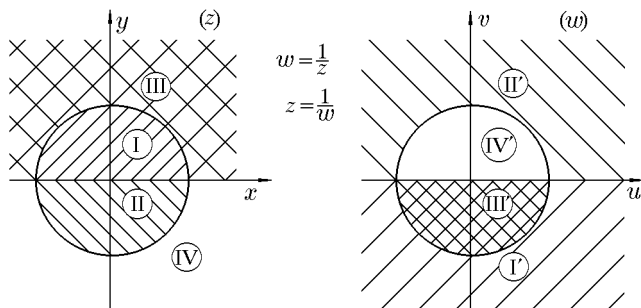


Рис. 59

Рис. 59 наглядно иллюстрирует взаимно однозначное соответствие областей, осуществляемое функцией  $1/z$  (образы и прообразы обозначены одной римской цифрой и одинаковой штриховкой).

**Теорема 26.1.** *Функция  $w = 1/z$  преобразует любую окружность полной комплексной плоскости снова в окружность.*

**Доказательство.** Напомним, что любую прямую мы условились рассматривать как окружность радиуса  $R = \infty$ . Оче-

видно, что уравнение любой прямой или окружности можно представить в виде

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \quad (26.3)$$

причем при  $A = 0$ ,  $B^2 + C^2 \neq 0$  уравнение (26.3) описывает прямую, а при  $A \neq 0$ ,  $B^2 + C^2 - AD > 0$  — окружность конечного радиуса. С заменой  $x^2 + y^2 = zz^*$ ,  $2x = z + z^*$ ,  $2iy = z - z^*$  уравнение (26.3) примет вид

$$Az z^* + (B - iC)z + (B + iC)z^* + D = 0. \quad (26.4)$$

Чтобы получить образ кривой (26.3) при отображении  $w = 1/z$ , заменим в (26.4)  $z$  на  $1/w$ , где  $w = u + iv$ . Получим

$$A \frac{1}{ww^*} + (B - iC) \frac{1}{w} + (B + iC) \frac{1}{w^*} + D = 0$$

или

$$D(u^2 + v^2) + 2Bu - 2Cv + A = 0. \quad (26.5)$$

Уравнение (26.5) имеет тот же вид, что и уравнение (26.3), с заменой  $A$  на  $D$  и  $C$  на  $-C$ . Отсюда следует, что образом прямой или окружности при инверсии является снова прямая или окружность.

◇ Заметим, что прямые и окружности, проходящие через начало координат ( $D = 0$ ), отображаются только в прямые. Прямые, не проходящие через начало координат ( $A = 0$ ,  $D \neq 0$ ), преобразуются в окружности, проходящие через начало координат ( $\infty \rightarrow 0$ ). И, наконец, окружности, не проходящие через начало координат, преобразуются снова в окружности.

Для исследования конформности рассматриваемого изображения нам нужно ввести понятие угла в бесконечно удаленной точке, причем можно, очевидно, ограничиться определением угла между двумя прямыми.

◆ Под углом в бесконечно удаленной точке между двумя прямыми понимают взятый с противоположным знаком угол во второй (конечной) точке пересечения этих прямых (на рис. 60,  $a$  угол в бесконечности между прямыми I и II отрицателен).

**Теорема 26.2.** *Функция  $w = 1/z$  осуществляет однолистное конформное отображение полной комплексной плоскости  $z$  на полную комплексную плоскость  $w$ .*

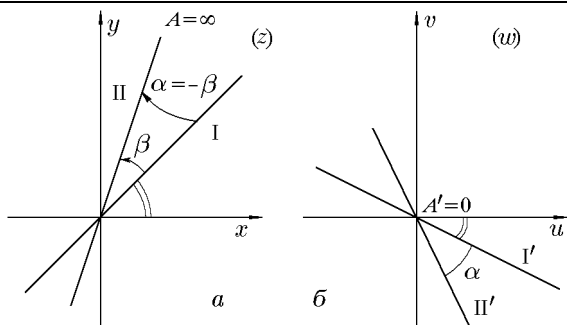


Рис. 60

**Доказательство.** Отображение, осуществляемое функцией  $w = 1/z$ , однолистно, так как обратная функция  $z = 1/w$  является однозначной во всей комплексной плоскости, включая и точку  $w = 0$ , которой соответствует  $z = \infty$ . Производная

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

существует и отлична от нуля во всех точках, за исключением  $z = 0$ ,  $z = \infty$ . Остается показать, что отображение  $w = 1/z$  сохраняет углы в точках  $z = 0$ ,  $z = \infty$ . Но это видно непосредственно из рис. 60 и принятого нами определения (при отображении  $w = 1/z$  прямая  $\arg z = \varphi$  переходит в прямую  $\arg w = -\varphi$ ). Следовательно, отображение конформно на всей расширенной плоскости.

**Теорема 26.3 (свойство сохранения симметрии).** *Функция  $w = 1/z$  преобразует любую пару точек  $z_1$  и  $z_2$ , симметричных относительно произвольной окружности  $\gamma$ , в пару точек  $w_1$  и  $w_2$ , симметричных относительно окружности  $\Gamma$  — образа окружности  $\gamma$ .*

**Доказательство.** Пусть  $w_1$  и  $w_2$  — образы точек  $z_1$  и  $z_2$ . Так как  $z_1$  и  $z_2$  симметричны относительно окружности  $\gamma$ , то любая окружность или прямая, проведенная через них, ортогональна  $\gamma$ . Поскольку преобразование  $w = 1/z$  обладает круговым свойством и свойством конформности, то их образы, проходящие через точки  $w_1$  и  $w_2$  также будут окружностями, причем перпендикулярными окружности  $\Gamma$ , являющейся образом  $\gamma$  в силу конформности отображения. Но это и означает, что  $w_1$  и  $w_2$  симметричны относительно  $\Gamma$ .

**Пример 26.1.** Найти образ окружности  $|z| = 2$  при отображении  $w = 1/z$ .

**Решение.** *Первый способ.* Из равенства  $w = 1/z$  имеем  $|w| = 1/|z|$ , откуда для  $|z| = 2$  получаем  $|w| = 1/2$  и, следовательно, образом окружности  $|z| = 2$  является окружность  $w = 1/2$  (см. рис. 61).

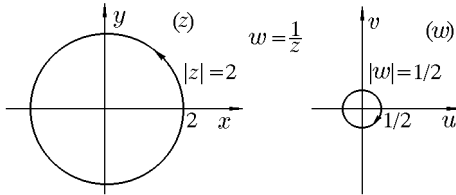


Рис. 61

*Второй способ.* Запишем  $z$  и  $w$  в показательной форме  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $w = r e^{i\theta}$ . Согласно (26.2)  $r = 1/2$ ,  $\theta = -\varphi$  и, следовательно,

$$w = \frac{1}{2} e^{-i\varphi}.$$

Поскольку  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , то образом окружности  $|z| = 2$  является окружность  $|w| = 1/2$  с центром в начале координат, обход которой совершается по часовой стрелке, когда исходная окружность обходится против часовой стрелки.

*Третий способ.* Запишем уравнение окружности  $|z| = 2$  в координатах  $x, y$

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (26.6)$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (26.3) с  $A = 1, B = 0, C = 0, D = -4$ . Отсюда, согласно (26.5), получим уравнение в переменных  $u, v$

$$-4(u^2 + v^2) + 1 = 0$$

или

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4},$$

что соответствует окружности  $|w| = 1/2$ .

## 27. Дробно-линейная функция

◆ Дробно-линейной функцией называется функция вида

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (27.1)$$

где  $a, b, c, d$  – постоянные, удовлетворяющие условию  $ad - bc \neq 0$ .

◇ Если условие  $ad - bc \neq 0$  не выполняется, то функция (27.1) сводится к постоянной в силу  $a/c = b/d$ .

Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией (27.1). Эта функция определена на полной плоскости  $z$ , причем считается, что  $w|_{z=-d/c} = \infty$ , а

$$w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} w = \frac{a}{c}.$$

Так как производная

$$w'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad (27.2)$$

существует всюду при  $z \neq -d/c$ , то функция (27.1) аналитична всюду на полной плоскости  $z$ , кроме точки  $z = -d/c$ , в которой она имеет полюс первого порядка. Уравнение (27.1) однозначно разрешимо относительно  $z$ :

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (27.3)$$

причем функция (27.3) тоже определена на полной плоскости  $w$  и выполняются условия  $z(a/c) = \infty$ ,  $z(\infty) = \lim_{w \rightarrow \infty} z(w) = -d/c$ . Поэтому дробно-линейная функция осуществляет однолистное отображение полной плоскости  $z$  на полную плоскость  $w$ .

Дробно-линейная функция – единственная функция, обладающая таким свойством. Справедлива следующая

**Теорема 27.1.** Если функция  $f(z)$  однолистка и аналитична всюду в полной комплексной плоскости  $z$ , кроме одной точки, то эта функция – дробно-линейная.

**Доказательство.** Пусть такой точкой является точка  $z_0$ . Эта точка не может быть существенно особой точкой функции  $f(z)$ , ибо по теореме Сохоцкого  $f(z)$  была бы заведомо неоднолистной. По теореме Лиувилля  $z_0$  не может быть и устранимой особой точкой. Следовательно,  $z_0$  есть полюс, причем первого порядка, ибо в окрестности полюса высшего порядка функция опять-таки неоднолистна. Если  $z_0 \neq \infty$ , то главная часть разложения функции  $f(z)$  в ряд Лорана в окрестности  $z_0$  имеет вид  $A/(z - z_0)$ . Вычтя эту часть из  $f(z)$ , получим функцию  $\varphi(z) = f(z) - A/(z - z_0)$ , не имеющую особенностей в полной плоскости. Следовательно,  $\varphi(z) \equiv \text{const}$ , и функция  $f(z) = \text{const} + A/(z - z_0)$  является дробно-линейной, поскольку исходная формула (27.1) всегда может быть переписана в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + d/c}. \quad (27.4)$$

Если  $z_0 = \infty$ , то главная часть функции  $f(z)$  имеет вид  $Az$ , и точно таким же образом доказывается, что  $f(z) = Az + \text{const}$ .

Ясно, что сложная функция, составленная из дробно-линейных, также является дробно-линейной функцией.

Заметим, что теорема справедлива для  $z_0 = 0$ ,  $z_0 = \infty$ , т.е. для линейной функции  $w = az + b$  и  $w = 1/z$ , что совершенно естественно, поскольку эти функции являются частными случаями дробно-линейной функции. С другой стороны, очень важно то, что в общем виде дробно-линейная функция, согласно (27.4), может быть представлена суперпозицией линейной функции и функции  $w = 1/z$ . Действительно,

$$w(z) = A + BT, \quad T = \frac{1}{t}, \quad t = z + \frac{d}{c}, \quad (27.5)$$

где

$$A = \frac{a}{c}, \quad B = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Тогда справедлива

**Теорема 27.2.** Произвольная дробно-линейная функция

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

осуществляет однолистное конформное отображение полной плоскости  $z$  на полную плоскость  $w$ , обладающее круговым свойством и свойством сохранения симметрии.

**Доказательство.** Сформулированная теорема для линейной функции очевидна, а для функции  $w = 1/z$  доказана в предыдущем параграфе и, следовательно, в силу (27.5) справедлива для дробно-линейной функции.

Рассмотрим несколько свойств дробно-линейной функции, важных для практических задач.

**Теорема 27.3.** *Существует одно и только одно дробно-линейное отображение полной плоскости  $z$  на полную плоскость  $w$ , переводящее три произвольных точки  $z_k$  в три произвольных точки  $w_k$ .*

**Доказательство.** Так как хотя бы один из коэффициентов формулы (27.1) отличен от нуля, то разделив на него числитель и знаменатель, получим, что дробно-линейное преобразование фактически зависит от трех комплексных или шести действительных параметров. С учетом сказанного выберем на плоскостях  $z$  и  $w$  точки  $z_1, z_2, z_3$  и  $w_1, w_2, w_3$ , соответствующие друг другу при рассматриваемом отображении. Введем вспомогательную плоскость  $T$  и построим дробно-линейные отображения плоскостей  $z$  и  $w$  на эту плоскость, переводящие заданные тройки в  $0, 1, \infty$ . Такими отображениями будут

$$T = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad T = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

Исключив из этой системы  $T$ , получим дробно-линейное отображение плоскости  $z$  на плоскость  $w$

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad (27.6)$$

переводящее точки  $z_1, z_2, z_3$  в точки  $w_1, w_2, w_3$ , соответственно. Мы не будем останавливаться на доказательстве единственности формулы (27.6), а отметим другое. Формула (27.6) остается справедливой и в том случае, когда одна из точек  $z_k$  и  $w_k$  есть бесконечно удаленная, если только в этой формуле заменить единицей числитель и знаменатель отношения, в котором участвует эта точка. Пусть, например,  $w_2 = \infty, z_2 = \infty$ , тогда (27.6) имеет вид

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Из предыдущей теоремы вытекает достаточно очевидная



**Теорема 27.4.** Любой круг полной плоскости  $z$  с помощью дробно-линейной функции можно преобразовать в любой круг полной плоскости  $w$ .

**Пример 27.1.** Найти функцию, осуществляющую отображение единичного круга на единичный круг (рис. 62).

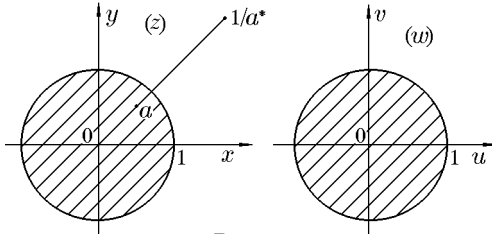


Рис. 62

**Решение.** Найдем общий вид функций, осуществляющих такое отображение. Отобразим произвольную внутреннюю точку  $a$  единичного круга на плоскости  $z$  в центр единичного круга на плоскости  $w$ , совпадающий с началом координат. Тогда, согласно принципу сохранения симметрии, симметричная ей относительно окружности  $|z| = 1$  точка  $1/a^*$  должна отображаться в бесконечно удаленную точку плоскости  $w$ . Дробно-линейная функция, удовлетворяющая таким условиям, имеет вид

$$w = k \frac{z - a}{z - 1/a^*} = -ka^* \frac{z - a}{1 - za^*} = k' \frac{z - a}{1 - za^*}, \quad (27.7)$$

где  $k' = -ka^*$  — произвольная комплексная постоянная и должна быть определена из условия  $|w| = 1$ , когда  $|z| = 1$ . Тогда, согласно (27.7),

$$|w| = |k'| \frac{|z - a|}{|1 - za^*|} = 1, \quad (27.8)$$

откуда с учетом того, что  $(1 - za^*) = (1 - z^*a)^*$  и, следовательно,  $|1 - za^*| = |1 - z^*a|$ , при условии  $|z| = 1$  имеем

$$|1 - za^*| = |1 - z^*a| |z| = |z - z^*za| = |z - a|$$

ИЛИ

$$\frac{|z - a|}{|1 - za^*|} = 1.$$

Равенство (27.8) принимает вид  $|k'| = 1$ , откуда  $k' = e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  – произвольная действительная величина. Как и следовало ожидать, существует бесконечное множество дробнолинейных функций

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{1 - za^*}, \quad (27.9)$$

отображающих единичный круг на себя и содержащих три действительных параметра.

**Пример 27.2.** Найти функцию, осуществляющую отображение верхней полуплоскости на круг единичного радиуса (рис. 63).

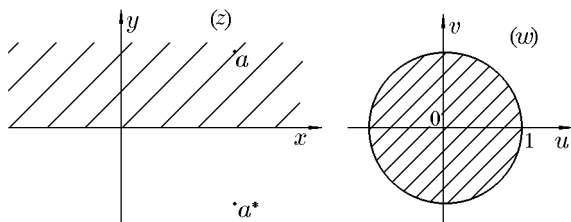


Рис. 63

**Решение.** Отобразим произвольную точку  $a$  верхней полуплоскости в центр единичного круга с центром в начале координат. Тогда, согласно принципу сохранения симметрии симметричная ей относительно оси  $Ox$  точка  $a^*$  должна отобразиться в бесконечно удаленную точку плоскости  $w$ . Дробнолинейная функция, удовлетворяющая таким условиям, имеет вид

$$w = k \frac{z - a}{z - a^*}, \quad (27.10)$$

где  $k$  – произвольная комплексная постоянная и должна быть определена из условия  $|w| = 1$ . Тогда, согласно (27.10),

$$|w| = |k| \frac{|z - a|}{|z - a^*|} = 1,$$

откуда с учетом  $|z - a| = |z - a^*|$  ( $|x - a| = |x - a^*|$  при вещественных  $z$ ) имеем  $|k| = 1$ , и, следовательно,  $k = e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  – произвольная действительная величина. Как и следовало

ожидать, ввиду произвольности точки  $a$  существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих требуемое отображение

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - a}{z - a^*}. \quad (27.11)$$

Каждая из этих функций определяется значениями трех действительных параметров: параметра  $\alpha$  и двух параметров, определяющих комплексное число  $a$ .

**Пример 27.3.** Найти функцию, осуществляющую отображение верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость.

**Решение.** Найдем общий вид таких функций. Воспользуемся формулой (27.6), задав две тройки соответствующих точек  $z_k = x_k$ ,  $w_k = u_k$  действительных осей  $x$  и  $u$ . Так как числа  $z_k$  и  $w_k$  действительны, то после преобразования формула (27.1) примет вид

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (27.12)$$

где  $a, b, c, d$  – действительные числа. Наоборот, любая функция (27.12) с действительными коэффициентами преобразует ось  $Ox$  в ось  $Ou$  и, следовательно, полуплоскость  $z$  в одну из полуплоскостей  $w$ , верхнюю или нижнюю. Мы получим верхнюю полуплоскость, если потребуем, чтобы производная  $w'(z)$  на действительной оси была положительной, т.е.

$$w'(z)|_{z=x} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0,$$

откуда  $ad - bc > 0$ . Таким образом, формула (27.12) при действительных коэффициентах, удовлетворяющих условию  $ad - bc > 0$ , дает общий вид линейных функций, отображающих верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость.

**Пример 27.4.** Найти образ  $G$  области  $E : |z + 1| \leq 3$  при отображении

$$w = \frac{z + 3}{z + 1}.$$

**Решение.** Исходную дробно-линейную функцию можно представить в виде следующей суперпозиции отображений:

$$w = 1 + \frac{2}{z + 1} = 1 + p; \quad p = 2T; \quad T = \frac{1}{t}; \quad t = z + 1. \quad (27.13)$$

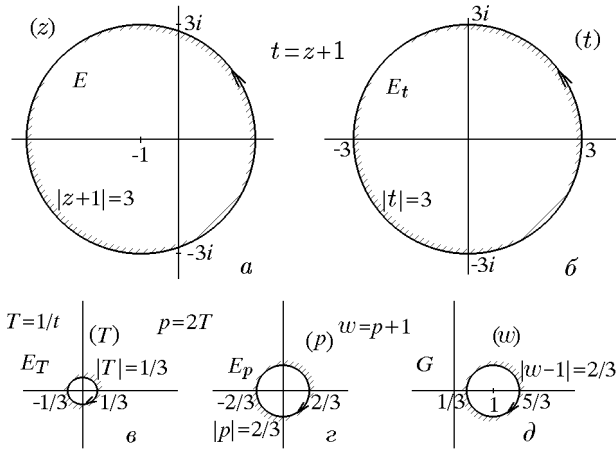


Рис. 64

Первое отображение  $t = z + 1$  переводит окружность  $|z + 1| = 3$  в окружность  $|t| = 3$  простейшим параллельным переносом. Направление обхода сохраняется. Прообраз  $E$  и образ  $E_t$  представляют собой внутренние части указанных окружностей (рис. 64, а, б). Следующее отображение переводит окружность  $|t| = 3$  в окружность  $|T| = 1/3$ . Направление обхода меняется. Согласно принципу соответствия границ, образом  $E_T$  является внешняя часть окружности  $|T| = 1/3$  (рис. 64, б, в). Продолжая в соответствии с (27.13), окончательно получим  $G : |w - 1| \geq 2/3$ .

**Пример 27.5.** Найти образ  $G$  области  $E : |z - 2| \leq 1$  при отображении

$$w = \frac{1}{z - 3}.$$

**Решение.** Окружность  $|z - 2| = 1$  и ось  $Ox$  в точках пересечения образуют углы, равные  $\pi/2$ . Функция  $w = 1/(z - 3)$  действительную ось  $Ox$  переводит в действительную ось  $Ou$ , а окружность  $|z - 2| = 1$  — в прямую, так как  $w(3) = \infty$ . Уравнение прямой имеет вид  $\operatorname{Re} w = u = -1/2$ , так как  $w(1) = -1/2$  и прямая должна быть перпендикулярна оси  $Ou$ . Вычислим дополнительно значение  $w$  в точке  $z = 2 - i$ , т.е.

$$w(2 - i) = \frac{1}{2 - i - 3} = -\frac{1}{1 + i} = -\frac{1}{2}(1 - i).$$

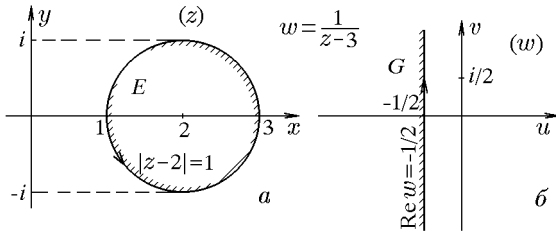


Рис. 65

Движение от точки  $z = 1$  к точке  $z = 2 - i$  таково, что область  $E$  остается слева. Тогда искомой областью  $G$ , согласно принципу соответствия границ, является полуплоскость  $\operatorname{Re} w \leq -1/2$ , так как именно она остается слева при движении от точки  $w = -1/2$  к точке  $w = -(1 - i)/2$  (рис. 65). Это можно было установить и иначе. Вычислим значение функции в точке  $z = 2$ , принадлежащей области  $E$ . Получим  $w(2) = -1$ . Точка  $w = -1$  принадлежит полуплоскости  $\operatorname{Re} w \leq -1/2$ , что и требовалось доказать.

**Пример 27.6.** Найти образ  $G$  области  $E : |z - 1/\sqrt{2}| \leq 1 \cap |z + 1/\sqrt{2}| \leq 1$  при отображении

$$w = \frac{\sqrt{2}z - i}{\sqrt{2}z + i}.$$

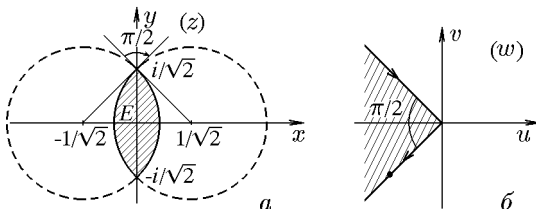


Рис. 66

**Решение.** Точки пересечения дуг окружностей соответствуют числам  $z_1 = i/\sqrt{2}$ ,  $z_2 = -i/\sqrt{2}$ . Дробно-линейная функция  $w = (\sqrt{2}z - i)/(\sqrt{2}z + i)$  отображает точку  $z_1$  в точку  $w_1 = 0$ , так как  $w(i/\sqrt{2}) = 0$ , а точку  $z_2$  в точку  $w_2 = \infty$ , так как  $w(-i/\sqrt{2}) = \infty$ , и, следовательно, исходную область  $E$  в угол с вершиной в точке  $w_1 = 0$ . Этот угол равен  $\pi/2$ , поскольку

радиусы, проведенные в точки пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны (см. рис. 66,а). Для того чтобы выяснить, как расположен этот угол, достаточно определить хотя бы одну точку на одной из его сторон. Выясним, например, в какую точку отобразится точка  $z = 1 - 1/\sqrt{2}$ . Находим

$$w\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2} - 1 - i}{\sqrt{2} - 1 + i} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 + i)}{2 - \sqrt{2}}.$$

Эта точка расположена в третьей четверти на биссектрисе координатного угла. Следовательно, дуга окружности  $|z + 1/\sqrt{2}| = 1$  отображается в луч, идущий из начала координат по биссектрисе координатного угла третьей четверти. Так как дробно-линейная функция сохраняет углы не только по величине, но и по направлению, дуга окружности  $|z - 1/\sqrt{2}| = 1$  отобразится в биссектрису координатного угла второй четверти, что соответствует повороту на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Так как при движении от точки  $z_1 = i/\sqrt{2}$  к точке  $z = 1 - 1/\sqrt{2}$  область  $E$  остается справа, то искомой областью  $G$  будет внутренняя часть угла  $5\pi/4 \geq \arg w \geq 3\pi/4$ , поскольку именно она остается справа при движении от точки  $w_1 = 0$  к точке  $w = (1 - \sqrt{2})(1 + i)/(2 - \sqrt{2})$  (рис. 66).

## 28. Степенные функции

Функции  $w = z^n$  и  $w = \sqrt[n]{z}$  для целых положительных  $n$  определены в § 1., там же было установлено, что первая из этих функций однозначна, а вторая  $n$ -значна, за исключением точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ .

Функция

$$w = z^n \tag{28.1}$$

– аналитическая на всей комплексной плоскости, за исключением точки  $z = \infty$ , являющейся полюсом  $n$ -го порядка. В точке  $z = 0$  производная  $(z^n)' = nz^{n-1}$  обращается в нуль.

Если в плоскостях  $z$  и  $w$  ввести полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  и  $(r, \theta)$ , соответственно, то соотношения (28.1) можно переписать

$$r = \rho^n, \quad \theta = n\varphi. \tag{28.2}$$

Пусть  $z$  описывает окружность радиуса  $\rho$  в положительном направлении, тогда образ  $w$ , согласно (28.2), будет описывать окружность радиуса  $r = \rho^n$  в том же направлении. При этом если точка  $z$  опишет полную окружность ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ), то

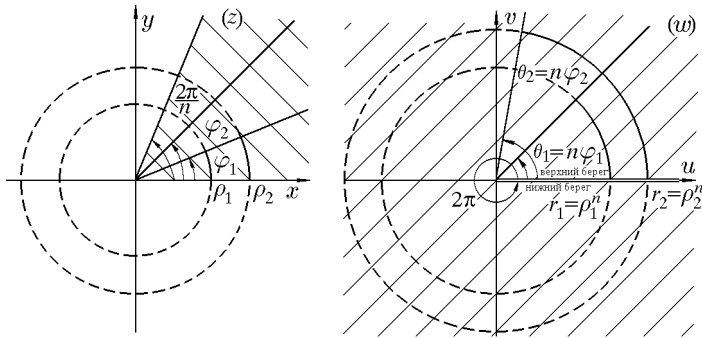


Рис. 67

точка  $w$  опишет окружность  $n$  раз. Заставим теперь точку  $z$  пробегать луч  $\arg z = \varphi$  от нуля до  $\infty$ . Согласно (28.2), образ  $w$  тоже будет пробегать луч  $\arg w = \theta = n\varphi$  в том же направлении от нуля до  $\infty$ , т.е. образ исходного луча повернется на угол  $(n - 1)\varphi$  (рис. 67).

С учетом сказанного заключаем, что, во-первых, любой сектор с углом раствора  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi/n$ ) отображается в сектор на плоскости  $w$  с углом раствора  $\theta = n\varphi$ , в  $n$  раз большим (поэтому функцию  $w = z^n$  используют каждый раз, когда нужно отобразить один угол на другой, больший угол). Во-вторых, осуществляемое отображение конформно во всех точках, за исключением точек  $z = 0$  и  $z = \infty$ , поскольку углы с вершинами в этих точках увеличиваются при таком отображении в  $n$  раз. И, в-третьих, точки  $z_1$  и  $z_2$ , имеющие равные модули и различающиеся аргументами на целое кратное  $2\pi/n$ , и только такие точки переходят при отображении  $w = z^n$  в одну точку. Следовательно, для однолиственности отображения  $w = z^n$  в некоторой области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы область  $D$  не содержала никаких двух точек  $z_1$  и  $z_2$ , связанных соотношениями

$$|z_1| = |z_2|, \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2\pi k}{n}, \quad (28.3)$$

где  $k = \overline{1, n}$  – целое.

Этому условию удовлетворяют, например, секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \varphi < (k + 1) \frac{2\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n - 1}, \quad (28.4)$$

каждый из которых функцией  $w = z^n$  однолистно и конформно отображается в плоскость  $w$  с исключенной положительной полуосью (рис. 67).

Как уже упоминалось, функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad (28.5)$$

обратная функции  $z = w^n$ ,  $n$ -значна во всех точках, за исключением  $z = 0$ ,  $z = \infty$ , в которых  $w = 0$  и  $w = \infty$ . Из формулы

$$z = w^n \quad \text{или} \quad x + iy = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta),$$

которая равносильна (28.5), следует, что прямым  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  в плоскости  $z$  соответствуют кривые, в полярных координатах задаваемые уравнениями

$$r = \sqrt[n]{\frac{x_0}{\cos n\theta}}, \quad r = \sqrt[n]{\frac{y_0}{\sin n\theta}}.$$

При  $n = 2$  эти кривые вырождаются в гиперболы. Как вытекает из определения, значение корня  $\sqrt[n]{z}$  определяется значением аргумента, выбранным для точки  $z$  (что соответствует выбору одной из вершин правильного многоугольника, в которых расположены корни). Обозначим через  $\arg z_0$  одно из таких значений. Заставим точку  $z$  описывать, начиная с  $z_0$ , некоторую непрерывную линию  $\gamma$ , не проходящую через начало координат. В силу непрерывности  $\arg z$  и  $|z|$  значение  $w = \sqrt[n]{z}$ , которое вполне определяется сделанным выбором аргумента, также будет изменяться непрерывно.

Предположим, что кривая  $\gamma$  замкнута и не содержит внутри себя точку  $z = 0$ . Тогда при полном обходе контура  $\gamma$  точка  $w = \sqrt[n]{z}$  описывает некоторую замкнутую кривую  $\Gamma$ , возвращаясь к своему первоначальному положению, ибо  $\arg z$  возвращается к начально выбранному значению  $\arg z_0$  (рис. 68).

Значения корня, определяемые другим выбором начального значения  $\arg z_0$  (отличающимся на целое кратное  $2\pi$ ) при полном обходе  $\gamma$ , очевидно, также описывают аналогичные замкнутые кривые  $\Gamma_k$ , отличающиеся от кривой  $\Gamma$  только поворотом на угол  $2k\pi/n$ ,  $k = \overline{1, n-1}$  (для  $n = 3$  см. рис. 68, сплошные линии). Рассмотрим теперь случай, когда  $\tilde{\gamma}$  — замкнутая линия, по-прежнему проходящая через  $z_0$ , но содержащая внутри себя точку  $z = 0$ . Тогда при полном обходе  $\tilde{\gamma}$  не возвращается в свое первоначальное положение, а занимает новое положение  $w_0^{(1)} = w_0 e^{i2\pi/n}$ . Это объясняется тем, что



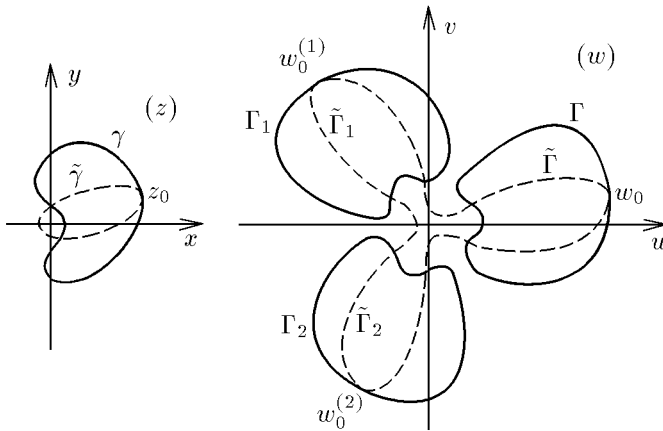


Рис. 68

$\arg z$  при обходе кривой получает приращение  $2\pi$ . К своему начальному положению точка  $w = \sqrt[n]{z}$  возвратится лишь после  $n$ -кратного обхода кривой  $\tilde{\gamma}$  (для  $n = 3$  см. рис. 68, штриховая линия).

Таким образом, в любой области  $D$ , не содержащей ни одной замкнутой кривой, обходящей  $z = 0$ , можно выделить  $n$  непрерывных и однозначных функций, каждая из которых принимает одно из значений  $\sqrt[n]{z}$ . И, как было показано выше, эти значения в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга множителем  $e^{i2k\pi/n}$ . Очевидно, что каждая такая ветвь будет осуществлять однолиственное отображение области  $D$ , причем функция, осуществляющая это отображение, будет аналитической, ибо существует вполне определенное значение производной, равное

$$(z^{1/n})' = \frac{1}{n} z^{1/n-1}.$$

Если же область  $D$  содержит хотя бы одну замкнутую кривую, обходящую точку  $z_0$ , то в такой области ветви  $\sqrt[n]{z}$  нельзя отделить друг от друга. Следовательно, в такой области мы не можем, как в предыдущем случае, рассматривать функцию  $\sqrt[n]{z}$  как совокупность отдельных и однозначных аналитических функций. Точка  $z = 0$  в любой окрестности которой нельзя разделить  $n$  отдельных ветвей функции  $\sqrt[n]{z}$  (ветви как бы соединяются в этой точке), согласно определению, является алгебраической точкой ветвления порядка  $n$ .

Очевидно, точка  $z = \infty$  также является алгебраической точкой разветвления порядка  $n$  функции  $\sqrt[n]{z}$ , так как каждый обход вокруг нее вдоль окружности сколь угодно большого радиуса с центром в начале координат является вместе с тем и обходом вокруг начала координат. Таким образом, функция  $\sqrt[n]{z}$  имеет две алгебраические точки разветвления порядка  $n$ :  $z = 0$  и  $z = \infty$ .

Возвращаясь к обсуждаемым выше областям  $D$ , отметим, что в качестве примера области  $D$  первого типа можно рассматривать плоскости  $z$  с вырезанной прямой линией  $L$ , идущей от  $z = 0$  в бесконечность. Если  $L$  совпадает с положительной полуосью, то ветви функции  $\sqrt[n]{z}$  отображают область  $D$  на секторы

$$k \frac{2\pi}{n} < \arg w < (k+1) \frac{2\pi}{n}.$$

Эти отображения обратны к рассмотренным выше отображениям функции  $w = z^n$ . Область  $D$  заведомо является областью второго типа, если она содержит внутри себя точку  $z = 0$ .

Соотношения (28.4) задают условия однолиственности функций  $w = z^n$  и  $z = \sqrt[n]{w}$ . Для того чтобы получить взаимно однозначное соответствие между точками  $z$  и  $w$ , можно воспользоваться римановой поверхностью, построение которой было рассмотрено в разд. 20.

**Пример 28.1.** Найти

- а) образы декартовой координатной сетки плоскости  $z$ ;
- б) прообразы декартовой координатной сетки плоскости  $w$  при отображении  $w = z^2$ .

**Решение.** а) Рассмотрим прямые  $x = a$ . Их образами будут линии, определяемые уравнениями  $u = a^2 - y^2$ ,  $v = 2ay$ . Исключая переменную  $y$ , находим

$$u = a^2 - \left(\frac{v}{2a}\right)^2.$$

Следовательно, образами прямых  $x = a$  являются параболы  $u = a^2 - (v/2a)^2$ . Аналогично получаем, что образами прямых  $y = b$  являются параболы  $u = (v/2b)^2 - b^2$ .

б) Пусть  $u = A$ ,  $v = B$  — прямые, параллельные координатным осям  $Ou$ ,  $Ov$ . Тогда  $x^2 - y^2 = A$ ,  $xy = B/2$ , т.е. прообразы прямых являются два семейства гипербол, ортогональных друг другу, за исключением тех кривых, которые проходят через точку  $z = 0$  ( $w'(0) = 0$ ), где они пересекаются под углом  $\pi/4$ .

## 29. Показательная и логарифмическая функции

Воспользуемся соотношением (7.11), согласно которому показательную функцию можно записать в виде

$$w = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (29.1)$$

Отображение, осуществляемое функцией (29.1), конформно в каждой точке комплексной плоскости, так как производная этой функции существует и отлична от нуля в любой конечной точке плоскости  $z$ . Выражение  $\exp(\infty)$  будем считать лишенным смысла, так как предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$$

не существует. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

хотя и в том, и в другом случае  $z \rightarrow \infty$ . Отсюда, в частности, следует, что  $\exp z$  не совпадает ни с одним полиномом, так как всякий полином, не равный постоянной, стремится к бесконечности при  $z \rightarrow \infty$ , т.е. для  $e^z$  точка  $z = \infty$  является существенно особой. Легко выяснить особенности отображения, задаваемого показательной функцией, если в плоскости  $z$  ввести декартовы, а в плоскости  $w$  — полярные координаты, т.е. положить  $z = x + iy$ ,  $w = \rho e^{i\varphi}$ . Согласно (29.1), получим

$$|w| = \rho = e^x, \quad \arg w = \theta = y. \quad (29.2)$$

Заставим  $z$  описывать прямую, параллельную мнимой оси  $z = x_0 + iy$  ( $x_0 = \text{const}$ ). Тогда образ  $w$ , согласно (29.2), будет находиться в плоскости  $w$  на окружности радиуса  $|w| = \rho = e^{x_0}$  с центром в начале координат. При этом, когда точка  $z$  описывает прямую однократно так, что ордината этой точки непрерывно растет от минус бесконечности до бесконечности, то  $w$  описывает соответствующую окружность бесконечно много раз в одном и том же (положительном) направлении.

Если же точка  $z$  описывает прямую  $z = x + iy_0$  ( $y_0 = \text{const}$ ), параллельную действительной оси, то  $w$ , очевидно, пробегает луч, выходящий из начала координат и образующий с положительной частью действительной оси угол  $\theta = y_0$ . При этом, когда точка  $z$  описывает прямую однократно так, что ее абсцисса  $x$  непрерывно растет от  $-\infty$  до  $\infty$ , то и  $w$  описывает

соответствующий луч однократно так, что расстояние от точки до начала координат непрерывно растет от нуля до  $\infty$  (оба предельных случая, конечно, исключаются). Отсюда следует, что любая полоса  $0 < y < y_0$  на  $z$  ( $y_0 < 2\pi$ ) конформно отображается функцией  $w = e^z$  на сектор  $0 < \theta < y_0$  с вершиной в начале координат на плоскости  $w$ .

◊ Показательную функцию используют, когда нужно конформно отобразить некоторую прямолинейную полосу на внутреннюю часть угла.

В частности, полоса  $0 < y < \pi$  конформно отображается на верхнюю полуплоскость  $w$ , а полоса  $0 < y < 2\pi$  – на всю плоскость  $w$  с разрезом по положительной действительной полуоси  $0 < \theta < 2\pi$  (рис. 69).

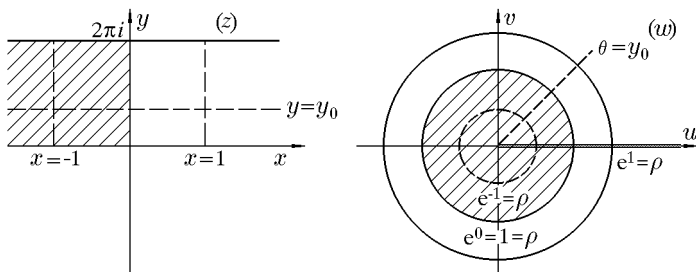


Рис. 69

Из сказанного выше (а также периодичности показательной функции с периодом  $2\pi i$ ) следует, что отображение, осуществляемое показательной функцией, будет взаимно однозначным в любой полосе шириной  $h \leq 2\pi$ , параллельной действительной оси плоскости  $z$ . С другой стороны, для того чтобы область плоскости  $z$  отображалась функцией  $e^z$  взаимно однозначно на соответствующую область плоскости  $w$ , необходимо и достаточно, чтобы она не содержала никаких точек, связанных соотношением  $z_2 - z_1 = 2\pi ki$  ( $k = -\infty, \infty$ ). Такому условию однолистности удовлетворяет всякая область, заключенная в полосе  $2k\pi + y_0 < y < 2(k+1)\pi + y_0$ . Для того чтобы отображение было взаимно однозначным не только внутри полосы, но и на всей комплексной плоскости  $z$ , необходимо вместо одного листа плоскости  $w$  построить бесконечномерную риманову поверхность (см. рис. 34) склеиванием нижнего края разреза каждого листа с верхним краем разреза листа, лежащего под данным листом. Тогда если точка  $z$  движется параллельно оси  $Oy$  вверх, то точка  $w$ , вращаясь против часовой стрелки вокруг начала координат, как бы «поднимает-

ся» на римановой поверхности по спирали, переходя с одного листа на другой. Таким образом обеспечивается взаимная однозначность отображений, задаваемых показательной функцией, на всей плоскости  $z$ .

**Логарифмическая функция** была определена как обратная показательной:

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z. \quad (29.3)$$

Как и для рассмотренных выше многозначных функций, значение  $\operatorname{Ln} z$  определяется значением аргумента, которое приписано точке  $z$ . Предположим, что точка  $z$ , начиная от положения  $z_0 \neq 0$ , описывает некоторую кривую  $\gamma$ , не проходящую через начало координат. Как и раньше, через  $\arg z$  обозначим однозначную и непрерывную вдоль  $\gamma$  ветвь функции  $\operatorname{Arg} z$ , определяемую каким-либо фиксированным начальным значением  $\arg z_0$ . Аналогично через  $\ln z$  обозначаем значение  $\operatorname{Ln} z$  при выбранном значении  $\arg z$ . Очевидно, функция  $\ln z$ , в отличие от  $\operatorname{Ln} z$ , будет однозначной и непрерывной вдоль  $\gamma$ .

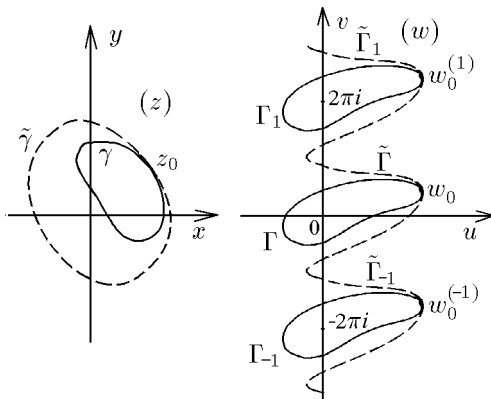


Рис. 70

Предположим, что кривая  $\gamma$  замкнута и не содержит внутри себя точку  $z = 0$ . Когда  $z$  описывает  $\gamma$ , точка  $w = \ln z$  пробегает некоторую замкнутую кривую  $\Gamma$ . Другие значения логарифма, определяемые другим начальным значением  $\arg z_0$ , опишут кривые  $\Gamma_k$ , отличающиеся от  $\Gamma$  сдвигом на вектор  $2\pi ik$ ,  $k = \overline{-\infty, \infty}$  (рис. 70, сплошные линии).

Если теперь  $\tilde{\gamma}$  — замкнутая кривая без точек самопересечения, содержащая  $z = 0$  внутри себя, то при полном ее обходе

точкой  $z$  в положительном направлении точка  $w = \ln z$  не вернется к своему первоначальному положению, а займет новое положение  $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$  (рис. 70, штриховые линии).

Отсюда следует, что в любой области  $D$ , которая не содержит замкнутых кривых, обходящих точку  $z = 0$ , можно выделить бесконечное множество непрерывных и однозначных ветвей многозначной функции  $w = \text{Ln } z$ , значения которых в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми  $2k\pi i$ . Каждая такая ветвь  $\ln z$  будет осуществлять взаимно однозначное отображение области  $D$  и, следовательно, по теореме о производной обратной функции будет обладать производной

$$(\text{Ln } z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z},$$

Причем производная одна и та же для всех ветвей. Таким образом, все такие ветви функции  $\text{Ln } z$  будут аналитическими функциями.

Если же область  $D$  содержит хотя бы одну замкнутую кривую, охватывающую точку  $z = 0$ , то в такой области ветви функции  $\text{Ln } z$  нельзя отделить друг от друга. Точка  $z = 0$ , в которой как бы «соединяются» все ветви  $\text{Ln } z$ , называется логарифмической точкой разветвления этой функции (хотя  $\text{Ln } z$  в точке  $z = 0$  не определен).

Точка  $z = \infty$  — также логарифмическая точка разветвления, так как каждый обход вокруг нее является также обходом вокруг начала координат  $z = 0$ .

Риманова поверхность логарифма бесконечнолистка. Ее вид показан на рис. 34.

**Пример 29.1.** Найти образ области  $E$  (рис. 71, *a*) при отображении  $w = e^z$ .

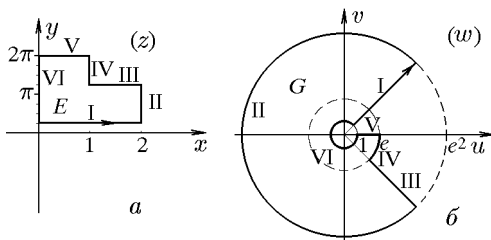


Рис. 71

**Решение.** Согласно (29.2), декартова координатная сетка отображается в семейства концентрических окружностей и лучей. Рис. 71,б совместно с принципом соответствия границ дает наглядное представление об образе области  $E$ .

**Пример 29.2.** Найти образ комплексной плоскости  $z$  с разрезом по отрицательной части действительной оси при отображении  $w = \ln z$ .

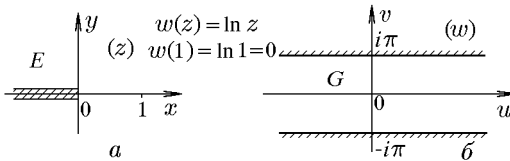


Рис. 72

**Решение.** При рассмотрении функции  $w = e^z$  мы установили, что любая полоса  $y_0 < y < y_0 + 2\pi$  отображается этой функцией на полную плоскость с разрезом по лучу  $\arg w_0 = y_0$ . Положив  $y_0 = -\pi$ , можно утверждать, что полоса  $-\pi < y < \pi$  отобразится на всю плоскость с разрезом по отрицательной части действительной оси. Отсюда следует, что функция  $w = \ln z$ , обратная к  $w = e^z$ , отобразит область  $E$  (рис. 72,а) в область  $G: -\pi < \text{Im } w < \pi$  (рис. 72,б).

## 30. Функция Жуковского

### ◆ Функция

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) \quad (30.1)$$

называется функцией Жуковского. Функция Жуковского (30.1) определена и аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением точек  $z_1 = 0$  и  $z_2 = \infty$ , которые являются простыми полюсами. Так как

$$w' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right),$$

то отображение, осуществляемое функцией (30.1), конформно во всех точках области однолиственности и аналитичности, за исключением точек  $z = \pm 1$ , в которых  $w' = 0$ .

Найдем области однолиственности. Для этого предположим, что  $z_1$  и  $z_2$  переходят в одну точку  $w$ , т.е.

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2},$$

откуда

$$(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$z_1 = z_2 \quad \text{или} \quad z_1 z_2 = 1.$$

Таким образом, отображение, осуществляемое функцией Жуковского (30.1) в области  $D$  будет однолиственным, если область  $D$  не содержит двух точек, связанных соотношением  $z_1 z_2 = 1$ . Очевидно, что этому условию удовлетворяет круг единичного радиуса  $|z| < 1$  или кольцо  $|z| > 1$ .

Выясним, как функция (30.1) отображает окружность  $|z| = \rho$  и лучи  $\arg z = \varphi$ . Для этого положим

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = u + iv.$$

Тогда из (30.1) имеем

$$u = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi. \quad (30.2)$$

Исключив из (30.2) параметр  $\varphi$ , приходим к уравнению

$$u^2 / \left[ \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \right]^2 + v^2 / \left[ \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \right]^2 = 1, \quad (30.3)$$

которое определяет эллипс с полуосями

$$a_\rho = \frac{1}{2} \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right), \quad b_\rho = \frac{1}{2} \left| \rho - \frac{1}{\rho} \right| \quad (30.4)$$

и фокусами в точках  $w = -1$  и  $w = 1$ . Следовательно, концентрические окружности  $|z| = \rho$  отображаются в софокусные эллипсы с фокусами в точках  $w = -1$ ,  $w = 1$  и с полуосями  $a_\rho$  и  $b_\rho$  (30.4). При возрастании  $\rho$  от нуля до единицы полуоси этих эллипсов монотонно убывают от бесконечности до значений  $a_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ . При  $\rho = 1$  эллипс вырождается в отрезок действительной оси  $[-1, 1]$ , проходимый дважды. При



дальнейшем возрастании радиуса  $\rho$  от  $\rho = 1$  полуоси эллипсов начинают монотонно возрастать, так как каждый эллипс возникает второй раз. Если направление обхода рассматриваемых окружностей выбрать положительным, то направление обхода соответствующих им эллипсов будет также положительным для радиусов  $\rho > 1$  и противоположным для радиусов  $\rho < 1$ , что непосредственно следует из второй формулы (30.4).

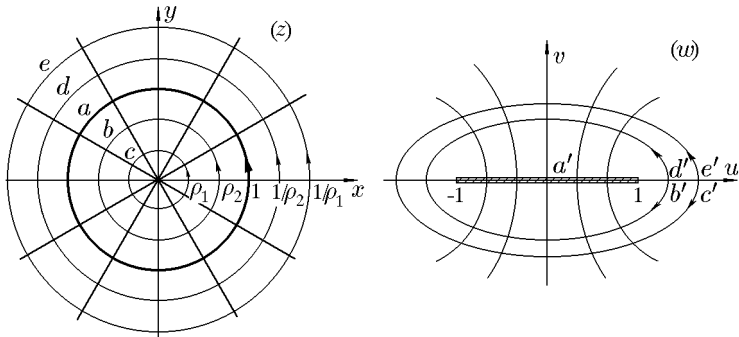


Рис. 73

Таким образом, круг  $|z| < 1$  отображается на комплексную плоскость  $w$  с вырезанным отрезком  $[-1, 1]$  действительной оси, причем верхняя полуокружность  $|z| = 1$  отображается в нижний берег разреза, а нижняя – в верхний. Кольцо  $|z| > 1$  также отображается на эту плоскость с вырезанным отрезком, с той лишь разницей, что верхняя полуокружность переходит в верхний берег разреза, а нижняя – в нижний (рис. 73).

Аналогично, исключив из уравнений (30.2) параметр  $\rho$ , приходим к уравнению

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1, \quad (30.5)$$

которое задает семейство гипербол, софокусных с эллипсами (30.4) и ортогональных с семейством этих эллипсов. Эти гиперболы являются образами лучей  $\arg z = \varphi$  при отображении (30.1). Формулы (30.2) позволяют достаточно просто определить направление движения точки  $w$  по гиперболам (30.5), если задано направление движения точки по лучу  $\arg z = \varphi$  (см. рис. 73).

Обратная к (30.1) функция

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \quad (30.6)$$

двузначна. Эта двузначность обусловлена наличием в формуле (30.6) квадратного корня  $\sqrt{w^2 - 1}$ . Взаимно однозначным образом всей плоскости  $z$  при отображении (30.6) является двулистная риманова поверхность, которая склеивается из двух экземпляров плоскости  $w$  с разрезом по отрезку  $[-1, 1]$  следующим образом: верхний берег разреза первого листа склеивается с нижним берегом разреза второго листа, а нижний берег разреза первого — с верхним берегом разреза второго (см. разд. «Аналитическое продолжение» и свойства функции  $z = w^{1/n}$ ). По построению римановой поверхности видно, что точки  $w = 1$  и  $w = -1$  являются для этой функции алгебраическими точками ветвления второго порядка (это видно, впрочем, и прямо из формулы (30.6)).

◇ В заключение отметим, что функция

$$w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

сводится к функции  $\tilde{w}(\tilde{z}) = \tilde{z}^2$  с помощью дробно-линейных преобразований, поскольку

$$\tilde{w} = \frac{w(z) - 1}{w(z) + 1} = \left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^2 = \tilde{z}^2.$$

**Пример 30.1.** Найти образ круга  $|z| < 1$  с разрезом  $1/2 < x < 1$  по действительной оси  $Ox$  при отображении, осуществляемом функцией Жуковского.

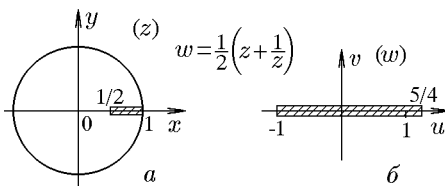


Рис. 74

**Решение.** Внутренняя часть круга  $|z| < 1$  (рис. 74,а) с помощью функции Жуковского отображается на всю комплексную

плоскость с разрезом по действительной оси  $Ou$  от  $-1$  до  $1$ . Отрезок  $1/2 < x < 1$  действительной оси  $Ox$  отобразится в отрезок  $1 < u < 5/4$  действительной оси  $Ou$ , так как

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{4}.$$

Таким образом, исходная область отображается на всю комплексную плоскость  $w$  с разрезом по действительной оси от  $-1$  до  $5/4$ .

**Пример 30.2.** Найти образ области  $E$ , заданной условиями  $0 < |z| < 1$  и  $0 < \arg z < \pi/4$ , при отображении

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

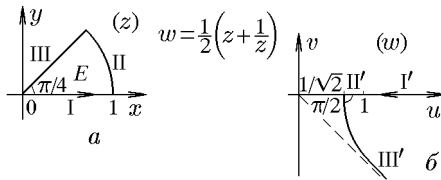


Рис. 75

**Решение.** Обозначим стороны кругового сектора  $E$  через I, II, III (рис. 75,а). Согласно (30.2), линия I отобразится в  $I'$  – часть действительной оси  $Ou$  от  $\infty$  до единицы, так как  $u = (1/2)(\rho + 1/\rho)$ ,  $v = 0$  и  $u(0) = \infty$ ,  $u(1) = 1$  (рис. 75,б). Направление обхода от  $z = 0$  к  $z = 1$  соответствует направлению обхода от  $w = \infty$  к  $w = 1$  на плоскости  $w$ . Дуга единичной окружности II отобразится на часть действительной оси  $II'$  от единицы до  $1/\sqrt{2}$ , так как  $u(\rho, \varphi) = (1/2)(\rho + 1/\rho) \cos \varphi$ ,  $v = 0$ , причем  $u(1, 0) = 1$ ,  $u(1, \pi/4) = 1/\sqrt{2}$  с тем же направлением обхода. Наконец, луч  $\arg z = \pi/4$ , согласно (30.5), отобразится в нижнюю половину правой ветви гиперболы  $2u^2 - 2v^2 = 1$ . Таким образом, сектор  $E$  отобразится в область  $G$ , заключенную между прямыми  $I'$ ,  $II'$  и частью гиперболы  $III'$ . Отметим, что углы между II и I, III – прямые как углы между окружностью II и радиусами I, III. Угол между  $II'$  и  $III'$  также прямой, а угол между  $II'$  и  $I'$  равен  $\pi$ , т.е. в два раза больше. Этот факт объясняется тем, что  $z = 1/\sqrt{2}$  – точка конформности, а в точке  $z = 1$  конформность нарушается.

### 31. Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические и гиперболические функции были определены в разд. 7.2. Из соотношений (7.11)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

вытекает, что они аналитичны всюду, за исключением  $z = \infty$ , являющейся существенно особой точкой, и подчиняются обычным формулам дифференцирования

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Изучим отображение, осуществляемое функцией  $w = \sin z$ . Положив

$$z_1 = iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad z_3 = -iz_2, \quad w = \frac{1}{2} \left( z_3 + \frac{1}{z_3} \right), \quad (31.1)$$

видим, что это отображение можно рассматривать как суперпозицию уже изученных отображений, переводящих область  $D$  в  $D_1$ ,  $D_1$  в  $D_2$ ,  $D_2$  в  $D_3$  и  $D_3$  в  $D_4$ . Первое и третье отображения, будучи линейными, однолиственны всюду. Для однолистности второго и четвертого необходимо и достаточно, чтобы  $D_1$  и  $D_3$  не содержали ни одной пары точек  $z'_1 - z''_1 = 2\pi ki$  и  $z'_3 z''_3 = 1$  (см. разд. 29. и 30.).

Следовательно, для однолистности суммарного отображения  $w = \sin z$  в области  $D$  необходимо и достаточно, чтобы область  $D$  не содержала ни одной пары точек  $z'$ ,  $z''$ , для которых

$$\begin{aligned} \text{а) } z' - z'' &= 2k\pi, & (k \neq 0 \text{ — целое}) \\ \text{б) } z' + z'' &= (2k+1)\pi & (k \text{ — целое}). \end{aligned}$$

Этим условиям удовлетворяет, например, полуполоса  $-\pi < x < \pi$ ,  $y > 0$ . На рис. 76 границы указанной полуполосы обозначены  $1 \Rightarrow x = -\pi$ ,  $y \geq 0$ ;  $2 \Rightarrow y = 0$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ;  $3 \Rightarrow x = \pi$ ,  $y \geq 0$ , а соответствующие им отображения  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ , которые легко получить, если функцию  $w = \sin z = \sin(x + iy)$  представить в алгебраической форме  $w = u + iv$ , где

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y. \quad (31.2)$$

Более детальную информацию об отображении  $w = \sin z$  можно получить, применив последовательно отображения (31.1). Действительно, отображение  $z_1$  поворачивает полуполосу на  $\pi/2$  против часовой стрелки. Отображение  $z_2$  полученную полуполосу  $-i\pi < \text{Im } z_1 < i\pi$ ,  $\text{Re } z_1 < 0$  переводит в круг единичного радиуса  $|z_2| < 1$  с разрезом по  $-1 < \text{Re } z_2 < 0$ . Преобразование  $z_3$  поворачивает эту область на  $\pi/2$  по часовой стрелке. И, наконец, функция Жуковского переводит полученную область в комплексную плоскость  $w$  с вырезанным отрезком  $-1 \leq \text{Re } w \leq 1$ ,  $\text{Im } w = 0$  и вырезанной отрицательной полуосью  $\text{Re } w = 0$ ,  $\text{Im } w \leq 0$  (см. рис. 76).

Аналогичным образом можно установить, что вдвое более узкая полуполоса  $-\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2$ ,  $\text{Im } z > 0$  отображается на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ . И в том, и в другом случае семейство лучей  $x = x_0$  и отрезков  $y = y_0$  переходят, соответственно, в семейство софокусных гипербол и эллипсов:

$$\frac{u^2}{\sin^2 x_0} - \frac{v^2}{\cos^2 x_0} = 1, \quad \frac{u^2}{\text{ch}^2 y_0} + \frac{v^2}{\text{sh}^2 y_0} = 1, \quad (31.3)$$

которое легко получить из формул (31.2) с учетом основных тождеств для тригонометрических и гиперболических функций.

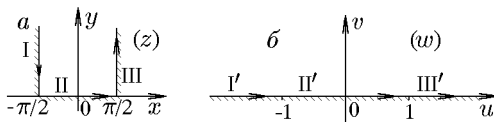


Рис. 76



Рис. 77

Рассмотрим более подробно отображение полуполосы  $-\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2$ ,  $\text{Im } z > 0$  с помощью функции  $w = \sin z$ , обозначив части ее границы через I, II, III (рис. 77, а). Тогда, согласно (31.2), полупрямая I ( $0 < y < \infty$ ,  $x = -\pi/2$ ) отобразится в полупрямую I' ( $v = 0$ ,  $-\infty < u < \infty$ ), так как  $u = -\text{ch } y$ . Направление обхода на плоскости  $z$  от  $y = \infty$  к  $y = 0$  определяет направление обхода от  $w(\infty) = -\infty$  к  $w(0) = -1$  на плоскости  $w$  (рис. 77, б). Отрезок II ( $-\pi/2 < x < \pi/2$ ,  $y = 0$ )

отобразится в отрезок  $\Pi'$  ( $-1 < w < 1$ ) действительной оси  $Ou$ , поскольку  $u = \sin x$ ,  $v = 0$ , причем  $w(-\pi/2) = -1$ ,  $w(\pi/2) = 1$ . Наконец, в силу нечетности  $\sin z$  ( $\sin(-\pi/2) = -\sin \pi/2$ ) полу-прямая  $\Pi$  перейдет в  $\Pi'$  с тем же направлением обхода, что и для  $I'$ ,  $\Pi'$ .

Таким образом, согласно принципу соответствия границ, исходная полоса отображается на верхнюю полуплоскость, которая остается слева при движении по оси  $Ou$  от  $-\infty$  к  $\infty$ .

Теперь легко получить отображение всей полосы  $-\pi/2 < \text{Re } z < \pi/2$ . Обозначим продолжения прямых  $I$  и  $\Pi$ , проходящих в том же направлении, через  $IV$  и  $V$ , соответственно. Отрезок  $\Pi$  теперь отсутствует (см. рис. 78, а). Согласно (31.2), прямая  $IV$  отобразится в прямую  $I'$ , проходящую в обратном направлении, а прямая  $V$  — в  $\Pi'$ , проходящую также в противоположном направлении (см. рис. 78, б).

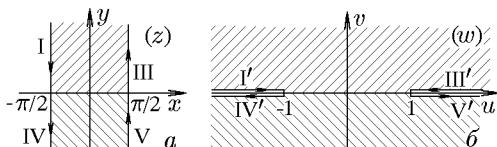


Рис. 78

Таким образом, исходная полоса отображается на всю комплексную плоскость  $w$  с двумя разрезами по действительной оси:  $]-\infty, -1[$  и  $]1, \infty[$ . При этом верхняя полуплоскость отображается на верхнюю полуплоскость (правая штриховка) так, что верхним берегам разрезов соответствуют полупрямые  $I$  и  $\Pi$ . Соответственно, нижняя полуплоскость отображается на нижнюю полуплоскость (левая штриховка) и нижним берегам разрезов  $IV'$ ,  $V'$  соответствуют полупрямые  $IV$  и  $V$ . Ниже мы покажем, что решение этой задачи можно было упростить, используя так называемый принцип симметрии конформных отображений.

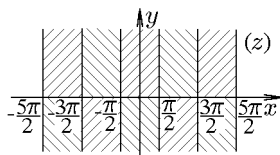


Рис. 79

В силу периодичности функции  $\sin z$  очевидно, что полосы  $-\pi/2 + 2k\pi < \text{Re } z < \pi/2 + 2k\pi$ ,  $k = -\infty, \infty$ , также будут отображаться аналогичным образом. Расположенные между ними полосы  $-\pi/2 + k\pi < \text{Re } z < \pi/2 + k\pi$  осуществляют отображение, обусловленное соотношением  $\sin(z + \pi) = -\sin z$ . Области с правой штриховкой (рис. 79)

отображаются на верхнюю полуплоскость, с левой – на нижнюю.

Отображение, осуществляемое функцией  $\cos z$ , в силу соотношения

$$\cos z = \sin \left( z + \frac{\pi}{2} \right)$$

отличается от только что рассмотренного лишь сдвигом.

Тригонометрические функции  $\operatorname{tg} z$ ,  $\operatorname{ctg} z$  определены соотношениями (см. разд. 7.2.)

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}. \quad (31.4)$$

Поскольку  $\operatorname{ctg} z$  – инверсия функции  $\operatorname{tg} z$ , ограничимся исследованием некоторых отображений, реализуемых этой функцией. Отметим, что функция  $\operatorname{tg} z$  аналитична всюду, за исключением точек  $z = \pi/2 + k\pi$  ( $k = -\infty, +\infty$ ) и может быть представлена суперпозицией следующих отображений:

$$z_1 = 2iz, \quad z_2 = e^{z_1}, \quad w = -i \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1}. \quad (31.5)$$

Согласно соотношениям (7.11), гиперболические функции сравнительно просто выражаются через тригонометрические

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, & \operatorname{ch} z &= \cos iz, \\ \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz, & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz \end{aligned}$$

и поэтому несущественно от них отличаются.

Согласно соотношениям (7.19), обратные тригонометрические и гиперболические функции можно выразить через логарифмические. Так, например, функция

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -\operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2})$$

осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение всей конечной плоскости  $w$  на бесконечнолиственную риманову поверхность с точками ветвления второго порядка над  $z = \pm 1$  и логарифмической точкой разветвления над  $z = \infty$ , составленную из листов, изображенных на рис. 78.

Аналогично функция

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z}$$

взаимно однозначно отображает всю комплексную плоскость  $w$  на риманову поверхность, аналогичную римановой поверхности логарифмической функции, но имеющую логарифмические точки ветвления над точками  $z = i$  и  $z = -i$ .

**Пример 31.1.** Найти образы полосы  $E : -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$  и расположенных в ней прямой  $\operatorname{Re} z = \pi/6$  и отрезка  $\operatorname{Im} z = \pi/4$  при отображении  $w = \operatorname{tg} z$ .

**Решение.** Согласно формуле (31.5), имеем  $p = 2iz$ ,  $R = e^p$ ,  $s = (R-1)/(R+1)$ ,  $w = -is$ . Первое линейное отображение  $p = 2iz = 2e^{i\pi/2}z$  поворачивает исходную полосу  $E$  на  $\pi/2$  против часовой стрелки и расширяет ее в два раза, т.е. переводит в полосу  $E_p : -\pi/2 < \operatorname{Im} p < \pi/2$ . При этом прямая  $\operatorname{Re} z = \pi/6$  переходит в прямую  $\operatorname{Im} p = \pi/3$ , а отрезок  $\operatorname{Im} z = \pi/4$  – в отрезок  $\operatorname{Re} p = -\pi/4$  (рис. 80, а, б).

Следующее отображение  $R = e^p$  переводит полосу  $E_p$  в правую полуплоскость  $E_R : \operatorname{Re} R > 0$ , так как  $|R|$  меняется от нуля до  $\infty$ , а  $\arg R$  – от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Прямая  $\operatorname{Im} p = \pi/3$  отображается в луч  $\arg R = \pi/3$ , отрезок  $\operatorname{Re} p = -\pi/4$  – в дугу окружности  $|R| = e^{-\pi/4}$ , лежащую в правой полуплоскости  $E_R$ .

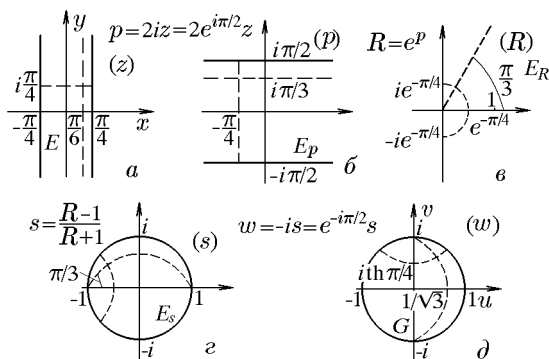


Рис. 80

Дробно-линейная функция  $s = (R-1)/(R+1)$  конформно и согласно круговому свойству свернет полуплоскость  $E_R$  во внутреннюю часть единичного круга  $E_s : |s| < 1$ . Это объясняется тем, что  $s(0) = -1$ ,  $s(\infty) = 1$ , а прямые  $\operatorname{Re} R = 0$  и  $\operatorname{Im} R = 0$  перпендикулярны, следовательно, и их образы должны быть перпендикулярны. Но тогда отрезок  $-1 < \operatorname{Re} s < 1$



является диаметром окружности  $|s| = 1$ . По этой же причине луч  $\arg R = \pi/3$  перейдет в часть дуги окружности, проходящей через точки  $s = \pm 1$  под углом в  $\pi/3$  к действительной оси. Наконец, полуокружность с центром в точке  $R = 0$  отобразится в часть дуги окружности с центром в точке  $s = -1$  (точка  $R = 0$  переходит в точку  $s = -1$ ) и перпендикулярной всем линиям, которые она пересекает (рис. 80, в, з).

Последнее отображение  $w = -is = e^{-i\pi/2}s$  соответствует повороту круга на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Рис. 80, д дает наглядное представление о положении образа  $G$  исходной области  $E$  при отображении  $w = \operatorname{tg} z$ .

Подводя итог, можно сказать, что полоса  $E : -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$  отображается в единичный круг  $G : |w| < 1$ , при этом прямая  $\operatorname{Re} z = \pi/6$  отображается в «меридиан» этого круга, проходящий через точки  $w = \pm i$  и  $w = \operatorname{tg} \pi/6 = 1/\sqrt{3}$ , а отрезок  $\operatorname{Im} z = \pi/4$  – в «параллель» этого круга, проходящую через точку  $w = \operatorname{tg}(i\pi/4) = i \operatorname{th} \pi/4$ .

В заключение отметим, что в общем случае декартова координатная сетка, расположенная внутри полосы  $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ , отобразится в соответствующие «параллели» и «меридианы», расположенные внутри круга  $|w| < 1$ .

## 32. Основная задача теории конформных отображений

Перейдем теперь к основной задаче теории конформных отображений, которая заключается в построении функции  $w = f(z)$ , осуществляющей конформное отображение одной заданной области  $E$  на другую заданную область  $G$ . Алгоритм и структура решения этой задачи существенным образом определяется видом областей  $E$  и  $G$ . Начнем с некоторых классов задач, для которых достаточно использования изученных уже отображений, осуществляемых элементарными функциями. Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 32.1.** Найти функцию, конформно отображающую область между окружностями  $|z| = 1$ ,  $|z - 1| = 2$  на единичный круг  $|w| < 1$ .

**Решение.** Обозначим заданные окружности через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а область между ними через  $E$  (рис. 81, а). Дробно-линейная функция  $p = (z + 1)/(z - 1)$ , согласно круговому свойству (см. пример 27.5), отображает область  $E$  в полосу  $E_p : 0 < \operatorname{Re} p <$

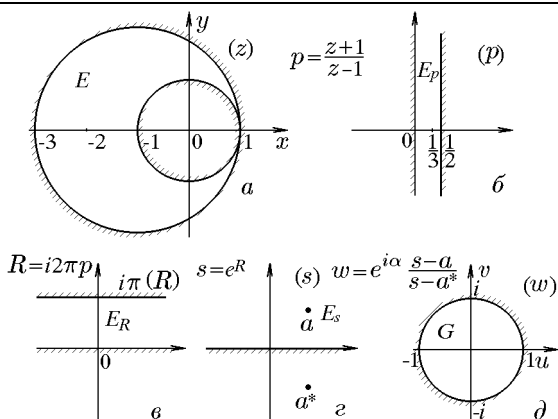


Рис. 81

$1/2$ , так как  $p(1) = \infty$ ,  $p(-1) = 0$ ,  $p(-3) = 1/2$ ,  $p(-2) = 1/3$  (рис. 81, б). Линейная функция  $R = 2p\pi e^{i\pi/2} = 2ip\pi$  поворачивает полосу  $E_p$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки и расширяет ее в  $2\pi$  раз, т.е. переводит в полосу  $E_R$ :  $0 < \text{Im } R < \pi$  (рис. 81, в). Следующее отображение  $s = e^R$  переводит полосу  $E_R$  в верхнюю полуплоскость  $E_s$ :  $\text{Re } s > 0$ , так как  $|s|$  меняется от нуля до бесконечности, а  $\arg s$  — от нуля до  $\pi$ . Наконец, дробно-линейная функция (27.11)

$$w = e^{i\alpha} \frac{s - a}{s - a^*}$$

отображает верхнюю полуплоскость  $E_s$  на область  $G$  — внутреннюю часть единичного круга  $|w| < 1$ .

Таким образом, имеем цепочку преобразований, которую можно объединить в функцию

$$w = e^{i\alpha} \frac{\exp[2i\pi(z+1)/(z-1)] - a}{\exp[2i\pi(z+1)/(z-1)] - a^*}, \quad (32.1)$$

дающую решение задачи с точностью до произвольных чисел: действительного  $\alpha$  и комплексного  $a$ .

Существует одно частное решение задачи, которое можно получить, если вместо отображения  $R = 2i\pi p$  взять функцию  $\tilde{R} = \pi(p - 1/4)$ . Эта функция отобразит полосу  $E_p$  на полосу

$E_{\tilde{R}}$ :  $-\pi/4 < \operatorname{Re} E_{\tilde{R}} < \pi/4$ , которую функция

$$w = \operatorname{tg} \tilde{R} = \operatorname{tg} \pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right) \tag{32.2}$$

сворачивает во внутреннюю часть единичного круга  $|w| < 1$  (см. пример 31.1. Отображение (32.2) является частным случаем (32.1) при  $\alpha = -\pi/2$ ,  $a = i$ . Действительно,

$$\begin{aligned} w &= e^{-i\pi/2} \frac{e^{2i\pi \frac{z+1}{z-1}} - i}{e^{2i\pi \frac{z+1}{z-1}} + i} = -i \frac{e^{2i\pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right)} - 1}{e^{2i\pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right)} + 1} = \\ &= \frac{e^{i\pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right)} - e^{-i\pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right)}}{i \left[ e^{i\pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right)} + e^{-i\pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right)} \right]} = \operatorname{tg} \pi \left( \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Отображение полуплоскости на единичный круг осуществляется стандартным представлением (27.10), поэтому для заданной области достаточно найти функцию, осуществляющую отображение на полуплоскость, а затем воспользоваться функцией (27.11).

**Пример 32.2.** Найти функцию, отображающую область, принадлежащую двум единичным кругам с центрами в точках 0 и 1 (рис. 82,а), на верхнюю полуплоскость.

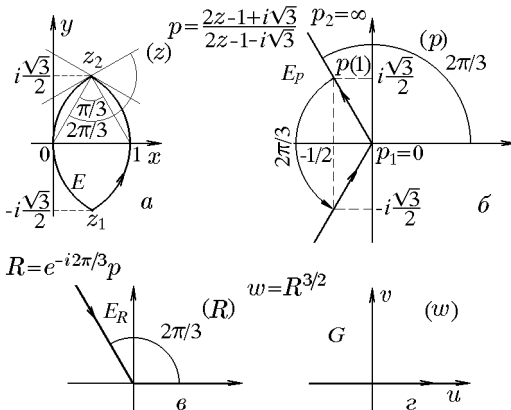


Рис. 82

**Решение.** Из центров окружностей в точку их пересечения проведем радиусы. Полученный треугольник является правильным с углами  $\pi/3$ . Тогда один из углов между касательными тоже равен  $\pi/3$ , а другой, соответствующий углу между окружностями, равен  $2\pi/3 = \pi - \pi/3$ .

Воспользуемся дробно-линейной функцией

$$p = \frac{z - (1/2 - i\sqrt{3}/2)}{z - (1/2 + i\sqrt{3}/2)} = \frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}},$$

переводящей точку  $z_1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$  в точку  $p_1 = 0$ , а точку  $z_2 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$  в точку  $p_2 = \infty$ . При таком отображении дуги окружностей перейдут в лучи, расположенные, как и их прообразы, под углом  $2\pi/3$  друг к другу. Чтобы выяснить, как этот угол расположен на плоскости  $p$ , достаточно найти хотя бы одну точку на одном из его лучей. Поскольку  $p(1) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ , то правая дуга окружности отобразится в луч, выходящий из начала координат плоскости  $p$  под углом  $2\pi/3$ . А так как при движении от точки  $z_1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$  к точке  $z = 1$  область  $E$  остается слева, то ее образом будет область  $E_p$ , остающаяся слева при движении от  $p = 0$  к  $p = -1/2 + i\sqrt{3}/2$  (рис. 82,б). Линейная функция  $R = e^{-ip2\pi/3}$  повернет угол  $E_p$  на угол  $2\pi/3$  по часовой стрелке так, что верхний луч совпадет с действительной осью плоскости  $R$  (рис. 82,в), а степенная функция  $w = R^{3/2}$  развернет этот угол до величины  $\pi$ , что и соответствует верхней полуплоскости  $G$ :  $\text{Im } w > 0$ .

Таким образом, функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид

$$w(z) = e^{-i\pi} p^{3/2} = - \left[ \frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}} \right]^{3/2}.$$

**Пример 32.3.** Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  с разрезом по мнимой оси от  $z = 0$  до  $z = ih$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

**Решение.** Функция  $p = z^2$  отображает исходную область  $E$  на всю комплексную плоскость с разрезом по действительной оси от  $-h^2$  до  $\infty$ , так как она удваивает аргументы прообразов (рис. 83,а,б). Функция  $R = p + h^2$  сдвигает этот разрез вправо на величину  $h^2$  так, что область  $E_R$  становится вся плоскость  $R$  с разрезом по положительной части действительной оси (рис. 83,в). Наконец, функция  $w = \sqrt{R}$  сворачивает

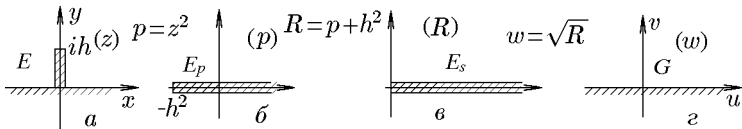


Рис. 83

$E_R$  в полуплоскость  $G$ :  $\text{Im } w > 0$ . Тогда  $w(z) = \sqrt{z^2 + h^2}$  (рис. 83,  $z$ ).

**Пример 32.4.** Найти функцию, отображающую единичный круг  $E$ :  $|z| < 1$  с разрезом по действительному диаметру от  $z = 1/4$  до  $z = 1$  на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ .

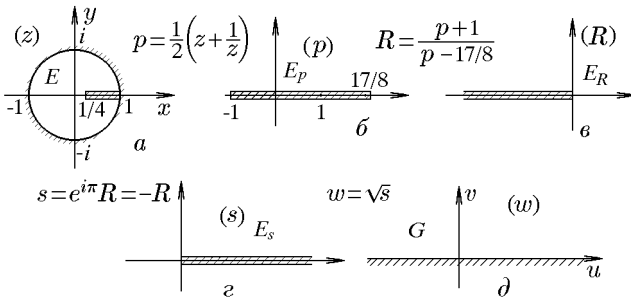


Рис. 84

**Решение.** Функция Жуковского  $p = (z + 1/z)/2$  отображает область  $E$  (см. пример 30.1) на всю комплексную плоскость с разрезом от  $p = -1$  до  $p = 17/8$ , так как  $p(1/4) = (4 + 1/4)/2 = 17/8$  (рис. 84,  $a, б$ ). Дробно-линейная функция  $R = (p + 1)/(p - 17/8)$  отображает точки  $p_1 = -1$  в  $R_1(-1) = 0$ ,  $p_2 = 17/8$  в  $R_2(\infty)$ ,  $p_3 = 0$  в  $R_3(0) = -8/17$ . Это означает, что область  $E_p$  отобразится в область  $E_R$ , представляющую собой всю плоскость  $R$  с разрезом по отрицательной части действительной оси (рис. 84,  $в$ ). Функция  $s = e^{i\pi}R = -R$  переводит разрез с отрицательной части действительной оси плоскости  $R$  на положительную часть действительной оси плоскости  $s$  (рис. 84,  $г$ ). Наконец, отображение  $w = \sqrt{s}$  свернет область  $E_s$  на верхнюю полуплоскость  $G$ :  $\text{Im } w > 0$  (рис. 84,  $з, д$ ).

Таким образом, функция, осуществляющая требуемое отображение, имеет вид

$$w = \sqrt{\frac{z^2 + 2z + 1}{17z/4 - z^2 - 1}}.$$

**Пример 32.5.** Найти функцию, отображающую внешнюю часть единичного круга  $|z| > 1$  с разрезом на действительной оси от  $z = -2$  до  $z = -1$  на верхнюю полуплоскость.

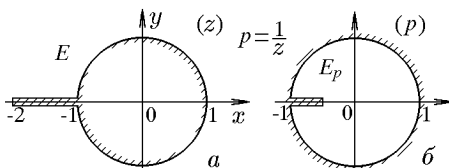


Рис. 85

**Решение.** Функция  $p = 1/z$  переводит внешнюю часть единичного круга  $E$  (рис. 85, а) во внутреннюю часть единичного круга  $|p| < 1$ , а разрез на действительной оси от  $z = -2$  до  $z = -1$  — в разрез по действительному диаметру от  $p = -1$  до  $p = -1/2$  (рис. 86, б). Задача отображения области  $E_p$  на верхнюю полуплоскость рассмотрена в предыдущем примере. Следуя алгоритму его решения, найдем

$$w(z) = \sqrt{\frac{2z^2 + 5z + 2}{-z^2 + 2z - 1}}.$$

**Пример 32.6.** Найти функцию, отображающую круг  $E: |z - 2| < 1$  на круг  $G: |w - 2i| < 2$  так, чтобы  $w(2) = i$ ,  $\arg w'(2) = \pi/2$  (рис. 86, а, б).

**Решение.** При решении примера 27.1 нами было получено соотношение (27.7). Непосредственное применение этого соотношения в данном примере невозможно, однако метод его получения, использующий свойство сохранения симметричных точек (теорема 27.2), позволяет решить задачу.

Действительно, если центр круга  $z_1 = 2$  отображается в точку  $w_1(z) = i$ , то точка  $z_2 = \infty$  должна отобразиться в точку  $w_2$ , симметричную точке  $w_1 = i$  относительно окружности  $|w - 2i| = 2$ , т.е. точку  $w_2 = -2i$ .

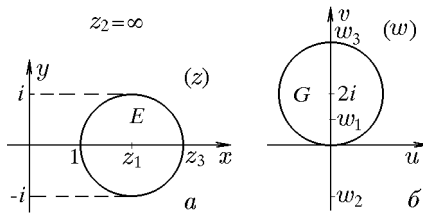


Рис. 86

Еще одну точку можно найти, если воспользоваться геометрическим смыслом аргумента производной. Из равенства  $\arg w'(2) = \pi/2$  следует, что радиус, проведенный из точки  $z_1 = 2$  в точку  $z_3 = 3$ , при заданном отображении повернется на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки, т.е. его образом будет отрезок от  $w_1 = i$  до  $w_3 = 4i$ , и, следовательно, образом точки  $z_3 = 3$  будет точка  $w_3 = 4i$ .

Поскольку известны три точки  $z_1, z_2, z_3$  и их образы  $w_1, w_2, w_3$ , то можно воспользоваться формулой (27.6). Тогда

$$\frac{(w-i)(-2i-4i)}{(w-4i)(-2i-i)} = \frac{z-2}{z-3}.$$

Отсюда после упрощений находим

$$w = 2i \frac{1-z}{z-4}.$$

Решение этого примера целиком основано на принципе сохранения симметрии точек при дробно-линейном отображении, который, вообще говоря, можно рассматривать как частный случай более общего принципа – принципа симметрии конформных отображений, формулировку которого дает следующая

**Теорема 32.1 (принцип симметрии).** Пусть граница области  $E_1$  содержит отрезок действительной оси  $\gamma$  (конечный или бесконечный), а функция  $w = f_1(z)$  реализует конформное отображение этой области на область  $G_1$  такое, что  $\gamma$  переходит в отрезок действительной оси  $\Gamma$ , являющийся частью границы  $G_1$ . В этих условиях функция  $f_1(z)$  допускает аналитическое продолжение  $f_2(z) = f_1^*(z^*)$  через дугу  $\gamma$  в область  $E_2$ , симметричную относительно  $\gamma$ , причем функция

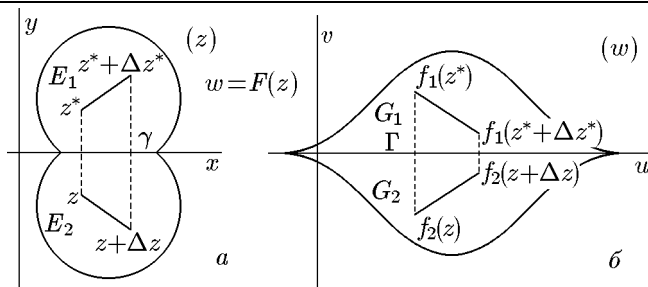


Рис. 87

$w = f_2(z)$  реализует конформное отображение области  $E_2$  на область  $G_2$ , симметричную относительно  $\Gamma$ , а функция

$$w = F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in G_1; \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \gamma; \\ f_2(z), & z \in G_2 \end{cases}$$

реализует конформное отображение области  $E_1 + \gamma + E_2$  на область  $G_1 + \Gamma + G_2$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $z$  произвольную точку, принадлежащую области  $E_2$  и симметричную точке  $z^* \in E_1$  относительно  $\gamma$  (рис. 87,а). Обозначим соответственно через  $f_2(z)$  точку, принадлежащую области  $G_2$  и симметричную точке  $f_1(z^*)$  относительно  $\Gamma$  (рис. 87,б). Но точкой, симметричной точке  $f_1(z^*)$  относительно  $\Gamma$ , является и точка  $f_1^*(z^*)$  (рис. 87,б). Отсюда и следует, что

$$f_2(z) = f_1^*(z^*). \quad (32.3)$$

Покажем теперь, что функция  $f_2(z)$  аналитична в области  $E_2$  и конформно отображает ее на область  $G_2$ , т.е. функция  $f_2(z)$  в каждой точке области  $E_2$  имеет отличную от нуля производную  $f_2'(z)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} f_2'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f_2(z + \Delta z) - f_2(z)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f_1^*(z^* + \Delta z^*) - f_1^*(z^*)}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \frac{f_1(z^* + \Delta z^*) - f_1(z^*)}{\Delta z^*} \right]^* = [f_1'(z^*)]^*. \end{aligned} \quad (32.4)$$



Поскольку, по условию теоремы, функция  $f_1(z)$  конформно отображает  $E_1$  на  $G_1$ , то существует отличная от нуля производная  $f_1'(z^*)$ , а следовательно, в силу (32.4) и производная  $f_2'(z)$  для всех  $z \in E_2$ .

Докажем следующее утверждение теоремы о том, что  $f_2(z)$  является аналитическим продолжением  $f_1(z)$ , т.е. выполняется равенство  $f_1(x) = f_2(x)$ , означающее совпадение функций  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$  на границе  $\gamma$ .

Действительно, согласно теореме 24.3, существует предел

$$\lim_{z^* \rightarrow x} f_1(z^*) = f_1(x),$$

но, согласно (32.3),

$$f_2(x) = \lim_{z \rightarrow x} f_2(z) = \lim_{z^* \rightarrow x} f_1^*(z^*) = f_1^*(x).$$

Таким образом,  $f_2(x) = f_1^*(x)$ , а с учетом того, что  $f_1(x)$  принадлежит границе  $\Gamma$ , лежащей на действительной оси, имеем  $f_1^*(x) = f_1(x)$ , откуда и следует  $f_2(x) = f_1(x)$ . Последнее равенство по принципу непрерывного продолжения означает, что  $f_2(z)$  является аналитическим продолжением функции  $f_1(z)$ . Все сказанное выше доказывает последнее утверждение теоремы: о том, что функция  $F(z)$  (32.1) реализует конформное отображение  $E_1 + \gamma + E_2$  на  $G_1 + \Gamma + G_2$ .

◇ Принцип симметрии остается справедливым и в том случае, если в его формулировке отрезки действительных осей заменить на отрезки произвольных прямых и, более того, на части дуг некоторых окружностей. Справедливость такого замечания вытекает из кругового свойства дробно-линейной функции, позволяющего отобразить указанные линии в отрезок действительной оси. Таким образом, в тех случаях, когда отображаемая область симметрична относительно одной из линий, указанных выше, основная задача теории конформных отображений может быть упрощена в «два раза» – отображением одной из ее «половин».

Помимо этого, принцип симметрии можно рассматривать еще и как исключительно простой метод построения аналитического продолжения функции  $f(z)$  через границу  $\gamma$ . Действительно, если  $\Gamma$  совпадает с действительной осью, справедлива формула (32.3); если  $\Gamma$  совпадает с мнимой осью, то  $f_2(z) = -f_1^*(z^*)$ ; если  $\Gamma$  совпадает с биссектрисой первой четверти, то  $f_2(z) = i f_1^*(z^*)$  и т.д.

Сказанное выше можно интерпретировать и как условия для функции  $f_1(z)$ , допускающей указанные аналитические

продолжения. Так, в первом случае условием является

$$\operatorname{Im} f_1(z)|_{z \in \gamma} = \operatorname{Im} f_1(z)|_{z \in x} = 0$$

(так как  $\Gamma \cap v = 0$ ); во втором случае –

$$\operatorname{Re} f_1(z)|_{z \in \gamma} = \operatorname{Re} f_1(z)|_{z \in x} = 0$$

(так как  $\Gamma \cap u = 0$ ), и в третьем –

$$\operatorname{Re} f_1(z)|_{z \in \gamma} = \operatorname{Im} f_1(z)|_{z \in \gamma}$$

или  $\operatorname{Re} f_1(x) = \operatorname{Im} f_1(x)$  (так как  $\Gamma \in u = v$ ).

Приведем ряд примеров, использующих принцип симметрии. Однако перед этим вернемся к задаче отображения функцией  $\sin z$  полулобосы  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$  и всей лососы  $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ . В предыдущем разделе эти задачи решались независимо друг от друга. Использование принципа симметрии позволяет достаточно просто найти решение второй задачи, если известно решение первой.

Действительно,  $f_1(z) = \sin z$  отображает указанную полулобосу на верхнюю полуплоскость, при этом отрезок  $\gamma$ :  $-\pi/2 < x < \pi/2$ ,  $y = 0$  отображается в отрезок  $\Gamma$ :  $-1 < u < 1$ ,  $v = 0$ . Принцип симметрии дает выражение для аналитического продолжения  $f_1(z) = \sin z$  через отрезок  $\gamma$  в виде (32.1), т.е.

$$\begin{aligned} f_2(z) &= (\sin z^*)^* = \left( \frac{e^{iz^*} - e^{-iz^*}}{2i} \right)^* = \\ &= -\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z. \end{aligned}$$

Таким образом, аналитическим продолжением  $\sin z$  снова является  $\sin z$ . Но тогда нижняя полулобоса отобразится на нижнюю полуплоскость, а вся лососа функцией  $\sin z$  отобразится на всю комплексную плоскость с разрезами по действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$  и от  $1$  до  $\infty$  (см. рис. 78).

**Пример 32.7.** Найти функции  $w(z)$ , конформно отображающие внешнюю часть креста (рис. 88, *a*) на

- верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} w > 0$ ;
- внешнюю часть единичного круга  $|w| > 1$ .

**Решение.** Поскольку рассматриваемая область обладает симметрией относительно действительной оси, проведем по ней вспомогательный разрез и рассмотрим верхнюю полуплоскость

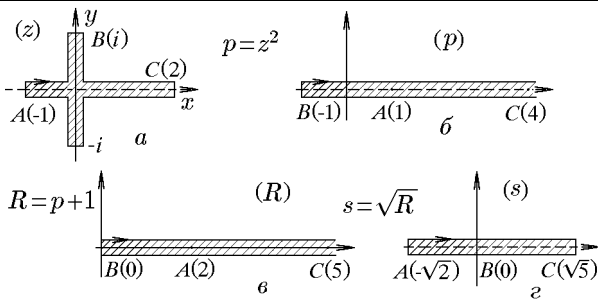


Рис. 88

с разрезом по мнимой оси от  $z = 0$  до  $z = i$ . Как показано в примере 32.3, функция  $s = \sqrt{z^2 + 1}$  отобразит ее на верхнюю полу плоскость плоскости  $s$ , причем точки  $A, B, C$  отобразятся в точки действительной оси с координатами, соответственно,  $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{5}$  (рис. 88).

Функция  $s = \sqrt{z^2 + 1}$  удовлетворяет условиям принципа симметрии  $\text{Im } s(x) = \text{Im } \sqrt{x^2 + 1} = 0$  и, следовательно, допускает аналитическое продолжение

$$F(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \begin{cases} \sqrt{z^2 + 1}, & \text{Im } z > 0; \\ \sqrt{x^2 + 1}, & \text{Im } z = 0; \\ \sqrt{z^2 + 1}, & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (32.5)$$

которое полную (верхнюю и симметричную ей нижнюю) внешнюю часть креста отображает на комплексную плоскость  $s$  с разрезом по действительной оси от точки  $A(-\sqrt{2})$  до точки  $C(\sqrt{5})$ . Причем в (32.5) выбирается та ветвь корня, для которой  $F(x + i0) > 0$  при  $x > 0$ . Далее в случае

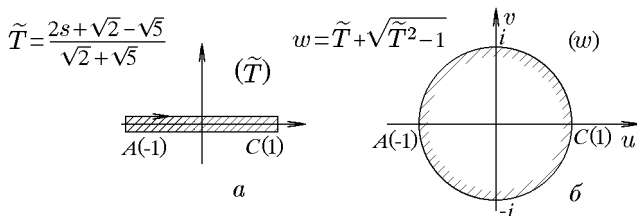


Рис. 89

а) функция  $T = (\sqrt{2} + s)/(\sqrt{5} - s)$  превращает конечный разрез плоскости  $s$  в бесконечный разрез по действительной оси плоскости  $T$  (рис. ??,а), а функция  $w = \sqrt{T}$  сворачивает плоскость  $T$  с разрезом в полуплоскость  $\text{Im } w > 0$  (рис. ??,б). Таким образом, искомая функция  $w$  имеет вид

$$w(z) = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{z^2 + 1}}{\sqrt{5} - \sqrt{z^2 + 1}}};$$

б) функция  $\tilde{T} = (2s + \sqrt{2} - \sqrt{5})/(\sqrt{2} + \sqrt{5})$  преобразует конечный разрез плоскости  $s$  (рис. 88,з) в конечный разрез плоскости  $\tilde{T}$  по действительной оси от точки  $\tilde{T}_1 = -1$  до точки  $\tilde{T}_2 = 1$  (рис. 89,а), а функция  $w = \tilde{T} + \sqrt{\tilde{T}^2 - 1}$  ( $w(\infty) = \infty$ ), обратная функции Жуковского, переводит внешнюю часть отрезка плоскости  $\tilde{T}$  во внешнюю часть единичного круга плоскости  $w$  (рис. 89,б). Окончательный вид функции  $w$  дает выражение

$$w(z) = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \left[ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{2} + \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 + 1 + (\sqrt{2} - \sqrt{5})\sqrt{z^2 + 1}} \right].$$

**Пример 32.8.** Плоскость  $z$  с разрезом, изображенным на рис. 90,а, отобразить на верхнюю полуплоскость.

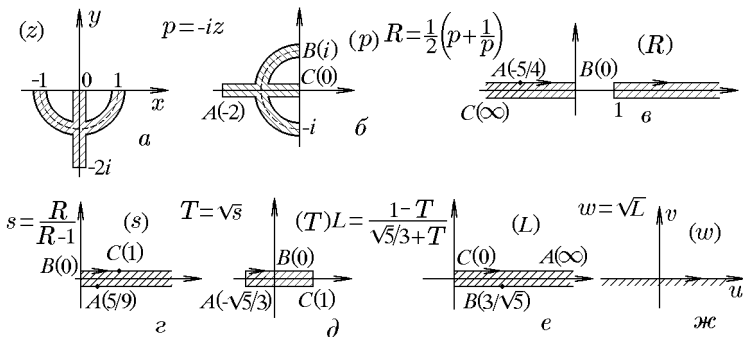


Рис. 90

**Решение.** Функцией  $p = e^{-i\pi/2}z = -iz$  повернем разрез на  $\pi/2$  по часовой стрелке (рис. 90,б) так, чтобы рассматриваемая

область была симметрична относительно действительной оси, по которой мы проведем вспомогательный разрез. Рассмотрим верхнюю полуплоскость. Функция Жуковского  $R = (p+1/p)/2$  верхнюю полуплоскость отображает на всю плоскость  $R$  с разрезом по действительной оси от  $-\infty$  до  $-1$  и от  $1$  до  $+\infty$ . Разрез по дуге единичной окружности, лежащей во второй четверти, удлинит левый разрез от  $-1$  до нуля (рис. 90, б). Дробно-линейная функция  $s = R/(R-1)$  отобразит плоскость  $R$  с указанными разрезами на плоскость  $s$  с единственным разрезом по положительной части действительной оси, которую функция  $T = \sqrt{s}$  (выбираем однозначную ветвь, для которой  $\sqrt{2} = 1$ ), в свою очередь, свернет на верхнюю полуплоскость  $\text{Im } T > 0$ , причем точки  $A, B, C$  отобразятся, соответственно, в точки с координатами  $-\sqrt{5}/3, 0, 1$ .

Функция  $T = \sqrt{p^2 + 1}/(p-1)$  удовлетворяет условиям принципа симметрии

$$\text{Im } T(p) \Big|_{\text{Im } p=0} = \text{Im} \left[ \frac{\sqrt{(\text{Re } p)^2 + 1}}{\text{Re } p - 1} \right] = 0$$

и, следовательно, допускает аналитическое продолжение  $F(x) = \sqrt{p^2 + 1}/(p-1)$ , которое полную (верхнюю и симметричную ей нижнюю) плоскость  $p$  с повернутым разрезом отображает на комплексную плоскость  $T$  с разрезом по действительной оси от точки  $A(-\sqrt{5}/3)$  до точки  $C(1)$ . Далее функция  $L = (1-T)/(\sqrt{5}/3 + T)$  преобразует его в бесконечный разрез по положительной части действительной оси плоскости  $L$ . И, наконец, функция  $w = \sqrt{L}$  отображает плоскость  $L$  с бесконечным разрезом в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } w > 0$ . Собрав все промежуточные обозначения, найдем явный вид функции  $w(z)$

$$w(z) = \sqrt{\frac{z - i - \sqrt{z^2 - 1}}{i\sqrt{z^2 - 1} + \sqrt{5}(z - i)/3}}.$$

**Пример 32.9.** Найти функцию, конформно отображающую область, изображенную на рис. 91, а, на круг  $|w| < 1$ .

**Решение.** Всю плоскость  $z$  лучами  $\gamma: \arg z = 0$ ,  $\gamma_1: \arg z = e^{-2i\pi/3}$  и  $\gamma_2: \arg z = e^{-4i\pi/3}$  разобьем на секторы  $E, E_1, E_2$ . Рассмотрим сектор  $E$  (рис. 91, а). Функция  $p = -z^{3/2}$  отобразит его на верхнюю полуплоскость  $\text{Re } p > 0$ , которую функция  $R = p + \sqrt{p^2 - 1}$ , обратная функции Жуковского, отобра-

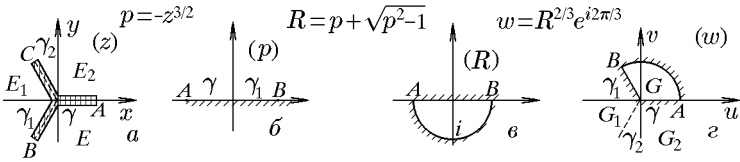


Рис. 91

злит в нижний полукруг  $|R| < 1$ ,  $\text{Im } R < 0$  (выбирается ветвь  $R(\infty) = 0$ ). Наконец, функция

$$w(z) = e^{i2\pi/3} R^{2/3} = e^{i2\pi/3} (-z^{3/2} + \sqrt{z^3 - 1})^{2/3}$$

отобразит этот полукруг на сектор  $G$  (рис. 91, б, в, з).

Следующий сектор  $E_1$  можно получить из  $E$  поворотом на угол  $2\pi/3$  по часовой стрелке и, соответственно, сектор  $G_1$  из сектора  $G$  поворотом на угол  $2\pi/3$  против часовой стрелки. Тогда

$$w_1(z) = e^{2i\pi/3} w(e^{2i\pi/3} z), \quad z \in E_1,$$

и, поскольку

$$w_1(z) = w(z), \quad z \in \gamma_1,$$

то  $w_1(z)$  можно считать аналитическим продолжением  $w(z)$  через луч  $\gamma_1$ .

Аналогично

$$w_2(z) = e^{i4\pi/3} w(e^{i4\pi/3} z), \quad z \in E_2,$$

$$w_2(z) = w_1(z), \quad z \in \gamma_2,$$

и, следовательно,  $w_2(z)$  – аналитическое продолжение  $w_1(z)$  через луч  $\gamma_2$ .

Таким образом, функция

$$F(z) = \begin{cases} w(z), & z \in E; \\ w_1(z) = w(z), & z \in \gamma_1; \\ w_1(z), & z \in E_1; \\ w_2(z) = w_1(z), & z \in \gamma_2; \\ w_2(z), & z \in E_2; \\ w(z) = w_2(z), & z \in \gamma \end{cases}$$

является аналитическим продолжением функции

$$w(z) = e^{2i\pi/3} (-z^{3/2} + \sqrt{z^3 - 1})^{2/3}$$

на всю комплексную плоскость и конформно отображает заданную область на круг  $|w| < 1$ .

### 33. Интеграл Кристоффеля–Шварца

Рассмотрим еще один класс основной задачи теории конформных отображений: отображение полуплоскости на заданный многоугольник. Зададим для определенности на плоскости  $z$  верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$ , а на плоскости  $w$  –  $n$ -угольник с вершинами в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  с углами  $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$  (рис. 92).

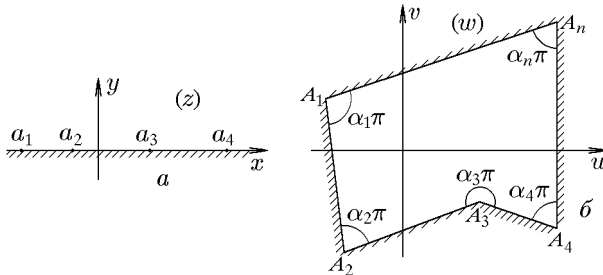


Рис. 92

Если положительное направление обхода  $n$ -угольника соответствует возрастанию порядкового номера  $k$  точек  $A_k$ , то их прообразы  $a_k$ , расположенные на границе полуплоскости  $\text{Im } z = 0$ , согласно принципу соответствия границ, пронумерованы в порядке возрастания самих величин  $a_k$ .

Напомним, что сумма углов  $n$ -угольника равна  $\pi(n - 2)$ . Отсюда для значений  $\alpha_k$  вытекает условие

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2,$$

из которого, в свою очередь, получаем условие  $-2 \leq \alpha_k \leq 0$ , ограничивающее значение угла  $\alpha_k$ , если его вершина  $A_k$  является бесконечно удаленной точкой.

Как правило, рассматриваемое отображение не осуществляется с помощью элементарных функций. Тем не менее, можно получить интегральное представление функции  $w = f(z)$ , определяющей это отображение.

**Теорема 33.1 (Кристоффеля–Шварца).** Если функция  $w = f(z)$  реализует конформное отображение верхней полуплоскости на внутреннюю часть ограниченного  $n$ -угольника с углами  $\alpha_k\pi$  ( $k = \overline{1, n}$ ) в вершинах  $A_k$  с прообразами  $a_k$  ( $-\infty <$

$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$ ), то она представляется интегралом

$$w = f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1, \quad (33.1)$$

где  $z_0, C, C_1$  – некоторые постоянные. Интеграл (33.1) называется интегралом Кристоффеля–Шварца.

Перейдем сразу к обсуждению формулы (33.1), опустив доказательство вследствие его громоздкости (см. [35]). Интеграл (33.1) задает функцию  $w = f(z)$  только в том случае, если известны прообразы  $a_k$  вершин  $A_k$ . В противном случае точки  $a_k$ , как и постоянные  $C, C_1$ , должны определяться по ходу решения задачи, что и составляет основную трудность использования формулы (33.1).

Справедливости ради следует заметить, что три точки  $a_1, a_2, a_3$  можно задать произвольно, а остальные доопределить, например, из условий

$$L_k = |A_{k+1} - A_k|,$$

где  $L_k$  – длина стороны между вершинами  $A_{k+1}$  и  $A_k$ , а

$$A_k = f(a_k) = C \int_{z_0}^{a_k} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1.$$

Кроме того, если положить  $z_0 = a_1$ , то  $C_1 = A_1$ .

Существуют частные случаи формулы (33.1) – комбинации таких, когда бесконечно удаленной точкой является, во-первых, вершина  $A_n$ , во-вторых, – прообраз  $a_n$  точки  $A_n$ . В первом случае формула (33.1) оказывается справедливой, если под  $\alpha_n$  понимать данное ранее определение угла между прямыми в бесконечно удаленной точке. Во втором случае формула (33.1) упрощается к виду

$$w = f(z) = C \int_{z_0}^z (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} (z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots \dots (z - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} dz + C_1. \quad (33.2)$$

Формула (33.2) отличается от (33.1) отсутствием множителя  $(z - a_n)^{\alpha_n - 1}$ , относящегося к бесконечно удаленной точке  $a_n$ .



Приведем несколько простых примеров построения функции  $w = f(z)$ , отображающей полуплоскость на простейший многоугольник – треугольник.

**Пример 33.1.** Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на внутреннюю часть треугольника  $A_1A_2A_3$ , изображенного на рис. 93.

**Решение.** Так как три прообраза вершин  $A_k$  допускают произвольный выбор, положим  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = \infty$ . Кроме того, выберем  $z_0 = a_1 = 0$ . Тогда, согласно (33.2), имеем

$$w = f(z) = C \int_0^z z^{\alpha_1-1}(z-1)^{\alpha_2-1} dz + C_1. \quad (33.3)$$

Из равенств

$$\begin{aligned} A_1 &= f(a_1) = 0, \\ A_2 &= f(a_2) = C \int_0^1 z^{\alpha_1-1}(z-1)^{\alpha_2-1} dz + C_1, \end{aligned}$$

находим  $C_1 = 0$  и

$$C = \frac{1}{\int_0^1 z^{\alpha_1-1}(z-1)^{\alpha_2-1} dz} = \frac{e^{-i\pi(\alpha_2-1)}}{B(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad (33.4)$$

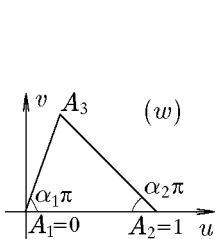


Рис. 93

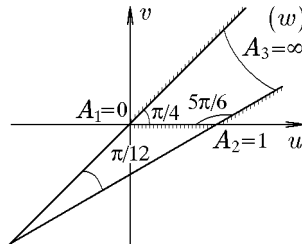


Рис. 94

где

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1} dz \quad (33.5)$$

– так называемая бета-функция, которая будет рассмотрена позднее (см. разд. «Бета-функция»). Подставив (33.4), (33.5) в (33.3), найдем

$$f(z) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^z z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1} dz. \quad (33.6)$$

**Пример 33.2.** Найти функцию, отображающую верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на внутреннюю часть неограниченного треугольника  $A_1A_2A_3$ , изображенного на рис. 94.

**Решение.** Из (33.6) при  $\alpha_1 = 1/4$ ,  $\alpha_2 = 7/6$  найдем

$$f(z) = \frac{1}{B(1/4, 7/6)} \int_0^z z^{-3/4} (1-z)^{-1/6} dz.$$

## Элементы операционного исчисления

### 34. Преобразование Лапласа

◆ Преобразованием Лапласа заданной функции  $f(t)$  действительного переменного  $t$  называется преобразование, ставящее в соответствие функции  $f(t)$  функцию  $\varphi(p)$  комплексного переменного  $p$  с помощью равенства

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (34.1)$$

Интеграл (34.1) называется интегралом Лапласа.

◇ Интеграл Лапласа (34.1) является несобственным интегралом, зависящим от комплексного переменного  $p = s + i\sigma$  как от параметра. Несобственный интеграл (34.1) сходится не для всех функций  $f(t)$  и не при всех значениях параметра  $p$ . Поэтому определим класс функций  $f(t)$ , для которых преобразование (34.1) имеет смысл.

◆ Функция  $f(t)$  называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1.  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
2. при  $t > 0$  функция  $f(t)$  на любом конечном участке оси  $Ot$  имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;
3. при  $t \rightarrow \infty$   $f(t)$  имеет ограниченную степень роста, т.е. существуют такие  $M > 0$  и  $s > 0$ , что справедливо неравенство

$$|f(t)| \leq M e^{st}. \quad (34.2)$$

◆ Точная нижняя грань ( $\inf s = s_0$ ) тех значений  $s$ , для которых имеет место соотношение (34.2), называется показателем степени роста функции  $f(t)$ .

◇ Отметим, что неравенство (34.2) выполняется при  $s = s_0 + \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$ , а при  $s = s_0$  оно может и не выполняться.

**Пример 34.1.** Определить показатели степени роста следующих функций:

- а)  $f(t) = t^n$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ ;      б)  $f(t) = e^{3t} \sin t$ ,      в)  $f(t) = \operatorname{tg} t$ .

**Решение.** а) Для всех  $s > 0$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{t^n}{e^{st}} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}}.$$

По правилу Лопиталья

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{st}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n!}{s^n e^{st}} = 0.$$

Следовательно, для всех  $t \in [0, \infty[$  справедливо

$$\frac{t^n}{e^{st}} < M,$$

откуда

$$|t^n| < M e^{st}$$

для всех  $s > 0$ . Здесь  $s$  – произвольное положительное число. Следовательно, точная нижняя грань  $\inf s = 0$  и  $s_0 = 0$ , хотя при  $s = 0$  соотношение (34.2) для  $n > 0$  не выполняется.

б) Так как для любого  $M \geq 1$  справедливо

$$|e^{3t} \sin t| \leq M e^{3t}, \quad t \rightarrow \infty,$$

то показателем степени роста является  $s_0 = 3$ .

в) Так как прямая  $t = \pi/2$  есть вертикальная асимптота функции  $f(t) = \operatorname{tg} t$ , то для нее показатель степени роста не существует.

◆ Пусть для заданного оригинала  $f(t)$  и для  $\operatorname{Re} p > s_0$  существует интеграл (34.1). Тогда интеграл (34.1) определяет функцию  $\varphi(p)$  комплексного переменного  $p$

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (34.3)$$

называемого лапласовским изображением (изображением по Лапласу) функции  $f(t)$ .

Связь между функциями  $f(t)$  и  $\varphi(p)$ , осуществляемую с помощью преобразования Лапласа (34.3), будем обозначать

$$\varphi(p) \leftrightarrow f(t), \quad f(t) \rightarrow \varphi(p).$$

**Теорема 34.1.** *Интеграл (34.3) сходится абсолютно в области  $\operatorname{Re} p > s_0$ , где  $s_0$  – показатель степени роста функции  $f(t)$ . Причем в области  $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$  интеграл (34.3) сходится абсолютно и равномерно.*

**Доказательство.** Выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Для всех  $p = s + i\sigma$  и  $\operatorname{Re} p = s > s_0 + \varepsilon$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |e^{-pt} f(t)| &= |e^{-(s-i\sigma)t}| |f(t)| \leq \\ &\leq e^{-st} M e^{(s_0+\varepsilon)t} = M e^{-(s-s_0-\varepsilon)t}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всех  $s > s_0$  справедливо равенство  $|e^{-(s-i\sigma)t}| = e^{-st}$ , и определением показателя степени роста функции  $f(t)$ , т.е. условием  $|f(t)| < M e^{(s_0+\varepsilon)t}$ . В силу этого неравенства интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt$$

мажорируется абсолютно сходящимся интегралом

$$M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0-\varepsilon)t} dt = \frac{M}{s-s_0-\varepsilon}.$$

Следовательно, по признаку сравнения для сходимости несобственных интегралов он тоже сходится абсолютно, причем справедливо

$$|\varphi(p)| \leq \frac{M}{s-s_0}. \quad (34.4)$$

Исследуем теперь интеграл (34.3) на равномерную сходимость. В случае  $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$  аналогично получим

$$|f(t)e^{-pt}| \leq M e^{-(\alpha-s_0)t}.$$

Следовательно,

$$|\varphi(p)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-s_0)t} dt = \frac{M}{\alpha-s_0}.$$

Таким образом, интеграл (34.3) при  $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$  сходится равномерно, так как он мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от  $p$  (признак Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов). Следовательно, теорема доказана.

**Теорема 34.2.** *Функция  $\varphi(p)$ , определяемая равенством (34.3), является аналитической функцией комплексного переменного  $p$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$ , где  $s_0$  – показатель степени роста функции  $f(t)$ .*

**Доказательство.** Действительно, согласно теореме 34.1, при  $\operatorname{Re} p \geq \alpha > s_0$  интеграл (34.3) сходится равномерно. Поэтому его можно почленно дифференцировать, если интеграл от производной подынтегральной функции сходится:

$$\left| - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} M t e^{-(\alpha - s_0)t} dt = \frac{M}{(\alpha - s_0)^2}.$$

Следовательно, интеграл сходится равномерно, что и доказывает теорему.

**Теорема 34.3.** *Если  $p$  стремится к бесконечности так, что  $\operatorname{Re} p = s$  неограниченно возрастает, то имеет место равенство*

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \varphi(p) = 0. \quad (34.5)$$

**Доказательство.** Действительно, из равенства (34.4) имеем

$$|\varphi(p)| \leq \frac{M}{s - s_0 - \varepsilon}, \quad \operatorname{Re} p = s.$$

Переходя к пределу  $s \rightarrow \infty$ , получим соотношение (34.5).

**Следствие.** Если бесконечно удаленная точка является устранимой изолированной особой точкой функции  $\varphi(p)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = 0. \quad (34.6)$$

**Доказательство.** По определению устранимой изолированной особой точки  $p = \infty$  имеем

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{p^k}.$$

Отсюда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = C_0$$

вне зависимости от способа стремления  $p$  к бесконечности. В частности,

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \varphi(p) = C_0 = 0$$

в силу (34.5). Следовательно,  $C_0 = 0$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 34.4 (обращения).** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, а  $\varphi(p)$  – ее лапласовским изображением, то для всех  $t$ , где оригинал непрерывен,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(p) e^{pt} dp, \quad (34.7)$$

причем интегрирование производится по всей прямой  $\operatorname{Re} p = \alpha > s_0$ , где  $s_0$  – показатель степени роста функции  $f(t)$ , и интеграл понимается в смысле главного значения (23.3), т.е.

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(p) e^{pt} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\alpha-iR}^{\alpha+iR} \varphi(p) e^{pt} dp.$$

Формула (34.7) называется формулой Меллина.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\psi(p)$ , являющуюся преобразованием Лапласа функции  $f(t)$  (34.7)

$$\psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[ \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{t\omega} \varphi(\omega) d\omega \right] e^{-pt} dt,$$

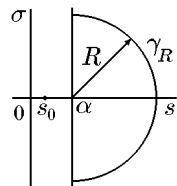


Рис. 95

где  $\varphi(p) \leftrightarrow f(t)$  и  $s_0 < \alpha < \infty$ . Теорема будет доказана, если мы покажем, что  $\psi(p) = \varphi(p)$ .

В силу равномерной сходимости последнего интеграла можно изменить порядок интегрирования

$$\psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} d\omega \int_0^{\infty} dt e^{(\omega-p)t} \varphi(\omega).$$

В полуплоскости  $s_0 < \alpha \leq \operatorname{Re} p$  рассмотрим контур  $\gamma_R$  (см. рис. 95), являющийся частью окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $(\alpha, 0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\omega-p} d\omega + \right. \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^+} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega-p} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega-p} \left. \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega-p} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega-p} \right\}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma_R$  состоит из полуокружности  $\gamma_R$  и диаметра этой окружности, лежащего на оси  $\operatorname{Re} p = \alpha$ . Обход этого контура совершается в положительном направлении. Так как

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega-p} = 0,$$

то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} \frac{\varphi(\omega) d\omega}{\omega-p} = 0$$

и, следовательно,

$$\psi(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\varphi(\omega)}{\omega-p} d\omega = \varphi(p),$$

поскольку функция  $\varphi(p)$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq \alpha$  (см. интегральную формулу Коши (13.1)). Здесь  $\Gamma = \lim_{R \rightarrow \infty} \Gamma_R$ .

Таким образом, теорема доказана.

**Теорема 34.5 (единственности).** Если две непрерывные функции имеют одно и то же изображение, то они тождественно равны.

**Доказательство.** Пусть  $\{f(t) \leftrightarrow \varphi(p), g(t) \leftrightarrow \varphi(p)\}$ . Рассмотрим функцию  $\Phi(t) = f(t) - g(t)$ . В силу линейности интегралов получим

$$\Phi(t) \leftrightarrow \varphi(p) - \varphi(p) = 0.$$



Следовательно, по формуле Меллина

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} 0 \cdot e^{pt} dt = 0,$$

т.е.

$$\{g(t) \equiv f(t)\},$$

что и требовалось доказать.

### 35. Изображения простейших функций

**Пример 35.1.** Найти изображение  $\theta$ -функции Хевисайда

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

**Решение.** Нетрудно заметить, что показатель степени роста  $\theta$ -функции равен нулю:  $s_0 = 0$ . По определению,

$$\theta(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \theta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\theta(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (35.1)$$

**Пример 35.2.** Найти изображение функции  $f(t) = \theta(t)e^{\lambda t}$ .

**Решение.** В этом случае  $s_0 = \lambda$ . Тогда

$$\theta(t)e^{\lambda t} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\lambda t} dt = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-p)t} dt = \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\lambda},$$

так как  $\operatorname{Re} p > \lambda$ , где  $\lambda$  – показатель степени роста функции  $e^{\lambda t}$ . Следовательно,

$$\theta(t)e^{\lambda t} \rightarrow \frac{1}{p-\lambda}. \quad (35.2)$$

**Пример 35.3.** Найти изображение функций  $f_1(t) = \theta(t) \cos t$ ,  $f_2(t) = \theta(t) \sin t$  и  $f_3(t) = \theta(t) \operatorname{tg} t$ .

**Решение.** Так как  $|\cos t| < 1$  и, следовательно,  $s_0 = 0$ , то

$$\theta(t) \cos t \leftrightarrow \psi(p) = \int_0^{\infty} \cos t e^{-pt} dt.$$

Проинтегрируем по частям, положив  $e^{-pt} = U$ ,  $dV = \cos t dt$ ,  $dU = -pe^{-pt} dt$ ,  $V = \sin t$ . Получим

$$\psi(p) = e^{-pt} \sin t \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} p \sin t e^{-pt} dt.$$

Проинтегрируем еще раз по частям, полагая  $e^{-pt} = U$ ,  $dV = \sin t dt$ ,  $dU = -pe^{-pt} dt$ ,  $V = -\cos t$ . Получим

$$\begin{aligned} \psi(p) &= -p \cos t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} \cos t e^{-pt} dt = \\ &= p - p^2 \int_0^{\infty} \cos t e^{-pt} dt = p - p^2 \psi(p). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$f_1(t) = \theta(t) \cos t \leftrightarrow \frac{p}{1+p^2}. \quad (35.3)$$

Аналогично

$$f_2(t) = \theta(t) \sin t \leftrightarrow \frac{1}{1+p^2}. \quad (35.4)$$

Функция  $f_3(t) = \theta(t) \operatorname{tg} t$  не является оригиналом (см. пример 34.1) и, следовательно, не имеет изображения.

**Пример 35.4.** Найти изображение степенной функции  $f(t) = \theta(t)t^n$ ,  $n$  – целое,  $n = \overline{1, \infty}$ .

**Решение.** Заметим, что  $s_0 = 0$ . Тогда

$$\theta(t)t^n \leftrightarrow \varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt.$$

Проинтегрируем по частям, положив  $U = t^n$ ,  $dV = e^{-pt} dt$ ,  $dU = nt^{n-1} dt$ ,  $V = -e^{-pt}/p$ . Получим

$$\varphi(p) = -t^n \frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt.$$

Проинтегрировав еще  $n - 1$  раз по частям, получим

$$\varphi(p) = \frac{n!}{p^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$\theta(t)t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (35.5)$$

◇ В математической литературе функция  $\theta(t)$  зачастую опускается. Тогда соотношения (35.1)–(35.5) примут вид

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{p}; \quad (35.6)$$

$$e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{p - \lambda}; \quad (35.7)$$

$$\cos t \leftrightarrow \frac{p}{1 + p^2}; \quad (35.8)$$

$$\sin t \leftrightarrow \frac{1}{1 + p^2}; \quad (35.9)$$

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}. \quad (35.10)$$

В дальнейшем там, где это не приводит к недоразумениям, функцию  $\theta(t)$  будем опускать.

### 36. Свойства преобразования Лапласа

#### Свойство 1. Линейность преобразования Лапласа

Если

$$f(t) \leftrightarrow \varphi(p), \quad g(t) \leftrightarrow \psi(p),$$

то для любых комплексных постоянных  $C_1$  и  $C_2$

$$[C_1 f(t) + C_2 g(t)] \leftrightarrow [C_1 \varphi(p) + C_2 \psi(p)]. \quad (36.1)$$

**Доказательство.** По определению имеем

$$\begin{aligned} C_1 f(t) + C_2 g(t) &\leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} [C_1 f(t) + C_2 g(t)] dt = \\ &= C_1 \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt = C_1 \varphi(p) + C_2 \psi(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 36.1.** Найти изображение функций  $f_1(t) = \operatorname{sh} t$  и  $f_2(t) = \operatorname{ch} t$ .

**Решение.** В этом случае  $s_0 = 1$  и поскольку

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

и

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{p-a},$$

то

$$\operatorname{sh} t = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p^2-1}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{sh} t \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1}.$$

Аналогично

$$\operatorname{ch} t \leftrightarrow \frac{p}{p^2-1}.$$

#### Свойство 2. Теорема подобия

Если  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$  и  $a > 0$ , то

$$f(at) \rightarrow \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{p}{a}\right). \quad (36.2)$$

**Доказательство.** Действительно,

$$f(at) \rightarrow \psi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt.$$

Сделаем в интеграле замену переменных  $at = x$ . Тогда

$$\psi(p) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-px/a} f(x) dx = \frac{1}{a} \varphi(p/a),$$

что и требовалось доказать.

**Пример 36.2.** Найти изображение функции  $f(t) = \sin at$ , где  $a > 0$ .

**Решение.** Известно (см. формулу (35.9)), что

$$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Следовательно, по теореме подобия

$$\sin at \rightarrow \frac{1}{a} \frac{1}{p^2/a^2 + 1} = \frac{a}{p^2 + a^2},$$

т.е.

$$\sin at \rightarrow \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

**Свойство 3. Теорема запаздывания. Первая теорема смещения для оригиналов**

Если  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$  и  $a > 0$ , то

$$f(t - a) \rightarrow e^{-ap} \varphi(p). \quad (36.3)$$

При этом  $f(t - a) = 0$  для  $t < a$ .

**Доказательство.** Действительно,

$$f(t-a) \div \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-a) dt = \int_0^a e^{-pt} f(t-a) dt + \int_a^{\infty} e^{-pt} f(t-a) dt.$$

Первый интеграл равен нулю, так как  $f(t-a) = 0$  при  $t-a < 0$ . Положив во втором интеграле  $\tau = t-a$ , получим

$$\begin{aligned} f(t-a) \div \int_a^{\infty} e^{-pt} f(t-a) dt &= \int_0^{\infty} e^{-p(\tau+a)} f(\tau) d\tau = \\ &= e^{-ap} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{-ap} \varphi(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 36.3.** Найти изображение функции

$$f(t-\pi) = (t-\pi)^2 \theta(t-\pi)$$

и сравнить с изображением функции

$$g(t) = (t-\pi)^2 \theta(t).$$

**Решение.** Для функции  $f(t) = t^2 \theta(t)$  имеем

$$f(t) = t^2 \theta(t) \div \frac{2}{p^3}.$$

По теореме запаздывания (свойство 3) для функции  $f(t-\pi)$  найдем

$$f(t-\pi) = (t-\pi)^2 \theta(t-\pi) \div e^{-\pi p} \frac{2}{p^3}.$$

Согласно свойству линейности, для функции  $g(t)$  получим

$$g(t) = (t^2 - 2\pi t + \pi^2) \theta(t) \div \frac{2}{p^3} - \frac{2\pi}{p^2} + \frac{\pi^2}{p}.$$

**Пример 36.4.** Найти изображение ступенчатой функции, график которой приведен на рис. 96.

**Решение.** Согласно графику, функция  $f(t)$  имеет вид

$$f(t) = A\{\theta(t) + \theta(t - \tau) + \theta(t - 2\tau) + \dots\} = A \sum_{n=0}^{\infty} \theta(t - n\tau).$$

Следовательно, по теореме запаздывания

$$f(t) \rightarrow A \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-\tau p} + \frac{1}{p} e^{-2\tau p} + \dots \right\} = \frac{A}{p} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tau p}.$$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

то, положив  $q = e^{-\tau p}$ , с учетом  $|e^{-\tau p}| < 1$  для  $\operatorname{Re} p > 0$ ,  $\tau > 0$  получим

$$f(t) \rightarrow \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p} \left( 1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right).$$

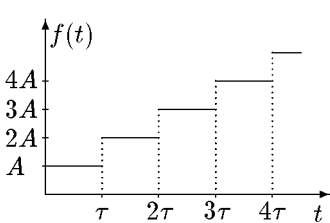


Рис. 96

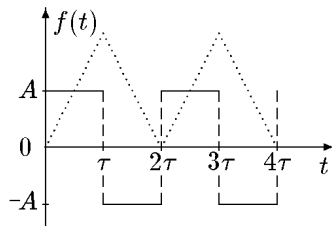


Рис. 97

**Пример 36.5.** Найти изображение периодической функции  $f(t+T) = f(t)$  (см. рис. 97).

**Решение.** Согласно (34.1), для изображения  $\varphi(p) \leftrightarrow f(t)$  имеем выражение

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \int_0^T e^{-pt} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-pt} f(t) dt + \dots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t) dt + \dots, \end{aligned}$$

которое заменами  $\tau_n = t - nT$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , можно привести к виду

$$\varphi(p) = (1 + e^{-pT} + \dots + e^{-npT} + \dots) \int_0^T f(t)e^{-pt} dt.$$

Учтя, что  $pT > 0$ ,  $|e^{-pT}| < 1$ , как и в предыдущем примере, получим

$$\varphi(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt.$$

Если ввести функцию

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T; \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

то в силу равенства

$$\int_0^T e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t) dt$$

изображение  $\varphi(p)$  можно записать еще и как

$$\varphi(p) = \frac{h(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где  $h(p)$  – изображение функции  $g(t)$ .

**Пример 36.6.** Найти изображение прямоугольного импульса  $f(t)$ , график которого задан сплошными линиями на рис. 97.

**Решение.** Так как функция  $f(t)$ , изображенная на рис. 97, периодическая с периодом  $T = 2\tau$ , причем

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \tau; \\ -A, & \tau < t < 2\tau, \end{cases}$$

то

$$\int_0^{2\tau} e^{-pt} f(t) dt = A \int_0^{\tau} e^{-pt} dt - A \int_{\tau}^{2\tau} e^{-pt} dt = \frac{A}{p} (1 - e^{-\tau p})^2,$$



откуда

$$\varphi(p) = \frac{A(1 - e^{-p\tau})^2}{p(1 - e^{-2p\tau})} = \frac{A(1 - e^{-p\tau})}{p(1 + e^{-p\tau})} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

С другой стороны,  $g(t)$  можно записать как

$$f(t) = A[\theta(t) - 2\theta(t - \tau) + \theta(t - 2\tau)].$$

Тогда

$$h(p) = \frac{A}{p}[1 - 2e^{-\tau p} + e^{-2\tau p}] = \frac{A}{p}(1 - e^{-\tau p})^2$$

и

$$\varphi(p) = \frac{A(1 - e^{-p\tau})^2}{p(1 - e^{-2p\tau})} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

#### Свойство 4. Теорема смещения для изображений

Если  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ , то при любом комплексном  $\alpha$

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow \varphi(p + \alpha). \quad (36.4)$$

**Доказательство.** Действительно,

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = \varphi(p + \alpha),$$

что и требовалось доказать.

**Пример 36.7.** Найти изображение функции  $e^{-\alpha t} \cos bt$ .

**Решение.** Так как  $\cos bt \rightarrow p/(p^2 + b^2)$ , то

$$e^{-\alpha t} \cos bt \rightarrow \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + b^2}.$$

**Пример 36.8.** Найти изображение функции

$$f(t) = t^4 e^{-5t}.$$

**Решение.** Функция  $f(t)$  является оригиналом с показателем степени роста  $s_0 = -5$ . Согласно (35.6),

$$t^4 \leftrightarrow \frac{4!}{p^5}.$$

Тогда по теореме смещения (свойство 4)

$$f(t) = t^4 e^{-5t} \leftrightarrow \varphi(p) = \frac{4!}{(p+5)^5}.$$

**Пример 36.9.** Найти оригинал функции

$$\varphi(p) = \frac{p+4}{p^2+4p+5}.$$

**Решение.** Разложим функцию  $\varphi(p)$  на элементарные дроби

$$\varphi(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2-4+5} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{2}{(p+2)^2+1}.$$

По теореме смещения (свойство 4) найдем

$$\begin{aligned} \frac{p+2}{(p+2)^2+1} &\leftrightarrow e^{-2t} \cos t, \\ \frac{2}{(p+2)^2+1} &\leftrightarrow 2e^{-2t} \sin t. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\varphi(p) \leftrightarrow f(t) = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t).$$

**Свойство 5. Вторая теорема смещения для оригиналов**

Если  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ , то

$$f(t+a) \leftrightarrow e^{ap} \left[ \varphi(p) - \int_0^a e^{-pt} f(t) dt \right], \quad a > 0. \quad (36.5)$$

**Доказательство.** По определению,

$$f(t+a) \leftrightarrow \psi(p) = \int_0^{\infty} f(t+a) e^{-pt} dt, \quad a > 0.$$

Сделаем в интеграле замену переменных  $\tau = t + a$ , получим

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \int_a^{\infty} f(\tau) e^{-p(\tau-a)} d\tau + e^{ap} \int_0^a f(\tau) e^{-p\tau} d\tau - \\ &- e^{ap} \int_0^a e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = e^{pa} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau - e^{ap} \int_0^a e^{-p\tau} f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### Свойство 6. Теорема дифференцирования для оригиналов

Если функция  $f(t)$  – оригинал, причем  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$  и существует (по крайней мере при  $t \neq 0$ ) производная  $f'(t)$ , являющаяся оригиналом, то

$$f'(t) \rightarrow p\varphi(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > s_0, \quad (36.6)$$

где  $s_0$  – показатель степени роста функции  $f(t)$ , а

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

**Доказательство.** При  $\operatorname{Re} p = \alpha > s_0$

$$f'(t) \rightarrow \psi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt.$$

Проинтегрируем по частям, положив  $U = e^{-pt}$ ,  $dV = f'(t) dt$ ,  $dU = -pe^{-pt} dt$ ,  $V = f(t)$ . Тогда

$$\psi(p) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = p\varphi(p) - f(0),$$

что и требовалось доказать.

**Пример 36.10.** С помощью теоремы дифференцирования для оригиналов найти изображение функций  $f(t) = \sin t$  и  $g(t) = \cos t$ .

**Решение.** Обозначим через  $\varphi(p)$  лапласовское изображение функции  $f(t)$ , т.е.

$$f(t) = \sin t \leftrightarrow \varphi(p),$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(t) &= \cos t \leftrightarrow p\varphi(p) - \sin 0 = p\varphi(p); \\ f''(t) &= -\sin t \leftrightarrow p^2\varphi(p) - \cos 0 = p^2\varphi(p) - 1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$f''(t) = -f(t).$$

Следовательно,

$$p^2\varphi(p) - 1 = -\varphi(p),$$

откуда

$$\varphi(p) = \frac{1}{1+p^2} \leftrightarrow \sin t.$$

Аналогично

$$\cos t \leftrightarrow \frac{p}{1+p^2}.$$

### Свойство 7. Теорема дифференцирования для изображений

Если  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ , то для  $\operatorname{Re} p = s > s_0$

$$\begin{aligned} -tf(t) &\leftrightarrow \varphi'(p), \\ t^2 f(t) &\leftrightarrow \varphi''(p), \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^n t^n f(t) &\leftrightarrow \varphi^{(n)}(p) \end{aligned} \tag{36.7}$$

**Доказательство** легко получить путем дифференцирования под знаком интеграла. Последнее возможно, так как интеграл определяет аналитическую функцию от  $p$ .

**Пример 36.11.** Найти изображение функции  $t \sin t$ .

**Решение.** Так как

$$\sin t \leftrightarrow \frac{1}{1+p^2},$$

то

$$t \sin t \leftrightarrow (-1) \frac{d}{dp} \frac{1}{1+p^2} = \frac{2p}{(1+p^2)^2}.$$

Таким образом,

$$t \sin t \rightarrow \frac{2p}{(1+p^2)^2}.$$

**Свойство 8. Теорема интегрирования для оригиналов**

Если функция  $f(t)$  является оригиналом и  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ , то функция  $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  — также оригинал, причем

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{\varphi(p)}{p}. \quad (36.8)$$

**Доказательство.** Функция  $\int_0^t f(\tau) d\tau$  удовлетворяет первому и второму условиям определения оригинала. Для третьего условия при  $\alpha > s_0$  [где  $s_0$  — показатель степени роста функции  $f(t)$ ] имеем

$$\left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \int_0^t M e^{\alpha t} dt = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) < \tilde{M} e^{\alpha t}.$$

Далее

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \psi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] dt.$$

Интегрируем полученное выражение по частям, обозначив

$$U = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad dV = e^{-pt} dt, \quad dU = f(t) dt \quad V = -\frac{1}{p} e^{-pt}.$$

Тогда

$$\psi(p) = -\frac{1}{p} e^{-pt} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{\varphi(p)}{p},$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 9. Теорема интегрирования для изображений**

Если  $f(t)/t$  – оригинал с показателем степени роста  $s_0$  и если  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ , то

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} \varphi(p) dp, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \quad (36.9)$$

**Доказательство.** Обозначим через  $\psi(p)$  изображение функции  $f(t)/t$ , т.е.

$$\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \psi(p).$$

Тогда по правилу дифференцирования

$$f(t) \leftrightarrow -\psi'(p) \quad \text{т.е.} \quad \varphi(p) = -\psi'(p).$$

Проинтегрировав последнее равенство от  $p$  до  $\infty$ , получим

$$-[\psi(\infty) - \psi(p)] = \int_p^{\infty} \varphi(\omega) d\omega,$$

что и требовалось доказать.

**Пример 36.12.** Найти изображение функции

$$f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}.$$

**Решение.** Так как  $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$  и

$$\frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2p}, \quad \cos 2t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 4},$$

то из свойства линейности следует

$$\sin^2 t \leftrightarrow \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2 + 4)} = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 t}{t} &\leftrightarrow \int_p^{\infty} \frac{2dp}{p(p^2 + 4)} = \int_p^{\infty} \frac{2dp}{p^3(1 + 4/p^2)} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln \left( 1 + \frac{4}{p^2} \right) \Big|_p^{\infty} = \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}. \end{aligned}$$

При выборе ветви логарифма мы воспользовались результатами примера 12.4. Окончательно запишем

$$\frac{\sin^2 t}{t} \rightarrow \frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}.$$

**Пример 36.13.** Найти лапласовское изображение треугольного импульса  $g(t)$ , показанного пунктиром на рис. 97.

**Решение.** Поскольку

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt \quad \text{и} \quad f(t) \rightarrow \varphi(p) = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2},$$

где  $f(t)$  – ступенчатая функция (рис. 97), то по свойству 8 (теорема об интегрировании оригинала) имеем

$$g(t) \rightarrow \frac{g(p)}{p} = \frac{A}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} / p = \frac{A}{p^2} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2}.$$

**Свойство 10. Теорема умножения изображений (теорема Бореля)**

Если  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$  и  $g(t) \rightarrow \psi(p)$ , тогда

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \rightarrow \varphi(p)\psi(p). \quad (36.10)$$

**Доказательство.** Пусть  $s_1$  – показатель степени роста функции  $f(t)$ , а  $s_2$  – показатель степени роста функции  $g(t)$ . Тогда если  $s_1 \neq s_2$ , то

$$\begin{aligned} J &= \left| \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right| \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1\tau} e^{s_2(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{M_1 M_2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \leq \frac{2M_1 M_2}{|s_1 - s_2|} e^{st}, \end{aligned}$$

где  $s = \max\{s_1, s_2\}$ . Если же  $s_1 = s_2 = s \neq 0$ , то

$$J < \frac{2M_1 M_2}{s} e^{st} t,$$

т.е. показатель степени роста функции  $\Phi(t)$  также равен  $s$ . Аналогично для  $s_1 = s_2 = 0$ . Нетрудно убедиться, что  $\Phi(t)$  удовлетворяет и остальным условиям существования изображения. Для вычисления изображения воспользуемся определением (34.1). Получим

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Изменив порядок интегрирования, найдем

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}g(t-\tau)dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных  $t - \tau = t'$ . Получим

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt'} g(t')dt' = \varphi(p)\psi(p),$$

что и требовалось доказать.

◆ Функция вида

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (36.11)$$

называется сверткой функций  $f(t)$  и  $g(t)$  и обозначается  $f(t) * g(t)$ , т.е.

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (36.12)$$

◇ Можно показать, что  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ .

**Пример 36.14.** Найти оригинал функции

$$\varphi(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}.$$



**Решение.** Так как

$$\frac{1}{p-1} \leftrightarrow e^t, \quad \frac{1}{p-2} \leftrightarrow e^{2t},$$

то из (36.10) получим

$$\begin{aligned} \varphi(p) \leftrightarrow \int_0^t e^\tau e^{2(t-\tau)} d\tau &= e^{2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \\ &= e^{2t}(1 - e^{-t}) = e^{2t} - e^t. \end{aligned}$$

**Пример 36.15.** Найти изображение функции

$$\Phi(t) = \int_0^t \tau^2 \cos(t - \tau) d\tau.$$

**Решение.** Функция  $\Phi(t)$  – оригинал с показателем степени роста  $s_0 = 0$ . По теореме умножения изображений (свойство 10)

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \leftrightarrow \varphi(p)\psi(p),$$

где

$$f(\tau) \leftrightarrow \varphi(p), \quad g(t) \leftrightarrow \psi(p).$$

Положив

$$f(t) = t^2 \leftrightarrow \frac{2!}{p^3}, \quad g(t) = \cos t \leftrightarrow \frac{p}{p^2 + 1},$$

получим

$$\Phi(t) \leftrightarrow \varphi(p)\psi(p) = \frac{2p}{p^3(p^2 + 1)} = \frac{2}{p^2(p^2 + 1)}.$$

**Пример 36.16.** Показать, что если  $f(t)$  – оригинал, то справедливо соотношение

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (36.13)$$

Соотношение (36.13) называется формулой Коши.

**Решение.** Обозначим через  $\varphi(p)$  изображение функции  $f(t)$ . Тогда, согласно (36.10), с учетом теоремы Бореля получим

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \div \frac{1}{p^n} \varphi(p).$$

С другой стороны, из теоремы интегрирования для оригиналов (см. формулу (36.8)) следует

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \div \frac{\varphi(p)}{p^n}.$$

В силу теоремы о единственности изображения соотношение (36.13) доказано.

### Свойство 11. Теорема умножения оригиналов

Если  $f(t) \div \varphi(p)$  ( $\operatorname{Re} p > s_1$ ),  $g(t) \div \psi(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > s_2$ , то произведение  $f(t)g(t)$  также является оригиналом и

$$f(t)g(t) \div \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(q)\psi(p-q) dq, \quad (36.14)$$

где  $\operatorname{Re} q = \alpha > s_1$ ,  $\operatorname{Re} p > s_1 + s_2$ .

**Доказательство.** Произведение оригиналов  $f(t)g(t)$ , очевидно, удовлетворяет условиям 1–3 и является оригиналом. По определению

$$f(t)g(t) \div F(p) = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-pt} dt.$$

Возьмем  $\alpha$ , удовлетворяющее условиям  $\alpha > s_1$ ,  $\alpha > s_2$ , где  $s_1$  и  $s_2$  – показатели степени роста функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , соответ-

ственно. Тогда по формуле Меллина (34.7) для  $f(t)$  получим

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi(q)e^{qt} dq \right\} g(t)e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \left\{ \varphi(q) \int_0^{\infty} g(t)e^{-(p-q)t} dt \right\} dq. \end{aligned}$$

Положим  $\operatorname{Re} p > s_2 + \alpha$ . Тогда  $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$ , так как  $\operatorname{Re} q = \alpha$  и внутренний интеграл можно заменить на  $\psi(p-q)$ , что и требовалось доказать.

### Свойство 12. Первая теорема разложения

Если функция  $\varphi(p)$  регулярна в бесконечно удаленной точке и равна в ней нулю и если ее лорановское разложение в окрестности бесконечно удаленной точки ( $|p| \geq R$ ) имеет вид

$$\varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{p^{n+1}}, \quad (36.15)$$

то функция

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{n!} t^n, \quad t > 0, \quad (36.16)$$

является оригиналом, имеющим изображение  $\varphi(p)$ ,  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ , причем ряд (36.15) сходится для всех  $t$ .

**Доказательство.** Положим  $p = 1/q$  и обозначим  $\varphi(1/q) = \psi(q)$ . Функция  $\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} q^{n+1}$  аналитична в круге  $|q| \leq 1/R$ . Согласно неравенству Коши (которое непосредственно следует из (16.7)),  $|C_n| < MR^n$ . Следовательно,

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |C_{n+1}| \frac{|t|^n}{n!} \leq MR \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n |t|^n}{n!} = MR e^{R|t|}.$$

Из полученного неравенства следует, что

1. ряд сходится для всех комплексных  $t$ ;
2. для положительных  $t$  справедливо условие  $|f(t)| < Ce^{Rt}$ , т.е. функция  $f(t)$  является оригиналом. В силу равномерной сходимости ряда (36.16) в любом конечном круге его можно

умножить на  $e^{-pt}$  и почленно проинтегрировать по  $t$  от нуля до  $\infty$  для  $\operatorname{Re} p > R$ . Воспользовавшись соотношением (35.5), получим (36.15), что и требовалось доказать.

**Пример 36.17.** Найти преобразование Лапласа функции  $f(t) = J_0(t)$ , заданной абсолютно сходящимся рядом

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} t^{2k}, \quad (36.17)$$

где

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2}.$$

◇ Функция  $J_0(t)$  называется функцией Бесселя первого рода нулевого индекса. Свойства функций Бесселя подробно рассматриваются в главе «Цилиндрические функции» части III.

**Решение.** Согласно первой теореме разложения (свойство 12)

$$f(t) \rightarrow \varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k} \frac{(2k)!}{p^{2k+1}}.$$

Рассмотрим  $(2k)! = (2k)!!(2k-1)!! = 2^k k!(2k-1)!!$ . Тогда

$$C_{2k} (2k)! = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} 2^k k! (2k-1)!!$$

и, следовательно,

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k (k!)} \frac{1}{p^{2k+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Таким образом,

$$J_0(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

**Пример 36.18.** Найти изображение функции

$$f(t) = J_0(2\sqrt{t}),$$

где функция  $J_0(t)$  определена формулой (36.17).

**Решение.** Из (36.17) следует

$$f(t) = J_0(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k!)^2}.$$

Согласно первой теореме разложения,

$$f(t) \doteq = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{k+1}} = \frac{1}{p} e^{-1/p}.$$

Таким образом,

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteq = \frac{1}{p} e^{-1/p}. \quad (36.18)$$

### Свойство 13. Вторая теорема разложения

Пусть  $\varphi(p)$  – изображение функции  $f(t)$ . Тогда, если  $\varphi(p)$  допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением конечного числа изолированных особых точек  $p_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , и это аналитическое продолжение в полуплоскости  $\operatorname{Re} p < \alpha$  удовлетворяет условиям леммы Жордана (в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha$  функция  $\varphi(p)$  аналитична), то для  $t > 0$

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} \varphi(p) e^{pt}, \quad (36.19)$$

**Доказательство.** В силу формулы Меллина (34.7) для любого  $\alpha$  из области аналитичности функции  $\varphi(p)$  имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \varphi(p) e^{pt} dp.$$

Согласно теореме 23.4 и лемме Жордана, вычисление этого интеграла дает

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \varphi(p) e^{pt} dp = \theta(t) \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} [\varphi(p) e^{pt}],$$

откуда для  $t > 0$  и следует (36.19).

**Пример 36.19.** Найти оригинал  $f(t)$  функции

$$\varphi(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{Re } p > 0.$$

**Решение.** Функция  $\varphi(p)$  аналитична во всей комплексной плоскости за исключением полюсов  $p_{1,2} = \pm i\omega$  и удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда по формуле (36.19) имеем

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Res}_{p=i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p^2 + \omega^2} + \text{Res}_{p=-i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \lim_{p \rightarrow i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p + i\omega} + \lim_{p \rightarrow -i\omega} \frac{\omega e^{pt}}{p - i\omega} = \sin \omega t \end{aligned}$$

(см. также пример 23.7).

◇ Формула (36.19) допускает обобщение на случай бесконечного числа особых точек, т.е. на случай, когда аналитическое продолжение является мероморфной функцией. Действительно, если в доказательстве теоремы Бромвича–Вагнера 23.4 под  $\gamma_R$  понимать правильную систему окружностей  $\gamma_n$  (см. разд. «Разложение мероморфной функции на простейшие дроби»), то

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k^{(\gamma_n)} \text{Res}_{p=p_k} [\varphi(p) e^{pt}]. \quad (36.20)$$

Здесь суммирование проводится по всем особым точкам, лежащим внутри  $\gamma_n$ .

**Пример 36.20.** Найти изображение функции

$$\psi(p) = \frac{\text{sh } ap}{p \text{ sh } bp}.$$

**Решение.** Функция  $\psi(p)$  – мероморфная функция с полюсами, расположенными на прямой  $\text{Re } p = 0$ . Согласно (36.20),

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k^{(\gamma_n)} \text{Res}_{p=p_k} e^{pt} \frac{\text{sh } ap}{p \text{ sh } bp}.$$

Точки  $p_k = \pm \pi k i / b$  являются простыми полюсами функции  $\psi(p)$ . Поэтому при  $p_k = \pi k i / b$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , получим

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p=p_k} \psi(p) &= \lim_{p \rightarrow p_k} (p - p_k) \psi(p) = \\ &= \lim_{p \rightarrow p_k} e^{pt} \frac{\text{sh } ap}{p} \frac{p - p_k}{\text{sh } p} = \frac{e^{i\pi k t / b}}{\pi k (-1)^k} \sin \frac{\pi k a}{b}. \end{aligned}$$

Аналогично при  $p_k = -\pi k i / b$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , получим

$$\operatorname{Res}_{p=p_k} \psi(p) = \frac{e^{-i\pi k t / b}}{\pi k (-1)^k} \sin \frac{\pi k a}{b}.$$

Точка  $p = 0$  также является простым полюсом функции  $\psi(p)$ . Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{p=0} \psi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \psi(p) = \lim_{p \rightarrow 0} e^{pt} \frac{\operatorname{sh} ap}{\operatorname{sh} bp} = \frac{a}{b}.$$

Тогда

$$\varphi(p) \leftrightarrow f(t) = \frac{a}{b} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} (e^{i\pi k t / b} + e^{-i\pi k t / b}) \sin \frac{\pi k a}{b}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\operatorname{sh} ap}{p \operatorname{sh} bp} \leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cos \frac{\pi k t}{b} \sin \frac{\pi k a}{b}. \quad (36.21)$$

#### Свойство 14 (формула Дюамеля)

Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$  ( $\operatorname{Re} p > s_1$ ) и  $g(t) \leftrightarrow \psi(p)$  ( $\operatorname{Re} p > s_2$ ), а функция  $g'(t)$  является оригиналом. Тогда справедливо соотношение

$$p \varphi(p) \psi(p) \leftrightarrow f(t) g(0) + \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} p > \max\{s_1, s_2\}. \quad (36.22)$$

Соотношение (36.22) называется формулой Дюамеля.

**Доказательство.** По теореме умножения изображений (36.10) найдем

$$\varphi(p) \psi(p) \leftrightarrow \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \Phi(t).$$

Применим к последнему соотношению теорему дифференцирования оригинала (36.6). Найдем

$$p \varphi(p) \psi(p) \leftrightarrow \Phi'(t) + \Phi(0) = f(t) g(0) + \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau,$$

что и требовалось доказать.

В заключение приведем ряд свойств, полезных при использовании операционного метода.

### Свойство 15\*. Пределные соотношения

Пусть  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$  и функция  $f'(t)$  также является оригиналом. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\varphi(p), \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta, \quad \delta > 0, \quad (36.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varphi(p) \quad (36.24)$$

при условии, что пределы, стоящие в левых и правых частях равенств (36.23) и (36.24), существуют.

**Доказательство.** Пусть  $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0)$ . Из теоремы о дифференцировании оригинала следует, что функция  $\psi(p) = p\varphi(p) - f(0)$  является изображением функции  $f'(t)$ , т.е.  $f'(t) \rightarrow \psi(p)$ . Тогда, согласно (34.3),

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \psi(p) = 0$$

и, следовательно,  $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p\varphi(p) = f(0)$ . Таким образом, соотношение (36.23) доказано.

2. Пусть существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$ . Тогда функция  $f(t)$  ограничена и ее показатель степени роста  $s_0 = 0$ . Следовательно, функция  $\varphi(p)$  определена в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ . Тогда по теореме о дифференцировании оригинала

$$\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = p\varphi(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (36.25)$$

Перейдем в соотношении (36.25) к пределу  $p \rightarrow 0$  в секторе  $|\arg p| < \pi/2 - \delta$ ,  $\delta > 0$  и получим

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} p\varphi(p) - f(0).$$

Таким образом, соотношение (36.24) доказано.

◇ Мы продолжим рассмотрение свойств преобразований Лапласа после того, как введем понятие обобщенного оригинала.



### 37. Приложения операционного исчисления

#### 37.1. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = f(t), \quad (37.1)$$

$$x^{(n-1)}(0) = \dots = x'(0) = x(0) = 0.$$

Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$  и  $x(t) \leftrightarrow y(p)$ . По теореме о дифференцировании оригинала

$$x'(t) \leftrightarrow p y(p) - x(0) = p y(p),$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 y(p) - x'(0) = p^2 y(p),$$

.....

$$x^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n y(p) - x^{(n-1)}(0) = p^n y(p).$$

Тогда уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k y(p) = \varphi(p).$$

Следовательно,

$$y(p) = \frac{\varphi(p)}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}. \quad (37.2)$$

Для нахождения функции  $x(t)$  необходимо найти оригинал функции  $y(p)$ .

#### 37.2. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t), \quad (37.3)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0.$$

Обозначим  $f(t) \rightarrow \varphi(p)$ ,  $x(t) \rightarrow y(p)$ . Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) &\rightarrow py(p) - x(0), \\ x''(t) &= \frac{d}{dt} x'(t) \rightarrow p[py(p) - x_0] - x'_0. \end{aligned}$$

Уравнение (37.3) после умножения на  $e^{-pt}$  и интегрирования по  $t$  от нуля до бесконечности примет вид

$$p^2 y - px_0 - x'_0 + a(py - x_0) + by = \varphi(p)$$

или

$$y(p^2 + ap + b) = \varphi(p) + x_0(a + p) + x'_0.$$

Следовательно,

$$y(p) = \frac{\varphi(p) + x_0(a + p) + x'_0}{p^2 + ap + b}. \quad (37.4)$$

**Пример 37.1.** Проинтегрировать уравнение

$$x'' + 4x = 2, \quad x_0 = x'_0 = 0.$$

**Решение.** По формуле (37.4) получим

$$y(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

Так как оригиналом функции  $1/p$  является единица, а функции  $p/(p^2 + 4) - \cos 2t$ , окончательно получим

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t, \quad t > 0.$$

**Пример 37.2.** Проинтегрировать уравнение

$$x'' - 2x' + x = 4, \quad x'(0) = x'_0 = 2, \quad x(0) = x_0 = 4.$$

**Решение.** По формуле (37.7) получим

$$\begin{aligned} y(p) &= \frac{4/p + 4(-2 + p) + 2}{p^2 - 2p + 1} = \frac{4 - 6p + 4p^2}{p(p-1)^2} = \\ &= \frac{2}{(p-1)^2} + \frac{4}{p}. \end{aligned}$$

Оригиналом последнего выражения является функция

$$x(t) = 2te^t + 4, \quad t > 0.$$

**Пример 37.3.** Операторным методом найти решение задачи Коши

$$x'' + 2x = 2 + e^t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = -2.$$

**Решение.** Обозначим

$$x(t) \leftrightarrow y(p).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x'(t) \leftrightarrow py(p) - x(0) &= py(p) + 1, \\ x''(t) \leftrightarrow p[py(p) + 1] - x'(0) &= p^2y(p) + p + 2 \end{aligned}$$

и

$$f(t) = 2 + e^t \leftrightarrow \varphi(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1}.$$

В результате исходное уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} p^2y(p) + p + 2 + 2y(p) &= \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1}, \\ y(p)[p^2 + 2] &= \frac{2}{p} + \frac{1}{p-1} - p - 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y(p) = \frac{2}{p(p^2 + 2)} + \frac{1}{(p-1)(p^2 + 2)} - \frac{p+2}{p^2 + 2}. \quad (37.5)$$

Из теоремы подобия (36.2) следует

$$\frac{p}{p^2 + 2} \leftrightarrow \cos \sqrt{2}t, \quad \frac{1}{p^2 + 2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t.$$

С учетом теоремы об интегрировании оригиналов (36.8) имеем

$$\frac{1}{p} \frac{1}{p^2 + 2} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \sin \sqrt{2}\tau d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sqrt{2}t - 1).$$

С учетом (35.7) из теоремы умножения изображений (36.10) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-1} \frac{1}{p^2+2} &\leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t e^{t-\tau} \sin \sqrt{2} \tau d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \frac{e^\tau}{3} (-\sin \sqrt{2} \tau - \sqrt{2} \cos \sqrt{2} \tau) \Big|_0^t = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2} t - \frac{1}{3} \cos \sqrt{2} t + \frac{1}{3} e^t. \end{aligned}$$

В результате для оригинала функции (37.5) найдем

$$\begin{aligned} y(p) \leftrightarrow x(t) &= \sqrt{2} \cos \sqrt{2} t - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2} t - \\ &- \frac{1}{3} \cos \sqrt{2} t + \frac{1}{3} e^t - \cos \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2} t. \end{aligned}$$

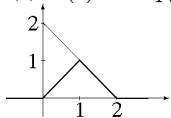
Окончательно получим

$$x(t) = \frac{1}{3} e^t + \left( \sqrt{2} - \frac{4}{3} \right) \cos \sqrt{2} t - \frac{7\sqrt{2}}{6} \sin \sqrt{2} t - \sqrt{2}.$$

**Пример 37.4.** Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} x'' + 4x &= t[\theta(t) - \theta(t-1)] + (2-t)[\theta(t-1) - \theta(t-2)], \\ x(0) &= x'(0) = 0, \end{aligned}$$

где  $\theta(t)$  –  $\theta$ -функция Хевисайда.



**Решение.** График функции  $f(t)$  имеет вид  
Найдем лапласовское изображение функции  $f(t)$

$$\begin{aligned} f(t) \leftrightarrow \varphi(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \{t[\theta(t) - \theta(t-1)] + (2-t)[\theta(t-1) - \theta(t-2)]\} dt = \\ &= \int_0^1 e^{-pt} t dt + \int_1^2 (2-t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по частям, положив

$$U = t, \quad dU = dt, \quad dV = e^{-pt} dt, \quad V = -\frac{1}{p}e^{-pt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= -t \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt} dt - \frac{2-t}{p} e^{-pt} \Big|_1^2 - \frac{1}{p} \int_1^2 e^{-pt} dt = \\ &= -\frac{e^{-p}}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{p^2} [e^{-p} - 1] + \frac{1}{p^2} [e^{-2p} - e^{-p}]. \end{aligned}$$

В результате исходная задача преобразуется к виду

$$\begin{aligned} p^2 y(p) + 4y(p) &= -\frac{e^{-p} - 1}{p^2} + \frac{e^{-2p} - e^{-p}}{p^2}, \\ y(p) &= -\frac{e^{-p} - 1}{p^2(p^2 + 4)} + \frac{e^{-2p} - e^{-p}}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{-2e^{-p} + e^{-2p} + 1}{p^2(p^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Проведем разложение на элементарные дроби

$$\frac{1}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4}.$$

Вычислив стандартным образом коэффициенты  $A, B, C, D$ , с учетом соотношения

$$\frac{1}{4p^2} - \frac{2}{8(p^2 + 4)} \leftrightarrow \frac{t}{4} - \frac{1}{8} \sin 2t$$

и теоремы запаздывания окончательно получим

$$\begin{aligned} y(p) &= -(2e^{-p} - 1 - e^{-2p}) \left[ \frac{1}{4p^2} - \frac{1}{4(p^2 + 4)} \right] \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow 2 \left[ \frac{t-1}{4} - \frac{\sin(2t-2)}{8} \right] \theta(t-1) - \frac{t}{4} + \\ &+ \frac{\sin 2t}{8} - \left[ \frac{t-2}{4} - \frac{\sin 2(t-2)}{8} \right] \theta(t-2). \end{aligned}$$

### 37.3. Интеграл Дюамеля

Отметим особо роль интеграла (формулы) Дюамеля. Пусть требуется решить уравнение (37.1), если известно решение уравнения

$$\begin{aligned} a_n x_1^{(n)} + a_{n-1} x_1^{(n-1)} + \dots + a_1 x_1' + a_0 x_1 &= 1, \\ x_1^{(n-1)}(0) &= \dots = x_1'(0) = x_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (37.6)$$

с той же левой частью и правой частью, равной единице, при нулевых начальных условиях. Интеграл Дюамеля позволяет записать решение уравнения (37.1) достаточно просто.

Действительно, решения соответствующих операторных уравнений имеют вид

$$y(p) = \frac{\varphi(p)}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \quad \text{и} \quad y_1(p) = \frac{1/p}{\sum_{k=0}^n a_k p^k},$$

где  $y_1(p)$  – изображение функции  $x_1(t)$ . Отсюда

$$y(p) = p\varphi(p)y_1(p),$$

и по формуле Дюамеля получим

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t - \tau) d\tau = \int_0^t x_1(\tau) f'(t - \tau) d\tau. \quad (37.7)$$

**Пример 37.5.** Решить уравнение  $x'' - a^2 x = b e^{-t^2}$  с нулевыми начальными условиями.

**Решение.** Предварительно рассмотрим уравнение  $x_1'' - a^2 x_1 = 1$  с теми же начальными условиями. Решение этого уравнения имеет вид

$$y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - a^2)} \leftrightarrow x_1(t) = \frac{1}{a^2} (\operatorname{ch} at - 1).$$

Согласно (37.7) искомое решение  $x(t)$  определится соотношением

$$x(t) = \frac{b}{a} \int_0^t e^{-\tau^2} \operatorname{sh} a(t - \tau) d\tau,$$

которое после простых преобразований принимает вид

$$x(t) = \frac{b\sqrt{\pi}}{4a} e^{a^2/4} \left\{ e^{at} \operatorname{erf} \left( t + \frac{a}{2} \right) - e^{-at} \operatorname{erf} \left( t - \frac{a}{2} \right) - 2 \operatorname{erf} \left( \frac{a}{2} \right) \operatorname{ch} at \right\}.$$

Здесь через  $\operatorname{erf} z$  обозначена функция вероятности или интеграл ошибок, определяемый выражением

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau.$$

Более подробно свойства функции  $\operatorname{erf} z$  рассмотрены ниже в разд. «Интеграл ошибок».

**Пример 37.6.** Найти решение задачи Коши

$$x'' + x = \frac{1}{(1 + e^t)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

**Решение.** Решим вспомогательную задачу

$$x_1'' + x_1 = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} x_1(t) &\leftrightarrow y_1(p), \\ x_1'(t) &\leftrightarrow p y_1(p) + x_0 = p y_1(p), \\ x_1'' &\leftrightarrow p p y_1(p) + x_0' = p^2 y_1(p) \end{aligned}$$

и получим

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow \frac{1}{p}, \\ p^2 y_1 + y_1 &= \frac{1}{p}, \\ y_1(p) &= \frac{1}{p(p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Разложим функцию  $y_1(p)$  на элементарные дроби

$$y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + c}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1} \leftrightarrow 1 - \cos t = x_1(t).$$

Решение исходной задачи найдем по формуле Дюамеля

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t x_1'(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau \frac{1}{(1+e^{t-\tau})^2} d\tau = \\ &= \int_0^t \sin \tau \frac{1}{(1+e^t/e^\tau)^2} d\tau. \end{aligned}$$

◇ Если начальные условия (37.6) ненулевые

$$x(0) = x_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

то сделаем замену

$$z(t) = x(t) - x_0 - tx_0' - \dots - x_0^{(n-1)} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (37.8)$$

Выразим из (37.8)  $x(t)$ :

$$x(t) = z(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} x_0^{(k)}$$

и подставим в уравнение (37.6). Тогда для функции  $z(t)$  получим задачу Коши с нулевыми начальными условиями, и, следовательно, для определения функции  $z(t)$  можно использовать интеграл Дюамеля.

### 37.4. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

В заключение отметим, что операционный метод может оказаться полезным и при решении линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, лапласовское изображение которых проще исходных уравнений. Действительно, пусть  $x(t) \rightarrow y(p)$ . По теоремам дифференцирова-



ния оригиналов и изображений имеем

$$x(t) \leftrightarrow y(p), \quad x'(t) \leftrightarrow py(p) - x(0), \quad (37.9)$$

$$x''(t) \leftrightarrow p^2 y(p) - px(0) - x'(0);$$

$$tx(t) \leftrightarrow -\dot{y}(p), \quad t^2 x(t) \leftrightarrow \ddot{y}(p), \quad \dots;$$

$$tx'(t) \leftrightarrow -\frac{d}{dp}[py(p)] = -p\dot{y}(p) - y(p),$$

$$t^2 x'(t) \leftrightarrow \frac{d^2}{dp^2}[py(p)] = p\dot{y}(p) + 2\dot{y}(p), \quad \dots;$$

$$tx''(t) \leftrightarrow -\frac{d}{dp}[p^2 y(p)] + x(0) = -p^2 \dot{y}(p) - 2py(p) + x(0),$$

$$t^2 x''(t) \leftrightarrow \frac{d^2}{dp^2}[p^2 y(p)] = p^2 \ddot{y}(p) + 4p\dot{y}(p) + 2y(p), \quad \dots$$

и т.д. Здесь обозначено  $\dot{y} = dy/dp$ . Переход к изображениям позволяет иногда упростить дифференциальные уравнения, содержащие слагаемые подобного вида.

**Пример 37.7.** Найти общее решение уравнения

$$tx'' - 2(3t + 1)x' + (9t + 6)x = 0. \quad (37.10)$$

**Решение.** Обозначим

$$x(t) \leftrightarrow y(p), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0.$$

Тогда согласно формулам (37.10)

$$x' \leftrightarrow py - x_0,$$

$$x'' \leftrightarrow p^2 y - px_0 - x'_0,$$

$$tx \leftrightarrow -\dot{y},$$

$$tx' \leftrightarrow -\frac{d}{dp}[py - x_0] = -y - p\dot{y},$$

$$tx'' \leftrightarrow -\frac{d}{dp}[p^2 y - px_0 - x'_0] = -2py - p^2 \dot{y} + x_0.$$

Тогда для операторного уравнения, отвечающего (37.10), получим

$$\dot{y} + \frac{4}{p-3}y = -\frac{2x_0}{(p-3)^2}. \quad (37.11)$$

Решение уравнения (37.11) будем искать методом Бернулли  $y(p) = u(p)v(p)$ . Тогда для функций  $u(p)$  и  $v(p)$  получим уравнения с разделяющимися переменными

$$\dot{v} + \frac{4}{p-3}v = 0, \quad \dot{u} = -\frac{2x_0}{(p-3)^2} \frac{1}{v}.$$

Следовательно,

$$v(p) = \frac{1}{(p-3)^4}, \quad u(p) = -\frac{2}{3}x_0(p-3)^3 + C,$$

где  $C = \text{const}$ , и решение уравнения (37.11) имеет вид

$$y(p) = \frac{2}{3} \frac{x_0}{p-3} + \frac{C}{(p-3)^4}.$$

Обозначим  $C_1 = -3x_0/2$ ,  $C_2 = 3!C$ . Тогда с учетом теоремы смещения (36.4) для общего решения уравнения (37.10) получим

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t^3 e^{3t}.$$

**Пример 37.8.** Решить уравнение

$$tx'' - (1+t)x' + x = 0, \quad x(0) = 0.$$

**Решение.** Аналогично предыдущему примеру, для изображения  $y(p)$  получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\dot{y}(p) = \frac{2-3p}{p(p-1)}y(p).$$

Его общее решение имеет вид

$$y(p) = -C \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p-1} \right),$$

где  $C$  – произвольная постоянная, а соответствующий оригинал определится соотношением

$$x(t) = -C(1-t-e^t).$$

### 37.5. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (37.12)$$

где

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и  $a_{kj} = \text{const}$ ,  $k, j = \overline{1, n}$ . Пусть  $\vec{f}(t) \rightarrow \vec{\varphi}(p)$ ,  $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{y}(p)$ . Обе части уравнения умножим на  $e^{-pt}$  и проинтегрируем от нуля до  $\infty$ . Получим

$$[p\vec{y}(p) - \vec{x}_0] + A\vec{y}(p) = \vec{\varphi}(p). \quad (37.13)$$

♦ Система (37.13) называется системой операторных уравнений

$$(A + p)\vec{y}(p) = \vec{\varphi}(p) + \vec{x}_0. \quad (37.14)$$

Разрешив систему (37.14) относительно  $\vec{y}(p)$ , получим изображение искомой функции  $\vec{y}(p) = \vec{\Phi}(p)$ , по которому находим оригинал  $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{y}(p)$ .

**Пример 37.9.** Операторным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' - 2x_1 - 4x_2 = \cos t, \\ x_2' + x_1 + 2x_2 = \sin t \end{cases}$$

с нулевыми начальными условиями.

**Решение.** Найдем изображения левых и правых частей обоих уравнений системы. Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_1(p - 2) - 4y_2 = \frac{p}{p^2 + 1}, \\ y_1 + (2 + p)y_2 = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы системы

$$\Delta = (p - 2)(p + 2) + 4 = p^2.$$

Так как определитель не равен тождественно нулю, система имеет единственное решение. Из первого уравнения выразим

$$y_1(p) = \frac{1}{p^2 + 1} - (2 + p)y_2(p).$$

Подставив полученное соотношение во второе уравнение системы, найдем

$$\left\{ \frac{p-2}{p^2+1} - (p^2-4)y_2 \right\} - 4y_2 = \frac{p}{p^2+1};$$

$$\frac{p-2}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1} = p^2 y_2.$$

откуда

$$y_2(p) = -\frac{2}{p^2(p^2+1)}.$$

Следовательно,

$$y_1(p) = \frac{p^2}{p^2(p^2+1)} + \frac{(2+p)2}{p^2(p^2+1)} = \frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}.$$

Разложив полученные выражения на элементарные дроби, получим

$$y_1(p) = \frac{4}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{2p+3}{p^2+1},$$

$$y_2(p) = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}.$$

Возвратившись к оригиналам, запишем решение исходной системы

$$x_1(t) = 4t + 2 - 2 \cos t - 3 \sin t,$$

$$x_2(t) = -2t + 2 \sin t.$$

### 37.6. Вычисление несобственных интегралов

**Теорема 37.1 (формула Парсеваля).** Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ ,  $g(t) \leftrightarrow \psi(p)$  и несобственные интегралы

$$\int_0^{\infty} f(t)\psi(t)dt \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} g(t)\varphi(t)dt$$

сходятся. Тогда справедливо

$$\int_0^{\infty} f(t)\psi(t)dt = \int_0^{\infty} g(t)\varphi(t)dt. \quad (37.15)$$

Соотношение (37.15) называется формулой Парсеваля.

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)\psi(t)dt &= \int_0^{\infty} dt f(t) \int_0^{\infty} du e^{-ut} g(u) = \\ &= \int_0^{\infty} du g(u) \int_0^{\infty} f(t)e^{-ut} dt = \int_0^{\infty} g(u)\varphi(u)du, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Пример 37.10.** Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt.$$

**Решение.** Положим

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos at - \cos bt, & \psi(p) &= 1/p; \\ \varphi(p) &= \frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{p}{p^2 + b^2}, & g(t) &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле Парсеваля (37.15) получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt &= \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2} \right) dt = \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2) - \frac{1}{2} \ln(t^2 + b^2) \right\} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{t^2 + a^2}{t^2 + b^2} \right) \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{b^2} = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

**Пример 37.11.** Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt, \quad a > 0.$$

**Решение.** Обозначим

$$f(t) = \sin at, \quad \psi(p) = 1/p;$$

$$\varphi(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad g(t) = 1.$$

Тогда по формуле Парсеваля (37.15)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{a}{t^2 + a^2} dt = \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

## 38. Гамма-функция

◇ Для изучения некоторых свойств преобразования Лапласа нам потребуется ввести гамма- и бета-функции. Гамма- и бета-функции являются представителями класса специальных функций, и их применение не ограничивается только применением к преобразованиям Лапласа.

◆ В области  $\operatorname{Re} z > 0$  гамма-функция (или эйлеров интеграл второго рода) определяется абсолютно сходящимся инте-

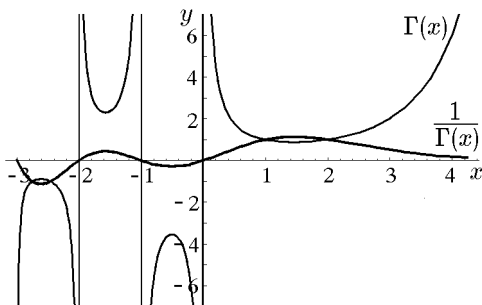


Рис. 98

гралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (38.1)$$

Здесь для функции  $t^{z-1} = e^{(z-1) \operatorname{Ln} t}$  выбирается однозначная ветвь, такая что  $\operatorname{Ln} t = \ln t$ .

◇ Характер аналитического продолжения функции (38.1) в область  $\operatorname{Re} z < 0$  будет исследован ниже (см. свойство 4). Поведение функции  $\Gamma(z)$  для действительного аргумента иллюстрирует рис. 98, а поведение модуля  $\Gamma$ -функции для комплексных  $z$  – рис. 99.

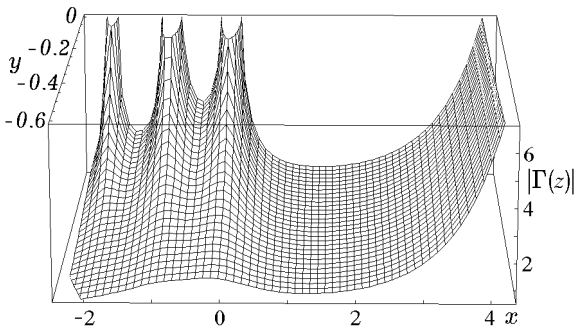


Рис. 99

◇ Следует отметить, что иногда в качестве определения гамма функции вместо (38.1) используют интегральное представление вида

$$\Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} \tau^{2z-1} d\tau. \quad (38.2)$$

Кроме того, Вейерштрассом было показано, что все свойства гамма функции, вытекающие из (38.1), (38.2) могут быть получены представлением  $\Gamma(z)$  в виде бесконечного произведения

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (38.3)$$

где

$$\gamma = - \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d\Gamma(z)}{dz} = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \quad (38.4)$$

– постоянная Эйлера, приближенное значение которой равно 0,5772...

Если эквивалентность определений (38.1), (38.2) очевидна, поскольку переменные интегрирования связаны соотношением  $\sqrt{t} = \tau$ , то их эквивалентность представлению (38.3) будет показана ниже.

◊ Набор определений  $\Gamma(z)$  в виде (38.1), (38.2), (38.3) удобен в конкретных приложениях, использующих гамма-функцию.

### Свойства гамма-функции

**Свойство 1.** Функция  $\Gamma(z)$  аналитична в области  $\operatorname{Re} z > 0$ .

**Доказательство.** Представим интеграл (38.1) в виде

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

где

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Так как в полосе  $0 < \alpha < \operatorname{Re} z \leq A$  функции  $|P(z)|$ ,  $|Q(z)|$  мажорируются сходящимися интегралами

$$|P(z)| \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} dt, \quad |Q(z)| \leq \int_1^{\infty} e^{-t} t^{A-1} dt,$$

то интеграл  $\Gamma(z)$  также сходится, причем равномерно.

Пусть  $C$  – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ . Рассмотрим интеграл

$$J = \int_C \Gamma(z) dz = \int_C \left( \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right) dz.$$



Изменение порядка интегрирования возможно, так как интеграл  $\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$  сходится равномерно в области  $\operatorname{Re} z \geq \alpha > 0$ .

Тогда

$$J = \int_0^{\infty} e^{-t} \left( \int_C t^{z-1} dz \right) dt.$$

По теореме Коши интеграл в скобках равен нулю, поэтому  $J = 0$ .

Интеграл  $\int_C \Gamma(z) dz$  не зависит от пути интегрирования. Следовательно, по теореме Морера 15.1  $\Gamma(z)$  аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$ , что и требовалось доказать.

◇ Следует отметить, что свойство 1 с достаточной очевидностью вытекает из определения (38.3).

**Свойство 2 (основное функциональное соотношение).** Для всех  $z$ , таких что  $\operatorname{Re} z > 0$ , справедливо

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (38.5)$$

**Доказательство.** Действительно, воспользуемся определением (38.1)

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt,$$

которое проинтегрируем один раз по частям, полагая  $U = t^z$ ,  $dU = z t^{z-1} dt$ ,  $V = -e^{-t}$ ,  $dV = e^{-t} dt$ . Тогда

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z),$$

что и требовалось доказать.

Основное функциональное соотношение можно получить, если воспользоваться определением (38.3). Действительно, ес-

ли  $z \neq -j$ ,  $j = \overline{0, \infty}$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(z)} &= \frac{ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+z/k)e^{-z/k}}{(1+z)e^{\gamma(1+z)} \prod_{n=1}^{\infty} [1+(1+z)/n]e^{-(z+1)/n}} = \\ &= \frac{1}{1+z} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{(1+1/n)^{z+1}}{1+(1+z)/n} z \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \frac{1+z/k}{(1+1/k)^z} = \\ &= \frac{1}{1+z} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \frac{(1+1/n)(z+n)}{z+n+1} = z \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N+1+z} = z, \end{aligned}$$

что и доказывает эквивалентность определений (38.1) и (38.3).

**Свойство 3.** Для натуральных  $n$  справедливо соотношение

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (38.6)$$

**Доказательство.** Положим в (38.5)  $z = n$ . Тогда

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n!\Gamma(1).$$

Поскольку

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

соотношение (38.6) доказано.

**Свойство 4.** Функцию  $\Gamma(z)$  можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость  $z$ , кроме точек  $z = -n$ ,  $n = 0, \infty$ , в которых  $\Gamma(z)$  имеет полюсы первого порядка с вычетами, равными

$$\operatorname{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (38.7)$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = P(z) + Q(z).$$

Функция  $Q(z)$  – аналитическая, так как  $t \neq 0$ .

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z-1+n} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left. \frac{t^{z+n}}{z+n} \right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция имеет простые полюсы в точках  $z = -n$ , причем

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)P(z) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

откуда следует справедливость соотношения (38.7).

**Свойство 5 (формула дополнения).** Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (38.8)$$

**Доказательство.** Достаточно доказать справедливость формулы (38.8) для  $z = x$  и произвольного интервала  $a < x < b$ , откуда по теореме о единственности аналитической функции получим требуемое утверждение.

Согласно формуле (38.2)

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du, \\ \Gamma(1-x) &= 2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} v^{1-2x} dv. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= 4 \int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du \int_0^{\infty} v^{1-2x} e^{-v^2} dv = \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} \left(\frac{u}{v}\right)^{2x-1} dudv. \end{aligned}$$

Перейдем в полярную систему координат:  $u = \rho \cos \varphi$ ,  $v = \rho \sin \varphi$ ,  $dudv = \rho d\rho d\varphi$ . Тогда

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = 4 \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} d\varphi.$$

Последний интеграл заменой  $\operatorname{tg}^2 \varphi = \tau$  приводится к виду

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{ctg} \varphi)^{2x-1} d\varphi = \int_0^1 \frac{\tau^{(1-x)-1}}{1+\tau} d\tau,$$

соответствующему интегралу (23.58) с  $\alpha = 1-x$ , и, следовательно,

$$I = \frac{\pi}{\sin[\pi(1-x)]} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

что и требовалось доказать (см. также пример 40.4).

◇ Формулу дополнения можно доказать проще, если воспользоваться определением (38.3). Действительно, для всех  $z \neq n$ ,  $n = -\infty, \infty$ , имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\Gamma(-z) &= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right]^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \right]^{-1} = \\ &= -\frac{1}{z^2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

С помощью формулы (23.187) для разложения целой функции в виде произведения

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

найдем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z},$$

откуда с учетом основного функционального соотношения

$$-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$$

приходим к (38.8).

**Свойство 6.** Функция  $\Gamma(z)$  не имеет нулей, т.е. для всех  $z$

$$\Gamma(z) \neq 0. \quad (38.9)$$

**Доказательство.** Проведем доказательство от противного. Пусть  $z_0$  – нуль функции  $\Gamma(z)$ . Тогда  $z_0 \neq -j$ ,  $j = \overline{0, \infty}$ , так как в этих точках  $\Gamma(z)$  имеет полюсы 1-го порядка, и  $z_0 \neq j$ ,  $j = \overline{0, \infty}$ , так как  $\Gamma(n+1) = n!$ . Рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Gamma(1-z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\pi}{\Gamma(z) \sin \pi z} = \frac{\pi}{\sin \pi z_0 \lim_{z \rightarrow z_0} \Gamma(z)} = \infty,$$

поскольку  $\sin \pi z_0 \neq 0$ . Следовательно,  $\Gamma(1-z)$  имеет в точке  $z_0$  полюс, что противоречит свойству 4. Полученное противоречие и доказывает свойство 6.

**Свойство 7.** Справедливы соотношения

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} (2n-1)!! \sqrt{\pi} \quad (38.10)$$

и

$$\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^n}{(2n-1)!!}. \quad (38.11)$$

для  $n = \overline{0, \infty}$ .

**Доказательство.** Положим в соотношении (38.5)  $z = (2n-1)/2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2} - 1\right) = \\ &= \frac{2n-1}{2} \Gamma\left(\frac{2(n-1)+1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2} \Gamma\left(\frac{2(n-2)+1}{2}\right) = \dots = \\ &= \frac{1}{2^n} (2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Положив в (38.8)  $z = 1/2$ , получим

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi$$

или

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

т.е. соотношение (38.10) справедливо. Подставив в (38.8)  $z = n + 1/2$ , с учетом (38.10) получим

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) &= \frac{\pi}{\Gamma(1/2 + n) \sin(n\pi + \pi/2)} = \\ &= \frac{(-1)^n \pi}{\Gamma(1/2 + n)} = \frac{(-1)^n \pi 2^n}{(2n - 1)!! \sqrt{\pi}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Следствие.** Справедливо соотношение

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = (-1)^n \pi. \quad (38.12)$$

**Доказательство.** Воспользовавшись соотношениями (38.10) и (38.11), получим

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{1}{2^n} (2n - 1)!! \sqrt{\pi} \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^n}{(2n - 1)!!} = (-1)^n \pi,$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 8 (формула Эйлера).** Для натуральных  $n$  справедливо соотношение

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma(1) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2}. \quad (38.13)$$

Соотношение (38.13) называется формулой Эйлера.

**Доказательство.** Обозначим

$$f(n) = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

и напомним это произведение в обратном порядке

$$f(n) = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Составим

$$f^2(n) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] \left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right] \cdots \left[\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Применим формулу  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ , тогда

$$f^2(n) = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)} \frac{\pi}{\sin(2\pi/n)} \cdots \frac{\pi}{\sin[(n-1)\pi/n]} = \frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin(k\pi/n)}.$$

Числа  $e^{2i\pi k/n}$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , — корни  $n$ -ой степени из единицы. Поэтому можно записать

$$z^n - 1 = (z-1)(z - e^{2i\pi/n})(z - e^{4i\pi/n}) \cdots (z - e^{(n-1)2i\pi/n}).$$

Отсюда

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2ik\pi/n}).$$

Перейдя к пределу при  $z \rightarrow 1$ , найдем

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}).$$

Но

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}| = \\ & = \prod_{k=1}^{n-1} |e^{ik\frac{\pi}{n}}| |e^{-ik\frac{\pi}{n}} - e^{ik\frac{\pi}{n}}| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Приходим к равенству

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n},$$

откуда

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Тогда

$$f^2(n) = \frac{\pi^{n-1} 2^{n-1}}{n}, \quad f(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{(n-1)/2},$$

что и требовалось доказать.

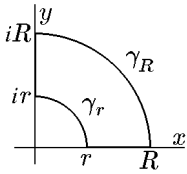
**Свойство 9 (формула удвоения).** Справедливо соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).$$

**Доказательство** проведем позднее, используя свойства бета-функции [см. формулу (40.8)].

**Свойство 10.** Пусть  $z$  удовлетворяет условию  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Тогда для гамма-функции справедливо следующее интегральное представление:

$$\Gamma(z) = e^{i\pi z/2} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-it} dt. \quad (38.14)$$



**Доказательство.** Рассмотрим интеграл от  $f(\zeta) = \zeta^{z-1} e^{-\zeta}$  вдоль замкнутого контура, изображенного на рис. 100. Согласно теореме Коши, он равен нулю. Имеем

Рис. 100

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_R} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta + \int_{iR} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta + \\ & + \int_{\gamma_r} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta + \int_r^R x^{z-1} e^{-x} dx = 0. \end{aligned}$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ . Тогда по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta = 0.$$

Действительно,  $|\zeta^{z-1}| \leq R$ ,  $\zeta \in \gamma_R$  и при условии  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Оценим интеграл

$$J_r = \int_{\gamma_r} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta.$$



Имеем

$$|J_r| = \left| \int_{\gamma_r} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta \right| \leq r^{x-1} \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi}{2} r^x.$$

Следовательно,  $\lim_{r \rightarrow 0} J_r = 0$ , если  $x > 0$ . Переходя к пределу, получим

$$\int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx + \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{iR}^{ir} \zeta^{z-1} e^{-\zeta} d\zeta = 0$$

или

$$\Gamma(z) + i \int_{\infty}^0 (iy)^{z-1} e^{-iy} dy = 0, \quad \Gamma(z) = iz \int_0^{\infty} y^{z-1} e^{-iy} dy,$$

$$\Gamma(z) = e^{i\pi z/2} \int_0^{\infty} y^{z-1} e^{-iy} dy, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1,$$

что и требовалось доказать.

**Следствие.** Справедливы соотношения

$$\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{2n} = \int_0^{\infty} \sin t^n dt,$$

$$\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n} = \int_0^{\infty} \cos t^n dt. \tag{38.15}$$

**Доказательство.** Положим в (38.14)  $z = n^{-1}$  ( $n > 1$ ) и сделаем замену переменных  $t^{1/n} = y$ . Тогда  $dt = ny^{n-1} dy$  и

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) e^{-i\pi/(2n)} = n \int_0^{\infty} e^{-it^n} dt.$$

Отделяя действительные и мнимые части, приходим к равенствам (38.15).

◇ При  $n = 2$  из (38.15) получим соотношения

$$\int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

или  $S(\infty) = C(\infty) = 1/2$ , где

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} dt, \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} dt$$

– интегралы Френеля. Подстановка  $t = u^2$  дает

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin u^2 du, \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos u^2 du.$$

**Пример 38.1.** Показать, что гамма-функцию можно определить интегралами

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[ \ln \frac{1}{t} \right]^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (38.16)$$

**Решение.** Сделаем в интеграле (38.16) замену переменных  $t = e^{-u}$ . Тогда  $dt = -e^{-u} du$ ,  $\ln \frac{1}{t} = u$  и  $u$  будет пробегать значения от  $\infty$  до нуля, в то время как  $t$  меняется от нуля до единицы. Следовательно,

$$\int_0^1 \left[ \ln \frac{1}{t} \right]^{z-1} dt = \int_{\infty}^0 u^{z-1} (-e^{-u}) du = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du = \Gamma(z),$$

что и требовалось показать.

**Пример 38.2.** Показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right). \quad (38.17)$$

**Решение.** Сделаем в интеграле (38.17) замену переменных  $x^4 = u$ . Тогда  $x = u^{1/4}$  и  $dx = \frac{1}{4}u^{-3/4}du$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^4} dx &= \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{4} u^{-3/4} du = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{4}-1} du = \\ &= \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4} + 1\right), \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

**Пример 38.3.** Используя гамма-функцию, показать, что

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = -\frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

**Решение.** Подстановка  $\ln x = t$  дает

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = \int_{-\infty}^0 t e^{(k+1)t} dt.$$

Полагаем  $(k+1)t = -u$ . При  $k+1 > 0$  получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^k \ln x dx &= -\frac{1}{(k+1)^2} \int_0^{\infty} u e^{-u} du = \\ &= -\frac{1}{(k+1)^2} \Gamma(2) = -\frac{1}{(k+1)^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

**Пример 38.4.** Вычислить интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0.$$

**Решение.** Используем четность подынтегральной функции и положим  $ax^2 = t$  ( $a > 0$ ). Тогда

$$\begin{aligned} J &= 2 \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^{n+1/2}} \int_0^{\infty} t^{n-1/2} e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{a^{n+1/2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^{n+1/2}} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

**Пример 38.5.** Доказать соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = 1.$$

**Доказательство.** Сделаем в этом интеграле замену переменных  $x = t^{1/n}$  и  $dx = \frac{1}{n} t^{1/n-1} dt$ . Получим

$$\int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1/n-1} dt = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right).$$

В силу непрерывности гамма-функции  $\Gamma(x)$  при  $x > 0$  найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \Gamma(1) = 1.$$

## 39. Обобщенные оригиналы

Определение функции  $f(t)$  как оригинала можно обобщить, если во втором условии определения конечные разрывы заменить бесконечными, но такими, чтобы интеграл (34.1) по-прежнему оставался сходящимся. К числу таких обобщенных оригиналов можно отнести все функции  $f(t)$ , которые в точке  $t_0$  удовлетворяют критерию сходимости интеграла (34.1) (см. Приложение «Несобственные интегралы. Сходимость и главное значение»):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0)^\nu f(t) = 0 \quad (39.1)$$

при некоторых  $\nu < 1$ , а вне точки  $t_0$  удовлетворяют остальным условиям, при которых их можно считать оригиналами.

На практике наиболее важными обобщенными оригиналами являются степенная функция  $f(t) = t^\mu$ ,  $\mu > -1$ , логарифмическая функция  $f(t) = \ln t$  и некоторые другие.

Начнем со степенной функции. Для нее справедлива

**Теорема 39.1.** *Изображение степенной функции определяется соотношением*

$$t^\mu \leftrightarrow \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}, \quad \mu > -1. \quad (39.2)$$

Здесь и в дальнейшем выбирается однозначная ветвь функции  $p^{\mu+1}$ , например такая что  $1^{\mu+1} = 1$ .

**Доказательство.** По определению

$$\Gamma(\mu + 1) = \int_0^\infty t^\mu e^{-t} dt.$$

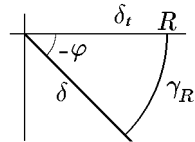


Рис. 101

Пусть  $p = \rho e^{i\varphi}$  – произвольное комплексное число в правой полуплоскости  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . Сделаем в интеграле замену  $t = pq$ , где  $p$  и  $q$  – комплексные числа. Тогда

$$\Gamma(\mu + 1) = p^{\mu+1} \int_{\delta} e^{-pq} q^\mu dq, \quad (39.3)$$

где  $\delta$  – луч  $\arg q = -\varphi$ , так как  $qp = t$ . Рассмотрим интеграл  $\int_{\gamma_R} e^{-pq} q^\mu dq$ , где  $\gamma_R$  – дуга окружности радиуса  $R$ , лежащая в секторе  $-\varphi < \arg q < 0$  (см. рис. 101). В этом случае  $q = Re^{i\alpha}$  и справедливо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} e^{-pq} q^\mu dq \right| &\leq \left| \int_{-\varphi}^0 e^{-pRe^{i\alpha}} R^{\mu+1} e^{i\alpha(\mu+1)} i d\alpha \right| \leq \\ &\leq R^{\mu+1} \left| \int_{-\varphi}^0 e^{-\rho R \cos(\varphi+\alpha)} d\alpha \right|, \end{aligned}$$

так как  $\cos(\alpha + \varphi) > 0$ ,  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ,  $-\varphi < \alpha < 0$ . Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} e^{-pq} q^\mu dq \right| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{-pq} q^\mu dq = 0.$$

Рассмотрим контур  $\gamma = \delta^- + \gamma_R^- + \delta_t$  (см. рис. 101), на котором

$$\int_{\gamma} e^{-pq} q^\mu dq = 0,$$

так как внутри контура подынтегральное выражение не содержит особых точек. Здесь  $\delta_t$  — отрезок  $[0, R]$  оси  $0x$ . Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt = - \int_{\delta^-} e^{-pq} q^\mu dq - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^-} e^{-pq} q^\mu dq = \int_{\delta} e^{-pq} q^\mu dq.$$

Подставив полученное соотношение в (39.3), получим

$$\Gamma(\mu + 1) = p^{\mu+1} \int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{p^{\mu+1}}.$$

◇ Доказательство теоремы 39.1 можно упростить, если воспользоваться теоремой о единственности аналитического продолжения. Действительно, в интеграле

$$t^\mu \leftrightarrow \varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\mu dt, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \mu > -1 \quad (39.4)$$

будем считать  $p$  действительным и положительным. В этом случае замена  $pt = \tau$  дает

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^{\mu+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\mu} d\tau = \frac{\Gamma(\mu+1)}{p^{\mu+1}}, \quad \mu > -1. \quad (39.5)$$

Но функция, определяемая соотношением (39.4), аналитична в области  $\operatorname{Re} p > 0$  и принимает на положительной части действительной оси значения, задаваемые равенством (39.5). Тогда в силу единственности аналитического продолжения для функции  $\varphi(p)$  в области  $\operatorname{Re} p > 0$  при  $\mu > -1$  справедлива формула (39.5) и, следовательно, (39.2).

Формулу (35.10) можно рассматривать как частный случай формулы (39.2) при  $\mu = n$ , поскольку

$$\Gamma(\mu+1) = \Gamma(n+1) = n!.$$

**Пример 39.1.** Найти изображения функций  $\sqrt{t}$  и  $1/\sqrt{t}$ .

**Решение.** Согласно (39.2) и (38.10), получим

$$\text{а) } \sqrt{t} = t^{1/2} \rightarrow \frac{\Gamma(3/2)}{p^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}},$$

$$\text{б) } \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} \rightarrow \frac{\Gamma(1/2)}{p^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

**Пример 39.2.** Найти изображения функций

$$\text{а) } f_1(t) = \sin 2\sqrt{at}, \quad \text{б) } f_2(t) = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{t}}.$$

**Решение.** а) По определению (7.4), функцию  $f_1(t)$  можно представить в виде

$$f_1(t) = \sin 2\sqrt{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4a)^{k+1/2}}{(2k+1)!} t^{k+1/2}.$$

Согласно (39.2) и (38.10),

$$t^{k+1/2} \rightarrow \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right) \frac{1}{p^{k+3/2}} = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \frac{\sqrt{\pi}}{p^{k+3/2}},$$

откуда аналогично тому, как это делалось в доказательстве первой теоремы разложения, получим

$$\begin{aligned} f_1(t) &\div \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4a)^{k+1/2} (2k+1)!!}{(2k+1)! 2^{k+1}} \frac{(2k+1)!!}{p^{k+3/2}} \sqrt{\pi} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi a}{p^3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a^k}{k! p^k} = \sqrt{\frac{\pi a}{p^3}} e^{-a/p}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_1(t) = \sin 2\sqrt{at} \div \sqrt{\frac{\pi a}{p^3}} e^{-a/p}. \quad (39.6)$$

б) Аналогично

$$f_2(t) = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{t}} \div \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-a/p}. \quad (39.7)$$

**Теорема 39.2.** *Изображение функции  $\ln t$  определяется соотношением*

$$\ln t \div - \frac{\gamma + \ln p}{p}, \quad (39.8)$$

где  $\gamma$  – постоянная Эйлера.

**Доказательство.** Продифференцировав выражение соответствия (39.2) по параметру  $\mu$ , найдем

$$t^\mu \ln t \div \frac{1}{p^{\mu+1}} [\Gamma'(\mu+1) - \Gamma(\mu+1) \ln p]. \quad (39.9)$$

Положив здесь  $\mu = 0$ , с учетом того, что  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma'(1) = -\gamma$  (см. разд. «Гамма-функция»), получим

$$\ln t \div - \frac{\gamma + \ln p}{p},$$

что и требовалось доказать.

**Пример 39.3.** Найти изображение функции

$$\frac{t^\mu e^{\alpha t} \ln t}{\Gamma(\mu+1)}, \quad \mu > -1.$$



**Решение.** Согласно (39.9), имеем

$$\frac{t^\mu \ln t}{\Gamma(\mu + 1)} \leftrightarrow \frac{1}{p^{\mu+1}} \left[ \frac{\Gamma'(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} - \ln p \right].$$

Отсюда с учетом теоремы смещения для изображений получим

$$\frac{t^\mu \ln t}{\Gamma(\mu + 1)} e^{\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{(p - \alpha)^{\mu+1}} \left[ \frac{\Gamma'(\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} - \ln(p - \alpha) \right].$$

Изучив обобщенные оригиналы, продолжим рассмотрение свойств преобразования Лапласа.

**Свойство 16\*.** Обобщенная теорема умножения оригиналов (теорема Эфроса)

**Теорема 39.3 (Эфроса).** Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$  и пусть  $\psi(p)$  и  $g(p)$  – аналитические функции, такие что

$$\psi(p) e^{-\tau q(p)} \leftrightarrow g(t, \tau). \quad (39.10)$$

Тогда

$$\varphi(q(p)) \psi(p) \leftrightarrow \int_0^\infty f(\tau) g(t, \tau) d\tau. \quad (39.11)$$

**Доказательство.** Рассмотрим изображение правой части соотношения (39.11)

$$\int_0^\infty f(\tau) g(t, \tau) d\tau \leftrightarrow \int_0^\infty e^{-pt} \left( \int_0^\infty f(\tau) g(t, \tau) d\tau \right) dt.$$

Изменим порядок интегрирования (мы предполагаем, что функции  $f(\tau)$  и  $g(t, \tau)$  таковы, что это можно сделать) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(\tau) g(t, \tau) d\tau &\leftrightarrow \int_0^\infty d\tau f(\tau) \int_0^\infty e^{-pt} g(t, \tau) dt = \\ &= \int_0^\infty d\tau f(\tau) \psi(p) e^{-\tau q(p)} = \psi(p) \varphi(q(p)). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением (39.10). Таким образом, соотношение (39.11) доказано.

**Следствие 39.3.1.** При  $q(p) = p$  теорема Эфроса переходит в теорему умножения оригиналов.

**Доказательство.** Положим  $q(p) = p$ . Тогда по теореме запаздывания  $g(t, \tau) = g(t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p} \psi(p)$  и соотношение (39.11) примет вид

$$\varphi(p)\psi(p) \leftrightarrow \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (39.12)$$

Здесь мы воспользовались свойством 1 оригиналов, т.е.  $g(t - \tau) \equiv 0$  при  $\tau > t$ .

Для дальнейшего изложения нам потребуется изображение следующей функции.

**Пример 39.4.** Найти изображение функции

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-a/t}.$$

**Решение.** По определению,

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-a/t} \leftrightarrow \varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-a/t} dt.$$

Сделаем в интеграле замену переменных  $t = x^2$ . Тогда

$$\varphi(p) = 2 \int_0^{\infty} e^{-px^2 - a/x^2} dx.$$

Воспользовавшись известным значением интеграла (см., например, [?, 1])

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2 - \beta^2/x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-2\alpha\beta}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0),$$

получим

$$\varphi(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} e^{-2\sqrt{ap}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-a/t} \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{ap}}.$$

В частности, положив  $a = \tau^2/4$ , получим

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/4t} \leftrightarrow \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}. \quad (39.13)$$

**Следствие 39.3.2.** Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ , тогда справедливо соотношение

$$\frac{\varphi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau. \quad (39.14)$$

**Доказательство.** Положим в соотношениях (39.10) и (39.11)

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad q(p) = \sqrt{p},$$

тогда, выбрав левую часть формулы (39.13) в качестве функции  $g(t, \tau)$ , найдем

$$g(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/4t} \leftrightarrow \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}. \quad (39.15)$$

Подставив (39.15) в (39.11), получим (39.14).

**Следствие 39.3.3.** Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ . Тогда справедливы соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{p^3}} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leftrightarrow \int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau) d\tau, \quad (39.16)$$

$$\sqrt{p} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \cos 2\sqrt{t\tau} f(\tau) d\tau. \quad (39.17)$$

**Доказательство.** Представим соотношение (39.6) в следующем виде:

$$\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p^3}} e^{-\tau/p}.$$

Правую часть этого соотношения можно принять за функцию  $g(t, \tau)$ , положив

$$q(p) = \frac{1}{p}, \quad \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p^3}}.$$

Тогда из (39.11) получим (39.16). Аналогично из (39.7) при

$$q(p) = \frac{1}{p}, \quad \psi(p) = \sqrt{p}$$

получим (39.17).

**Следствие 39.3.4.** Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ , тогда справедливо соотношение

$$\frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \leftrightarrow \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (39.18)$$

Здесь  $J_0(z)$  – функция Бесселя нулевого порядка (36.17).

**Доказательство.** Положим в условии теоремы Эфроса  $\psi(p) = 1/p$ ,  $q(p) = 1/p$ . Тогда с помощью теоремы подобия из соотношения (36.18)

$$\frac{1}{p} e^{-1/p} \leftrightarrow J_0(2\sqrt{t})$$

получим

$$g(t, \tau) = J_0(2\sqrt{t\tau}) \leftrightarrow \frac{1}{p} e^{-\tau/p}. \quad (39.19)$$

Подставив (39.19) в (39.11), получим (39.18).

**Следствие 39.3.5.** Пусть  $f(t) \leftrightarrow \varphi(p)$ . Тогда справедливы сле-

дующие соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\varphi(\sqrt{p^2+1}) \Leftrightarrow \int_0^t f(\tau) J_0(\sqrt{t^2-\tau^2}) d\tau; \quad (39.20)$$

$$\frac{1}{p}\varphi\left(p + \frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow \int_0^t f(\tau) J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) d\tau; \quad (39.21)$$

$$\frac{1}{p^{n+1}}\varphi\left(\frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow \int_0^\infty f(\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{t\tau}) d\tau; \quad (39.22)$$

$$\frac{1}{p^{n+1}}\varphi\left(p + \frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow \int_0^t f(\tau) \left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) d\tau; \quad (39.23)$$

Здесь функция  $J_n(z)$  определяется рядом

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n},$$

абсолютно сходящимся для всех конечных  $z$ . Функция  $J_n(z)$  называется функцией Бесселя индекса  $n$  (см. разд. «Функции Бесселя» части III).

**Доказательство** аналогично доказательству соотношений (39.14)–(39.18) и основывается на соотношениях

$$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\tau\sqrt{p^2+1}} \Leftrightarrow \theta(t-\tau) J_0(\sqrt{t^2-\tau^2}) \quad (39.24)$$

(в этом случае  $q(p) = \sqrt{p^2+1}$ ,  $\psi(p) = 1/\sqrt{p^2+1}$ );

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\tau(p+1/p)} \Leftrightarrow \theta(t-\tau) \left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) \quad (39.25)$$

(тогда  $q(p) = p + 1/p$ ,  $\psi(p) = 1/p^{n+1}$ );

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\tau/p} \Leftrightarrow \left(\frac{t}{\tau}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{t\tau}) \quad (39.26)$$

(тогда  $q(p) = 1/p$ ,  $\psi(p) = 1/p^{n+1}$ ).

Здесь  $\theta(t - \tau)$  – тета-функция Хевисайда (подробнее см. раздел, посвященный обобщенным функциям).

◇ Частные случаи теоремы Эфроса (см. формулы (39.14), (39.18), (39.20)–(39.23)) могут оказаться полезными, если известен оригинал функции  $\varphi(p)$  и требуется найти оригиналы функций  $\varphi(1/p)$ ,  $\varphi(\sqrt{p})$ ,  $\varphi(p + 1/p)$ ,  $\varphi(\sqrt{1 + p^2})$ .

**Пример 39.5.** Вычислить интеграл

$$g(t) = \int_0^t J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau.$$

**Решение.** Найдем изображение функции  $g(t)$ . Согласно частному случаю теоремы Эфроса (см. формулу (39.20)), получим

$$g(t) \leftrightarrow \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

Поскольку в нашем случае надо положить

$$f(t) = 1, \quad \varphi(p) = \frac{1}{p}, \quad \varphi(\sqrt{p^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

следовательно,

$$\psi(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \leftrightarrow \sin t.$$

Таким образом,  $g(t) = \sin t$ .

◇ Примеры применения частных случаев теоремы Эфроса будут рассмотрены в разд. «Интегральные преобразования бесселевых функций» части III и в главе «Интегральные уравнения» части IV.

## 40. Бета-функция

◆ Бета-функцией (или эйлеровым интегралом первого рода) называется интеграл

$$B(z, \omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} \omega > 0. \quad (40.1)$$

Наряду с определением (40.1) достаточно распространенным является представление бета-функции в виде

$$B(z, w) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \tau)^{2z-1} (\cos \tau)^{2w-1} d\tau, \quad (40.2)$$

следующем из (40.1) заменой  $t = \sin^2 \tau$ .

### Свойства бета-функции

**Свойство 1.** Справедливо соотношение

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (40.3)$$

**Доказательство.** Вместо (40.1) рассмотрим интеграл

$$\varphi(\tau) = \int_0^{\tau} t^{z-1} (\tau - t)^{w-1} dt = (\tau^{\omega-1} * \tau^{z-1}), \quad (40.4)$$

который является сверткой функций  $\tau^{z-1}$  и  $\tau^{\omega-1}$  и при  $\tau = 1$  совпадает с (40.1). Проведем преобразование Лапласа правой и левой частей равенства (40.4). По теореме о свертке

$$\varphi(\tau) = (\tau^{\omega-1} * \tau^{z-1}) \leftrightarrow \Phi(p) = \frac{\Gamma(\omega)}{p^\omega} \frac{\Gamma(z)}{p^z} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{p^{\omega+z}}$$

найдем оригинал правой части

$$\Phi(p) \leftrightarrow \Gamma(z)\Gamma(\omega) \frac{\tau^{\omega+z-1}}{\Gamma(\omega+z)}.$$

Таким образом,

$$(\tau^{\omega-1} * \tau^{z-1}) = \int_0^{\tau} t^{z-1} (\tau - t)^{\omega-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega+z)} \tau^{\omega+z-1}.$$

Положив  $\tau = 1$ , получим (40.3).

◇ Свойство 1 достаточно очевидно вытекает из формул (38.3) и (40.2). Действительно, используя представление (38.3), запишем произведение

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(y^2+x^2)} y^{2z-1} x^{2\omega-1} dy dx$$

в виде двойного интеграла по первой четверти плоскости  $xOy$  в полярной системе координат  $y = r \sin \varphi$ ,  $x = r \cos \varphi$

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = 4 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(z+\omega)-1} dr \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{2z-1} (\cos \varphi)^{2\omega-1} d\varphi.$$

Отсюда с учетом (38.3) и (40.2) найдем

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = \Gamma(z + \omega)B(z, \omega),$$

откуда и следует (40.3).

◇ Если  $z$  и  $w$  – целые положительные числа ( $z = n$ ,  $w = m$ ), то формулу (40.3) можно записать в виде

$$B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m+1)}{m\Gamma(n+m)} = 1 / \left[ m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \right] = \frac{1}{m C_{m+n-1}^{n-1}},$$

где

$$C_s^l = \frac{s!}{l!(s-l)!}$$

– биномиальные коэффициенты.

Таким образом, если гамма-функцию можно рассматривать как обобщение факториала на случай произвольного аргумента, то бета-функцию – как обобщение биномиальных коэффициентов (см. также разд. «Биномиальные коэффициенты»).

**Свойство 2.** Справедливо соотношение

$$B(z, \omega) = B(\omega, z). \quad (40.5)$$

**Доказательство** следует непосредственно из (40.3).



**Свойство 3.** Справедливы соотношения

$$B(z, \omega + 1) = \frac{\omega}{z} B(z + 1, \omega) = \frac{\omega}{\omega + z} B(z, \omega); \quad (40.6)$$

$$B(z, 1) = \frac{1}{z}; \quad (40.7)$$

$$B(z, z) = 2^{1-2z} B\left(\frac{1}{2}, z\right); \quad (40.8)$$

$$B(z, 1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (40.9)$$

**Доказательство** следует из соотношений (38.5) и (40.3). Легко увидеть, что соотношение (40.7) является аналогом основного функционального соотношения; (40.8) – аналогом формулы удвоения, а (40.9) – аналогом формулы дополнения.

Проведем доказательство формулы удвоения, так как ранее она не была доказана. Рассмотрим интеграл

$$B(z, z) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt = \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{z-1} dt.$$

Так как парабола  $y = \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - t \right)^2$  симметрична относительно прямой  $t = 1/2$ , можно записать

$$B(z, z) = 2 \int_0^{1/2} \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{z-1} dt.$$

Сделаем замену  $1/2 - t = \sqrt{u}/2$  и получим

$$B(z, z) = \frac{2}{4z} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{z-1} du = \frac{1}{2^{2z-1}} B\left(\frac{1}{2}, z\right).$$

Переходя к гамма-функции, найдем

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)} = \frac{1}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(z)}{\Gamma(z+1/2)},$$

откуда

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

**Пример 40.1.** Показать, что

$$\frac{e^{-\mu t}}{(1 - e^{-bt})^{1-\nu}} \rightarrow \frac{1}{b} B\left(\frac{p + \mu}{b}, \nu\right). \quad (40.10)$$

**Решение.** По определению преобразования Лапласа

$$\frac{e^{-\mu t}}{(1 - e^{-bt})^{\nu-1}} \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-(p+\mu)t} \frac{dt}{(1 - e^{-bt})^{1-\nu}}.$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$t = -\frac{1}{b} \ln \tau, \quad dt = -\frac{1}{b} \frac{d\tau}{\tau},$$

получим

$$\frac{1}{b} \int_0^1 \tau^{(p+\mu)/b} (1 - \tau)^{\nu-1} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{b} B\left(\frac{p + \mu}{b}, \nu\right).$$

**Пример 40.2.** Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} \quad (n > 1).$$

**Решение.** Сделаем в интеграле замену переменных  $x = t^{1/n}$  ( $t > 0$ ) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}} &= \frac{1}{n} \int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1} (1 - t)^{-1/n} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой дополнения.

**Пример 40.3.** Доказать соотношение

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{4}. \quad (40.11)$$

**Решение.** Подстановкой  $x^4 = t$  преобразуем интегралы к виду

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/2} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\pi}}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Перемножив интегралы, получим формулу (40.11).

**Пример 40.4.** Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^\alpha x dx, \quad \alpha \neq n, \quad n = \overline{-\infty, \infty}.$$

**Решение.** Сделаем в интеграле замену переменных  $\operatorname{tg} x = \sqrt{t}$  ( $t > 0$ ) и получим

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{(\alpha-1)/2}}{1+t} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, 1 - \frac{\alpha+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(1)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \cos(\pi\alpha/2)}.$$

Заметим, что этот результат также можно получить непосредственно из формулы (40.12).

**Пример 40.5.** Показать, что

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \quad (40.12)$$

**Решение.** Положим  $\sin x = \sqrt{t}$  ( $t > 0$ ). Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^1 t^{(m-1)/2} (1-t)^{(n-1)/2} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

**Пример 40.6.** Вычислить интеграл

$$J = \int_{-1}^1 (1+x)^a (1-x)^b dx, \quad a > -1, \quad b > -1. \quad (40.13)$$

**Решение.** Подстановкой  $1-x = 2t$  интеграл преобразуется к виду

$$J = 2^{a+b+1} \int_0^1 t^b (1-t)^a dt = 2^{a+b+1} B(a+1, b+1).$$

◇ Можно сделать в интеграле (40.13) замену переменных  $x = \cos 2\varphi$ .

**Пример 40.7.** Вычислить интеграл Дирихле

$$J = \iint_D x^q y^p d\sigma,$$

где  $D$  – треугольник, ограниченный полуосями и прямой  $x + y = 1$ ,  $p > -1$ ,  $q > -1$ .

**Решение.** Перейдем от двойного интеграла к повторному

$$J = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^p y^q dy.$$

Так как  $q \neq -1$ ,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{q+1} \int_0^1 x^p (1-x)^{q+1} dx = \frac{1}{q+1} B(p+1, q+2) = \\ &= \frac{1}{q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+2)}{\Gamma(p+q+3)} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{(p+q+2)\Gamma(p+q+2)} = \\ &= \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2}. \end{aligned}$$

**Пример 40.8.** Вычислить интеграл

$$J = \int_0^a t^{2n} \sqrt{a^2 - t^2} dt, \quad a > 0.$$

**Решение.** Полагаем  $t = a \sin x$ ,  $a > 0$ . Получим

$$J = a^{2n+2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \cos^2 x dx.$$

Воспользовавшись соотношением (40.12), найдем

$$\begin{aligned} J &= a^{2n+2} \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = a^{2n+2} \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(3/2)}{2\Gamma(n + 2)} = \\ &= \frac{(2n - 1)!! a^{2n+2}}{2^{n+2}(n + 1)!} \pi. \end{aligned}$$

**Пример 40.9.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой  $|x|^n + |y|^n = a^n$  ( $n > 0$ ,  $a > 0$ ).

**Решение.** Ввиду центральной симметрии кривой относительно начала координат будем рассматривать только ее часть, расположенную в первом квадранте ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ). В этом случае  $y = (a^n - x^n)^{1/n}$ ,  $0 \leq x \leq a$ . Тогда для площади фигуры получим

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a (a^n - x^n)^{1/n} dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных

$$x = at^{1/n}, \quad dx = (a/n)t^{1/n-1} dt.$$

Получим

$$S = \frac{4a^2}{n} \int_0^1 (1-t)^{1/n} t^{1/n-1} dt = \frac{4a^2}{n} B\left(\frac{1}{n} + 1, \frac{1}{n}\right) = \frac{2a^2}{n} \frac{\Gamma^2(1/n)}{\Gamma(2/n)}.$$

**Пример 40.10.** Вычислить интеграл

$$J = \int_0^{\pi} \sin^{\alpha} \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1, \quad \beta > 0. \quad (40.14)$$

**Решение.** Рассмотрим интеграл

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z} - z\right)^{\alpha} z^{\beta-1} dz, \quad (40.15)$$

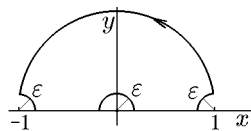


Рис. 102

где  $\gamma$  – замкнутый контур, состоящий из кривой  $\tilde{\gamma}$  – верхней полуокружности  $|z| = 1$  – и ее диаметра с вырезами в точках  $-1, 0, 1$ , имеющими радиус  $\varepsilon$  (рис. 102). Очевидно, что интеграл (40.15) равен нулю, так как подынтегральная функция аналитична внутри

области, границей которого является контур  $\gamma$ . Устремив  $\varepsilon$  к нулю, получим

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \left(\frac{1}{z} - z\right)^{\alpha} z^{\beta-1} dz &= \\ &= \int_{\tilde{\gamma}} \left(\frac{1}{z} - z\right)^{\alpha} z^{\beta-1} dz + \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{z} - z\right)^{\alpha} z^{\beta-1} dz = 0. \end{aligned}$$

Проведя в первом интеграле замену  $z = e^{i\varphi}$ , найдем

$$\begin{aligned} i \int_0^{\pi} (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})^{\alpha} e^{i\beta\varphi} d\varphi &= - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t} - t\right)^{\alpha} t^{\beta-1} dt = \\ &= - \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\alpha} t^{\beta-\alpha-1} dt. \end{aligned} \quad (40.16)$$

В последнем интеграле интервал интегрирования разбиваем на два  $] -1, 0[$  и  $]0, 1[$  и на интервале  $] -1, 0[$  делаем замену  $t \rightarrow -t$ . Тогда из (40.16) получим

$$i(-2i)^{\alpha} \int_0^{\pi} \sin^{\alpha} \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi =$$

$$= [(-1)^{\beta-\alpha} - 1] \int_0^1 (1-t^2)^\alpha t^{\beta-\alpha-1} dt. \quad (40.17)$$

Проведя в последнем интеграле замену  $t = \sqrt{x}$  и учтя равенства

$$\begin{aligned} (-i)^\alpha &= e^{-i\alpha\pi/2}, & (-1)^{\beta-\alpha} &= e^{i\pi(\beta-\alpha)}, \\ (-1)^{\beta-\alpha} - 1 &= e^{i\pi(\beta-\alpha)} - 1 = \\ &= e^{i(\beta-\alpha)\pi/2} [e^{i(\beta-\alpha)\pi/2} - e^{-i(\beta-\alpha)\pi/2}] = \\ &= 2ie^{-i(\beta-\alpha)\pi/2} \sin \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha), \end{aligned}$$

окончательно из (40.17) получим

$$\begin{aligned} &2^\alpha \int_0^\pi \sin^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi = \\ &= e^{i\beta\pi/2} \sin \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha) \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{(\beta-\alpha)/2-1} dx = \\ &= e^{i\beta\pi/2} \sin \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha) B\left(\alpha + 1, \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \\ &= e^{i\beta\pi/2} \frac{\sin(\pi[\beta - \alpha]/2) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma([\beta - \alpha]/2)}{\Gamma(1 + [\beta + \alpha]/2)} = \\ &= e^{i\beta\pi/2} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi[\beta - \alpha]/2) \Gamma([\beta - \alpha]/2) \Gamma(1 - [\beta - \alpha]/2)}{\Gamma(1 + [\beta + \alpha]/2) \Gamma(1 - [\beta - \alpha]/2)} = \\ &= e^{i\beta\pi/2} \frac{\pi \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta]/2) \Gamma(1 + [\alpha - \beta]/2)}. \end{aligned}$$

На последнем этапе преобразований мы использовали формулу дополнения. Итак, для  $\operatorname{Re} \alpha > -1$  окончательно имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin^\alpha \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta]/2) \Gamma(1 + [\alpha - \beta]/2)} e^{i\beta\pi/2}. \quad (40.18) \end{aligned}$$

Отсюда вытекают простейшие следствия

$$\int_0^{\pi} \sin^{\alpha} \varphi \cos \beta \varphi d\varphi = \\ = \frac{\pi}{2^{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \cos \beta \pi / 2}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta] / 2) \Gamma(1 + [\alpha - \beta] / 2)}; \quad (40.19)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{\alpha} \varphi \sin \beta \varphi d\varphi = \\ = \frac{\pi}{2^{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + 1) \sin \beta \pi / 2}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta] / 2) \Gamma(1 + [\alpha - \beta] / 2)}. \quad (40.20)$$

Разбив в (40.18) интервал интегрирования на два

$$\int_0^{\pi} g(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} g(\varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} g(\varphi) d\varphi$$

и заменив в первом интеграле  $\varphi$  на  $\pi/2 - \varphi$ , а во втором  $\varphi$  на  $\pi/2 + \varphi$ , найдем

$$e^{i\beta\pi/2} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha} \varphi e^{-i\beta\varphi} d\varphi + \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha} \varphi e^{i\beta\varphi} d\varphi \right] = \\ = 2e^{i\beta\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha} \varphi \cos \beta \varphi d\varphi.$$

С учетом этого соотношения из (40.18) получим

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha} \varphi \cos \beta \varphi d\varphi = \\ = \frac{\pi}{2^{\alpha-1}} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1 + [\alpha + \beta] / 2) \Gamma(1 + [\alpha - \beta] / 2)}. \quad (40.21)$$

## 41. Биномиальные коэффициенты

Для исследования некоторых свойств специальных функций удобно использовать биномиальные коэффициенты.



♦ Биномиальными коэффициентами называются выражения вида

$$\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\alpha - \nu + 1)} = \frac{1}{(\alpha + 1)B(\nu + 1, \alpha - \nu + 1)}. \quad (41.1)$$

◇ Биномиальные коэффициенты определены при любых  $\nu$  и  $\alpha$ , когда правая часть имеет смысл. В частности при  $\nu = -n$ ,  $n = 1, \infty$  биномиальные коэффициенты равны нулю.

**Пример 41.1.** Найти явный вид биномиальных коэффициентов при целых  $\nu = n$ ,  $n = 0, 1$ .

**Решение.** Из свойств гамма-функции вытекает, что  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ . Тогда

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (41.2)$$

Рассмотрим некоторые полезные свойства биномиальных коэффициентов.

**Свойство 1.** Справедливо соотношение

$$\binom{\alpha + \nu}{\nu} = \frac{\sin \alpha \pi}{\sin(\alpha + \nu)\pi} \binom{-1 - \alpha}{\nu}. \quad (41.3)$$

**Доказательство.** С учетом свойств гамма-функции получим

$$\begin{aligned} \binom{\alpha + \nu}{\nu} &= \frac{\Gamma(\alpha + \nu + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\nu + 1)} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \nu + 1)\Gamma(-\alpha - \nu)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(-\alpha)\Gamma(\nu + 1)\Gamma(-\alpha - \nu)} = \\ &= \frac{-\pi}{\sin(\alpha + \nu)\pi} \frac{-\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(-\alpha - \nu)} = \\ &= \frac{\sin \alpha \pi}{\sin(\alpha + \nu)\pi} \binom{-1 - \alpha}{\nu}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 2.** Если  $n$  – целое, то справедливо соотношение

$$\binom{\alpha + n}{n} = (-1)^n \binom{-\alpha - 1}{n}. \quad (41.4)$$

**Доказательство.** Положим в (??)  $\nu = n$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ . С учетом формулы приведения  $\sin(\varphi + \pi n) = (-1)^n \sin \varphi$  получим (41.4).

**Свойство 3.** Справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha + \beta}{n}. \quad (41.5)$$

**Доказательство.** С помощью биномиальных коэффициентов разложение функции  $f(x) = (1+x)^\alpha$  в ряд Тейлора по степеням  $x$  (справедливое при  $|x| < 1$ ) можно записать в виде

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad (1+x)^\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\beta}{m} x^m; \quad (41.6)$$

$$(1+x)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} x^n = (1+x)^\alpha (1+x)^\beta. \quad (41.7)$$

Подставив (41.6) в (41.7), найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{m} x^{k+m}.$$

Сделав замену индексов суммирования  $k+m = n$ , окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} x^n,$$

откуда с учетом того, что

$$\binom{\beta}{n-k} = 0$$

при  $k > n$ , следует (41.5).

Наряду с биномиальными коэффициентами для компактной записи коэффициентов рядов Тейлора и Фурье зачастую используются символы Похгаммера.

◆ Символом Похгаммера называется величина

$$(a)_n = a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (41.8)$$

где  $a$  – комплексная постоянная, а  $n = \overline{0, \infty}$ .

◇ Используя свойства гамма-функции, нетрудно получить основное функциональное соотношение для символа Похгаммера

$$(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n. \quad (41.9)$$

## 42. Интеграл ошибок

◆ Интегралом (функцией) вероятности или интегралом ошибок называется функция

$$\Phi(t) = \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx. \quad (42.1)$$

Непосредственно из определения следует, что функция  $\operatorname{erf}(t)$  непрерывна и монотонно возрастает от нуля до  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ , так как

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad (42.2)$$

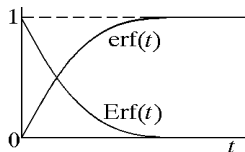


Рис. 103

Наряду с функцией  $\operatorname{erf}(t)$  рассматривают функцию

$$\operatorname{Erf}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^t e^{-x^2} dx \right]$$

или с учетом (42.2)

$$\operatorname{Erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^t e^{-x^2} dx \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-x^2} dx. \quad (42.3)$$

Функция  $\operatorname{Erf}(t)$  непрерывна и монотонно убывает от  $\operatorname{Erf}(0) = 1$  до  $\operatorname{Erf}(\infty) = 0$  (см. рис. 103).

**Пример 42.1.** Для интеграла ошибок найти представление в виде ряда по степеням  $t$ .

**Решение.** Согласно (42.1), имеем

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!}.$$

Заметив, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{l!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s t^{2s+1}}{(2s+1)!!},$$

получим

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s t^{2s+1}}{(2s+1)!!}.$$

## Методы асимптотических оценок

### 43. Простейшие асимптотические оценки несобственных интегралов

◆ Пусть функции  $f(z)$  и  $g(z)$  определены на множестве  $E$ , а  $z_0$  – предельная точка множества  $E$ . Тогда, если

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z)}{g(z)} = 1, \quad (43.1)$$

то функции  $f(z)$  и  $g(z)$  называются асимптотически равными (эквивалентными) в точке  $z_0$  и обозначаются

$$f(z) \sim g(z), \quad (z \rightarrow z_0, z \in E). \quad (43.2)$$

◆ Если

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z)}{g(z)} = 0, \quad (43.3)$$

то функция  $f(z)$  называется бесконечно малой по сравнению с функцией  $g(z)$  в точке  $z_0$  и обозначается

$$f(z) = o(g(z)), \quad (z \rightarrow z_0, z \in E). \quad (43.4)$$

(читается:  $f(z)$  есть  $o$  малое от  $g(z)$  при  $z$ , стремящемся к  $z_0$ ).

◆ Если для двух функций  $f(z)$  и  $g(z)$ , определенных на множестве  $E$ , существует постоянная  $C > 0$ , такая что выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq C|g(z)| \quad (43.5)$$

для всех  $z \in E$ , то функция  $f(z)$  называется ограниченной по сравнению с функцией  $g(z)$  на множестве  $E$  и записывается

$$f(z) = O(g(z)) \quad (z \in E)$$

(читается:  $f(z)$  есть  $O$  большое от  $g(z)$  на  $E$ ).

◆ Если неравенство (43.5) выполняется только в некоторой окрестности точки  $z_0$ , т.е.

$$|f(z)| \leq C|g(z)|, \quad z \in C(z_0, \varepsilon) \cap E, \quad (43.6)$$

то говорят, что функция  $f(z)$  ограничена по сравнению с функцией  $g(z)$  в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $z_0$  и записывается

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow z_0. \quad (43.7)$$

**Пример 43.1.** Показать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sin z \sim z \quad (z \rightarrow 0), \\ \text{б) } & \frac{x^2}{1+x^2} \sim x^2 \quad (x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

**Решение.** Действительно,

$$\begin{aligned} \text{а) } & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \\ \text{б) } & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1}{x^2} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (43.1) и (43.2) получаем требуемые утверждения.

**Пример 43.2.** Показать, что

$$\ln x = o(x^\alpha) \quad x \rightarrow +\infty \quad \alpha > 0.$$

**Решение.** Пусть  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x^\alpha$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

**Пример 43.3.** Показать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sin x = O(1), \quad x \in \mathbb{R}; \\ \text{б) } & \frac{1}{z} = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad z \rightarrow 0; \\ \text{в) } & \frac{1}{z^2} = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

**Решение.** Действительно, в силу очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \text{а) } & |\sin x| \leq 1 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}; \\ \text{б) } & \left| \frac{1}{z} \right| \leq \left| \frac{1}{z^2} \right| \quad \text{при } |z| < 1; \\ \text{в) } & \left| \frac{1}{z^2} \right| \leq \left| \frac{1}{z} \right| \quad \text{при } |z| > 1 \end{aligned}$$

и определения символа  $O(g(z))$  (43.5) и (43.6) получаем требуемые утверждения.

**Теорема 43.1.** *Справедливы следующие соотношения:*

1.  $o(f(z)) + o(f(z)) = o(f(z)), \quad (z \rightarrow z_0)$
  2.  $o(f(z)) \cdot o(g(z)) = o(f(z) \cdot g(z)), \quad (z \rightarrow z_0)$
  3.  $o(o(f(z))) = o(f(z)), \quad (z \rightarrow z_0)$
  4.  $o(f(z)) + O(f(z)) = O(f(z)), \quad (z \rightarrow z_0)$
  5.  $O(o(f(z))) = o(f(z)), \quad o(O(f(z))) = o(f(z)).$
- (43.8)

**Доказательство.** 1. Пусть  $g_1(z) = o(f(z)), g_2(z) = o(f(z))$  при  $z \rightarrow z_0$ . Тогда  $g_1(z) + g_2(z) = o(f(z))$ . Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g_1(z) + g_2(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g_1(z)}{f(z)} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g_2(z)}{f(z)} = 0.$$

2. Пусть  $\varphi(z) = o(f(z)), \psi(z) = o(g(z))$  при  $z \rightarrow z_0$ . Тогда  $\varphi(z)\psi(z) = o(f(z)g(z))$  при  $z \rightarrow z_0$ . Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)\psi(z)}{f(z)g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{f(z)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{g(z)} = 0.$$

3. Пусть  $\varphi(z) = o(g(z)), g(z) = o(f(z))$  при  $z \rightarrow z_0$ . Тогда  $\varphi(z) = o(f(z))$ . Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)} \frac{g(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{g(z)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{f(z)} = 0.$$

Доказательства свойств 4 и 5 аналогичны.

◇ Первые три соотношения в (43.8) останутся справедливыми, если символ  $o$  заменить на  $O$ .

◆ Соотношения вида

$$f(z) \sim g(z), \quad f(z) = o(g(z)), \quad f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow z_0$$

называются асимптотическими формулами или асимптотическими оценками.

## 44. Простейшие асимптотические оценки интегралов

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(t) dt$$

от непрерывной функции  $f(t)$ . Согласно свойству аддитивности, его можно представить в виде

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt. \quad (44.1)$$

Если интеграл

$$\int_a^b f(t)dt = A < \infty$$

сходится, то при  $x \rightarrow b$  справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\int_x^b f(t)dt \sim o(1), \quad \int_a^x f(t)dt \sim O(1), \quad x \rightarrow b.$$

В случае расходящихся интегралов (как первого, так и второго рода)

$$\int_a^b f(t)dt = \infty$$

асимптотические оценки играют исключительную роль. Позволяя сохранить основные свойства и отбрасывать второстепенные, они содержат много полезных сведений о поведении этих интегралов.

Сформулируем условия, при которых асимптотические оценки подынтегральных функций можно распространять на интегралы (44.1), т.е., другими словами, – условия, при которых асимптотические оценки можно интегрировать.

**Теорема 44.1.** Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  непрерывны,  $g(x) > 0$  для всех  $x \in ]a, b[$  и пусть

$$\int_{\varepsilon}^b g(x)dx = \infty \quad a < \varepsilon < b.$$

Тогда



1. если  $f(x) = O(g(x))$  ( $x \rightarrow b$ ), то

$$\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(x)dx\right) \quad (x \rightarrow b); \quad (44.2)$$

2. если  $f(x) = o(g(x))$  ( $x \rightarrow b$ ), то

$$\int_x^b f(t)dt = o\left(\int_x^b g(x)dx\right) \quad (x \rightarrow b); \quad (44.3)$$

3. если  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow b$ ), то

$$\int_x^b f(x)dx \sim \int_x^b g(x)dx \quad (x \rightarrow b). \quad (44.4)$$

**Доказательство.** 1. Так как  $f(x) = O(g(x))$  и  $g(x) > 0$  ( $x \rightarrow b$ ), то существует  $C > 0$ , такое что при  $|f(x)| \leq Cg(x)$  справедливо

$$\left| \int_x^b f(t)dt \right| \leq \int_x^b |f(x)|dx \leq \int_x^b Cg(x)dx = C \int_x^b g(x)dx.$$

2. Так как  $f(x) = o(g(x))$  ( $x \rightarrow b$ ), то

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\int_x^b f(x)dx}{\int_x^b g(x)dx},$$

который по правилу Лопиталья равен

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

3. Так как  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow b$ ), то

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Рассмотрим выражение

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{\int_x^b f(x) dx}{\int_x^b g(x) dx},$$

которое по правилу Лопиталя равно

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

что и требовалось доказать.

◇ Утверждения теоремы останутся справедливыми и при  $b = \infty$ .

**Теорема 44.2.** Пусть функция  $g(x)$ , непрерывная и положительная при  $x \geq 0$ , удовлетворяет условию

$$\int_a^b g(t) dt = \infty.$$

Тогда

1) если функция  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$  и  $f(x) = O(g(x))$  ( $x \rightarrow +b$ ), то

$$\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right) \quad (x \rightarrow +b); \quad (44.5)$$

2) если функция  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$  и  $f(x) = o(g(x))$  ( $x \rightarrow +b$ ), то

$$\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right); \quad (44.6)$$

3) если функция  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 0$  и  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow +b$ ), то

$$\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt. \quad (44.7)$$

**Доказательство** аналогично доказательству теоремы 44.1.

**Пример 44.1.** Показать, что для непрерывной на интервале  $a \leq x < \infty$  функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\text{если } f(x) \sim x^\alpha, \text{ то } \int_a^x f(t)dt \sim \begin{cases} \frac{x^\alpha + 1}{\alpha + 1}, & \alpha > -1, \\ \ln x, & \alpha = -1; \end{cases}$$

$$\text{если } f(x) = o(x^\alpha), \text{ то } \int_a^x f(t)dt = \begin{cases} o(x^{\alpha+1}), & \alpha > -1, \\ o(\ln x), & \alpha = -1; \end{cases}$$

$$\text{если } f(x) = O(x^\alpha), \text{ то } \int_a^x f(t)dt = \begin{cases} O(x^{\alpha+1}), & \alpha > -1, \\ O(\ln x), & \alpha = -1. \end{cases}$$

**Решение.** Положим в условии теоремы 44.2  $g(x) = x^\alpha$  и  $b = \infty$  и получим требуемые утверждения.

**Пример 44.2.** Показать, что для непрерывной на интервале  $a \geq x < \infty$  функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\text{если } f(x) \sim x^\alpha, \text{ то } \int_x^\infty f(t)dt \sim -\frac{x^\alpha + 1}{\alpha + 1}, \quad \alpha < -1;$$

$$\text{если } f(x) = o(x^\alpha), \text{ то } \int_x^\infty f(t)dt = o(x^{\alpha+1}), \quad \alpha < -1;$$

$$\text{если } f(x) = O(x^\alpha), \text{ то } \int_x^\infty f(t)dt = O(x^{\alpha+1}), \quad \alpha < -1.$$

**Решение.** Положим в условии теоремы 44.1  $g(x) = x^\alpha$  и  $b = \infty$  и получим требуемые утверждения.

**Пример 44.3.** Доказать, что

$$\int_0^x \sqrt{t^4 + 1} dt = \frac{x^3}{3} + O(1), \quad (x \rightarrow \infty).$$

**Решение.** Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \int_1^x \sqrt{t^4 + 1} dt - \frac{x^3}{3} &= \int_1^x (\sqrt{t^4 + 1} - t^2) dt = \\ &= \int_1^x t^2 \left\{ \sqrt{1 + t^{-4}} - 1 \right\} dt = \\ &= \int_1^x t^2 \left\{ 1 + \frac{t^{-4}}{2} - 1 + O(t^{-8}) \right\} dt = \\ &= \int_1^x \left( \frac{1}{2t^2} + O(t^{-6}) \right) dt = O\left(\frac{1}{x}\right), \\ \int_0^1 (\sqrt{t^4 + 1} - t^2) dt &= O(1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{t^4 + 1} dt - \frac{x^3}{3} &= \int_0^1 (\sqrt{t^4 + 1} - t^2) dt + \\ &+ \int_1^x (\sqrt{t^4 + 1} - t^2) dt = O(1) + O\left(\frac{1}{x}\right) = O(1). \end{aligned}$$

**Пример 44.4.** Доказать, что

$$\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln x + O(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

**Решение.** Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 & \int_1^x \sqrt{t^2 + 1} dt - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln x = \\
 & = \int_1^x \left\{ \sqrt{t^2 + 1} - t - \frac{1}{2t} \right\} dt = \\
 & = \int_1^x \left\{ t \left( 1 + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{8t^4} \right) - t - \frac{1}{2t} \right\} dt = \\
 & = \int_1^x \left\{ -\frac{3}{8t^3} \right\} dt = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty. \\
 & \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt = O(1), \quad (x \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln x = \\
 & \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt + \int_1^x \sqrt{t^2 + 1} dt - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln x = \\
 & = O(1) + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = O(1), \quad x \rightarrow \infty, [-.2ex]
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

## 45. Асимптотические ряды

◆ Последовательность  $\{\varphi_n(z)\}$ ,  $z \in E$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , называется асимптотической при  $z \rightarrow z_0$  (по Пуанкаре), если для любого целого  $n \geq 0$  справедливо

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)), \quad (z \rightarrow z_0, z \in E), \quad (45.1)$$

где  $z_0$  – предельная точка множества  $E$ .

◇ Если ясно, о каком множестве  $E$  идет речь, то записывается просто  $z \rightarrow z_0$ .

**Пример 45.1.** Показать, что последовательность

$$\{(x - x_0)^n\}, \quad (x \rightarrow x_0)$$

является асимптотической при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ .

**Решение.** Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^n} = 0,$$

т.е.

$$(x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0).$$

**Пример 45.2.** Показать, что последовательность

$$\{z^{-n}\}, \quad (z \rightarrow \infty)$$

является асимптотической при  $z$ , стремящемся к бесконечно удаленной точке.

**Решение.** Действительно,  $\varphi_n(z) = z^{-n}$ ,  $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{e^{-i\varphi}}{\rho} = 0.$$

◇ Последовательности, рассмотренные в этих примерах, называют степенными асимптотическими последовательностями.

**Пример 45.3.** Показать, что последовательность

$$\{e^x x^{-n}\}, \quad (x \rightarrow \infty)$$

является асимптотической при  $x$ , стремящемся к бесконечно удаленной точке.

**Решение.** Решается аналогично.

### Свойства асимптотических последовательностей

**Свойство 1.** Пусть  $f(z)$  отлична от нуля в некоторой окрестности точки  $z_0 \in E$ , а  $\{\varphi_n(z)\}$  – асимптотическая последовательность при  $z \rightarrow z_0, z \in E$ . Тогда последовательность  $\{f(z)\varphi_n(z)\}$  также является асимптотической последовательностью при  $(z \rightarrow z_0, z \in E)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)\varphi_{n+1}(z)}{f(z)\varphi_n(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = 0,$$

следовательно,

$$f(z)\varphi_{n+1}(z) = o(f(z)\varphi_n(z)), \quad (z \rightarrow z_0, z \in E),$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 2.** Пусть последовательности  $\{\varphi_n(z)\}$  и  $\{\psi_n(z)\}$  – асимптотические (при  $z \rightarrow z_0, z \in E$ ). Тогда последовательность  $\{\varphi_n(z)\psi_n(z)\}$  является асимптотической при  $z \rightarrow z_0, z \in E$ .

**Доказательство.** Так как последовательности  $\{\varphi_n(z)\}$  и  $\{\psi_n(z)\}$  – асимптотические при  $z \rightarrow z_0$ , то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi_{n+1}(z)}{\psi_n(z)} = 0.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi_{n+1}(z)\psi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)\psi_n(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi_{n+1}(z)}{\psi_n(z)} = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_{n+1}(z)\psi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z)\psi_n(z))$$

при  $z \rightarrow z_0, z \in E$ , что и требовалось доказать.

♦ Пусть  $\{\varphi_n(z)\}$  – асимптотическая последовательность при  $z \rightarrow z_0, z \in E$ . Тогда говорят, что функция  $f(z), z \in E$ , разлагается в асимптотический ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad (z \rightarrow z_0, z \in E), \quad (45.2)$$

$a_n = \text{const}$ , если для любого  $N \geq 0$

$$f(z) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z) = o(\varphi_N(z)), \quad (z \rightarrow z_0, z \in E). \quad (45.3)$$

Ряд (45.2), даже если он расходится, называется асимптотическим разложением функции  $f(z)$  по асимптотической последовательности  $\{\varphi_n(z)\}$ .

◇ Соотношение (45.3) позволяет записать последовательность асимптотических формул при  $z \rightarrow z_0$ :

$$\begin{aligned} R_0(z) &= f(z) - a_0 \varphi_0(z) = o(\varphi_0(z)), \\ R_1(z) &= f(z) - a_0 \varphi_0(z) - a_1 \varphi_1(z) = o(\varphi_1(z)), \\ &\dots\dots\dots, \\ R_N(z) &= f(z) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z) = o(\varphi_N(z)), \end{aligned}$$

так что каждая последующая формула для остаточного члена ряда  $R_N(z)$  уточняет предыдущую. Поскольку определение не оговаривает поведения  $R_N(z)$  при фиксированном  $z$  и  $N \rightarrow \infty$ , не исключено, что асимптотический ряд (45.2) расходится. Более того, термин «асимптотический ряд» применяется в основном к расходящимся рядам или рядам, сходимость которых установить не удается.

**Теорема 45.1.** *Асимптотическое разложение (45.2) единственно.*

**Доказательство.** Допустим, что имеются два асимптотических разложения функции  $f(z)$

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(z),$$

( $z \rightarrow z_0, z \in E$ ). Покажем, что  $a_n = b_n$  для всех  $n$ . По определению

$$f(z) - a_0 \varphi_0(z) = o(\varphi_0(z)), \quad f(z) - b_0 \varphi_0(z) = o(\varphi_0(z)).$$

Вычтя одно равенство из другого, получим  $(a_0 - b_0)\varphi_0(z) = o(\varphi_0(z))$ . Разделив последнее равенство на  $\varphi_0(z)$ , получим  $(a_0 -$



$b_0) = o(1)$  и, переходя к пределу  $z \rightarrow z_0$ , получаем  $a_0 = b_0$ . Покажем, что  $a_1 = b_1$ . Имеем

$$\begin{aligned} f(z) - a_0\varphi_0(z) - a_1\varphi_1(z) &= o(\varphi_1(z)), \\ f(z) - a_0\varphi_0(z) - b_1\varphi_1(z) &= o(\varphi_1(z)). \end{aligned}$$

Следовательно,  $(a_1 - b_1)\varphi_1(z) = o(\varphi_1(z))$  и поэтому  $a_1 = b_1$ . Аналогично доказывается  $a_n = b_n$  для всех  $n$ .

◇ Обратное утверждение неверно: две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.

◇ Таким образом, асимптотический ряд функции  $f(z)$  может

- 1) сходиться к функции  $f(z)$ ;
- 2) сходиться к функции  $g(z)$ , отличной от  $f(z)$ ;
- 3) расходиться.

**Пример 45.4.** Показать, что функции  $f(x) = 0$  и  $g(x) = e^{-x}$  имеют одно и то же асимптотическое разложение при  $x$ , стремящемся к бесконечности.

**Решение.** Очевидно, что

$$\begin{aligned} 0 &\sim 0x^0 + 0x^{-1} + \dots + 0x^{-n} + \dots \quad (x \rightarrow \infty), \\ e^{-x} &\sim 0x^0 + 0x^{-1} + \dots + 0x^{-n} + \dots \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^0} = 0, \\ a_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} - 0x^0}{x^{-1}} = 0 \end{aligned}$$

и т.д., что и требовалось показать.

**Пример 45.5 (Эйлера).** Исследовать поведение функции

$$f(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{x-t} dt, \quad x > 0$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

**Решение.** Проинтегрируем по частям и получим

$$f(x) = - \int_x^{\infty} t^{-1} d(e^{x-t}) = \frac{1}{x} - \int_x^{\infty} t^{-2} e^{x-t} dt.$$

Повторяя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^{\infty} e^{x-t} t^{-n-2} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + r_n(x). \end{aligned}$$

Для  $r_n(x)$  имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &= \left| (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^{\infty} e^{x-t} t^{-n-2} dt \right| \leq \\ &\leq (n+1)! \int_x^{\infty} t^{-n-2} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}. \end{aligned} \quad (45.4)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $e^{x-t} \leq 1$  при  $x \leq t$ . Из (45.4) следует, что при  $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad (45.5)$$

и оценка

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \right| < \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Правая часть неравенства достаточно мала при больших  $x$ . Например, при  $x \geq 2n$  имеем

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \right| < \frac{1}{n2^n}.$$

Поэтому при больших  $x$  и больших  $n$  функция  $f(x)$  может быть вычислена с большой точностью.

Функции  $f(x)$  можно сопоставить ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Этот ряд расходится при любом  $x$ , поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = \infty$$

для всех  $x$  и не выполняется необходимый признак сходимости. Тем не менее, этот ряд может служить для приближенного вычисления функции  $f(x)$ .

Если в формуле (45.2) в качестве асимптотической последовательности использовать степенную, то получим степенной асимптотический ряд – простейший из асимптотических и наиболее часто встречающийся в приложениях.

◆ Асимптотические ряды вида

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (z \rightarrow \infty);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (z \rightarrow z_0)$$

называются степенными.

◇ Степенные асимптотические ряды, порождаемые непрерывными функциями, можно складывать, вычитать, перемножать и делить, причем для коэффициентов разложения справедливы формулы, полученные нами для сходящихся степенных рядов.

Доказательство этого утверждения не вызывает затруднений, как, впрочем, и возможность почленного интегрирования асимптотического ряда

$$f(z) \sim \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (z \rightarrow \infty)$$

в виде

$$\int_z^{\infty} f(z) dz \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n z^{-n+1}}{n-1}, \quad (z \rightarrow \infty). \quad (45.6)$$

Что касается почленного дифференцирования асимптотического ряда, то эта операция в общем случае некорректна. Например,  $e^{-x} \sin e^x \sim 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , однако производная

$$(e^{-x} \sin e^x)' = -e^{-x} \sin e^x + \cos e^x$$

не имеет асимптотического разложения, поскольку не существует ее предел при  $x \rightarrow \infty$ . Но если  $f(x)$  разлагается в асимптотический ряд при  $x \rightarrow \infty$ , то это разложение можно получить формальным дифференцированием асимптотического ряда функции  $f(x)$ , т.е.

$$f'(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} (1-n)a_{n-1}z^{-n}, \quad (z \rightarrow \infty). \quad (45.7)$$

Формула (45.7) вытекает непосредственно из (45.6).

◇ Можно показать, что если функция  $f(z)$ , аналитическая при  $|z| < R$ ,  $\alpha < \arg z \leq \beta$ , разлагается в асимптотический ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (z \rightarrow 0, |z| < R, \alpha \leq \arg z \leq \beta), \quad (45.8)$$

то коэффициенты этого ряда можно представить в виде

$$C_n = \frac{1}{n!} \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \alpha < \arg z \leq \beta}} f^{(n)}(z). \quad (45.9)$$

◇ Если мы имеем для функции  $f(x)$  асимптотическое разложение по некоторой асимптотической последовательности функций  $\{\varphi_n(x)\}$  при  $x \rightarrow x_0$  (45.1), (45.2), то это еще не дает никаких сведений о значении  $f(x)$  при фиксированном  $x$ , отличном от  $x_0$ . Например, если известно, что функция  $f(x)$  хорошо аппроксимируется выражением  $a_0 + a_1(x - x_0)$ , когда  $x \rightarrow x_0$ , то нам неизвестно, насколько «мало» отклонение между  $f(x)$  и  $a_0 + a_1(x - x_0)$  при достаточно «малых»  $x - x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] = 0.$$

Поэтому в приложениях асимптотических разложений, например при построении рядов теории возмущений в квантовой механике (см. [46]) используют следующее более сильное в смысле сходимости понятие.

◆ Формальный асимптотический ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$  называют сильным асимптотическим рядом для  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , или асимптотическим приближением к функции  $f(x)$ , и пишут  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ , если для любого  $m$  справедлива оценка

$$f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(x) = O(\varphi_m) \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \quad (45.10)$$

Иными словами, частичные суммы  $\sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(x)$  являются приближенными значениями функции  $f(x)$  с ошибкой  $O(\varphi_m(x))$  при  $x \rightarrow x_0$ , т.е. ошибка приближения имеет величину первого отброшенного слагаемого. Можно показать [31], что если существует асимптотическое разложение в указанном сильном смысле, то оно единственно и его коэффициенты определяются последовательно по формулам

$$a_m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \varphi_n(x)}{\varphi_m(x)}, \quad m = \overline{0, \infty}. \quad (45.11)$$

Из определения по Пуанкаре асимптотического разложения  $f(x)$  по асимптотической последовательности  $\varphi(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ , следуют, в частности, формулы (45.10) и (45.11) асимптотического приближения к функции  $f(x)$  [68]. Для степенных асимптотических рядов, когда  $\varphi_n(x) = x^n$ , понятия асимптотического ряда и сильного асимптотического ряда эквивалентны.

## 46. Метод Лапласа

◆ Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (46.1)$$

называются интегралами Лапласа. Здесь  $\lambda > 0$  – большой параметр, а  $S(x)$  и  $f(x)$  – вещественные функции, такие что  $f(x) \neq 0$ ,  $S(x) \neq \text{const}$  при  $x \in [a, b]$ .

◇ Идея метода Лапласа весьма проста. Пусть  $S(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  один максимум в точке  $x_0$ , который тем резче, чем больше  $\lambda$ . И поэтому при больших  $\lambda$  основной вклад в значение интеграла вносит окрестность точки максимума. Далее в окрестности точки  $x_0$  функции  $f(x)$  и  $S(x)$  можно приближенно заменить по формуле Тейлора, и мы получим интеграл, асимптотика которого легко вычисляется. С учетом этого исследование интегралов (46.1) начнем с леммы, определяющей асимптотику «эталонного» интеграла с фазовой функцией вида  $S(x) = -\lambda x^\alpha$ .

**Лемма 46.1 (Ватсона).** Пусть дан интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^a f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx, \quad (46.2)$$

где  $0 < a \leq \infty$ ,  $\alpha > 0$ , а функция  $f(x)$  при  $|x| < \varepsilon$  представляется сходящимся рядом

$$f(x) = x^\beta \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n, \quad \beta > -1. \quad (46.3)$$

Причем если существуют  $\lambda_0$  и  $0 < M < \infty$ , такие что

$$\int_0^a |f(x)| e^{-\lambda_0 x^\alpha} dx < M,$$

то имеет место асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}}, \quad (46.4)$$

$\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Разложение (46.4) можно дифференцировать по  $\lambda$  любое число раз.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda > \lambda_0$ , тогда можно записать

$$\begin{aligned} & \int_0^a f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx = \\ & = \int_0^\varepsilon f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx + \int_\varepsilon^a f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Оценим второй интеграл:

$$|J_2| = \left| \int_{\varepsilon}^a f(x)e^{-\lambda x^\alpha} dx \right| \leq \int_{\varepsilon}^a e^{-(\lambda-\lambda_0)x^\alpha} e^{-\lambda_0 x^\alpha} |f(x)| dx.$$

Поскольку  $e^{-(\lambda-\lambda_0)x^\alpha} \leq e^{-(\lambda-\lambda_0)\varepsilon^\alpha}$ , его можно оценить как

$$|J_2| \leq e^{-(\lambda-\lambda_0)\varepsilon^\alpha} \int_{\varepsilon}^a e^{-\lambda_0 x^\alpha} |f(x)| dx \leq M e^{-(\lambda-\lambda_0)\varepsilon^\alpha}.$$

Таким образом,

$$|J_2| = \left| \int_{\varepsilon}^a f(x)e^{-\lambda x^\alpha} dx \right| = O(e^{-(\lambda-\lambda_0)\varepsilon^\alpha}).$$

Рассмотрим теперь первый интеграл

$$J_1 = \int_0^{\varepsilon} f(x)e^{-\lambda x^\alpha} dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_0^{\varepsilon} x^{\beta+n} e^{-\lambda x^\alpha} dx$$

и сделаем замену  $\lambda x^\alpha = \tau$ ,  $d\tau = \alpha x^{\alpha-1} dx$ , т.е.  $x = \tau^{1/\alpha} \lambda^{-1/\alpha}$ ,  $dx = \frac{1}{\alpha\lambda} (\tau/\lambda)^{-(\alpha-1)/\alpha} d\tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha\lambda} \int_0^{\lambda\varepsilon^\alpha} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{\frac{\beta+n}{\alpha}} \left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{-\frac{\alpha-1}{\alpha}} e^{-\tau} d\tau = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\alpha\lambda^{(\beta+n+1)/\alpha}} \left[ \int_0^{\lambda\varepsilon^\alpha} \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^{\infty} \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau - \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^{\infty} \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$J_3 = \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^{\infty} \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau = e^{-\lambda\varepsilon^\alpha} \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^{\infty} \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-(\tau-\lambda\varepsilon^\alpha)} d\tau.$$

Снова сделаем замену  $\tau - \lambda\varepsilon^\alpha = u$ ,  $d\tau = du$ ,  $\tau = u + \lambda\varepsilon^\alpha$ . Получим

$$\begin{aligned} J_3 &= e^{-\lambda\varepsilon^\alpha} \int_0^\infty (u + \lambda\varepsilon^\alpha)^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-u} du = \\ &= e^{-\lambda\varepsilon^\alpha} (\lambda\varepsilon^\alpha)^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{\lambda\varepsilon^\alpha}\right)^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-u} du = \\ &= e^{-\lambda\varepsilon^\alpha} \lambda^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} \left[ \varepsilon^{\beta-\alpha+n+1} \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{\lambda\varepsilon^\alpha}\right)^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-u} du \right]. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл в квадратных скобках сходится. Следовательно,

$$J_3 = \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^\infty \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau = O(e^{-\lambda\varepsilon^\alpha}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) e^{-\lambda x^\alpha} dx &= \sum_{n=0}^\infty \frac{C_n}{\alpha \lambda^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}}} \int_0^\infty \tau^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}-1} e^{-\tau} d\tau + \\ &+ O(e^{-\lambda\varepsilon^\alpha}) + O(e^{-(\lambda-\lambda_0)\varepsilon^\alpha}) = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{C_n}{\alpha \lambda^{\frac{\beta+n+1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{\beta+n+1}{\alpha}\right) + O(\lambda^{-\frac{\beta+N+1}{\alpha}}). \end{aligned}$$

Дифференцирование соотношения (46.2) по  $\lambda$  приводит к интегралу того же вида, откуда и следует возможность почленного дифференцирования разложения (46.4), что и требовалось доказать.

Перейдем к общему случаю оценки интегралов (46.1). Точка  $x_0$ , в которой функция  $S(x)$  достигает максимума, может либо быть внутренней точкой отрезка интегрирования, либо совпадать с его границей. В первом случае тейлоровское разложение функции  $S(x)$  в окрестности точки  $x_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} S(x) &= S(x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \dots, \\ C_1 = S'(x_0) &= 0, \quad C_2 = S''(x_0) \neq 0, \end{aligned}$$



а во втором, если  $x_0 = a$ , —

$$S(x) = S(a) + C_1(x - a) + \dots, \quad C_1 = S'(a) \neq 0.$$

В связи с этим и основываясь на лемме Ватсона, можно показать (см. [56]) справедливость следующих двух теорем, определяющих асимптотические разложения (46.1) в каждом из этих случаев.

**Теорема 46.1 (вклад от внутренней точки максимума).**

Пусть интеграл (46.1) сходится абсолютно для некоторой точки  $\lambda = \lambda_0$ , т.е.

$$\int_a^b |f(x)| e^{\lambda_0 S(x)} dx \leq M \quad (46.5)$$

и  $S(x)$  достигает максимума только в точке  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$ , а функции  $f(x)$  и  $S(x)$  бесконечно дифференцируемы при  $x \in [a, b]$  и  $S''(x_0) \neq 0$ .

Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  асимптотическое разложение интеграла (46.1) имеет вид

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(x_0)] \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda^{-n-1/2}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (46.6)$$

где

$$C_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n)!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d^n}{dx^n} \left[ f(x) \left( \frac{2(S(x_0) - S(x))}{(x - x_0)^2} \right)^{-n-1/2} \right]. \quad (46.7)$$

◇ Главный член асимптотического разложения интеграла (46.1) при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)} dx \sim \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{-S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]. \end{aligned} \quad (46.8)$$

**Теорема 46.2 (вклад от граничной точки).** Пусть максимум функции  $S(x)$  достигается только в точке  $x \leq a$  и выполняется условие (46.5). Тогда если функции  $f(x)$  и  $S(x)$  бесконечно дифференцируемы на  $[a, b]$  и  $S'(a) \neq 0$ , то при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim \exp[\lambda S(a)] \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda^{-n-1}, \quad (46.9)$$

где

$$C_n = - \lim_{x \rightarrow a-0} \left\{ \left( - \frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{f(x)}{S'(x)} \right\}. \quad (46.10)$$

Разложения (46.6) и (46.9) можно дифференцировать по  $\lambda$  любое число раз.

**Пример 46.1.** Показать, что справедлива формула Стирлинга

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left( \frac{\lambda}{e} \right)^\lambda (1 + O(1/\lambda)), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

**Решение.** По определению Гамма-функции

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^{\infty} x^\lambda e^{-x} dx.$$

Сделаем замену переменных  $x = \lambda t$ ,  $dx = \lambda dt$ . Получим

$$\lambda^{\lambda+1} \int_0^{\infty} t^\lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda^{\lambda+1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t-\ln t)} dt.$$

Таким образом, приходим к теореме 46.1, где  $f(t) = 1$ ,  $S(t) = -(t - \ln t)$ , причем  $S'(t) = -1 + 1/t = 0$  при  $t = 1$ .  $S''(t) = -1/t^2$  и  $S''(1) = -1$ . Применяя теорему 46.1, получим

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (C_0 + O(\lambda^{-1})),$$

где

$$C_0 = \frac{\Gamma(1/2)}{0!} \lim_{t \rightarrow 1} \left( 1 \cdot \frac{1 + t - \ln t}{(t-1)^2} \right)^{1/2} = \sqrt{2} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом,

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda (1 + O(\lambda^{-1})).$$

**Пример 46.2.** Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2/2} \ln(1 + t + t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{\lambda^{3/2}} (1 + O(1/\lambda)).$$

**Решение.** Интеграл удовлетворяет условию теоремы 46.1, где  $f(t) = \ln(1 + t + t^2)$ ,  $S(t) = -t^2$ ,  $S'(t) = -2t$ ,  $S''(t_0) = -2$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda t^2/2} \ln(1 + t + t^2) dt = e^{\lambda 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left( C_0 + \frac{C_1}{\lambda} + O(\lambda^{-2}) \right),$$

где

$$C_0 = \frac{\Gamma(1/2)}{0!} \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1 + t + t^2) \left( -\frac{S(t)}{2(t-t_0)^2} \right)^{-1/2} = 0,$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Gamma(3/2)}{2!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left[ \ln(1 + t + t^2) \left( -\frac{S(t)}{2t^2} \right)^{-3/2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(3/2) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + 2t}{1 + t + t^2} = \frac{1}{2} \Gamma(1 + 1/2) = \frac{1}{4} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

## 47. Метод стационарной фазы

◆ Интеграл вида

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \exp[i\lambda S(x)] dx, \quad (47.1)$$

где  $S(x)$  и  $f(x)$  – вещественные функции, а  $\lambda$  – большой положительный параметр, называется интегралом Фурье.

Будем считать, что функция  $S(x)$ , которую принято называть фазовой (или фазой) не является постоянной, т.е.  $S(x) \neq \text{const}$ , а  $f(x) \neq 0$ .

◆ Точки  $x$ , для которых  $S'(x) = 0$ , называются стационарными, или критическими.

Интеграл (47.1) будет мал при  $\lambda \rightarrow \infty$  за счет быстрых колебаний  $\exp[i\lambda S(x)]$ . Ясно, что основной вклад в асимптотику интеграла (47.1) должны вносить стационарные (критические) точки фазовой функции  $S(x)$  (отсюда название метода), так как вблизи них колебания замедляются. В тех случаях, когда фаза  $S(x)$  не имеет стационарных точек, асимптотическую оценку (47.1) можно найти интегрированием по частям. Начнем, например, с оценки Фурье-коэффициентов.

### Асимптотика коэффициентов Фурье

◇ Часто требуется найти асимптотику интегралов, возникающих в теории интегрального преобразования Фурье

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda x} dx, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (47.2)$$

где функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема бесконечное число раз, а  $S'(x) = 1$ .

**Теорема 47.1.** *Если интеграл (47.2) сходится абсолютно, т.е. существует  $M > 0$ , такое что*

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq M < \infty,$$

тогда

$$F(\lambda) = e^{i\lambda a} \sum_{n=1}^N \frac{i^n}{\lambda^n} f^{(n-1)}(a) - e^{i\lambda b} \sum_{n=1}^N \frac{i^n}{\lambda^n} f^{(n-1)}(b) + o(\lambda^{-N}). \quad (47.3)$$

**Доказательство.** Действительно, проинтегрируем  $F(\lambda)$  по частям, полагая  $U = f(x)$ ,  $dU = f'(x)dx$ ,  $dV = e^{i\lambda x} dx$ ,  $V = \frac{1}{i\lambda} e^{i\lambda x} dx$ . Получим

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda x} dx = f(x) \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b f'(x)e^{i\lambda x} dx.$$

Снова проинтегрировав по частям, получим

$$F(\lambda) = -\frac{i}{\lambda} e^{i\lambda x} \left[ f(x) + \frac{i}{\lambda} f'(x) \right] \Big|_a^b - \left( \frac{i}{\lambda} \right)^2 \int_a^b f''(x) e^{i\lambda x} dx.$$

Продолжая аналогично, приходим к формуле (47.3).

◇ Формула (47.3) верна и для  $a = -\infty$  либо  $b = \infty$ . В этом случае соответствующая сумма равна нулю, поскольку из абсолютной интегрируемости функции  $f(x)$  следует, что  $f^{(n)}(\pm\infty) = 0$ .

Когда у функции  $S(x)$  отсутствуют стационарные точки, справедлива

**Теорема 47.2.** Пусть  $S'(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , а  $f(x)$  удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливо

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^N (i\lambda)^{-n-1} \left[ \left( \frac{-1}{S'(x)} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{f(x)}{S'(x)} \right] e^{i\lambda S(x)} \Big|_a^b + o(\lambda^{-N}). \quad (47.4)$$

**Доказательство.** Действительно, сделаем в интеграле (47.1) замену

$$y = S(x), \quad dy = S'(x) dx, \quad x = x(y), \quad \frac{d}{dy} = \frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}.$$

Получим

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx = \int_{x(a)}^{x(b)} \frac{f(x(y))}{S'(x(y))} e^{i\lambda y} dy. \quad (47.5)$$

Воспользовавшись соотношением (47.3), получим формулу (47.4).

**Следствие.** Если

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda S(x)} dx, \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq M,$$

а  $S'(x) \neq 0$   $x \in ] - \infty, \infty[$ , то  $F(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Доказательство** непосредственно следует из (47.3) и (47.5).

Исследование интегралов Фурье, содержащих фазовые функции, имеющие стационарные точки, начнем с так называемого принципа локализации (см. [56]).

**Теорема 47.3 (принцип локализации).** Пусть производная функции  $S(x)$  имеет конечное число нулей  $S'(x_k) = 0$ ,  $x_k \in [a, b]$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Пусть все нули – изолированные. Тогда

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^N \int_{x_k - \varepsilon}^{x_k + \varepsilon} f(x) e^{i\lambda S(x)} dx + O(\lambda^{-\infty}),$$

где

$$2\varepsilon = \min_{k=1, N} [x_k, x_{k+1}].$$

Принцип локализации по сути является математической формулировкой высказанной ранее идеи о том, что основной вклад в асимптотику интеграла (47.1) вносят именно интегралы по малым окрестностям стационарных точек.

Далее, как и в методе Лапласа, сформулируем основную лемму для «эталонного» интеграла со степенной зависимостью для фазовой функции.

**Лемма 47.1 (Эрдейи).** Пусть функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  представлена рядом

$$f(x) = x^\beta \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливо разложение

$$\int_0^a f(x) e^{i\lambda x^\alpha} dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-\frac{k+\beta+1}{\alpha}} \frac{C_k}{\alpha} \Gamma\left(\frac{k+\beta+1}{\alpha}\right) \times \exp\left(\frac{i\pi(k+\beta+1)}{2\alpha}\right). \quad (47.6)$$

Разложение (47.6) можно дифференцировать по  $\lambda$  бесконечное число раз.

**Доказательство** аналогично доказательству леммы Ватсона.

Лемма Эрдейи играет такую же роль для интегралов (47.1), как лемма Ватсона для интегралов (46.1). Как и в методе Лапласа, исходя из леммы Эрдейи, можно показать (см. [56]) справедливость теоремы, дающей асимптотическую оценку (47.1).

**Теорема 47.4.** Пусть функция  $S(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  единственную стационарную точку  $x_0$ , т.е.  $S'(x_0) = 0$ , причем  $S''(x_0) \neq 0$ . Тогда если

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq M < \infty,$$

то при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b f(x) e^{i\lambda S(x)} dx \sim \\ &\sim \exp \left\{ i \left[ \lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x_0) \right] \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k-1/2} \right\}, \quad (47.7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \exp \left[ \frac{i\pi}{4} (2k+1) \operatorname{sgn} S''(x_0) \right] \frac{\Gamma(k+1/2)}{(2k)!} 2^{k+1/2} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \left( \frac{1}{S'(x, x_0)} \frac{d}{dx} \right)^{2k} f(x) S(x, x_0) \right\}; \\ S(x, x_0) &= \sqrt{2[S(x) - S(x_0)] \operatorname{sgn} S''(x_0)} \frac{1}{S'(x)}. \end{aligned}$$

◇ Для главного члена асимптотики (47.6) справедлива формула

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}} f(x_0) [1 + O(\lambda^{-1})] e^{i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x_0)}. \quad (47.8)$$

**Пример 47.1.** Получить асимптотическое разложение интеграла

$$\int_0^1 e^{i\lambda t^3} dt = \Gamma(4/3)e^{i\pi/6}\lambda^{-1/3}(1 + O(\lambda^{-1}))$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Решение.** Воспользуемся леммой Эрдейи, где  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 3$ , и получим искомое утверждение.

**Пример 47.2.** Вычислить асимптотику интеграла

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda \sin x - nx) dx, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где  $n$  – фиксированное число.

**Решение.** Имеем

$$J_n(\lambda) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i(\lambda \sin x - nx)} dx.$$

Функция  $S(x) = \sin x$  имеет на  $[0, \pi]$  одну стационарную (критическую) точку, так что  $S(\pi/2) = 1$ ,  $S''(\pi/2) = -1 \neq 0$ .

Воспользовавшись формулой (47.8), получим

$$\begin{aligned} J_n(\lambda) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left[ e^{-in\pi/2} e^{i\lambda - i\pi/4} + O(\lambda^{-1}) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}} \left[ \cos \left( \lambda - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2} \right) + O(\lambda^{-1}) \right]. \end{aligned}$$

**Пример 47.3.** Найти асимптотику интеграла

$$J(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-\lambda t \sin x + \lambda x) dx$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ .



**Решение.** Аналогично предыдущему примеру,

$$J(\lambda) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i\lambda S(x)} dx.$$

Функция  $S(x) = -t \sin x + x$  имеет одну стационарную точку  $x_0 = \arccos t^{-1}$ ,  $S''(x_0) = \sqrt{t^2 - 1}$ ,  $S(x_0) = \arccos t^{-1} - \sqrt{t^2 - 1}$ . В результате

$$J(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{t^2 - 1}}} \left[ \cos \left( \lambda \arccos t^{-1} - \lambda \sqrt{t^2 - 1} + \frac{\pi}{4} \right) + O(\lambda^{-1}) \right].$$

◇ Рассмотренные выше асимптотические методы вычисления интегралов могут быть обобщены на случай интегралов Лапласа вида

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} f(z) e^{\lambda S(z)} dz \quad (47.9)$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Здесь  $\gamma$  – кривая в комплексной плоскости,  $f(z)$  и  $S(z)$  – функции, аналитические в окрестности кривой  $\gamma$ .

Для этого интеграла асимптотическое разложение может быть найдено методом перевала, предложенным Риманом и Дебаем. Подробное рассмотрение метода перевала выходит за рамки нашего курса (см., например, [56]), поэтому мы введем лишь основные понятия, изложим идеологию метода и проведем его рассмотрение на качественном уровне.

◇ Идея метода перевала состоит в том, что контур нужно деформировать так, чтобы можно было применить метод Лапласа или метод стационарной фазы. Такая деформация возможна, поскольку по теореме Коши интеграл, содержащий аналитическую функцию, не зависит от пути интегрирования.

◆ Точки  $z_k$ , в которых  $S'(z_k) = 0$ , называются точками перевала, или нулевыми точками. Порядком точки перевала называется кратность нуля  $S'(z_k) = 0$ . Точка перевала называется простой, если  $S''(z_k) \neq 0$ .

◇ Концы контура  $\gamma$  также являются точками перевала и им присваивается нулевой индекс.

◇ Название «точка перевала» объясняется тем, что если отождествить поверхность  $u = \operatorname{Re} S(z)$  с изображением горной местности, то точки  $S'(z) = 0$  будут седловыми, так как гармонические функции не могут иметь ни максимумов, ни минимумов.

◆ Кривые, для которых  $\operatorname{Re} S(z)$  имеет постоянное значение, называются линиями уровня. Линии, вдоль которых  $\operatorname{Im} S(z)$  сохраняет свое значение, называются линиями наискорейшего спуска, или линиями стока.

◇ В точке перевала  $z = c$  порядка  $p$  пересекаются  $p + 1$  линия  $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(c)$ , которые разбивают достаточно малую окрестность точки  $z = c$  на  $2p + 2$  сектора. В  $p + 1$ -ом секторе  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(c)$ , в следующем  $\operatorname{Re} S(z) > \operatorname{Re} S(c)$ , и при обходе по кругу такие сектора чередуются.

В каждом секторе, где  $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(c)$ , проходит ровно одна линия наибоыстрейшего спуска.

◇ Вдоль линий уровня модуль функции  $e^{\lambda S(z)}$  сохраняет постоянное значение, а вдоль линий наибоыстрейшего спуска модуль функции  $e^{\lambda S(z)}$  меняется быстрее всего (эти линии являются градиентными линиями рельефа).

◇ Метод перевала состоит из двух частей

- I. **Топологическая часть:** деформация контура  $\gamma$  в наиболее удобный для получения аналитических оценок контур  $\gamma^*$ .
- II. **Аналитическая часть:** асимптотическое вычисление интеграла по контуру  $\gamma^*$ .

◇ Аналитическая часть содержит трудности того же порядка, что и методы Лапласа и стационарной фазы. В большинстве случаев можно использовать готовые асимптотические разложения, полученные этими методами.

Топологическая часть вызывает значительные трудности и в общем случае не решаема.

◇ Метод перевала состоит в том, что при интегрировании контур должен деформироваться так, чтобы он, насколько это возможно, состоял из дуг линий наибоыстрейшего спуска. На каждой из этих дуг можно применить метод Лапласа или метод стационарной фазы, соответственно.

Если контур выбран, то  $\operatorname{Re} S(z)$  должен быть таким, чтобы в точке  $z = c$  выполнялось

$$F(\lambda) \sim A\lambda^m e^{\lambda S(c)}.$$

Это значит, что, имея деформированный контур, мы не можем получить новый контур, на котором  $\operatorname{Re} S(z)$  был бы меньше, чем  $\operatorname{Re} S(c)$ .

## ЧАСТЬ II

# ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Эта часть курса посвящена изучению разделов математики, исходным понятием для которых является функционал – величина, зависящая от выбора одной или нескольких функций, которые играют для функционала роль аргументов.

Вариационное исчисление – метод отыскания экстремумов функционалов – широко используют в различных областях физики. Фактически все законы природы, формулируемые обычно на языке дифференциальных уравнений, допускают вывод из так называемых «вариационных принципов», согласно которым истинное движение физической системы можно выделить из всех допустимых тем, что оно минимизирует некоторые функционалы.

Важный класс функционалов – это линейные функционалы или обобщенные функции. Понятие обобщенной функции является обобщением классического понятия функции, задаваемой поточечно. Это обобщение, впервые введенное Дираком в его работах по квантовой механике, дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда или диполя, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность силы, приложенной к точке, и т.д.

Авторы в этом разделе курса ставят следующие основные учебные задачи. Первая – ознакомить с техникой исследования задач на экстремум функционалов на примере простейшей одномерной вариационной задачи с закрепленными концами. Вторая – продемонстрировать, как из вариационного принципа «наименьшего действия» выводятся уравнения движения механической системы с конечным числом степеней свободы в фазовом пространстве и изучить общие свойства этих уравнений, составляющие важную часть гамильтонова подхода в классической и квантовой механике. Третья – дать достаточно полное и строгое изложение теории обобщенных функций одной переменной и на основе подробно разобранных примеров выработать практические навыки в использовании основных операций над обобщенными функциями, часто встречающимися на практике. И, наконец, – рассмотреть некоторые применения этой теории к решению задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

# Элементы вариационного исчисления в классической механике

Эта часть курса посвящена изучению разделов математики, исходным понятием для которых является функционал – величина, зависящая от выбора одной или нескольких функций, которые играют для функционала роль аргументов.

Вариационное исчисление – метод отыскания экстремумов функционалов – широко используют в различных областях физики. Фактически все законы природы, формулируемые обычно на языке дифференциальных уравнений, допускают вывод из так называемых «вариационных принципов», согласно которым истинное движение физической системы можно выделить из всех допустимых тем, что оно минимизирует некоторые функционалы.

Авторы в этом разделе курса ставят следующие основные учебные задачи. Первая – ознакомить с техникой исследования задач на экстремум функционалов на примере простейшей одномерной вариационной задачи с закрепленными концами. Вторая – продемонстрировать, как из вариационного принципа «наименьшего действия» выводятся уравнения движения механической системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы и изучить общие свойства этих уравнений движения, составляющие важную часть гамильтонова подхода в классической и квантовой механике. Третья – привести решения ряда задач классической механики, результаты которых будут использованы в других курсах цикла.

## 1. Функционалы. Основные понятия и определения

### 1.1. Функционалы и близость функций

◆ Переменная величина  $v$  называется функционалом, определенным на некотором классе функций  $\mathcal{K}$ , если каждой функции  $y(x)$  из класса  $\mathcal{K}$  ставится в соответствие определенное число  $v \in \mathbb{R}$  ( $v \in \mathbb{C}$ ), а сам класс  $\mathcal{K}$  называется областью определения функционала. Для значений функционала  $v$  на элементе  $y = y(x) \in \mathcal{K}$  используется символ  $v = v[y(x)]$ .

В качестве функционального пространства  $\mathcal{K}$  в этой главе мы рассматриваем пространство  $\mathcal{C}^k([a, b])$ , состоящее из всех

функций, определенных на отрезке  $[a, b]$  и имеющих непрерывные производные до  $k$ -го порядка включительно. Здесь  $k$  – некоторое фиксированное число. При  $k = 0$  пространство  $C^0([a, b]) = C([a, b])$  есть пространство всех непрерывных на  $[a, b]$  функций.

Приведем примеры функционалов.

### 1. Функционал

$$v[y(x)] = y'(x_0), \quad y(x) \in C^1([a, b]), \quad x_0 = \frac{a+b}{2} \quad (1.1)$$

ставит в соответствие функции  $y(x)$  из класса  $C^1([a, b])$  число, равное значению производной этой функции в точке, являющейся серединой интервала. Если, например,

$$v[y(x)] = y'\left(\frac{1}{2}\right), \quad y(x) \in C^1([0, 1]), \quad x_0 = \frac{1}{2} \in [0, 1],$$

то

$$\begin{aligned} v[x^2] &= 2x \Big|_{x=1/2} = 1, \\ v[e^x] &= e^x \Big|_{x=1/2} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

и т.д.

### 2. Функционал

$$v[y(x)] = \int_1^3 \sqrt{1 + \{y'(x)\}^2} dx, \quad y(x) \in C^1([1, 3]) \quad (1.2)$$

ставит в соответствие функции  $y(x)$  длину дуги кривой  $y = y(x)$  между точками  $A(1, y(1))$  и  $B(3, y(3))$ . Например, для  $y = \operatorname{ch} x$

$$v[x] = \int_1^3 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_1^3 \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} 3 - \operatorname{sh} 1 = 2 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 2$$

и т.д.

### 3. Функционал

$$v[y(x)] = \int_0^1 y(x) dx, \quad y(x) \in C([0, 1]) \quad (1.3)$$

ставит в соответствие функции  $y(x)$ , непрерывной на отрезке  $[0, 1]$  (т.е. из класса  $C([0, 1])$ ), площадь под кривой  $y = y(x)$ . Например, для  $y = 2x$

$$v[2x] = \int_0^1 2x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

и т.д.

#### 4. Функционал

$$v[y(x)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(x) \cos x \, dx, \quad y(x) \in \mathcal{C}([0, \pi]) \quad (1.4)$$

ставит в соответствие функции  $y(x)$ , непрерывной на отрезке  $[0, \pi]$  (т.е. из класса  $\mathcal{C}([0, \pi])$ ), первый коэффициент разложения функции  $y(x)$  в ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

#### 5. Функционал

$$S = v[y(x)] = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, y(x), y'(x)) \, dx, \quad y(x) \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]) \quad (1.5)$$

называется действием, а  $F(x, y, y')$  – функцией Лагранжа (или лагранжианом). Каждой функции (траектории)  $y = y(x)$  ставится в соответствие действие  $S = v[y(x)]$ . Здесь  $F(x, y, y')$  – непрерывная функция вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно. Свойства именно этого функционала и его обобщений мы и будем изучать в данной главе.

◇ Поскольку функционалы являются «функциями», в которых роль независимого переменного играют обычные функции  $y(x) \in \mathcal{K}$ , то для исследования функционалов на экстремум нам потребуются понятия «близости» и «расстояния» между функциями – элементами пространства  $\mathcal{C}^k([a, b])$ . Для их определения мы воспользуемся понятием нормы функционального пространства  $\mathcal{C}^k([a, b])$  (см. [?]). В этом разделе, если не оговорено противное, под нормой будем понимать норму в  $\mathcal{C}^k([a, b])$ .

◆ Нормой элемента  $y(x) \in \mathcal{C}^k([a, b])$  называется неотрицательное число

$$\|y(x)\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{j=0}^k \max_{x \in [a, b]} |y^{(j)}(x)|, \quad (1.6)$$

где  $y^{(0)}(x) = y(x)$ .

◆ Две функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  из пространства  $\mathcal{C}^k[a, b]$  называются близкими в смысле близости  $k$ -го порядка, если норма их разности  $\|y_1(x) - y_2(x)\|_{\mathcal{C}^k}$  мала на отрезке  $[a, b]$ .

Другими словами, близость функций  $y(x)$  и  $y_1(x)$  в пространстве  $\mathcal{C}^k([a, b])$  с заданной точностью  $\delta > 0$  означает, что  $\|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}^k} < \delta$ , т.е. что близки не только сами функции, но и их производные до  $k$ -го порядка включительно.

**Пример 1.1.** Установить порядок близости функций

$$\begin{aligned} 1) \quad y(x) &= \frac{\sin n^2 x}{n^3 + 1}, & y_1(x) &= 0, & x &\in [0, \pi]; \\ 2) \quad y(x) &= \frac{\cos x}{n}, & y_1(x) &= 0, & x &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

**Решение.** Обе пары функций на указанных отрезках имеют непрерывные производные любого порядка. Проверим условие близости нулевого порядка для первой пары функций. Так как

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n^3 + 1} \right| < \frac{1}{n^3},$$

то из полученного неравенства следует, что с ростом  $n$  модуль разности  $|y(x) - y_1(x)|$  может стать сколь угодно малым. Это означает, что рассматриваемые функции близки в смысле близости нулевого порядка. Проверим условие близости первого порядка:

$$|y'(x) - y_1'(x)| = \left| \frac{n^2 \sin n^2 x}{n^3 + 1} \right| < \frac{1}{n}.$$

Из полученного неравенства следует, что рассматриваемые функции близки в смысле близости первого порядка. Проверим условие близости второго порядка:

$$|y''(x) - y_1''(x)| = \left| -\frac{n^4 \sin n^2 x}{n^3 + 1} \right| = \frac{n^4}{n^3 + 1} |\sin n^2 x|.$$

Так как в точках  $x = \pi/(2n^2)$  разность  $|y''(x) - y_1''(x)| = n^4/(n^3 + 1) \simeq n$  при больших  $n$  может быть сделана сколь угодно большой, то близость 2-го порядка отсутствует. Таким образом, первая пара функций близка в смысле близости первого порядка.

Близость функций нулевого порядка геометрически означает близость по ординатам, а близость первого порядка – еще и близость по направлениям касательных в соответствующих точках. Очевидно, что если кривые близки в смысле близости  $k$ -го порядка, то они тем более близки в смысле близости

меньших порядков:  $k - 1, k - 2, \dots, 0$ . Этим замечанием мы и воспользуемся при исследовании второй пары функций. Проверим условие их близости  $k$ -го порядка:

$$|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)| = \left| \frac{\cos^{(k)} x}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Из полученного неравенства следует близость этой пары функций  $k$ -го порядка и ниже, а в силу произвольности числа  $k$  — близость любого порядка.

♦ Расстоянием между функциями  $y(x)$  и  $y_1(x)$  из пространства непрерывных функций  $\mathcal{C}([a, b])$  или расстоянием нулевого порядка называется неотрицательное число

$$\rho_0(y; y_1) = \|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}([a, b])} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_1(x)|. \quad (1.7)$$

В пространствах более высоких порядков  $\mathcal{C}^k[a, b]$  вводится понятие расстояния  $k$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \rho_k(y; y_1) &= \|y(x) - y_1(x)\|_{\mathcal{C}^k([a, b])} = \\ &= \sum_{j=0}^k \max_{x \in [a, b]} |y^{(j)}(x) - y_1^{(j)}(x)| = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_1(x)| + \\ &+ \max_{x \in [a, b]} |y'(x) - y_1'(x)| + \dots + \max_{x \in [a, b]} |y^{(j)}(x) - y_1^{(j)}(x)|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Пример 1.2.** Найти

- 1) расстояние нулевого порядка между функциями  $y(x) = x$  и  $y_1(x) = x^2$  из  $\mathcal{C}([0, 1])$ ;
- 2) расстояние первого порядка между функциями  $y(x) = x$  и  $y_1(x) = \ln x$  из  $\mathcal{C}^1([1/e, e])$ .

**Решение.** 1. Согласно определению расстояния нулевого порядка (1.7), имеем

$$\rho_0(x; x^2) = \|x - x^2\|_{\mathcal{C}([0, 1])} = \max_{x \in [0, 1]} |x - x^2|.$$

Поскольку на границах отрезка, т.е. в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  разность  $|x - x^2|$  обращается в нуль, то необходимо рассмотреть ее поведение во внутренних точках (рис. 104). Для этого на отрезке  $[0, 1]$  запишем цепочку равенств

$$|x - x^2| = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$



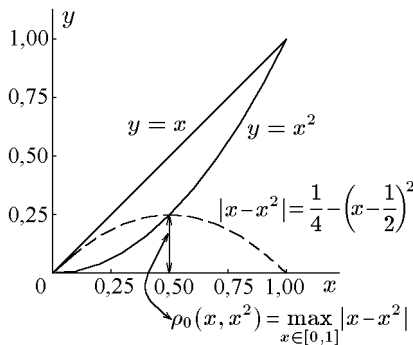


Рис. 104

из которой следует, что наибольшее значение разности  $|x - x^2| = 1/4$  имеет в точке  $x = 1/2$ . Следовательно,

$$\rho_0(x; x^2) = \|x - x^2\|_{C([0,1])} = \frac{1}{4}.$$

2. Согласно определению (1.8), для расстояния 1-го порядка запишем

$$\rho_1(x, \ln x) = \|x - \ln x\|_{C^1([1/e, e])} = \max_{x \in [1/e, e]} |x - \ln x| + \max_{x \in [1/e, e]} \left| 1 - \frac{1}{x} \right|.$$

Введем обозначения:  $\varphi_0(x) = x - \ln x$ ,  $\varphi_1 = \varphi_0' = 1 - 1/x$ . Функция  $\varphi_0(x)$  на отрезке  $[1/e, e]$  имеет один экстремум в точке  $x = 1$ . Вычислив значение модуля функции  $\varphi_0(x)$  в этой точке и на концах интервала, найдем

$$|\varphi_0(1/e)| = \left| \frac{1}{e} + 1 \right| = 1 + \frac{1}{e}, \quad |\varphi_0(1)| = |1 - \ln 1| = 1, \\ |\varphi_0(e)| = |e - 1| = e - 1.$$

Наибольшим из этих значений является  $|\varphi_0(e)| = e - 1$ . Функция  $\varphi_1 = \varphi_0' = 1 - 1/x$  на отрезке  $[1/e, e]$  является монотонно возрастающей ( $\varphi_1' = 1/x^2 > 0$ ) и экстремумов не имеет. Вычислим значения функции  $\varphi_1$  на концах отрезка:

$$|\varphi_1(1/e)| = |1 - e| = e - 1, \quad |\varphi_1(e)| = \left| 1 - \frac{1}{e} \right| = 1 - \frac{1}{e}.$$

Среди них наибольшим является  $|\varphi_1(1/e)| = e - 1$ . Таким образом, для расстояния 1-го порядка найдем

$$\rho_1(x, \ln x) = \|x - \ln x\|_{C^1([1/e, e])} = (e - 1) + (e - 1) = 2(e - 1).$$

◆ Функционал  $v[y(x)]$  называется непрерывным в точке  $y(x) = y_0(x) \in C^k$  в смысле близости  $k$ -го порядка, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $y(x)$ , удовлетворяющих условию  $\|y(x) - y_0(x)\|_{C^k} < \delta$ , справедливо

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon.$$

В противном случае функционал называется разрывным в смысле близости указанного порядка.

◇ Поскольку непрерывность функционала определяется не только его свойствами, но и функциональным пространством, на котором он задан, то один и тот же функционал может быть непрерывным на одном пространстве и разрывным на другом.

Проиллюстрируем это примером.

**Пример 1.3.** Показать, что функционал  $v[y(x)]$  (1.1) является разрывным в смысле близости нулевого порядка (т.е. в  $C([a, b])$ ) и непрерывным в смысле близости первого порядка (т.е. в  $C^1([a, b])$ ).

**Решение.** Действительно, пусть функции  $y(x)$  и  $y_0(x)$  связаны соотношением

$$y(x) = y_0(x) + \varphi(x),$$

где функция  $\varphi(x)$  такова, что  $|\varphi(x)| < \delta$  для всех  $x \in [a, b]$ , а  $\varphi'(x_0) = 1$  для  $x_0 \in [a, b]$ . Очевидно, что такие функции  $y(x)$  и  $y_0(x)$  близки в смысле нулевого порядка, поскольку

$$\begin{aligned} \rho_0(y, y_0) &= \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| \\ &= \max_{x \in [a, b]} |y_0(x) + \varphi(x) - y_0(x)| = \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| < \delta. \end{aligned}$$

Однако для таких функций

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| = |y'(x_0) + \varphi'(x_0) - y'(x_0)| = |\varphi'(x_0)| = 1,$$

а это означает, что существуют такие  $0 < \varepsilon < 1$ , для которых при любом  $\delta$  не выполняется условие

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| < \varepsilon$$

в силу полученного выше ограничения

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| = 1.$$

Таким образом, рассматриваемый функционал является разрывным в смысле близости нулевого порядка.

Рассмотрим теперь две функции  $y(x)$  и  $y_0(x)$ , такие, что

$$|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y'_0(x)| < \delta \quad (1.9)$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Очевидно, что эти функции при малых  $\delta$  близки в смысле близости 1-го порядка, поскольку

$$\rho_0(y, y_0) = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x) - y'_0(x)| < \delta.$$

Кроме того, из неравенства (1.9) следует, что

$$|y'(x) - y'_0(x)| < \delta$$

для всех  $x \in [a, b]$ , включая  $x_0$ . Но в таком случае, положив  $\varepsilon = \delta$ , будем иметь

$$|v[y(x)] - v[y_0(x)]| = |y'(x) - y'_0(x_0)| < \varepsilon = \delta.$$

Это и означает непрерывность функционала в смысле близости 1-го порядка.

Другими словами, функционал  $v[y(x)]$  (1.1) непрерывен на гладких функциях и разрывен на непрерывных.

Этот пример показывает, что из непрерывности функционала в смысле близости  $k$ -го порядка не следует непрерывность функционала в смысле близости более низких порядков  $k - 1$ ,  $k - 2$  и т.д.

◆ Функционал  $L[y(x)]$  называется линейным, если для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) и любых  $y_1(x), y_2(x) \in \mathcal{K}$  справедливо

$$\begin{aligned} L[\lambda y(x)] &= \lambda L[y(x)], \\ L[y_1(x) + y_2(x)] &= L[y_1(x)] + L[y_2(x)]. \end{aligned}$$

**Пример 1.4.** Показать, что функционал, определенный на множестве  $\mathcal{C}^1([a, b])$  формулой

$$L[y(x)] = \int_a^b \{\varphi(x)y(x) + \psi(x)y'(x)\} dx, \quad (1.10)$$

где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – непрерывные на  $[a, b]$  функции, является линейным и непрерывным в смысле близости первого порядка.

**Решение.** 1. Линейность функционала непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

2. Пусть  $\|y(x) - y_1(x)\|_{C^1} < \delta$ . Поскольку функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ , то они ограничены, т.е. существуют постоянные  $M_1$  и  $M_2$  такие, что  $|\varphi(x)| < M_1$ ,  $|\psi(x)| < M_2$  для любого  $x \in [a, b]$ . Оценим модуль разности:

$$\begin{aligned} & |v[y(x)] - v[y_1(x)]| \leq \\ & \leq \int_a^b \{|\varphi(x)| |y(x) - y_1(x)| + |\psi(x)| |y'(x) - y_1'(x)|\} dx \leq \\ & \leq (M_1 + M_2)(b - a)\delta. \end{aligned}$$

Выбрав  $\delta = \varepsilon / [(M_1 + M_2)(b - a)]$  для каждого  $\varepsilon > 0$ , получим, что функционал (1.10) непрерывен на множестве  $C^1([a, b])$ .

**Пример 1.5.** Показать линейность и непрерывность функционалов  $v[y(x)]$  (1.2)–(1.5) на пространстве  $C^1([a, b])$ .

**Решение.** Линейность указанных функционалов непосредственно вытекает из свойств определенного интеграла, а их непрерывность в  $C^1([a, b])$  – из результатов примера 1.4, поскольку они являются частными случаями функционала (1.10). Действительно, функционал (1.3) получается из (1.10) при  $\varphi(x) = 1$ ,  $\psi(x) = 0$ ; функционал (1.4) – при  $\varphi(x) = \cos x$ ,  $\psi(x) = 0$ ; функционал (1.5) – при сделанных относительно  $F(x, y(x), y'(x))$  предположениях, а функционал (1.2) является частным случаем функционала (1.5).

## 1.2. Вариация и экстремум функционала

Исследуем поведение функционала (1.5) при изменении функции  $y(x)$ . Пусть  $y(x)$  – некоторая исходная функция, а  $y_1(x)$  – некоторая другая функция, близкая (например, в смысле близости  $k$ -го порядка) к  $y(x)$ . Функцию  $y_1(x)$  мы будем называть проварьированной (изменённой, от латинского *variatio* – изменение) функций.

Существует несколько представлений проварьированной функции  $y_1(x)$ . Можно, например, ввести понятие вариации аналогично тому, как вводится понятие дифференциала в дифференциальном исчислении.

◆ Приращением, или вариацией, «аргумента»  $y(x)$  функционала  $v[y(x)]$  называется разность между функциями  $y_1(x) - y(x)$ ,  $y(x), y_1(x) \in \mathcal{K}$ .

Для обозначения используется символ

$$\delta y = y_1(x) - y(x), \quad y(x) \in \mathcal{K}. \quad (1.11)$$

Тогда проварьированную функцию можно записать как

$$y_1(x) = y(x) + \delta y(x). \quad (1.12)$$

Символ  $\delta y(x)$ , согласно определению, следует понимать как единый, причём  $(\delta y(x))' = \delta(y'(x))$ , поскольку производная разности равна разности производных:

$$(\delta y(x))' = (y_1(x) - y(x))' = y_1'(x) - y'(x) = \delta(y'(x)). \quad (1.13)$$

Другой подход состоит в том, что функция  $y(x)$  в функционале  $v[y(x)]$  рассматривается как однопараметрическое семейство

$$y = Y(x, \alpha), \quad (1.14)$$

в котором изменение параметра  $\alpha$  меняет функцию  $y(x)$ , т.е. варьирует ее. В этом случае сам функционал становится функцией от  $\alpha$ , т.е.  $v = v(\alpha)$ , и его изменение в зависимости от вариации функции  $y(x)$  определяется параметром  $\alpha$ . При этом вариацию  $\delta y(x)$ , соответствующую (1.11), можно определить как

$$\delta y(x) = \frac{\partial Y}{\partial \alpha} d\alpha, \quad (1.15)$$

и для её произвольности семейство (1.14) предполагать произвольным, а не фиксированным.

◆ Обозначим через

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)]$$

приращение функционала  $v[y(x)]$ , отвечающее приращению  $\delta y$  независимой переменной  $y(x) \in \mathcal{K}$ . Если  $y(x)$  фиксировано, то  $\Delta v$  представляет собой функционал (вообще говоря, нелинейный) от  $\delta y \in \mathcal{K}$ .

◆ Вариацией, или дифференциалом, функционала  $v[y(x)]$ , отвечающей вариации  $\delta y$ , называется главная, линейная по отношению к  $\delta y$  часть приращения функционала, т.е.

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y] - v[y(x)] = L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y) \|\delta y\|,$$

где  $L[y(x), \delta y]$  – линейный по отношению к  $\delta y$  функционал, а для функции  $\beta(y(x), \delta y)$  при выбранной  $y(x)$  справедливо соотношение

$$\lim_{\|\delta y\|_c \rightarrow 0} \beta(y(x), \delta y) = 0.$$

Этот предел соответствует оценке

$$\beta(y, \delta y)\delta y = O(\|\delta y\|^2) \text{ при } \|\delta y\| \rightarrow 0.$$

◆ Функционал  $v[y(x)]$ , имеющий вариацию при  $y = y_0(x)$ , называется дифференцируемым при  $y = y_0(x)$ . Для обозначения вариации функционала используется символ  $\delta v = L[y(x), \delta y]$ .

◇ При исследовании функционалов на экстремум их вариация играет такую же роль, как дифференциал при исследовании функций конечного числа переменных на экстремум. Как и дифференциал функции, вариация функционала, если она существует, определяется единственным образом.

**Теорема 1.1.** *Если функционал  $v[y(x)]$  дифференцируем в точке  $y = y(x) \in \mathcal{K}$ , то при любом  $\delta y$  функция  $\varphi(\alpha) = v[y(x) + \alpha\delta y]$  как функция числа  $\alpha$  (при фиксированных  $y(x)$  и  $\delta y$ ) дифференцируема по  $\alpha$  при  $\alpha = 0$ . Причем вариацию функционала можно определить равенством*

$$\delta v = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha\delta y] \right|_{\alpha=0}. \quad (1.16)$$

**Доказательство.** По определению производной

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v[y(x) + \alpha\delta y] - v[y(x)]}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L[y(x), \alpha\delta y] + \beta(y(x), \alpha\delta y)|\alpha| \|\delta y\|}{\alpha} = \\ &= L[y(x), \delta y] + \delta y \lim_{\alpha \rightarrow 0} \beta(y(x), \alpha\delta y) = L[y(x), \delta y]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности функционала  $v[y(x), \delta y]$  по  $\delta y$ . Таким образом,

$$\varphi'(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = L[y(x), \delta y] = \delta v,$$

что и требовалось доказать.

◇ Если функционал  $v[y(x)]$  всюду дифференцируем, то функция  $\varphi(\alpha) = L[y(x) + \alpha\delta y]$  дифференцируема при всех  $\alpha$  и фиксированных  $y(x)$  и  $\delta y$ .

**Пример 1.6.** Вычислить приращение  $\Delta v[y(x)]$  функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 y^2(x) dx \quad (1.17)$$

если  $y(x) = x^3$ ,  $y_1(x) = x^2$ , и доказать его дифференцируемость в каждой точке пространства  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

**Решение.** Согласно определению, имеем

$$\Delta v[y(x)] = v[x^2] - v[x^3] = \int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}.$$

Пусть теперь  $y(x)$  – произвольная функция из пространства  $\mathcal{C}([0, 1])$ . Тогда, согласно определению,

$$\begin{aligned} \Delta v[y(x)] &= v[y(x) + \delta y(x)] - v[y(x)] = \\ &= \int_0^1 [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int_0^1 y^2(x) dx = \\ &= 2 \int_0^1 y(x) \delta y(x) dx + \int_0^1 \{\delta y(x)\}^2 dx. \end{aligned}$$

Линейность первого слагаемого по  $\delta y(x)$  очевидна, поэтому именно он будет определять вариацию  $\delta v[y(x)]$  при условии, что второе слагаемое будет относительно  $\|\delta y(x)\|_{\mathcal{C}([0,1])}$  иметь порядок малости выше первого. Действительно, из неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{\delta y(x)\}^2 dx &= \int_0^1 |\delta y(x)|^2 dx \leq \\ &\leq \left\{ \max_{x \in [0,1]} |\delta y(x)| \right\}^2 \int_0^1 dx = \|\delta y(x)\|_{\mathcal{C}([0,1])}^2 \end{aligned}$$

следует, что второе слагаемое относительно  $\|\delta y(x)\|_{\mathcal{C}([0,1])}$  имеет второй порядок малости.

Таким образом, приращение функционала (1.17) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, одно из которых линейно по  $\delta y(x)$  и определяет вариацию функционала (1.17):

$$\delta v[y(x)] = 2 \int_0^1 y(x) \delta y(x) dx,$$

а второе имеет второй порядок малости по  $\|\delta y(x)\|_{C([0,1])}$ . Согласно определению, функционал (1.17) дифференцируем в точке  $y(x)$ , а в силу ее произвольности – в каждой точке пространства  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

К этому же выводу можно прийти, исходя из теоремы 1.1. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} \delta v[y(x)] &= \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 [y(x) + \alpha \delta y(x)]^2 dx \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_0^1 2[y(x) + \alpha \delta y(x)] \delta y(x) dx \Big|_{\alpha=0} = 2 \int_0^1 y(x) \delta y(x) dx, \end{aligned}$$

что совпадает с полученным выше выражением.

**Пример 1.7.** Показать, что функционал (1.5) дифференцируем в  $\mathcal{C}^1([a, b])$  и его вариация имеет вид

$$\delta v[y(x)] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'(x) \right\} dx. \quad (1.18)$$

**Решение.** Согласно определению вариации функционала, вычислим приращение  $\Delta v[y(x)]$ , отвечающее приращению  $\delta y(x)$  из  $\mathcal{C}^1([a, b])$ :

$$\Delta v[y(x)] = \int_a^b F(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (1.19)$$

Тогда по формуле Тейлора имеем

$$\begin{aligned} F(x, y + \delta y, y' + \delta y') &= F(x, y, y') + \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} (\delta y')^2 \right\} + \dots \quad (1.20) \end{aligned}$$



Подставив (1.20) в (1.19), получим

$$\begin{aligned} \Delta v[y(x)] &= \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b [F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] dx + \dots \quad (1.21) \end{aligned}$$

Первое слагаемое линейно относительно  $\delta y$ ,  $\delta y'$ . Если все вторые частные производные функции  $F(x, y, y')$  по  $y$  и  $y'$  ограничены по абсолютной величине некоторым числом  $M$ , то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b [F_{yy}(\delta y)^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'}(\delta y')^2] dx &\leq \\ &\leq \frac{M}{2} \int_a^b (\delta y + \delta y')^2 dx \leq \frac{M}{2} \|\delta y\|^2, \end{aligned}$$

где  $\|\delta y\| = \max_{x \in [a, b]} (\delta y + \delta y')$ .

Таким образом, второе слагаемое имеет второй порядок малости относительно  $\|\delta y\|$ . Аналогично оцениваются остальные слагаемые: их порядок также выше второго. Следовательно, рассматриваемый функционал дифференцируем в  $\mathcal{C}^1([a, b])$  и его вариация имеет вид (1.18).

Если  $y(x)$  в (1.19) является однопараметрическим семейством функций (1.14), то аналогичная линеаризация даёт

$$\delta v = \frac{dv}{d\alpha} d\alpha = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'(x) \right\} dx. \quad (1.22)$$

**Пример 1.8.** Найти вариации функционалов

$$\text{а) } v[y(x)] = \int_0^1 (y'(x)e^{2y(x)} - x^3 y^2(x)) dx,$$

$$\text{б) } v[y(x)] = \int_{-1}^1 (x^2 y'(x) - y^2(x)) dx.$$

**Решение.** И в том, и в другом случае подынтегральные функции непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно. Следовательно, оба функционала дифференцируемы в пространстве  $\mathcal{C}^1([a, b])$  и их вариации, согласно (1.18), равны

$$\text{а) } \delta v = \int_0^1 [2(y'e^{2y} - x^3y)\delta y + e^{2y}\delta y'] dx;$$

$$\text{б) } \delta v = \int_{-1}^1 [-2y\delta y + x^2\delta y'] dx.$$

◆ Функционал  $v[y(x)]$  достигает при  $y = y_0(x)$  максимума (минимума) на множестве  $\mathcal{C}^k([a, b])$ , если существует  $\delta > 0$  такое, что для всех  $y(x)$ , удовлетворяющих условию  $\|y(x) - y_0(x)\|_{\mathcal{C}^k} < \delta$ , справедливо неравенство

$$\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \leq 0 \quad (\Delta v \geq 0).$$

**Теорема 1.2 (необходимое условие экстремума).** Если функционал  $v[y(x)]$ , имеющий вариацию, достигает максимума или минимума при  $y = y_0(x)$ , то при  $y = y_0(x)$

$$\delta v = 0.$$

**Доказательство.** При фиксированных  $y_0(x)$  и  $\delta y$

$$v[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha)$$

– функция от  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$ , по предположению, достигает максимума или минимума. Отсюда следует  $\varphi'(0) = 0$  или

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha\delta y] \Big|_{\alpha=0} = 0,$$

т.е.  $\delta v = 0$ , что и требовалось доказать.

Этот же результат следует из формулы (1.22).

◆ В зависимости от функционального пространства, на котором мы ищем экстремум функционала, достаточные условия существования экстремума будут различными. Так, экстремум в пространстве  $\mathcal{C}([a, b])$  называется сильным экстремумом, а в пространстве  $\mathcal{C}^1([a, b])$  – слабым. Нетрудно показать, что каждый сильный экстремум является и слабым, тогда как обратное не всегда справедливо (см. пример 1.3).

◇ При доказательстве теоремы 1.2 предполагалось, что функционал  $v[y(x)]$  определен на всех  $y(x)$ , достаточно близких к  $y_0(x)$  в смысле выбранной нормы, что обеспечивает существование вариации  $\delta v$  (допускает вблизи  $y_0(x)$  линеаризацию по  $\delta y$ ). Такое предположение определяет локальный, т.е. внутренний, а не граничный характер экстремума. Далее, если не оговорено противное, мы будем придерживаться этого предположения.

◆ Функции, для которых  $\delta v = 0$ , называются экстремалиями или стационарными функциями. Значения, которые функционал принимает на стационарных функциях, называются стационарными.

## 2. Уравнение Эйлера

◇ Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Задачи, в которых требуется исследовать функционал на максимум или минимум, называются вариационными. Мы начнём со следующей задачи: исследовать на экстремум функционал

$$v[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (2.1)$$

считая, что  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ ,  $y(x) \in C^1([a, b])$ , а функция  $F(x, y, y')$  непрерывна вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно.

Такую задачу иногда называют основной задачей вариационного исчисления.

**Лемма 2.1 (основная лемма вариационного исчисления).**  
Если для любой непрерывной функции  $\eta(x)$  справедливо

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \quad (2.2)$$

где  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Пусть существует  $x_0 \in [a, b]$  такое, что  $f(x_0) \neq 0$ . Тогда, согласно свойствам непрерывной функции существуют  $x_1$  и  $x_2 \in [a, b]$  такие, что для всех  $x \in ]x_1, x_2[$  функция  $f(x)$

сохраняет знак. Выбрав в качестве  $\eta(x)$  функцию, также сохраняющую знак на  $]x_1, x_2[$  и обращающуюся в нуль вне этого интервала, получим

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\eta(x)dx > 0,$$

так как функции  $f(x)$  и  $\eta(x)$  имеют одинаковый знак на интервале  $]x_1, x_2[$ . Полученное противоречие доказывает лемму.

◊ В справедливости леммы 2.1 можно также убедиться следующим образом. В силу произвольности функции  $\eta(x)$  выберем её равной  $f(x)$ , т.е.  $\eta(x) = f(x)$ , но тогда из (2.2) имеем

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0,$$

откуда и следует  $f(x) = 0$ .

Кроме того, лемма 2.1 остаётся справедливой, если условие (2.2) выполняется для функций  $\eta(x)$ , имеющих на  $[a, b]$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно и удовлетворяющих условию  $\eta^{(k)}(a) = \eta^{(k)}(b) = 0$  для всех  $k = \overline{0, n-1}$ . Действительно, проинтегрировав (2.2) необходимое число раз по частям, получим требуемое утверждение.

**Лемма 2.2 (Дю Буа–Реймонда).** *Если для любой функции  $\eta(x)$ , непрерывной на  $[a, b]$  вместе со своей производной и такой, что  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , справедливо соотношение*

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)dx = 0 \quad (2.3)$$

где  $f(x)$  – непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f(x)$  – постоянная функция.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. что существуют две точки  $x_1$  и  $x_2$  такие, что  $f(x_1) < f(x_2)$ . Покажем, что в этом случае существует функция  $\eta(x)$ , которая удовлетворяет условиям леммы и для которой равенство (2.3) не имеет места. Пусть  $C$  – произвольное число, такое, что  $f(x_1) < C < f(x_2)$ . В силу непрерывности функции  $f(x)$  существуют такие непересекающиеся интервалы  $]\alpha, \beta[$  и  $]\alpha', \beta'[$ , что для любых  $x \in ]\alpha, \beta[$  и  $x' \in ]\alpha', \beta'[$  справедливо

$$f(x) < C < f(x').$$

В качестве функции  $\eta'(x)$  выберем любую непрерывную функцию, положительную на интервале  $]\alpha, \beta[$ , отрицательную на интервале  $]\alpha', \beta'[$  и равную нулю вне этих интервалов, и такую, что

$$\int_a^b \eta'(x) dx = \int_\alpha^\beta \eta'(x) dx + \int_{\alpha'}^{\beta'} \eta'(x) dx = 0.$$

Функцию  $\eta(x)$  можно определить формулой

$$\eta(x) = \int_a^x \eta'(x) dx. \quad (2.4)$$

Очевидно, что функция  $\eta(x)$  удовлетворяет условиям леммы. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_a^b \{f(x) - C\} \eta'(x) dx = \\ &= \int_\alpha^\beta \{f(x) - C\} \eta'(x) dx + \int_{\alpha'}^{\beta'} \{f(x) - C\} \eta'(x) dx < 0, \end{aligned}$$

поскольку оба слагаемых отрицательны. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \eta'(x) dx &= \int_a^b [f(x) - C] \eta'(x) dx + C \int_a^b \eta'(x) dx = \\ &= \int_a^b [f(x) - C] \eta'(x) dx < 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 2.3.** Если для любой функции  $\eta(x) \in C^1([a, b])$ , такой, что  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ , справедливо

$$\int_a^b [\varphi(x) \eta(x) + \psi(x) \eta'(x)] dx = 0, \quad (2.5)$$

то  $\psi(x)$  — дифференцируемая функция и  $\psi'(x) = \varphi(x)$ .

**Доказательство.** Обозначим

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(y) dy.$$

Проинтегрируем первое слагаемое (2.5) по частям, положив  $U = \eta(x)$ ,  $dV = \varphi(x)dx$ . Тогда  $dU = \eta'(x)dx$ ,  $V = \Phi(x)$  и

$$\int_a^b \varphi(x)\eta(x)dx = - \int_a^b \Phi(x)\eta'(x)dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b [-\Phi(x) + \psi(x)]\eta'(x)dx = 0.$$

В силу леммы 2.2  $\Phi(x) = \psi(x) + \text{const}$  и  $\psi'(x) = \Phi'(x) = \varphi(x)$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 2.1.** Если функционал (2.1) достигает экстремума на функции  $y(x) \in C^1([a, b])$ , то она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) называется уравнением Эйлера или Эйлера–Лагранжа.

**Доказательство.** Предположим, что экстремум достигается на функции  $y = y(x)$ . Возьмем близкую к ней функцию  $y = \bar{y}(x)$ , такую, что  $\bar{y}(a) = A$ ,  $\bar{y}(b) = B$ . Обозначим

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= y(x) + \alpha\{\bar{y}(x) - y(x)\} = y(x) + \alpha\delta y, \\ y(x, 0) &= y(x), \quad y(x, 1) = \bar{y}(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Будем рассматривать значения функционала только на функциях семейства  $y = y(x, \alpha)$ . Тогда

$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha).$$

Эта функция достигает экстремума при  $\alpha = 0$ . Следовательно,

$$\varphi'(0) = 0,$$

где

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx,$$

тогда

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b \left[ F'_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F'_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'_x(x, \alpha) \right] dx.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (y + \alpha \delta y) = \delta y, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} y'_x(x, \alpha) &= \delta y', \end{aligned}$$

получим

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} \delta y') dx.$$

Из условия  $\varphi'(0) = 0$  следует, что

$$\int_a^b \left[ F'_y|_{\alpha=0} \delta y + F'_{y'}|_{\alpha=0} \delta y' \right] dx = 0, \quad \delta y(a) = \delta y(b) = 0.$$

В силу произвольности функции  $\delta y(x)$  из леммы 2.3 следует утверждение теоремы.

◇ Доказательство теоремы можно упростить, если воспользоваться формулой (1.18). Действительно, проинтегрировав второе слагаемое по частям с учётом соотношений  $\delta y(x)|_{x=a} = \delta y(x)|_{x=b} = 0$ , а также

$$\int \delta(y'(x)) dx = \int \delta'(y(x)) dx = \delta y(x),$$

имеем

$$\delta v[y(x)] = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta(y) dx.$$

Так как на кривой  $y(x)$  функционал достигает экстремума, то

$$\delta v[y(x)] = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta(y) dx = 0,$$

откуда в силу основной леммы 2.1 и следует (2.6).

◇ Уравнение Эйлера (2.6), вообще говоря, представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' = 0. \quad (2.8)$$

Его решение зависит от двух произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ .

Если обе части уравнения (2.8) умножить на  $y'$ , а затем прибавить и вычесть слагаемые  $\partial F / \partial x$  и  $(\partial F / \partial y') y''$ , то его можно записать как

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \right] - \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y' \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y'' \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

а затем привести к виду

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left[ y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9), наряду с уравнениями (2.7) и (2.8), представляет собой еще одну форму уравнения Эйлера–Лагранжа.

◆ Функция  $y = y(x)$ , называется экстремалью функционала (2.1), если она является решением уравнения Эйлера–Лагранжа (2.6).

◇ Ранее мы определили экстремали как функции, на которых функционалы принимают стационарные значения, т.е. для которых вариация функционала обращается в нуль. Так как функции  $y(x)$  являются решениями уравнения Эйлера (его интегральными кривыми), на которых функционал  $v[y(x)]$  достигает стационарных значений, то для экстремалей возможны два определения: как функций, на которых функционал принимает стационарные значения, и как интегральных кривых уравнения Эйлера.



Такая двойственность определения позволяет сформулировать так называемое свойство инвариантности уравнения Эйлера, смысл которого заключается в следующем. Если в некотором функционале  $v[y(x)]$  перейти к новым переменным  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  и составить уравнение Эйлера для нового функционала  $v[Y(X)]$ , то его вид совпадет с видом уравнения, которое получается непосредственно из старого уравнения Эйлера после такой замены. При этом экстремали одного функционала переходят в экстремали другого отображением  $X(x, y), Y(x, y)$ .

◇ Теорема 2.1 дает только необходимое условие существования экстремума функционала (2.1). Зачастую существование экстремума следует из физической постановки задачи. В этом случае решения уравнения Эйлера–Лагранжа полностью определяют экстремум функционала.

**Пример 2.1.** Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y'(x))^2 - y^2(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1.$$

**Решение.** В нашем случае  $F(x, y, y') = (y')^2 - y^2$  и

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'', \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

*Первый способ.* Согласно (2.8), уравнение Эйлера имеет вид  $y'' + y = 0$ , а его общее решение

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Из граничных условий найдем  $C_1 = 0, C_2 = 1$ , т.е.  $y(x) = \sin x$ .

*Второй способ.* Согласно (2.9) и с учетом  $\partial F / \partial x = 0$  уравнение Эйлера допускает понижение порядка:

$$\frac{d}{dx} \left[ F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0$$

или

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = -C_1,$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная. Воспользовавшись явным видом  $F$  и  $F_{y'}$ , имеем

$$(y')^2 - y^2 - 2(y')^2 = -C_1,$$

откуда

$$(y')^2 = C_1 - y^2.$$

Разделив переменные

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = dx, \quad C_1 > 0,$$

и проинтегрировав полученное выражение, имеем

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2$$

или

$$y(x) = \sqrt{C_1} \sin(x + C_2).$$

Отсюда с учетом граничных условий, как и в первом способе, найдем

$$y(x) = \sin x.$$

◇ Рассмотренная вариационная задача имеет единственное решение. Однако её можно изменить так, чтобы решение стало неоднозначным. Для сравнения рассмотрим следующий пример.

**Пример 2.2.** Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi} [\{y'(x)\}^2 - y^2(x)] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (2.10)$$

**Решение.** Этот функционал отличается от функционала из примера 2.1 правым граничным условием, а именно: вместо отрезка  $[0, \pi/2]$  рассматривается отрезок  $[0, \pi]$ . Очевидно, что уравнение Эйлера для функционала (2.10) имеет вид, полученный в примере 2.1, с тем же общим решением

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Однако, подставив его в граничные условия (2.10), можно найти только одну произвольную постоянную  $C_1 = 0$ , тогда как постоянная  $C_2$  может быть любой. В результате уравнение экстремали имеет вид

$$y(x) = C_2 \sin x.$$

Это означает, что поставленная вариационная задача имеет не единственное решение.

Теперь рассмотрим пример вариационной задачи, не имеющей решения.

**Пример 2.3.** Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_1^2 (ax - by)y \, dx, \quad y(1) = \frac{b}{2a}, \quad y(2) = \frac{a}{b}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

**Решение.** В данном случае  $F(x, y, y') = axy - by^2$ . Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial y} = ax - 2by, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

и уравнение Эйлера не является дифференциальным уравнением:

$$ax - 2by = 0$$

или

$$y = \frac{a}{2b}x.$$

Легко проверить, что полученная экстремаль удовлетворяет второму граничному условию

$$\left. \frac{a}{2b}x \right|_{x=2} = \frac{a}{b},$$

но не удовлетворяет первому, поскольку

$$\left. \frac{a}{2b}x \right|_{x=1} = \frac{a}{2b} \neq \frac{b}{2a}.$$

Таким образом, данная вариационная задача при  $a \neq b$  решения не имеет. При  $a = b$  задача имеет единственное решение с экстремалью

$$y = \frac{x}{2},$$

на которой функционал принимает стационарное значение (экстремум)

$$v\left[\frac{x}{2}\right] = a \int_1^2 \left(x - \frac{x}{2}\right) \frac{x}{2} dx = \frac{2a}{3}.$$

### 3. Уравнения Эйлера, допускающие понижение порядка. Самосопряженная форма уравнений Эйлера

Уравнение Эйлера является дифференциальным уравнением второго порядка. Однако в некоторых частных случаях его порядок можно понизить. Рассмотрим эти случаи.

**I.** Функция  $F = F(x, y, y')$  не зависит от  $y$ , т.е.  $F = F(x, y')$ . В этом случае  $\partial F / \partial y = 0$  и, как следует из (2.6),

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1, \quad (3.1)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная. Уравнение (3.1), в отличие от (2.6), является уравнением первого порядка. Таким образом, задача о нахождении экстремалей сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка (3.1).

**Пример 3.1.** Найти кривую  $y = y(x)$ , по которой материальная точка перемещается из точки  $A(1, 1)$  в точку  $B(2, 2)$  за минимальное время, если скорость ее движения

- а) является постоянной величиной, т.е.  $v = v_0 = \text{const}$ ;
- б) пропорциональна значению абсциссы ее местоположения, т.е.  $v = \alpha x$ ,  $\alpha = \text{const}$ .

Проанализировать решение.

**Решение.** Точки  $A$  и  $B$  соединим произвольной кривой  $y = y(x)$ , на которой выделим точку  $M$  с координатами  $x, y$ , т.е.  $M(x, y)$ . Пусть  $v$  – скорость, с которой точка проходит элемент дуги  $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$  кривой  $y = y(x)$  за время  $dt$ . Тогда, согласно определению скорости, имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{dt}$$

или

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{v},$$

откуда

$$t = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{v}. \quad (3.2)$$

С учетом граничных условий задачи

$$y(1) = 1, \quad y(2) = 2 \quad (3.3)$$

получим вариационную задачу для функционала (3.2) с функцией

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} \quad (3.4)$$

и условиями (3.3) для экстремали функционала.

Далее случаи а) и б) будем рассматривать отдельно.

а) В первом случае, когда  $v = v_0$ , имеем

$$F = \frac{1}{v_0} \sqrt{1 + (y')^2}. \quad (3.5)$$

Так как функция (3.5) не зависит от  $y$  (а также от  $x$ , см. II), а зависит только от  $y'$ , то, согласно (3.1), можно записать

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{v_0} \sqrt{1 + (y')^2} \right) = \frac{y'}{v_0 \sqrt{1 + (y')^2}} = C_1$$

или

$$y' = v_0 C_1 \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, придем к уравнению вида

$$y' = \frac{C_1 v_0}{\sqrt{1 - C_1^2 v_0^2}},$$

проинтегрировав которое, найдем

$$y = \frac{C_1 v_0}{\sqrt{1 - C_1^2 v_0^2}} x + C_2. \quad (3.6)$$

Здесь  $C_2$  – произвольная постоянная. Таким образом, при движении точки с постоянной скоростью линиями, обеспечивающими минимальное время передвижения от одной точки к другой, являются прямые (3.6) (при  $C_1^2 v_0^2 = 1$  это вертикальные прямые  $x = \text{const}$ ). Произвольные постоянные легко находятся из условий (3.3):

$$1 = \frac{C_1 v_0}{\sqrt{1 - C_1^2 v_0^2}} + C_2,$$

$$2 = \frac{2C_1 v_0}{\sqrt{1 - C_1^2 v_0^2}} + C_2.$$

Отсюда

$$C_2 = 0 \quad (3.7)$$

и

$$\frac{C_1 v_0}{\sqrt{1 - C_1^2 v_0^2}} = 1. \quad (3.8)$$

Подставив (3.7), (3.8) в (3.6), окончательно найдем (рис. 105)

$$y = x. \quad (3.9)$$

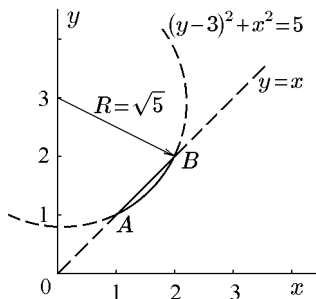


Рис. 105

б) Рассмотрим теперь второй случай, когда  $v = \alpha x$ . Тогда вместо (3.5) имеем

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\alpha x}. \quad (3.10)$$

Функция (3.10), так же как и (3.5), не зависит от  $y$ . Следовательно, и в этом случае можно воспользоваться формулой (3.1), согласно которой

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\alpha x} \right) = \frac{y'}{\alpha x \sqrt{1 + (y')^2}} = C_1$$

или

$$y' = C_1 \alpha x \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, придем к уравнению вида

$$y' = \frac{C_1 \alpha x}{\sqrt{1 - (C_1 \alpha x)^2}},$$

проинтегрировав которое, найдем

$$y = \int \frac{C_1 \alpha x dx}{\sqrt{1 - (C_1 \alpha x)^2}} = -\frac{\sqrt{1 - (C_1 \alpha x)^2}}{C_1 \alpha} + C_2$$

или

$$(y - C_2)^2 + x^2 = \frac{1}{(C_1 \alpha)^2}, \quad (3.11)$$

где  $C_2$  – произвольная постоянная.

Таким образом, при движении точки со скоростью, изменяющейся по закону  $v = \alpha x$ , линиями, обеспечивающими минимальное время передвижения от одной точки до другой, являются окружности (3.11). Произвольные постоянные в (3.11) легко находятся из условий (3.3):

$$(1 - C_2)^2 + 1 = \frac{1}{(C_1\alpha)^2}, \quad (3.12)$$

$$(2 - C_2)^2 + 4 = \frac{1}{(C_1\alpha)^2}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) с учетом (3.12) можно записать как

$$(2 - C_2)^2 + 4 = (1 - C_2)^2 + 1,$$

откуда

$$C_2 = 3. \quad (3.14)$$

Но тогда, согласно (3.12),

$$\frac{1}{(C_1\alpha)^2} = (1 - C_2)^2 + 1 = 5. \quad (3.15)$$

Подставив (3.14), (3.15) в (3.11), окончательно найдем (см. рис. 105)

$$(y - 3)^2 + x^2 = 5.$$

Проанализируем полученные результаты. Итак, при движении материальной точки с постоянной скоростью экстремалими функционала (3.2), т.е. линиями наибо́льшего прохода расстояния между двумя точками, являются прямые  $y = x$  (см. рис. 105) с временем прохождения

$$t = \frac{1}{v_0} \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{v_0}. \quad (3.16)$$

Подчеркнем, что если время прохождения зависит от значения постоянной  $v_0$ , то уравнение экстремали – прямой  $y = x$  – от него не зависит. Результат, вообще говоря, очевидный, поскольку кратчайшим расстоянием между точками  $A(1, 1)$  и  $B(2, 2)$  является отрезок длиной  $\sqrt{2}$ , время прохождения которого определяется как  $\sqrt{2}/v_0$ .

Во втором случае экстремальными функционала (3.3) являются окружности, а именно:  $(y - 3)^2 + x^3 = 5$ . Время перемещения из точки  $A(1, 1)$  в точку  $B(2, 2)$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} t &= \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + x^2/(5 - x^2)}}{x} dx = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{\alpha} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{5 - x^2}} = \frac{1}{\alpha} \int_{1/2}^2 \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1/5}} = \\ &= \frac{1}{\alpha} \ln \frac{2(\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5} + 1} \approx \frac{0,96}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подчеркнем, что, как и в предыдущем случае, время прохождения зависит от коэффициента  $\alpha$ , тогда как уравнение, определяющее экстремали (окружности  $(y - 3)^2 + x^3 = 5$ ), не содержит этого параметра. В этом случае результат не столь очевиден, хотя и объясним. Для того чтобы время прохождения было наименьшим, частица «стремится» сначала переместиться в точки с наибольшими значениями координаты  $x$ , а затем, набрав скорость, перемещается непосредственно в точку  $B$ . Для сравнения с (3.17) интересно вычислить время прохождения по прямой  $y = x$ :

$$t = \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\alpha x} dx = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \ln 2 \approx \frac{0,98}{\alpha}. \quad (3.18)$$

Из сравнения (3.17) и (3.18) можно сделать вывод, что время прохождения по прямой во втором случае, естественно, больше, чем по окружности.

**II.** Функция  $F = F(x, y, y')$  не зависит от  $x$ , т.е.  $F = F(y, y')$ . В этом случае  $\partial F / \partial x = 0$  и, как следует из (2.9),

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

откуда

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1, \quad (3.19)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная.



Таким образом, как и в предыдущем случае, порядок уравнения Эйлера понижается на единицу и решение вариационной задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка (3.19).

**Пример 3.2 (задача о брахистохроне).** Материальная точка массой  $m$  под действием силы тяжести скатывается (не падает отвесно!) без трения с нулевой начальной скоростью из одной точки в другую по некоторой линии  $L$ . Найти уравнение линии  $L$ , по которой тело скатывается за минимальное время.

**Решение.** Выберем систему координат  $xOy$  так, чтобы сила тяжести действовала в обратном оси  $Oy$  направлении, а начальная точка  $A$  находилась на оси  $Oy$  на высоте  $h$  (рис. 106). При таком выборе координаты начальной точки  $A$  есть  $x = 0$ ,  $y = h$ , т.е.  $A(0, h)$ . Пусть координаты конечной точки, которую мы обозначим через  $B$ , будут  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ , т.е.  $B(x_1, y_1)$ . Пусть точки  $A$  и  $B$  соединяет искомая линия  $L$ , уравнение которой мы запишем как  $y = y(x)$ . Очевидно, что эта функция  $y(x)$  должна удовлетворять условиям

$$y(0) = h, \quad y(x_1) = y_1. \quad (3.20)$$

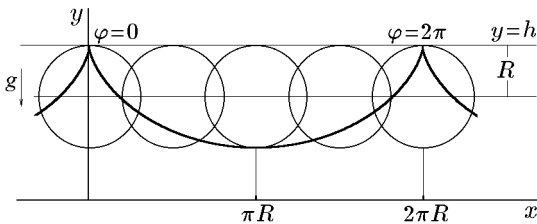


Рис. 106

Далее задача разбивается на два этапа: во-первых, необходимо записать аналитическое выражение для времени  $t$ , за которое тело скатится из точки  $A$  в точку  $B$ ; во-вторых, — исследовать полученное выражение на экстремум и в результате получить искомое уравнение линии  $L$ , которую называют линией наискорейшего спуска, или брахистохроной.

Перейдем к первой части задачи. Для этого на кривой  $L$  выделим точку  $M$  с координатами  $x, y$ , т.е.  $M(x, y)$ . Пусть  $v$  — скорость, с которой точка проходит элемент дуги  $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$  кривой  $y = y(x)$  за время  $dt$ . Тогда, согласно определению скорости, имеем

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{dt}$$

или

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{v}.$$

Так как точке  $A$  соответствуют значения  $t = 0$  и  $x = 0$ , а точке  $B$  – значения  $t$ , равное времени спуска, и  $x = x_1$ , то интегрирование полученного выражения дает

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} dx \quad (3.21)$$

(можно было сразу воспользоваться формулой (3.2) из предыдущего примера). Чтобы найти зависимость скорости от местоположения тела, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - y).$$

Здесь  $g$  – ускорение свободного падения, а  $m$  и  $y$  – масса и ордината материальной точки  $M$  соответственно (см. рис. 106). Тогда

$$v = \sqrt{2g(h - y)}, \quad (3.22)$$

и выражение (3.21) примет вид

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(h - y)}} dx. \quad (3.23)$$

Таким образом, время наискорейшего спуска определяется функционалом (3.23), и, следовательно, вторая часть задачи сводится к нахождению экстремали функционала (3.23), удовлетворяющей условиям (3.20).

Так как подынтегральная функция в (3.23)

$$F = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(h - y)}}$$

не зависит от  $x$ , то, согласно (3.19), можно записать

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1.$$

С учетом

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2g(h-y)\{1+(y')^2\}}}$$

запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2g(h-y)\{1+(y')^2\}}} = C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1-2gC_1^2(h-y)}{2gC_1^2(h-y)}}. \quad (3.24)$$

Проведём в (3.24) замену переменных

$$2gC_1^2(h-y) = \frac{1-\cos\varphi}{2}. \quad (3.25)$$

Тогда

$$dy = -\frac{\sin\varphi}{4gC_1^2}d\varphi,$$

и выражение (3.24) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{4gC_1^2} \frac{d\varphi}{dx} &= \sqrt{\frac{1-(1-\cos\varphi)/2}{(1-\cos\varphi)/2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \end{aligned}$$

или

$$dx = \frac{1}{4gC_1^2}(1-\cos\varphi)d\varphi.$$

Проинтегрировав последнее соотношение, получим

$$x = \frac{1}{4gC_1^2}(\varphi - \sin\varphi) + C_2, \quad (3.26)$$

где  $C_2$  – произвольная постоянная. Если ввести обозначение

$$R = \frac{1}{4gC_1^2},$$

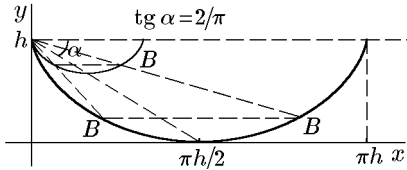


Рис. 107

то из (3.25), (3.26) придем к уравнениям экстремалей функционала (3.21) в параметрической форме

$$\begin{aligned} y &= h - R(1 - \cos \varphi), \\ x &= R(\varphi - \sin \varphi) + C_2, \end{aligned} \quad (3.27)$$

определяющим циклоиду, т.е. линию, которую описывает точка окружности радиуса  $R$ , катящаяся снизу по прямой  $y = h$  (рис. 106). Так как циклоида должна проходить через точку  $A(0, h)$ , то эта точка должна быть точкой возврата, и можно принять  $C_2 = 0$ . Тогда уравнения циклоиды (3.27) примут вид

$$\begin{aligned} y &= h - R(1 - \cos \varphi), \\ x &= R(\varphi - \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3.28)$$

При таком выборе значение параметра  $\varphi = 0$  соответствует начальной точке  $A(0, h)$ , а  $\varphi = 2\pi$  — следующей точке возврата (см. рис. 106). Значение  $R$ , которое остается пока произвольным, должно быть выбрано так, чтобы удовлетворялось второе граничное условие (3.20), т.е. чтобы циклоида проходила через точку  $B(x_1, y_1)$ . Для определения радиуса  $R$ , во-первых, можно получить трансцендентное уравнение, если значения  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  подставить в уравнение (3.28) и исключить параметр  $\varphi$ . Во-вторых, искомое значение  $R$  можно найти по правилу подобия, если известно изображение одной из арок циклоиды с заданным значением  $R$ . Действительно, рассмотрим одну арку циклоиды с радиусом  $R = h/2$  (рис. 107).

Как следует из рис. 107, существуют два типа граничных условий, определяемых значениями  $x_1$  и  $y_1$ . Для первого типа, когда  $x_1 < \pi h/2$ , траектории движения лежат выше конечной точки  $B$ , а для второго типа, когда  $x_1 > \pi h/2$ , часть траектории расположена ниже конечной точки  $B$ . Такой результат удивителен только на первый взгляд, но, как и в предыдущем примере, легко объясним. Действительно, когда предстоит пройти большой путь по горизонтали, телу «выгодно» опуститься пониже, набрать скорость, а уже в конце пути подняться к месту назначения — точке  $B$ .

Из рис. 107 видно, что середины всех арок циклоид с точкой возврата  $A(0, h)$  и произвольным радиусом  $R$  находятся на прямой  $y = h - 2x/\pi$ . В силу этого значения радиуса  $R$  циклоиды (3.28), на которой лежит конечная точка  $B(x_1, y_1)$ , можно определить через положение соответствующей ей точки, лежащей на циклоиде радиуса  $R = h/2$ , что непосредственно следует из рис. 107. Они лежат на одной прямой, проходящей через точку  $A(0, h)$ .

Из физических соображений очевидно, что экстремум функционала (3.23) является минимумом. Это означает, что время прохождения тела от одной точки циклоиды до другой действительно является наименьшим. Для сравнения найдем времена прохождения тела из точки  $A(0, h)$  в точку  $B(\pi h/2, 0)$  по циклоиде (3.28) и прямой  $y = h - 2x/\pi$ , обозначив их  $t_{\text{ц}}$  и  $t_{\text{пр}}$ , соответственно:

$$\begin{aligned} t_{\text{ц}} &= \int_0^{\pi h/2} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(h-y)}} dx = \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1 + [\sin \varphi / (1 - \cos \varphi)]^2}{2g[h - h(a + \cos \varphi)/2]}} \frac{h}{2} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{g}} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2 - 2 \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}} d\varphi = \pi \sqrt{\frac{h}{2g}}; \\ t_{\text{пр}} &= \int_0^{\pi h/2} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2g(h-y)}} dx = \\ &= \int_0^{\pi h/2} \sqrt{\frac{1 + 4/\pi^2}{2g2x/\pi}} dx = \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{4g\pi}} \int_0^{\pi h/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2 + 4}{4g\pi}} 2\sqrt{x} \Big|_0^{\pi h/2} = \pi \sqrt{\frac{h}{2g} \left[ 1 + \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

В результате приходим к соотношению

$$t_{\text{пр}} = t_{\text{ц}} \sqrt{1 + \left( \frac{2}{\pi} \right)^2},$$

из которого следует, что

$$t_{\text{пр}} > t_{\text{ц}}.$$

Кроме того, время  $t_{\text{ц}}$  можно сравнить со временем отвесного падения тела  $t_{\text{от}}$  с высоты  $h$ , которое можно найти как

$$t_{\text{от}} = - \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Здесь учтено, что при отвесном падении

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = |dy| = -dy$$

и начальному положению соответствует  $y = h$ , а конечному  $y = 0$ . Этот же результат можно было получить из известной формулы для равноускоренного движения  $h = gt^2/2$ , откуда  $t_{\text{от}} = \sqrt{2h/g}$  и, соответственно,

$$t_{\text{ц}} = \frac{\pi}{2} t_{\text{от}}.$$

**Пример 3.3 (плоская модель Пуанкаре геометрии Лобачевского).** Найти экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{a_x}^{b_x} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx, \quad (3.29)$$

проходящие через точки  $A(a_x, a_y)$  и  $B(b_x, b_y)$  и расположенные в верхней полуплоскости  $xOy$ . Проанализировать полученное решение.

**Решение.** Пусть  $y = y(x)$  – уравнение искомой экстремали. Тогда должны выполняться следующие условия:

$$y(a_x) = a_y, \quad y(b_x) = b_y. \quad (3.30)$$

Поскольку подынтегральное выражение функционала (3.29)

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} \quad (3.31)$$

не зависит от  $x$ , то, согласно (3.19), можно записать

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1,$$

что с учетом

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1+(y')^2}}$$

дает

$$\frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-(C_1 y)^2}}{C_1 y},$$

интегрирование которого дает

$$(x - C_2)^2 + y^2 = R^2, \quad (3.32)$$

где  $R^2 = 1/C_1^2$ , а  $C_2$  – произвольная постоянная. Произвольные постоянные  $R$  и  $C_2$  легко находятся из условий (3.30):

$$\begin{aligned} (a_x - C_2)^2 + a_y^2 &= R^2; \\ (b_x - C_2)^2 + b_y^2 &= R^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Уравнение (3.32) с учетом (3.33) можно записать как

$$(a_x - C_2)^2 + a_y^2 = (b_x - C_2)^2 + b_y^2,$$

откуда

$$C_2 = \frac{(b_x^2 + b_y^2) - (a_x^2 + a_y^2)}{2(b_x - a_x)} = \frac{1}{2} \left[ b_x + a_x + \frac{b_y^2 - a_y^2}{b_x - a_x} \right]. \quad (3.34)$$

Но тогда, согласно (3.33), получим

$$R^2 = \frac{(a_y^2 - b_y^2)^2 + 2(a_y^2 + b_y^2)(b_x - a_x)^2 + (b_x - a_x)^4}{4(b_x - a_x)^2}. \quad (3.35)$$

Итак, экстремали функционала (3.29) образуют семейство окружностей с центром на оси  $Ox$  (3.32). Условия (3.30) выделяют из этого множества единственную окружность с центром в  $x = C_2$  и радиусом  $R$ , которые определяются выражениями (3.34) и (3.35), поскольку через любые две точки верхней полуокружности проходит одна и только одна окружность с центром на оси  $Ox$ . Например, через точки  $A(1, 1)$  и  $B(1, 3)$ , согласно (3.34), (3.35), проходит единственная окружность

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2,$$

а если ограничиться верхней полуплоскостью  $y > 0$ , то единственная полуокружность (рис. 108)

$$y = \sqrt{2 - (x - 2)^2}. \quad (3.36)$$

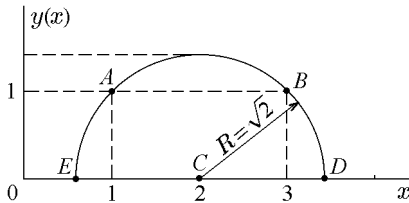


Рис. 108

Кроме того, экстремали (3.32) обладают тем свойством, что на них функционал (3.29) приобретает стационарные значения: ограниченные, если точки  $A$  и  $B$  лежат в верхней полуплоскости, и неограниченные, если хотя бы одна из них принадлежит оси  $Ox$ . В этом легко убедиться на примере полуокружности (3.36), вычислив стационарные значения функционала (3.29) на кривой, соединяющей точки  $A(1, 1)$  и  $B(1, 3)$ , точки  $A(1, 1)$  и  $D(2 + \sqrt{2}, 0)$ , а также точки  $A(1, 1)$  и  $E(2 - \sqrt{2}, 0)$  (см. рис. 108). Действительно,

$$\begin{aligned} v \left[ \sqrt{2 - (x - 2)^2} \right]_{AB} &= \int_1^3 \frac{1}{y} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \\ &= \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2 - (x - 2)^2}} \sqrt{1 + \frac{(x - 2)^2}{2 - (x - 2)^2}} dx = \sqrt{2} \int_1^3 \frac{d(x - 2)}{2 - (x - 2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 2 + \sqrt{2}}{x - 2 - \sqrt{2}} \right| \Big|_1^3 = \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 1,76; \quad (3.37) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 v \left[ \sqrt{2 - (x - 2)^2} \right]_{AD} &= \int_1^{2+\sqrt{2}} \frac{1}{y} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \\
 &= \sqrt{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{2+\sqrt{2}-\varepsilon} \frac{d(x-2)}{2 - (x-2)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \frac{2\sqrt{2}-\varepsilon}{\varepsilon} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right] = +\infty; \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v \left[ \sqrt{2 - (x - 2)^2} \right]_{EA} &= \int_{2-\sqrt{2}}^1 \frac{1}{y} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \\
 &= \sqrt{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{2-\sqrt{2}-\varepsilon}^1 \frac{d(x-2)}{2 - (x-2)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \ln \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}-\varepsilon} \right] = +\infty. \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Если функционал (3.29) интерпретировать как расстояние между точками  $A$  и  $B$  и учесть, что экстремали-полуокружности обеспечивают минимальное его значение, то дуги полуокружностей между точками  $A$  и  $B$  можно рассматривать как «отрезки»  $AB$ , а сами полуокружности – как «прямые», на которых эти «отрезки» расположены. При таком рассмотрении точки, лежащие на оси  $Ox$ , можно считать бесконечно удаленными, поскольку им соответствуют дуги бесконечной длины (3.38), (3.39). Если к этому добавить возможность измерения углов между пересекающимися «прямыми» как углов между касательными к полуокружностям в точке их пересечения, то можно получить геометрию, в которой сохраняются все положения обычной (евклидовой) геометрии за исключением пятого постулата о параллельных прямых, который, оказывается, можно заменить противоположным.

Действительно, будем считать параллельными две «прямые» – полуокружности, имеющие общую бесконечно удаленную точку. Такой подход оправдан, поскольку в этой точке их касательные параллельны. Тогда через некоторую точку  $M$ , не лежащую на «прямой»-полуокружности  $l$ , можно провести не одну, как этого требует евклидова геометрия, а две

«прямые»-полуокружности  $l_1$  и  $l_2$ , параллельные «прямой»  $l$ , как это показано на рис 109.

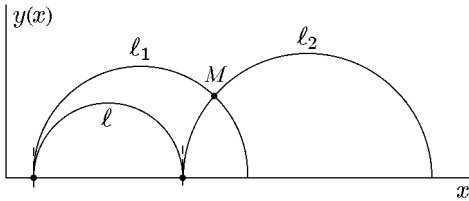


Рис. 109

В этом случае выполняется постулат о параллельных прямых, принятый в геометрии Лобачевского: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две параллельные прямые».

Таким образом, экстремали функционала (3.29) в интерпретации Пуанкаре реализуют одно из представлений геометрии Лобачевского на плоскости.

**Пример 3.4.** Показать, что экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_a^b f(y) \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

определяются квадратурами

$$x - C_2 = C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{f^2(y) - C_1^2}}.$$

**Решение.** Поскольку подынтегральное выражение функционала

$$F = f(y) \sqrt{1 + (y')^2}$$

не зависит от  $x$ , то, согласно (3.19), можно записать

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1,$$

что с учетом

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{f(y)y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

дает

$$f(y)\sqrt{1+(y')^2} - \frac{f(y)(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{f(y)}{\sqrt{1+(y')^2}} = C_1.$$

Разрешив это уравнение относительно производной, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{f^2(y) - C_1^2}}{C_1},$$

интегрирование которого и приведет к квадратурам

$$x - C_2 = C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{f^2(y) - C_1^2}}.$$

**III.** Функция  $F = F(x, y, y')$  не зависит от  $y'$ , т.е.  $F = F(x, y)$ .

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид  $\partial F/\partial y = 0$  и не является дифференциальным уравнением (оно не содержит  $y'(x)$ ), неявно определяющим решение  $y = y(x)$ , если последнее существует. В силу этого решение не содержит произвольных постоянных и в общем случае не удовлетворяет граничным условиям  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$ . Лишь в тех случаях, когда линия  $y = y(x)$  проходит через граничные точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , её можно рассматривать как экстремаль, на которой функционал принимает стационарные значения. В этих случаях пары  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , входящие в граничные условия, должны быть численными решениями функционального уравнения  $F_{y'} = 0$  или  $y = y(x)$  (см. пример 2.3).

**Пример 3.5.** Поставить граничные условия, при которых существуют экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_1^e (xe^y - ye^x) dx.$$

**Решение.** Здесь  $F = xe^y - ye^x$  не зависит от  $y'$ , и уравнение Эйлера записывается в виде

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - e^x = 0,$$

откуда для  $x > 0$

$$y = x - \ln x.$$

Кроме того, пределы интегрирования в рассматриваемом функционале диктуют следующие граничные условия:

$$y(1) = a, \quad y(e) = b.$$

Подставив решение уравнения Эйлера в эти условия, получим

$$\begin{aligned} (x - \ln x)|_{x=1} &= 1 = a, \\ (x - \ln x)|_{x=e} &= e - 1 = b. \end{aligned}$$

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$y(1) = 1, \quad y(e) = e - 1.$$

Подчеркнем еще раз, что при других граничных условиях вариационная задача решения не имеет.

**Пример 3.6.** Выяснить, существует ли решение вариационной задачи

$$v[y(x)] = \int_1^2 \left( \frac{1}{3}y^3 + ye^x \right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

**Решение.** Здесь  $F = y^3/3 + ye^x$  не зависит от  $y'$ , и уравнение Эйлера записывается в виде

$$y^2 + e^x = 0.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решений в области действительных чисел. Следовательно, ни при заданных, ни при каких других граничных условиях вариационная задача решений не имеет.

**IV.** Функция  $F = F(x, y, y')$  зависит только от  $y'$ , т.е.  $F = F(y')$ .

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$y'' F_{y'y'} = 0,$$

и его общим решением является семейство прямых

$$y = C_1 x + C_2$$

с произвольными коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$ .

В рассматриваемом случае постоянные  $C_1$  и  $C_2$  можно определить из граничных условий  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$ . Тогда

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (3.40)$$

Это означает, что экстремалими функционала являются прямые, проходящие через точки  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ .

**Пример 3.7.** Найти линии наименьшей длины, соединяющие заданные точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (см. пример 2.1).

**Решение.** Как известно из курса математического анализа, длина  $\ell$  дуги кривой  $y = y(x)$ , соединяющей две точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , определяется интегралом

$$\ell = v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3.41)$$

Таким образом, математическая формулировка условия примера сводится к вариационной задаче на экстремум функционала (3.41) с граничными условиями

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Решение такой задачи можно представить в виде (3.40).

Заметим, что этой же формулой (3.40) определяются и экстремали функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \quad (3.42)$$

Заметим, что функционал (3.42), в отличие от функционала (3.41), на экстремалиях (3.40) достигает не минимального, а максимального значения.

**V.** Функция  $F = F(x, y, y')$  зависит от  $y'$  линейно, т.е.

$$F(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \quad (3.43)$$

Это уравнение, как и в случае III, не является дифференциальным (оно не содержит  $y'$ ). В силу этого его решение, если оно существует, не содержит произвольных постоянных и в общем случае не удовлетворяет граничным условиям. Лишь в тех случаях, когда линия  $y = y(x)$ , определяемая неявно уравнением (3.43), проходит через граничные точки, ее можно рассматривать как экстремаль, на которой функционал достигает стационарного значения.

Кроме того, в тех случаях, когда уравнение (3.43) переходит в тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0, \quad (3.44)$$

выражение

$$\begin{aligned} F(x, y, y')dx &= [P(x, y) + Q(x, y)y']dx = \\ &= P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dU(x, y) \end{aligned}$$

становится полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ . Пусть  $D$  – некоторая область плоскости  $xOy$ , в которой функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  определены и удовлетворяют тождеству (3.44). Тогда интеграл

$$\begin{aligned} v[y(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx = \int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = \\ &= \int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} dU(x, y) = U(x, y) \Big|_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки  $A$  и  $B$  из области  $D$ . Другими словами, на любой кривой из  $D$ , проходящей через эти точки, функционал  $v[y(x)]$  имеет одно и то же значение. Это означает, что вариационная задача как задача на экстремум теряет смысл.

**Пример 3.8.** Для функционала

$$v[y(x)] = \int_1^e (xe^y + e^x y')dx \quad (3.45)$$

найти граничные условия, при которых существует решение вариационной задачи.

**Решение.** Здесь функция  $F = xe^y + e^x y'$  линейно зависит от  $y'$ . Тогда  $P(x, y) = xe^y$ ,  $Q(x, y) = e^x$ , и уравнение Эйлера, согласно (3.43), имеет вид

$$xe^y - e^x = 0, \quad (3.46)$$

откуда для  $x > 0$

$$y = x - \ln x.$$

Кроме того, пределам интегрирования в функционале (3.46) соответствуют граничные условия:

$$y(1) = a, \quad y(e) = b.$$

Подстановка (3.46) в эти условия дает

$$\begin{aligned} (x - \ln x)|_{x=1} &= 1 = a, \\ (x - \ln x)|_{x=e} &= e - 1 = b. \end{aligned}$$

Следовательно, искомые граничные условия имеют вид

$$y(1) = 1, \quad y(e) = e - 1.$$

Подчеркнем еще раз, что при других граничных условиях вариационная задача решений не имеет (см. пример 3.6).

**Пример 3.9.** Существует ли решение вариационной задачи

$$v[y(x)] = \int_1^2 \left( \frac{y^3}{3} + e^{-x} y' \right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

**Решение.** Здесь функция  $F = y^3/3 + e^{-x} y'$ , как и в предыдущем примере, линейно зависит от  $y'$ . Тогда  $P(x, y) = y^3/3$ ,  $Q(x, y) = e^{-x}$ , и уравнение Эйлера, согласно (3.43), имеет вид

$$y^2 + e^{-x} = 0.$$

Очевидно, что это уравнение не имеет решений для вещественных  $x$ . Следовательно, ни при заданных, ни при любых других граничных условиях вариационная задача решений не имеет.

**Пример 3.10.** Исследовать функционал

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} [y^2(1 + e^x) + 2y(x + e^x)y'] dx, \quad (3.47)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2,$$

на экстремум.

**Решение.** Подынтегральная функция линейно зависит от  $y'$ , причем  $P(x, y) = y^2(1 + e^x)$ ,  $Q(x, y) = 2y(x + e^x)$ . Вычислив

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y(1 + e^x), \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y(1 + e^x),$$

приходим к тождеству

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0,$$

справедливому на всей плоскости  $xOy$ . Это означает, что подынтегральная функция является полным дифференциалом некоторой функции  $U(x, y)$ . Легко убедиться (или найти с помощью известных методов), что этой функцией является

$$U(x, y) = y^2(x + e^x) + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Но тогда интеграл (3.47) не зависит от пути интегрирования и имеет постоянное значение

$$\begin{aligned} v[y(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} [y^2(1 + e^x) + 2y(x + e^x)y'] dx = \\ &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} d[y^2(x + e^x) + C] = \\ &= [y^2(x + e^x) + C] \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = y_2^2(x_2 + e^{x_2}) - y_1^2(x_1 + e^{x_1}) \end{aligned}$$

на любой кривой, проходящей через точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ . Вариационная задача на экстремум теряет смысл.



VI. Функция  $F$  зависит от  $y'$  квадратично:

$$F(x, y, y') = \varphi(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y \quad (3.48)$$

и определяет так называемый квадратичный функционал

$$v[y(x)] = \int_a^b [\varphi(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y] dx, \quad (3.49)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

(заметим, что добавление к (3.48) смешанного слагаемого  $2g(x)yy'$  не увеличивает общность рассмотрения, что подтверждается примером 3.13), где функции  $\varphi(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ .

Уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

для функционала (3.49) с учетом

$$F_y = 2g(x)y + 2f(x), \quad F_{y'} = 2\varphi(x)y'$$

можно записать как

$$2q(x)y + 2f(x) - \{2\varphi(x)y'\} = 0$$

или

$$\{\varphi(x)y'\}' - q(x)y = f(x). \quad (3.50)$$

Из (3.50) следует, что уравнение Эйлера в рассматриваемом случае представляет собой линейное дифференциальное уравнение в самосопряженной форме с граничными условиями (3.49).

Таким образом, вариационная задача (3.49) порождает одну из наиболее часто встречающихся в приложениях краевую задачу

$$\{\varphi(x)y'\}' - q(x)y = f(x); \quad (3.51)$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,$$

которая обобщает простейшие геометрические и физические задачи, рассмотренные выше.

Таким образом, вариационное исчисление позволяет единообразно описать широкий круг физических и прикладных задач.

Согласно этому подходу, или, как его еще называют, вариационному принципу, для различных задач, описывающих некоторые процессы или состояния систем, из всех возможных решений, т.е. процессов или состояний, реализуются только те, которые придают некоторому характерному для этого класса задач функционалу стационарные значения. Существуют две основные группы вариационных принципов, которые мы рассмотрим ниже. Здесь же мы ограничимся их краткой характеристикой.

Первая группа задач, которую можно условно назвать естественно-научной, возникла еще в 17-м в. в классических разделах физики: геометрической оптике (принцип Ферма), классической механике (принцип Гамильтона) и т.д., а позднее появилась в разделах, являющихся их развитием: теория поля и др.

Вторая группа задач возникла позднее и наибольшее развитие получила в последние десятилетия. Она связана с задачами теории регулирования, математической экономики и др. В этих случаях вариационные задачи, как правило, характеризуются дополнительными условиями – так называемыми связями, использование которых и позволяет вырабатывать линию поведения (стратегию), обеспечивающую оптимальное управление (максимальную выгоду, минимальные затраты и т.п.). Следует заметить, что при решении задач этой группы условие стационарности функционала зачастую отступает на второй план, что приводит к необходимости применять методы решений, отличные от классических методов вариационно-го исчисления.

**Пример 3.11.** Найти экстремали квадратичного функционала

$$v[y(x)] = \int_0^l [(y')^2 - \omega^2 y^2] dx, \quad (3.52)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l,$$

где  $\omega^2$  – некоторая постоянная.

**Решение.** Экстремали функционала (3.52), согласно (3.51), определяются краевой задачей

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \quad (3.53)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l,$$

решение которой имеет вид

$$y(x) = y_0 \cos \omega x + [y_l - y_0 \cos \omega l] \frac{\sin \omega x}{\sin \omega l}. \quad (3.54)$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений, характер решения краевой задачи существенно зависит от решений вспомогательной задачи – задачи Штурма–Лиувилля. (Решение (3.54) наглядно подтверждает это, поскольку при  $\omega = \pi n/l$ ,  $l = \overline{1, \infty}$ , множитель  $\sin \omega l$ , стоящий в знаменателе, обращается в нуль:  $\sin \pi n l/l = \sin \pi n = 0$ .)

Выясним, как связана вариационная задача с соответствующей задачей Штурма–Лиувилля. Рассмотрим квадратичный функционал (3.49), выбрав для простоты (не снижая, однако, общности рассмотрения)  $a = 0$ ,  $b = l$ , т.е.

$$v[y(x)] = \int_0^l [\varphi(x)(y')^2 + q(x)y^2] dx, \quad \varphi(x) > 0, \quad x \in [0, l], \quad (3.55)$$

с однородными граничными условиями

$$y(0) = y_l(0) = 0 \quad (3.56)$$

при дополнительном условии

$$\int_0^l \rho y^2(x) dx = 1, \quad \rho(x) > 0, \quad x \in [0, l], \quad \rho(x) \in C^1. \quad (3.57)$$

В этом случае о вариационной задаче (3.55), (3.56) говорят как о задаче на условный экстремум с интегральной связью (3.57).

Пусть на функции  $y = y(x)$ , удовлетворяющей граничному условию (3.56), функционал (3.55) достигает экстремального значения. Тогда функция  $y = y(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\tilde{F} = F - \lambda \rho y^2 = \varphi(x)(y')^2 + [q(x) - \lambda \rho] y^2, \quad (3.58)$$

и на ней реализуется условный экстремум. Здесь  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Согласно (3.50), имеем уравнение

$$\{\varphi(x)y'\}' - q(x)y + \lambda \rho y = 0. \quad (3.59)$$

Именно это уравнение совместно с граничными условиями (3.56) и составляет в теории дифференциальных уравнений задачу Штурма–Лиувилля или задачу на собственные значения  $\lambda$  и собственные функции  $y(x)$ .

Как известно из теории дифференциальных уравнений, решения задачи Штурма–Лиувилля обладают рядом замечательных свойств, которые, вообще говоря, не связаны непосредственно с процедурой нахождения ее решения. В вариационном исчислении свойства собственных значений и собственных функций являются неотъемлемой частью процесса построения решений. Действительно, условие (3.56)

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x)dx = 1$$

означает, что решение задачи нужно искать в пространстве квадратично интегрируемых с весом  $\rho(x)$  на промежутке  $]0, l[$  функций ( $L^2(]0, l[, \rho(x)dx)$ ). Ортогональность собственных функций

$$\int_0^l \rho(x)y_i(x)y_j(x)dx = \delta_{ij}$$

в вариационном подходе также является неотъемлемой частью метода. Пусть функционал (3.55) достигает наименьшего значения на функции  $y = y_1(x)$ . Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$\{\varphi(x)y_1'\}' - q(x)y_1 + \lambda\rho(x)y_1 = 0$$

при условиях (3.56) и (3.57). Найдем теперь функцию  $y_2(x)$ , на которой исходный функционал достигает наименьшего значения и которая удовлетворяет тем же граничным условиям, но уже двум интегральным связям

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x)dx = 1, \quad \int_0^l \rho(x)y_1(x)y(x)dx = 0. \quad (3.60)$$

Искомую экстремаль  $y_2(x)$  найдем согласно (3.59) и с учетом (3.60) из уравнения

$$\{\varphi(x)y_2'\}' - q(x)y_2 + \lambda_2\rho(x)y_2 = 0.$$

Далее найдем функцию  $y = y_3(x)$ , на которой исходный функционал достигает наименьшего значения и которая удовлетворяет тем же граничным условиям и трём интегральным связям

$$\int_0^l \rho(x)y^2(x)dx = 1, \quad \int_0^l \rho(x)y_1(x)y(x)dx = \int_0^l \rho(x)y_2(x)y(x)dx = 0$$

и т.д.

Таким образом, мы получим бесконечную последовательность  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  собственных функций, которые в силу наложенных связей образуют ортогональную систему.

**Пример 3.12.** Найти экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^l (y')^2 dx, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad (3.61)$$

при интегральной связи

$$\int_0^l y^2(x)dx = 1. \quad (3.62)$$

**Решение.** Уравнение для собственных функций исследуемого функционала (3.61), согласно (3.59), запишется как

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y_n(x) = C_n \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Произвольные постоянные  $C_n$  определяются из условия (3.62)

$$C_n^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = 1$$

как

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Таким образом, экстремальными функционала являются функции

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (3.63)$$

Легко проверить, что функции (3.63) образуют ортогональную систему:

$$\int_0^l y_n y_k dx = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \delta_{nk}$$

и функционал (3.61) достигает на них стационарных значений, равных собственным числам  $\lambda_n$ . Действительно,

$$\begin{aligned} v[y_n(x)] &= \int_0^l \left( \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{\pi n}{l} \cos \frac{\pi n x}{l} \right)^2 dx = \\ &= \frac{2}{l} \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^l \left( 1 + \cos \frac{2\pi n x}{l} \right) dx = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 = \lambda_n, \quad n = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

**Пример 3.13.** Показать, что квадратичный функционал

$$v[y(x)] = \int_0^l \{ \varphi(x)(y')^2 + 2g(x)yy' + q(x)y^2 \} dx, \quad y(0) = y(l) = 0, \quad (3.64)$$

можно привести к виду (3.55).

**Решение.** Среднее слагаемое в (3.64) проинтегрируем по частям, положив  $u = g(x)$ ,  $dv = 2yy'dx$ ,  $du = g'(x)dx$ ,  $v = y^2$ . Тогда

$$\int_0^l 2g(x)yy'dx = g(x)y^2(x)|_0^l - \int_0^l g'(x)y^2 dx = - \int_0^l g'(x)y^2(x)dx.$$

В результате исходный функционал приобретет вид (3.55), т.е.

$$\int_0^l \{ \varphi(x)(y')^2 + 2g(x)yy' + q(x)y^2 \} dx = \int_0^l \{ \varphi(x)(y')^2 + [q(x) - g'(x)]y^2 \} dx.$$

**Пример 3.14.** Показать, что уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

представляет собой уравнение Эйлера для функционала

$$\int_0^l \left\{ x(y')^2 - \left( x - \frac{\nu^2}{x} \right) y^2 \right\} dx.$$

**Решение.** Исследуемый функционал представляет собой частный случай квадратичного функционала (3.49) с

$$\varphi(x) = x, \quad q(x) = -\left( x - \frac{\nu^2}{x} \right), \quad f(x) = 0.$$

Отсюда, согласно (3.50), имеем

$$(xy')' + \left( x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0,$$

но это и есть уравнение Бесселя в самосопряженной форме, что и требовалось показать.

#### 4. Вариационная задача с естественными граничными условиями

Классическая задача вариационного исчисления о нахождении экстремума функционала

$$v[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (4.2)$$

допускает ряд обобщений, существенно расширяющих возможности вариационного исчисления. Рассмотрим некоторые из них.

Пусть задача об экстремуме функционала (4.1) рассматривается независимо от условий (4.2). При этом приходится

сравнить все функции  $y(x)$  из пространства  $\mathcal{C}'([a, b])$ . Если на функции  $\bar{y}(x)$  функционал (4.1) достигает экстремума, то в силу теоремы 1.1 (необходимого условия экстремума) должно выполняться равенство

$$\delta v[\bar{y}, \delta y] = \int_a^b (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = 0,$$

которое после интегрирования по частям второго слагаемого можно записать в виде

$$\delta v[\bar{y}, \delta y] = F_{y'} \delta y' \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0. \quad (4.3)$$

Так как при любых граничных условиях функция  $\bar{y}(x)$  является решением уравнения Эйлера, то интеграл в (4.3) обращается в нуль, и, следовательно,

$$F_{y'} \delta y' \Big|_{x=a}^{x=b} = F_{y'}(b, \bar{y}(b), \bar{y}'(b)) - F_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) \delta y(a) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности  $\delta y(a)$  и  $\delta y(b)$  приходим к граничным условиям

$$F_{y'}(a, \bar{y}(a), \bar{y}'(a)) = F_{y'}(b, \bar{y}(b), \bar{y}'(b)) = 0. \quad (4.4)$$

◆ Граничные условия (4.4) для функционала (4.1) называются естественными, а соответствующая вариационная задача – естественной.

◇ Если граничные условия (4.2) заданы только в одной точке, то естественное условие (4.4) также формулируется только в этой точке.

**Пример 4.1.** Найти экстремум функционала

$$v[y(x)] = \int_0^{2\pi} [(y')^2 - y^2] dx,$$

удовлетворяющего граничным условиям:

- а)  $y(0) = y(2\pi) = 0$ ;
- б) естественным граничным условиям;
- в)  $y(0) = 0$ , а в точке  $x = 2\pi$  – естественным условиям.



**Решение.** Этот функционал рассматривался в примере 2.1. Соответствующее уравнение Эйлера имеет общее решение вида

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (4.5)$$

Подстановка (4.5) в условие а) определяет экстремали

$$y = C_2 \sin x.$$

Сформулируем естественные граничные условия. Так как  $F_{y'} = 2y'$ , то, согласно (4.4), получим

$$y'(0) = y'(2\pi) = 0.$$

Подстановка (4.5) в эти условия даёт

$$y = C_1 \cos x.$$

В случае в) граничные условия имеют вид

$$y(0) = y'(2\pi) = 0.$$

Подставив сюда (4.5), найдем единственную экстремаль

$$y = 0.$$

## 5. Вариационная задача с функционалами, зависящими от нескольких функций одной переменной

Классическая вариационная задача (4.1), (4.2) определяет плоские экстремали, т.е. экстремали, лежащие в плоскости  $xOy$ . Применение вариационных методов для нахождения пространственных экстремалей приводит к функционалам, определенным не на одной, а на нескольких функциях одной переменной.

Пусть  $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$  – вектор-функция скалярного аргумента  $x$ ,  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Рассмотрим функционал

$$v[\vec{y}(x)] = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}') dx \quad (5.1)$$

с закрепленными концами

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a = (y_{1a}, y_{2a}, \dots, y_{na}), \quad \vec{y}(b) = \vec{y}_b = (y_{1b}, y_{2b}, \dots, y_{nb}).$$

◆ Частной вариацией функционала (5.1) называется его вариация, полученная в результате варьирования только одной переменной при фиксированных остальных, т.е.

$$\delta_{y_i} v[\vec{y}(x)] = \int_a^b (F_{y_i} \delta y_i + F_{y'_i} \delta y'_i) dx. \quad (5.2)$$

**Теорема 5.1.** Если функционал (5.1) достигает экстремума на вектор-функции  $\vec{y} = \vec{y}(x) \in C'[a, b]$ , то она удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

**Доказательство.** Пусть вектор-функция  $\vec{y} = \vec{y}(x)$  реализует экстремум функционала (5.1). Тогда все частные вариации как вариации за счет одной функции, согласно теореме 1.2, должны равняться нулю:

$$\delta_{y_i} v[\vec{y}(x)] = \int_a^b [F_{y_i} \delta y_i + F_{y'_i} \delta y'_i] dx = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда, уже в силу теоремы 2.1, приходим к системе уравнений Эйлера–Лагранжа (5.3).

**Пример 5.1.** Найти экстремали  $\vec{y} = (y_1(x), y_2(x))^T$  функционала

$$v[\vec{y}(x)] = \int_0^{\pi/4} (2y_2 - 4y_1^2 + (y'_1)^2 - (y'_2)^2) dx$$

при условии  $\vec{y}(0) = (0, 0)^T$ ,  $\vec{y}(\pi/4) = (1, 1)^T$ .

**Решение.** Так как

$$F(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = 2y_2 - 4y_1^2 + (y'_1)^2 - (y'_2)^2,$$

то

$$F_{y_1} = -8y_1, \quad F_{y_2} = 2, \quad F_{y'_1} = 2y'_1, \quad F_{y'_2} = -2y'_2,$$

и система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} y''_1 + 4y_1 &= 0, \\ y''_2 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

причём

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 0, & y_1(\pi/4) &= 1, \\y_2(0) &= 0, & y_2(\pi/4) &= 1.\end{aligned}$$

Поскольку система состоит из двух уравнений с постоянными коэффициентами, то её общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}y_1(x) &= C_{11} \sin 2x + C_{12} \cos 2x, \\y_2(x) &= C_{21} + C_{22}x - \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Произвольные постоянные  $C_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , находятся из граничных условий. В результате искомая экстремаль определяется как линия пересечения двух цилиндрических поверхностей

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \sin 2x, \\y_2(x) &= \frac{32 + \pi^2}{8\pi}x - \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

**Пример 5.2.** Найти экстремали функционала

$$v[\vec{y}(x)] = \int_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2] dz$$

при условии  $\vec{y}(0) = (0, 0)^\top$ ,  $\vec{y}(\pi/2) = (1, 1)^\top$ .

**Решение.** Так как

$$F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = (y_1')^2 - (y_2')^2 - 2y_1y_2,$$

то

$$F_{y_1} = -2y_2, \quad F_{y_2} = -2y_1, \quad F_{y_1'} = 2y_1', \quad F_{y_2'} = 2y_2',$$

и система уравнений Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned}y_1'' + y_2 &= 0, \\y_2'' + y_1 &= 0,\end{aligned} \tag{5.4}$$

причём

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 0, & y_1(\pi/2) &= 1, \\y_2(0) &= 0, & y_2(\pi/2) &= 1.\end{aligned}$$

Исключив  $y_2$  в системе уравнений (5.4), получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y_1^{(4)} - y_1 = 0.$$

Корнями его характеристического уравнения являются  $k_{1,2} = \pm 1$ ,  $k_{3,4} = \pm i$ . Следовательно, его общее решение имеет вид

$$y_1(x) = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

В свою очередь, из (5.4) следует

$$y_2(x) = -y_1''(x).$$

Тогда

$$y_2(x) = -(C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x) + (C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

Произвольные постоянные  $C_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , находятся из граничных условий, в силу которых

$$\begin{aligned} y_1(0) &= C_1 + C_3 = 0, \\ y_1(\pi/2) &= C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} + C_4 = 1, \\ y_2(0) &= -C_1 + C_3 = 0, \\ y_2(\pi/2) &= -\left(C_1 \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} + C_2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}\right) + C_4 = 1, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$$

В результате искомая экстремаль определяется как

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sin x, \\ y_2(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

**Пример 5.3.** Показать, что система уравнений Эйлера–Лагранжа (5.3) может быть записана в форме

$$\frac{d}{dx} \left[ F - \sum_{i=1}^n y_i' F_{y_i'} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

и допускает следующие первые интегралы:

$$F_{y_i'} = C_1, \quad (5.6)$$

если функция  $F$  не зависит от  $y_i$ , т.е.  $F_{y_i} = 0$ , и

$$F - \sum_{i=1}^n F_{y'_i} y'_i = C, \quad (5.7)$$

если функция  $F$  не зависит от  $x$  явно, т.е.  $\partial F / \partial x = 0$ .

**Решение.** Для получения (5.5) поступим следующим образом. Каждое из уравнений системы (5.3) умножим на  $y'_i$  и полученные уравнения сложим. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \left( F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) y'_i = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n y'_i F_{y_i} - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0.$$

В полученном выражении прибавим и вычтем одно и то же слагаемое, т.е.

$$\sum_{i=1}^n y'_i F_{y_i} + \left( \sum_{i=1}^n y''_i F_{y'_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) - \left( \sum_{i=1}^n y''_i F_{y'_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0.$$

Тогда

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{i=1}^n F_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n F_{y'_i} \frac{dy'_i}{dx} \right] - \sum_{i=1}^n \left( F_{y'_i} \frac{dy'_i}{dx} + y'_i \frac{d}{dx} F_{y'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Это выражение можно привести к виду

$$\frac{d}{dx} F(x, \vec{y}, \vec{y}') - \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i}(x, \vec{y}, \vec{y}') - \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

и

$$\frac{d}{dx} \left[ F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right] - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

совпадает с (5.5).

Соотношение (5.6) непосредственно следует из (5.3), поскольку при  $F_{y_i} = 0$ ,  $dF_{y'_i}/dx = 0$ , а соотношение (5.7) следует из (5.5), поскольку при  $\partial F / \partial x = 0$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ F - \sum_{i=1}^n y'_i F_{y'_i} \right] = 0.$$

## 6. Вариационная задача для функционалов, зависящих от функций нескольких переменных

До сих пор мы рассматривали вариационные задачи, экстремалами которых являются кривые в пространствах двух, трёх и т.д. измерений. Одним из обобщений классической вариационной задачи являются вариационные задачи, экстремалами которых представляют собой не кривые, а поверхности.

Пусть  $y(\vec{x})$  – функция многих переменных  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – задана в области  $D \subset \mathbb{R}^n$ , ограниченной гладкой границей  $\Gamma$ . В этом случае функция  $y(\vec{x})$  представляет собой поверхность  $y = y(\vec{x})$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  и соответствующий функционал имеет вид

$$v[y(\vec{x})] = \int_D F(\vec{x}, y, \nabla y) d\vec{x}, \quad (6.1)$$

где обозначено  $d\vec{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ ,  $\nabla y = (y_{x_1}, y_{x_2}, \dots, y_{x_n})$ . Рассмотрим задачу об отыскании экстремума функционала (6.1) при граничном условии

$$y(\vec{x})|_{\Gamma} = \varphi(M)|_{M \in \Gamma}, \quad (6.2)$$

где  $\varphi(M)$  – некоторая заданная функция на границе  $\Gamma$  области  $D$ . Геометрически это означает, что значения функционала (6.1) сравниваются на всевозможных поверхностях, определяемых уравнением  $y = y(\vec{x})$  и опирающихся на один и тот же контур  $\Gamma$ .

Рассуждая так же, как и при доказательстве основной леммы вариационного исчисления 2.1, убеждаемся в справедливости её обобщения на любое число переменных.

**Лемма 6.1.** *Если для любой непрерывной при  $x \in D \cup \Gamma$  функции  $\eta(\vec{x})$  справедливо*

$$\int_D f(\vec{x})\eta(\vec{x})d\vec{x} = 0, \quad (6.3)$$

где функция  $f(\vec{x})$  непрерывна при  $\vec{x} \in D \cup \Gamma$ , то  $f(\vec{x}) \equiv 0$  в области  $D$ .

Обобщением теоремы 1.1 в этом случае будет следующая теорема.

**Теорема 6.1.** Если функционал (6.1) достигает экстремума на функции  $y(\vec{x})$ , удовлетворяющей условию (6.2), то она удовлетворяет уравнению Эйлера–Остроградского

$$F_y - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} = 0. \quad (6.4)$$

**Доказательство.** Рассмотрим вариацию функционала (6.1)

$$\delta v[y(\vec{x}), \delta y(\vec{x})] = \int_D \left[ F_y \delta y + \sum_{i=1}^n F_{y_{x_i}} \delta y_{x_i} \right] d\vec{x},$$

которую с учетом  $\delta(y_{x_i}) = (\delta y)_{x_i}$  можно записать

$$\delta v[y(\vec{x}), \delta y(\vec{x})] = \int_D \left[ F_y \delta y + \sum_{i=1}^n F_{y_{x_i}} (\delta y)_{x_i} \right] d\vec{x}. \quad (6.5)$$

Проинтегрировав второе слагаемое в (6.5) по частям с учётом  $\delta y|_{\vec{x} \in \Gamma} = 0$  (т.е. поверхности  $y = y(\vec{x})$  закреплены на границе  $\Gamma$ ), получим

$$\begin{aligned} & \int_D \sum_{i=1}^n F_{y_{x_i}} (\delta y)_{x_i} d\vec{x} = \sum_{i=1}^n \int_D F_{y_{x_i}} d\vec{x} = \\ & = \sum_{i=1}^n \int_D dx_1 \cdots dx_{i-1} F_{y_{x_i}} dx_i \cdots dx_n = \\ & = \sum_{i=1}^n \left[ \int_{\Gamma} dx_1 \cdots dx_{i-1} F_{y_{x_i}} \delta y dx_{i+1} \cdots dx_n - \int_D \left( \frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} \right) \delta y d\vec{x} \right] = \\ & = 0 - \int_D \left( \frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} \right) \delta y d\vec{x}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta v[y(\vec{x}), \delta y(\vec{x})] = \int_D \left( F_y - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} \right) \delta y d\vec{x}. \quad (6.6)$$

Так как первая вариация функционала на экстремали  $y = y(\vec{x})$  обращается в нуль при любых приращениях  $\delta y$ , то из (6.6) в

силу леммы 6.1 вытекает уравнение Эйлера–Остроградского (6.4).

Отметим, что вычисление производных  $\partial F_{y_{x_i}} / \partial x_i$  проводится при фиксированных переменных  $x_j$ ,  $j \neq i$ , но с учётом того, что в  $F_{y_{x_i}}$  в качестве  $y(\vec{x})$ ,  $\nabla y(\vec{x})$  подставлены их явные выражения через  $\vec{x}$ , т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_{y_{x_i}} = F_{y_{x_i} x_i} + F_{y_{x_i} y} y_{x_i} + \sum_{j=1}^n F_{y_{x_i} y_{x_j}} y_{x_i x_j}. \quad (6.7)$$

В результате уравнение Эйлера–Остроградского примет вид

$$\sum_{i=1}^n \left[ F_{y_{x_i} x_i} + F_{y_{x_i} y} y_{x_i} + \sum_{j=1}^n F_{y_{x_i} y_{x_j}} y_{x_i x_j} \right] - F_y = 0. \quad (6.8)$$

Это уравнение, в отличие от уравнений Эйлера–Лагранжа, является уравнением в частных производных.

Таким образом, вариационная задача для функционала (6.1) сводится к решению краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка, каким является уравнение Эйлера–Остроградского (6.8), с граничными условиями (6.2).

**Пример 6.1.** Записать уравнение Эйлера–Остроградского для поверхности  $u = u(x, y)$ , отвечающей функционалу

$$v[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \quad (6.9)$$

где  $D$  – некоторая область плоскости  $xOy$ .

**Решение.** В переменных, задающих функционал (6.9), уравнение Эйлера–Остроградского (6.8) примет вид

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) = 0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где

$$\begin{aligned} A(x, y) = F_{u_x u_x}, \quad B(x, y) = F_{u_x u_y}, \quad C(x, y) = F_{u_y u_y}, \\ a(x, y) = F_{u u_x}, \quad b(x, y) = F_{u u_y}, \quad c(x, y) = F_{x u_x} + F_{y u_y} - F_u. \end{aligned} \quad (6.11)$$



**Пример 6.2.** Найти экстремальную поверхность интеграла Дирихле

$$v[u(x, y)] = \iint_D [(u_x)^2 + (u_y)^2] dx dy$$

при условии

$$u(M) \Big|_{M \in \Gamma} = f(M), \quad (6.12)$$

где  $\Gamma$  – граница области  $D$ , являющаяся окружностью  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**Решение.** Поскольку

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = (u_x)^2 + (u_y)^2,$$

то, согласно (6.10), с учётом соотношений (6.11), которые в нашем случае запишутся как

$$\begin{aligned} A(x, y) = 2, \quad B(x, y) = 0, \quad C(x, y) = 2, \\ a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0, \end{aligned}$$

имеем уравнение Эйлера–Остроградского, совпадающее с уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (6.13)$$

Таким образом, экстремальными интеграла Дирихле являются поверхности  $u = u(x, y)$ , определяемые гармоническими функциями  $u(x, y)$ . Эти функции являются решениями задачи Дирихле для круга (6.13), (6.12) и могут быть представлены интегралом Пуассона (см., например, [?]).

**Пример 6.3.** Найти экстремаль функционала

$$v[u(x, y)] = \int_0^1 \int_0^1 (x + e^{u_y}) dx dy \quad (6.14)$$

при условии

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 1.$$

**Решение.** Функции Лагранжа

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = x + e^{u_y},$$

согласно (6.10) и (6.11), отвечает уравнение Эйлера–Остроградского

$$u_{yy} = 0.$$

Легко убедиться, что общее решение этого уравнения в частных производных имеет вид

$$u(x, y) = q(x)y + p(x),$$

где  $q(x)$  и  $p(x)$  – произвольные функции. Учёт граничных условий даёт

$$u(x, 0) = p(x) = 0, \quad u(x, 1) = q(1) = 1.$$

Таким образом, поверхностью, на которой функционал (6.14) принимает экстремальное значение, является плоскость  $u = y$ , проходящая через ось  $Ox$ .

## 7. Вариационная задача для функционалов, зависящих от производных высших порядков

Рассмотрим вариационную задачу для функционалов вида

$$v[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (7.1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y(a) = A_0, \quad y'(a) = A_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}, \\ y(b) = B_0, \quad y'(b) = B_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(b) = B_{n-1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

**Теорема 7.1.** Если функционал (7.1) достигает экстремума на функции  $y(x)$ , удовлетворяющей условиям (7.2), то она удовлетворяет уравнению Эйлера–Пуассона

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} = 0, \quad (7.3)$$

которое в развернутой записи имеет вид

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}} = 0.$$

**Доказательство.** Вариацию функционала (7.3)

$$\delta v[y, \delta y] = \int_a^b \sum_{k=0}^n F_{y^{(k)}} \delta y^{(k)}$$

с учётом  $\delta y^{(k)} = \delta^{(k)} y$  можно записать как

$$\delta v[y, \delta y] = \sum_{k=0}^n \int_a^b F_{y^{(k)}} \delta^{(k)} y \, dx. \quad (7.4)$$

Проинтегрировав  $k$ -ое слагаемое по частям с учётом  $\delta^{(n-1)} y(a) = \delta^{(n-1)} y(b) = 0$ , найдём

$$\begin{aligned} \int_a^b F_{y^{(k)}} \delta^{(k)} y \, dx &= \delta^{(n-1)} y \frac{d}{dx} F_{y^{(k)}} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (F_{y^{(k)}}) \delta^{(k-1)} y \, dx = \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dx} (F_{y^{(k)}}) \delta^{(k-1)} y \, dx. \end{aligned}$$

Повторное интегрирование по частям с учётом  $\delta^{(k-2)} y(a) = \delta^{(k-2)} y(b) = 0$  даёт

$$\begin{aligned} \int_a^b F_{y^{(k)}} \delta^{(k)} y \, dx &= \delta^{(k-2)} y \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(k)}} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} (F_{y^{(k)}}) \delta^{(k-2)} y \, dx = \\ &= \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} (F_{y^{(k)}}) \delta^{(k-2)} y \, dx. \end{aligned}$$

В результате после  $k$ -го шага запишем

$$\int_a^b F_{y^{(k)}} \delta^{(k)} y \, dx = \int_a^b \frac{d^k}{dx^k} (F_{y^{(k)}}) \delta y \, dx.$$

В результате вариацию (7.4) можно представить в виде

$$\delta v[y, \delta y] = \int_a^b \left[ \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{dx^k} (F_{y^{(k)}}) \right] \delta y \, dx. \quad (7.5)$$

Так как вариация (7.5) на экстремали  $y = y(x)$  обращается в нуль при любых приращениях  $\delta y$ , то из (7.5) в силу основной леммы вариационного исчисления и вытекает уравнение Эйлера–Пуассона (7.3), что и требовалось доказать.

**Пример 7.1.** Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_{-1}^0 [240y + (y''')^2] dx$$

при условиях

$$\begin{aligned} y(-1) &= 1, & y'(-1) &= -4,5, & y''(-1) &= 16, \\ y(0) &= 0, & y'(0) &= 0, & y''(0) &= 0. \end{aligned}$$

**Решение.** Так как  $F = 240y - (y''')^2$ , то

$$F_y = 240, \quad F_{y'} = F_{y''} = 0, \quad F_{y'''} = 2y''',$$

и уравнение Эйлера–Пуассона примет вид

$$240 - \frac{d^3}{dx^3}(2y''') = 0$$

или

$$\frac{d^6 y}{dx^6} = 120.$$

Шестикратное интегрирование этого уравнения даёт общее решение

$$y(x) = \frac{120}{6!}x^6 + \frac{C_1}{5!}x^5 + \frac{C_2}{4!}x^4 + \frac{C_3}{3!}x^3 + \frac{C_4}{2!}x^2 + C_5x + C_6.$$

Произвольные постоянные  $C_i$  легко находятся из граничных условий. В результате уравнение экстремали запишется как

$$y = \frac{x^6}{6} + x^4 + \frac{x^3}{6}.$$

**Пример 7.2.** Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 (y + y'') dx$$

при условиях

$$y(0) = A_0, \quad y'(0) = A_1, \quad y(1) = B_0, \quad y'(1) = B_1.$$

**Решение.** Так как  $F = y + y''$ , то

$$F_y = 1, \quad F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = 1,$$

и уравнение Эйлера–Пуассона примет вид

$$1 - \frac{d}{dx}(1) = 0.$$

Следовательно вариационная задача решения не имеет ввиду отсутствия экстремума для исходного функционала.

Рассмотрим теперь пример, когда вариационная задача не имеет решения по другой причине.

**Пример 7.3.** Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + yy''] dx \quad (7.6)$$

при условиях

$$y(0) = A_0, \quad y'(0) = A_1, \quad y(1) = B_0, \quad y'(1) = B_1.$$

**Решение.** Так как  $F = (y')^2 + yy''$ , то

$$F_y = y'', \quad F_{y'} = 2y', \quad F_{y''} = y,$$

и уравнение Эйлера–Пуассона примет вид тождества

$$y'' - \frac{d}{dx}(2y') + \frac{d^2}{dx^2}(y) \equiv 0.$$

Последнее уравнение выполняется тождественно. Это означает, что интеграл (7.6) не зависит от пути интегрирования и вариационная задача теряет смысл. Такой результат объясняется тем, что подынтегральная функция (7.6) представляет собой полный дифференциал

$$[(y')^2 + yy''] dx = d(yy')$$

и функционал (7.6)

$$v[y(x)] = \int_0^1 d(yy') = yy'|_0^1 = B_0B_1 - A_0A_1$$

имеет одно и то же значение на всех кривых, соединяющих точки  $x = 0$  и  $x = 1$ .

**Пример 7.4.** Найти экстремаль функционала

$$v[y(x)] = \int_a^b (y'')^2 dx \quad (7.7)$$

с граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (7.8)$$

**Решение.** Функционал этой вариационной задачи содержит производные высших порядков (см. разд. IV), поскольку  $F = (y'')^2$ . Так как

$$F_y = F_{y'} = 0, \quad F_{y''} = 2y'',$$

то уравнение Эйлера–Пуассона имеет вид

$$y^{(4)} = 0$$

и общее решение

$$y(x) = \frac{C_1}{3!}x^3 + \frac{C_2}{2!}x^2 + C_3x + C_4,$$

где  $C_i$  – четыре произвольные постоянные. Поскольку граничные условия (7.8) позволяют определить только две из них, то вариационная задача (7.7), (7.8) не имеет единственного решения.

Для нахождения единственного решения можно поступить так же, как в разд. I при формулировке естественных граничных условий. Выпишем первую вариацию функционала (7.7)

$$\delta v[y, \delta y] = \int -a^b \frac{\partial}{\partial y''} [(y'')] \delta(y'') dx = 2 \int_a^b y'' \delta'' y dx.$$

Двукратное интегрирование по частям даёт

$$\delta v[y, \delta y] = 2 \left\{ y'' \delta y' \Big|_a^b - y''' \delta y \Big|_a^b + \int_a^b y^{(4)} \delta y dx \right\}.$$

На экстремали  $y = y(x)$  эта вариация должна обращаться в нуль. Если учесть, что последний интеграл обращается в нуль,

согласно уравнению Эйлера–Пуассона  $y^{(4)} = 0$ , а предпоследний – в силу закреплённости экстремали в точках  $x = a$  и  $x = b$ , т.е.  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ , то для первого слагаемого найдём условие

$$y''\delta y'|_a^b = y''(a)\delta y'(b) - y''(a)\delta y'(a) = 0.$$

В силу произвольности величин  $\delta y'(b)$ ,  $\delta y'(a)$  отсюда следует

$$y''(b) = y''(a) = 0.$$

Эти условия естественным образом доопределяют условия (7.8), выделяя из семейства экстремалей единственную  $y(x) = 0$ , поскольку  $C_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Рассмотренная задача представляет собой пример, когда хотя бы и частичное использование естественных граничных условий позволяет однозначно определить экстремаль функционала, содержащего производные порядка выше первого.

Некоторые вариационные задачи, совмещающие указанные выше обобщения, приводят к уравнениям, совмещающим, например, уравнение Эйлера–Остроградского и уравнение Эйлера–Пуассона. Рассмотрим такую задачу.

**Пример 7.5.** Записать уравнение Эйлера, определяющее экстремаль функционала

$$v[y(x_1, x_2)] = \iint_D F\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right) dx_1 dx_2 \quad (7.9)$$

при условии

$$y|_{M \in \Gamma} = \varphi(M), \quad \frac{\partial y}{\partial \vec{n}}|_{M \in \Gamma} = \psi(M), \quad (7.10)$$

где под  $\vec{n}$  подразумевается направление внутренней нормали к кривой  $\Gamma$ , являющейся гладкой границей, охватывающей область  $D$  на плоскости  $x_1 O x_2$ .

**Решение.** Имеем вариационную задачу для функционала, зависящего от функции двух переменных  $y(x_1, x_2)$  и одновременно от производных этой функции по указанным переменным до второго порядка включительно. Рассуждая, как и в разд. III, IV, и обозначив для удобства

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = P_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = P_2, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = P_{11}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = P_{12}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = P_{22},$$

выпишем первую вариацию функционала (7.9):

$$\delta c[y, \delta y] = \iint_D (F_y \delta y + F_{P_1} \delta P_1 + F_{P_2} \delta P_2 + F_{P_{11}} \delta P_{11} + F_{P_{12}} \delta P_{12} + F_{P_{22}} \delta P_{22}) dx_1 dx_2$$

Как и ранее, проинтегрировав по частям один раз второе и третье слагаемые и дважды последующие, найдём

$$\begin{aligned} \delta v[y, \delta y] = \iint_D & \left[ F_y - \frac{\partial}{\partial x_1}(F_{P_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(F_{P_2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(F_{P_{11}}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(F_{P_{12}}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(F_{P_{22}}) \right] \delta y dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Здесь учтено, что

$$\delta(y_{x_i}) = (\delta y)_{x_i}, \quad \delta(y_{x_i x_j}) = (\delta y)_{x_i x_j}, \quad (\delta y)|_{M| \in \Gamma} = \frac{\partial}{\partial \bar{n}}(\delta y)_{M \in \Gamma} = 0,$$

а также  $(\delta y)_{x_i}|_{M \in \Gamma} = 0$ . Так как первая вариация на экстремали  $y = y(x_1, x_2)$  обращается в нуль при любых приращениях  $\delta y$ , то из (7.11) в силу леммы 6.1 следует уравнение Эйлера

$$F_y - \frac{\partial}{\partial x_1}(F_{P_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(F_{P_2}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(F_{P_{11}}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(F_{P_{12}}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(F_{P_{22}}) = 0. \quad (7.12)$$

Отметим, что при вычислении частных производных в формуле (7.12) необходимо учитывать замечание из разд. III к уравнению (6.7).

## 8. Условия Лежандра и Якоби

Кратко остановимся на достаточном условии экстремума функционала.

Пусть  $y = y_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , — экстремаль функционала  $F(x, y(x), y'(x))$ . Обозначим через

$$\begin{aligned} F_{yy}(x) &= F_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x)), \\ F_{y'y'}(x) &= F_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)), \\ F_{yy'}(x) &= F_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x)), \end{aligned}$$

соответствующие производные, вычисленные на экстремали  $y = y_0(x)$ .



◆ Линейное дифференциальное уравнение

$$\left(F_{yy}(x) - \frac{dF_{yy'}(x)}{dx}\right)u - \frac{d}{dx}(F_{y'y'}(x)u') = 0 \quad (8.1)$$

относительно функции  $u = u(x)$  называется *уравнением Якоби*.

Поставим для уравнения (8.1) задачу Коши:

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 1. \quad (8.2)$$

◆ Пусть  $u = u(x)$  – решение задачи Коши (8.1), (8.2). Точка  $a^* > a$  называется сопряженной точке  $a$ , если  $u(a^*) = 0$ ,  $u(x) \neq 0$ ,  $x \in ]a, a^*[$  (см. рис. 110).

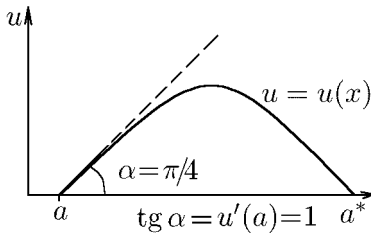


Рис. 110

**Теорема 8.1.** Пусть для экстремали  $y = y_0(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , выполняются условия

- 1) для всех  $x \in [a, b]$  справедливо неравенство  $F_{y'y'}(x) > 0$  или  $F_{y'y'}(x) < 0$ ;
- 2) на отрезке  $[a, b]$  нет точки, сопряженной с точкой  $a$ .

Тогда функционал  $v[y(x)]$  достигает на экстремали  $y = y_0(x)$  минимума (максимума).

**Доказательство** выходит за рамки настоящего пособия (см., например, [?]).

◆ Условие 1 называется условием Лежандра, а условие 2 – условием Якоби.

**Пример 8.1.** Найти кривую  $y = y(x)$ , соединяющую точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ .

**Решение.** Запишем функционал длины:

$$\ell[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (8.3)$$

Задача сводится к задаче на экстремум функционала длины (8.3) с граничными условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (8.4)$$

Запишем уравнение Эйлера для функции Лагранжа  $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ . Поскольку  $F(x, y, y')$  не зависит от  $y$ , то уравнение Эйлера сводится к уравнению (см. пример 3.4)

$$F_{y'}(x, y, y') = \tilde{C}_1$$

или

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \tilde{C}_1.$$

Следовательно,

$$(y'(x))^2 = \frac{\tilde{C}_1^2}{1 - \tilde{C}_1^2} = C_1^2,$$

и  $y(x) = C_1x + C_2$ . Из граничных условий найдём

$$\begin{cases} y(a) = C_1a + C_2 = A; \\ y(b) = C_1b + C_2 = B, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \frac{B - A}{b - a}, \quad C_2 = \frac{Ab - Ba}{b - a}.$$

Окончательно для экстремали найдём

$$y(x) = \frac{B - A}{b - a}x + \frac{Ab - Ba}{b - a}, \quad x \in [a, b]. \quad (8.5)$$

Проверим выполнение условий Лежандра и Якоби:

$$F_{yy}(x, y, y') = 0, \quad F_{yy'}(x, y, y') = 0, \quad f_{y'y'}(x, y, y') = \frac{1}{(1 + (y')^2)^{3/2}},$$

откуда

$$F_{yy}(x) = F_{yy'}(x) = 0;$$

$$F_{y'y'}(x) = \frac{1}{\{1 + [(B - A)/(b - a)]^2\}^{3/2}} = F_{y'y'} > 0.$$

Следовательно, выполнено условие Лежандра для минимума. Уравнение Якоби примет вид

$$-\frac{d}{dx}(F_{y'y'}u') = 0$$

или

$$u'' = 0.$$

Отсюда следует, что  $u(x) = C_3x + C_4$ . Из начальных условий (8.2) найдём

$$u(x) = x - a.$$

Поскольку  $u(x) \neq 0$  при  $x > a$ , то точка не имеет сопряженной, т.е. условие Якоби выполнено.

Таким образом, функция (8.3) достигает минимума на отрезке, соединяющем точки  $(a, A)$  и  $(b, B)$ .

**Пример 8.2.** Найти экстремум функционала

$$S[x(t)] = \int_0^T \left( \frac{m\dot{x}^2(t)}{2} - \frac{kx^2(t)}{2} \right) dt, \quad T \neq \frac{\pi j}{\omega_0}, \quad j \in \mathbb{Z};$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = B, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad k > 0, \quad m > 0.$$

**Решение.** Уравнение Эйлера имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = B.$$

Следовательно,

$$x_0(t) = \frac{B \sin(\omega_0 t)}{\sin(\omega_0 T)}. \quad (8.6)$$

Проверим выполнение условий Лежандра и Якоби для экстремали (8.6). Найдём

$$F_{\dot{x}\dot{x}}(t) = m, \quad F_{x\dot{x}}(t) = 0, \quad F_{xx}(t) = k.$$

Поскольку  $F_{\dot{x}\dot{x}} = m > 0$ , то условие Лежандра (для минимума) выполнено.

Запишем уравнение Якоби:

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 1.$$

Отсюда

$$u(t) = \sin(\omega_0 t),$$

и точка  $t = \pi/\omega_0$  является сопряженной точке  $t = 0$ .

При  $t \in ]0, \pi/\omega_0[$  условие Якоби выполнено и функционал достигает минимума на кривой (8.6).

Найдём минимальное значение функционала:

$$S[x_0(t)] = \int_0^T \frac{B^2 k}{2 \sin^2(\omega_0 T)} \left[ \cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t \right] dt = \frac{B^2 k \left[ \cos(2\omega_0 T) - 1 \right]}{4\omega_0 \sin^2(\omega_0 T)}.$$

При  $t > \pi/\omega_0$  условие Якоби нарушено, поэтому функционал не имеет экстремумов.

## 9. Уравнения Лагранжа в классической механике

Систематизация и классификация решений вариационных задач самого разнообразного характера привели к формированию так называемого вариационного принципа. Его смысл заключается в том, что для достаточно широкого круга задач введение некоторого характерного функционала позволяет сформулировать для него вариационную задачу, решение которой и приводит к решению этого круга задач.

Решение вариационных задач первоначально сводилось к решению уравнений Эйлера. Однако применение вариационных принципов к некоторым хорошо изученным задачам, описываемым дифференциальными уравнениями с известными решениями, поставило вопрос о возможности представления заданного дифференциального уравнения как уравнения Эйлера для некоторого функционала. Вопреки кажущейся нецелесообразности такого подхода, его применение привело к важным результатам, обобщение которых позволило сформулировать один из наиболее универсальных принципов современного естествознания – принцип Гамильтона.

Начнём с простого примера. Сформулируем вариационную задачу, уравнение Эйлера–Лагранжа которой совпадает с дифференциальным уравнением Ньютона для прямолинейного движения материальной точки массой  $m$ , движущейся вдоль оси  $q$  под действием силы  $f(q, t)$ :

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} = f(q, t). \quad (9.1)$$

Для удобства в дальнейшем использованные ранее переменные  $x, y$  заменим на новые  $t, q$  соответственно. Обозначив через  $U(q, t)$  потенциал силового поля, для которого  $\partial U(q, t)/\partial q = U_q(q, t) = -f(q, t)$ , а через  $\dot{q} = dq/dt$ , уравнение (9.1) можно записать как

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = -U_q(q, t),$$

а с учётом того, что кинетическая энергия  $T$  равна  $T = m\dot{q}^2/2$  и

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{d\dot{q}} \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{d\dot{q}} T \right] = \frac{d}{dt} T_{\dot{q}}(\dot{q}),$$

ещё и как

$$\frac{d}{dt} T_{\dot{q}}(\dot{q}) = -U_q(q, t).$$

Учтём теперь, что, с одной стороны, кинетическая энергия  $T(\dot{q})$  зависит только от  $\dot{q}$  и, следовательно,  $\partial T(\dot{q})/\partial q = 0$ , а с другой, что потенциальная энергия от  $\dot{q}$  не зависит и, следовательно,  $\partial U(q, t)/\partial \dot{q} = 0$ . Тогда последнее уравнение можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial q}(T - U) - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}}(T - U) \right] = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q}L - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}} = 0, \quad (9.2)$$

где введено обозначение

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - U(q, t). \quad (9.3)$$

Функция  $L(q, \dot{q}, t)$  называется функцией Лагранжа. Нетрудно заметить, что именно функция Лагранжа (9.3) определяет функционал

$$v[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (9.4)$$

для которого уравнение Эйлера–Лагранжа (9.2) совпадает с уравнением движения Ньютона (9.1).

◆ Функционал (9.4) в классической механике принято называть *действием* и обозначать  $S = v[q(t)]$ .

Если функционал (9.4) дополнить граничными условиями

$$q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2,$$

то для такой вариационной задачи уравнения движения Ньютона являются её экстремалами.

Таким образом, дифференциальный закон движения Ньютона можно рассматривать как следствие некоторого более общего утверждения, называемого принципом Гамильтона и гласящего, что если заданы начальное и конечное состояния системы, то из всех возможных законов движения реализуется такой, для которого действие принимает стационарное значение.

Следует отметить, что функция Лагранжа, определенная соотношением (9.3) как разность кинетической и потенциальной энергий, на первый взгляд представляет собой некоторое формальное выражение, и физическая интерпретация действия (9.4) затруднительна, если вообще возможна. Оказалось,

однако, что именно такой вид функции Лагранжа в состоянии пояснить, во-первых, фундаментальные законы классической физики при самых общих предположениях, а во-вторых – связь между классической и квантовой механиками.

Действительно, тот факт, что функция Лагранжа в рассматриваемом случае зависит лишь от координаты и её первой производной, означает, что движение материальной точки можно предсказать, зная её положение и импульс, как это и показывает опыт. В том случае, когда функция Лагранжа не зависит явно от времени, согласно (3.19), существует первый интеграл

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \text{const} .$$

Его с учётом (9.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{q} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} \right) - \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} - U \right) &= m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + U = \\ &= \frac{m\dot{q}^2}{2} + U = T + U = E = \text{const} , \end{aligned}$$

из которого следует закон сохранения энергии для консервативных систем.

Если же функция Лагранжа не зависит явно от  $q$ , то, согласно (9.2), существует первый интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{const} .$$

Его с учётом (9.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} \right) = m\dot{q} = p = \text{const} ,$$

из которого следует закон сохранения импульса  $p$  частицы.

Если использовать обобщения, рассмотренные в предыдущем разделе, то аналогично тому, как это сделано для одномерного движения, можно ввести функцию Лагранжа частицы, движущейся в пространстве  $\vec{q}(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ . Действительно, рассмотрим функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{m}{2} [(\dot{q}_1)^2 + (\dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2] - U(t, \vec{q}), \quad (9.5)$$

где  $\dot{q}_i = dq_i/dt$  – скорости частицы массой  $m$  в силовом поле с потенциалом  $U(t, \vec{q})$ . Соответствующее лагранжиану (9.5) действие определится интегралом

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt. \quad (9.6)$$

Если этот функционал дополнить граничными условиями

$$\vec{q}(t_0) = \begin{pmatrix} q_1(t_0) \\ q_2(t_0) \\ q_3(t_0) \end{pmatrix} = \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(t_1) = \begin{pmatrix} q_1(t_1) \\ q_2(t_1) \\ q_3(t_1) \end{pmatrix} = \vec{q}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{pmatrix}, \quad (9.7)$$

то мы получим вариационную задачу, рассмотренную в п. III предыдущего раздела. Воспользовавшись формулами (5.3), найдём систему уравнений Эйлера–Лагранжа для экстремалей действия

$$m\ddot{\vec{q}} = -\nabla_{\vec{q}} U(t, \vec{q}) \quad (9.8)$$

или

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -\frac{\partial}{\partial q_1} U(t, \vec{q}), \\ m\ddot{q}_2 &= -\frac{\partial}{\partial q_2} U(t, \vec{q}), \\ m\ddot{q}_3 &= -\frac{\partial}{\partial q_3} U(t, \vec{q}). \end{aligned}$$

Очевидно, что уравнения (9.8) совпадают с классическим уравнением Ньютона. Это означает, что принцип Гамильтона или, как его ещё называют, принцип наименьшего действия справедлив и в этом случае.

◇ Строго говоря, траектории, определяемые уравнениями (9.8), сообщают действию (9.6) не только минимальные значения, поэтому определение «принцип наименьшего действия» не совсем точно. Корректнее была бы формулировка «принцип стационарного действия», но термин «принцип наименьшего действия» общепринят.

Как и для одномерного движения, в трёхмерном пространстве для консервативных систем выполняется закон сохранения полной энергии  $E = T + U$ . В результате этого функцию

Лагранжа (9.4) можно представить как разность  $L = 2T - E$ , а интеграл (9.5), определяющий действие, — как

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt = -E(t_1 - t_0) + \int_{t_0}^{t_1} 2T dt. \quad (9.9)$$

Поскольку интегралы в левой и правой частях этого равенства различаются на константу, то условие экстремума для действия  $S(\vec{q}(t))$  фактически совпадает с условием экстремума для функционала

$$\tilde{S}(\vec{q}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt, \quad (9.10)$$

имеющего интересное геометрическое толкование и сыгравшего большую роль в становлении квантовой механики. Действительно, если скорость частицы обозначить через  $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$ , а импульс через  $\vec{p} = m\vec{v}$  и учесть, что  $T = (\vec{p}, \vec{v})/2$  и  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , то функционал (9.10) можно записать так:

$$\tilde{S}(\vec{q}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_A^B (\vec{p}, d\vec{r}), \quad (9.11)$$

где точки  $A$  и  $B$  определяют положение начала и конца траектории движения частицы. Условие стационарности действия для классической частицы в форме (9.11) совершенно аналогично принципу Ферма для световых волн в оптике. Согласно постулатам квантовой механики, длина волны  $\lambda$ , связанной с движением частицы с импульсом  $|\vec{p}|$ , определяется соотношением  $\lambda = h/|\vec{p}|$ , где  $h$  — постоянная Планка. Вероятность же того, что частица находится в некоторой точке пространства, пропорциональна квадрату амплитуды соответствующей ей волны, причём волны, пришедшие в одну точку, складываются. Тогда условие стационарности действия (9.11) на классических траекториях в квантовой механике представляет собой условие сложения волн с одинаковыми фазами, распространяющихся по путям, близким к классической траектории.

Следующим шагом в обобщении функции Лагранжа является функция Лагранжа для системы  $n$  материальных точек



с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . В этом случае лагранжиан системы имеет вид

$$L(t, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n, \dot{\vec{q}}_1, \dot{\vec{q}}_2, \dots, \dot{\vec{q}}_n) = \\ = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} [(\dot{q}_{1k})^2 + (\dot{q}_{2k})^2 + (\dot{q}_{3k})^2] - U(t, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n),$$

где  $\dot{q}_{ik}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = \overline{1, n}$ , – координаты скорости  $k$ -й частицы в силовом поле с потенциалом  $U(t, \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n)$ , а функционал, определяющий действие  $S$  по-прежнему находится по формуле (9.6). Нетрудно убедиться, что экстремали такого функционала определяются уравнениями движения

$$m_k \ddot{q}_{ik} = -\frac{\partial U}{\partial q_{ik}}, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.12)$$

Наряду с этим принцип Гамильтона замечателен ещё и тем, что он формулируется в терминах кинетической и потенциальной энергий системы. Это позволяет распространить его на физические поля, обладающие аналогичными характеристиками, например электромагнитные и т.п. Кроме того, принцип Гамильтона естественным образом распространяется с дискретных систем на сплошные среды. В подтверждение этого выведем с помощью принципа Гамильтона уравнение малых колебаний мембраны. Под мембраной будем понимать (см. [?]) бесконечно тонкую плёнку, не сопротивляющуюся изгибу, но сопротивляющуюся растяжению, причём, как указывает опыт, её потенциальная энергия пропорциональна приращению площади. Предположим, что мембрана растянута с силой натяжения  $T_0$  равномерно по всем направлениям и в состоянии равновесия занимает некоторую область  $S$  с границей  $L$  в плоскости  $xOy$ . Обозначим через  $q(x, y, t)$  отклонение точки мембраны с координатами  $(x, y)$  в момент времени  $t$  в направлении, ортогональном плоскости  $xOy$ , под действием внешних сил с поверхностной плотностью  $F(x, y, t)$ , направленных перпендикулярно плоскости  $xOy$ . Если поверхностная плотность мембраны равна  $\rho(x, y)$ , то её кинетическая энергия определяется двойным интегралом

$$T = \iint_S \frac{\rho}{2} (\dot{q}_t)^2 dx dy. \quad (9.13)$$

Если мембрану в некоторый момент времени перевести из состояния  $q(x, y, t)$  в ненагруженное состояние  $q(x, y, t) \equiv 0$ , то

будет произведена работа

$$A = T_0 \iint_S \left( \sqrt{1 + q_x^2 + q_y^2} - 1 \right) dx dy - \iint_S F(x, y, t) q(x, y, t) dx dy, \quad (9.14)$$

которая с точностью до аддитивной постоянной совпадает с потенциальной энергией  $V$  рассматриваемой системы. Разложив радикал в (9.14) в ряд и отбросив слагаемые высших порядков по  $|q(x, y, t)|$  (в предположении их малости), получим

$$V = \iint_S \left\{ \frac{T_0}{2} [q_x^2 + q_y^2] - F(x, y, t) q \right\} dx dy. \quad (9.15)$$

С учётом соотношений (9.13), (9.15) запишем функцию Лагранжа

$$L = T - V = \iint_S \left\{ \frac{\rho}{2} q_t^2 - \frac{T_0}{2} [q_x^2 + q_y^2] + F(x, y, t) q \right\} dx dy. \quad (9.16)$$

Тогда действие определится интегралом

$$S[q(x, y, t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S \mathcal{L} dx dy dt, \quad (9.17)$$

где функция  $\mathcal{L}$ , называемая плотностью функции Лагранжа  $L$ , равна

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} q_t^2 - \frac{T_0}{2} [q_x^2 + q_y^2] + Fq. \quad (9.18)$$

Таким образом, можно рассматривать вариационную задачу для функционала (9.17), зависящего от функции  $q$  трёх переменных  $x, y, t$ . Его экстремали, согласно формуле (6.4), определяется уравнением Эйлера–Остроградского:

$$\mathcal{L}_q - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_{q_x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_{q_y} + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{q_t} \right] = 0.$$

С учетом (9.18) окончательно запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho q_t) = \frac{\partial}{\partial x} (T_0 q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (T_0 q_y) + F(x, y, t). \quad (9.19)$$

◆ Уравнение (9.19) называется уравнением *малых колебаний мембраны*.

◇ Уравнение (9.19) ранее было получено [?] вне рамок вариационного принципа. Для однородной мембраны оно переходит в двумерное волновое уравнение

$$q_{tt} = a^2(q_{xx} + q_{yy}) + f(x, y, t),$$

где  $a = \sqrt{T_0/\rho}$ ;  $f(x, y, t) = F(x, y, t)/\rho$ .

Аналогичным образом вариационный принцип позволяет вывести большинство уравнений, рассмотренных в [?].

**Пример 9.1.** С помощью вариационного принципа получить уравнение плоских продольных колебаний прямолинейного стержня с естественными граничными условиями.

**Решение.** Эта задача уже рассматривалась другими методами [?]. Воспользуемся введёнными там допущениями и обозначениями. Пусть координатная ось  $Ox$  совпадает с направлением продольной оси упругого стержня. Под продольными колебаниями понимаются смещения поперечных сечений  $S(x)$  стержня. Обозначим через  $q(x, t)$  отклонение в момент времени  $t$  того сечения стержня  $S(x)$ , которое, находясь в покое, имело абсциссу  $x$ . Пусть  $\rho = \rho(x)$  – объёмная плотность стержня в невозмущённом состоянии;  $F = F(x, t)$  – объёмная плотность внешних сил, действующих строго вдоль оси  $Ox$ ;  $E = E(x)$  – модуль упругости стержня. Будем считать для общности, что концы стержня  $x = 0$  и  $x = l$  упруго закреплены с коэффициентами упругости  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

Кинетическая энергия стержня равна

$$T = \int_0^l \frac{\rho}{2} q_t^2 S(x) dx. \quad (9.20)$$

Для вычисления потенциальной энергии примем во внимание, что при относительном удлинении  $\partial q/\partial x$  элемента  $dx$  стержня в этом элементе возникает сила упругости, по закону Гука равная

$$T_{уп} = ESq_x,$$

и работа, затраченная на это удлинение из невозмущённого состояния  $q \equiv 0$ , равна

$$dA = \frac{1}{2} ESq_x \frac{\partial q}{\partial x} dx = \frac{1}{2} ESq_x^2 dx.$$

Поэтому потенциальная энергия стержня в произвольно растянутом состоянии определится как

$$V = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} E(x) S(x) q_x^2 - F(x) S(x) q \right] dx + \frac{1}{2} \left[ \alpha q^2(x) \Big|_{x=0} + \beta q^2(x) \Big|_{x=l} \right]. \quad (9.21)$$

С учётом соотношений (9.20), (9.21) получим функцию Лагранжа

$$L = T - U = \int_0^l S(x) \left\{ \frac{1}{2} [\rho q_t^2 - E(x) q_x^2] + F(x) U \right\} dx + \frac{1}{2} \left[ \alpha q^2 \Big|_{x=0} + \beta q^2 \Big|_{x=l} \right]$$

и действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (9.22)$$

Уравнение Эйлера–Остроградского для функционала (9.22) даёт уравнение продольных колебаний стержня

$$\rho(x) S(x) q_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) E(x) \frac{\partial q}{\partial x} \right) + S(x) F(x, t), \quad (9.23)$$

которое для однородного стержня постоянного сечения примет вид

$$q_{tt} = a^2 q_{xx} + f(x, t), \quad (9.24)$$

где  $a^2 = E/\rho$ ;  $f(x, t) = F(x, t)/\rho$ .

Обратимся теперь к граничным условиям. Рассуждая так же, как и в предыдущем разделе, приходим к естественным граничным условиям

$$\begin{aligned} (SEq_x - \alpha q) \Big|_{x=0} &= 0, \\ (SEq_x - \beta q) \Big|_{x=l} &= 0, \end{aligned} \quad (9.25)$$

которые являются граничными условиями третьего рода.

◇ Пусть  $\vec{x}$  – вектор  $n$ -мерного координатного пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , а  $\gamma = \{t, \vec{x} : \vec{x} = \vec{x}(t), t \in [t_0, t_1]\}$  – кривая  $n + 1$ -мерного координатного пространства  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  и  $\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$  – непрерывно дифференцируемая функция  $2n + 1$  аргументов. Тогда справедлива следующая теорема (частный случай теоремы 2.1):

**Теорема 9.1.** Если функционал

$$v[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt \quad (9.26)$$

достигает экстремума на кривых  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ , то кривые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} = 0, \quad x_k(t_0) = x_k^0, \quad x_k(t_1) = x_k^1, \quad k = \overline{1, n}. \quad (9.27)$$

Система уравнений (9.27) называется системой уравнений Эйлера–Лагранжа или Лагранжа.

◇ Систему уравнений Эйлера–Лагранжа (9.27) можно записать в векторном виде

$$\mathcal{L}'_{\vec{x}} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}'_{\dot{\vec{x}}} = 0, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1.$$

◇ Система (9.27) – система  $n$  уравнений второго порядка. Следовательно, ее решение зависит от  $2n$  произвольных постоянных.

◆ Число величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения механической системы, называется числом степеней свободы.

◇ Например, для определения положения системы  $N$  материальных точек в пространстве нужно задать  $N$  радиус-векторов, т.е.  $3N$  координат. Следовательно, число степеней свободы равно  $3N$ .

◆ Любые  $n$  величин  $q_1, \dots, q_n = \vec{q} \in E \subset \mathbb{R}^n$ , полностью задающих положение механической системы с  $n$  степенями свободы, называют ее обобщенными координатами, а производные  $\dot{q}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , – ее обобщенными скоростями. Пространство  $\mathbb{R}^n$  называют конфигурационным пространством.

◇ Положение частицы на плоскости можно задавать декартовыми координатами  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  или полярными координатами  $\vec{q} = (r, \varphi)$ ,  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ . И те и другие являются обобщенными координатами частиц.

**Пример 9.2.** Найти общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа для гармонического осциллятора – одномерной механической системы с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad (9.28)$$

где  $m, k$  – положительные постоянные.

**Решение.** Вычислим частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx.$$

Тогда при  $n = 1$  система уравнений (9.27) примет вид

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Общее решение этого уравнения хорошо известно:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$ , а  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

**Пример 9.3.** Записать уравнение Эйлера–Лагранжа для нерелятивистской классической частицы во внешнем потенциальном поле  $U(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Решение.** Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - U(\vec{x}, t), \quad (9.29)$$

где  $m$  – масса частицы.

Найдем частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}}.$$

Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$m\ddot{\vec{x}} = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \quad (9.30)$$

и совпадут с уравнениями Ньютона.

◇ Далее мы будем использовать обозначение

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^n a_k b_k,$$

для евклидова скалярного произведения векторов в отличие от эрмитова скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k.$$

**Пример 9.4.** Записать уравнение движения для нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

**Решение.** Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{e}{c} \langle \vec{A}(\vec{x}, t), \dot{\vec{x}} \rangle - e\Phi(\vec{x}, t), \quad (9.31)$$

где  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ;  $e$  и  $m$  – заряд и масса частицы соответственно;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\Phi(\vec{x}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.

Найдем частную производную

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{c} \text{grad} \langle \vec{A}(\vec{x}, t), \dot{\vec{x}} \rangle - e \text{grad} \Phi(\vec{x}, t). \quad (9.32)$$

С учетом известной формулы векторного анализа

$$\text{grad} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \nabla \rangle \vec{B} + \langle \vec{B}, \nabla \rangle \vec{A} + \vec{B} \times \text{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot} \vec{B}, \quad (9.33)$$

где  $\times$  обозначает векторное произведение векторов, из формулы (9.32) получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \nabla \rangle \vec{A}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \text{rot} \vec{A}(\vec{x}, t) - e \nabla \Phi(\vec{x}, t) \quad (9.34)$$

и для частных производных по переменным  $\dot{\vec{x}}$  найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} &= \frac{d}{dt} \left[ m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t) \right] = \\ &= m\ddot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \langle \dot{\vec{x}}, \nabla \rangle \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (9.35)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = m\ddot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \text{rot} \vec{A}(\vec{x}, t) + e \nabla \Phi(\vec{x}, t) = 0.$$

Обозначим через

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{x}, t), \quad \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \quad (9.36)$$

напряженности магнитного и электрического поля соответственно. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}(\vec{x}, t). \quad (9.37)$$

Уравнения (9.37) называются (нерелятивистскими) уравнениями Лоренца, а выражение, стоящее в их правой части, – силой Лоренца.

**Пример 9.5.** Записать уравнение движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

**Решение.** Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \vec{A}(\vec{x}, t) \rangle - e\Phi(\vec{x}, t). \quad (9.38)$$

Производная  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\vec{x}}$  определяется выражением (9.32), а

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}, t).$$

Тогда аналогично предыдущему примеру система Эйлера–Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = e\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}(\vec{x}, t). \quad (9.39)$$

Домножим это уравнение скалярно на  $\dot{\vec{x}}$  и получим

$$m \left\langle \dot{\vec{x}}, \frac{d}{dt} \frac{\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} \right\rangle = m \frac{\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} \left( 1 + \frac{\dot{\vec{x}}^2/c^2}{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} \right) = e \langle \dot{\vec{x}}, \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = e \langle \dot{\vec{x}}, \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle. \quad (9.40)$$



Уравнения (9.39) описывают изменение импульса системы, а уравнения (9.40) – изменение ее кинетической энергии. Система уравнений (9.39), (9.40) называется системой уравнений Лоренца.

**Пример 9.6.** Разрешить систему уравнений Эйлера–Лагранжа (9.39) относительно старшей производной.

**Решение.** Продифференцируем левую часть системы (9.39) по  $t$ . Получим

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = \frac{m\ddot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + m\dot{\vec{x}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}.$$

С учетом (9.40) запишем

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \left\{ \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \dot{\vec{x}} \langle \dot{\vec{x}}, \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle \right\}. \quad (9.41)$$

Нетрудно заметить, что в пределе  $c \rightarrow \infty$  эта система переходит в систему (9.37).

**Пример 9.7.** Найти общее решение уравнений Лоренца (9.37) для частицы в постоянном и однородном электрическом поле.

**Решение.** В постоянном и однородном электрическом поле уравнения Лоренца (9.37) примут вид

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}, \quad (9.42)$$

где  $\vec{E}$  – постоянный вектор. Проинтегрировав левую и правую части этого уравнения по  $t$ , найдем

$$\vec{x}(t) = \frac{e}{2m} \vec{E}t^2 + \dot{\vec{x}}_0 t + \vec{x}_0, \quad (9.43)$$

где  $\vec{x}_0$  и  $\dot{\vec{x}}_0$  – произвольные постоянные векторы.

**Пример 9.8.** Найти общее решение уравнений Лоренца (9.37) для частицы в постоянном и однородном магнитном поле.

**Решение.** В постоянном и однородном магнитном поле уравнения Лоренца (9.37) примут вид

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{mc} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}, \quad (9.44)$$

где  $\vec{H}$  – постоянный вектор. Обозначим

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \\ \vec{e}_\theta &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \\ \vec{e}_\varphi &= (\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  – углы сферической системы координат, задающие направление вектора  $\vec{H}$ . Векторы (9.45) есть единичные ортогональные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\vec{n} \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\theta, \quad \vec{n} \times \vec{e}_\theta = -\vec{e}_\varphi. \quad (9.46)$$

Решение системы (9.44) будем искать в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{n}u(t) + \vec{e}_\theta v(t) + \vec{e}_\varphi w(t). \quad (9.47)$$

Подставив (9.47) в (9.44), с учетом (9.45) запишем

$$\vec{n}\ddot{u} + \vec{e}_\theta\ddot{v} + \vec{e}_\varphi\ddot{w} = \frac{eH}{mc} \{\vec{e}_\varphi\dot{v} - \vec{e}_\theta\dot{w}\}, \quad H = |\vec{H}|.$$

В результате для определения функций  $u(t)$ ,  $v(t)$  и  $w(t)$  получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{u} = 0, \quad \ddot{v} = -\omega_0\dot{w}, \quad \ddot{w} = \omega_0\dot{v}, \quad (9.48)$$

где  $\omega_0 = eH/(mc)$  – циклотронная частота. Из (9.48) найдем

$$u(t) = u_0t + \dot{u}_0, \quad (9.49)$$

где  $u_0$  и  $\dot{u}_0$  – произвольные постоянные. Обозначим

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (9.48) можно представить в виде

$$\ddot{\vec{q}} = -i\omega_0\sigma_2\dot{\vec{q}}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.50)$$

где  $\sigma_2$  – матрица Паули. Тогда

$$\vec{q}(t) = \exp\{-i\omega_0\sigma_2 t\}\dot{\vec{q}}_0 + \vec{q}_0 - \dot{\vec{q}}_0. \quad (9.51)$$

Здесь

$$\dot{\vec{q}}_0 = \begin{pmatrix} \dot{v}_0 \\ \dot{w}_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

– постоянные векторы. С учетом соотношения  $\sigma_2^2 = \mathbb{I}$ , где  $\mathbb{I}$  – единичная матрица соответствующей размерности, получим

$$\begin{aligned} \exp\{-i\omega_0\sigma_2 t\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\omega_0\sigma_2 t)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} i^{2k} \sigma_2^{2k} (\omega_0 t)^{2k} - i\sigma_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} i^{2k} \sigma_2^{2k} (\omega_0 t)^{2k+1} = \\ &= \mathbb{I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\omega_0 t)^{2k} + i\sigma_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\omega_0 t)^{2k+1} = \\ &= \mathbb{I} \cos \omega_0 t - i\sigma_2 \sin \omega_0 t = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{v}_0 \cos \omega_0 t - \dot{w}_0 \sin \omega_0 t + v_0 - \dot{v}_0, \\ w(t) &= \dot{v}_0 \sin \omega_0 t + \dot{w}_0 \cos \omega_0 t + w_0 - \dot{w}_0. \end{aligned} \quad (9.52)$$

**Пример 9.9.** Найти общее решение уравнений Лоренца (9.41) для частицы в постоянном и однородном магнитном поле.

**Решение.** В постоянном и однородном магнитном поле уравнения Лоренца (9.41) примут вид

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{mc} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}. \quad (9.53)$$

Домножим левую и правую части уравнения (9.53) скалярно на  $\dot{\vec{x}}$  и получим

$$\langle \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \rangle = 0.$$

Следовательно,  $\dot{\vec{x}}^2 = \text{const}$ . Обозначим

$$\omega_0 = \frac{ecH}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}, \quad H = |\vec{H}|.$$

Тогда система (9.53) примет вид

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\omega_0}{H} \dot{\vec{x}} \times \vec{H} \quad (9.54)$$

и с точностью до обозначений совпадает с нерелятивистской системой (9.44), решение которой дается соотношениями (9.47), (9.49), (9.52).

◇ Свойство кривой быть экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат.

◇ Каждая механическая система с  $n$  степенями свободы характеризуется определенной функцией координат и скоростей

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t),$$

которая называется функцией Лагранжа, или лагранжианом, а функционал

$$S = S[\vec{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt, \quad (9.55)$$

определенный на траектории  $\vec{q} = \vec{q}(t)$ , — действием системы.

### Принцип Гамильтона (принцип наименьшего действия).

*Движения механической системы на промежутке времени от  $t_0$  до  $t_1$  совпадают с экстремальями функционала*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt.$$

**Теорема 9.2.** Пусть  $\vec{q} \in E \subset \mathbb{R}_q^n$  — обобщенные координаты механической системы с  $n$  степенями свободы. Тогда функции  $\vec{q}$ , определяющие движение механической системы, являются решениями уравнения Эйлера–Лагранжа (9.26)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad k = \overline{1, n}.$$

**Доказательство** непосредственно следует из определения экстремали и теоремы 3.1.

◇ Для системы  $N$  материальных точек с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \frac{m\dot{\vec{q}}^2}{2} - V(\vec{q}), \quad \vec{q} = (q_1, \dots, q_{3N}),$$

где  $V(\vec{q})$  – потенциальная энергия, уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$m\ddot{\vec{q}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}$$

и, следовательно, совпадают с уравнениями Ньютона.

По аналогии с рассмотренным примером величины  $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , называют обобщенными импульсами и обозначают

$$p_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j},$$

а величины  $\partial\mathcal{L}/\partial q_j = F_j$  – обобщенными силами.

◆ Переменные  $z = (\vec{q}, \vec{p})$  называют каноническими, а величины  $q_j$  и  $p_j$  – сопряженными друг другу.  $2n$ -мерное пространство  $\mathbb{R}_z^{2n} = \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$  называют фазовым.

◇ Обозначим

$$\frac{\dot{\vec{x}}}{c} = \vec{\beta}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta^2 = \vec{\beta}^2. \quad (9.56)$$

Тогда уравнения Лоренца (9.39)–(9.41) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} m\gamma\vec{\beta} = \frac{e}{c} [\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{\beta} \times \vec{H}(\vec{x}, t)]; \quad (9.57)$$

$$\frac{d}{dt} m\gamma = \frac{e}{c} \langle \vec{\beta}, \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle; \quad (9.58)$$

$$\ddot{\vec{\beta}} = \frac{e}{mc\gamma} [\vec{E}(\vec{x}, t) + \vec{\beta} \times \vec{H}(\vec{x}, t)] - \vec{\beta} \langle \vec{\beta}, \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle. \quad (9.59)$$

◇ Зачастую удобно использовать обозначения, отражающие ковариантные свойства векторных, тензорных и других объектов. Будем считать, что индексы, заданные греческими буквами, пробегают значения от нуля до трех.

◆ Тензором (или символом) Леви–Чивиты называется антисимметричный тензор  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , равный 1 или  $-1$  в зависимости от того, является  $\mu\nu\rho\sigma$  четной или нечетной перестановкой чисел  $(0, 1, 2, 3)$ , и нулю во всех остальных случаях. Отметим, что  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ .

Символ Леви–Чивиты используется для преобразования антисимметричного тензора в дуальный. Например,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = (-\vec{H}; -\vec{E}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -E_z & E_y \\ -H_y & E_z & 0 & -E_x \\ -H_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.60)$$

где

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} = (\vec{E}; \vec{H}). \quad (9.61)$$

Обратное соотношение, связывающее тензор электромагнитного поля с дуальным, имеет вид

$$F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{F}_{\rho\sigma}.$$

◆ Тензоры  $F^{\mu\nu}$  и  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  называются тензором и дуальным тензором электромагнитного поля соответственно.

**Пример 9.10.** Систему уравнений Лоренца (9.39) записать в ковариантной форме.

**Решение.** Обозначим через  $\tau$  собственное время частицы, связанное с лабораторным соотношением

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma. \quad (9.62)$$

Тогда, обозначив

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = c\gamma(1, \vec{\beta}) = (u^0, \vec{u}),$$

соотношения (9.57), (9.58) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} &= \frac{e}{mc} \langle \vec{e}(\vec{x}, t), \vec{u} \rangle; \\ \frac{d\vec{u}}{d\tau} &= \frac{e}{mc} \left[ \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c\gamma} \vec{u} \times \vec{H}(\vec{x}, t) \right], \end{aligned}$$

откуда с учетом (9.61) окончательно получим

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu}(x)u_\nu, \quad x = (x^0, \vec{x}), \quad (9.63)$$

где  $x^0 = ct$ .

Использование ковариантных обозначений иногда позволяет значительно упростить рассматриваемую задачу.

**Пример 9.11.** Найти решение уравнения Лоренца в постоянном и однородном электромагнитном поле.

**Решение.** а) В постоянном и однородном электромагнитном поле тензор  $F^{\mu\nu}$  не зависит от  $x$ . Следовательно, уравнение (9.63) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, и его решение можно представить в виде

$$u^\mu(\tau) = \left( \exp \frac{e\tau}{mc} F \right)^\mu{}_\nu u^\nu(0).$$

б) Проинтегрировав левые и правые части (9.57) и (9.58) по  $t$ , получим

$$\begin{aligned} m[\gamma(t)\vec{\beta}(t) - \gamma(0)\vec{\beta}(0)] &= \frac{e}{c} \left[ t\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{x} \times \vec{H} \right]; \\ m[\gamma(t) - \gamma(0)] &= \frac{e}{c^2} \langle \vec{x}, \vec{E} \rangle. \end{aligned}$$

**Пример 9.12.** Линейно поляризованная плоская волна характеризуется изотропным направляющим вектором  $n^\mu$  и вектором поляризации  $\varepsilon^\mu$ , причем

$$n^\mu n_\mu = \varepsilon^\mu \varepsilon_\mu = 0, \quad \varepsilon^\mu \varepsilon_\mu = -1. \quad (9.64)$$

Электромагнитный потенциал плоской волны зависит только от  $\xi = n_\mu x^\mu$ :

$$\mathcal{A}^\mu(x) = \varepsilon^\mu f(\xi). \quad (9.65)$$

Найти решение уравнений Лоренца в поле плоской электромагнитной волны (9.65).

**Решение.** Из (9.64) следует, что  $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu(x) = 0$ , а тензор электромагнитного поля можно записать в виде

$$F^{\mu\nu}(x) = (n^\mu \varepsilon^\nu - n^\nu \varepsilon^\mu) f'(\xi). \quad (9.66)$$

Выберем систему координат так, чтобы  $x(0) = 0$ . Тогда

$$\xi = n_\mu x^\mu = u^\mu(0) n_\mu \tau, \quad (9.67)$$

а в системе уравнений Лоренца

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^\mu{}_\nu u^\nu \quad (9.68)$$

можно перейти от переменной  $\tau$  к переменной  $\xi$ . С учетом (9.66), (9.67) запишем

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{mc} f'(\xi) \left[ n^\mu \frac{\varepsilon^\nu u_\nu}{n^\sigma u_\sigma(0)} - \varepsilon^\mu \right]. \quad (9.69)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $u^\mu n_\mu = \text{const}$  в силу  $n_\mu F^{\mu\nu} = 0$ . Свернув левую и правую части последнего соотношения с  $\varepsilon_\mu$ , после интегрирования получим

$$u^\mu(\xi)\varepsilon_\mu = u^\mu(0)\varepsilon_\mu + \frac{e}{mc} [f(\xi) - f(0)]. \quad (9.70)$$

Подставим (9.70) в (9.69):

$$\frac{du^\mu}{d\xi} = \frac{e}{mc} f'(\xi) \left[ n^\mu \frac{\varepsilon^\nu u_\nu(0) + \frac{e}{mc} [f(\xi) - f(0)]}{n^\sigma u_\sigma(0)} - \varepsilon^\mu \right]. \quad (9.71)$$

Проинтегрировав (9.71), найдем

$$\begin{aligned} u^\mu(\xi) = & u^\mu(0) + \frac{e}{mc} [f(\xi) - f(0)] \left[ n^\mu \frac{\varepsilon^\nu u_\nu(0)}{n^\sigma u_\sigma(0)} - \varepsilon^\mu \right] + \\ & + \frac{e^2}{2m^2 c^2} [f(\xi) - f(0)]^2 \frac{n^\mu}{n^\sigma u_\sigma(0)}. \end{aligned} \quad (9.72)$$

## 10. Канонические уравнения Гамильтона

◊ Во многих задачах теоретической и математической физики оказывается полезным гамильтонов формализм, основанный на описании механической системы в канонических переменных и уравнении Эйлера–Лагранжа в так называемой канонической форме.

Рассмотрим задачу о нахождении экстремалей функционала действия

$$S[\vec{q}] = \int_a^b \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) dt, \quad \vec{q} \in \mathbb{R}^n. \quad (10.1)$$

Система уравнений Эйлера–Лагранжа для этого функционала имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10.2)$$



Эта система есть система  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $n$  неизвестных функций  $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ .

Рассмотрим обобщенные импульсы этой системы

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10.3)$$

Будем предполагать, что систему уравнений (10.3) можно разрешить относительно обобщенных скоростей  $\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ .

◇ Из теоремы о неявных функциях следует, что систему уравнений (10.3) можно разрешить относительно  $\dot{\vec{q}}$  (по крайней мере, локально), если

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| \neq 0. \quad (10.4)$$

◆ Функция, задаваемая равенством

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t) = \left[ \langle \dot{\vec{q}}, \vec{p} \rangle - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \right] \Big|_{\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)}, \quad (10.5)$$

называется функцией Гамильтона, отвечающей функции Лагранжа  $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ . Переход от переменных  $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$  и функций  $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$  к переменным  $\vec{p}, \vec{q}$  и функции  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$  по правилу (10.3) и (10.5) называется преобразованием Лежандра.

**Теорема 10.1.** Система уравнений Эйлера–Лагранжа (10.2) эквивалентна системе  $2n$  уравнений первого порядка

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}, \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \quad (10.6)$$

или в координатной форме

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$  – функция Гамильтона (10.5). Система (10.6) называется системой Гамильтона, или канонической формой системы уравнений Эйлера–Лагранжа.

**Доказательство.** Найдем полный дифференциал функции Гамильтона. По определению,

$$d\mathcal{H} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, d\vec{p} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}, d\vec{q} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt. \quad (10.7)$$

С другой стороны, из соотношения (10.5) следует

$$d\mathcal{H} = \left\langle \left( \vec{p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \right), d\dot{\vec{q}} \right\rangle + \langle \dot{\vec{q}}, d\vec{p} \rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}}, d\vec{q} \right\rangle - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (10.8)$$

Считая, что канонические переменные  $(\vec{p}, \vec{q})$  и  $t$  независимы и что  $\vec{p} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\vec{q}}$ , получим

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{q}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = -\dot{\vec{p}}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Здесь мы воспользовались уравнениями Лагранжа (10.2). Последние уравнения эквивалентны системе уравнений Гамильтона (10.6).

Таким образом, если  $\vec{q}(t)$  удовлетворяет системе уравнений Эйлера–Лагранжа, то  $z(t) = (\vec{p}(t), \vec{q}(t))$  удовлетворяет системе уравнений Гамильтона. Доказательство обратного утверждения аналогично. Системы Лагранжа и Гамильтона эквивалентны, что и требовалось доказать.

◇ Отметим, что для двумерного вектора  $z = (\vec{p}, \vec{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$  система Гамильтона (10.6) примет вид

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z(z, t), \quad (10.9)$$

где  $J$  – единичная симплектическая матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_{n \times n} \\ \mathbb{I}_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 10.1.** Найти функцию Гамильтона гармонического осциллятора (см. пример 9.2).

**Решение.** Найдем обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$

Следовательно,  $\dot{x} = p/m$ . Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(p, x, t) = [p\dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)] \Big|_{\dot{x}=p/m}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \quad k > 0, \quad m > 0. \quad (10.10)$$

**Пример 10.2.** Найти функцию Гамильтона классической системы с функцией Лагранжа (9.29)

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} - U(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^4. \quad (10.11)$$

**Решение.** По определению

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \left\{ \langle \vec{p}, \dot{\vec{x}} \rangle - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \right\} \Big|_{\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{p}, t)},$$

где  $\dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{p}, t)$  неявно определяется уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} = \vec{p}.$$

Следовательно,  $\dot{\vec{x}} = \vec{p}/m$ . Окончательно получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{x}, t). \quad (10.12)$$

**Пример 10.3.** Найти функцию Гамильтона нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

**Решение.** Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle + e\Phi(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (10.13)$$

Обобщенный импульс системы определяется соотношением

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t).$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \left[ \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \right] = \frac{1}{m} \vec{\mathcal{P}}, \quad (10.14)$$

где  $\vec{\mathcal{P}}$  – кинетический импульс системы. Тогда

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \left\{ \langle \vec{p}, \dot{\vec{x}} \rangle - \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2} + \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle + e\Phi(\vec{x}, t) \right\} \Big|_{\dot{\vec{x}}=\vec{p}/m}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\Phi(\vec{x}, t), \quad \vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \quad (10.15)$$

**Пример 10.4.** Найти функцию Гамильтона релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

**Решение.** Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle - e\Phi(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (10.16)$$

Найдем обобщенный импульс частицы

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \quad (10.17)$$

Тогда

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \left\{ \langle \vec{p}, \dot{\vec{x}} \rangle - \mathcal{L}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \right\} \Big|_{\dot{\vec{x}}=\dot{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}, t)}, \quad (10.18)$$

где  $\dot{\vec{x}}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  неявно определяется соотношением (10.17). Подставив (10.16) и (10.17) в (10.18), получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} + e\Phi(\vec{x}, t). \quad (10.19)$$

Заметим, что

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = c \sqrt{\frac{m^2 \dot{\vec{x}}^2}{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} + m^2 c^2}. \quad (10.20)$$

Из соотношения (10.17) найдем

$$\frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = \vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \quad (10.21)$$

С учетом (10.20) и (10.21) из (10.19) найдем

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} + e\Phi(\vec{x}, t). \quad (10.22)$$

**Пример 10.5.** Найти решение системы Гамильтона для гармонического осциллятора с функцией Гамильтона (10.10), удовлетворяющее начальному условию  $x|_{t=0} = x_0$ ,  $p|_{t=0} = p_0$ .

**Решение.** Система Гамильтона, отвечающая гамильтониану (10.10), имеет вид

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx.$$

Найдем

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\dot{p} = -\frac{k}{m}x$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.23)$$

Уравнение (10.23) – линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Следовательно,

$$\begin{aligned} X(t) &= A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ P(t) &= m\dot{x} = -m\omega A \sin \omega t + m\omega B \cos \omega t. \end{aligned}$$

Из начальных условий найдем

$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{\omega} \sin \omega t, \\ P(t) &= mp_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (10.24)$$

**Пример 10.6.** Записать уравнения Гамильтона для нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

**Решение.** Функция Гамильтона системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\Phi(\vec{x}, t), \quad \vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}, t). \quad (10.25)$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = \frac{1}{2m} \nabla \vec{P}^2 + e \nabla \Phi = -\frac{e}{c} \nabla \langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle + e \nabla \Phi(\vec{x}, t).$$

Окончательно получим

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{P}}{m}, \quad \dot{\vec{p}} = \frac{e}{c} \nabla \langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle - e \nabla \Phi(\vec{x}, t). \quad (10.26)$$

**Пример 10.7.** Найти решение системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2, \quad \vec{A} = \left( -\frac{Hx_2}{2}, \frac{Hx_1}{2} \right), \quad H = \text{const} \quad (10.27)$$

при начальном условии  $\vec{x}|_{t=0} = \vec{x}_0$ ,  $\vec{p}|_{t=0} = \vec{p}_0$ .

**Решение.** Найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} &= \frac{1}{m} \left( p_1 - \frac{eH}{2c} x_2, p_2 + \frac{eH}{2c} x_1 \right); \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} &= \frac{\omega}{2} \left( p_2 + \frac{eH}{2c} x_1, -p_1 + \frac{eH}{2c} x_2 \right), \quad \omega = \frac{eH}{mc}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \frac{1}{m} \vec{p} - i\sigma_2 \frac{\omega}{2} \vec{x}; \\ \dot{\vec{p}} &= -i\sigma_2 \frac{\omega}{2} \vec{p} - \frac{\omega}{2} \frac{eH}{2c} \vec{x}. \end{aligned}$$

Исключив из системы уравнений переменные  $\vec{p}$ , получим

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\dot{\vec{x}} + \frac{im\omega}{2} \sigma_2 \vec{x}; \\ m\ddot{\vec{x}} + \frac{im\omega}{2} \sigma_2 \dot{\vec{x}} &= -i\sigma_2 \frac{\omega}{2} \left( m\dot{\vec{x}} + \frac{im\omega}{2} \sigma_2 \vec{x} \right) - \frac{\omega}{2} \frac{eH}{2c} \vec{x}. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения вектора  $\vec{x}$  получим уравнение

$$\ddot{\vec{x}} + i\omega \sigma_2 \dot{\vec{x}} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\vec{X}(t) = -\frac{i}{\omega}(e^{-i\omega\sigma_2 t} - 1)\dot{\vec{x}}_0 + \vec{x}_0.$$

Окончательно запишем

$$\begin{aligned}\vec{X}(t, z_0) &= \frac{1}{2}[1 + e^{-i\omega\sigma_2 t}]\vec{x}_0 - \frac{i}{2}\sigma_2[1 - e^{-i\omega\sigma_2 t}]\vec{p}_0, \\ \vec{P}(t, z_0) &= \frac{1}{2}[1 + e^{-i\omega\sigma_2 t}]\vec{p}_0 - \frac{i m \omega}{2}[1 - e^{-i\omega\sigma_2 t}]\vec{x}_0.\end{aligned}\quad (10.28)$$

**Пример 10.8.** Записать уравнения Гамильтона для релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

**Решение.** Функция Гамильтона системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} + e\Phi(\vec{x}, t). \quad (10.29)$$

Аналогично примеру 10.6 получим

$$\dot{\vec{x}} = \frac{c^2}{\varepsilon}\vec{p}, \quad \dot{\vec{p}} = \frac{e}{c}\nabla\langle\dot{\vec{x}}, \vec{A}(\vec{x}, t)\rangle - e\nabla\Phi(\vec{x}, t), \quad (10.30)$$

где обозначено

$$\varepsilon = \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2 c^4}. \quad (10.31)$$

**Пример 10.9.** Показать, что система уравнений Гамильтона (10.30) эквивалентна системе уравнений Лоренца (9.39).

**Решение.** Функция Гамильтона системы имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\Phi(\vec{x}, t), \quad \vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}, t). \quad (10.32)$$

Заметим, что с учетом (10.20) и (10.21)

$$\varepsilon = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}}.$$

Тогда из первого уравнения системы (10.30) следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} &= \dot{\vec{p}} - \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \\ &= \frac{e}{c} \nabla \langle \dot{\vec{x}}, \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) \rangle - e \nabla \Phi(\vec{x}, t) - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{e}{c} \langle \dot{\vec{x}}, \nabla \rangle \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = \\ &= \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \text{rot } \vec{A}(\vec{x}, t) - e \nabla \Phi(\vec{x}, t) - \frac{e}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (10.30) и (9.33). С учетом формул (9.36) окончательно получим

$$\frac{d}{dt} \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2}} = e \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}(\vec{x}, t),$$

что и требовалось показать.

**Пример 10.10.** Найти решение системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - e \langle \vec{E}, \vec{x} \rangle, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (10.33)$$

удовлетворяющее условию  $\vec{x}|_{t=0} = \vec{x}_0$ ,  $\vec{p}|_{t=0} = \vec{p}_0$ . Здесь  $\vec{E}$  – постоянный вектор;  $e$  и  $m$  – заряд и масса частицы соответственно.

**Решение.** Система Гамильтона имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \dot{\vec{p}} = e \vec{E} \quad (10.34)$$

и описывает движение заряженной частицы в постоянном и однородном электромагнитном поле. Исключив переменную  $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ , получим систему

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m} \vec{E},$$

решение которой имеет вид

$$\vec{x}(t) = \frac{e}{2m} \vec{E} t^2 + \dot{\vec{x}}_0 t + \vec{x}_0.$$

Тогда

$$\vec{p}(t) = e \vec{E} t + m \dot{\vec{x}}_0.$$



**Пример 10.11.** Найти общее решение системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) = \sqrt{c^2 \vec{P}^2 + m^2 c^4}, \quad \vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{2c} \vec{H} \times \vec{x}, \quad (10.35)$$

где  $\vec{H}$  – постоянный вектор;  $e$  и  $m$  – заряд и масса частицы соответственно;  $c$  – скорость света.

**Решение.** Система Гамильтона имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = \frac{c^2}{\varepsilon} \vec{P}, \quad \dot{\vec{p}} = \frac{e}{2c} \nabla \langle \dot{\vec{x}}, \vec{H} \times \vec{x} \rangle = \frac{e}{2c} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}. \quad (10.36)$$

Поскольку гамильтониан (10.35) не зависит от времени,  $\varepsilon = \text{const}$ . Следовательно,

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{c^2}{\varepsilon} \left( \dot{\vec{p}} - \frac{e}{2c} \vec{H} \times \dot{\vec{x}} \right).$$

С учетом второго уравнения из (10.36) получим

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{ec}{\varepsilon} \dot{\vec{x}} \times \vec{H}. \quad (10.37)$$

Уравнение (10.37) – уравнение Лоренца для частицы в постоянном и однородном магнитном поле, решение которого дано в примере 9.9.

Переформулируем принцип Гамильтона для описания механической системы в канонических переменных. Соответствующий функционал действия примет вид

$$S[\vec{p}(t), \vec{q}(t)] = S[z(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle \vec{p}(t), \dot{\vec{q}}(t) \rangle - \mathcal{H}(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t) \} dt, \quad (10.38)$$

где  $\dot{\vec{q}}(t)$  определяется уравнением

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10.39)$$

Функционал (10.38) определен на функциях  $z(t) = (\vec{p}(t), \vec{q}(t))$  в  $2n$ -мерном фазовом пространстве.

**Теорема 10.2.** Экстремали функционала (10.38), (10.39) являются решениями системы Гамильтона (10.6).

**Доказательство.** Пусть  $\vec{q}$  и  $\vec{p}$  – независимые переменные. Тогда, варьируя функционал

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \langle \vec{p}, \delta \dot{\vec{q}} \rangle + \langle \dot{\vec{q}}, \delta \vec{p} \rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}, \delta \vec{q} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, \delta \vec{p} \right\rangle \right\} dt$$

при условии  $\delta q|_{t_1}^{t_2} = \delta p|_{t_1}^{t_2} = 0$  и учитывая, что

$$\delta \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial t} \delta q_j,$$

найдем

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} p_j \frac{d}{dt} \delta q_j dt = p_j \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_j \delta q_j dt.$$

Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \vec{p}_j, \delta \dot{\vec{q}}_j \rangle dt = \langle \vec{p}_j, \delta \vec{q}_j \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{\vec{p}}_j, \delta \vec{q}_j \rangle dt.$$

Тогда

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left\langle \left( \dot{\vec{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \right), \delta \vec{p} \right\rangle - \left\langle \left( \dot{\vec{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \right), \delta \vec{q} \right\rangle \right\} dt.$$

Следовательно, условие  $\delta S = 0$  эквивалентно равенствам

$$\dot{\vec{q}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\vec{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} = 0,$$

что и доказывает теорему.

## 11. Первые интегралы системы Гамильтона. Скобки Пуассона

◆ Функция  $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$  называется первым интегралом движения системы Гамильтона (10.6), если она постоянна на любых решениях системы Гамильтона  $\vec{p}(t), \vec{q}(t)$ , т.е.

$$A(t) = A(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t) = A(\vec{p}(t_0), \vec{q}(t_0), t_0). \quad (11.1)$$

◆ Скобкой Пуассона функций  $A(\vec{p}, \vec{q}, t), B(\vec{p}, \vec{q}, t)$  называется выражение

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= \{A(\vec{p}, \vec{q}, t), B(\vec{p}, \vec{q}, t)\} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) = \left\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{q}}, \frac{\partial B}{\partial \vec{p}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{p}}, \frac{\partial B}{\partial \vec{q}} \right\rangle \end{aligned} \quad (11.2)$$

◇ Иногда определение скобки Пуассона отличается от приведенного знаком.

Из определения вытекают следующие свойства скобки Пуассона:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}; \quad (11.3)$$

$$\{A, A\} = 0; \quad (11.4)$$

$$\{\alpha A, B\} = \{A, \alpha B\} = \alpha \{A, B\}, \quad \alpha = \text{const}; \quad (11.5)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0; \quad (11.6)$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}; \quad (11.7)$$

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + B\{A, C\}. \quad (11.8)$$

Соотношение (11.6) называется тождеством Якоби.

**Теорема 11.1.** *Функция  $A = A(\vec{p}, \vec{q}, t)$  является первым интегралом движения системы Гамильтона тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial A(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial t} + \{A(\vec{p}, \vec{q}, t), \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)\} = 0, \quad (11.9)$$

где  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$  – функция Гамильтона рассматриваемой системы.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $A(t) = A(\vec{p}(t), \vec{q}(t), t)$  на траекториях системы Гамильтона (10.6) и вычислим про-

изводную

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \left[ \left\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{p}}, \dot{\vec{p}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{q}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle + \frac{\partial A}{\partial t} \right] \Bigg|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t) \\ \vec{q}=\vec{q}(t)}}} = \\ &= \left[ \left\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{p}}, \left( -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} \right) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial \vec{q}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} \right\rangle + \frac{\partial A}{\partial t} \right] \Bigg|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t) \\ \vec{q}=\vec{q}(t)}}} = \\ &= \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\} \right] \Bigg|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t) \\ \vec{q}=\vec{q}(t)}}}. \end{aligned}$$

Тогда если  $A(t) = \text{const}$ , т.е.  $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$  – интеграл движения, то  $dA/dt = 0$  на фазовых траекториях  $z(t) = (\vec{p}(t), \vec{q}(t))$ . Поскольку через каждую точку фазового пространства проходит только одна траектория, то справедливо (11.9). Наоборот, если справедливо уравнение (11.9), то в силу предыдущих выкладок  $dA/dt = 0$ , а, следовательно,  $A(t) = \text{const}$  и  $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$  – интеграл движения. Таким образом, теорема доказана.

◇ Соотношение (11.9) есть уравнение в частных производных первого порядка относительно функции  $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$  при заданной функции  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ . Методы интегрирования таких уравнений рассмотрены в разд. «Уравнения Гамильтона – Якоби».

◇ Уравнение Гамильтона (10.6) с помощью скобок Пуассона можно записать в виде

$$\dot{\vec{p}} = \{\vec{p}, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\vec{q}} = \{\vec{q}, \mathcal{H}\}. \quad (11.10)$$

**Теорема 11.2 (Пуассона).** Если функции  $A(\vec{p}, \vec{q}, t)$  и  $B(\vec{p}, \vec{q}, t)$  являются интегралами движения, то функция  $C(\vec{p}, \vec{q}, t) = \{A(\vec{p}, \vec{q}, t), B(\vec{p}, \vec{q}, t)\}$  также является интегралом движения.

**Доказательство.** Пусть

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \{B, \mathcal{H}\} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial t} + \{C, \mathcal{H}\}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \{A, B\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\}, \\ \{C, \mathcal{H}\} &= \{\{A, B\}, \mathcal{H}\} = -\{\mathcal{H}, \{A, B\}\} = \\ &= \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} - \{B, \{A, \mathcal{H}\}\}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством Якоби

$$\{\mathcal{H}, \{A, B\}\} + \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} - \{B, \{A, \mathcal{H}\}\} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \{C, \mathcal{H}\} &= \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\} + \{A, \{B, \mathcal{H}\}\} - \{B, \{A, \mathcal{H}\}\} = \\ &= \left\{ A, \left( \frac{\partial B}{\partial t} + \{B, \mathcal{H}\} \right) \right\} + \left\{ \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\} \right), B \right\} = 0. \end{aligned}$$

В силу теоремы 11.1  $C(\vec{p}, \vec{q}, t) = \text{const}$  на любых траекториях системы Гамильтона, что и требовалось доказать.

♦ Фундаментальными, или каноническими, скобками Пуассона называются скобки Пуассона канонических переменных

$$\{q_l, q_j\} = 0, \quad \{p_l, p_j\} = 0, \quad \{q_l, p_j\} = \delta_{l,j}, \quad l, j = \overline{1, n}.$$

## 12. Канонические преобразования

♦ Преобразование координат фазового пространства  $z = (\vec{p}, \vec{q})$  к координатам  $\omega = (\vec{P}, \vec{Q})$  называется каноническим, если для любых функций  $A(z, t)$  и  $B(z, t)$  сохраняются их скобки Пуассона, т.е. справедливо равенство

$$\{A, B\}_z = \{\tilde{A}, \tilde{B}\}_\omega, \quad (12.1)$$

где  $\tilde{A}(\omega, t) = A(z, t)|_{z=z(\omega)}$ .

♦ Там, где это не приводит к недоразумениям, будем писать  $A(\vec{P}, \vec{Q}, t)$  вместо  $\tilde{A}(\vec{P}, \vec{Q}, t)$ .

♦  $2n \times 2n$  Матрица  $S$  называется симплектической, если справедливо соотношение

$$S^t J S = J, \quad (12.2)$$

где  $J$  – единичная симплектическая матрица.

**Теорема 12.1.** Преобразование координат фазового пространства  $z \rightarrow \omega = \omega(z, t)$  будет каноническим тогда и только тогда, когда матрица Якоби  $\partial\omega/\partial z$  этого преобразования

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = \left\| \frac{\partial\omega_b}{\partial z_b} \right\|_{2n \times 2n} = \left( \frac{\partial\omega}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial\omega}{\partial z_{2n}} \right) \quad (12.3)$$

будет симплектической.

**Доказательство.** Скобку Пуассона двух функций  $A(z, t)$  и  $B(z, t)$  с помощью матрицы  $J$  можно представить в виде

$$\{A, B\}_z = \left\langle \frac{\partial A}{\partial z}, J \frac{\partial B}{\partial z} \right\rangle. \quad (12.4)$$

При преобразовании фазового пространства  $\omega = \omega(z)$  частные производные и дифференциалы преобразуются по правилу

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \omega}. \quad (12.5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \{A, B\}_z &= \left\langle \frac{\partial A}{\partial z}, J \frac{\partial B}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial \omega}, J \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial \omega} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial A}{\partial \omega}, \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^t J \frac{\partial B}{\partial \omega} \right\rangle. \end{aligned} \quad (12.6)$$

С другой стороны,

$$\{A, B\}_\omega = \left\langle \frac{\partial A}{\partial \omega}, J \frac{\partial B}{\partial \omega} \right\rangle. \quad (12.7)$$

Таким образом, если преобразование  $\omega = \omega(z)$  каноническое, т.е. выполняется соотношение (12.1), то необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^t J \frac{\partial \omega}{\partial z} = J, \quad (12.8)$$

т.е. чтобы матрица  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$  была симплектической. Наоборот, если матрица  $\frac{\partial \omega}{\partial z}$  симплектическая (справедлива формула (12.8)), то из (12.6) и (12.7) следует, что

$$\{A, B\}_z = \{A, B\}_\omega,$$

т.е. преобразование  $\omega = \omega(z)$  будет каноническим. Таким образом, теорема доказана.

**Следствие 12.1.1.** Пусть  $\omega = \overline{\omega(z)}$  – каноническое преобразование фазового пространства и пусть вектор  $z = z(t)$  – решение системы Гамильтона

$$\dot{z} = J \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}.$$

Тогда вектор  $\omega = \omega(z(t))$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\omega} = J \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \omega},$$

где  $\tilde{\mathcal{H}}(\omega, t) = \mathcal{H}(z, t)|_{z=z(\omega)}$ .

**Доказательство.** Найдем полную производную функции

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{d}{dt} \omega(z(t)) = \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^t \dot{z} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^t J \mathcal{H}_z = \\ &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^t J \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \omega} = J \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \omega}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

◆ Оператором сдвига вдоль траекторий системы Гамильтона (10.6) за время  $t - t_0$  называется преобразование фазового пространства

$$\hat{g}(t, t_0) : z_0 \rightarrow z = Z(t, z_0, t_0),$$

где  $Z(t, z_0, t_0)$  – решение задачи Коши для системы Гамильтона

$$\dot{z} = J \partial_z \mathcal{H}(z, t), \quad z|_{t=t_0} = z_0. \quad (12.9)$$

**Следствие 12.1.2.** Преобразование фазового пространства

$$\hat{g}(t, t_0) A(z_0, t_0) = A(z(t), t), \quad (12.10)$$

задаваемое оператором сдвига  $\hat{g}(t, t_0)$  по траекториям гамильтоновой системы, является каноническим.

**Доказательство.** Для доказательства утверждения достаточно показать, что матрица  $\partial Z(t, z_0, t_0) / \partial z_0$  симплектическая.

1. Очевидно, что матрица  $\partial Z(t, z_0, t_0) / \partial z_0$  при  $t = t_0$  симплектическая, так как  $\partial Z(t_0, z_0, t_0) / \partial z_0 = \mathbb{I}_{2n \times 2n}$ .

2. Пусть  $z = Z(t, z_0, t_0)$  – решение задачи Коши (12.9). Тогда

$$\dot{Z}(t, z_0, t_0) = J \partial \mathcal{H}(Z(t, z_0, t_0), t)$$

для любого  $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . Продифференцируем это равенство по  $z_{01}, \dots, z_{02n}$ . Тогда для определения матрицы

$$A(t) = A(t, z_0, t_0) = \frac{\partial Z(t, z_0, t_0)}{\partial z_0}$$

получим уравнение

$$\dot{A}(t) = J\mathcal{H}''_{zz}(Z(t, z_0, t_0), t)A(t), \quad A(t_0) = \mathbb{I}_{2n \times 2n}. \quad (12.11)$$

3. Рассмотрим, как изменяется со временем матрица  $M(t) = A^t(t)JA(t)$ . Найдем

$$\dot{M} = \dot{A}^t JA + A^t J\dot{A} = A^t \mathcal{H}''_{zz} J^t JA + A^t J J \mathcal{H}''_{zz} A = 0_{2n \times 2n}.$$

Следовательно,  $M(t) = M(t_0) = \mathbb{I} \cdot J \cdot \mathbb{I} = J$ . Таким образом, матрица  $A(t) = \partial Z(t, z_0, t_0) / \partial z_0$  симплектическая, что и доказывает теорему.

**Следствие 12.1.3.** Преобразование фазового пространства, обратное каноническому, является каноническим.

**Доказательство** следует из того факта, что матрица, обратная симплектической, также является симплектической.

## 13. Теорема Лиувилля

Рассмотрим область  $G_0$  фазового пространства с гладкой границей. Пусть  $z_0$  – точка фазового пространства, принадлежащая области  $G_0$ . Из каждой точки  $z_0 \in G_0$  выпустим траекторию системы Гамильтона

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z, \quad z|_{t=t_0} = z_0, \quad z_0 \in G_0. \quad (13.1)$$

Обозначим через  $Z(t, z_0, t_0)$  решение задачи Коши (13.1). В фиксированный момент времени точки  $z_t = Z(t, z_0, t_0)$ ,  $z_0 \in G_0$ , занимают некоторую область фазового пространства, которую обозначим через  $G_t$ . Обозначим через  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_t$  фазовый объем областей  $G_0$  и  $G_t$  соответственно:

$$\Gamma_0 = \int_{G_0} dz_0, \quad \Gamma_t = \int_{G_t} dz. \quad (13.2)$$

**Теорема 13.1 (Лиувилля).** *Фазовый объем сохраняется, т.е.*

$$\Gamma_t = \Gamma_0, \quad t > t_0. \quad (13.3)$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, рассмотрим вспомогательное утверждение.



**Лемма 13.1.** Если квадратная матрица  $C(t)$  удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{C} = A(t)C, \quad C|_{t=0} = C_0, \quad (13.4)$$

то для определителя матрицы  $C(t)$  справедливо

$$\det C(t) = \det C(0) \exp \left\{ \int_0^t \operatorname{Sp} A(t) dt \right\}. \quad (13.5)$$

Соотношение (13.5) называется тождеством Якоби.

◇ Здесь через  $\operatorname{Sp} A$  обозначен след матрицы  $A$ , т.е.

$$\operatorname{Sp} A = \sum_{k=1}^n A_{kk}. \quad (13.6)$$

**Доказательство.** Определитель матрицы  $C(t) = (\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_n)$  продифференцируем по  $t$  и воспользуемся уравнением (13.5). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det C(t) &= \sum_{k=1}^n \det(\vec{C}_1, \dots, \vec{C}_{k-1}, \dot{\vec{C}}_k, \vec{C}_{k+1}, \dots, \vec{C}_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \det(C_{1i}, \dots, C_{k-1,i}, A_{kj} C_{ji}, C_{k+1,i}, \dots, C_{ni}) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_{kk} \det C(t). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойствами определителей, а именно: определитель не изменяется, если к элементам какого-либо столбца прибавить элементы другого столбца, умноженные на произвольную постоянную, и общий множитель столбца можно выносить за знак определителя. Следовательно,

$$\frac{d \det C}{dt} = \operatorname{Sp} A(t) \det C.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы Лиувилля.

**Доказательство.** 1.  $2n \times 2n$ -матрица

$$A(t) = \frac{\partial Z(t, z_0, t_0)}{\partial z_0}$$

симплектическая, а значит, невырожденная, поэтому в интеграле (13.2), определяющем фазовый объем  $\Gamma_t$ , можно сделать замену переменных  $z \rightarrow z_0$ . Получим

$$\Gamma_t = \int_{G_t} dz = \int_{G_0} \mathcal{D}(t) dz_0, \quad (13.7)$$

где  $\mathcal{D}(t) = \det A(t)$  – якобиан преобразования.

2. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что функциональный определитель  $\mathcal{D}(t)$  не зависит от времени, т.е.  $\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t_0) = 1$ .

3. Согласно тождеству Якоби (13.5) из системы (12.11) следует

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t [\text{Sp } J\mathcal{H}''_{zz}(t)] dt \right\},$$

Вычислим след матрицы  $J\mathcal{H}''_{zz}(t)$

$$\text{Sp } J\mathcal{H}''_{zz}(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{2n} J_{kj} \mathcal{H}_{z_j z_k}(t).$$

Переобозначим индексы суммирования  $j \rightarrow k, k \rightarrow j$ . Получим

$$\text{Sp } J\mathcal{H}''_{zz}(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{2n} J_{jk} \mathcal{H}_{z_j z_k}(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{2n} J_{kj} \mathcal{H}_{z_k z_j}(t) = -\text{Sp } J\mathcal{H}''_{zz}(t).$$

Здесь мы воспользовались тем, что матрица  $J$  антисимметрична, т.е.  $J_{kj} = -J_{jk}$ .

Следовательно,

$$\text{Sp } J\mathcal{H}''_{zz}(t) = -\text{Sp } J\mathcal{H}''_{zz}(t) = 0$$

и

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t_0) = 1. \quad (13.8)$$

Тем самым теорема доказана.

## 14. Уравнения движения классических частиц со спином во внешних полях

Изучение спиновых свойств элементарных частиц в классической электродинамике началось с появления известных работ Я.И. Френкеля [59] в 1926 г., вскоре после открытия у электрона собственного механического момента. Поводом послужила попытка Томаса объяснить мультиплетную структуру спектральных линий атома водорода с помощью полуклассического введения спин-орбитального взаимодействия. Я.И. Френкель обратил внимание на то, что для полной характеристики магнитных свойств электрона задания трехмерного вектора магнитного момента  $\vec{\mu}$  принципиально недостаточно. Пользуясь математическим аппаратом специальной теории относительности, он построил классическую теорию спина на основе введенного им тензора моментов  $\mu_{\alpha\beta}$ .

### 14.1. Уравнения Френкеля–Найборга

Следуя Я.И. Френкелю [59] (см. также [?, 4] и цитируемую там литературу), введем спиновый момент количества движения в тензорной форме путем задания безразмерного антисимметричного тензора

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi_x & -\Phi_y & -\Phi_z \\ \Phi_x & 0 & \Pi_z & -\Pi_y \\ \Phi_y & -\Pi_z & 0 & \Pi_x \\ \Phi_z & \Pi_y & -\Pi_x & 0 \end{pmatrix} = (\vec{\Phi}; \vec{\Pi}). \quad (14.1)$$

Соответствующий ему тензор поляризации частицы, определяющий взаимодействие с внешним электромагнитным полем, запишем как

$$M^{\alpha\beta} = (\vec{N}; \vec{M}) = \mu \Pi^{\alpha\beta}, \quad (14.2)$$

где  $\mu = gs\mu_0$  – собственный магнитный момент;  $\mu_0 = e\hbar/2mc$  – магнетон Бора. Здесь введен известный  $g$ -фактор частицы и число  $s$ , кратное  $1/2$  (спин частицы в единицах  $\hbar$ ).

Так как механический момент количества движения является трехмерным вектором, то Я.И. Френкель потребовал, чтобы в системе покоя частицы спин описывался только одним вектором  $\vec{\Pi}_0$ . Отсюда следует, что  $\Pi^{\alpha\beta}$  – пространственно подобный тензор, т.е.

$$\Pi_0^{\alpha\beta} = (\vec{0}; \vec{\Pi}_0). \quad (14.3)$$

Тогда в любой другой координатной системе будет выполняться условие

$$\Pi^{\alpha\beta} u_\beta = 0, \quad (14.4)$$

где  $u^\nu = dx^\nu/d\tau = c\gamma(1, \vec{\beta})$  – четырехмерная скорость частицы;  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Ковариантное условие (14.4) можно записать и в трехмерном виде:

$$\vec{\Phi} = \vec{\beta} \times \vec{\Pi}. \quad (14.5)$$

Тензор  $\Pi^{\mu\nu}$  имеет два инварианта:

$$I_1 = \frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} = \vec{\Pi}^2 - \vec{\Phi}^2; \quad I_2 = \frac{1}{4} \Pi^{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} = \langle \vec{\Pi}, \vec{\Phi} \rangle, \quad (14.6)$$

где

$$\Phi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Pi_{\rho\sigma} = \langle -\vec{\Pi}, \vec{\Phi} \rangle \quad (14.7)$$

– тензор, дуальный к  $\Pi^{\mu\nu}$ , а  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  – символ Леви–Чивиты.

Второй из этих инвариантов  $I_2$  в силу условия (14.5) равен нулю. Потребуем, чтобы для первого инварианта выполнялось

$$I_1 = \vec{\Pi}^2 - \vec{\Phi}^2 = (1 - \beta^2) \vec{\Pi}^2 + \langle \vec{\beta}, \vec{\Pi} \rangle^2 = 1. \quad (14.8)$$

Это налагает дополнительное условие на вектор  $\vec{\Pi}$ , в результате чего независимыми будут только две компоненты этого вектора и, стало быть, тензора  $\Pi^{\mu\nu}$ .

Находящийся во внешнем электромагнитном поле магнитный момент в нерелятивистской теории, как известно, обладает энергией  $U = -\langle \vec{M}, \vec{H} \rangle$ . В случае покоящейся частицы, которую Я.И. Френкель трактует как материальную точку, обладающую, помимо заряда, собственным магнитным моментом (магнетон), согласно (14.2), будем иметь

$$U_0 = -\mu \langle \vec{\Pi}_0, \vec{H}_0 \rangle. \quad (14.9)$$

Отсюда следует, что на частицу в системе покоя будет действовать сила

$$\vec{F}_0 = e \vec{E}_0 + \mu \nabla \langle \vec{\Pi}_0, \vec{H}_0 \rangle. \quad (14.10)$$

Чтобы найти выражение для силы в лабораторной системе, формуле (14.10) необходимо предварительно придать ковариантный вид:

$$\tilde{f}^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\nu} u_\nu + \frac{1}{2} \mu \partial^\alpha F^{\nu\rho} \Pi_{\nu\rho}, \quad (14.11)$$

где  $F^{\mu\nu} = (\vec{E}; \vec{H})$  – тензор электромагнитного поля (9.61).

Однако в таком виде четырехмерная сила еще не удовлетворяет условию ортогональности

$$\tilde{F}^\alpha u_\alpha = 0, \quad (14.12)$$

которое является необходимым в специальной теории относительности.

Для выполнения условия (14.12) из вектора  $\tilde{f}^\alpha$  следует выделить пространственно-подобную часть, которая и будет являться

искомым четырехмерным вектором силы. В ковариантном виде эта процедура осуществляется следующим образом:

$$f^\alpha = \left( \delta_\nu^\alpha + \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\nu \right) \tilde{f}^\nu. \quad (14.13)$$

В результате получим уравнение движения частицы

$$m \dot{u}^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\nu} u_\nu + \frac{1}{2} \mu D^\alpha F^{\nu\sigma} \Pi_{\nu\sigma}; \quad (14.14)$$

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \frac{1}{c^2} u_\alpha u^\nu \partial_\nu. \quad (14.15)$$

В этом виде уравнение было получено Найборгом.

Вернемся к описанию движения спина во внешнем электромагнитном поле. Очевидно, что в системе покоя магнитный момент и спин частицы должны удовлетворять уравнению

$$s \hbar \dot{\vec{\Pi}}_0 = \mu \vec{\Pi}_0 \times \vec{H}_0, \quad (14.16)$$

которое в ковариантной форме принимает вид

$$s \hbar \dot{\hat{\Pi}}^{\alpha\nu} = \mu (F_{\cdot\rho}^\alpha \tilde{\Pi}^{\rho\nu} - F_{\cdot\rho}^\nu \tilde{\Pi}^{\rho\alpha}). \quad (14.17)$$

Легко убедиться, однако, что правая часть этого уравнения в системе покоя имеет пространственно-временную компоненту

$$s \hbar \dot{\hat{\Pi}}_0^{\alpha\nu} = \mu (-\vec{\Pi}_0 \times \vec{E}_0; \vec{\Pi}_0 \times \vec{H}_0). \quad (14.18)$$

Исправить положение можно, выделив из тензора  $\hat{\Pi}^{\alpha\nu}$  пространственно-подобную часть

$$\dot{\hat{\Pi}}^{\alpha\nu} = \left( \delta_\rho^\alpha + \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\rho \right) \left( \delta_\sigma^\nu + \frac{1}{c^2} u^\nu u_\sigma \right) \dot{\hat{\Pi}}^{\rho\sigma}. \quad (14.19)$$

Теперь имеем

$$s \hbar \dot{\hat{\Pi}}^{\alpha\nu} = \mu \left[ F_{\cdot\rho}^\alpha \dot{\hat{\Pi}}^{\rho\nu} - F_{\cdot\rho}^\nu \dot{\hat{\Pi}}^{\rho\alpha} + \frac{1}{c^2} (u^\alpha \dot{\hat{\Pi}}^{\nu\sigma} - u^\nu \dot{\hat{\Pi}}^{\alpha\sigma}) F_{\sigma\beta} u^\beta \right]. \quad (14.20)$$

Полученное выражение, тем не менее, не удовлетворяет еще условию Френкеля (14.4). Потребуем выполнения этого условия, представив уравнение (14.19) в виде

$$s \hbar \dot{\hat{\Pi}}^{\alpha\nu} = \mu \left[ H_{\cdot\rho}^\alpha \Pi^{\rho\nu} - H_{\cdot\rho}^\nu \Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{c^2} (u^\alpha \Pi^{\nu\sigma} - u^\nu \Pi^{\alpha\sigma}) F_{\alpha\beta} u^\beta \right] + \frac{1}{c^2} (u^\alpha K^\nu - u^\nu K^\alpha) s \hbar. \quad (14.21)$$

Чтобы это уравнение в системе покоя имело вид (14.16), четырехмерный вектор  $K^\alpha$  должен быть пространственно-подобным, т.е.  $K^\alpha u_\alpha = 0$ , в остальном он пока произволен. Выражение для  $K^\alpha$  найдем из соотношения

$$\frac{d}{d\tau}(\Pi^{\alpha\nu} u_\nu) = 0, \quad (14.22)$$

которое является следствием условия Френкеля (14.4).

Отсюда с учетом уравнения (14.14) найдем

$$K^\alpha = -\Pi^{\alpha\nu} \left[ \frac{e}{mc} F_{\nu\rho} u^\rho + \frac{1}{2m} \mu D_\nu F^{\rho\sigma} \Pi_{\rho\sigma} \right]. \quad (14.23)$$

Спиновое уравнение (14.21) примет теперь вид

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^{\alpha\nu} = & \frac{\mu}{s\hbar} (F_{\cdot\rho}^{\alpha\cdot} \Pi^{\rho\nu} - F_{\cdot\rho}^{\nu\cdot} \Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{c^2} (u^\alpha \Pi^{\nu\beta} - u^\nu \Pi^{\alpha\beta}) \times \\ & \times \left[ \left( \frac{\mu}{s\hbar} - \frac{e}{mc} \right) F_{\beta\gamma} u^\gamma - \frac{\mu}{2m} D_\beta F_{\rho\sigma} \Pi^{\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Постоянную Планка  $\hbar$  можно исключить, воспользовавшись приведенным выше определением  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^{\alpha\nu} = & \frac{eg}{2mc} (F_{\cdot\rho}^{\alpha\cdot} \Pi^{\rho\nu} - F_{\cdot\rho}^{\nu\cdot} \Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{2mc^2} (u^\alpha \Pi^{\nu\beta} - u^\nu \Pi^{\alpha\beta}) \times \\ & \times \left[ \frac{e}{c} (g-2) F_{\beta\gamma} u^\gamma - \mu D_\beta F^{\rho\sigma} \Pi_{\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Это и есть тензорное уравнение для спина, полученное Найборгом.

Заметим, что входящий сюда  $g$ -фактор в классической теории является произвольной константой. Что касается значения  $\mu$ , то его можно рассматривать как аномальный магнитный момент частицы. Легко видеть, что уравнение (14.25) является нелинейным. Это объясняется тем, что в нем учитывается влияние ускорения частицы на движение спина. В уравнении (14.14), в свою очередь, присутствует слагаемое, зависящее от спина, что приводит к обратному влиянию спина на траекторию частицы. Таким образом, мы имеем дело с самосогласованной системой «спин – орбита».

Рассмотрим некоторые свойства уравнения (14.25). Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливо соотношение

$$\frac{d}{d\tau}(\Pi^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}) = 0. \quad (14.26)$$

Следствием этого равенства является автоматическое выполнение условия (14.8) при выполнении его в начальный момент времени.

Заметим теперь, что если в уравнении (14.25) с использованием (14.14) явным образом выделить слагаемое, зависящее от ускорения

частицы  $\dot{u}^\nu$ , то формально это уравнение принимает линеаризованный по  $\Pi^{\mu\nu}$  вид [4]:

$$\dot{\Pi}^{\alpha\nu} = \frac{eg}{2mc} (F_{\cdot\rho}^{\alpha\cdot} \Pi^{\rho\beta} - F_{\cdot\rho}^{\beta\cdot} \Pi^{\rho\alpha} + \frac{1}{2mc^2} (u^\alpha \Pi_{\cdot\rho}^{\beta\cdot} - u^\beta \Pi_{\cdot\rho}^{\alpha\cdot}) \times \\ \times \left[ \frac{eg}{2mc} F^{\rho\sigma} u_\sigma - \dot{u}^\rho \right]. \quad (14.27)$$

При  $g = 2$  это уравнение полностью совпадает с уравнением Френкеля. Уравнение (14.25) в предположении  $g = 2$  также идентично этому уравнению, если в последнем учесть значением вычисленной Френкелем величины  $a_\gamma$ . Как известно, условие  $g = 2$  означает, что аномальный магнитный момент электрона отсутствует. Заметим, что Я.И. Френкель в то время не мог знать о наличии аномального магнитного момента электрона. Уравнение (14.27), равно как и (14.24), принято называть уравнением Френкеля–Найборга (см. [?, 4]).

## 14.2. Уравнения Тамма–Гуда

Согласно утверждению И.Е. Тамма, собственный механический момент частицы в классической электродинамике должен описываться четырехмерным (псевдо)вектором (который, как правило, полагают безразмерным)

$$a^\mu = (a^0, \vec{a}). \quad (14.28)$$

Этот вектор удовлетворяет условию Тамма

$$a^\mu u_\mu = 0, \quad (14.29)$$

которое означает, что  $a^\mu$  – пространственно-подобный вектор. Как следствие, временная компонента  $a^\mu$  не является независимой:

$$a^0 = \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle. \quad (14.30)$$

Квадрат четырехмерного вектора, как известно, является инвариантной величиной. Потребуем, чтобы

$$a^\mu a_\mu = 1. \quad (14.31)$$

Тогда четырехмерный вектор  $a^\mu$  так же, как и тензор  $\Pi^{\mu\nu}$ , будет иметь только две независимые компоненты. Поскольку и вектор  $a^\mu$ , и тензор  $\Pi^{\mu\nu}$  описывают одну и ту же физическую величину, то между ними должно существовать взаимно-однозначное соответствие. Искомое соотношение известно в литературе (см., например, [?]):

$$2ca^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \Pi_{\mu\nu} u_\beta. \quad (14.32)$$

Легко найти обратное соотношение:

$$c\Pi_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\rho u^\sigma. \quad (14.33)$$

Условия Френкеля (14.4) и Тамма (14.29) выполняются при этом автоматически.

Заметим также, что

$$a^\mu a_\mu = I_1 = 1 \quad (14.34)$$

в полном соответствии с (14.8) и (14.31).

С помощью соотношения (14.32) уравнение движения для вектора  $a^\mu$  можно получить непосредственно из уравнения Френкеля–Найборга.

В результате имеем

$$\dot{a}^\alpha = \frac{eg}{2mc} F^{\alpha\beta} a_\beta + \frac{u^\alpha}{mc^3} \left[ \frac{e}{2}(g-2)u_\beta F^{\beta\gamma} + \mu\partial^\gamma \tilde{F}^{\rho\sigma} a_\rho u_\sigma \right] a_\gamma, \quad (14.35)$$

где  $\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{H}; \vec{E})$  – тензор, дуальный к  $F^{\mu\nu}$  (9.61). Соответствующее уравнение движения частицы

$$m\dot{u}^\alpha = \frac{e}{c} F^{\alpha\nu} u_\nu + \frac{\mu}{c} D_\alpha \tilde{F}^{\rho\sigma} a_\rho u_\sigma. \quad (14.36)$$

Уравнения (14.35) и (14.36) были впервые получены Гудом.

Как и в тензорном варианте, имеем самосогласованную систему спин–орбита.

В отсутствие аномального момента, т.е. когда  $g = 2$ , спиновое уравнение Гуда переходит в уравнение Тамма. В связи с этим уравнение движения четырехмерного вектора спина  $a^\mu$  принято называть уравнением Тамма–Гуда. Силовое уравнение Тамма после выделения в нем пространственно-подобной части совпадает с уравнением (14.36).

Разумеется, уравнение Тамма–Гуда можно получить и независимо от уравнения Френкеля–Найборга, действуя методом, применявшимся в предыдущем разделе.

Легко заметить, что для уравнения Тамма–Гуда справедливо

$$\frac{d}{d\tau} a^\mu a_\mu = 0. \quad (14.37)$$

Это обеспечивает выполнение условия (14.31).

Представим уравнение (14.35) в форме, аналогичной (14.27), выделив слагаемое с ускорением  $\dot{u}^\alpha$ . Получим

$$\dot{a}^\alpha = \frac{eg}{2mc} (F^{\alpha\beta} a_\beta - u^\alpha u_\beta F^{\beta\gamma} a_\gamma) + \frac{1}{c^2} u^\alpha a^\beta \dot{u}_\beta. \quad (14.38)$$



Если заряд частицы отсутствует (нейтрон), то уравнение (14.38) принимает вид чисто кинематического соотношения

$$c^2 \dot{a}^\alpha = u^\alpha a^\beta \dot{u}_\beta. \quad (14.39)$$

Если считать ускорение заданным, то уравнение (14.39) будет описывать движение спина, известное как прецессия Томаса.

Остановимся теперь на соответствии тензорной и векторной форм описания спина. В трехмерной форме соотношения (14.32) и (14.33) имеют вид

$$\begin{aligned} a^0 &= \gamma \langle \vec{\beta}, \vec{\Pi} \rangle, & \vec{a} &= \gamma (\vec{\Pi} + \vec{\beta} \times \vec{\Pi}), \\ \vec{\Pi} &= \gamma [\vec{a} - \vec{\beta} \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle], & \vec{\Phi} &= \gamma (\vec{\beta} \times \vec{a}). \end{aligned} \quad (14.40)$$

Отсюда следует, что в системе покоя векторы  $\vec{\Pi}$  и  $\vec{a}$  совпадают:

$$\vec{\Pi}_0 = \vec{a}_0 = \vec{\zeta}. \quad (14.41)$$

В лабораторной системе физический смысл  $\vec{\Pi}$  и  $\vec{a}$  становится различным. Временная компонента  $a_0$  описывает продольную ориентацию вектора  $\vec{\Pi}$ , а пространственно-временная компонента  $\vec{\Phi}$  – поперечную ориентацию вектора  $\vec{a}$ .

Чтобы установить адекватное соответствие этих векторов с вектором  $\vec{\zeta}$ , обратимся к преобразованиям Лоренца. Как компонента тензора вектор  $\vec{\Pi}$  преобразуется из системы покоя в лабораторную систему по закону

$$\vec{\Pi} = \gamma \vec{\zeta} - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \langle \vec{\beta}, \vec{\zeta} \rangle \vec{\beta}, \quad (14.42)$$

тогда как то же преобразование для вектора  $\vec{a}$  имеет вид

$$\vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \langle \vec{\beta}, \vec{\zeta} \rangle \vec{\beta}. \quad (14.43)$$

Легко найти обратное преобразование

$$\vec{\zeta} = \vec{a} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle \vec{\beta} = \frac{1}{\gamma} \vec{\Pi} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \langle \vec{\beta}, \vec{\Pi} \rangle \vec{\beta}. \quad (14.44)$$

Если известно решение спинового уравнения для одного из векторов,  $\vec{\Pi}$  или  $\vec{a}$ , то, согласно (14.42), (14.43) и (14.40), можно найти  $\vec{\zeta}$  как функцию лабораторных параметров. Можно поступить и иначе: сначала написать уравнение для вектора  $\vec{\zeta}$  в лабораторной системе, а затем найти его решение.

### 14.3. Уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди

Помимо рассмотренных выше уравнений движения классической частицы с собственным магнитным моментом существует еще уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди, первоначально полученное в квазиклассическом пределе из уравнения Дирака. Мы выведем [?] это уравнение для произвольных электромагнитных полей из уравнения Дирака с помощью квазиклассического метода.

Уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди можно также получить с помощью процедуры, описанной выше (см., например, [?, ?]). Здесь мы ограничимся тем, что, не уменьшая общности, будем считать

$$\mu = O(\hbar). \quad (14.45)$$

Тогда в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  из уравнений Тамма–Гуда (14.35), (14.36) получим

$$\dot{a}^\alpha = \frac{eg}{2mc} F^{\alpha\beta} a_\beta + \frac{e(g-2)}{2mc^3} u^\alpha u_\beta F^{\beta\sigma} a_\sigma, \quad (14.46)$$

$$\dot{u}^\alpha = \frac{e}{mc} F^{\alpha\nu} u_\nu. \quad (14.47)$$

Уравнение (14.47) есть уравнение Лоренца (9.63), а уравнение (14.46) – так называемое уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди.

◇ Таким образом, в предположении (14.45) спиновое уравнение становится линейным, а силовое уравнение теряет зависимость от спина. Аналогична ситуация и в случае постоянных электромагнитных полей.

**Пример 14.1.** Записать уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди для вектора  $\vec{\eta}$  (14.41).

**Решение.** Уравнение (14.46) для вектора  $\vec{a}$  [ $a^\mu = (a^0, \vec{a})$ ] имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{a}} = & \frac{ge}{2m_0c\gamma} ((\vec{a}, \vec{\beta})\vec{E} + \vec{H} \times \vec{a}) + \\ & + \frac{e(g-2)\gamma}{2m_0c} \vec{\beta} (\langle \vec{a}, \vec{E} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{a} \times \vec{H} \rangle). \end{aligned} \quad (14.48)$$

Подставив (14.44) в (14.48), получим

$$\dot{\vec{\eta}} = \frac{2}{\hbar} \vec{\eta} \times \vec{D}_0, \quad (14.49)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{D}_0(t, z_0) = & \frac{\mu_0}{\gamma} \left\{ [1 + (g-2)\gamma] \vec{H}(t) - \right. \\ & \left. - \left[ \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} + (g-2)\gamma \right] \vec{\beta} \times \vec{E}(t) - \frac{(g-2)\gamma}{1 + \gamma^{-1}} \vec{\beta} \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \right\}, \end{aligned}$$

а  $\mu_0$  – магнетон Бора.

**Пример 14.2.** Показать, что задача Коши

$$\vec{\eta}|_{t=0} = \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \zeta \vec{\ell} + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{\vec{\ell} \times (\vec{k} \times \vec{\ell}) + i\zeta \vec{\ell} \times \vec{k}}{\sqrt{1 - \langle \vec{\ell}, \vec{k} \rangle^2}} \quad (14.50)$$

для уравнения (14.48) эквивалентна задаче Коши для спинора

$$\left\{ i \frac{d}{dt} + \frac{ec}{2\varepsilon} \left[ \left( 1 + \frac{(g-2)\gamma}{2} \right) \langle \vec{\sigma}, \vec{H}(t) \rangle - \left( \frac{1}{1+\gamma^{-1}} + \frac{(g-2)\gamma}{2} \right) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E}(t) \rangle - \frac{(g-2)\gamma \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle}{2(1+\gamma^{-1})} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \right] \right\} \mathcal{U} = 0, \quad (14.51)$$

если спинор  $\mathcal{U}(t, \zeta)$  в начальный момент времени удовлетворяет условию

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{\ell} \rangle \mathcal{U}(0, \zeta) = \zeta \mathcal{U}(0, \zeta), \quad \zeta = \pm 1, \quad (14.52)$$

фиксирующему проекцию спина частицы на произвольный единичный вектор  $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^3$ . Здесь  $\zeta, \zeta' = \pm 1$ ; а  $\vec{k}$  – произвольный единичный вектор, который в декартовой системе координат, как правило, выбирается в виде  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .

# Основы теории обобщенных функций

При описании физических явлений часто приходится использовать идеализированные понятия, такие как материальная точка, точечный заряд, мгновенная сила, сила, приложенная к данной точке, точечный источник, создающий некоторое поле и т.д. Такие понятия, хотя и не вполне адекватно описывают физическую реальность, поскольку всякое тело имеет определенный объем, источник – определенные размеры, а сила действует в течение некоторого промежутка времени и т.д., удобны и находят широкое применение. Оказывается, что для математического описания таких идеализированных объектов недостаточно «классических» функций. Характерной особенностью физических объектов, допускающих подобную идеализацию, является то, что физический смысл, в первую очередь, имеют не вводимые для их описания функции, а некоторые интегралы от них. Так, например, если  $\rho(\vec{x})$  – плотность тела, то его масса связана с плотностью соотношением

$$m = \int_V \rho(\vec{x}) d\vec{x},$$

где  $V$  – объем тела. Идеализированное тело – материальная точка имеет нулевой объем, а понятие плотности утрачивает «классический» смысл и для его описания необходимо привлечение иного математического аппарата – обобщенных функций. Тем не менее, масса тела (интегральная характеристика) – вполне определенная величина.

Обобщенные функции возникли в результате обобщения свойств определенных интегралов и первоначально были введены в работах П. Дирака, посвященных проблемам квантовой теории. Строгое математическое обоснование теории обобщенных функций получила в работах С.Л. Соболева и Л. Шварца.

С математической точки зрения, обобщенные функции обладают рядом замечательных свойств, расширяющих возможности математического анализа, например, любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой и т.д. Это расширение имеет тот же характер, что и расширение множества рациональных чисел до множества вещественных чисел.

## 15. Основные и обобщенные функции

♦ Вещественную функцию  $\varphi(x)$ , определенную при  $x \in ]-\infty, \infty[$ , называют основной функцией, если

- 1) функция  $\varphi(x)$  непрерывна и имеет производные любого порядка;
- 2) функция  $\varphi(x)$  – финитная функция, т.е.  $\varphi(x) \equiv 0$  вне некоторого конечного отрезка.

**Пример 15.1.** Показать, что функция («шапочка») (рис. 111)

$$\varphi(x, a) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

является основной.

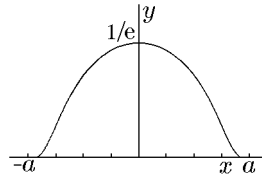


Рис. 111

**Решение.** 1. Функция  $\varphi(x, a)$  асимптотически стремится к нулю при  $|x| \rightarrow a-0$  и тождественно равна нулю ( $\varphi(x, a) = 0$ ) при  $|x| \geq a$ . Следовательно, она является финитной.

2. Рассмотрим первую производную функции  $\varphi(x, a)$ . Получим

$$\varphi'(x, a) = \begin{cases} \frac{2xa^2}{(a^2 - x^2)^2} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Очевидно, что функция  $\varphi'(x, a)$  непрерывна при  $x \neq \pm a$ . Найдем правосторонний и левосторонний пределы функции  $\varphi'(x, a)$  в точке  $x = a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \varphi'(x, a) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \varphi'(x, a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{2xa^2}{(a^2 - x^2)^2} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right) = 0.$$

Следовательно, функция  $\varphi'(x, a)$  непрерывна в точке  $x = a$ . Непрерывность  $\varphi^{(k)}(x, a)$  ( $k = \overline{2, \infty}$ ) доказывается аналогично. Аналогично можно показать непрерывность функции  $\varphi'(x, a)$  и ее производных в точке  $x = -a$ . Таким образом, функция  $\varphi(x, a)$  является бесконечно дифференцируемой и финитной, что и требовалось показать.

◆ Если функция  $\varphi(x)$  обращается в нуль вне некоторой области  $G \subset \mathbb{R}$  ( $x \in G$ ), то она называется сосредоточенной в области  $G$ .

◆ Носителем функции  $\varphi(x)$  называется замыкание множества всех точек  $x$ , для которых  $\varphi(x) \neq 0$ , и обозначается символом  $\text{supp } \varphi$ .

◇ Следовательно, носители всех функций  $\varphi(x)$ , сосредоточенных в области  $G$ , являются подмножествами области  $G$  ( $\text{supp } \varphi \subset G$ ).

◇ Множество всех основных функций обозначим через  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}_x^1)$ . Сходимость функциональных последовательностей в пространстве  $\mathcal{D}$  определим следующим образом.

◆ Последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  из  $\mathcal{D}$  сходится к функции  $\varphi(x)$  из  $\mathcal{D}$  ( $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ), если

1) для всех натуральных  $m$  последовательность  $\{\varphi_n^{(m)}(x)\}$  сходится к  $\varphi^{(m)}(x)$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

2) существует такое  $R > 0$ , что  $\text{supp } \varphi_n \subset ]-R, R[$  для всех  $n = \overline{0, \infty}$ .

Под *обычной функцией*  $f(x)$  будем понимать любую локально и абсолютно интегрируемую (по Риману) функцию, т.е. такую, для которой существует  $\int_a^b |f(x)|dx$  при любых конечных  $a$  и  $b$ .

Сопоставим каждой обычной функции  $f(x)$  функционал  $f[\varphi(x)]$ , определенный на пространстве  $\mathcal{D}$  по формуле

$$f[\varphi(x)] = \langle f(x)|\varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \quad (15.1)$$

Интеграл в правой части – это обычный риманов интеграл (собственный, так как  $\varphi(x)$  финитная функция).

**Пример 15.2.** Показать, что функционал  $f[\varphi(x)]$  (15.1), определенный на  $\mathcal{D}$ , является линейным и непрерывным.

**Решение.** 1. *Линейность* функционала следует из линейно-

сти определенного интеграла, т.е.

$$\begin{aligned} f[\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)] dx = \\ &= \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_1(x)dx + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_2(x) dx = \\ &= \lambda_1 f[\varphi_1(x)] + \lambda_2 f[\varphi_2(x)], \end{aligned}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{D}$ .

2. Докажем *непрерывность* функционала. Рассмотрим произвольную последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  из  $\mathcal{D}$ , которая сходится к функции  $\varphi(x)$ . Тогда, по определению, во-первых, существует такое  $R > 0$ , что  $\text{supp } \varphi_n \subset ]-R, R[$  для всех  $n = \overline{0, \infty}$  и, во-вторых,  $\{\varphi_n(x)\}$  сходится к  $\varphi(x)$  равномерно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала числовая последовательность  $\{a_n\}$  такая, что для  $n > N$  (где  $N > 0$  – некоторое число), справедливо

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Обозначим через

$$M = \int_{-R}^R |f(x)| dx.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |f[\varphi(x)] - f[\varphi_n(x)]| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\{\varphi(x) - \varphi_n(x)\} dx \right| = \\ &= \left| \int_{-R}^R f(x)\{\varphi(x) - \varphi_n(x)\} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-R}^R |f(x)| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx \leq \\ &\leq \max_{x \in ]-R, R[} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int_{-R}^R |f(x)| dx \leq M a_n. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность  $\{f[\varphi(x)] - f[\varphi_n(x)]\}$  сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[\varphi_n(x)] = f[\varphi(x)],$$

что и требовалось показать.

С функционалами (15.1) связано важное понятие слабой сходимости функций.

◆ *Последовательность локально интегрируемых функций  $\{f_n(x)\}$  сходится в  $\mathcal{D}$  слабо к локально интегрируемой функции  $f(x)$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x) | \varphi(x) \rangle = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \quad (15.2)$$

◆ Функция  $f(x)$  называется ядром линейного функционала  $f[\varphi(x)]$ , если его можно представить в виде

$$f[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \quad (15.3)$$

◇ Таким образом, любую обычную функцию  $f(x)$  можно рассматривать как ядро линейного непрерывного функционала (15.1) на  $\mathcal{D}$ . Следующий пример показывает, что представление (15.1), где  $f(x)$  – локально интегрируемая функция, существует не для любого линейного и непрерывного функционала на  $\mathcal{D}$ .

**Пример 15.3.** Показать, что функционал  $\delta[\varphi(x)]$ , ставящий в соответствие каждой функции  $\varphi(x)$  число  $\varphi(0)$ , не допускает представления в виде (15.3)

$$\delta[\varphi(x)] = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx, \quad (15.4)$$

где  $\delta(x)$  – локально интегрируемая функция.

**Решение.** 1. Функционал  $\delta[\varphi(x)]$  линеен и непрерывен на  $\mathcal{D}$ . Действительно, пусть  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – основные функции, а  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} \delta[C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)] &= \{C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)\}|_{x=0} = \\ &= C_1\varphi_1(0) + C_2\varphi_2(0) = C_1\delta[\varphi_1(x)] + C_2\delta[\varphi_2(x)], \end{aligned}$$



поскольку  $\delta[\varphi_k(x)] = \varphi_k(0)$ ,  $k = 1, 2$ . Из сходимости  $\varphi_n(x)$  к  $\varphi(x)$  в  $\mathcal{D}$  следует, что в точке  $x = 0$  значения функции  $\varphi_n(0)$  сходятся к  $\varphi(0)$ , т.е.

$$\delta[\varphi_n(x)] \rightarrow \delta[\varphi(x)].$$

2. Предположим противное, т.е. что существует локально интегрируемая функция  $\delta(x)$ , для которой соотношение (15.4) справедливо при любой основной функции  $\varphi(x)$ . Выберем в качестве  $\varphi(x)$  функцию  $\varphi(x, a)$  «шапочка», показанную на рис. 111 (см. пример 15.1), для которой  $\varphi(0) = 1/e$ . Тогда по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x, a)dx = \varphi(0, a) = 1/e. \quad (15.5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x, a)dx \right| &\leq \left| \int_{-a}^a \delta(x)\varphi(0, a)dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{e} \int_{-a}^a |\delta(x)|dx. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Согласно предположению, функция  $\delta(x)$  абсолютно интегрируема. Следовательно,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-a}^a |\delta(x)|dx = 0$$

и в силу (15.6)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x, a)dx = 0,$$

что противоречит (15.5). Полученное противоречие и доказывает сделанное утверждение.

◇ Попытка представить  $\delta(x)$  как обычную, поточечно заданную функцию приводит к следующей формальной записи:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x \neq 0, \end{cases} \quad (15.7)$$

лишенной прямого математического смысла, но широко используемой в физической литературе при дополнительном условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Соотношениям (15.4) и (15.7) можно придать строгий смысл в терминах обобщенных функций:

♦ *Обобщенной функцией  $f$  называют любой линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{D}$ .*

Значение этого функционала на элементе  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  обозначим через

$$f[\varphi(x)] = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle.$$

Из определения следует, что не существует значения обобщенной функции  $f$  в точке  $x$ . Поэтому в последнем равенстве  $f(x)$  есть формальная запись, в которой под  $x$  понимается аргумент функции  $\varphi(x)$ , на которую действует функционал  $f$ .

♦ *Обобщенная функция  $f$ , которая допускает представление в виде (15.1), где  $f(x)$  – обычная (локальная и абсолютно интегрируемая) функция, называется регулярной обобщенной функцией; в противном случае обобщенная функция  $f$  называется сингулярной.*

Таким образом, обобщенная функция, рассмотренная в примере 15.3, является сингулярной.

♦ При решении задач теоретической физики иногда приходится проводить некорректные в смысле данного выше математически строгого определения Соболева–Шварца операции с обобщенными функциями и получать при этом физически правильные ответы. Для физических приложений теории обобщенных функций оказывается полезным представление линейного функционала  $f[\varphi(x)]$  как «интеграла с ядром  $f(x)$ »:

$$f[\varphi(x)] = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (15.8)$$

Однако это представление является формальным, поскольку не для всякого функционала  $f$  его значение корректно определено (см. пример 15.3) интегралом от произведения основной функции  $\varphi(x)$  на обычную функцию  $f(x)$ , заданную всюду (или почти всюду). Таким образом, под знаком интеграла в (15.8) стоит «нечто», что лишь с натяжкой можно назвать

функцией. Тем не менее, в литературе по теоретической физике часто используется определение обобщенных функций, основанное на формальном представлении (15.8).

◆ *Обобщенной функцией называется ядро  $f(x)$  линейного непрерывного функционала (15.8), определенного на пространстве основных функций  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ .*

Последнее определение имеет ряд методических преимуществ и именно оно использовалось в работах П. Дирака. Поэтому, если это не приводит к недоразумению, мы и будем использовать его в дальнейшем наряду с приведенным выше строгим определением.

◆ Множество всех обобщенных функций, определенных на пространстве  $\mathcal{D}$ , обозначим  $\mathcal{D}'$  и будем называть пространством обобщенных функций.

Понятие слабой сходимости обычных функций можно перенести на обобщенные функции.

◆ Последовательность обобщенных функций  $\{f_n(x)\}$  сходится к обобщенной функции  $f(x)$  в  $\mathcal{D}'$ , если для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  числовая последовательность  $\{\langle f_n(x)|\varphi(x)\rangle\}$  сходится к числу  $\langle f(x)|\varphi(x)\rangle$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x)|\varphi(x)\rangle = \langle f(x)|\varphi(x)\rangle. \quad (15.9)$$

**Пример 15.4.** Показать, что последовательность  $\{f_n(x)\}$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ , где  $f_n(x) = \sin nx$  в пространстве  $\mathcal{D}'$  сходится к функции  $f(x) = 0$ .

**Решение.** Согласно формуле (15.9), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sin nx | \varphi(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin nx \, dx.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sin nx | \varphi(x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \cos nx \, dx = 0.$$

Рассмотренный пример наглядно иллюстрирует тот факт, что хотя последовательность  $\{\sin nx\}$  не имеет поточечного предела при  $x \neq \pi k$ ,  $k = \overline{-\infty, \infty}$ , она сходится в пространстве  $\mathcal{D}'$  (как последовательность обобщенных функций).

◇ Если  $f_n$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) – регулярные обобщенные функции, то сходимость последовательности  $\{f_n\}$  в  $\mathcal{D}'$  означает слабую сходимость обычных функций  $f_n(x)$  к обобщенной функции  $f(x)$  – ядру функционала  $f$ . Поэтому определенную выше сходимость последовательностей в  $\mathcal{D}'$  называют также слабой сходимостью функционалов и записывают

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

◇ Если мы рассматриваем только основные функции  $\varphi(x)$ , сосредоточенные на интервале  $]a, b[$ , то будем использовать следующее обозначение:

$$f[\varphi(x)] = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx. \quad (15.10)$$

◇ Соотношения (15.8) и (15.10) являются определением символов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

Ниже мы покажем, что обозначенные таким образом «объекты» обладают рядом свойств, присущих определенным интегралам от обычных функций.

Важную роль в теоретической физике играет расширение пространства  $\mathcal{D}$  – пространство Шварца  $\mathcal{S}$ .

◇ Говорят, что функция  $\varphi(x)$ , определенная при  $x \in ]-\infty, \infty[$ , принадлежит пространству Шварца  $\mathcal{S}$ , если

1) функция  $\varphi(x)$  непрерывно дифференцируема вместе со всеми своими производными;

2) при  $|x| \rightarrow \infty$  функция  $\varphi(x)$  вместе со всеми своими производными стремится к нулю быстрее любой степени  $|x|^{-n}$ , т.е. для любого  $k$  и  $l$ ,  $k, l = \overline{0, \infty}$ , существует постоянная  $C_{kl}$  такая, что

$$|x^k \varphi^{(l)}(x)| \leq C_{kl}.$$

Сходимость функциональных последовательностей в пространстве  $\mathcal{S}$  определяется следующим образом.

◇ Последовательность функций  $\{\varphi_n(x)\}$  из  $\mathcal{S}$  сходится к функции  $\varphi(x)$  из  $\mathcal{S}$  ( $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ), если для всех

натуральных  $k$  и  $m$  последовательность  $\{x^k \varphi_n^{(m)}(x)\}$  сходится к  $x^k \varphi^{(m)}(x)$  равномерно по  $x \in \mathbb{R}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

♦ Ядро линейного непрерывного функционала  $f[\varphi(x)]$  (15.3), определенного на пространстве Шварца  $\mathcal{S}$ , называется обобщенной функцией медленного роста.

♦ Множество всех обобщенных функций, определенных на пространстве Шварца  $\mathcal{S}$ , обозначим  $\mathcal{S}'$ .

◇ Если не оговорено противное, то все определения, которые даны нами ниже для обобщенных функций, сохраняются и для обобщенных функций медленного роста, но пространство основных функций  $\mathcal{D}$  заменяется пространством Шварца  $\mathcal{S}$ .

◇ Очевидно, что  $\mathcal{D}$  есть подмножество пространства  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ ), однако  $\mathcal{S}$  не совпадает с  $\mathcal{D}$ . Например, функция  $f(x) = e^{-x^2}$  принадлежит пространству Шварца  $\mathcal{S}$ , но не принадлежит пространству основных функций  $\mathcal{D}$ . Заметим, что из сходимости элементов в  $\mathcal{D}$  следует сходимость в  $\mathcal{S}$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Из того, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ , следует, что  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$  (см. [10]). Например, обычная функция  $f(x) = e^{x^2}$  принадлежит пространству  $\mathcal{D}'$ , но не является обобщенной функцией медленного роста ( $e^{x^2} \notin \mathcal{S}'$ ), так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \varphi(x) dx$$

сходится при  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , но может расходиться для некоторых  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ , например для  $\varphi(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ .

## 16. Действия над обобщенными функциями

Многие операции, которые применимы для обычных функций, можно применять и к обобщенным.

Так, из основной леммы вариационного исчисления следует, что две непрерывные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) совпадают, если совпадают значения функционалов  $f[\varphi(x)]$  и  $g[\varphi(x)]$ , вычисленных для каждой непрерывной функции  $\varphi(x)$ , сосредоточенной на  $[a, b]$ . Поэтому равенство двух обобщенных функций естественно определить следующим образом.

◆ Две обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются равными, если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо равенство

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle \equiv \langle g(x)|\varphi(x) \rangle. \quad (16.1)$$

Если существует хотя бы одна функция  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  такая, что соотношение (16.1) не имеет места, то обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются различными.

◇ Из определения равенства обобщенных функций следует, что если две обычные функции различаются в конечном числе точек  $x_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) и совпадают для всех остальных  $x \in \mathbb{R}$ , то как обобщенные функции они равны. Более строго регулярную обобщенную функцию можно рассматривать как класс эквивалентных обычных функций, причем любые две функции из этого класса отличаются друг от друга на множестве меры нуль, т.е. множестве  $G \subset \mathbb{R}$ , которое можно покрыть интервалами и сумма длин этих интервалов произвольно мала. В частности, поэтому нельзя говорить о значении обобщенной функции в конкретной точке  $x_0$ .

Аналогично определяются арифметические операции над обобщенными функциями.

◆ Обобщенная функция  $f(x)$  называется суммой обобщенных функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  и обозначается  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle = \langle f_1(x)|\varphi(x) \rangle + \langle f_2(x)|\varphi(x) \rangle. \quad (16.2)$$

◆ Обобщенная функция  $g(x)$  называется произведением обобщенной функции  $f(x)$  и вещественного числа  $C$  и обозначается  $g(x) = Cf(x)$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\langle g(x)|\varphi(x) \rangle = C\langle f(x)|\varphi(x) \rangle. \quad (16.3)$$

Можно определить также произведение обобщенной функции  $f(x)$  на бесконечно дифференцируемую функцию  $\alpha(x)$ .

◆ Обобщенная функция  $g(x)$  называется произведением обобщенной функции  $f(x)$  на бесконечно дифференцируемую функцию  $\alpha(x)$ , если для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\langle g(x)|\varphi(x) \rangle = \langle \alpha(x)f(x)|\varphi(x) \rangle = \langle f(x)|\alpha(x)\varphi(x) \rangle. \quad (16.4)$$

◇ Для обобщенных функций медленного роста  $\alpha(x)$  должна удовлетворять дополнительному условию – расти при  $|x| \rightarrow \infty$  не быстрее любой степени  $x$  (т.е.  $\alpha(x)\varphi(x) \in \mathcal{S}$  для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ ).

◇ Коммутативная и ассоциативная операция умножения двух обобщенных функций в общем случае не определена.

Действительно, если бы она была определена, то, пользуясь свойствами функций  $\delta(x)$  и  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  (см. разд. «Примеры обобщенных функций»), можно было бы записать противоречивую цепочку равенств

$$0 = 0 \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = [x\delta(x)]\mathcal{P}\frac{1}{x} = [\delta(x)x]\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x).$$

Ситуация, когда произведение двух функций из одного класса не принадлежит этому классу, наблюдается и для «обычных» функций. Иллюстрацией может служить пространство локально интегрируемых функций, в котором произведение двух функций не обязано быть локально интегрируемым (например,  $(|x|^{-1/2})^2 = |x|^{-1}$  в  $\mathbb{R}$ ).

◆ Обобщенная функция  $f(x)$  обращается в нуль в области  $G \subset \mathbb{R}$  ( $f(x) = 0$ ,  $x \in G$ ), если для любой основной функции  $\varphi(x)$ , сосредоточенной в области  $G$ , справедливо

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle = 0.$$

◆ Объединение всех областей, в которых обобщенная функция  $f(x)$  равна нулю ( $f(x) = 0$ ), называется нулевым множеством обобщенной функции  $f(x)$  и обозначается  $\mathfrak{D}_f$ . Дополнение множества  $\mathfrak{D}_f$  до  $\mathbb{R}$  – множество  $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{D}_f$  – называется носителем обобщенной функции  $f(x)$  и обозначается  $\text{supp } f$ .

◆ Обобщенная функция  $f(x)$  называется локальной и сосредоточенной в точке  $x = x_0$ , если

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle = 0$$

для любой основной функции  $\varphi(x)$ , носитель которой не содержит точку  $x_0$ .

Напомним, что обозначение обобщенной функции через  $f(x)$  является символическим и не имеет отношения к ее значению в точке  $x$ . Поэтому две обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  нельзя сравнивать в конкретной точке, т.е. нельзя сказать, что  $f(x_0) = g(x_0)$  или  $f(x_0) > g(x_0)$ . Тем не менее, можно придать точный смысл операциям сравнения обобщенных функций на заданном интервале  $]a, b[$ .

◆ Обобщенные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются равными на интервале  $]a, b[$  ( $f(x) = g(x)$ ,  $x \in ]a, b[$ ), если для любой основной функции  $\varphi(x)$ , такой что  $\text{supp } \varphi \subset ]a, b[$ , справедливо

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle = \langle g(x)|\varphi(x) \rangle.$$

◆ Говорят, что обобщенная функция  $f(x)$  больше (не меньше) обобщенной функции  $g(x)$  на интервале  $]a, b[$ , и обозначают  $f(x) > g(x)$  ( $f(x) \geq g(x)$ ),  $x \in ]a, b[$ , если для любой положительной основной функции  $\varphi(x)$ , такой что  $\text{supp } \varphi \subset ]a, b[$ , справедливо

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle > \langle g(x)|\varphi(x) \rangle, \quad (\langle f(x)|\varphi(x) \rangle \geq \langle g(x)|\varphi(x) \rangle).$$

◇ Можно придать смысл обобщенным функциям сложного аргумента  $f(\alpha(x))$  при условии, что  $\alpha(x)$  (как и для обычных функций) бесконечно дифференцируема, уравнение  $y = \alpha(x)$  имеет единственное бесконечно дифференцируемое решение  $x = \beta(y)$  (например,  $\alpha'(x) \neq 0$ ) и для любой основной функции  $\varphi(x)$  справедливо

$$\langle f(\alpha(x))|\varphi(x) \rangle = \langle f(y)|\beta'(y)|\varphi(\beta(y)) \rangle. \quad (16.5)$$

Введенные выше операции над обобщенными функциями наделяют «интегралы» (15.8) и (15.10) некоторыми свойствами интегралов от обычных функций. Так, например, если основная функция  $\varphi(x)$  сосредоточена на интервале  $]a, b[$  и  $\alpha(x)$  – бесконечно дифференцируемая на этом интервале функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то из (16.5) следует, что

$$\int_a^b f(\alpha(x))\varphi(x) dx = \int_c^d f(y) \frac{\varphi(\beta(y))}{|\alpha'(\beta(y))|} dy, \quad (16.6)$$

где  $d = \alpha(b)$ ,  $c = \alpha(a)$ . Соотношение (16.6) – аналог формулы замены переменных в определенном интеграле.

## 17. Дельта-функция Дирака и ее свойства

Важным примером обобщенной функции является  $\delta$  функция Дирака.

Рассмотрим функционал  $\delta[\varphi(x)]$ , ставящий в соответствие каждой функции  $\varphi(x)$  число  $\varphi(0)$ , т.е.

$$\delta[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

◆ Ядро  $\delta(x)$  линейного функционала  $\delta[\varphi(x)]$  (15.4) называется дельта-функцией Дирака.



Аналогично функция  $\delta(x - x_0)$  определяется как ядро функционала

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0). \quad (17.1)$$

◇ Соотношение (17.1) можно рассматривать как результат действия единичного оператора  $\hat{I}$  на функцию  $\varphi(x_0)$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ). В линейной алгебре матричный элемент единичного оператора есть  $\delta$ -символ Кронекера  $\delta_{ij}$ . Именно в силу такой аналогии Дирак назвал ядро функционала (15.4) дельта-функцией.

Рассмотрим простейшие свойства дельта-функции.

### Свойства дельта-функции

**Свойство 1.** Дельта-функция  $\delta(x - x_0)$  является локальной и сосредоточенной в точке  $x_0$ , т.е.

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq x_0. \quad (17.2)$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную основную функцию  $\varphi(x)$ , носитель которой не содержит точки  $x = x_0$ . В этом случае  $\varphi(x_0) = 0$  и, следовательно,

$$\langle \delta(x - x_0) | \varphi(x) \rangle = 0.$$

Тогда, по определению,  $\delta(x - x_0)$  локальна и сосредоточена в точке  $x_0$ .

**Свойство 2.** Функция  $\delta(x)$  – четная, т.е.

$$\delta(x) = \delta(-x). \quad (17.3)$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную основную функцию. Из соотношения (16.6) при замене переменной  $y = \alpha(x) = -x$  получим

$$\langle \delta(-x) | \varphi(x) \rangle = |-1| \langle \delta(x) | \varphi(-x) \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(x) | \varphi(x) \rangle,$$

что и требовалось доказать.

◇ Очевидно, что функция  $\varphi(x) = 1$  не является основной, а также не принадлежит пространству Шварца. Тем не менее, в дальнейшем мы будем использовать обозначение  $\langle f(x) | 1 \rangle$ ,

где  $f(x)$  – обобщенная функция, которое будем понимать в следующем смысле:

$$\langle f(x)|1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x)|\eta_k(x) \rangle. \quad (17.4)$$

Здесь  $\{\eta_k(x)\}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , – последовательность основных функций, сходящаяся к единице.

◆ Последовательность основных функций  $\{\eta_k(x)\}$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  ( $\eta_k(x) \in \mathcal{D}$ ) называется сходящейся к единице, если

1) для любого интервала  $]a, b[$  существует  $N > 0$ , такое что  $\eta_k(x) = 1$  для всех  $x \in ]a, b[$  и  $k > N$ ;

2) функции  $\eta_k(x)$ ,  $k = \overline{0, \infty}$  равномерно ограничены в  $\mathbb{R}$  вместе со всеми своими производными, т.е. для любых  $k, j = \overline{0, \infty}$  существует постоянная  $C_{jk}$ , такая что

$$\left| \frac{d^j \eta_k(x)}{dx^j} \right| < C_{jk}.$$

Заметим, что последовательность функций, сходящаяся к единице, всегда существует, например  $\eta_k(x) = \varphi(x/k)$ , где  $\varphi(x)$  – произвольная основная функция, такая что  $\varphi(0) = 1$ .

**Свойство 3.** Справедливо соотношение

$$\langle \delta(x)|1 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (17.5)$$

**Доказательство** непосредственно следует из соотношения (17.4) и определения последовательности, сходящейся к единице.

**Свойство 4.** Справедливо соотношение

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0), \quad (17.6)$$

где  $f(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную функцию  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Очевидно, что  $g(x) = f(x)\varphi(x)$  также является основной функцией. Тогда

$$\begin{aligned} & \langle f(x)\delta(x - x_0)|\varphi(x) \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)\varphi(x_0). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \langle f(x_0)\delta(x-x_0)|\varphi(x)\rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\varphi(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)\varphi(x_0), \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varphi(x)$  соотношение (17.6) доказано.

В определении локальных и сосредоточенных в одной точке обобщенных функций сложного аргумента (16.5) и (16.6) можно ослабить условие на функцию  $\alpha(x)$ . В частности, дельта-функцию Дирака сложного аргумента можно определить следующим образом.

◆ Пусть  $\alpha(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция, имеющая только простые и изолированные нули в точках  $x_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , т.е.  $\alpha(x_k) = 0$ ,  $\alpha'(x_k) \neq 0$ . Тогда ядро линейного и непрерывного функционала

$$\langle \delta(\alpha(x)) | \varphi(x) \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{\varphi(x_k)}{|\alpha'(x_k)|} \quad (17.7)$$

называется дельта-функцией Дирака аргумента  $\alpha(x)$  и обозначается  $\delta[\alpha(x)]$ .

◇ Из определения (17.7) следует соотношение

$$\delta(\alpha(x)) = \sum_{k=1}^N \frac{\delta(x-x_k)}{|\alpha'(x_k)|}, \quad \alpha'(x_k) \neq 0. \quad (17.8)$$

Формула (17.8) справедлива и в случае счетного числа ( $N = \infty$ ) простых нулей функции  $\alpha(x)$  (например,  $\alpha(x) = \sin x$ ). Тогда функция  $\delta(\alpha(x))$  корректно определена на любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  в силу ограниченности ее носителя.

◇ В физической литературе часто дельта-функцию  $\delta(x-x_0)$  определяют не на пространстве основных функций, а в каком-либо классе «обычных» функций. Как мы покажем в дальнейшем, такой взгляд на дельта-функцию имеет и математическое обоснование с точки зрения свертки обобщенных функций [см. соотношение (23.7)]. Кроме того, дельта-функцию определяют через ее представление полными и ортонормированными в классе  $\mathfrak{K}$  (например, в  $L_2([a, b], \rho(x), D)$ , где  $D \subset \mathbb{R}$  или

$D \subset \mathbb{C}$ ) системами функций (24.30). При таком подходе можно показать, что для дельта-функции и любой «обычной»  $2l$ -периодической функции  $\varphi(x) \in L_2$ , удовлетворяющей условию Дирихле, справедливо соотношение (24.41):

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \begin{cases} \frac{\varphi(x_0 + 0) + \varphi(x_0 - 0)}{2} & x_0 \in ]a, b[; \\ 0 & x_0 \notin [a, b]; \\ \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2} & x_0 = a, x_0 = b. \end{cases} \quad (17.9)$$

Здесь  $2l = b - a$ .

**Пример 17.1.** Показать справедливость соотношений

- а)  $(x^2 + 1)\delta(x + 2) = 5\delta(x + 2)$ ;  
 б)  $\delta(2x - 6) = \frac{\delta(x - 3)}{2}$ ;  
 в)  $(x - 1)\delta(x^2 - 6x + 5) = \delta(x - 5)$ ;  
 г)  $\delta(\sin x) = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x^2 - k^2\pi^2)2k\pi$ .

**Решение.** а) Согласно (17.6), имеем

$$(x^2 + 1)\delta(x - (-2)) = (x^2 + 1)\Big|_{x=-2} \delta(x + 2) = \\ = [(-2)^2 + 1]\delta(x + 2) = 5\delta(x + 2).$$

б) Воспользуемся соотношением (17.8). Поскольку  $\alpha(x) = 2x - 6$ , то корнем уравнения  $\alpha(x) = 2x - 6 = 0$  является  $x_0 = 3$ . Находим  $\alpha'(x) = 2$ ,  $\alpha'(x_0) = \alpha'(3) = 2$ , тогда

$$\delta(2x - 6) = \frac{\delta(x - 3)}{2}.$$

в) Согласно соотношению (17.8), имеем

$$\alpha(x) = x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{36 - 20} = 3 \pm 2, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 1;$$

$$\alpha'(x) = 2x - 6, \quad |\alpha'(5)| = |10 - 6| = 4, \quad |\alpha'(1)| = |2 - 6| = 4,$$

откуда

$$\begin{aligned}
 (x-1)\delta(x^2-6x+5) &= (x-1)\left[\frac{\delta(x-5)}{4} + \frac{\delta(x-1)}{4}\right] = \\
 &= \frac{1}{4}[(x-1)\delta(x-5) + (x-1)\delta(x-1)] = \\
 &= \frac{1}{4}(5-1)\delta(x-5) + 0 = \delta(x-5).
 \end{aligned}$$

г) Аналогично случаю в) найдем

$$\begin{aligned}
 \sin x = 0, \quad x_k = k\pi, \quad k = \overline{-\infty, \infty}, \quad (\sin x)' = \cos x; \\
 |\cos x|_{x=k\pi} = |\cos k\pi| = |(-1)^k| = 1; \\
 \delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\pi) = \\
 = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\delta(x - k\pi) + \delta(x + k\pi)] = \\
 = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x^2 - k^2\pi^2) 2k\pi.
 \end{aligned}$$

**Пример 17.2.** Вычислить интегралы

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x+2) dx; \\
 \text{б) } & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x^2 - 6x + 5) dx; \\
 \text{в) } & \int_2^{\infty} e^{-x} \delta(x^2 - 6x + 5) dx; \\
 \text{г) } & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(\sin x) dx.
 \end{aligned}$$

**Решение.** Согласно результатам предыдущего примера,

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x+2) dx = x^2 \Big|_{x=-2} = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x^2 - 6x + 5) dx &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 [\delta(x-5) + \delta(x-1)] dx = \\ &= \frac{1}{4} (x^2 \Big|_{x=5} + x^2 \Big|_{x=1}) = \frac{1}{4} (25 + 1) = \frac{13}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int_2^{\infty} e^{-x} \delta(x^2 - 6x + 5) dx &= \frac{1}{4} \int_2^{\infty} e^{-x} [\delta(x-5) + \delta(x-1)] dx = \\ &= \frac{1}{4} e^{-x} \Big|_{x=5} + 0 = \frac{e^{-5}}{4}, \quad \text{так как } x=1 \notin ]2, \infty[; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \delta(\sin x) dx = \cos x \Big|_{x=0} = 1,$$

так как  $x_k = k\pi \notin ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , при  $k \neq 0$ .

## 18. Дельтообразные последовательности

Помимо рассмотренного выше функционального подхода к определению обобщенных функций существует и секвенциальный, определяющий обобщенную функцию как слабый предел последовательности обычных функций по аналогии с определением иррационального числа как предела последовательности рациональных чисел. Рассмотрим некоторые элементы секвенциального подхода [2] на примере дельтообразных последовательностей.

◆ Последовательность  $\{\delta_n(x)\}$  абсолютно интегрируемых функций называется дельтообразной и обозначается

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = \delta(x),$$

если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$$

и для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta_n(x) | \varphi(x) \rangle = \varphi(0). \quad (18.1)$$

◇ Соотношение (18.1) означает, что последовательность  $\{\delta_n(x)\}$  слабо сходится к обобщенной функции  $\delta(x) \in \mathcal{D}'$ , и дает часто используемый в физических приложениях практический рецепт вычисления интегралов, содержащих дельта-функцию. Аналогично замена обобщенной функции  $f(x)$  последовательностью локально интегрируемых функций  $\{f_n(x)\}$ , сходящейся к ней в смысле (15.9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x) | \varphi(x) \rangle = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle,$$

позволяет вычислять интегралы, содержащие «обобщенные» функции.

**Пример 18.1.** Показать, что если функция  $g(x)$  непрерывна и такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = a < \infty,$$

то функции

$$\delta(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma a} g\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad \sigma > 0, \quad (18.2)$$

$$\delta(x, L) = \frac{L}{a} g(xL), \quad L > 0, \quad (18.3)$$

являются дельтаобразными последовательностями при  $\sigma \rightarrow 0$  или  $L \rightarrow \infty$ , т.е.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \delta(x, \sigma) = \delta(x), \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \delta(x, L) = \delta(x). \quad (18.4)$$

◇ Здесь и в дальнейшем запись  $\sigma \rightarrow 0$  ( $L \rightarrow \infty$ ) означает, что последовательности  $\{\sigma_n\}$  ( $\{L_n\}$ ) произвольны, но таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0, \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \infty \right).$$

**Решение.** Легко видеть, что для всех  $\sigma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \sigma) dx = 1.$$

Тогда для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$J_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \sigma) \varphi(x) dx = \frac{1}{\sigma a} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{x}{\sigma}\right) \varphi(x) dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменных  $x = \sigma t$ :

$$J_\sigma = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(\sigma t) dt.$$

Если  $\sigma \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} J_\sigma = J_0 = \varphi(0) \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \varphi(0),$$

и  $\delta(x, \sigma)$  – дельтообразная последовательность.

Аналогичным способом нетрудно показать, что последовательность  $\delta(x, L)$  также дельтообразная.

**Пример 18.2.** Показать, что функции

$$\delta(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\sigma^2}, \quad \delta(x, L) = \frac{\sin xL}{\pi x}$$

являются дельтообразными последовательностями при  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$  ( $\sigma > 0$ ,  $L > 0$ ) (см. рис. 112).

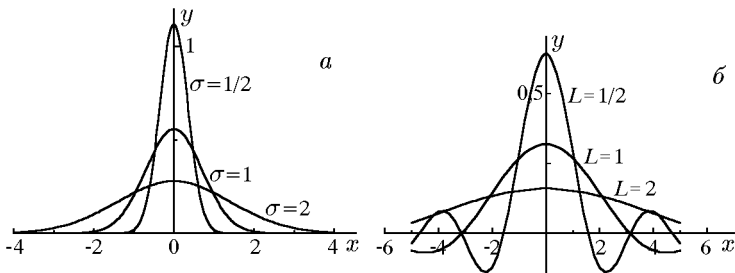


Рис. 112

**Решение.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, \sigma) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\sigma^2} dx = 1$$



и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, L) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xL}{\pi x} dx = 1,$$

что в силу предыдущего примера и доказывает утверждение.

**Пример 18.3.** Вычислить слабый предел (в  $\mathcal{D}'$ ) функции

$$f(x, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ,  $\varepsilon > 0$  (см. рис. 113).

**Решение.** Формально

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x, \varepsilon) = \begin{cases} \infty & x = 0, \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad (18.5)$$

и не имеет прямого математического смысла. Рассмотрим произвольную функцию  $\varphi(x)$ , принадлежащую  $\mathcal{D}$  – пространству основных функций. Вычислим предел

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \varphi(x) dx.$$

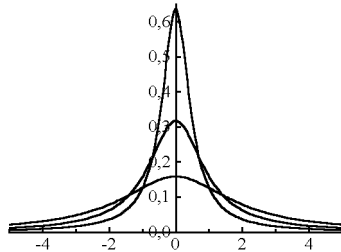


Рис. 113

Сделаем замену переменных  $x = y\varepsilon$ ,  $dx = \varepsilon dy$  и получим

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \varepsilon \varphi(\varepsilon y)}{\pi(y^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2)} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2 + 1} dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \varphi(0) \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \varphi(0) \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \varphi(0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Поскольку  $\delta[\varphi(x)] = \varphi(0)$  и в силу произвольности функции  $\varphi(x)$  получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} = \delta(x).$$

**Пример 18.4.** Вычислить слабый предел функции

$$f(x, \varepsilon) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}, \quad \varepsilon > 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$  (см. рис. 114).

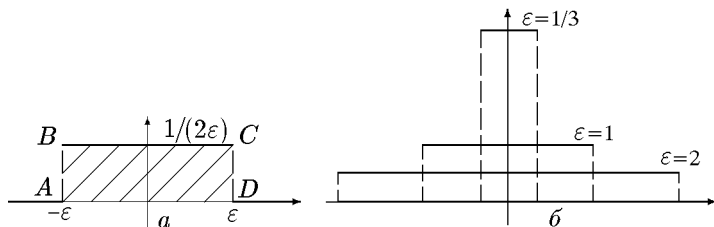


Рис. 114

**Решение.** Формальный поточечный предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$  приводит к записи (18.5). Заметим, что площадь прямоугольника  $ABCD$  (см. рис. 114,а) равна

$$S = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon = 1.$$

Тогда для произвольной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  получим

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \varepsilon) \varphi(x) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} 0 \cdot \varphi(x) dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} 0 \cdot \varphi(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Сделаем в интеграле замену переменных  $x = y\varepsilon$ ,  $dx = \varepsilon dy$ ,  $x_1 = \varepsilon$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_2 = -\varepsilon$ ,  $y_2 = -1$  и получим

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^1 \frac{1}{2\varepsilon} \varphi(y\varepsilon) \varepsilon dy = \frac{1}{2} \varphi(0) y \Big|_{-1}^1 = \varphi(0).$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \varepsilon) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

и в силу произвольности функции  $\varphi(x)$  получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(x, \varepsilon) = \delta(x).$$

## 19. Примеры обобщенных функций

Мы уже отмечали, что любую абсолютно и локально интегрируемую функцию можно рассматривать как регулярную обобщенную функцию. Рассмотрим эту связь более подробно.

♦ Регулярную обобщенную функцию  $f(x)$  называют постоянной и обозначают  $f(x) = C$ , если для любой основной функции  $\varphi(x)$  справедливо

$$\langle f(x) | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} C \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Например, обобщенная функция единица действует по формуле

$$\langle 1 | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

По аналогии с обобщенной функцией  $f(x) = C$  любую локально и абсолютно интегрируемую функцию можно рассматривать как некоторую обобщенную функцию, действующую по правилу

$$\langle f(x) | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (19.1)$$

для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Отметим, что в правой части (19.1) стоит обычный риманов интеграл.

Таким образом, локально интегрируемые функции можно отождествлять с регулярными обобщенными функциями.

Все сказанное можно распространить и на сингулярные функции, имеющие неинтегрируемые особенности в точке  $x_0$

(например,  $f(x) = 1/x$  при  $x = 0$ ), если доопределить их так, чтобы они совпадали с функциями  $f(x)$  всюду, кроме точки  $x_0$ .

◆ Обобщенная функция  $g(x)$  называется регуляризацией функции  $f(x)$ , имеющей особенность в точке  $x = x_0$ , если для любой основной функции  $\varphi(x)$ , носитель которой не содержит точку  $x_0$ , справедливо

$$\langle g(x)|\varphi(x)\rangle = \langle f(x)|\varphi(x)\rangle \quad (19.2)$$

и записывается  $g(x) = f(x)$  при  $x \neq x_0$ .

◆ Особенность функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется алгебраической порядка  $m$ , если существует  $m > 0$ , такое что функция  $(x - x_0)^m f(x)$  ограничена в точке  $x_0$ , а функция  $(x - x_0)^{m-1} f(x)$  не ограничена.

В качестве одной из возможных регуляризаций функции  $f(x)$  можно выбрать функцию  $g(x)$ , такую что

$$\begin{aligned} \langle g(x)|\varphi(x)\rangle = & \int_{|x-x_0|>\varepsilon} f(x)\varphi(x)dx + \\ & + \int_{|x-x_0|<\varepsilon} f(x) \left[ \varphi(x)dx - \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)(x-x_0)^k \right], \end{aligned} \quad (19.3)$$

где  $\varepsilon > 0$  – некоторое фиксированное число. Очевидно, что функция  $g(x)$  удовлетворяет условиям (19.2).

◇ Регуляризация (19.3) не единственна. Действительно, добавив к  $g(x)$  любую локальную функцию  $\psi(x)$ ,

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^n a_j \delta^{(j)}(x - x_0),$$

сосредоточенную в точке  $x_0$ , для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  получим

$$\langle g(x)|\varphi(x)\rangle = \langle f(x)|\varphi(x)\rangle - \sum_{j=0}^n (-1)^j a_j \varphi^{(j)}(x_0),$$

где  $\delta^{(j)}(x)$  –  $j$ -ая производная дельта-функции (см. разд. «Производная обобщенной функции»). Таким образом, условие (19.2) выполнено.

◆ Обобщенная функция  $g(x)$  называется канонической регуляризацией функции  $f(x)$ , если

1. регуляризация суммы  $f(x) + \chi(x)$  есть сумма регуляризаций функций  $f(x)$  и  $\chi(x)$  в точке  $x_0$ ;
  2. регуляризация (обычной) производной  $f'(x)$  есть производная  $g'(x)$  в смысле производных обобщенных функций;
  3. регуляризацией произведения  $\alpha(x)f(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция, есть функция  $\alpha(x)g(x)$ .
- ◇ Можно показать, что каноническая регуляризация функции  $f(x)$  единственна.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые наиболее часто используемые обобщенные функции.

### 19.1. Тета-функция Хевисайда

Рассмотрим обычные функции

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}, \quad \theta_2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1/2 & x = 0, \\ 1 & x > 0 \end{cases}, \quad (19.4)$$

заданные поточечно. Эти функции локально интегрируемы и различаются только в точке  $x = 0$ . Нетрудно заметить, что

$$\langle \theta_1(x) | \varphi(x) \rangle = \langle \theta_2(x) | \varphi(x) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Следовательно, обобщенные функции  $\theta_1(x)$  и  $\theta_2(x)$  как обобщенные функции равны, т.е.  $\theta_1(x) = \theta_2(x) = \theta(x)$ .

◆ Обобщенная функция  $\theta(x)$  называется тета-функцией Хевисайда, если для любой основной функции  $\varphi(x)$  справедливо

$$\langle \theta(x) | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \quad (19.5)$$

**Пример 19.1.** Показать, что последовательность функций  $\{f_n(x)\}$ , где

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + e^{-nx}}, \quad (19.6)$$

при  $n \rightarrow \infty$  сходится (поточечно) к функции  $\theta_2(x)$ .

**Решение.** На любом конечном отрезке  $[a, b] \subset ]-\infty, 0[$  последовательность (19.6) равномерно сходится к нулю, тогда как на любом конечном отрезке  $[a, b] \subset ]0, \infty[$  она равномерно сходится к единице и при  $x = 0$  сходится к  $1/2$ , так как  $f_n(0) = 1/2$ . Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \theta_2(x).$$

◇ Функцию  $\theta_2(x)$  можно было определить как поточечный предел последовательности  $\{f_n(x)\}$  (19.6).

◆ Функция  $f(x)$  называется знаком числа  $x$  и обозначается  $f(x) = \text{sign } x$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\langle f(x) | \varphi(x) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx. \quad (19.7)$$

**Пример 19.2.** Показать, что  $\text{sign } x = \theta(x) - \theta(-x)$ .

**Решение** непосредственно следует из определения функций  $\theta(x)$  и  $\text{sign } x$ .

## 19.2. Характеристическая функция отрезка

◆ Функция  $h(x, a, b)$  называется характеристической функцией отрезка  $[a, b]$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо

$$\langle h(x, a, b) | \varphi(x) \rangle = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (19.8)$$

◇ Регулярную обобщенную функцию  $h(x, a, b)$  можно определить соотношением

$$h(x, a, b) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b], \\ 0 & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

**Пример 19.3.** Доказать справедливость соотношения

$$h(x, a, b) = \theta(x - a) - \theta(x - b). \quad (19.9)$$

**Решение.** Пусть  $\varphi(x)$  – произвольная функция из пространства  $\mathcal{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \langle [\theta(x-a) - \theta(x-b)] | \varphi(x) \rangle = \\ & = \langle \theta(x-a) | \varphi(x) \rangle - \langle \theta(x-b) | \varphi(x) \rangle = \\ & = \int_a^\infty \varphi(x) dx - \int_b^\infty \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

В силу определения (19.8) соотношение (19.9) доказано.

### 19.3. Обобщенные функции, порождаемые главными значениями несобственных интегралов

♦ Функция  $\mathcal{P}\frac{1}{x}$  называется регуляризацией функции  $\frac{1}{x}$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}\frac{1}{x} | \varphi(x) \rangle &= \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}. \end{aligned} \quad (19.10)$$

Здесь символ V.p. обозначает главное значение интеграла.

**Пример 19.4.** Показать, что

$$x \mathcal{P}\frac{1}{x} = 1. \quad (19.11)$$

**Решение.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , тогда

$$\langle x \mathcal{P}\frac{1}{x} | \varphi(x) \rangle = \langle \mathcal{P}\frac{1}{x} | x\varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1 | \varphi(x) \rangle.$$

В силу произвольности функции  $\varphi(x)$  соотношение (19.11) доказано.

♦ Функция  $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$  называется регуляризацией функции  $\frac{1}{x^2}$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2} | \varphi(x) \rangle = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx. \quad (19.12)$$

**Пример 19.5.** Показать, что

$$x^2 \mathcal{P} \frac{1}{x^2} = 1. \quad (19.13)$$

**Решение.** Действительно,

$$\left\langle x^2 \mathcal{P} \frac{1}{x^2} \middle| \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x^2} \middle| x^2 \varphi(x) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \langle 1 | \varphi(x) \rangle.$$

В силу произвольности функции  $\varphi(x)$  соотношение (19.13) доказано.

#### 19.4. Псевдофункции Адамара

Существуют иные правила вычисления расходящихся несобственных интегралов, содержащих функции  $1/x$  и  $1/x^2$ . Им соответствуют другие регуляризации этих функций.

◆ Функция  $Pf \frac{1}{x^2}$  называется псевдофункцией Адамара  $\frac{1}{x^2}$ , если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \left\langle Pf \frac{1}{x^2} \middle| \varphi(x) \right\rangle &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Аналогично определяются функции

$$\left\langle Pf \frac{\theta(x)}{x} \middle| \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) \ln \varepsilon \right\} \quad (19.15)$$

и

$$\left\langle Pf \frac{\theta(-x)}{x} \middle| \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx - \varphi(0) \ln \varepsilon \right\}.$$

**Пример 19.6.** Самостоятельно доказать тождество

$$\mathcal{P} \frac{1}{x} = Pf \frac{\theta(x)}{x} + Pf \frac{\theta(-x)}{x}.$$



### 19.5. Формулы Сохоцкого

♦ Функции  $\frac{1}{x \pm i0}$  называются функциями Сохоцкого, если для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо

$$\left\langle \frac{1}{x \pm i0} \middle| \varphi(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx. \quad (19.16)$$

Более подробно о смысле символов  $\frac{1}{x \pm i0}$  см. также (I.23.126) и (I.23.127).

**Теорема 19.1.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x + i0} &= -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x - i0} &= i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (19.17)$$

Соотношения (19.17) называются формулами Сохоцкого.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx = \\ &= \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} - i\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arctg \frac{x}{\varepsilon} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx. \end{aligned}$$

Поскольку первая подынтегральная функция нечетна, а пределы интегрирования симметричны, то

$$I = -i\pi\varphi(0) + \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

В силу произвольности функции  $\varphi(x)$  первое соотношение в (19.17) доказано. Аналогично доказывается второе соотношение в (19.17).

## 20. Некоторые представления основных функций

Ниже мы рассмотрим некоторые специальные свойства и представления основных функций  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , используемые в теории обобщенных функций.

**Лемма 20.1.** *Для того чтобы основная функция  $\psi(x)$  была производной другой основной функции  $\Psi(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (20.1)$$

**Доказательство.** Пусть  $\psi(x)$  и  $\Psi(x)$  принадлежат множеству  $\mathcal{D}$  и связаны соотношением

$$\psi(x) = \frac{d\Psi(x)}{dx}.$$

Проинтегрировав это соотношение, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Psi(x)}{dx} dx = \Psi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

в силу финитности основных функций, т.е.  $\Psi(-\infty) = \Psi(\infty) = 0$ .

С другой стороны, если условие (20.1) выполняется, то положим

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy. \quad (20.2)$$

В этом случае  $\Psi(x)$  бесконечно дифференцируема и в силу условия (20.1) финитна, что и требовалось показать.

**Лемма 20.2.** Для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  существуют основные функции  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ , такие что справедливо представление

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy + \varphi_1'(x) \quad (20.3)$$

при условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1.$$

**Доказательство.** Рассмотрим разность

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Из приведенных выше соотношений видно, что функция  $\Phi(x)$  является основной функцией, удовлетворяющей условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx = 0.$$

Тогда в соответствии с леммой 20.1 соотношение (20.3) справедливо.

**Лемма 20.3.** Если функции  $\varphi(x)$  и  $\eta(x)$  принадлежат  $\mathcal{D}$ , причем  $\eta(x) \equiv 1$  в окрестности точки  $x = 0$ , то функция

$$\psi(x) = \frac{1}{x^n} \left[ \varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] \quad (20.4)$$

— основная.

**Доказательство.** Очевидно, что функция  $\psi(x)$  финитна и бесконечно дифференцируема при  $x \neq 0$ . Осталось показать, что  $\psi(x)$  является бесконечно дифференцируемой в точке  $x = 0$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  и такое, что  $\eta(x) = 1$  для всех  $|x| < \varepsilon$ . Обозначив

$$f(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

получим

$$\psi(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \psi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^n f^{(n)}/(n!)}{x^{n+1}} = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{\varphi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

и т.д.

Таким образом,  $\psi(x)$  бесконечно дифференцируема для всех  $x \in \mathbb{R}$ , и, следовательно, является основной.

**Лемма 20.4.** Если функции  $\varphi(x)$  и  $\eta(x)$  принадлежат  $\mathcal{D}$ , причем  $\eta(x) \equiv 1$  в окрестности точки  $x = 0$ , а  $g(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция, имеющая единственный простой нуль в точке  $x = 0$ , то функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \eta(x)\varphi(0)}{g(x)} \quad (20.5)$$

– основная.

**Доказательство.** Пусть  $|x| < \varepsilon$ , тогда  $\eta(x) = 1$ , а функция  $g(x)$  в окрестности точки  $x = 0$  может быть представлена в виде  $g(x) = x\bar{g}(x)$ , где  $\bar{g}(x) \neq 0$ . Тогда

$$\psi(x) = \frac{1}{\bar{g}(x)} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}.$$

С другой стороны, из леммы 20.3 при  $n = 1$  следует, что функция

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$$

является основной. Отсюда в силу соотношения

$$\psi(x) = \frac{1}{\bar{g}(x)} \psi_1(x)$$

закключаем, что  $\psi(x)$  также является основной.

**Лемма 20.5.** Для любого интервала  $]a, b[ = G$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует основная функция  $\eta(x)$  такая, что

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 1, & x \in G_\varepsilon, & \quad G_\varepsilon = ]a - \varepsilon, b + \varepsilon[, \\ 1 > \eta(x) &> 0, & x \in G_{3\varepsilon} \setminus G_\varepsilon, \\ \eta(x) &= 0, & x \in \mathbb{R} \setminus G_{3\varepsilon}, & \quad (x \notin G_{3\varepsilon}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Пусть  $h(x, G_{2\varepsilon})$  – характеристическая функция множества  $G_{2\varepsilon}$  и  $\omega_\varepsilon(x)$  – основная функция «нормированная ‘шапочка’»

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - x^2)}, & x \in V(\varepsilon), \quad (|x| < \varepsilon), \\ 0, & x \notin V(\varepsilon), \quad (|x| > \varepsilon), \end{cases} \quad (20.6)$$

где постоянная  $C_\varepsilon$  определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = \int_{V(\varepsilon)} \omega_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Тогда функция

$$\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x', G_{2\varepsilon}) \omega_\varepsilon(x - x') dx' \quad (20.7)$$

обладает требуемым свойством (рис. 115).

Действительно, обозначив  $\text{supp } \omega_\varepsilon(x - x') = V(x, \varepsilon)$ , имеем

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_{G_{2\varepsilon} \cap V(x, \varepsilon)} h(x', G_{2\varepsilon}) \omega_\varepsilon(x - x') dx' = \\ &= \int_{V(x, \varepsilon)} h(x', G_{2\varepsilon}) \omega_\varepsilon(x - x') dx' = 1, \quad x \in G_\varepsilon; \\ 1 > \eta(x) &= \int_{G_{2\varepsilon} \cap V(x, \varepsilon)} h(x', G_{2\varepsilon}) \omega_\varepsilon(x - x') dx' > 0, \quad x \in G_{3\varepsilon} \setminus G_\varepsilon; \\ \eta(x) &= \int_{G_{2\varepsilon} \cap V(x, \varepsilon)} h(x', G_{2\varepsilon}) \omega_\varepsilon(x - x') dx' = \\ &= \int_{x \notin G_{3\varepsilon}} h(x', G_{2\varepsilon}) \omega_\varepsilon(x - x') dx' = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus G_{3\varepsilon}. \end{aligned}$$

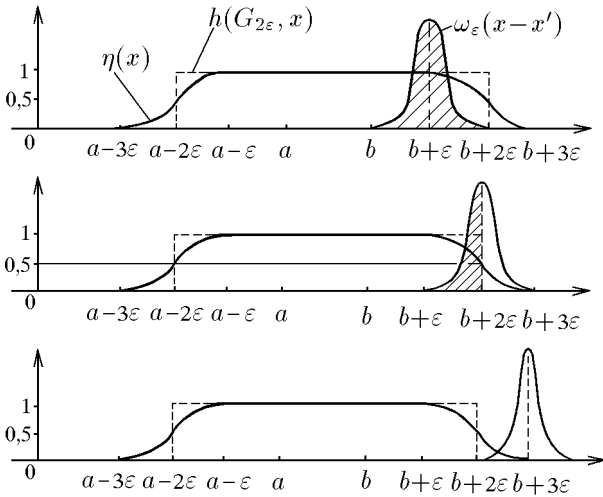


Рис. 115

По сути дела, формула (20.7) определяет численное значение функции  $\eta(x)$ , равное площади под «шапочкой», обрезаемой характеристической функцией.

**Пример 20.1.** В пространстве обобщенных функций  $\mathcal{D}'$  найти общее решение уравнений

а)  $xu(x) = 0$ ;

б)  $g(x)u(x) = 0$ , где  $g(x)$  – бесконечно дифференцируемая положительная функция;

в)  $(\sin x)u(x) = 0$ ;

г)  $xu(x) = 1$ .

**Решение.** а) Поскольку  $u(x) \in \mathcal{D}'$ , то

$$\langle xu(x)|\varphi(x) \rangle = \langle u(x)|x\varphi(x) \rangle = 0 \quad (20.8)$$

для всех  $\varphi(x)$ , принадлежащих  $\mathcal{D}$ . Найдем  $\langle u(x)|\varphi(x) \rangle$ , используя тождественные преобразования и основную функцию  $\eta(x)$ , определенную леммой 20.5,

$$\begin{aligned} \langle u(x)|\varphi(x) \rangle &= \langle u(x)|[\varphi(0)\eta(x) + \varphi(x) - \varphi(0)\eta(x)] \rangle = \\ &= \langle u(x)|\varphi(0)\eta(x) \rangle + \left\langle u(x) \left| x \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\eta(x)}{x} \right. \right\rangle. \end{aligned}$$

Согласно лемме 20.3, функция

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\eta(x)}{x}$$

является основной. Тогда  $\langle u(x)|x\psi(x) \rangle = 0$  в силу (20.8). С учетом этого, обозначив  $\langle u(x)|\eta(x) \rangle = C = \text{const}$ , имеем

$$\langle u(x)|\varphi(x) \rangle = C\varphi(0) = \langle C\delta(x)|\varphi(x) \rangle,$$

откуда

$$u(x) = C\delta(x).$$

Подставив это решение в исходное уравнение, получим тождество

$$xC\delta(x) = Cx|_{x=0}\delta(x) = 0.$$

б) Поскольку  $g(x) \neq 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $u(x) = 0$ .

в) Аналогично примеру а) с учетом результатов примера 17.1 получим

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(x - k\pi),$$

где  $C_k$  – произвольные постоянные.

г) Рассмотрим произвольную основную функцию  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\left\langle x \left[ u(x) - \frac{1}{x} \right] \middle| \varphi(x) \right\rangle = 0.$$

Аналогично примеру а) получим

$$u(x) = C\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

◇ Из последнего примера следует, что функция

$$u_{x_0}(x) = C\delta(x - x_0) \tag{20.9}$$

является решением уравнения

$$xu_{x_0}(x) = x_0u_{x_0}(x), \tag{20.10}$$

т.е. функция  $u_{x_0}(x)$  – собственная функция оператора  $\hat{L} = x$  (оператора координаты в  $x$ -представлении). Этот факт находит широкое применение в квантовой механике.

## 21. Дифференцирование обобщенных функций

Рассмотрим функционал  $g[\varphi(x)]$ ,  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , определяемый соотношением

$$g[\varphi(x)] = \langle g(x)|\varphi(x) \rangle = -\langle f(x)|\varphi'(x) \rangle,$$

где  $f(x)$  – заданная обобщенная функция. Нетрудно убедиться, что  $g[\varphi(x)]$  есть линейный и непрерывный функционал, определенный на пространстве основных функций.

♦ Обобщенная функция  $f'(x)$  называется производной обобщенной функции  $f(x)$ , если для всех функций  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо соотношение

$$\langle f'(x)|\varphi(x) \rangle = -\langle f(x)|\varphi'(x) \rangle. \quad (21.1)$$

### Свойства производных обобщенных функций

**Свойство 1.** Если  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – обобщенные функции, а  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, то

$$(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))' = C_1 f_1'(x) + C_2 f_2'(x). \quad (21.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \langle (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x))' | \varphi(x) \rangle = \\ & = -\langle (C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)) | \varphi'(x) \rangle = \\ & = -C_1 \langle f_1(x) | \varphi'(x) \rangle - C_2 \langle f_2(x) | \varphi'(x) \rangle = \\ & = C_1 \langle f_1'(x) | \varphi(x) \rangle + C_2 \langle f_2'(x) | \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 2.** Если  $\alpha(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция, а  $f(x)$  – обобщенная функция, то справедливо соотношение

$$(\alpha(x)f(x))' = \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x). \quad (21.3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha(x)f(x))' | \varphi(x) \rangle = -\langle \alpha(x)f(x) | \varphi'(x) \rangle = -\langle f(x) | \alpha(x)\varphi'(x) \rangle = \\ & = -\langle f(x) | (\alpha(x)\varphi(x))' \rangle + \langle f(x) | \alpha'(x)\varphi(x) \rangle = \\ & = \langle f'(x) | \alpha(x)\varphi(x) \rangle + \langle f(x) | \alpha'(x)\varphi(x) \rangle = \\ & = \langle [\alpha(x)f'(x) + \alpha'(x)f(x)] | \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$



В силу произвольности выбора  $\varphi(x)$  соотношение (21.3) доказано.

**Свойство 3.** Любая обобщенная функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема.

**Доказательство.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . По индукции из (21.1) получим

$$\langle f^{(n)}(x) | \varphi(x) \rangle = (-1)^n \langle f(x) | \varphi^{(n)}(x) \rangle, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \quad (21.4)$$

Поскольку функция  $\varphi(x)$  – основная, то  $\varphi^{(n)}(x)$  также принадлежат классу  $\mathcal{D}$ . В силу произвольности  $\varphi(x)$  свойство 3 доказано.

Формула (21.4), аналогично формуле (21.1), определяет высшие обобщенные производные.

**Пример 21.1.** Доказать соотношение

$$\theta'(x - a) = \delta(x - a). \quad (21.5)$$

**Решение.** По определению, для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо

$$\begin{aligned} \langle \theta'(x - a) | \varphi(x) \rangle &= -\langle \theta(x - a) | \varphi'(x) \rangle = \\ &= -\int_a^{\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(\infty) + \varphi(a) = \varphi(a) = \langle \delta(x - a) | \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varphi(x)$  соотношение (21.5) доказано.

**Пример 21.2.** Найти производную функции  $f(x) = \text{sign } x$ .

**Решение.** По определению,

$$\begin{aligned} \langle (\text{sign } x)' | \varphi(x) \rangle &= -\langle \text{sign } x | \varphi'(x) \rangle = \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx + \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx = \\ &= -\varphi(\infty) + \varphi(0) + \varphi(0) - \varphi(-\infty) = 2\varphi(0) = 2\langle \delta(x) | \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу произвольности функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$(\text{sign } x)' = 2\delta(x).$$

**Пример 21.3.** С помощью определения производной обобщенной функции найти производную функции  $f(x) = x \operatorname{sign} x$ .

**Решение.** По правилу дифференцирования

$$x\varphi'(x) = [x\varphi(x)]' - \varphi(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x \operatorname{sign} x)' \varphi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} (x \operatorname{sign} x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx + \int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} (x \operatorname{sign} x)' dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^0 (x \operatorname{sign} x)' dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} x \varphi(x) dx - x\varphi(x) \Big|_0^{\infty} + x\varphi(x) \Big|_0^{\infty} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} x \varphi(x) dx - 0 + 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(x \operatorname{sign} x)' = \operatorname{sign} x.$$

Последнее соотношение можно также получить непосредственно из предыдущего примера и (21.3).

**Свойство 4.** Пусть  $f(x)$  вместе со своей производной непрерывна везде, за исключением точки  $x = x_0$ , которая является точкой разрыва первого рода с односторонними пределами

$$f(x_0 + 0) = f_1(x_0), \quad f(x_0 - 0) = f_2(x_0),$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \\ [f]_{x_0} &= f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0), \end{aligned} \tag{21.6}$$

где  $f'(x)$  – обобщенная производная обобщенной функции  $f(x)$ , а  $\{f'(x)\}$  – непрерывная при  $x \neq x_0$  функция, равная обычной производной функции  $f(x)$  в тех точках, где производная существует, и нулю в тех точках, где производная не существует.

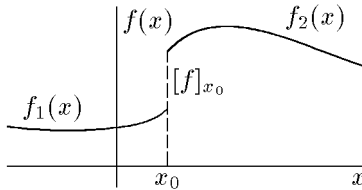


Рис. 116

**Доказательство.** Пусть (см. рис. 116)

$$f(x) = f_1(x)\theta(x_0 - x) + f_2(x)\theta(x - x_0), \quad (21.7)$$

тогда

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_1(x)\theta(x_0 - x) + f'_2(x)\theta(x - x_0) + \\ &+ f_1(x)\theta'(x_0 - x) + f_2(x)\theta'(x - x_0) = \\ &= \{f'(x)\} - f_1(x_0)\delta(x_0 - x) + f_2(x_0)\delta(x - x_0) = \\ &= \{f'(x)\} + [f_2(x_0) - f_1(x_0)]\delta(x - x_0) = \\ &= \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

♦ Обобщенную функцию, соответствующую функции  $\{f'(x)\}$  по формуле (21.6), будем называть регулярной частью обобщенной производной  $f'(x)$ .

**Пример 21.4.** Найти производную обобщенной функции  $f(x) = \sin x$ .

**Решение.** По определению, для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо

$$\langle (\sin x)' | \varphi(x) \rangle = -\langle \sin x | \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} (\sin x)\varphi'(x)dx = I.$$

Проинтегрируем по частям, положив  $U = \sin x$ ,  $dV = \varphi'(x)dx$ . Тогда  $dU = \cos x dx$ ,  $V = \varphi(x)$  и

$$I = -(\sin x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (\cos x)\varphi(x)dx = \langle \cos x | \varphi(x) \rangle.$$

Следовательно,  $(\sin x)' = \cos x$ .

**Пример 21.5.** Найти производные первого, второго и третьего порядка обобщенной функции  $f(x) = |x|$ .

**Решение.** Согласно (21.6), имеем

$$|x|' = \{|x|'\} + 0 \cdot \delta(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases};$$

$$|x|'' = (|x|')' = (\operatorname{sign} x)' = \{(\operatorname{sign} x)'\} + [1 - (-1)]\delta(x) = 0 + 2\delta(x) = 2\delta(x);$$

$$|x|''' = (|x|'')' = 2\delta'(x).$$

**Пример 21.6.** Доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)[e^{-\lambda x}\theta(x)] = \delta(x); \\ \text{б)} \quad & \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\left[\theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}\right] = \delta(x); \\ \text{в)} \quad & \left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)\left[\theta(x)\frac{\operatorname{sh} \omega x}{\omega}\right] = \delta(x), \quad \omega \neq 0. \end{aligned}$$

**Решение.** Согласно (21.3) и (21.5), имеем

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{d}{dx}[e^{-\lambda x}\theta(x)] = \theta'(x)e^{-\lambda x} - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} = \\ & = e^{-\lambda x}\delta(x) - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x) - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}[e^{-\lambda x}\theta(x)] + \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} = \\ & = \delta(x) - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} + \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}\right] = \theta'(x)\frac{\sin \omega x}{\omega} + \theta(x)\cos \omega x = \\ & = \frac{\sin \omega x}{\omega}\delta(x) + \theta(x)\cos \omega x = \theta(x)\cos \omega x, \\ & \frac{d^2}{dx^2}\left[\theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}\right] = \frac{d}{dx}[\theta(x)\cos \omega x] = \\ & = \theta'(x)\cos \omega x - \theta(x)\omega \sin \omega x = \delta(x) - \omega\theta(x)\sin \omega x, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) \left[ \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} \right] = \\ & = \delta(x) - \omega \theta(x) \sin \omega x + \omega \theta(x) \sin \omega x = \delta(x). \end{aligned}$$

в) доказывается аналогично случаю б).

**Пример 21.7.** Доказать справедливость соотношения

$$\rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x), \quad (21.8)$$

где  $\rho(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция переменной  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Решение.** Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \rho(x)\delta'(x) | \varphi(x) \rangle &= -\langle \delta(x) | [\rho(x)\varphi(x)]' \rangle = \\ &= -\rho'(0)\varphi(0) - \rho(0)\varphi'(0) = \\ &= -\rho'(0)\langle \delta(x) | \varphi(x) \rangle - \rho(0)\langle \delta(x) | \varphi'(x) \rangle = \\ &= \langle [-\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x)] | \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

В силу произвольности функции  $\varphi(x)$  соотношение (21.8) доказано.

**Пример 21.8.** Показать, что

$$\rho(x)\delta^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} C_n^j \rho^{(n-j)}(0)\delta^{(j)}(x),$$

где  $\rho(x)$  – бесконечно дифференцируемая функция переменной  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Решение** следует непосредственно из формулы Лейбница и предыдущего примера.

**Пример 21.9.** Показать, что

$$\langle \delta^{(n)}(x) | \varphi(x) \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

**Решение.** Положив в (21.6)  $f(x) = \delta(x)$ , получим

$$\langle \delta^{(n)}(x) | \varphi(x) \rangle = (-1)^n \langle \delta(x) | \varphi^{(n)}(x) \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0).$$

◆ Обобщенная функция  $f(x)$  называется логарифмической и обозначается  $f(x) = \ln|x|$ , если для любой основной функции  $\varphi(x)$  справедливо

$$\langle \ln|x| | \varphi(x) \rangle = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \varphi(x) dx.$$

**Пример 21.10.** Найти производные обобщенных функций

$$\text{а) } \ln|x|, \quad \text{б) } \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

**Решение.** а) Согласно (21.1), для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx}(\ln|x|) \middle| \varphi(x) \right\rangle &= -\langle \ln|x| | \varphi'(x) \rangle = \\ &= -\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \varphi'(x) dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \ln|x| \varphi'(x) dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln|x| \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \ln|x| \varphi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x} \middle| \varphi(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

В силу произвольности функции  $\varphi(x)$  получим

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \mathcal{P} \frac{1}{x}.$$

б) Аналогично случаю а) запишем

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d}{dx} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} \right) \middle| \varphi(x) \right\rangle &= - \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x} \middle| \varphi'(x) \right\rangle = - \text{V.п.} \int \frac{\varphi'(x)}{x} dx = \\
 &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \\
 &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0) \int_{|x| > \varepsilon} \frac{dx}{x^2} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(-\varepsilon) - \varphi(0)}{-\varepsilon} \right] - \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x^2} \middle| \varphi(x) \right\rangle = \\
 &= \left\langle - \mathcal{P} \frac{1}{x^2} \middle| \varphi(x) \right\rangle,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{dx} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x} \right) = - \mathcal{P} \frac{1}{x^2}.$$

**Пример 21.11.** Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \delta'(x - \pi) \cos \frac{x}{4} dx.$$

**Решение.** По определению производной обобщенной функции получим

$$I = \int_0^{2\pi} \delta(x - \pi) \frac{1}{4} \sin \frac{x}{4} dx.$$

Согласно (17.9),

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \begin{cases} \varphi(x_0) & x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases}.$$

Найдем

$$I = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

**Свойство 5.** Пусть  $\{f_n(x)\}$  – последовательность обобщенных функций ( $f_n(x) \in \mathcal{D}'$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ ) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (21.9)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

**Доказательство.** Последовательность обобщенных функций  $\{f_n(x)\}$  сходится к функции  $f(x)$ , т.е., по определению, для любой основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x) | \varphi(x) \rangle = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle.$$

Поскольку производная основной функции есть основная функция ( $\varphi'(x) \in \mathcal{D}$ , если  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ ), то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f'_n(x) | \varphi(x) \rangle &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n(x) | \varphi'(x) \rangle = \\ &= - \langle f(x) | \varphi'(x) \rangle = \langle f'(x) | \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть  $\{f_k(x)\}$  – последовательность обобщенных функций ( $f_k(x) \in \mathcal{D}'$ ). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (21.10)$$

и обозначим через

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

частичную сумму ряда (21.10).

♦ Ряд обобщенных функций (21.10) называется сходящимся в  $\mathcal{D}'$ , если последовательность его частичных сумм  $\{S_n(x)\}$  сходится, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

Обобщенная функция  $S(x)$  называется суммой ряда (21.10) и обозначается

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (21.11)$$



**Свойство 6.** Сходящийся ряд обобщенных функций можно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$S^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(x), \quad m = \overline{1, \infty}.$$

**Доказательство** следует непосредственно из свойства 5.

◇ Формула (21.6) естественным образом обобщается на любое число точек разрыва первого рода:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_{m=0}^n [f]_{x_m} \delta(x - x_m). \quad (21.12)$$

**Пример 21.12.** Найти  $n$ -ую производную обобщенной функции  $f(x) = [x]$ , где  $[x]$  означает целую часть  $x$ .

**Решение.** Согласно (21.8)

$$[x]' = \{[x]'\} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k), \quad (21.13)$$

откуда для  $n > 2$  получим

$$[x]^{(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(x - k).$$

**Пример 21.13.** Вычислить производную обобщенной  $2\pi$ -периодической функции  $f(x)$ , заданную на периоде  $[0, 2\pi]$  соотношением

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}. \quad (21.14)$$

**Решение.** Поскольку функция имеет разрывы первого рода в точках  $x_k = 2\pi k$ ,  $k = -\infty, \infty$  и

$$[f]_{x_k} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1,$$

то согласно (21.12) имеем

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k). \quad (21.15)$$

**Пример 21.14.** Доказать соотношения

$$\text{а) } \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi). \quad (21.16)$$

$$\text{б) } \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2k\pi x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - k). \quad (21.17)$$

**Решение.** а) Рассмотрим периодическую функцию (21.14). Ее можно представить сходящимся рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Функция  $f(x)$  (21.14) – нечетная, поэтому коэффициенты  $a_n = 0$ ,  $n = \overline{0, \infty}$ . Для коэффициентов  $b_n$  получим

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2\pi} \sin nx \, dx = \\ &= -\frac{\pi - x \cos nx}{2\pi} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

В результате

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\pi n}, \quad x \in [0, 2\pi[. \quad (21.18)$$

Продифференцировав соотношение (21.18), имеем

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx.$$

С другой стороны, производная периодической функции (21.14) определена соотношением (21.15). В результате приходим к (21.16).

б) Воспользовавшись формулой Эйлера, из (21.16) найдем

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + \frac{1}{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Сделаем в последнем соотношении замену переменных  $x = 2\pi y$ . С учетом (17.8) получим соотношение

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ky} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(y - k),$$

совпадающее с (21.17).

## 22. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Приведем основные определения, связанные с преобразованием Фурье функций, принадлежащих пространству Шварца ( $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ ).

♦ Преобразованием Фурье функции  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$  называется функция  $\bar{\varphi}(y)$ , которая ставится в соответствие функции  $\varphi(x)$  по правилу

$$\bar{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e^{-iyx} | \varphi(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iyx} dx. \quad (22.1)$$

Для операции преобразования Фурье будем использовать обозначение

$$\bar{\varphi}(y) = F_{x \rightarrow y}[\varphi(x)] = F[\varphi](y).$$

Функция  $\bar{\varphi}(y)$  называется фурье-образом функции  $\varphi(x)$ .

♦ Функция  $\varphi(x)$ , которая ставится в соответствие функции  $\bar{\varphi}(y)$  по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e^{iyx} | \bar{\varphi}(y) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(y) e^{iyx} dy \quad (22.2)$$

называется обратным преобразованием Фурье функции  $\bar{\varphi}(y)$  и обозначается

$$\varphi(x) = F_{y \rightarrow x}^{-1}[\bar{\varphi}(y)] = F^{-1}[\bar{\varphi}](x).$$

**Лемма 22.1.** *Преобразование Фурье функции из пространства Шварца также принадлежит пространству Шварца.*

**Доказательство.** Функция  $\bar{\varphi}(y)$  (22.1) бесконечно дифференцируема по  $y$ . Для подынтегрального выражения, получающегося в результате  $l$ -кратного дифференцирования, справедлива оценка

$$|(-ix)^l \varphi(x) e^{-iyx}| < |x^l \varphi(x)|,$$

и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^l \varphi(x)| dx$$

сходится, так как  $\varphi(x)$  принадлежит пространству Шварца. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} |y^m \bar{\varphi}^{(l)}(y)| &= |(iy)^m \bar{\varphi}^{(l)}(y)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [(-ix)^l \varphi(x)]^{(m)} e^{-iyx} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |[x^l \varphi(x)]^{(m)}| dx < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\bar{\varphi}(y)$  вместе со всеми своими производными стремится к нулю при  $|y| \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $y$ , т.е.  $\bar{\varphi}(y) \in \mathcal{S}$ , что и требовалось доказать.

◇ Из общей теории преобразования Фурье следует, что оно определено для абсолютно интегрируемых функций. Для того чтобы определить преобразование Фурье обобщенных функций, воспользуемся равенством Парсеваля, которое играет существенную роль в теории интегральных преобразований. В частности, оно справедливо и для квадратично интегрируемых функций.

**Теорема 22.1.** *Пусть  $\bar{\varphi}(y) = F_{x \rightarrow y}[\varphi(x)]$ ,  $\bar{f}(y) = F_{x \rightarrow y}[f(x)]$ ,  $f(x), \varphi(x) \in \mathcal{S}$ . Тогда функции  $\bar{\varphi}(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\bar{f}(x)$ ,  $f(x)$  связаны соотношением*

$$\langle \bar{f}(x) | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x) f(x) dx = \langle f(x) | \bar{\varphi}(x) \rangle. \quad (22.3)$$

Соотношение (22.3) называется равенством Парсеваля.

**Доказательство.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{S}$  и  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ . В курсе математического анализа (см., например, [26]) доказывалось, что прямое и обратное преобразования Фурье взаимно обратны. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}(x) | \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(y) e^{iyx} dy \right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) e^{iyx} dx \right\} \bar{\varphi}(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \bar{\varphi}(y) dy = \langle f(y) | \bar{\varphi}(y) \rangle = \langle f(x) | \bar{\varphi}(x) \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

◆ Преобразованием Фурье обобщенной функции медленного роста  $f(x)$  называется обобщенная функция  $\bar{f}(y) = F_{x \rightarrow y}[f(x)]$ , которая определяется соотношением

$$\langle F_{x \rightarrow y}[f(x)] | \varphi(y) \rangle = \langle f(x) | F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)] \rangle, \quad \varphi(y) \in \mathcal{S}. \quad (22.4)$$

Это определение корректно, поскольку правая часть соотношения (22.5) представляет собой линейный и непрерывный функционал на пространстве Шварца  $\mathcal{S}$ , что непосредственно следует из линейности преобразования Фурье и леммы 22.1.

Для преобразования Фурье обобщенной функции медленного роста  $f(x)$  будем также использовать формальную запись в виде интеграла

$$\bar{f}(y) = F_{x \rightarrow y}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx, \quad (22.5)$$

аналогичного определению (22.1) преобразования Фурье функции из пространства Шварца.

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста.

**Свойство 1.** Преобразование Фурье  $F[f]$  обобщенной функции медленного роста  $f(x) \in \mathcal{S}'$  также является обобщенной функцией медленного роста, т.е.  $F_{x \rightarrow y}[f(x)] \in \mathcal{S}'$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функционал (22.4).

1. Покажем, что этот функционал линеен. Действительно, для любых функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , принадлежащих  $\mathcal{S}$ , и  $f(x) \in \mathcal{S}'$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \langle F_{x \rightarrow y}[f(x)] | \{ \lambda_1 \varphi(y) + \lambda_2 \psi(y) \} \rangle = \\ & = \langle f(x) | F_{y \rightarrow x}[\lambda_1 \varphi(y) + \lambda_2 \psi(y)] \rangle = \\ & = \lambda_1 \langle f(x) | F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)] \rangle + \lambda_2 \langle f(x) | F_{y \rightarrow x}[\psi(y)] \rangle = \\ & = \lambda_1 \langle F_{y \rightarrow x}[f(x)] | \varphi(y) \rangle + \lambda_2 \langle F_{y \rightarrow x}[f(x)] | \psi(y) \rangle. \end{aligned}$$

2. Покажем, что функционал (22.4) непрерывен. Действительно, пусть  $f(x) \in \mathcal{S}$ , а  $\{\varphi_n(x)\}$  – последовательность функций пространства  $\mathcal{S}$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F_{x \rightarrow y}[f(x)] | \varphi_n(y) \rangle & = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f(x) | F_{x \rightarrow y}[\varphi_n(y)] \rangle = \\ & = \langle f(x) | F_{x \rightarrow y}[\varphi(y)] \rangle = \langle F_{x \rightarrow y}[f(x)] | \varphi(y) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, функционал (22.4) линеен и непрерывен и определен на пространстве Шварца  $\mathcal{S}$ . Следовательно,  $F_{x \rightarrow y}[f(x)]$ ,  $f(x) \in \mathcal{S}'$  – обобщенная функция медленного роста.

**Пример 22.1.** Найти преобразование Фурье единицы.

**Решение.** Очевидно, что единица – обобщенная функция. Получим

$$\begin{aligned} \langle F_{y \rightarrow x}[1] | \varphi(x) \rangle & = \langle 1 | F_{x \rightarrow y}[\varphi(x)] \rangle = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i(t-x)y} dx \Big|_{t=0} = \\ & = \sqrt{2\pi} \varphi(t) \Big|_{t=0} = \sqrt{2\pi} \langle \delta(x) | \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\begin{aligned} f(t) &= F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x) e^{i(t-x)y}. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Таким образом,

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_{t \rightarrow x}[1]. \quad (22.7)$$

Воспользовавшись обозначениями (22.5), полученный результат можно записать в виде

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} dt. \quad (22.8)$$

Последнее соотношение часто используется в физической литературе при работе с дельта-функцией Дирака.

◇ Заметим, что классическое преобразование Фурье единицы не существует.

**Свойство 2.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{S}'$ . Тогда справедливы соотношения

$$F_{x \rightarrow y} \left[ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right] = (iy)^m F_{x \rightarrow y}[f(x)]; \quad (22.9)$$

$$i^m \frac{d^m}{dy^m} F_{x \rightarrow y}[f(x)] = F_{x \rightarrow y}[x^m f(x)]. \quad (22.10)$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ , тогда

$$\begin{aligned} \left\langle F_{x \rightarrow y} \left[ \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right] \middle| \varphi(y) \right\rangle &= \left\langle \frac{d^m f(x)}{dx^m} \middle| F_{x \rightarrow y}[\varphi(y)] \right\rangle = \\ &= (-1)^m \left\langle f(x) \middle| \frac{d^m}{dx^m} (F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)]) \right\rangle = \\ &= (-1)^m \langle f(x) | F_{y \rightarrow x} [(-iy)^m \varphi(y)] \rangle = \\ &= \langle F_{x \rightarrow y}[f(x)] | (iy)^m \varphi(y) \rangle = \langle (iy)^m F_{x \rightarrow y}[f(x)] | \varphi(y) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности  $\varphi(y)$  следует (22.9).

2. Аналогично для  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \left\langle i^m \frac{d^m}{dy^m} F_{x \rightarrow y}[f(x)] \middle| \varphi(y) \right\rangle &= (-1)^m \left\langle F_{x \rightarrow y}[f(x)] \middle| \frac{d^m \varphi(y)}{dy^m} \right\rangle = \\ &= (-i)^m \left\langle f(x) \middle| F_{y \rightarrow x} \left[ \frac{d^m \varphi(y)}{dy^m} \right] \right\rangle = \\ &= (-i)^m \langle f(x) | (ix)^m F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)] \rangle = \\ &= \langle x^m f(x) | F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)] \rangle = \langle F_{x \rightarrow y}[x^m f(x)] | \varphi(y) \rangle. \end{aligned}$$

**Пример 22.2.** Найти преобразование Фурье обобщенной функции  $f(x) = x$ .

**Решение.** По определению,

$$\bar{f}(y) = F_{x \rightarrow y}[x] = F_{x \rightarrow y}[x \cdot 1] = i(F_{x \rightarrow y}[1])' = i\sqrt{2\pi}\delta'(y).$$

В частности, получим

$$\delta'(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-ixt} dt. \quad (22.11)$$

**Пример 22.3.** Найти преобразования Фурье обобщенных функций

$$\text{а) } f(x) = \delta(x - x_0), \quad \text{б) } g(x) = \delta'(x - x_0).$$

**Решение.** а) Для любой функции  $\varphi(x) \in \mathcal{S}$  справедливо

$$\begin{aligned} \langle F_{x \rightarrow y}[\delta(x - x_0)] | \varphi(y) \rangle &= \langle \delta(x - x_0) | F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)] \rangle = \\ &= F_{y \rightarrow x_0}[\varphi(y)] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 y} \middle| \varphi(y) \right\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу произвольности  $\varphi(x)$

$$F_{x \rightarrow y}[\delta(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix_0 y}. \quad (22.12)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle F_{x \rightarrow y}[\delta'(x - x_0)] | \varphi(y) \rangle &= \langle \delta'(x - x_0) | F_{y \rightarrow x}[\varphi(y)] \rangle = \\ &= F_{y \rightarrow x_0}[(-iy)\varphi(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle (-iy)e^{-iyx_0} | \varphi(y) \rangle. \end{aligned}$$



Окончательно получим

$$F_{x \rightarrow y}[\delta'(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-iy)e^{-iyx_0}. \quad (22.13)$$

◆ Обратным преобразованием обобщенной функции  $\bar{f}(y) \in \mathcal{S}'$  называется обобщенная функция  $f(x)$ , определяемая соотношением

$$\langle f(x)|\varphi(x) \rangle = \langle F_{y \rightarrow x}^{-1}[\bar{f}(y)]|\varphi(x) \rangle = \langle \bar{f}(y)|F_{x \rightarrow y}^{-1}\varphi(x) \rangle. \quad (22.14)$$

Для обратного преобразования Фурье будем использовать формальную запись

$$f(x) = F^{-1}[\bar{f}](x) = F_{y \rightarrow x}^{-1}[\bar{f}(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(y)e^{ixy} dy, \quad (22.15)$$

аналогичную определению (22.2) обратного преобразования Фурье для функций из пространства Шварца.

**Свойство 3.** Для любой обобщенной функции медленного роста  $f(x)$  справедливо представление

$$f(x) = F_{y \rightarrow x}^{-1}[F_{x \rightarrow y}[f(x)]] = F_{y \rightarrow x}[F_{x \rightarrow y}^{-1}[f(x)]]. \quad (22.16)$$

Соотношение (22.16) называется представлением обобщенной функции  $f(x)$  интегралом Фурье и формально записывается в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(x-t)} f(t) dt. \quad (22.17)$$

**Доказательство.** По определению, для любой функции  $\varphi(x)$  из пространства Шварца  $\mathcal{S}$  можно записать

$$\begin{aligned} \langle F_{y \rightarrow x}^{-1}[F_{x \rightarrow y}[f(x)]]|\varphi(x) \rangle &= \langle F_{x \rightarrow y}[f(x)]|F_{x \rightarrow y}^{-1}[\varphi(x)] \rangle = \\ &= \langle f(x)|F_{y \rightarrow x}[F_{x \rightarrow y}^{-1}[\varphi(x)]] \rangle = \langle f(x)|\varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

## 23. Свертка обобщенных функций

В некоторых разделах классического анализа используется такая операция, как свертка функций  $f(x) * g(x)$ . Определим аналогичную операцию для обобщенных функций, предварительно напомним определение и основные свойства обычной свертки.

Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$  – ограниченные и абсолютно интегрируемые в  $\mathbb{R}$  функции.

◆ Функция  $h(x)$ , определяемая выражением

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy. \quad (23.1)$$

называется сверткой функций  $f(x)$  и  $g(x)$  и обозначается  $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$ .

**Лемма 23.1.** *Интеграл (23.1) равномерно сходится для всех  $x \in \mathbb{R}$ .*

**Доказательство.** Действительно, так как функция  $g(x - y)$  ограничена, то существует  $M > 0$  такое, что

$$|f(y)g(x - y)| \leq M|f(y)|.$$

Отсюда с учетом абсолютной сходимости интеграла от функции  $f(y)$  и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла (23.1).

**Лемма 23.2.** *Функция  $h(x)$  ограничена и абсолютно интегрируема.*

**Доказательство.** Ограниченность функции  $h(x)$  следует из неравенства

$$|h(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x - y)|dy \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy,$$

а абсолютная интегрируемость – из соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)g(x - y)|dy \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dy |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x - y)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} dy |f(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt < \infty. \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования возможно, так как интеграл (23.1) сходится равномерно.

Из определения (23.1) и свойств интеграла непосредственно вытекают достаточно очевидные свойства.

1. Линейность свертки

Если  $f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ , то

$$(f * g)(x) = (C_1 f_1 + C_2 f_2) * g(x) = C_1 (f_1 * g)(x) + C_2 (f_2 * g)(x)$$

при условии, что  $(f_1 * g)(x)$  и  $(f_2 * g)(x)$  существуют.

2. Коммутативность свертки

Если свертка  $(f * g)(x)$  существует, то существует и свертка  $(g * f)(x)$  и они равны:  $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ .

3. Дифференцируемость свертки

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно дифференцируемые и абсолютно интегрируемые функции. Если свертка  $(f * g)(x)$  существует, то существуют свертки

$$\left(\frac{d^n f}{dx^n} * g\right)(x) \quad \text{и} \quad \left(f * \frac{d^n g}{dx^n}\right)(x), \quad (23.2)$$

причем

$$\frac{d^n}{dx^n} (f * g)(x) = \left(\frac{d^n f}{dx^n} * g\right)(x) = \left(f * \frac{d^n g}{dx^n}\right)(x).$$

4. Сдвиг свертки

Если свертка  $(f * g)(x)$  существует, то существует и свертка  $f(x + a) * g(x)$ , причем  $f(x + a) * g(x) = (f * g)(x + a)$ , т.е. операции сдвига и свертки коммутируют.

5. Ассоциативность свертки

Если свертка  $(f_1 * f_2 * g)(x)$  существует, то она не зависит от порядка выполнения операции

$$(f_1 * f_2)(x) * g(x) = f_1(x) * (f_2 * g)(x) = (f_1 * f_2 * g)(x).$$

◆ Сверткой обобщенной функции  $f(x) \in \mathcal{D}'$  и основной функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  называется функция

$$(f * \varphi)(x) = \langle f(y) | \varphi(x + y) \rangle. \quad (23.3)$$

◆ Сверткой обобщенных функций  $g(x)$  и  $f(x)$  называется обобщенная функция  $(g * f)(x)$ , которая является ядром линейного функционала

$$\langle (g * f)(x) | \varphi(x) \rangle = \langle g(x) | (f * \varphi)(x) \rangle =$$

$$= \langle g(x) \langle f(y) | \varphi(x+y) \rangle \rangle. \quad (23.4)$$

Нетрудно заметить, что в случае «обычных» (абсолютно интегрируемых) функций соотношение (23.4) определяет свертку (23.1).

◇ Можно показать, что правые части соотношений (23.3) и (23.4) корректно определены (детали см., например, в [66]). Здесь мы лишь сформулируем достаточные условия существования свертки (23.4).

◇ Свертка обобщенных функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существует, определяется формулой (23.4) и удовлетворяет свойствам 1–4 (свойство ассоциативности может быть нарушено, что мы обсудим позднее), если одна из них имеет ограниченный носитель или носители обеих функций ограничены с одной и той же стороны, например  $f = 0$  при  $x < a$ ,  $g = 0$  при  $x < b$  (свертка (I.36.11)), используемая в операционном исчислении, соответствует случаю, когда  $a = b = 0$ ).

Покажем, что свертка любой обобщенной функции  $f(x)$  с дельта-функцией или ее производной определена всегда.

Действительно, согласно определению, имеем

$$\begin{aligned} \langle (\delta * f)(x) | \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f(x) \varphi(x+y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi(y) dy = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности  $\varphi(x)$  можно записать

$$(\delta * f)(x) = f(x). \quad (23.5)$$

Аналогично в случае дифференцируемой функции  $f(x)$  справедливо

$$(\delta' * f)(x) = f'(x). \quad (23.6)$$

◇ Смысл формулы (23.5) состоит в том, что всякую обобщенную функцию можно разложить по дельта-функциям, что формально записывается в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x-y) dy. \quad (23.7)$$

Именно эту формулу имеют в виду, когда говорят, что материальное тело состоит из точечных масс, что всякий источник состоит из точечных источников и т.д.

◇ Отметим, что существования свертки  $(f' * g)(x)$  и  $(f * g')(x)$  недостаточно для существования свертки  $(f * g)(x)$  и справедливости равенств  $(f' * g)(x) = (f * g')(x) = (f * g)'(x)$ . Например,  $(\theta' * 1)(x) = (\delta * 1)(x) = 1$ , но  $(\theta * 1')(x) = (\theta * 0)(x) = 0$ , поскольку  $(\theta * 1)(x)$  содержит функции, не удовлетворяющие достаточным признакам существования. В таких случаях может нарушаться и свойство ассоциативности, например  $[(\theta * \delta') * 1](x) = (\theta' * 1)(x) = 1$ , но  $[\theta * (\delta' * 1)](x) = (\theta * 0)(x) = 0$ .

**Пример 23.1.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  – локально интегрируемые в  $\mathbb{R}$  функции, такие что  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$  при  $x < 0$ . Показать, что

$$(f * g)(x) = \theta(x) \int_0^x f(y)g(x-y)dy. \quad (23.8)$$

**Решение.** Согласно условию задачи

$$f(x) = \theta(x)f(x), \quad g(x) = \theta(x)g(x)$$

и определению (23.4) имеем

$$\begin{aligned} \langle (f * g)(x) | \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right] \varphi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)f(y)\theta(x-y)g(x-y)dy \right] \varphi(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[ \int_0^{\infty} f(y)\theta(x-y)g(x-y)dy \right] \varphi(x)dx + \\ &+ \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f(y)\theta(x-y)g(x-y)dy \right] \varphi(x)dx = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right] \varphi(x)dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \theta(x) \int_0^x f(y)g(x-y)dy \right] \varphi(x)dx = \\
&= \left\langle \theta(x) \int_0^x f(y)g(x-y)dy \middle| \varphi(x) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности функции  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$  и следует (23.8).

**Пример 23.2.** Показать, что если свертка  $(f*1)(x)$  существует, то она равна постоянной.

**Решение.** Пусть несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$$

сходится к величине  $A$ , тогда

$$\langle (f*1)(x) | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy \right] \varphi(x)dx = \langle A | \varphi(x) \rangle,$$

что соответствует определению обобщенной функции, являющейся постоянной  $A$ .

**Пример 23.3.** Показать, что

$$\delta^{(n)}(x-x_0) * g(x) = g^{(n)}(x-x_0), \quad n = \overline{1, \infty}.$$

**Решение.** Согласно правилу дифференцирования свертки (23.2), имеем

$$\delta^{(n)}(x-x_0) * g(x) = (\delta^{(n)} * g)(x-x_0) = g^{(n)}(x-x_0)$$

и т.д.

**Пример 23.4.** Показать, что

$$\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b).$$

**Решение.** Из решения предыдущего примера при  $n = 0$  это утверждение очевидно.

**Пример 23.5.** Вычислить

$$\text{а) } \theta(x) * \theta(x); \quad \text{б) } \theta(x) * \theta(x)x^2.$$

**Решение.** Из решения примера 23.1 имеем

$$\text{а) } \theta(x) * \theta(x) = \theta(x) \int_0^x dy = \theta(x)x;$$

$$\text{б) } \theta(x) * \theta(x)x^2 = \theta(x) \int_0^x y^2 dy = \theta(x) \frac{x^3}{3}.$$

## 24. Дельта-функция Дирака и ортонормированные системы функций

В курсе линейной алгебры и ее приложениях решение многих задач существенно упрощается с введением такого понятия, как евклидово пространство. Не менее полезным оказывается обобщение и распространение этого понятия на бесконечномерный случай, когда элементами пространства являются функции, а само это пространство – функциональным. Начнем с определения элементов предполагаемого функционального пространства.

◆ Вещественнозначная функция  $v(x)$  называется квадратично интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  с весом  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in [a, b]$ , если существует интеграл

$$\int_a^b \rho(x)v^2(x)dx. \quad (24.1)$$

Множество всех таких квадратично интегрируемых на  $[a, b]$  функций будем обозначать  $L_2([a, b], \rho(x), D) = L_2([a, b], \rho(x))$  или просто  $L_2$ . Здесь  $D \subset \mathbb{R}$  – множество значений функции  $v(x)$ .

Множество  $L_2$  наглядно характеризуется следующим утверждением.

**Утверждение 24.1.** Если  $v_1(x), v_2(x) \in L_2([a, b], \rho(x))$ , то их линейная комбинация  $\lambda_1 v_1(x) + \lambda_2 v_2(x)$  также принадлежит множеству  $L_2([a, b], \rho(x))$ , причем

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \rho(x) v_1(x) v_2(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left[ \int_a^b \rho(x) v_1^2(x) dx \right]^{1/2} \left[ \int_a^b \rho(x) v_2^2(x) dx \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Неравенство (24.2) называется неравенством Коши–Буняковского или неравенством Шварца.

Действительно, первая часть утверждения доказывается в стандартных курсах математического анализа (см., например, [26]), а для доказательства (24.2) воспользуемся тем, что при любых вещественных  $\lambda$  для линейной комбинации  $v_1(x) + \lambda v_2(x)$  справедливо

$$\begin{aligned} & \int_a^b \rho(x) \{ |v_1(x)| + \lambda |v_2(x)| \}^2 dx - \int_a^b \rho(x) v_1^2(x) dx + \\ & + 2\lambda \int_a^b \rho(x) |v_1(x) v_2(x)| dx + \lambda^2 \int_a^b \rho(x) v_2^2(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Будем рассматривать полученное выражение как квадратное неравенство относительно действительного  $\lambda$ . Тогда его дискриминант должен удовлетворять условию

$$\left[ \int_a^b \rho(x) v_1(x) v_2(x) dx \right]^2 - \int_a^b \rho(x) v_1^2(x) dx \int_a^b \rho(x) v_2^2(x) dx \leq 0,$$

из которого и следует неравенство (24.2).

Продолжая аналогию с линейной алгеброй, определим на множестве  $L_2([a, b], \rho(x))$  скалярное произведение.

◆ Скалярным произведением двух функций  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  будем называть число  $\langle v_1(x) | v_2(x) \rangle$ , определяемое равенством

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \langle v_1(x) | v_2(x) \rangle_\rho = \int_a^b \rho(x) v_1(x) v_2(x) dx. \quad (24.3)$$



Скалярное произведение обладает очевидными свойствами

$$\begin{aligned} & \langle [\lambda_1 v_1(x) + \lambda_2 v_2(x)] | v_3(x) \rangle_\rho = & (24.4) \\ & = \lambda_1 \langle v_1(x) | v_3(x) \rangle_\rho + \lambda_2 \langle v_2(x) | v_3(x) \rangle_\rho = \\ & = \lambda_1 \langle v_3(x) | v_1(x) \rangle_\rho + \lambda_2 \langle v_3(x) | v_2(x) \rangle_\rho = \\ & = \langle v_3(x) | [\lambda_1 v_1(x) + \lambda_2 v_2(x)] \rangle_\rho. \end{aligned}$$

С помощью скалярного произведения определим норму функции  $v(x)$ .

◆ Нормой функции  $v(x)$  будем называть число

$$\|v\| = \|v(x)\| = \sqrt{\langle v(x) | v(x) \rangle_\rho} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) v^2(x) dx} \geq 0. \quad (24.5)$$

Неравенство Коши – Буняковского в терминах скалярного произведения и нормы можно записать в виде

$$|\langle v_1(x) | v_2(x) \rangle| \leq \|v_1(x)\| \|v_2(x)\|. \quad (24.6)$$

Из (24.6) вытекает весьма полезное и достаточно очевидное неравенство – неравенство Минковского

$$\|v_1(x) + v_2(x)\| \leq \|v_1(x)\| + \|v_2(x)\|. \quad (24.7)$$

Так же как и в линейной алгебре, функции  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  будем называть ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\langle v_1(x) | v_2(x) \rangle_\rho = \int_a^b \rho(x) v_1(x) v_2(x) dx = 0. \quad (24.8)$$

Заметим, что ортогональность функций  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  зависит не только от их явного вида, но и от промежутка  $[a, b]$  и от весовой функции  $\rho(x)$ , т.е. функции, ортогональные на одном промежутке, могут быть не ортогональны на другом или ортогональные с одной весовой функцией не ортогональны с другой.

◆ Конечная или бесконечная система линейно независимых функций  $\{v_k(x)\}$  называется ортогональной, если

$$\langle v_k(x) | v_l(x) \rangle = 0 \quad \text{для } k \neq l. \quad (24.9)$$

**Пример 24.1.** Показать, что система тригонометрических функций

$$\{1, \cos nx, \sin nx\}, \quad n = \overline{1, \infty} \quad (24.10)$$

ортогональна на отрезке  $[-\pi, \pi]$  с весом  $\rho(x) = 1$ .

**Решение.** Ортогональность различных функций следует из интегралов

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx = \frac{\sin^2 nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

С помощью соотношений

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

нетрудно убедиться, что при  $n \neq m$ ,  $n, m = \overline{1, \infty}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0.$$

Найдем интегралы от квадратов функций системы:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi.$$

С помощью соотношений

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \quad n \geq 1, \quad (24.11)$$

что и требовалось показать.

♦ В части III «Специальные функции» мы подробно рассмотрим ортогональные системы специальных функций:

- функции Бесселя  $\{J_\nu(\alpha_k^\nu x)\}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$  ортогональны на отрезке  $[0, 1]$  с весом  $\rho(x) = x$  (здесь  $\alpha_k^\nu$  –  $k$ -ый положительный корень функции Бесселя  $J_\nu(\alpha) = 0$ ;
- полиномы Лежандра  $P_n(x)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $\rho(x) = 1$ ;
- полиномы Эрмита  $H_n(x)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  ортогональны на интервале  $]-\infty, \infty[$  с весом  $\rho(x) = e^{-x^2}$ ;
- полиномы Лагерра  $L_n^\alpha(x)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  ортогональны на интервале  $[0, \infty[$  с весом  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x^2}$  ( $\alpha > -1$ );
- функции Эрмита  $U_n(x)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  ортогональны на интервале  $]-\infty, \infty[$  с весом  $\rho(x) = 1$ ;
- функции Лагерра  $I_{\alpha+n, n}(x)$ ,  $n = \overline{0, \infty}$  ортогональны на интервале  $[0, \infty[$  с весом  $\rho(x) = 1$  ( $\alpha > -1$ ).

Кроме того, мы рассмотрим некоторые основные свойства ортогональных систем, образованных собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля, а в части IV «Уравнения математической физики» – систем, образованных собственными функциями симметричных ядер интегральных уравнений.

♦ Ортогональная система функций  $\{v_k(x)\}$  называется ортонормированной, если  $\|v_k\| = 1$ .

◇ Любую ортогональную систему функций  $\{v_k(x)\}$  можно превратить в ортонормированную  $\{u_k(x)\}$ , положив

$$u_k(x) = \frac{v_k(x)}{\|v_k\|}.$$

**Пример 24.2.** Ортонормировать тригонометрическую систему функций (24.10).

**Решение.** С учетом соотношения (24.11) получим

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

◆ Ортогональную систему функций  $\{v_k(x)\}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , будем называть полной, если в  $L_2([a, b], \rho(x))$  не существует отличной от нуля функции  $f(x)$ , ортогональной всем функциям  $v_k(x)$  этой системы.

По аналогии с обобщенными функциями функцию, равную нулю на  $[a, b]$  всюду, кроме конечного числа точек, будем также считать нулем.

Полную ортогональную систему функций  $\{v_k(x)\}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , можно рассматривать как ортогональный бесконечномерный базис в пространстве  $L_2([a, b], \rho(x))$ , так что любая функция из этого пространства может быть представлена разложением

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k v_k(x), \quad (24.12)$$

в котором постоянные  $C_k$  играют роль «координат» функции  $f(x)$  относительно базиса  $\{v_k(x)\}$ . Значения этих коэффициентов можно определить, умножив скалярно правую и левую части (24.12) на функцию  $v_n(x)$  и используя соотношения (24.5), (24.8). Тогда

$$\begin{aligned} \langle f(x) | v_n(x) \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \langle v_k(x) | v_n(x) \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \|v_n(x)\|^2 \delta_{kn} = C_n \|v_n(x)\|^2, \end{aligned}$$

откуда

$$C_n = \frac{\langle f(x) | v_n(x) \rangle}{\|v_n(x)\|^2}, \quad n = \overline{1, \infty}. \quad (24.13)$$

◆ Разложение (24.12), в котором коэффициенты  $C_k$  определяются формулой (24.13), называется рядом Фурье по ортогональной системе функций  $\{v_k(x)\}$ , а сами коэффициенты  $C_k$  – коэффициентами Фурье функции  $f(x)$  относительно базиса  $\{v_k(x)\}$ .

Для исследования сходимости ряда Фурье (24.12) рассмотрим величину

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x) \right\|^2 = \int_a^b \rho(x) \left[ f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x) \right]^2 dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \rho(x) f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n C_k \int_a^b \rho(x) f(x) v_k(x) dx + \\
&\quad + \sum_{k,j=1}^n C_k C_j \int_a^b \rho(x) v_k(x) v_j(x) dx = \\
&= \|f(x)\|^2 - \sum_{k=1}^n C_k^2 \|v_k(x)\|^2 \geq 0. \tag{24.14}
\end{aligned}$$

Из (24.14) следуют сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|v_k(x)\|^2 \tag{24.15}$$

и так называемое неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|v_k(x)\|^2 \leq \|f(x)\|^2. \tag{24.16}$$

◇ Для ортонормированных систем ( $\|u_k(x)\| = 1$ ) неравенство Бесселя примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \|f(x)\|^2.$$

◆ Ортогональную систему функций  $\{v_k(x)\}$  называют замкнутой, если для любой функции  $f(x) \in L_2([a, b], \rho(x))$  неравенство Бесселя (24.16) обращается в равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|v_k(x)\|^2 = \|f(x)\|^2. \tag{24.17}$$

Равенство (24.17) называют равенством Парсеваля, или формулой замкнутости.

Формула замкнутости позволяет записать (24.14) в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x) \right\| = 0. \tag{24.18}$$

Она отражает тот факт, что при замене функции  $f(x)$  ее  $n$ -частичной суммой ряда Фурье среднеквадратичная погрешность стремится к нулю при неограниченном возрастании  $n$ , т.е. ряд (24.12) «сходится» к функции  $f(x)$ . Отметим, однако, что сходимость ряда Фурье, определяемая соотношением (24.18), отличается от сходимости ряда в обычном (поточечном)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x) \right| = 0$$

смысле и представляет собой пример сходимости в среднем или среднеквадратичном [так называемая сходимость по норме в пространстве  $L_2([a, b], \rho(x))$ ].

◆ Последовательность  $v_k(x) \in L_2([a, b], \rho(x))$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , будем называть сходящейся к функции  $f(x) \in L_2([a, b], \rho(x))$  в среднем [или среднеквадратичном, или по норме в пространстве  $L_2([a, b], \rho(x))$ ], если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x) - v_k(x)\| = 0. \quad (24.19)$$

◆ Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x), \quad v_k(x) \in L_2([a, b], \rho(x))$$

будем называть сходящимся к функции  $f(x) \in L_2([a, b], \rho(x))$  в среднем [по норме в пространстве  $L_2([a, b], \rho(x))$ ], если последовательность его  $n$ -частичных сумм сходится в среднем к функции  $f(x)$ .

◆ Из сходимости в среднем не следует сходимость в обычном смысле, поскольку в некоторых точках отрезка  $[a, b]$  функция  $f(x)$  и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$  могут достаточно сильно отличаться друг от друга, что невозможно при обычной (поточечной) сходимости. Заметим к тому же, что из поточечной сходимости также, вообще говоря, не следует сходимость в среднем, что и проиллюстрируем следующим примером.

**Пример 24.3.** Исследовать последовательность

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2n\pi} e^{-nx^2/2}, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad x \in [0, 1]$$

на сходимость.

**Решение.** Очевидно, что  $\varphi_n(0) = 0$  и для любого фиксированного  $x \in ]0, 1]$  справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2nx}}{e^{nx^2/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x}}{2\sqrt{n}} \frac{(-2)}{x^2 e^{nx^2/2}} = 0.$$

Здесь мы воспользовались правилом Лопиталя. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

Исследуем теперь вопрос о сходимости в среднем последовательности  $\{\varphi_n(x)\}$  к функции  $\varphi(x) = 0$ . Рассмотрим интеграл

$$J_n = \int_0^1 [\varphi_n(x) - 0]^2 dx = \int_0^1 2nx e^{-nx^2} dx = 1 - e^{-n},$$

из которого следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 1$$

и последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  не сходится по норме пространства  $L_2([0, 1])$  к функции  $\varphi(x) = 0$ .

Выяснив характер сходимости в среднем и возвращаясь к разложению функции в ряд Фурье, сформулируем следующее утверждение:

**Утверждение 24.2.** Замкнутая ортогональная система функций  $\{v_k(x)\} \in L_2([a, b], \rho(x))$  является полной в  $L_2([a, b], \rho(x))$ .

Действительно, предположим, что система  $\{v_k(x)\}$  не является полной, т.е. существует функция  $\varphi(x)$ , ортогональная всем  $v_k(x)$  системы  $\{v_k(x)\}$ . Но тогда все ее коэффициенты Фурье равны нулю и формула замкнутости принимает вид

$$\|\varphi(x)\|^2 = \int_a^b \rho(x) \varphi^2(x) dx = 0. \quad (24.20)$$

Если функция  $\varphi^2(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то, приняв во внимание, что  $\rho(x) > 0$ , можем записать  $\varphi^2(x) = 0$  и, соответственно,  $\varphi(x) = 0$  для всех  $x \in [a, b]$ . Таким образом, функция, ортогональная всем  $v_k(x)$ , есть тождественный нуль, а это и означает полноту системы  $\{v_k(x)\}$ .

Если функция  $\varphi^2(x)$  на  $[a, b]$  кусочно-непрерывна, то из (24.20) следует, что она будет равна нулю всюду, кроме конечного числа отдельных точек, являющихся границами интервала непрерывности. Такую функцию, по принятой ранее договоренности, мы считаем нулем, а следовательно, и в данном случае замкнутая система  $\{v_k(x)\}$  является полной.

Ответ на вопрос о сходимости ряда Фурье функции  $f(x)$  дается следующим утверждением:

**Утверждение 24.3.** Если  $\{v_k(x)\}$  – ортогональная замкнутая система в  $L_2([a, b], \rho(x))$ , то любая функция  $f(x)$  из пространства  $L_2([a, b], \rho(x))$  может быть единственным образом разложена в ряд Фурье, сходящийся к ней в среднем.

Действительно, из ортогональности системы вытекает возможность разложения функции в ряд Фурье, из замкнутости следует его сходимости к функции  $f(x)$ , а заодно и полнота  $\{v_k(x)\}$ , которая, в свою очередь, обеспечивает единственность этого разложения.

**Пример 24.4.** Показать, что среднеквадратичное отклонение

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) \right\| \quad (24.21)$$

будет наименьшим, если произвольные вещественные коэффициенты  $a_k$  принять равными коэффициентам Фурье  $C_k$  функции  $f(x)$  из  $L_2$  по ортогональной системе  $\{v_k(x)\} \in L_2$ .

**Решение.** Рассмотрим величину

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) \right\|^2 = \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x) - \sum_{k=1}^n (a_k - C_k) v_k(x) \right\|^2,$$

которую с помощью обозначений

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x), \quad \tilde{a}_k = a_k - C_k$$

можно записать в виде

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) \right\|^2 = \left\| \tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k v_k(x) \right\|^2 =$$



$$\begin{aligned}
&= \left\langle \tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k v_k(x) \middle| \tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k v_k(x) \right\rangle = \\
&= \|\tilde{f}(x)\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \langle v_k(x) | \tilde{f}(x) \rangle + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k^2 \|v_k(x)\|^2. \quad (24.22)
\end{aligned}$$

Приняв во внимание, что

$$\begin{aligned}
\langle v_k(x) | \tilde{f}(x) \rangle &= \left\langle v_k(x) \middle| f(x) - \sum_{l=1}^n C_l v_l(x) \right\rangle = \\
&= C_k \|v_k(x)\|^2 - C_k \|v_k(x)\|^2 = 0,
\end{aligned}$$

из (24.22) находим

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) \right\|^2 = \|\tilde{f}(x)\|^2 + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \|v_k(x)\|^2$$

или

$$\begin{aligned}
&\left\| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) \right\|^2 = \\
&= \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n C_k v_k(x) \right\|^2 + \sum_{k=1}^n (a_k - C_k)^2 \|v_k(x)\|^2,
\end{aligned}$$

откуда и следует, что (24.21) примет минимальное значение при  $a_k = C_k$ .

◇ Сказанное выше можно распространить на случай комплекснозначных функций вещественного аргумента. В линейной алгебре такой переход соответствует переходу от евклидовых пространств к эрмитовым.

◆ Комплекснозначная функция  $v(x)$  называется квадратично интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  с весом  $\rho(x) > 0$ ,  $t \in [a, b]$ , если существует интеграл

$$\int_a^b \rho(x) |v(x)|^2 dx. \quad (24.23)$$

Множество всех квадратично интегрируемых на  $[a, b]$  комплекснозначных функций будем обозначать  $L_2([a, b], \rho(x), \mathbb{C})$  или просто  $L_2$ .

Аналогично определяются скалярное произведение и норма в пространстве  $L_2([a, b], \rho(x), \mathbb{C})$ .

◆ Скалярным произведением двух комплекснозначных функций  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$  будем называть число  $\langle v_1(x)|v_2(x) \rangle$ , определяемое равенством

$$\langle v_1|v_2 \rangle = \langle v_1(x)|v_2(x) \rangle_\rho = \int_a^b \rho(x)v_1^*(x)v_2(x)dx, \quad (24.24)$$

где  $v_n^*(x)$  – функция, комплексно сопряженная функции  $v_n(x)$ .

◆ Нормой комплекснозначной функции  $v(x)$  будем называть число

$$\|v\| = \|v(x)\| = \sqrt{\langle v(x)|v(x) \rangle_\rho} = \sqrt{\int_a^b \rho(x)|v(x)|^2 dx} > 0. \quad (24.25)$$

**Пример 24.5.** Установить свойства скалярного произведения (24.24), аналогичные свойствам (24.5).

Решить самостоятельно.

◆ Система комплекснозначных функций  $\{u_n(x)\}$  называется ортонормированной на интервале  $a < x < b$ , если

$$\int_a^b u_n(x)u_m^*(x)dx = \delta_{mn}, \quad (24.26)$$

где  $u_n^*(x)$  – функция, комплексно сопряженная функции  $u_n(x)$ .

**Пример 24.6.** Показать, что система комплекснозначных функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}, \quad n = \overline{-\infty, \infty}$$

является ортонормированной с весом  $\rho(x) = 1$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

**Решение.** При  $n \neq m$ ,  $m, n = \overline{-\infty, \infty}$

$$\begin{aligned} J_{nm} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-imx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \\ &= \frac{-i}{2\pi(n-m)} e^{i(n-m)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично при  $n = m$

$$J_{nn} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx = 1,$$

что и требовалось показать.

Ортонормированные системы функций обладают рядом замечательных свойств, которые будут изучены позднее. Здесь же отметим, что коэффициенты Фурье  $C_n$  разложения функции  $f(x)$  (24.12) по полной ортонормированной системе комплекснозначных функций вычисляются по формуле

$$C_n = \int_a^b f(y) u_n^*(y) dy, \quad (24.27)$$

которая с очевидностью вытекает из (24.12) с учетом (24.26).

Подставив (24.27) в (24.12), запишем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \int_a^b f(y) u_n^*(y) dy, \quad a < x < b. \quad (24.28)$$

Формально изменив в (24.28) порядок интегрирования и суммирования, получим

$$f(x) = \int_a^b f(y) G(x, y) dy, \quad G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n^*(y); \quad (24.29)$$

$$a < x < b, \quad a < y < b.$$

Сравнив ядро функционала (24.29) с определением дельта-функции, видим, что функция  $G(x, y)$  в пространстве  $L_2$  играет роль  $\delta(x - y)$ .

◆ Соотношение

$$\delta(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n^*(y), \quad a < x < b, \quad a < y < b, \quad (24.30)$$

справедливое для любой функции  $f(x) \in L_2$ , называется условием полноты для ортонормированной системы  $\{u_n(x)\}$  в классе  $L_2$ .

Таким образом, полные ортонормированные системы функций  $\{u_n(x)\}$  порождают представление дельта-функции в виде (24.30).

Соотношение (24.30) широко используется в физической литературе, где его часто принимают за определение полной в пространстве  $L_2$  системы функций и называют условием полноты. Заметим, что ряд в (24.30) может в обычном смысле расходиться. В этом случае сходимость ряда (24.30) понимается в обобщенном смысле. Опишем один из наиболее используемых методов суммирования расходящихся рядов – метод Абеля (см., например, [60]). Название метода восходит к теореме Абеля I.6.1, из которой следует непрерывность суммы степенного ряда. Рассмотрим вспомогательный степенной ряд

$$G(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n^*(y)z^n, \quad (24.31)$$

$$a < x < b, \quad a < y < b, \quad |z| < 1.$$

Если ряд (24.31) сходится в обычном смысле, то равенство (24.30) понимается следующим образом. Для любой функции  $\varphi(x) \in L_2$

$$\lim_{z \rightarrow 1+0} \int_a^b \varphi(y)G(x, y, z)dy = \varphi(x). \quad (24.32)$$

◇ Если в соотношении (24.31)  $z$  комплексное число, то предел при  $z \rightarrow 1$  в (24.32) вычисляется по любой кривой в комплексной плоскости, не касательной к единичной окружности.

**Пример 24.7.** Показать, что на множестве  $2\pi$ -периодических функций, удовлетворяющих на отрезке  $[-\pi, \pi]$  условиям Дирихле (т.е. кусочно-монотонных и имеющих конечное число точек разрыва первого рода), справедливо соотношение

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny). \quad (24.33)$$

**Решение.** Ряд, стоящий в правой части (24.33), расходится в обычном смысле, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости. Просуммируем его методом Абеля.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n (\cos nx \cos ny + \sin nx \sin ny) = \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n(x - y). \end{aligned}$$

Но при  $|z| < 1$  и произвольном  $\alpha$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n\alpha &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n (e^{i\alpha n} + e^{-i\alpha n}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{ze^{i\alpha}}{1 - ze^{i\alpha}} + \frac{ze^{-i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}} \right) = \frac{1 - z^2}{2(1 - 2z \cos \alpha + z^2)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n\alpha = \frac{1 - z^2}{2(1 - 2z \cos \alpha + z^2)}. \quad (24.34)$$

Следовательно,

$$G(x, y, z) = \frac{1 - z^2}{2\pi(1 - 2z \cos(x - y) + z^2)}. \quad (24.35)$$

Рассмотрим произвольную  $2\pi$ -периодическую функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую на отрезке  $[-\pi, \pi]$  условиям Дирихле. Обозначим через

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z) \varphi(y) dy = \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} G(x, t+x, z) \varphi(t+x) dt = \int_{-\pi}^{\pi} G(x, t+x, z) \varphi(t+x) dt. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались периодичностью функций  $\varphi(x)$  и

$G(x, y, z)$ . Разобьем последний интеграл на два:

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) &= \int_{-\pi}^0 G(x, x+t, z)\varphi(x+t)dt + \\ &+ \int_0^{\pi} G(x, x+t, z)\varphi(x+t)dt = \\ &= \int_0^{\pi} [G(x, x+t, z)\varphi(x+t) + G(x, x-t, z)\varphi(x-t)]dt. \end{aligned}$$

С учетом явного вида функции  $G(x, y, z)$  (24.35) получим

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(x+t)(1-z^2)}{1-2z\cos t+z^2} dt, \quad (24.36)$$

где обозначено

$$g(x+t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+t) + \varphi(x-t)].$$

Заметим, что для всех  $z$  выполняется

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1-z^2}{1-2z\cos t+z^2} dt = 1 \quad (24.37)$$

и для любого  $\varepsilon \in ]0, \pi[$  справедливо

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{g(x+t)(1-z^2)}{1-2z\cos t+z^2} dt = 0, \quad (24.38)$$

так как в этом случае знаменатель дроби положителен, а числитель стремится к нулю.

Для любого числа  $\rho > 0$  выберем такое  $\varepsilon \in ]0, \pi[$ , чтобы для всех  $t \in [0, \varepsilon[$  выполнялось неравенство

$$|g(t) - g(+0)| < \rho. \quad (24.39)$$

Тогда в силу (24.37) и (24.39) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{g(t)(1-z^2)}{1-2z \cos t + z^2} dt - g(+0) \right| < \\ & < \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{[g(t) - g(+0)](1-z^2)}{1-2z \cos t + z^2} dt \right| = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{|g(t) - g(+0)|(1-z^2)}{1-2z \cos t + z^2} dt \leq \\ & \leq \rho \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{1-z^2}{1-2z \cos t + z^2} dt \leq \rho, \end{aligned}$$

т.е. справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{g(t)(1-z^2)}{1-2z \cos \alpha + z^2} dt - g(+0) \right| < \rho,$$

не зависящая от  $z$ . Отсюда с учетом (24.38) и определения функции  $G(x, y, z)$  получим

$$\lim_{z \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} G(x, y, z) \varphi(y) dy = \frac{1}{2} [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)], \quad (24.40)$$

что и тождественно (24.33).

◇ В части «Специальные функции» мы в явном виде покажем справедливость условия полноты (24.30) для полиномов Лежандра  $P_n(x)$ , функций Эрмита  $U_n(x)$  и функций Лагерра  $I_{\nu+n, n}(x)$ .

◇ Соотношение (24.40) можно рассматривать как одно из обоснований формулы (17.9), а именно, для  $2\pi$ -периодических функций, удовлетворяющих условию Дирихле, справедливо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-y) \varphi(y) dy = \frac{1}{2} [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]. \quad (24.41)$$

## 25. Классические и обобщенные решения дифференциальных уравнений\*

Понятие обобщенных функций и правила действия с ними позволяют сформулировать понятие обобщенного решения дифференциального уравнения

$$\hat{L}u(x) = f(x), \quad (25.1)$$

где

$$\hat{L} = L(x, D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k, \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (25.2)$$

$p_k(x)$  – заданные бесконечно дифференцируемые функции, а  $u(x)$  и  $f(x)$  – обобщенные функции.

♦ Обобщенным решением уравнения (25.1) называется обобщенная функция  $u(x)$ , удовлетворяющая этому уравнению в обобщенном смысле, т.е.

$$\langle L(x, D)u(x) | \varphi(x) \rangle = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle \quad (25.3)$$

для любой  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ .

Соотношение (25.3) можно переписать в виде

$$\langle u(x) | L^*(x, D)\varphi(x) \rangle = \langle f(x) | \varphi(x) \rangle, \quad (25.4)$$

где  $L^*(x, D)$  – оператор, формально сопряженный к оператору  $\hat{L}$  (25.2)

$$\hat{L}^* \varphi(x) = L^*(x, D)\varphi(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k p_k(x) \varphi(x).$$

Как и классические решения, всякое обобщенное решение уравнения (25.1) можно представить в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$L(x, D)u(x) = 0, \quad (25.5)$$

и простейшее из них

$$\frac{du(x)}{dx} = 0. \quad (25.6)$$



**Лемма 25.1.** Дифференциальное уравнение (25.6) не имеет иных решений в пространстве обобщенных функций, кроме классических.

**Доказательство.** В пространстве обобщенных функций уравнение (25.6) эквивалентно соотношению

$$\langle u'(x)|\varphi(x)\rangle = -\langle u(x)|\varphi'(x)\rangle = 0 \quad (25.7)$$

для любой  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ .

Лемма будет доказана, если мы покажем, что общее решение этого уравнения в классе обобщенных функций есть постоянная, т.е.  $u(x) = \text{const}$ .

Воспользуемся представлением (20.3) основной функции  $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy + \varphi_1'(x), \quad (25.8)$$

где  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$  принадлежат пространству  $\mathcal{D}$ , причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle u(x)|\varphi(x)\rangle &= \left\langle u(x) \left| \left[ \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \varphi_1'(x) \right] \right. \right\rangle = \\ &= \langle u(x)|\varphi_0(x)\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \langle u(x)|\varphi_1'(x)\rangle. \end{aligned}$$

Согласно (25.7), на множестве производных основных функций для функции  $u(x)$  справедливо соотношение  $\langle u(x)|\varphi'(x)\rangle = 0$ , а поскольку  $\varphi_1'(x)$  также принадлежит этому множеству, то  $\langle u(x)|\varphi_1'(x)\rangle = 0$ , а  $\langle u(x)|\varphi_0(x)\rangle = C = \text{const}$ . С учетом этого получаем

$$\langle u(x)|\varphi(x)\rangle = C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C\varphi(x) dx = \langle C|\varphi(x)\rangle,$$

что соответствует определению обобщенной функции  $u(x)$ , являющейся постоянной  $C$ .

**Пример 25.1.** В пространстве обобщенных функций найти общее решение уравнения

$$x \frac{du(x)}{dx} = 0.$$

**Решение.** Решение уравнения должно быть постоянной величиной как при  $x > 0$ , так и при  $x < 0$ . Отсюда следует, что уравнение имеет два линейно независимых решения

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = \theta(x),$$

и, следовательно, общее решение

$$u(x) = C_1 + C_2 \theta(x)$$

содержит две произвольные постоянные.

**Пример 25.2.** Найти общее решение уравнения

$$2x^3 u'(x) + u(x) = 0$$

в пространстве обобщенных функций.

**Решение.** Если классическим решением этого уравнения (при  $x \neq 0$ ) является функция

$$u(x) = C e^{1/x^2},$$

где  $C$  – произвольная постоянная, то в пространстве обобщенных функций существует единственное решение  $u(x) = 0$ . Действительно, при  $x \neq 0$  обобщенное решение должно совпадать с классическим, что возможно только, если  $C = 0$ , так как интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{1/x^2} \varphi(x) dx,$$

где  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ , не допускает регуляризации.

Запишем однородное уравнение  $n$ -ого порядка (25.5) в виде однородной системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка с матрицей  $A$

$$\frac{d\vec{u}(x)}{dx} = A\vec{u}(x), \quad (25.9)$$

что, как известно, всегда можно сделать. Систему (25.9) мы для удобства записали в векторной форме  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

Пусть  $U(x)$  – фундаментальная матрица однородной системы (25.9). Перейдем от неизвестной  $\vec{u}(x)$  к неизвестной  $\vec{v}(x)$ , используя соотношение  $\vec{u}(x) = U(x)\vec{v}(x)$ . Тогда система (25.9) преобразуется к виду

$$\frac{dU(x)}{dx}\vec{v} + U(x)\frac{d\vec{v}}{dx} = AU(x)\vec{v}.$$

Поскольку

$$\frac{dU(x)}{dx} = AU(x),$$

то

$$U(x)\frac{d\vec{v}}{dx} = 0.$$

С учетом того, что матрица  $U(x)$  является обратимой, умножение этого уравнения на  $U^{-1}(x)$  приводит к системе распавшихся уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dx} = 0.$$

Согласно лемме 25.1,  $\vec{v}$  является постоянным вектором. Отсюда следует, что  $\vec{u} = U(x)\vec{v}$  есть вектор, являющийся линейной комбинацией векторов классической фундаментальной системы. А так как система (25.9) эквивалентна уравнению (25.5), то мы доказали следующую теорему:

**Теорема 25.1.** *Дифференциальное уравнение (25.5) не имеет иных решений в пространстве обобщенных функций, кроме классических.*

Несоответствие, возникающее между классическим и обобщенным решениями в приведенных выше примерах, может быть устранено, если обобщенное решение искать в виде  $\theta(x)u(x)$ .

♦ Множество обобщенных функций, для которых  $u(x) = 0$  при  $x < 0$  (или  $\text{supp } u = \mathbb{R}_+, x > 0$ ), будем обозначать  $\mathcal{D}'_+$ . Это множество является подпространством пространства  $\mathcal{D}'$ .

Действительно, если решение уравнения  $xu' = 0$  искать в пространстве  $\mathcal{D}'_+$ , то его общее решение есть  $u(x) = C\theta(x)$ , совпадающее с классическим  $u(x)$  при  $x > 0$ .

♦ В математической физике пространство  $\mathcal{D}'_+$  естественным образом возникает из самой постановки задач, поскольку

решения краевых задач, как правило, ищут на положительных интервалах  $]0, l[$ ,  $]0, \infty[$ , а решение задачи Коши – для положительных моментов времени  $x > 0$ .

**Пример 25.3.** В пространстве обобщенных функций  $\mathcal{D}'$  найти общее решение уравнения

$$x^m u(x) = 0, \quad m = \overline{1, \infty}. \quad (25.10)$$

**Решение.** Предварительно отметим, что для  $m = 1$  решение известно и приведено в примере 20.1. Для произвольного  $m$  найдем решение двумя способами, каждый из которых имеет свои преимущества.

*Первый способ.* Поскольку  $u(x) \in \mathcal{D}'$ , то

$$\langle x^m u(x) | \varphi(x) \rangle = \langle u(x) | x^m \varphi(x) \rangle = 0 \quad (25.11)$$

для всех  $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ . Найдем  $\langle u(x) | \varphi(x) \rangle$ , используя тождественные преобразования и свойства функции  $\psi(x)$ , определенные леммой 20.3:

$$\begin{aligned} \langle u(x) | \varphi(x) \rangle &= \\ &= \left\langle u(x) \left| \left[ \varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] \right\rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \varphi^{(k)}(0) \langle u(x) | \eta_k(x) \rangle + \langle u(x) | x^m \psi(x) \rangle, \end{aligned} \quad (25.12)$$

где функции

$$\begin{aligned} \eta_k(x) &= (-1)^k \frac{x^k}{k!} \eta(x); \\ \psi(x) &= \frac{1}{x^m} \left[ \varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right] \end{aligned} \quad (25.13)$$

являются основными согласно лемме 20.3 и определению (18.3).

Обозначив  $C_k = \langle u(x) | \eta_k(x) \rangle$ , с учетом (25.11) можно записать (25.12)

$$\langle u(x) | \varphi(x) \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} C_k (-1)^k \varphi^{(k)}(0) =$$

$$= \left\langle \sum_{k=0}^{m-1} C_k \delta^{(k)}(x) \middle| \varphi(x) \right\rangle. \quad (25.14)$$

Здесь использован результат примера 21.8. В силу произвольности функции  $\varphi(x)$  из (25.14), получим

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k \delta^{(k)}(x). \quad (25.15)$$

*Второй способ.* Представим (25.10) в виде

$$x[x^{m-1}u(x)] = 0. \quad (25.16)$$

Тогда, согласно решению примера 20.1,

$$[x^{m-1}u(x)] = \bar{C}_{m-1}\delta(x), \quad (25.17)$$

где  $\bar{C}_{m-1}$  – произвольная постоянная. Представив (25.17) по аналогии с (25.16) в виде

$$x[x^{m-2}u(x)] = \bar{C}_{m-1}\delta(x),$$

получим

$$x[x^{m-2}u(x)] - \bar{C}_{m-1}\delta(x) = 0. \quad (25.18)$$

Из примера 21.8 при  $\rho(x) = x$  следует весьма полезное соотношение

$$\delta^{(r)}(x) = -\frac{1}{r+1}x\delta^{(r+1)}(x), \quad r = \overline{0, \infty}, \quad (25.19)$$

которое позволяет записать (25.18) при  $r = 0$  в виде

$$x\{[x^{m-2}u(x)] + \bar{C}_{m-1}\delta'(x)\} = 0,$$

откуда

$$[x^{m-2}u(x)] + \bar{C}_{m-1}\delta'(x) = \bar{C}_{m-2}\delta(x).$$

Аналогично

$$x\left\{[x^{m-3}u(x)] - \frac{\bar{C}_{m-1}}{2}\delta''(x) + \bar{C}_{m-2}\delta'(x) - \bar{C}_{m-3}\delta(x)\right\} = 0.$$

Продолжая по индукции и переобозначив  $\bar{C}_m$  в соответствии с (25.15), получаем

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} C_k \delta^{(k)}(x).$$

**Пример 25.4.** В пространстве  $\mathcal{D}'$  найти общее решение уравнений

- а)  $xu'(x) = 0$ ;
- б)  $x^2u'(x) = 0$ ;
- в)  $xu''(x) = 0$ ;
- г)  $x^2u''(x) = 0$ .

**Решение.** а) Согласно (25.15), при  $m = 1$  получим  $u'(x) = C_1\delta(x)$  или  $u'(x) - C_1\delta(x) = 0$ . Так как  $\delta(x) = \theta'(x)$ , то  $[u(x) - C_1\theta(x)]' = 0$ , откуда в силу леммы 25.1  $u(x) - C_1\theta(x) = C_2$  и, следовательно,

$$u(x) = C_2 + C_1\theta(x).$$

б) Согласно (25.15), при  $m = 2$  получим  $u'(x) = C_1\delta(x) + C_2\delta'(x)$  или  $u'(x) - C_1\delta(x) - C_2\delta'(x) = 0$ . Тогда  $[u(x) - C_1\theta(x) - C_2\delta(x)]' = 0$ , откуда следует  $u(x) - C_1\theta(x) - C_2\delta(x) = C_3$  и

$$u(x) = C_3 + C_2\delta(x) + C_1\theta(x).$$

в) При  $m = 1$ , согласно (25.15),  $u''(x) = C_1\delta(x)$ ,  $[u'(x) - C_1\theta(x)]' = 0$ ,  $u' - C_1\theta(x) = C_2$ . Поскольку

$$[x\theta(x)]' = \theta(x), \quad (x)' = 1, \quad (25.20)$$

то

$$[u(x) - C_1x\theta(x) - C_2x]' = 0$$

и

$$u(x) - C_1x\theta(x) - C_2x = C_3,$$

откуда

$$u(x) = C_3 + C_2x + C_1x\theta(x).$$

г) При  $m = 2$ , согласно (25.15),  $u''(x) = C_1\delta(x) + C_2\delta'(x)$  или  $[u'(x) - C_1\theta(x) - C_2\delta(x)]' = 0$ . Тогда  $u'(x) - C_1\theta(x) - C_2\delta(x) = C_3$  или, согласно (25.20)  $[u(x) - C_1x\theta(x) - C_2\theta(x) - C_3x]' = 0$ , откуда  $u(x) - C_1x\theta(x) - C_2\theta(x) - C_3x = C_4$ , и, следовательно,

$$u(x) = C_4 + C_3x + C_2\theta(x) + C_1x\theta(x).$$

## 26. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов\*

Рассмотрим уравнение (25.1), в котором оператор  $\hat{L}$  (25.2) – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами ( $p_k(x) = p_k$ ), т.е.

$$\hat{L}u(x) = f(x), \quad (26.1)$$

где

$$\hat{L} = L(D) = \sum_{k=0}^n p_k D^k, \quad D = \frac{d}{dx}. \quad (26.2)$$

♦ Фундаментальным решением (или функцией влияния точечного источника) дифференциального оператора  $L(D)$  (26.2) (дифференциального уравнения (26.1)) называется обобщенная функция  $g(x)$ , удовлетворяющая уравнению

$$L(D)g(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (26.3)$$

◇ Естественно, что фундаментальное решение не является единственным и определяется с точностью до слагаемого  $g_0(x)$ , являющегося решением однородного уравнения

$$L(D)g_0(x) = 0. \quad (26.4)$$

Действительно,

$$L(D)[g(x) + g_0(x)] = L(D)g(x) + L(D)g_0(x) = \delta(x),$$

а это означает, что обобщенная функция  $g(x) + g_0(x)$  – также фундаментальное решение оператора  $\hat{L} = L(D)$ .

Неоднородное уравнение (26.3) со специальной правой частью  $f(x) = \delta(x)$  является выделенным в том смысле, что фундаментальное решение  $g(x)$  позволяет находить частные решения уравнения (26.1) с произвольной правой частью  $f(x)$  по формуле

$$u(x) = g(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy \quad (26.5)$$

при условии, что свертка  $g(x) * f(x)$  существует. Это утверждение легко проверить, если воспользоваться правилом дифференцирования свертки и равенством (26.3). Действительно,

$$\begin{aligned}
 L(D)u(x) &= L(D)[g(x) * f(x)] = \sum_{k=0}^n p_k D^k (g(x) * f(x)) = \\
 &= \left[ \sum_{k=0}^n p_k D^k g(x) \right] * f(x) = \\
 &= [L(D)g(x)] * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x).
 \end{aligned}$$

◇ Второе название – функция влияния точечного источника – становится понятным, если неоднородность  $f(x)$  представить в виде «суммы» точечных источников, согласно (23.5),

$$f(x) = \delta(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y)dy.$$

В силу (26.1)  $f(y)\delta(x-y)$  определяет влияние точечного источника, расположенного в точке  $x = y$  на решение, поэтому

$$u(x) = g(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy$$

есть наложение, или суперпозиция, этих влияний.

◇ Интересно отметить, что решения а) и б) примера 25.4 позволяют определить фундаментальное решение оператора  $\hat{L}$  как частное решение более общего уравнения

$$xL(D)g(x) = 0, \quad (26.6)$$

поскольку, согласно (25.15), (26.6), можно записать

$$L(D)g(x) = C_1\delta(x),$$

откуда при  $C_1 = 1$  получаем (26.3).

**Пример 26.1.** Показать, что функция  $g(x) = \theta(x)e(x)$  является фундаментальным решением оператора

$$\hat{L} = \sum_{k=0}^n p_k \frac{d^k}{dx^k}, \quad p_n \neq 0,$$



если  $e(x)$  – решение задачи Коши

$$\sum_{k=0}^n p_k e^{(k)}(x) = 0, \quad (26.7)$$

$$e(0) = e'(0) = \dots = e^{(n-2)}(0) = 0, \quad e^{(n-1)}(0) = \frac{1}{p_n}.$$

**Решение.** Необходимо убедиться, что функция  $g(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=0}^n p_k g^{(k)}(x) = \delta(x). \quad (26.8)$$

Вычислим производные  $g^{(k)}(x)$  с учетом (21.6), (26.7)

$$\begin{aligned} g(x) &= \theta(x)e(x); \\ g'(x) &= [\theta(x)e(x)]' = \theta'(x)e(x) + \theta(x)e'(x) = \\ &= \delta(x)e(0) + \theta(x)e'(x) = \theta(x)e'(x); \\ &\dots\dots\dots \\ g^{(n-1)}(x) &= \theta(x)e^{(n-1)}(x); \\ g^{(n)}(x) &= \theta'(x)e^{(n-1)}(x) + \theta(x)e^{(n)}(x) = \\ &= \delta(x)\frac{1}{p_n} + \theta(x)e^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Подставив найденные производные в уравнение (26.8), получим соотношение

$$\theta(x) \sum_{k=0}^n p_k e^{(k)}(x) + p_n \frac{1}{p_n} \delta(x) = \delta(x),$$

являющееся тождеством, так как

$$\sum_{k=0}^n p_k e^{(k)}(x) = 0.$$

## 27. Построение фундаментального решения линейного дифференциального оператора\*

**Теорема 27.1.** Если  $e(x)$  есть классическое решение задачи Коши

$$L(D)e(x) = 0, \quad (27.1)$$

$$e(0) = e'(0) = \dots = e^{(n-2)}(0) = 0, \quad e^{(n-1)}(0) = \frac{1}{p_n}, \quad (27.2)$$

то единственным фундаментальным решением  $g(x)$  оператора  $L(D)$  (26.2) в пространстве  $D'_+$  является функция

$$g(x) = \theta(x)e(x). \quad (27.3)$$

**Доказательство.** Если  $g(x)$  – фундаментальное решение оператора  $L(D)$ , то она удовлетворяет уравнению (26.3), т.е.

$$L(D)g(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

которое во всех точках, за исключением точки  $x = 0$ , можно рассматривать как однородное

$$L(D)g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (x \neq 0). \quad (27.4)$$

Пусть  $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$  – фундаментальная система решений однородного уравнения, т.е.

$$L(D)\vec{u}(x) = 0.$$

Тогда функцию  $g(x)$  можно искать в виде

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ e(x) = (\vec{e}, \vec{u}(x)) & x > 0, \end{cases} \quad (27.5)$$

где произвольный вектор  $\vec{e}(x) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  следует подобрать так, чтобы функция  $g(x)$  и ее производные вплоть до  $(n-2)$ -го порядка были непрерывными. Производная  $(n-1)$ -го порядка должна испытывать скачок  $1/p_n$ . В результате производная  $n$ -го порядка должна содержать функцию  $\delta(x)$ , фигурирующую в правой части части уравнения (26.3), т.е.

$$e^{(k)}(0) = 0, \quad k = \overline{0, n-2},$$

$$e^{(n-1)}(0) = \frac{1}{p_n}.$$

Это условие совпадает с (27.2) и представляет собой линейную неоднородную алгебраическую систему для составляющих  $e_k$  вектора  $\vec{e}$

$$\begin{aligned} e_1 u_1^{(k)}(0) + \dots + e_n u_n^{(k)}(0) &= 0, & k = \overline{0, n-2}; \\ e_1 u_1^{(n-1)}(0) + \dots + e_n u_n^{(n-1)}(0) &= \frac{1}{p_n}. \end{aligned} \quad (27.6)$$

Определитель системы (27.6) есть вронскиан фундаментальной системы решений  $\vec{u}(x)$  и, следовательно, нигде не обращается в нуль. Это означает, что существует единственное решение системы (27.6), определяющее вектор  $\vec{e}$  и, соответственно, функции  $e(x)$  и  $g(x) = \theta(x)e(x)$ . Теорема доказана.

◇ Условия (27.2), определяющие однозначное фундаментальное решение оператора  $L(D)$  в пространстве  $\mathcal{D}'_+$ , задают нулевое решение  $g_0(x) = 0$  однородного уравнения (26.4).

**Пример 27.1.** Найти единственное в пространстве  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальное решение оператора

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} - 4 \frac{d}{dx} + 5.$$

**Решение.** Требуется найти решение уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} - 4 \frac{d}{dx} + 5 \right) g(x) = \delta(x). \quad (27.7)$$

Находим общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$e'' - 4e' + 5e = 0.$$

Поскольку корни характеристического уравнения

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$

комплексны

$$k_{1,2} = 2 \pm i,$$

то

$$e(x) = e^{2x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

и, соответственно,

$$e'(x) = e^{2x}[2(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + c_1 \cos x - c_2 \sin x].$$

Так как согласно (27.2), (27.7) начальные условия имеют вид

$$e(0) = 0, \quad e'(0) = 1,$$

то для определения произвольных постоянных имеем систему

$$\begin{aligned} e(0) &= c_2 = 0, \\ e'(0) &= c_1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e(x) = e^{2x} \sin x,$$

и фундаментальное решение

$$g(x) = \theta(x)e^{2x} \sin x.$$

**Пример 27.2.** Найти единственное в пространстве  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальное решение операторов

$$\text{а) } \hat{L}_1 = \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2; \quad \text{б) } \hat{L}_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2.$$

**Решение.**

а) Корни характеристического уравнения  $k^2 - \omega^2 = 0$  действительны и различны:  $k_1 = \omega$ ,  $k_2 = -\omega$ . Следовательно,

$$e(x) = c_1 \operatorname{sh} \omega x + c_2 \operatorname{ch} \omega x$$

и

$$e'(x) = \omega c_1 \operatorname{ch} \omega x + \omega c_2 \operatorname{sh} \omega x.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} e(0) &= c_2 = 0, \\ e'(0) &= \omega c_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e(x) = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh} \omega x$$

и фундаментальное решение

$$g(x) = \theta(x) \frac{\operatorname{sh} \omega x}{\omega}.$$

б) Корни характеристического уравнения  $k^2 + \omega^2 = 0$  мнимые  $k_{1,2} = \pm i\omega$ , следовательно,

$$e(x) = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$$

и

$$e'(x) = \omega c_1 \cos \omega x + \omega c_2 \sin \omega x.$$

Отсюда

$$e(0) = c_2 = 0,$$

$$e'(0) = \omega c_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{\omega}.$$

Таким образом,

$$e(x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x,$$

и фундаментальное решение имеет вид

$$g(x) = \theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}.$$

**Пример 27.3.** Найти единственное в пространстве  $\mathcal{D}'_+$  фундаментальное решение оператора

$$\hat{L} = \frac{d^n}{dx^n}.$$

**Решение.** Характеристическое уравнение  $k^n = 0$  имеет один  $n$ -кратный корень  $k = 0$ . Следовательно,

$$e(x) = c_1 + c_2 x + \dots + c_{n-1} x^{n-2} + c_n x^{n-1}$$

и

$$e'(x) = c_2 + 2c_3 x + \dots + (n-2)c_{n-1} x^{n-3} + (n-1)c_n x^{n-2};$$

.....

$$e^{(n-2)}(x) = (n-2)!c_{n-1} + (n-1)!c_n x;$$

$$e^{(n-1)}(x) = (n-1)!c_n.$$

Отсюда

$$e(0) = c_1 = 0,$$

$$e'(0) = c_2 = 0,$$

.....

$$e^{(n-2)}(0) = (n-2)!c_{n-1} = 0,$$

$$e^{(n-1)}(0) = (n-1)!c_n = 1, \quad c_n = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Таким образом,

$$e(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$$

и фундаментальное решение

$$g(x) = \theta(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

**Пример 27.4.** Для «обычной» финитной функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , найти решение уравнения

$$L(D)u(x) = f(x),$$

если

$$\text{а) } L(D) = \frac{d}{dx}; \quad \text{б) } L(D) = \frac{d^2}{dx^2}.$$

**Решение.** Согласно (26.5), решение можно записать в виде

$$u(x) = (g * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy,$$

где  $g(x)$  – фундаментальное решение оператора  $L(D)$ .

а) Пусть  $u'(x) = f(x)$ . Из решения предыдущего примера при  $n = 1$  следует, что  $g(x) = \theta(x)$ . Отсюда

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)f(x-y)dy = \int_{-\infty}^x f(y)dy.$$

б) Пусть  $u''(x) = f(x)$ . Тогда  $g(x) = \theta(x)x$ . Отсюда

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-y)(x-y)f(y)dy$$

или с учетом того, что  $[\theta(x)x]'' = \delta(x)$  (см. пример 27.3 при  $n = 2$ ) и  $(|x|/2)'' = \delta(x)$  (см. пример 21.5),

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}|x-y|f(y)dy,$$

что аналогично известной формуле Коши (I.36.13) для вычисления  $n$ -кратной первообразной

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-y)^{n-1} f(y) dy.$$

## 28. Функция Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами\*

Понятие краевой задачи и задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вводится в стандартном курсе высшей математики. Более подробное рассмотрение этих задач будет проведено в разделе «Задача Штурма–Лиувилля» части III. Ниже мы покажем, что использование обобщенных функций, в частности дельта-функции Дирака, позволяет упростить решение некоторых классов краевых задач.

В общем случае краевая задача представляет собой нахождение классического решения дифференциального уравнения (26.1) на интервале  $]0, l[$ , т.е. функции  $u(x) \in C^k([0, l])$ :

$$L(D)u(x) = f(x), \quad x \in ]0, l[ \subset \mathbb{R}, \quad D = \frac{d}{dx},$$

удовлетворяющего краевым (граничным) условиям

$$V_k(u) = A_k(u) + B_k(u) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (28.1)$$

где  $V_k(u)$  – линейные формы от  $u(0), \dots, u^{(n-1)}(0)$ ,

$$A_k(u) = \sum_{m=0}^{n-1} a_{km} u^{(m)}(0), \quad (28.2)$$

и от  $u(l), \dots, u^{(n-1)}(l)$ ,

$$B_k(u) = \sum_{m=0}^{n-1} b_{km} u^{(m)}(l), \quad (28.3)$$

являются линейно независимыми.

Решение неоднородного уравнения (26.1) может быть найдено с помощью фундаментального решения оператора  $L(D)$ . Однако для того чтобы решение удовлетворяло одновременно и краевым условиям, необходимо, чтобы и фундаментальное решение удовлетворяло этим же краевым условиям.

Таким образом, мы приходим к понятию фундаментального решения, удовлетворяющего краевым условиям, которое будем называть функцией Грина краевой задачи или функцией Грина оператора  $L(D)$  на интервале  $]0, l[$ .

♦ Функцией Грина краевой задачи (26.1), (28.1) называется обобщенная функция  $G(x, y)$ , удовлетворяющая уравнению

$$L(D)G(x, y) = \delta(x - y), \quad D = \frac{d}{dx} \quad (28.4)$$

и граничному условию (по переменной  $x$ )

$$V_k(G(x, y)) = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (28.5)$$

при каждом фиксированном  $y$ .

**Теорема 28.1.** *Краевая задача (26.1), (28.1) имеет одну и только одну функцию Грина  $G(x, y)$ , если соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение  $u(x) = 0$ .*

**Доказательство.** Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению (28.4), ее можно искать в виде

$$G(x, y) = g(x - y) + g_0(x), \quad (28.6)$$

где  $g(x)$  – фундаментальное решение оператора  $L(D)$  (26.3), а  $g_0(x)$  – решение однородного уравнения (зависящего от  $y$  как от параметра), порождаемого оператором  $L(D)$  (26.4)

$$\begin{aligned} L(D)g(x) &= \delta(x), \\ L(D)g_0(x) &= 0. \end{aligned}$$

Действительно, подставив (28.6) в (28.4), получим

$$\begin{aligned} L(D)[g(x - y) + g_0(x)] &= L(D)g(x - y) + L(D)g_0(x) = \\ &= L(\tilde{D})g(x - y) = \delta(x - y), \end{aligned}$$

где  $\tilde{D} = d/d(x - y)$ . Таким образом, функция Грина в виде (28.6) удовлетворяет уравнению (28.4). Осталось подчинить



ее граничным условиям (28.5). Для этого выпишем функции  $g(x)$ ,  $g_0(x)$  в явном виде. Так, согласно (27.3),

$$g(x - y) = \theta(x - y)e(x - y), \quad (28.7)$$

а

$$g_0(x) = (\vec{c}, \vec{u}(x)), \quad (28.8)$$

где  $\vec{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$  – фундаментальная система решений однородного уравнения (26.4);  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$  – произвольный постоянный вектор, подлежащий определению из граничных условий.

Подставив (28.6) в (28.5) с учетом (28.7), (28.8), получим

$$V_k(G) = V_k((\vec{c}, \vec{u})) + B_k(e(l - y)) = 0$$

или в силу линейности  $V_k$  (28.2), (28.3)

$$c_1 V_k(u_1) + c_2 V_k(u_2) + \dots + c_n V_k(u_n) = -B_k(e(l - y)). \quad (28.9)$$

Полученная система является неоднородной и линейной относительно величин  $c_k$  – координат вектора  $\vec{c}$ . Определитель системы отличен от нуля

$$\begin{vmatrix} V_1(u_1) & \dots & V_n(u_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n(u_1) & \dots & V_n(u_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (28.10)$$

в силу условия теоремы о линейной независимости форм  $V_k$  и существовании только тривиального решения однородного уравнения (наличие нетривиального решения позволяет выразить  $V_j(u_m)$  с заданными  $j$  и  $m$  через остальные, вследствие чего определитель (28.10) равен нулю).

Таким образом, система (28.9) имеет единственное решение относительно  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ . Тем самым доказано существование и единственность функции Грина  $G(x, y)$  и одновременно дан метод ее построения.

**Теорема 28.2.** Если  $G(x, y)$  – функция Грина краевой задачи (26.1), (28.1), то ее решение задается формулой

$$u(x) = \int_0^l G(x, y)f(y)dy. \quad (28.11)$$

**Доказательство.** Непосредственной подстановкой (28.11) в (26.1) убеждаемся, что функция  $u(x)$  в виде (28.11) удовлетворяет уравнению (26.1). Действительно,

$$L_x(D)u(x) = \int_0^l L_x(D)G(x, y)f(y)dy = \int_0^l \delta(x-y)f(y)dy = f(x).$$

Выполнение граничных условий (28.1) следует из выполнения аналогичных граничных условий для  $G(x, y)$  (28.5), так как

$$V_k(u) = \int_0^l V_k(G)f(y)dy = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

◇ Формула (28.11) означает, что функцию Грина можно рассматривать как ядро интегрального оператора  $\hat{L}^{-1}$ , обратного дифференциальному оператору  $\hat{L} = L(D)$ , т.е.

$$\hat{L}^{-1}\hat{L}u(x) = u(x) = \hat{L}^{-1}f(x) \quad (28.12)$$

(см. более подробно разд. «Интегральные уравнения» части IV). Таким образом, требование существования тривиального решения в теореме 28.1 можно рассматривать как условие существования обратного оператора  $\hat{L}^{-1}$ .

**Пример 28.1.** С помощью функции Грина найти решение краевой задачи

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = x^5; \quad (28.13)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (28.14)$$

**Решение.** Выясним сначала, существует ли функция Грина задачи (28.13), (28.14). Для этого выпишем общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2g_0}{dx^2} = 0.$$

Очевидно, что

$$g_0(x) = c_1 + c_2x,$$

откуда, согласно (28.14),

$$\begin{aligned}g_0(0) &= c_1 = 0, \\g_0(1) &= c_2 = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, однородная задача имеет только тривиальное решение  $g_0(x) \equiv 0$ , поэтому функция Грина существует.

Из решения примера 27.4 следует, что фундаментальное решение оператора  $d^2/dx^2$  (уравнения (28.13)) имеет вид

$$g(x) = \theta(x)x.$$

Поэтому, согласно (28.6), функцию Грина ищем в виде

$$G(x, y) = \theta(x - y)(x - y) + c_1 + c_2x. \quad (28.15)$$

Подставив (28.15) в граничные условия для  $G(x, y)$ , аналогичные (28.14), получаем

$$\begin{aligned}G(0, y) &= c_1 = 0, \\G(1, y) &= (1 - y) + c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 = y - 1,\end{aligned}$$

откуда

$$G(x, y) = \theta(x - y)(x - y) + (y - 1)x, \quad (28.16)$$

и в силу теоремы 28.2 имеем

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_0^1 G(x, y)y^5 dy = \\&= \int_0^1 [\theta(x - y)(x - y) + (y - 1)x]y^5 dy = \frac{x}{42}(x^6 - 1).\end{aligned} \quad (28.17)$$

Функция Грина (28.16) может быть записана в более привычной форме

$$\begin{aligned}G(x, y) &= \theta(x - y)(x - y) + (y - 1)x = \\&= \begin{cases} (y - 1)x & 0 < x < y \\ (x - 1)y & 1 > x > y \end{cases}.\end{aligned} \quad (28.18)$$

Как следует из (28.18), функция Грина является симметричной по аргументам  $x$  и  $y$ .

В случае задания функции Грина в виде (28.18) интервал интегрирования  $]0, 1[$  приходится разбивать на два:  $]0, x[$  и  $]x, 1[$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, y)y^5 dy = \\ &= \int_0^x (x-1)yy^5 dy + \int_x^1 (y-1)xy^5 dy = \frac{x}{42}(x^6 - 1). \end{aligned}$$

**Пример 28.2.** С помощью функции Грина записать решение краевой задачи

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} = f(x), \quad (28.19)$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \quad (28.20)$$

**Решение.** Однородная задача (28.19), (28.20) с фундаментальной системой  $1, x, x^2, x^3$  имеет только тривиальное решение, следовательно, функция Грина существует.

Из решения примера 27.4 следует, что фундаментальное решение оператора  $d^4/dx^4$  имеет вид

$$g(x) = \theta(x) \frac{x^3}{6}.$$

Поэтому, согласно (28.6), функцию Грина ищем в виде

$$G(x, y) = \theta(x-y) \frac{(x-y)^3}{6} + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3. \quad (28.21)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dx} G(x, y) = \theta(x-y) \frac{(x-y)^2}{2} + c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2, \quad (28.22)$$

то, подставив (28.21), (28.22) в (28.20) и заменив  $u$  на  $G$ , получим систему для определения  $c_i$

$$G(0, y) = c_0 = 0, \quad (28.23)$$

$$\frac{dG(0, y)}{dx} = c_1 = 0,$$

$$G(1, y) = \frac{1}{6}(1 - y) + c_2 + c_3 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}G(1, y) = \frac{1}{2}(1 - y)^2 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

или

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 = 0, \\ c_2 + c_3 &= -\frac{1}{6}(1 - y)^3 \\ 2c_2 + 3c_3 &= -\frac{1}{2}(1 - y)^2. \end{aligned} \quad (28.24)$$

Решение (28.24) ищем методом Крамера. Так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0,$$

то

$$c_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6}(1 - y)^3 & 1 \\ -\frac{1}{2}(1 - y)^2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}y(1 - y)^2,$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{6}(1 - y)^3 \\ 2 & -\frac{1}{2}(1 - y)^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}(1 + 2y)(1 - y)^2.$$

Подставив найденные значения  $c_i$  в (28.21), находим явный вид функции Грина

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \theta(x - y) \frac{(x - y)^3}{6} + \\ &+ \frac{1}{2}y(1 - y)^2x^2 - \frac{1}{6}(1 + 2y)(1 - y)^2x^3 = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}y(1 - y)^2x^2 - \frac{1}{6}(1 + 2y)(1 - y)^2x^3, & 0 < x < y, \\ \frac{1}{2}x(1 - x)^2y^2 - \frac{1}{6}(1 + 2x)(1 - x)^2y^3, & 1 > x > y. \end{cases} \end{aligned} \quad (28.25)$$

Тогда

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y)f(y)dy,$$

где  $G(x, y)$  определено одним из выражений (28.25).

**Пример 28.3.** С помощью функции Грина найти решение краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \omega^2 u = x, \quad x \in ]0, l[; \quad (28.26)$$

$$u(0) = u(l) = 0. \quad (28.27)$$

**Решение.** Отметим основные моменты. Фундаментальная система решений однородного уравнения может быть записана в виде  $\text{sh } \omega x$ ,  $\text{ch } \omega x$ . Однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение, а фундаментальное решение оператора

$$\widehat{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$$

записывается как (см. пример 27.2)

$$g(x) = \theta(x) \frac{\text{sh } \omega x}{\omega}.$$

Функцию Грина ищем в виде

$$G(x, y) = \theta(x - y) \frac{\text{sh } \omega(x - y)}{\omega} + c_1 \text{sh } \omega x + c_2 \text{ch } \omega x. \quad (28.28)$$

Подставив (28.28) в граничные условия для  $G(x, y)$ , аналогично (28.27) получим

$$G(0, y) = c_2 = 0,$$

$$G(l, y) = \frac{1}{\omega} \text{sh } \omega(l - y) + c_1 \text{sh } \omega l, \quad c_1 = \frac{\text{sh } \omega(y - l)}{\omega \text{sh } \omega l},$$

откуда

$$G(x, y) = \theta(x - y) \frac{\text{sh } \omega(x - y)}{\omega} + \frac{\text{sh } \omega(y - l)}{\omega \text{sh } \omega l} \text{sh } \omega x \quad (28.29)$$

$$= \begin{cases} \frac{\text{sh } \omega x \text{sh } \omega(y - l)}{\omega \text{sh } \omega l} & 0 < x < y, \\ \frac{\omega y \text{sh } \omega(x - l)}{\omega \text{sh } \omega l}, & y < x < l, \end{cases}$$

поскольку

$$\text{sh } \omega(x - y) \text{sh } \omega l + \text{sh } \omega(y - l) \text{sh } \omega x = \text{sh } \omega y \text{sh } \omega(x - l).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^l \left[ \theta(x-y) \frac{\operatorname{sh} \omega(x-y)}{\omega} + \frac{\operatorname{sh} \omega(y-l)}{\omega \operatorname{sh} \omega l} \operatorname{sh} \omega x \right] y dy = \\ &= \frac{l}{\omega^2} \left[ \frac{\operatorname{sh} \omega x}{\operatorname{sh} \omega l} - \frac{x}{l} \right]. \end{aligned}$$

## 29. Другие методы построения функции Грина\*

В предыдущем параграфе мы рассмотрели возможность построения функции Грина краевой задачи, если известно фундаментальное решение оператора (26.2), порождающего эту задачу. Если коэффициенты  $p_k$  оператора (26.2) являются функциями  $x$  [ $p_k = p_k(x)$ ], то функцию Грина можно построить следующим образом.

Пусть

$$\begin{aligned} L_x(x, D)u(x) &= f(x), & x \in ]0, l[, \\ V_k(u) &= 0, & k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

– краевая задача, где  $L(x, D)$  – оператор, определенный формулой (25.2), а  $V_k(u)$  – граничные условия (28.1). Тогда функция Грина удовлетворяет уравнению и граничным условиям

$$\begin{aligned} L_x(x, D)G(x, y) &= \delta(x-y), & x \in ]0, l[, \\ V_k(G) &= 0, & k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (29.1)$$

Не обращаясь к выражению (28.6), функцию Грина будем искать в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} c(x) = (\vec{c}, \vec{u}(x)), & 0 < x < y, \\ e(x) = (\vec{e}, \vec{u}(x)), & l > x > y, \end{cases} \quad (29.2)$$

где  $\vec{u}(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$  – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$L_x(x, D)\vec{u}(x) = 0.$$

Форма (29.2) обусловлена тем, что  $G(x, y)$  является решением однородного уравнения во всех точках, за исключением точки  $x = y$ ,

$$L_x(x, D)G(x, y) = 0, \quad x \neq y,$$

а произвольные векторы  $\vec{c}, \vec{e}$  следует подобрать так, чтобы функция  $G(x, y)$  и ее производные до  $(n-2)$ -го порядка были непрерывны. Производная  $(n-1)$ -го порядка должна испытывать скачок  $1/p_n$ . В результате производная  $n$ -го порядка будет содержать функцию

$\delta(x)$ , фигурирующую в правой части части уравнения (29.1). Эти условия будут выполнены, если

$$\begin{aligned} S_1 u_1^{(k)}(y) + S_2 u_2^{(k)}(y) + \dots + S_n u_n^{(k)}(y) &= 0, \\ S_1 u_1^{(n-1)}(y) + S_2 u_2^{(n-1)}(y) + \dots + S_n u_n^{(n-1)}(y) &= \frac{1}{p_n(y)}. \end{aligned} \quad (29.3)$$

Кроме того, должны выполняться граничные условия (29.1), которые после подстановки в них (29.2) принимают вид

$$c_1 V_k(u_1) + c_2 V_k(u_2) + \dots + c_n V_k(u_n) = -B_k(e(l-y)), \quad (29.4)$$

полностью совпадающий с (28.9).

Как уже отмечалось, система (29.3) имеет единственное решение, определяющее величины  $S_i = e_i - c_i$ , а система (29.4) однозначно определяет величины  $c_i$ . Таким образом, две системы (29.3) и (29.4) однозначно определяют два вектора  $\vec{c}$  и  $\vec{e}$  и, следовательно, функцию Грина, согласно (29.2).

Поскольку в рассматриваемом случае коэффициенты оператора  $\hat{L} = L(x, D)$  являются функциями от  $x$ , необходимо, чтобы  $p_n(x) \neq 0$  для всех  $x \in [0, l]$ . Если же на одном из концов отрезка  $[0, l]$  функции  $p_n(x)$  все-таки обращаются в нуль, то часть граничных условий (29.1) заменяется естественным граничным условием – ограниченности решения в этой точке. Эти условия также позволяют построить  $G(x, y)$  и найти  $u(x)$  (см. пример 28.2).

Изложенный выше метод построения функции Грина может применяться и для оператора (26.2) с постоянными коэффициентами. При этом не требуется привлекать фундаментальное решение этого оператора.

**Пример 29.1.** Найти функцию Грина краевой задачи из примера 28.1, не используя фундаментальное решение оператора.

**Решение.** Функцию  $G(x, y)$  согласно (29.2) и с учетом фундаментальной системы решений однородного уравнения  $u_1(x) = 1$ ,  $u_2(x) = x$  ищем в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} c(x) = c_1 + c_2 x, & 0 < x < y, \\ e(x) = e_1 + e_2 x, & 1 > x > y. \end{cases} \quad (29.5)$$

Подставив (29.5) в условия «сшивания» (29.3) и граничные условия  $G(0, y) = G(1, y) = 0$ , получим две системы для нахождения  $c_1$ ,  $c_2$  и  $e_1$ ,  $e_2$ :

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ e_1 + e_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (e_1 - c_1) + (e_2 - c_2)y = 0, \\ e_2 - c_2 = 1, \end{cases}$$

откуда найдем

$$c_1 = 0, \quad c_2 = y - 1; \quad e_1 = -y, \quad e_2 = y$$



и, соответственно,

$$G(x, y) = \begin{cases} (y-1)x, & 0 < x < y \\ (x-1)y, & 1 > x > y, \end{cases}$$

совпадающую с найденной ранее (28.18).

**Пример 29.2.** С помощью функции Грина найти решение краевой задачи

$$xu''(x) + u'(x) = x, \quad x \in ]0, 1[; \quad (29.6)$$

$$|u(0)| < \infty, \quad u(1) = u'(1). \quad (29.7)$$

**Решение.** Найдем сначала общее решение однородного уравнения

$$xu'' + u' = 0. \quad (29.8)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (29.8) можно представить в виде

$$(xu')' = 0,$$

откуда после двукратного интегрирования имеем

$$u(x) = c_1 + c_2 \ln x. \quad (29.9)$$

Функция (29.9) удовлетворяет граничным условиям (29.7) только при  $c_1 = c_2 = 0$ . Таким образом, однородная задача имеет только тривиальное решение и, следовательно, функция Грина задачи (29.6), (29.7) существует.

Согласно (29.3), ищем  $G(x, y)$  в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln x, & 0 < x < y, \\ e_1 + e_2 \ln x, & 1 > x > y. \end{cases}$$

Из условий «сшивания» (29.3) и граничных условий для  $G(x, y)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |G(x, y)| < \infty, \quad \left[ G(x, y) - \frac{d}{dx} G(x, y) \right] \Big|_{x=1} = 0,$$

следующих из (29.7), получаем систему для определения  $c_1, c_2, e_1, e_2$

$$(e_1 - c_1) + (e_2 - c_2) \ln y = 0, \quad (29.10)$$

$$(e_2 - c_2) \frac{1}{y} = \frac{1}{y}, \quad [p_n(y) = y],$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |c_1 + c_2 \ln x| < \infty, \quad (29.11)$$

$$e_1 - e_2 = 0.$$

Из третьего уравнения этой системы следует, что  $c_2 = 0$ , а из оставшихся уравнений находим  $e_1 = e_2 = 1$ ,  $c_1 = 1 + \ln y$  и, соответственно,

$$G(x, y) = \begin{cases} 1 + \ln y, & 0 < x < y, \\ 1 + \ln x, & 1 > x > y, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, y) y dy = \\ &= \int_0^x (1 + \ln x) y dy + \int_x^1 (1 + \ln y) y dy = \frac{1}{4}(x^2 + 1). \end{aligned}$$

### 30. Краевая задача для линейных дифференциальных уравнений с параметром\*

Рассмотрим подробнее одну из наиболее распространенных в математической физике задач

$$[L_2(x, D) + \lambda \rho(x)]u(x, \lambda) = f(x), \quad x \in ]0, l[, \quad (30.1)$$

$$V_1(u(0, \lambda)) = V_2(u(l, \lambda)) = 0, \quad (30.2)$$

где  $\lambda$  – вещественный параметр, а

$$L_2(x, D) = \frac{d}{dx} k(x) \frac{d}{dx} - q(x), \quad (30.3)$$

$$V_1(u(0, \lambda)) = \alpha_0 u(0, \lambda) - \alpha_1 u'(0, \lambda), \quad (30.4)$$

$$V_2(u(l, \lambda)) = \beta_0 u(l, \lambda) + \beta_1 u'(l, \lambda),$$

функции  $k'(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\rho(x)$  непрерывны, причем  $k(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $0 < \rho(x) < \infty$  для всех  $x \in [0, l]$ , а числа  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \alpha_0 \geq 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_0 + \alpha_1 > 0; \\ \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_0 + \beta_1 > 0. \end{aligned} \quad (30.5)$$

Отметим, что самосопряженная форма оператора (30.3) не ограничивает общности рассмотрения задачи, поскольку любой оператор (25.2) второго порядка может быть записан в виде (30.3). В свою очередь, многочисленные требования к фигурирующим в задаче функциям и коэффициентам являются разумными ограничениями, вытекающими из физической постановки задач. Естественно,

что некоторые из них могут варьироваться, тогда это будет специально оговорено. Наконец, условия (30.5) обеспечивают линейную независимость граничных условий (30.4) так, что

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Оператор (30.3) и граничные условия (30.2) порождают задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} [L_2(x, D) + \lambda_n \rho(x)]u_n(x) &= 0, \\ V_1(u_n(0)) &= V_2(u_n(l)) = 0, \end{aligned} \quad (30.6)$$

соответствующую краевой задаче (30.1), (30.2). Решение краевой задачи с параметром (30.1), (30.2) существенным образом зависит от соотношения между параметром  $\lambda$  и собственными значениями  $\lambda_n$ .

**Лемма 30.1.** *Решение краевой задачи (30.1), (30.2) существует и является единственным, если значения параметра  $\lambda$  отличаются от собственных значений  $\lambda_n$  задачи Штурма–Лиувилля, т.е. при  $\lambda \neq \lambda_n$ .*

**Доказательство.** Пусть

$$u(x, \lambda) = C_1 u_1(x, \lambda) + C_2 u_2(x, \lambda) \quad (30.7)$$

– общее решение однородного уравнения

$$[L_2(x, D) + \lambda \rho(x)]u(x, \lambda) = 0, \quad (30.8)$$

подстановка которого в граничные условия (30.2) приводит к системе

$$\begin{aligned} V_1(u(0, \lambda)) &= C_1 V_1(u_1(0, \lambda)) + C_2 V_1(u_2(0, \lambda)) = 0, \\ V_2(u(l, \lambda)) &= C_1 V_2(u_1(l, \lambda)) + C_2 V_2(u_2(l, \lambda)) = 0. \end{aligned} \quad (30.9)$$

Согласно теоремам 12.1 и 12.2, существование и единственность решения краевой задачи (30.1), (30.2) обусловлено существованием тривиального решения уравнения (30.8), т.е. условием

$$\det V(\lambda) = \begin{vmatrix} V_1(u_1(0, \lambda)) & V_1(u_2(0, \lambda)) \\ V_2(u_1(l, \lambda)) & V_2(u_2(l, \lambda)) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (30.10)$$

Условие (30.10) противоположно условию существования нетривиальных решений задачи Штурма–Лиувилля, определяющему спектр собственных значений  $\lambda_n$

$$\det V(\lambda_n) = \begin{vmatrix} V_1(u_{n1}(0, \lambda_n)) & V_1(u_{n2}(0, \lambda_n)) \\ V_2(u_{n1}(l, \lambda_n)) & V_2(u_{n2}(l, \lambda_n)) \end{vmatrix} = 0, \quad (30.11)$$

где  $u_{n1}, u_{n2}$  – фундаментальная система решений уравнения (30.6).

Таким образом, определитель (30.10) будет отличен от нуля только при условии  $\lambda \neq \lambda_n$ , значения которых находятся из решения уравнения (30.11) и составляют спектр собственных значений  $\lambda_n$  задачи (30.6), что и требовалось доказать.

Заметим, что поскольку обычная краевая задача является частным случаем краевой задачи с параметром  $\lambda = 0$ , то для нее условие существования и единственности решения, заключающееся в существовании тривиального решения однородной задачи, может быть сформулировано как отсутствие значения  $\lambda = 0$  в спектре собственных значений  $\lambda_n$ , т.е.  $\lambda_n \neq 0$ .

### 30.1. Функция Грина краевой задачи с параметром

Перейдем к решению задачи (30.1), (30.2) при условии, что  $\lambda \neq \lambda_n$ . Пусть  $u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda)$  – фундаментальная система решений уравнения (30.8), а  $v_1(x, \lambda)$  и  $v_2(x, \lambda)$  – их линейные комбинации, удовлетворяющие граничным условиям

$$V_1(v_1(0, \lambda)) = V_2(v_2(l, \lambda)) = 0. \quad (30.12)$$

Известно, что такие отличные от нуля решения всегда существуют и являются линейно независимыми. В противном случае, если  $v_1(x) = Cv_2(x)$ , то

$$\det V(\lambda) = \begin{vmatrix} V_1(v_1(0, \lambda)) & V_1(v_2(0, \lambda)) \\ V_2(v_1(l, \lambda)) & V_2(v_2(l, \lambda)) \end{vmatrix} = 0,$$

а это, вопреки предположению, означает, что  $v_1(x)$  является собственной функцией с некоторым собственным значением  $\lambda = \lambda_n$ .

Решение неоднородного уравнения (30.1) будем искать методом вариации произвольных постоянных

$$u(x, \lambda) = C_1(x, \lambda)v_1(x, \lambda) + C_2(x, \lambda)v_2(x, \lambda), \quad (30.13)$$

в соответствии с которым функции  $C_1'(x, \lambda), C_2'(x, \lambda)$  должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} C_1'(x, \lambda)v_1(x, \lambda) + C_2'(x, \lambda)v_2(x, \lambda) &= 0, \\ C_1'(x, \lambda)v_1'(x, \lambda) + C_2'(x, \lambda)v_2'(x, \lambda) &= \frac{f(x)}{k(x)}, \end{aligned} \quad x \in [0, l] \quad (30.14)$$

с дополнительными условиями

$$C_1(l, \lambda) = C_2(0, \lambda) = 0, \quad (30.15)$$

вытекающими из (30.2), (30.4), (30.12) и (30.14), поскольку

$$\begin{aligned} V_1(u(0, \lambda)) &= C_1(0, \lambda)V_1(v_1(0, \lambda)) + C_2(0, \lambda)V_1(v_2(0, \lambda)) - \\ &\quad - \alpha_1[C_1'(0, \lambda)v_1(0, \lambda) + C_2'(0, \lambda)v_2(0, \lambda)] = 0, \\ V_2(u(l, \lambda)) &= C_1(l, \lambda)V_2(v_1(l, \lambda)) + C_2(l, \lambda)V_2(v_2(l, \lambda)) + \\ &\quad + \beta_1[C_1'(l, \lambda)v_1(l, \lambda) + C_2'(l, \lambda)v_2(l, \lambda)] = 0. \end{aligned} \quad (30.16)$$

В (30.16) первые слагаемые равны нулю согласно (30.12), последние – согласно (30.14), а оставшиеся уравнения записываются в виде (30.15).

Так как определитель системы (30.14) представляет собой вронскиан линейно независимых решений, то

$$W(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

для всех  $x \in [0, l]$ , и, следовательно,

$$\begin{aligned} C_1'(x, \lambda) &= -\frac{f(x)v_2(x, \lambda)}{k(x)W(v_1, v_2)}, \\ C_2'(x, \lambda) &= -\frac{f(x)v_1(x, \lambda)}{k(x)W(v_1, v_2)}. \end{aligned} \quad (30.17)$$

Если воспользоваться формулой Лиувилля

$$\begin{aligned} k(x)W(v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda)) &= \\ &= k(0)W(v_1(0, \lambda), v_2(0, \lambda)) = k(0)W(0, \lambda), \end{aligned}$$

то интегрирование (30.17) с учетом (30.15) дает

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda) &= \frac{1}{k(0)W(0, \lambda)} \int_x^l f'(y)v_2(y, \lambda)dy, \quad C_1(l, \lambda) = 0; \\ C_2(x, \lambda) &= \frac{1}{k(0)W(0, \lambda)} \int_0^x f'(y)v_1(y, \lambda)dy, \quad C_2(l, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \frac{1}{k(0)W(0, \lambda)} \left[ v_1(x, \lambda) \int_x^l f(y)v_2(y, \lambda)dy + \right. \\ &\quad \left. + v_2(x, \lambda) \int_0^x f(y)v_1(y, \lambda)dy \right] \end{aligned}$$

или

$$u(x, \lambda) = \int_0^l G(x, y, \lambda)f(y)dy, \quad (30.18)$$

где

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{k(0)W(0, \lambda)} \begin{cases} v_1(x, \lambda)v_2(y, \lambda), & 0 \leq x < y; \\ v_1(y, \lambda)v_2(x, \lambda), & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.19)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 30.1.** Если параметр  $\lambda$  не является собственным значением  $\lambda_n$  оператора  $L_2(x, D)$ , то решение краевой задачи (30.1), (30.2) существует, является единственным и задается формулами (30.18), (30.19).

Используя полученные формулы, можно показать, что функция  $G(x, y, \lambda)$  удовлетворяет краевой задаче

$$[L_2(x, D) + \lambda\rho(x)]G(x, y, \lambda) = \delta(x - y), \quad (30.20)$$

$$V_1(G(0, y, \lambda)) = V_2(G(l, x, \lambda)) = 0. \quad (30.21)$$

Действительно, из выполнения (30.21), согласно (30.18), следует (30.2). Положив  $f(x) = \delta(x)$  и воздействуя на (30.18) оператором  $L_2(x, D) + \lambda\rho(x)$ , получаем (30.20).

С другой стороны, непосредственно из (30.18), (30.19) вытекает, что

- 1) функция  $G(x, y, \lambda)$  вещественна и непрерывна в квадрате  $x \in [0, l]$ ,  $y \in [0, l]$ ;
- 2) производная  $G_x(x, y, \lambda)$  также непрерывна в указанном квадрате за исключением диагонали  $x = y$ , где она имеет скачок

$$G_x(y + 0, y, \lambda) - G_x(y - 0, y, \lambda) = \frac{1}{k(y)};$$

- 3) вне диагонали  $x = y$  функция  $G(x, y, \lambda)$  как функция  $x$  удовлетворяет однородному уравнению

$$[L_2(x, D) + \lambda\rho(x)]G(x, y, \lambda) = 0, \quad x \neq y,$$

с граничными условиями (30.21);

- 4) функция  $G(x, y, \lambda)$  симметрична, т.е.  $G(x, y, \lambda) = G(y, x, \lambda)$ .

Таким образом, для функции  $G(x, y, \lambda)$ , которую называют функцией Грина краевой задачи с параметром, мы имеем два эквивалентных определения: во-первых, как решения краевой задачи (30.20), (30.21); во-вторых, как функции, удовлетворяющей совокупности свойств 1–4, не использующих понятия обобщенных функций. И, наконец, формула (30.14) означает, что функцию  $G(x, y, \lambda)$  можно рассматривать как ядро интегрального оператора  $(\hat{L}_2 + \lambda\rho)^{-1}$ , обратного к  $L_2(x, D) + \lambda\rho(x)$ , т.е.

$$(\hat{L}_2 + \lambda\rho)^{-1}(\hat{L}_2 + \lambda\rho)u(x) = u(x) = (\hat{L}_2 + \lambda\rho)^{-1}f(x).$$

Таким образом, требование  $\lambda \neq \lambda_n$  в теореме можно рассматривать как условие существования обратного оператора  $(\hat{L}_2 + \lambda\rho)^{-1}$ .

Естественно, что при  $\lambda = 0$  мы возвращаемся к обычной краевой задаче и обычной функции Грина  $G(x, y)$ .

**Пример 30.1.** Найти решение краевой задачи с параметром

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\right)u(x) = f(x), \quad (30.22)$$

$$V_1(u(0)) = u(0) = 0, \quad V_2(u(l)) = u(l) = 0.$$

**Решение.** Следуя изложенному выше методу, найдем решение однородного уравнения

$$u'' + \lambda u = 0. \quad (30.23)$$

Так как корни характеристического уравнения  $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ , то фундаментальная система имеет вид

$$\bar{u}_1(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}, \quad \bar{u}_2(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Удобнее, однако, в качестве фундаментальной системы выбрать функции

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}), \\ u_2(x) &= \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}). \end{aligned} \quad (30.24)$$

Такой выбор становится понятным, если учесть, что при  $\lambda \rightarrow 0$  получим

$$u_1(x, 0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} u_1(x, \lambda) = x, \quad u_2(x, 0) = 1,$$

которые образуют фундаментальную систему решений уравнения (30.23) при  $\lambda = 0$ . Таким образом, система (30.24) справедлива при любых  $\lambda$ .

В качестве функции  $v_1(x, y)$ , удовлетворяющей первому граничному условию (30.22), можно выбрать функцию  $u_1(x, y)$ , т.е.

$$v_1(x, \lambda) = u_1(x, \lambda), \quad (30.25)$$

так как

$$v_1(0, \lambda) = u_1(0, \lambda) = 0.$$

Для определения  $v_2(x, \lambda)$  положим

$$v_2(l, \lambda) = C_1 u_1(x, \lambda) + C_2 u_2(x, \lambda)$$

и потребуем

$$v_2(l, \lambda) = C_1 u_1(l, \lambda) + C_2 u_2(l, \lambda) = 0.$$

Отсюда

$$C_1 = -C_2 \frac{u_2(l, \lambda)}{u_1(l, \lambda)}$$

и

$$v_2(x, \lambda) = -\frac{C_2}{u_1(l, \lambda)} [u_1(l, \lambda)u_1(x, \lambda) - u_1(l, \lambda)u_2(x, \lambda)].$$

Выбирая  $C_2 = -u_1(l, \lambda)$ , с учетом (30.24) имеем

$$v_2(x, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} [e^{\sqrt{-\lambda}(x-l)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(x-l)}]. \quad (30.26)$$

По (30.24), (30.25) и (30.26) вычислим вронскиан

$$\begin{aligned} W(v_1, v_2) &= \quad (30.27) \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} [e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}] & \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} [e^{\sqrt{-\lambda}(x-l)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(x-l)}] \\ \frac{1}{2} [e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}] & \frac{1}{2} [e^{\sqrt{-\lambda}(x-l)} + e^{-\sqrt{-\lambda}(x-l)}] \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} [e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}]. \end{aligned}$$

Так как  $k(x) = 1$ , а  $W(v_1, v_2)$  не зависит от  $x$ , то  $G(x, y, \lambda)$ , согласно (30.19), запишется в виде

$$\begin{aligned} G(x, y, \lambda) &= \frac{1}{e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}} \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \times \quad (30.28) \\ &\times \begin{cases} [e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x}] [e^{\sqrt{-\lambda}(y-l)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(y-l)}] & 0 \leq x < y; \\ [e^{\sqrt{-\lambda}y} - e^{-\sqrt{-\lambda}y}] [e^{\sqrt{-\lambda}(x-l)} - e^{-\sqrt{-\lambda}(x-l)}] & y < x \leq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Для конкретных  $\lambda$  выражение (30.28) можно записать

а)  $\lambda = -\omega^2 < 0$ ,  $\sqrt{-\lambda} = \omega$ ,

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{\omega \operatorname{sh} \omega l} \begin{cases} \operatorname{sh} \omega x \operatorname{sh} \omega(y-l), & 0 \leq x < y; \\ \operatorname{sh} \omega y \operatorname{sh} \omega(x-l), & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.29)$$

б)  $\lambda = \omega = 0$ ,

$$G(x, y, 0) = \frac{1}{l} \begin{cases} x(y-l), & 0 \leq x < y; \\ y(x-l), & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.30)$$

в)  $\lambda = \omega^2 > 0$ ,  $\sqrt{-\lambda} = i\omega$ ,

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{\omega \sin \omega l} \begin{cases} \sin \omega x \sin \omega(y-l), & 0 \leq x < y; \\ \sin \omega y \sin \omega(x-l), & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.31)$$



Легко заметить, что промежуточный случай б) (30.30) может быть получен из а) (30.29) и в) (30.31) предельным переходом при  $\lambda = \pm\omega^2 \rightarrow 0$ . Действительно, например,

$$\begin{aligned} & \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega \sin \omega l} \sin \omega x \sin \omega(y-l) = \\ & = \frac{x(y-l)}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \omega x}{\omega x} \frac{\sin \omega(y-l)}{\omega(y-l)}}{\frac{\sin \omega l}{\omega l}} = \frac{x(y-l)}{l} \end{aligned}$$

и т.д.

Для всех трех случаев решение задачи (30.22) определяется выражением

$$u(x, \lambda) = \int_0^l G(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (30.32)$$

Однако если для случаев а) и б) решение (30.32) существует и однозначно, то для случая в) при  $\lambda = (\pi n/l)^2$  ( $\omega = \pi n/l$ ),  $n = \overline{1, \infty}$ , решение (30.32) может не существовать, поскольку последовательность  $(\pi n/l)^2$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , представляет собой спектр собственных значений  $\lambda_n$  задачи Штурма–Лиувилля

$$u_n'' + \lambda_n u_n = 0, \quad u_n(0) = u_n(l) = 0, \quad x \in [0, l], \quad n = \overline{1, \infty}$$

с собственными функциями (см. пример 2.1 разд. «Задача Штурма–Лиувилля» части III)

$$u_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (30.33)$$

По поводу решения задачи (30.22) при  $\lambda = (\pi n/l)^2$  см. пример 30.4.

**Пример 30.2.** Для задачи Штурма–Лиувилля (30.6) найти условия, при которых  $\lambda = 0$  является собственным решением задачи, а также соответствующую ему собственную функцию.

**Решение.** Пусть  $u_0(x)$  – собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda = 0$ , т.е.

$$L_2(x, D)u_0(x) = 0. \quad (30.34)$$

Тогда, согласно (30.3) и (30.34), выражение

$$\begin{aligned} \langle \lambda_n u_n(x) | u_0(x) \rangle &= \int_0^l \lambda_n \rho(x) u_n^2(x) dx = \\ &= - \int_0^l [L_2(x, D)u_n(x)] u_0(x) dx \end{aligned}$$

для  $u_0(x)$  и  $\lambda = 0$  принимает вид

$$\int_0^l \{[k(x)u_0'(x)]' - q(x)u_0(x)\}u_0(x)dx = 0. \quad (30.35)$$

С учетом того, что

$$[k(x)u_0'(x)]'u_0(x) = [u_0(x)k(x)u_0'(x)]' - u_0'(x)[k(x)u_0'(x)]'$$

выражение (30.35) можно записать

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{k(x)[u_0'(x)]^2 + q(x)u_0^2(x)\}dx + \\ & + k(x)u_0(x)u_0'(x) \Big|_0^l = 0. \end{aligned} \quad (30.36)$$

Поскольку из (30.2) имеем

$$u_0'(0) = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}u_0(0), \quad u'(l) = -\frac{\beta_0}{\beta_1}u(l),$$

то (30.36) примет вид

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \{k(x)[u_0'(x)]^2 + q(x)u_0^2(x)\}dx - \\ & - k(0)\frac{\beta_0}{\beta_1}u^2(0) - k(l)\frac{\alpha_0}{\alpha_1}u^2(l) = 0 \end{aligned} \quad (30.37)$$

(последние слагаемые при  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  отсутствуют). Из (30.37) в силу предположения, что для всех  $x \in [0, l]$  величины  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  не могут быть отрицательными, а  $k(x)$  еще и отлична от нуля, приходим к заключению, что

$$k(x)[u_0'(x)]^2 = 0, \quad q(x)u_0^2(x) = 0, \quad \alpha_0 = \beta_0 = 0,$$

откуда следует, что для  $u_0 = \text{const} \neq 0$  необходимо выполнение условия  $q(x) = \alpha_0 = \beta_0 = 0$ . Покажем, что эти условия являются и достаточными.

Пусть  $q(x) = \alpha_0 = \beta_0 = 0$ . Тогда в силу (30.5)  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ , и задача (30.6) превращается в следующую:

$$\begin{aligned} [k(x)u_0'(x)]' + \lambda\rho(x)u(x) &= 0, \\ u'(0) &= u'(l) = 0, \end{aligned}$$

для которой  $u_0 = \text{const}$  есть собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda = 0$ .

Таким образом, мы показали, что необходимыми и достаточными условиями, при которых  $\lambda = 0$  есть собственное значение задачи (30.6), являются равенства

$$q(x) = \alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad (30.38)$$

причем собственная функция  $u_0(x)$ , соответствующая собственному значению  $\lambda = 0$ , является постоянной.

### 30.2. Краевая задача для уравнения Бесселя

Рассмотрим краевую задачу (30.1), (30.2) для конкретных функций  $k(x) = \rho(x) = x$ , а  $q(x) = \nu^2/x$ . В этом случае

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0,$$

и первое граничное условие (30.2) следует заменить условием ограниченности функции в точке  $x = 0$ . Таким образом, мы приходим к задаче

$$\left( \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x} + \lambda x \right) u(x, \lambda) = f(x), \quad x \in ]0, l[; \quad (30.39)$$

$$|u(0)| < \infty, \quad \beta_0 u(l) + \beta_1 u'(l) = 0. \quad (30.40)$$

Уравнение (30.39) при  $f(x) = 0$  является уравнением Бесселя с индексом  $\nu$  и имеет следующую фундаментальную систему решений (см. разд. «Функции Бесселя второго рода» части III)

$$u_1(x, \lambda) = J_\nu(\sqrt{\lambda}x), \quad u_2(x, \lambda) = N_\nu(\sqrt{\lambda}x), \quad (30.41)$$

определитель Вронского которой равен

$$W[J_\nu(\sqrt{\lambda}x), N_\nu(\sqrt{\lambda}x)] = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi x}.$$

Поскольку при  $k(x) = x$

$$k(x)W[J_\nu(\sqrt{\lambda}x), N_\nu(\sqrt{\lambda}x)] = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi} \quad (30.42)$$

не зависит от  $x$ , то для построения функции Грина  $G(x, y, \lambda)$  задачи (30.39), (30.40) можно воспользоваться формулой (30.19).

Для этого  $v_1(x, \lambda)$  можно выбрать в виде

$$v_1(x, \lambda) = J_\nu(\sqrt{\lambda}x), \quad \nu \geq 0, \quad (30.43)$$

так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} |J_\nu(\sqrt{\lambda}x)| < \infty,$$

а  $v_2(x, \lambda)$  положить

$$v_2(x, \lambda) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + C_2 N_\nu(\sqrt{\lambda}x) \quad (30.44)$$

и потребовать выполнения второго граничного условия

$$\beta_0 v_2(l, \lambda) + \beta_1 v_2'(l, \lambda) = 0.$$

Отсюда

$$v_2(x, \lambda) = -C_2 [A_\nu J_\nu(\sqrt{\lambda}x) - N_\nu(\sqrt{\lambda}x)], \quad (30.45)$$

где

$$A_\nu = \frac{\beta_0 N_\nu(\sqrt{\lambda}l) + \beta_1 \sqrt{\lambda} N_\nu'(\sqrt{\lambda}l)}{\beta_0 J_\nu(\sqrt{\lambda}l) + \beta_1 \sqrt{\lambda} J_\nu'(\sqrt{\lambda}l)}.$$

Выбрав  $C_2 = -1$ , с учетом (30.19), (30.42), (30.45) и

$$\begin{aligned} W(v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda)) &= \\ &= W(J_\nu(\sqrt{\lambda}x), A_\nu J_\nu(\sqrt{\lambda}x) - N_\nu(\sqrt{\lambda}x)) = -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi x}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} G(x, y, \lambda) &= -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi x} \times \\ &\times \begin{cases} J_\nu(\sqrt{\lambda}x)[A_\nu J_\nu(\sqrt{\lambda}y) - N_\nu(\sqrt{\lambda}y)], & 0 \leq x < y; \\ J_\nu(\sqrt{\lambda}y)[A_\nu J_\nu(\sqrt{\lambda}x) - N_\nu(\sqrt{\lambda}x)], & y < x \leq l, \end{cases} \end{aligned} \quad (30.46)$$

откуда

$$u(x, \lambda) = \int_0^l G(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (30.47)$$

Найдем теперь функцию Грина краевой задачи (30.39) при  $\lambda = 0$ .

Для уравнения Эйлера

$$[xu'(x)]' - \frac{\nu^2}{x} u(x) = 0 \quad (30.48)$$

вместо стандартной системы  $x^\nu, x^{-\nu}$  выберем функции

$$u_1(x) = x^\nu, \quad u_2(x) = \frac{1}{2\nu}(x^\nu - x^{-\nu}), \quad \nu \geq 0, \quad (30.49)$$

которые образуют фундаментальную систему решений и при  $\nu = 0$ . Действительно,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} u_1(x) = 1, \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} u_2(x) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2\nu}(x^\nu - x^{-\nu}) = \ln x, \quad (30.50)$$

т.е. функции (30.49) при  $\nu = 0$  удовлетворяют уравнению (30.48) и линейно независимы. В качестве функции  $v_1(x)$ , удовлетворяющей условию (30.40), можно выбрать функцию

$$v_1(x) = u_1(x) = x^\nu. \quad (30.51)$$

Для определения  $v_2(x)$  положим

$$v_2(x) = C_1 x^\nu + \frac{C_2}{2\nu} (x^\nu - x^{-\nu})$$

и потребуем

$$\beta_0 v_2(l) + \beta_1 v_2'(l) = 0.$$

Отсюда

$$v_2(x) = \frac{C_2}{2\nu} (a_\nu x^\nu - x^{-\nu}),$$

где

$$a_\nu = \frac{\beta_0 l - \beta_1 \nu}{e^{2\nu} (\beta_0 l + \beta_1 \nu)}. \quad (30.52)$$

Выбрав  $C_2 = 1$ , имеем

$$v_2(x) = \frac{1}{2\nu} (a_\nu x^\nu - x^{-\nu}). \quad (30.53)$$

По функциям (30.51) и (30.53) вычислим определитель Вронского

$$W(v_1(x), v_2(x)) = W\left(x^\nu, \frac{1}{2\nu} (a_\nu x^\nu - x^{-\nu})\right) = \frac{1}{x}.$$

Тогда

$$k(x)W(v_1(x), v_2(x)) = 1,$$

и, согласно (30.19), функция Грина принимает вид

$$G(x, y, 0) = \frac{1}{2\nu} \begin{cases} x^\nu [a_\nu y^\nu - y^{-\nu}], & 0 \leq x < y; \\ y^\nu [a_\nu x^\nu - x^{-\nu}], & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.54)$$

Формула (30.54) справедлива и при  $\nu = 0$ , так как

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2\nu} (a_\nu x^\nu - x^{-\nu}) = -\frac{\beta_1}{\beta_0 l} + \ln \frac{x}{l}$$

и, следовательно,

$$G(x, y, 0)|_{\nu=0} = \begin{cases} -\frac{\beta_1}{\beta_0 l} + \ln \frac{y}{l}, & 0 \leq x < y; \\ -\frac{\beta_1}{\beta_0 l} + \ln \frac{x}{l}, & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.55)$$

Таким образом, решение задачи (30.39), (30.40) при  $\lambda = 0$  по-прежнему определяется формулой (30.47), где функция  $G(x, y, \lambda)|_{\lambda=0} = G(x, y, 0)$  задается выражением (30.54) или (30.55) (при  $\nu = 0$ ).

Решение краевой задачи (30.39), (30.40), определяемое функцией (30.47), однозначно и существует для всех  $\lambda$ , не являющихся корнями уравнения

$$\beta_0 J_\nu(\gamma) + \frac{\beta_1}{l} \gamma J'_\nu(\gamma) = 0, \quad \gamma = \sqrt{\lambda}l, \quad (30.56)$$

так как корни  $\gamma_n^\nu$  уравнения (30.56) образуют спектр собственных значений  $\lambda = (\gamma_n^\nu/l)^2$  задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя с собственными функциями

$$u_n(x) = C_n J_\nu\left(\frac{\gamma_n^\nu}{l}x\right), \quad n = \overline{1, \infty}$$

(см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля для уравнения Бесселя» части III).

При  $\nu = 0$  из (30.56) следует, что спектр собственных значений включает и значение  $\lambda = 0$  с собственной функцией, являющейся постоянной, если  $\beta_0 = 0$  (из примера 30.2 следует аналогичный результат: если  $\lambda = 0$ , то  $\nu = \beta_0 = 0$ ).

Таким образом, в тех случаях, когда  $\lambda = (\gamma_n^\nu/l)^2$  и  $\lambda = 0$  ( $\nu = \beta_0 = 0$ ), решение краевой задачи (30.39), (30.40) неоднозначно и существует для узкого класса функций  $f(x)$ . К исследованию этих случаев мы и перейдем, рассмотрев следующий пример.

**Пример 30.3.** Найти решение краевой задачи

$$xu''(x) + u'(x) - \frac{\nu^2}{x}u(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}; \quad (30.57)$$

$$|u(0)| < \infty, \quad \beta_0 u(1) = 0, \quad \beta_0 \neq 0, \quad x \in ]0, 1[.$$

**Решение.** Так как  $\beta_0 \neq 0$ , то  $\lambda = 0$  не является собственным значением соответствующей задачи Штурма–Лиувилля, и, следовательно, решение задачи (30.57) существует, является единственным и определяется формулами (30.47), (30.54)

$$u(x) = \frac{a_\nu x^\nu - x^{-\nu}}{2\nu} \int_0^x y^\nu \left( y^2 - 2y + \frac{2}{3} \right) dy + \frac{x^\nu}{2\nu} \int_x^1 [a_\nu y^\nu - y^{-\nu}] \left( y^2 - 2y + \frac{2}{3} \right) dy. \quad (30.58)$$

При  $\nu \neq 1, 2, 3$  интегрирование в (30.58) дает

$$u(x) = \frac{a_\nu x^\nu - x^{-\nu}}{2\nu} \left( \frac{y^{3+\nu}}{3+\nu} - 2 \frac{y^{2+\nu}}{2+\nu} + \frac{2}{3} \frac{y^{1+\nu}}{1+\nu} \right) \Big|_0^x + (30.59) \\ + \frac{x^\nu}{2\nu} \left[ a_\nu \left( \frac{y^{3+\nu}}{3+\nu} - 2 \frac{y^{2+\nu}}{2+\nu} + \frac{2}{3} \frac{y^{1+\nu}}{1+\nu} \right) \Big|_x^1 - \right. \\ \left. - \left( \frac{y^{3-\nu}}{3-\nu} - 2 \frac{y^{2-\nu}}{2-\nu} + \frac{2}{3} \frac{y^{1-\nu}}{1-\nu} \right) \Big|_x^1 \right]$$

или

$$u(x) = \frac{x^3}{9-\nu^2} - 2 \frac{x^2}{4-\nu^2} + \frac{x^\nu}{2\nu} A_\nu, \quad (30.60)$$

где

$$A_\nu = \frac{3(a_\nu - 1) - \nu(a_\nu + 1)}{9 - \nu^2} - \\ - 2 \frac{2(a_\nu - 1) - \nu(a_\nu + 1)}{4 - \nu^2} + \frac{2}{3} \frac{(a_\nu - 1) - \nu(a_\nu + 1)}{1 - \nu^2}.$$

При  $\nu = 1$  в (30.60) слагаемое  $y^{1-\nu}/(1-\nu)$ , естественно, заменяется величиной  $\ln y$ . Аналогично находится  $u(x)$  при  $\nu = 2$  и  $\nu = 3$ .

### 30.3. Нормальная разрешимость краевых задач

Каждая краевая задача (30.1), (30.2) порождает две вспомогательные задачи (30.6) и (30.20), (30.21) со специальными правыми частями, равными нулю и  $\delta(x-y)$ , соответственно. Выпишем их еще раз, положив для простоты  $\rho(x) = 1$ ,

$$[L_2(x, D) + \lambda_n]u_n(x) = 0, \\ V_1(u_n) = V_2(u_n) = 0 \quad (30.61)$$

и

$$[L_2(x, D) + \lambda]G(x, y) = \delta(x-y), \\ V_1(G) = V_2(G) = 0. \quad (30.62)$$

Задача Штурма–Лиувилля (30.61) определяет значения параметра  $\lambda$  ( $\lambda \neq \lambda_n$ ), для которых существуют однозначные решения исходной краевой задачи. А задача (30.62) определяет явный вид этих решений

$$u(x, \lambda) = \int_0^l G(x, y, \lambda) f(y) dy. \quad (30.63)$$

Покажем, что, наряду с уже полученным представлением функции Грина в виде (30.19), справедливо представление в виде разложения по собственным функциям  $u_n(x)$  задачи (30.61) (см. гл. «Интегральные уравнения» части IV)

$$G(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{(\lambda - \lambda_n)\|u_n(x)\|^2}. \quad (30.64)$$

Система функций  $u_n(x)$  полна (см. разд. «Задача Штурма–Лиувилля» части III и разд. «Дельта-функция Дирака и ортонормированные системы функций»), и, следовательно, дельта-функцию  $\delta(x-y)$  в (30.62) можно представить в виде

$$\delta(x-y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\|u_n(x)\|^2}.$$

Функцию  $G(x, y, \lambda)$  будем искать в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$G(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y)u_n(x).$$

Подставив полученное выражение в уравнение (30.62), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n + \lambda)G_n(y)u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(y)}{\|u_n(x)\|^2},$$

откуда следует

$$G_n(y) = \frac{u_n(y)}{(\lambda - \lambda_n)\|u_n(x)\|^2}$$

и, соответственно, (30.64).

Подстановка (30.64) в (30.63) также позволяет получить решение краевой задачи в виде разложения по собственным функциям  $u_n(x)$  («разложение по главным колебаниям»)

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda - \lambda_n} u_n(x), \quad (30.65)$$

где

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x)u_n(x)dx}{\|u_n\|^2} = \frac{\langle f(x)|u_n(x) \rangle}{\|u_n\|^2}. \quad (30.66)$$

Как следует из (30.64), собственные значения  $\lambda_n$  являются простыми полюсами функции  $G(x, y, \lambda)$ . Это означает, что при  $\lambda = \lambda_n$



краевая задача для произвольных функций  $f(x)$  решения не имеет. Однако можно указать условия, которым должна удовлетворять функция  $f(x)$ , чтобы решение краевой задачи существовало.

Пусть  $\lambda$  совпадают с некоторым собственным значением  $\lambda_k$ , т.е.  $\lambda = \lambda_k$ . Тогда  $u(x, \lambda_k)$ , согласно (30.65), можно записать

$$u(x, \lambda_k) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k} \frac{f_k u_k(x)}{\lambda - \lambda_k} + \sum_{n \neq k} \frac{f_n u_n(x)}{\lambda_k - \lambda_n}. \quad (30.67)$$

Если предположить, что решение (30.67) существует, то это будет возможно при условии  $f_k = 0$ . Другими словами, справедлива

**Лемма 30.2.** *Необходимым условием существования решения краевой задачи (30.1), (30.2) при  $\lambda = \lambda_k$  является условие ортогональности*

$$\langle f(x) | u_k(x) \rangle = \int_0^l f(x) u_k(x) dx = 0. \quad (30.68)$$

**Доказательство.** Условие (30.68) очевидным образом вытекает из условия  $f_k = 0$  и формулы (30.66). Напомним лишь, что для  $\lambda = \lambda_k = 0$  собственная функция  $u_0 = \text{const}$ .

◇ Краевые задачи, имеющие решение при выполнении условия 30.68, называют нормально разрешимыми. В этом случае решение задачи неоднозначно и определено с точностью до слагаемого  $C u_n(x)$ , где  $C$  – произвольная постоянная, а  $u_n(x)$  – собственная функция задачи Штурма–Лиувилля, отвечающая собственному значению  $\lambda_n$ .

◇ Аналогичная проблема возникает в линейной алгебре при решении систем  $Lu = f$ , где  $u, f \in \mathbb{R}^n$ , а  $L$  – квадратная матрица размера  $n \times n$ . Если матрица  $L$  обратима ( $\det L \neq 0$ ), то  $u = L^{-1}f$ ; если же матрица  $L$  необратима ( $\det L = 0$ ), то система, как правило, не имеет решений, за исключением векторов  $f$ , удовлетворяющих условию ортогональности  $f \perp \text{Ker } L^*$ , где  $\text{Ker } L^*$  – подпространство  $\mathbb{R}^n$ , состоящее из решений сопряженной однородной системы. Такие системы называют нормально разрешимыми.

Для краевой задачи (30.1) условие  $\lambda = \lambda_k$  ( $\det V(\lambda_n) = 0$ ), согласно (30.11), делает оператор  $L_2(x, D) + \lambda_k$  необратимым, так как его интегральное ядро  $G(x, y, \lambda_k)$  не определено, поскольку  $\lambda_k$  является полюсом функции  $G(x, y, \lambda)$ . Если краевая задача (30.1) при  $\lambda = \lambda_n$  нормально разрешима, то ее решение можно представить формулой (30.63) с помощью модифицированной (обобщенной) функции Грина  $G_n(x, y)$ .

◆ Функция  $G_n(x, y)$  называется модифицированной функцией Грина краевой задачи (30.1), если она удовлетворяет уравнению

$$[L_2(x, D) + \lambda_n]G_n(x, y) = \delta(x - y) - \frac{u_n(x)u_n(y)}{\|u_n\|^2} \quad (30.69)$$

с граничным условием

$$V_1(G_n(0, y)) = V_2(G_n(l, y)) = 0. \quad (30.70)$$

где  $\lambda_n$  – собственные числа, а  $u_n(x)$  – отвечающие им собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (30.61).

Легко проверить, что решение задачи (30.1), (30.2)  $u(x, \lambda_n)$  имеет вид

$$u(x, \lambda_n) = \int_0^l G_n(x, y) f(y) dy. \quad (30.71)$$

Действительно, из выполнения граничных условий (30.70) следует выполнение условий (30.2), а действие оператора  $L_2(x, D) - \lambda_n$  на (30.71) обращает его в тождество

$$\begin{aligned} [L_2(x, D) + \lambda_n]u(x, \lambda_n) &= \int_0^l [L_2(x, D) + \lambda]G_n(x, y)f(y)dy = \\ &= \int_0^l \left[ \delta(x-y) + \frac{u_n(x)u_n(y)}{\|u_n(x)\|^2} \right] f(y)dy = f(x). \end{aligned}$$

Поскольку функция  $u(x, \lambda_n)$  определена с точностью до слагаемого  $Cu_n(x)$ ,  $C = \text{const}$ , являющегося решением однородного уравнения (30.6), то для однозначного определения этой постоянной модифицированную функцию Грина  $G_n(x, y)$  можно подчинить условию

$$\int_0^l G_n(x, y)u_n(x)dx = 0. \quad (30.72)$$

Уравнение для  $G_n(x, y)$  отличается от уравнения для  $G(x, y, \lambda)$  наличием дополнительного к  $\delta(x-y)$  слагаемого, равного  $u_n(x)u_n(y)$ , т.е. кроме точечного источника присутствует дополнительный непрерывно распределенный источник.

Физически это означает, что для собственных (резонансных) частот (струны или стержня) конечное статическое отклонение невозможно при наличии только сосредоточенной силы и необходима непрерывно распределенная сила. Другими словами, «статического» резонанса можно избежать с помощью специальной непрерывно распределенной силы, обеспечивающей отсутствие резонансных гармоник в разложении (30.67).

Все сказанное справедливо и для случая  $\lambda = 0$ , что соответствует резонансу на нулевой частоте.

Решение задачи (30.69), (30.70) при условии (30.72) может быть найдено методом, аналогичным изложенному в разд. «Другие методы построения функции Грина». Действительно, обозначив через

$g_n(x, y)$  любое частное решение уравнения (30.69) при  $x \neq y$ , а через  $\tilde{u}_n(x)$  – линейно независимое с  $u_n(x)$  решение уравнения (30.6) ( $\tilde{u}_n(x)$  не удовлетворяет граничным условиям, которым удовлетворяет  $u_n(x)$ ), функцию  $G_n(x, y)$  ищем в виде

$$G_n(x, y) = g_n(x, y) + \begin{cases} C_1 \tilde{u}_n(x) + C_3 u_n(x), & 0 \leq x < y; \\ C_2 \tilde{u}_n(x) + C_4 u_n(x), & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.73)$$

Повторяя затем совместно с (30.72) все выкладки разд. «Другие методы построения функции Грина», приводящие к однозначному определению коэффициентов  $C_i$  и, следовательно, функции  $G_n(x, y)$ , можем утверждать, что справедлива

**Теорема 30.2.** *Необходимым и достаточным условием нормальной разрешимости краевой задачи (30.1), (30.2) является условие (30.68). При этом решение выражается в виде (30.71), где модифицированная функция  $G_n(x, y)$  определяется формулами (30.69), (30.70), (30.72).*

◇ Функция (30.71) определена с точностью до слагаемого  $Cu_n(x)$ , где  $C$  – произвольная постоянная. Однозначный выбор решения можно осуществить, подчинив функцию  $G_n(x, y)$  условию

$$\langle u(x) | u_n(x) \rangle = 0,$$

которое эквивалентно условию (30.72).

◇ Несложная, но громоздкая задача построения  $G_n(x, y)$  (см. пример 30.4) может быть заменена корректным предельным переходом в формулах (30.63) и (30.67). Действительно, раскрытие неопределенности в первом слагаемом (30.67) позволяет получить решение  $u(x, \lambda_n)$  задачи (30.1) при  $\lambda = \lambda_n$  в виде

$$u(x, \lambda_n) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} u(x, \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} \int_0^l G(x, y, \lambda) f(y) dy, \quad (30.74)$$

что мы и проиллюстрируем следующими примерами.

**Пример 30.4.** Найти решение краевой задачи

$$\begin{aligned} u''(x) + \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 u(x) &= x(l-x), & x \in ]0, l[, \\ u(0) &= u(l) = 0. \end{aligned} \quad (30.75)$$

**Решение.** Задача (30.75) характеризуется тем, что решение однородной задачи совпадает с собственной функцией

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x,$$

соответствующей собственному значению  $\lambda_2 = (2\pi/l)^2$ , т.е. задача (30.75) имеет не единственное решение. Легко проверить, что задача является нормально разрешимой, так как

$$\int_0^l x(l-x)u_2(x)dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{2\pi}{l} dx = 0. \quad (30.76)$$

Обозначив для удобства  $\lambda_n = \omega_n^2$ ,  $\omega_n = \pi n/l$ ,  $f(x) = x(l-x)$  рассмотрим возможные методы решения задачи.

I. Найдем модифицированную функцию Грина  $G_2(x, y)$ . Для этого нам необходимо любое частное решение уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega_2^2\right)g_2(x, y) = -\frac{2}{l} \sin \omega_2 x \sin \omega_2 y. \quad (30.77)$$

Применив к (30.77) метод неопределенных коэффициентов, получим

$$g_n(x, y) = -\frac{1}{2l\omega_2^2}(\sin \omega_2 x - 2\omega_2 x \cos \omega_2 x) \sin \omega_2 y. \quad (30.78)$$

Поскольку  $\tilde{u}_2(x) = \cos \omega_2 x$ , то  $G_2(x, y)$ , согласно (30.73), имеет вид

$$G_2(x, y) = -\frac{1}{2l\omega_2^2}(\sin \omega_2 x - 2\omega_2 x \cos \omega_2 x) \sin \omega_2 y + \begin{cases} C_1 \cos \omega_2 x + C_3 \sin \omega_2 x, & 0 \leq x < y, \\ C_2 \cos \omega_2 x + C_4 \sin \omega_2 x, & y < x \leq l, \end{cases} \quad (30.79)$$

где постоянные  $C_i$  должны быть определены из условий (30.69), (30.70), (30.72).

Граничные условия (30.70) дают

$$G_2(0, y) = C_1 = 0, \\ G_2(l, y) = \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 y \cos \omega l + C_2 \cos \omega_2 l = 0,$$

откуда следует

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\sin \omega_2 y}{\omega_2}. \quad (30.80)$$

Условия непрерывности функции  $G_2(x, y)$  и ее производной  $\partial G_2(x, y)/\partial x$  при  $x = y$  приводят к уравнениям (см. разд. «Другие методы построения функции Грина»)

$$(C_2 - C_1) \cos \omega_2 y + (C_4 - C_3) \sin \omega_2 y = 0, \\ -(C_2 - C_1)\omega_2 \sin \omega_2 y + (C_4 - C_3)\omega_2 \cos \omega_2 y = 1,$$

которые с учетом (30.80) вырождаются в одно, имеющее решение

$$C_4 - C_3 = \frac{\cos \omega_2 y}{\omega_2}. \quad (30.81)$$

Выразим  $C_4$  через  $C_3$  и перепишем (30.73) в виде

$$G_2(x, y) = -\frac{1}{2l\omega_2^2}(\sin \omega_2 x - 2\omega_2 x \cos \omega_2 x) \sin \omega_2 y + \\ + C_3 \sin \omega_2 x + \begin{cases} 0, & 0 \leq x < y, \\ \frac{\sin \omega_2(x-y)}{\omega_2}, & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.82)$$

Оставшуюся постоянную  $C_3$  можно найти, подставив (30.82) в (30.72). Такая подстановка дает

$$-\frac{1}{2l\omega_2^2} \sin \omega_2 y \left[ \int_0^l \sin^2 \omega_2 x \, dx - 2\omega \int_0^l x \cos \omega_2 x \sin \omega_2 x \, dx \right] + \\ + C_3 \int_0^l \sin^2 \omega_2 x \, dx + \int_y^l \frac{\sin \omega_2(x-y)}{\omega_2} \sin \omega_2 x \, dx = 0. \quad (30.83)$$

Учтя, что

$$\int_0^l \sin^2 \omega_2 x \, dx = \frac{l}{2}, \quad \int_0^l x \sin 2\omega_2 x \, dx = -\frac{l}{2\omega_2}, \\ \int_y^l \frac{\sin \omega_2(x-y)}{\omega_2} \sin \omega_2 x \, dx = \frac{1}{4\omega_2} \sin \omega_2 y + \frac{l-y}{2\omega_2} \cos \omega_2 y,$$

из (30.83) находим

$$C_3 = \frac{1}{2l\omega_2^2} \sin \omega_2 y - \frac{l-y}{2\omega_2} \cos \omega_2 y.$$

Подставив найденное значение  $C_3$  в (30.82), получим окончательное выражение для  $G_2(x, y)$ :

$$G_2(x, y) = \frac{1}{l\omega_2} \sin \omega_2 y \cos \omega_2 x - \frac{l-y}{l\omega_2} \cos \omega_2 y \sin \omega_2 x + \quad (30.84) \\ + \begin{cases} 0, & 0 \leq x < y, \\ \frac{\sin \omega_2(x-y)}{\omega_2}, & y < x \leq l. \end{cases}$$

Решение задачи  $u(x, \omega_2^2)$ , согласно (30.71), дает интеграл

$$u(x, \omega_2^2) = \int_0^l G(x, y) y(l-y) dy.$$

Из явного вида функции  $G_2(x, y)$  в форме (30.85) с учетом соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^l y(y-l)^2 \cos \omega_2 y dy &= -\frac{l^2}{\omega_2^2}, \\ \int_0^x [\sin \omega_2(y-x)] y(l-y) dy &= \\ &= \frac{1}{\omega_2} \left[ -x(l-x) + \frac{l}{\omega_2} \sin \omega_2 x - \frac{2}{\omega_2^2} (1 - \cos \omega_2 x) \right], \end{aligned}$$

находим решение задачи

$$\begin{aligned} u(x, \omega_2^2) &= \frac{x(l-x)}{\omega_2^2} + \frac{2}{\omega_2^4} (1 - \cos \omega_2 x) = \\ &= \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 \left[ x(l-x) + 4 \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right]. \end{aligned} \quad (30.85)$$

II. В случае в)  $\lambda = \omega^2 > 0$  примера 30.1 получена функция Грина

$$G_2(x, y, \omega^2) = \frac{1}{\omega \sin \omega l} \begin{cases} \sin \omega x \sin \omega(y-l), & 0 \leq x < y, \\ \sin \omega y \sin \omega(x-l), & y < x \leq l. \end{cases} \quad (30.86)$$

Покажем, что выражение (30.85) для  $G_2(x, y)$  может быть достаточно просто получено из (30.86) предельным переходом

$$\begin{aligned} G_2(x, y) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} \frac{1}{\omega \sin \omega l} \times \\ &\times \begin{cases} [\sin \omega x \sin \omega(y-l)]'_\omega, & 0 \leq x < y, \\ [\sin \omega y \sin \omega(x-l)]'_\omega, & y < x \leq l, \end{cases} \end{aligned} \quad (30.87)$$

где штрих обозначает производную по параметру  $\omega$ .

Действительно, выполнив в (30.87) операции дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} G_2(x, y) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} \frac{1}{\sin \omega l + \omega \cos \omega l} \times \\ &\times \begin{cases} x \cos \omega x \sin \omega(y-l) + (y-l) \sin \omega x \cos \omega(y-l), & 0 \leq x < y, \\ y \cos \omega y \sin \omega(x-l) + (y-l) \sin \omega y \cos \omega(x-l), & y < x \leq l, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда с учетом  $\sin \omega_2 l = 0$ ,  $\cos \omega_2 l = 1$  имеем

$$G_2(x, y) = \frac{1}{\omega_2 l} \times \quad (30.88)$$

$$\times \begin{cases} x \cos \omega_2 x \sin \omega_2 y + (y - l) \sin \omega_2 x \cos \omega_2 y, & 0 \leq x < y, \\ y \cos \omega_2 y \sin \omega_2 x + (y - l) \sin \omega_2 y \cos \omega_2 x, & y < x \leq l. \end{cases}$$

Выражение (30.89) легко приводится к (30.85), если представить (30.89) в виде

$$G_2(x, y) = \frac{1}{\omega_2 l} [x \cos \omega_2 x \sin \omega_2 y + (y - l) \sin \omega_2 x \cos \omega_2 y] + \quad (30.89)$$

$$+ \begin{cases} 0, & 0 \leq x < y, \\ G, & y < x \leq l, \end{cases}$$

где

$$G = y \cos \omega_2 y \sin \omega_2 x + (y - l) \sin \omega_2 y \cos \omega_2 x - \\ - x \cos \omega_2 x \sin \omega_2 y - (y - l) \sin \omega_2 x \cos \omega_2 y.$$

Упростив это выражение, найдем

$$G = l \sin \omega_2 (x - y)$$

и сводит (30.90) к (30.85).

III. Покажем, что решение  $u(x, \omega^2)$  (30.85) можно получить предельным переходом

$$u(x, \omega^2) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} u(x, \omega^2) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} \int_0^l G(x, y, \omega^2) f(y) dy, \quad (30.90)$$

где  $f(y) = y(l - y)$  согласно условию задачи,  $G(x, y, \omega^2)$  определено выражением (30.86) (см. пример 30.1).

Действительно,

$$u(x, \omega^2) = \int_0^l G(x, y, \omega^2) y(l - y) dy = \\ = \frac{1}{\omega \sin \omega l} \left\{ \sin \omega(x - l) \int_0^x y(l - y) \sin \omega y dy + \right. \\ \left. + \sin \omega x \int_x^l y(l - y) \sin \omega(y - l) dy \right\}. \quad (30.91)$$

А поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^x y(l-y) \sin \omega y dy &= \\ &= \frac{1}{\omega} \left[ x(l-x) \cos \omega x + \frac{l-2x}{\omega} \sin \omega x + \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega x) \right], \\ \int_x^l y(l-y) \sin \omega(y-l) dy &= \frac{1}{\omega} \left\{ x(l-x) \cos \omega(x-l) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l-2x}{\omega} \sin \omega(x-l) - \frac{2}{\omega^2} [1 - \cos \omega(x-l)] \right\}, \end{aligned}$$

то (30.91) принимает вид

$$\begin{aligned} u(x, \omega^2) &= \\ &= \frac{1}{\omega \sin \omega l} \left\{ \frac{x(l-x)}{\omega} [\sin \omega x \cos \omega(x-l) - \cos \omega x \sin \omega(x-l)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\omega^3} \{ (1 - \cos \omega x) \sin \omega(x-l) - [1 - \cos \omega(x-l)] \sin \omega x \} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись известными тригонометрическими соотношениями, это выражение можно записать как

$$u(x, \omega^2) = \frac{1}{\omega^2} \left\{ x(l-x) + \frac{2}{\omega^2} \left[ 1 - \frac{\cos \omega(x-l/2)}{\cos(\omega l/2)} \right] \right\}.$$

В результате, согласно (30.90) и с учетом  $\cos(\omega_2 l/2) = \cos \pi = -1$ , приходим к (30.85):

$$\begin{aligned} u(x, \omega_2^2) &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} \frac{1}{\omega^2} \left[ x(l-x) + \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega_2 x) \right] = \\ &= \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 \left[ x(l-x) + 4 \left( \frac{l}{2\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right]. \end{aligned}$$

**Пример 30.5.** Найти решение краевой задачи

$$[xu'(x)]' = x - 2x + \frac{2}{3}, \quad \left| \lim_{x \rightarrow 0} u(x) \right| < \infty, \quad u'(1) = 0. \quad (30.92)$$

**Решение.** Имеем частный случай задачи (30.39), (30.40) при  $\nu = \beta_0 = 0$ . Следовательно,  $\lambda_0 = 0$  является собственным значением однородной задачи (30.92) с собственной функцией  $u_0 = 1$ . Для выяснения разрешимости задачи (30.92) проверим ортогональность функций  $u_0$  и  $x^2 - 2x + 2/3$ . Поскольку

$$\int_0^1 \left( x^2 - 2x + \frac{2}{3} \right) dx = 0,$$





решение задачи (31.2), (31.3) может быть получено с помощью формализма обобщенных функций.

Продолжим функции  $u(x)$  и  $f(x)$  нулем на  $x < 0$ , обозначив продолженные функции через  $\tilde{u}(x)$  и  $\tilde{f}(x)$ , соответственно. Теперь понятие обобщенных производных, естественным образом учитывающих скачки  $u^{(k)}(0) = u_k$  в точке  $x = 0$ , позволяет свести задачу о нахождении решения уравнения (31.2) с начальными условиями (31.3) к одному уравнению, в обобщенном смысле свободному от каких-либо дополнительных условий.

Действительно, пусть  $\tilde{u}(x) = \theta(x)u(x)$ ,  $\tilde{f}(x) = \theta(x)f(x)$ ,  $\tilde{u}(x), \tilde{f}(x) \in \mathcal{D}'_+$ . Согласно (21.6), имеем

$$\tilde{u}'(x) = \theta(x)u'(x) + u(0)\delta(x)$$

или с учетом начальных условий (31.3)

$$\tilde{u}'(x) = \theta(x)u'(x) + u_0\delta(x).$$

По индукции находим

$$\tilde{u}^{(k)}(x) = \theta(x)u^{(k)}(x) + \sum_{m=0}^{k-1} u_m \delta^{(k-m-1)}(x), \quad k = \overline{1, n}. \quad (31.4)$$

Из (31.2) с учетом (26.2) и (31.4) получаем

$$\{L(D)\tilde{u}(x)\} = L(D)\tilde{u}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(x) = \tilde{f}(x), \quad (31.5)$$

где  $\{L(D)\tilde{u}(x)\} = \theta(x)L(D)u(x)$  — регулярная часть производной  $L(D)\tilde{u}(x) = L(D)\theta(x)u(x)$ , а  $C_k$  выражаются через  $u_k$  следующими соотношениями:

$$p_1 u_0 + p_2 u_1 + \dots + p_{n-1} u_{n-2} + p_n u_{n-1} = C_0, \quad (31.6)$$

$$p_2 u_0 + \dots + p_{n-1} u_{n-3} + p_n u_{n-2} = C_1,$$

.....,

$$p_{n-1} u_0 + p_n u_1 = C_{n-2}, \quad (31.7)$$

$$p_n u_0 = C_{n-1}.$$

Таким образом, функция  $\tilde{u}(x)$  в обобщенном смысле удовлетворяет уравнению

$$L(D)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (31.8)$$

Пусть  $g(x)$  – фундаментальное решение оператора  $L(D)$ , тогда согласно (26.5), (23.5), (23.6) решение уравнения (31.8) определяется сверткой

$$\begin{aligned} u(x) &= g(x) * \left( \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \delta^{(k)}(x) \right) = \\ &= g(x) * \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k g^{(k)}(x), \end{aligned} \quad (31.9)$$

которая существует и является единственной в силу единственности  $g(x)$  в  $\mathcal{D}'_+$ . Согласно теореме 27.1  $g(x) = \theta(x)e(x)$  и с учетом (23.8) решение (31.9) можно записать

$$\tilde{u}(x) = \theta(x) \int_0^x e(x-y)f(y)dy + \theta(x) \sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{(k)}(x), \quad (31.10)$$

где  $e(x)$  есть решение задачи (27.1), (27.2), а  $C_k$  определены формулами (31.7).

Формула (31.10) при  $x > 0$  дает искомое решение задачи Коши (31.2), (31.3)

$$u(x) = \int_0^x e(x-y)f(y)dy + \sum_{k=0}^{n-1} C_k e^{(k)}(x). \quad (31.11)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 31.1.** Если  $\tilde{f}(x) \in \mathcal{D}'_+$ , то решение обобщенной задачи Коши (31.8) существует, единственно и задается формулой (31.10).

**Пример 31.1.** Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u'' - 4u' + 5u &= e^{2x}, \\ u(0) &= 2, \quad u'(0) = 3. \end{aligned} \quad (31.12)$$

**Решение.** Согласно обозначениям, принятым в разд. «Фундаментальные решения линейных операторов», дифференциальный оператор уравнения (31.12) имеет вид

$$L(D) = p_0 + p_1 \frac{d}{dx} + p_2 \frac{d^2}{dx^2},$$

где

$$p_0 = 5, \quad p_1 = -4, \quad p_2 = 1. \quad (31.13)$$

В примере 26.1 показано, что фундаментальным решением этого оператора в  $\mathcal{D}'_+$  является функция

$$g(x) = \theta(x)e(x), \quad e(x) = e^{2x} \sin x.$$

Из (31.7) с учетом (31.13) и начальных условий (31.12) имеем

$$C_0 = (-4) \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -5, \quad C_1 = 1 \cdot 2 = 2.$$

Тогда из (31.10) или (31.11) находим решение задачи:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x e^{2(x-y)} \sin(x - y_e^{2y} dy - 5e^{2x} \sin x + 2(e^{2x} \sin x)' = \\ &= e^{2x}(1 + \cos x - \sin x). \end{aligned}$$

# Задания для самоконтроля

## Теоретические вопросы

### Часть I. Основы комплексного анализа

#### Глава 1. Введение в теорию функций комплексного переменного

1. Комплексные числа и действия над ними
2. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическая интерпретация операций над комплексными числами
3. Основные понятия множеств на комплексной плоскости. Геометрический смысл
4. Предел последовательности. Бесконечно удаленная точка. Расширенная комплексная плоскость
5. Ряды комплексных чисел. Необходимый и достаточные признаки сходимости. Абсолютная и условная сходимость
6. Понятие функции комплексного переменного и ее геометрическая интерпретация. Однозначные и однолистные функции
7. Предел и непрерывность функции комплексного переменного
8. Функциональные и степенные ряды. Теорема Абеля. Равномерная сходимость
9. Степенная и общая степенная функции
10. Тригонометрические и гиперболические функции, связь между ними
11. Логарифмическая функция. Обратные тригонометрические и гиперболические функции
12. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Понятие аналитической функции
13. Гармонические функции. Связь аналитических и гармонических функций. Сопряженные гармонические функции
14. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства
15. Теорема Коши для односвязной области. Понятие первообразной. Формула Ньютона–Лейбница
16. Теорема Коши для многосвязной области
17. Теорема Коши и теорема Морера

18. Теорема Коши и теорема Лиувилля
19. Интеграл Коши для односвязной области. Теорема о среднем
20. Интеграл Коши для многосвязной области
21. Интеграл Коши и принцип максимума модуля
22. Интеграл Коши для производных аналитической функции
23. Интеграл типа Коши

## Глава 2. Теория вычетов и ее приложения

1. Область сходимости функционального ряда на комплексной плоскости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса
2. Теорема Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов
3. Степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Теорема о сумме степенного ряда
4. Ряд Тейлора. Единственность разложения функции в ряд Тейлора. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Тейлора
5. Ряды Тейлора элементарных функций
6. Ряд Лорана. Кольцо сходимости. Единственность разложения функции в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана
7. Изолированные особые точки аналитических функций и их классификация. Определение целых и мероморфных функций
8. Устранимая особая точка
9. Полус, порядок полюса. Связь нулей и полюсов функций  $f(z)$  и  $1/f(z)$
10. Существенно особая точка. Теорема Сохоцкого–Вейерштрасса
11. Бесконечно удаленная изолированная особая точка. Обобщение теоремы Лиувилля
12. Аналитическое продолжение. Теорема о единственности аналитического продолжения
13. Непосредственное аналитическое продолжение через дугу и принцип непрерывного продолжения
14. Аналитическое продолжение вдоль цепочки областей
15. Аналитическое продолжение методом Вейерштрасса. Полная аналитическая функция

16. Понятие римановой поверхности. Точки ветвления
17. Понятие вычета. Основная теорема о вычетах в конечной области
18. Вычеты в устранимой и существенно особой точках
19. Вычисление вычета в полюсе
20. Вычет в бесконечно удаленной точке. Теорема о вычетах в расширенной комплексной плоскости
21. Вычисление вычета в бесконечно удаленной особой точке
22. Понятие логарифмического вычета. Логарифмические вычеты в нулях и полюсах аналитической функции
23. Логарифмический вычет мероморфной функции
24. Принцип аргумента и теорема Руше
25. Основная теорема алгебры
26. Задача Рауса–Гурвица
27. Вычисление определенных интегралов, содержащих рациональные функции от тригонометрических функций, с помощью вычетов
28. Несобственные интегралы в комплексной плоскости. Критерии сходимости и главное значение
29. Вычисление несобственных определенных интегралов от дробно-рациональных функций с помощью вычетов
30. Лемма Жордана
31. Вычисление несобственных определенных интегралов от осциллирующих функций с помощью вычетов и леммы Жордана
32. Лемма Жордана и интегралы Бромвича–Вагнера
33. Вычисление несобственных интегралов типа интегралов Эйлера с помощью вычетов
34. Вычисление несобственных интегралов, имеющих особенности на контуре интегрирования, с помощью вычетов
35. Суммирование рядов с помощью вычетов
36. Целые и мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфных функций с конечным числом полюсов на простейшие дроби
37. Теорема Миттаг–Леффлера для мероморфной функции
38. Бесконечные произведения, критерий сходимости. Абсолютная и равномерная сходимость
39. Разложение целой функции в бесконечное произведение

### Глава 3. Введение в теорию конформных отображений

1. Производная функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля производной
2. Понятие конформного отображения. Принцип соответствия границ. Теорема Римана
3. Отображение, задаваемое линейной функцией
4. Отображение, задаваемое функцией  $w = 1/z$ . Круговое свойство и свойство сохранения симметрии
5. Отображение, задаваемое дробно-линейной функцией
6. Отображение, задаваемое степенной функцией
7. Отображение, задаваемое показательной и логарифмической функциями
8. Отображение, задаваемое тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями
9. Отображение, задаваемое гиперболическими и обратными гиперболическими функциями
10. Отображение, осуществляемое функцией Жуковского
11. Принцип симметрии в конформных отображениях
12. Принцип симметрии как метод аналитического продолжения
13. Интеграл Кристоффеля–Шварца

### Глава 4. Элементы операционного исчисления

1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и обобщенные оригиналы. Изображения: существование и аналитичность
2. Теорема обращения и формула Меллина. Единственность обращения
3. Изображение простейших функций
4. Свойства преобразования Лапласа: линейность, подобие, теоремы смещения
5. Дифференцирование оригинала и изображения
6. Интегрирование оригинала и изображения
7. Свертка функций. Теоремы умножения оригиналов и изображений
8. Отыскание оригинала по заданному изображению. Теорема единственности. Первая и вторая теоремы разложения
9. Формула Дюамеля
10. Теорема Эфроса



11. Интегрирование систем дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа и интеграла Дюамеля
12. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами операционным методом
13. Вычисление некоторых несобственных интегралов операционным методом. Формула Парсевалея
14. Основные определения гамма-функции. Аналитичность
15. Аналитическое продолжение гамма-функции в область  $\operatorname{Re} z < 0$ . Полюсы гамма-функции
16. Основные свойства гамма-функции: основное функциональное соотношение, формулы дополнения и удвоения
17. Бета-функция, связь бета- и гамма-функций. Основные свойства бета-функции
18. Биномиальные коэффициенты и бета-функция
19. Интегралы Френеля и ошибок

## Глава 5. Методы асимптотических оценок

1. Простейшие асимптотические оценки несобственных интегралов
2. Асимптотические последовательности и их свойства. Степенные асимптотические последовательности
3. Асимптотические ряды. Единственность асимптотического разложения
4. Метод Лапласа. Лемма Ватсона. Вклад от внутренней и граничной точек максимума
5. Метод стационарной фазы. Асимптотика фурье-образов. Асимптотическая оценка интегралов Фурье, не имеющих стационарных точек
6. Метод стационарной фазы. Принцип локализации. Лемма Эрдейи. Асимптотическая оценка интегралов Фурье в общем случае

## Часть II. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций

### Глава 1. Элементы вариационного исчисления в классической механике

1. Функционал, линейный функционал. Вариация и экстремум функционала

2. Основная лемма вариационного исчисления и следствия из нее
3. Уравнение Эйлера
4. Система уравнений Эйлера
5. Принцип наименьшего действия (Гамильтона). Фазовое пространство
6. Канонические уравнения Гамильтона
7. Первые интегралы системы Гамильтона. Скобки Пуассона
8. Канонические преобразования координат фазового пространства
9. Тождество Якоби и теорема Лиувилля

## Глава 2. Основы теории обобщенных функций

1. Пространства основных и обобщенных функций. Сходимости в пространстве обобщенных функций
2. Пространства Шварца и обобщенных функций медленного роста. Сходимость функциональной последовательности в пространстве Шварца
3. Действия над обобщенными функциями
4. Дельта-функция Дирака и ее свойства
5. Секвенциальный подход и дельтообразные последовательности
6. Обобщенные функции: постоянная, функция Хевисайда, характеристическая функция отрезка
7. Обобщенные функции, порождаемые главными значениями несобственных интегралов. Регуляризация
8. Некоторые представления основных функций
9. Производная обобщенной функции и ее свойства
10. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста
11. Свертка обобщенных функций
12. Пространство квадратично интегрируемых функций. Скалярное произведение, норма, ортогональность
13. Ортогональные системы функций. Ряд Фурье. Полнота и замкнутость ортонормированных систем
14. Дельта-функция Дирака и ортонормированные системы функций
15. Классические и обобщенные решения дифференциальных уравнений\*

16. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов\*
17. Функция Грина краевой задачи
18. Краевая задача для линейного дифференциального оператора с параметром\*
19. Функция Грина краевой задачи с параметром\*
20. Краевая задача и функция Грина для уравнения Бесселя\*
21. Нормальная разрешимость краевых задач. Модифицированная функция Грина краевой задачи\*
22. Обобщенная задача Коши\*

**Индивидуальные задания****Вариант № 1**

1.1. Найти все значения корня

а)  $\sqrt[3]{-2}$ ; б)  $\sqrt[5]{1-i}$ .

1.2. Представить в алгебраической форме

а)  $\operatorname{ch}(3 + \pi i/4)$ ; б)  $\operatorname{arccos}(-3i)$ .

1.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $|\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$ .

1.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1} + n - i}.$$

1.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = i + 1$  при отображении  $w = 1/z^2$ .1.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$ 

а)  $v = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2$ ,  $f(i) = 1 - 3i$ .

б)  $u = -(\cos x \operatorname{sh} y - 2xy)$ ,  $f(0) = 0$ .

1.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz,$$

где  $\Gamma$  – ломаная с вершинами в точках  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = 1 + 2i$ .

1.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^3(z-2i)^2},$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1$ , б)  $|z - 2i| = 1$ , в)  $|z| = 3$ .

1.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}.$$

1.10. Найти первые три члена разложения функции  $f(z) = e^z/z$  в ряд по степеням  $(z - 1/2)$ .1.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$ 

а)  $\frac{z-2}{z^4+z^3-2z^2}$ ,  $z_0 = 0$ ;

б)  $\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$ ,  $z_0 = -2 + i$ .

в)  $\sin \frac{z}{z-1}$ ,  $z_0 = 1$ .

1.12. Для данной функции  $f(z) = \operatorname{th} z$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

1.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{2iz} - 1}{z + \pi}, \quad z = \pi;$

б)  $\frac{1}{z^3 - z^6}, \quad z = 0;$

в)  $\frac{z^3 + 1}{z} e^{1/z}, \quad z = 0;$

г)  $\frac{e^{5z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}, \quad z = 0,$

д)  $z^5 \ln(1 + a/z),$   
 $z = \infty;$

е)  $\frac{11z + 24}{121 + 11z - 2z^2} e^{z/(z-4)},$   
 $z = \infty.$

1.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=3} \frac{z dz}{(z+2)^2(z-1)};$

б)  $\int_{|z|=1/3} (z+1)e^{1/z} dz;$

в)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx;$

г)  $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^z}{z^2+1} dz, \quad \sigma > 0;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2} \sin t + 6};$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{10/11} \cos t)^2}.$

1.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $D : \{|z| > 7\}, \quad w = \frac{z+i}{z-i};$

б)  $D : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}, \quad w = \cos z;$

в)  $D : \{|z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}, \quad w = z^4.$

1.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z| < 1\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w([1+i]/2) = 0, \quad w'([1+i]/2) = \alpha.$

1.17. Найти изображение указанных функций

а)  $e^{5t} \sin^2 t;$

б)  $(1 - \cos t)/t.$

1.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{e^{-p}}{p(p-1)};$

б)  $\frac{p^3}{(p^4-1)^2}.$

1.19. С помощью формулы Дюамеля найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

1.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + \dot{x} = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2;$

б)  $\ddot{x} + 4x = 4e^{2t} + 4t^2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2;$

в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t > 2, \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$



2.10. Найти первые три члена разложения функции  $f(z) = \exp(e^z)$  в ряд по степеням  $z$ .

2.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{5z - 50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}, \quad z_0 = 0;$

б)  $\frac{4z + 8}{(z - 1)(z + 3)}, \quad z_0 = -3 - i;$

в)  $\sin \frac{2z}{z + 2}, \quad z_0 = -2.$

2.12. Для функции  $f(z) = (\sin z)/[z^3(1 - \cos z)]$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

2.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}, \quad z = 0;$

б)  $\frac{e^{2z}}{e^z - i}, \quad z = \pi i/2;$

в)  $\frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{3z}, \quad z = 0;$

г)  $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}, \quad z = 0;$

д)  $(z - i) \cos \frac{\pi}{z},$   
 $z = \infty;$

е)  $\frac{7z + 1}{98 + 7z - z^2} \sin \frac{\pi z - 1}{2z + 4},$   
 $z = \infty.$

2.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=1} \operatorname{tg}(\pi z) dz;$

б)  $\int_{|z-1|=1/2} e^{1/(z-1)} \sin \frac{1}{z-1} dz;$

в)  $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 4)^2};$

г)  $\int_{1+i\infty}^{1-i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2(z^2 + 1)} dz, \quad t > 0;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{2} \sin t + 6} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \sqrt{6/7} \cos t)^2} dt.$

2.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z = \pi/4\}, \quad w = \cos z;$

б)  $E : \{|z|^2 < 2, |z - 1| > 1\}, \quad w = z/(z - 2);$

в)  $E : \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}.$

2.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z| < 1\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(1/3) = -i/2, \arg w(1/2) = \alpha$ .

2.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\cos^6 t;$

б)  $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}.$

2.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а) } \frac{e^{-2p}}{p^2(p-2)}; \quad \text{б) } \frac{p}{p^4+4}.$$

2.19. С помощью формулы Дюамеля найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{1+t^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

2.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\text{а) } \ddot{x} + x = 2 \cos t, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1;$$

$$\text{б) } x^{(4)} - 5\ddot{x} + 10\dot{x} - 6x = 0;$$

$$x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 1, \quad \ddot{x}_0 = 6, \quad \ddot{\ddot{x}}_0 = -16;$$

$$\text{в) } \ddot{x} + 4x = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ 5e^{-(t-a)}, & t \geq a, \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

2.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - \dot{x} = 0.$$

2.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = 2x - y + 9, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$

### Вариант № 3

3.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[3]{-1}; \quad \text{б) } \sqrt{2+i}.$$

3.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \sin(\pi/3 - 2i); \quad \text{б) } \operatorname{arth}(4 + 3i)/5.$$

3.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$ .

3.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-ni} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$$

3.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1$  при отображении  $w = z^3 - 6z$ .

3.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

$$\text{а) } u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0,$$

$$\text{б) } v = x^2 - y^2 - x, \quad f(0) = 0.$$



3.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} e^{|z|} dz,$$

где  $\Gamma$  – ломаная с вершинами в точках  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1 + i$ .

3.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2 + 4} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 2i| = 2$ , б)  $|z| = 3$ , в)  $|z + 2i| = 2$ .

3.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+4i}{z}\right)^n.$$

3.10. Найти первые три члена разложения функции  $\operatorname{tg} z$  в ряд по степеням  $z$ .3.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$ 

$$\text{а) } \frac{4z - 64}{z^4 + 4z^3 - 32z^2}, \quad z_0 = 0;$$

$$\text{б) } \frac{4z - 8}{(z+1)(z-3)}, \quad z_0 = -1 - 2i;$$

$$\text{в) } z \sin \frac{5z}{z-2i}, \quad z_0 = 2i.$$

3.12. Для функции  $(e^z - 1)/\sin \pi z$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

3.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

$$\text{а) } \frac{e^{z-1} - 1}{z-1}, \quad z = 1;$$

$$\text{б) } \frac{z^5}{(1+z^2)^3}, \quad z = i;$$

$$\text{в) } e^{z/(z+1)}, \quad z = -1;$$

$$\text{г) } \frac{\sin 8z - 8z}{\cos z - 1 + z^2/2}, \quad z = 0;$$

$$\text{д) } z \operatorname{ch} \frac{z - \pi i}{z}, \quad z = \infty;$$

$$\text{е) } \frac{z+3}{z^2+1} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2z^2-1}, \quad z = \infty.$$

3.14. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{|z-2\pi|=1} \frac{z^2}{(e^z - 1)^2} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z-1|=1} e^{1/(z-1)} \cos \frac{1}{z-1} dz;$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-3}{x^2-6x+109} dx;$$

$$\text{г) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x^3+13x) \sin x}{x^4+13x^2+36} dx;$$

$$\text{д) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21} \sin t + 5};$$

$$\text{е) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{5} + \cos t)^2} dt.$$

3.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{|z + 1| = 1\}, \quad w = 1/z;$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, \quad w = \operatorname{ch} z;$

в)  $E : \{|z| < 1; -3\pi/4 < \arg z < -\pi/4\}, \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$

3.16. Конформно отобразить область  $D : \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(-i/2) = 0, \arg w'(1/2) = \alpha.$

3.17. Найти изображение указанных функций

а)  $te^{3t} \cos t;$

б)  $t \operatorname{sh} 2t.$

3.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{1}{p^2(p+1)^3};$

б)  $\frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}.$

3.19. С помощью формулы Дюамеля найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - x = \operatorname{th}^2 t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

3.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + \dot{x} = e^t; \quad x_0 = \ddot{x}_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 2;$

б)  $\ddot{x} + 4x = \sin 2t; \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1;$

в)  $\ddot{x} + \dot{x} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ 1, & a \leq t < b, \\ 0, & t \geq b, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 2.$

3.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} + 2\dot{x} = 0.$$

3.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

### Вариант № 4

4.1. Найти все значения корня

а)  $\sqrt[4]{1+i};$

б)  $\sqrt[3]{-i}.$

4.2. Представить в алгебраической форме

а)  $\operatorname{sh}(1 - \pi i/3);$

б)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3i}{7}\right).$

4.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}}.$$

4.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^5 + \sin 2^n + in}.$$

4.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1 - i/2$  при отображении  $w = \ln(2z - i)$ .

4.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $v = \ln(x^2 + y^2)$ ,  $f(1) = 0$ ;

б)  $u = x^2 - y^2 - 2y$ ,  $f(0) = 0$ .

4.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz,$$

где  $\Gamma$  – отрезок прямой  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ .

4.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin 8z}{(z - \pi/2)(z - \pi/4)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 2| = 1$ , б)  $|z| = 1$ , в)  $|z| = 2$ .

4.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

4.10. Найти первые три члена разложения функции  $\ln(1 + e^z)$  в ряд по степеням  $z$ .

4.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{17z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}$ ,  $z_0 = 0$ ;

б)  $\frac{4z - 8}{(z + 1)(z - 3)}$ ,  $z_0 = 3 + i$ ;

в)  $z \cos \frac{2z}{z - 1}$ ,  $z_0 = 1$ .

4.12. Для функции  $f(z) = e^{7z}(e^z - 1)^{-1}(1 - z)^3$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

4.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{\sin z - z}{z^3}, z = 0;$

б)  $\frac{e^z}{(z-1)z^2}, z = 1;$

в)  $z^3 \cos \frac{1}{z-2}, z = 2;$

г)  $\frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}, z = 0;$

д)  $\frac{2z}{z^2+4} \cos \frac{z-3}{z}, z = \infty;$

е)  $z^2 \sin \frac{\pi-i}{z}, z = \infty.$

4.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z+\pi)^3} dz;$

б)  $\int_{|z|=2/3} \left( \sin \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+4)(x^2+9)} dx;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{4+x^2} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2} \sin t + 3};$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{3} + \sqrt{11} \cos t} dt.$

4.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{1 < |z| < 2\}, w = z/(z-1);$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, w = \operatorname{ch} z;$

в)  $E : \{\operatorname{Re} z = 1\}, w = z^2.$

4.16. Конформно отобразить область  $D : \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(-3i) = 1/3, \arg w'(-3i) = \alpha.$

4.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\frac{1}{2} \operatorname{sh} at \sin at;$

б)  $\frac{1 - e^{at}}{te^t}.$

4.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3};$

б)  $\frac{p}{(p^2+a^2)^2}.$

4.19. С помощью формулы Дюамеля найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = \frac{1}{1+e^t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

4.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + x = \frac{1}{2} t^2 e^t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0;$

б)  $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 2t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0;$

в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} b, & 0 \leq t < a, \\ 2b, & t \geq a, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0.$

4.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (t - 5)\dot{x} + 3x = 0.$$

4.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y + 1, \\ \dot{y} = x + 2y + 1, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2.$$

### Вариант № 5

5.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[3]{-5} \qquad \text{б) } \sqrt[4]{\frac{1 + i\sqrt{3}}{32}}$$

5.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \sin(\pi/6 - 3i); \qquad \text{б) } \operatorname{arth}\left(\frac{8 + 3\sqrt{3}i}{7}\right).$$

5.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ .

5.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n + in^2}.$$

5.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = i$  при отображении  $w = z^3 - z$ .

5.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

$$\text{а) } u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0;$$

$$\text{б) } v = x^2 - y^2 - x, \quad f(0) = 0.$$

5.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z^2 \operatorname{Im} z \, dz,$$

где  $\Gamma$  — ломаная с вершинами в точках  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = 1 + i$ .

5.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z - 1}{z^3(z - 1)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1/2$ , б)  $|z - 1| = 1/2$ , в)  $|z| = 2$ .

5.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - a)^{2n}}{2n^3 + 1}.$$

5.10. Найти первые три члена разложения функции  $\operatorname{ch}(1-z)$  в ряд по степеням  $z - (1 + \pi i/2)$ .

5.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

$$\text{а) } \frac{7z - 196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2}, \quad z_0 = 0;$$

$$\text{б) } \frac{4z - 8}{(z+1)(z-3)}, \quad z_0 = 2 - 2i;$$

$$\text{в) } (z-3) \cos \pi \frac{z-3}{z}, \quad z_0 = 0.$$

5.12. Для функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z^2}$$

найти изолированные особые точки и определить их тип.

5.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

$$\text{а) } \frac{1 + \cos z}{e^{iz} + 1}, \quad z = \pi;$$

$$\text{б) } \frac{\sin^2 z}{(z - \pi/2)^3}, \quad z = \pi/2;$$

$$\text{в) } iz \cos \frac{1}{z} - e^{i/z}, \quad z = 0;$$

$$\text{г) } \frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}, \quad z = 0;$$

$$\text{д) } (z+i)^2 e^{(2-i)/z}, \quad z = \infty;$$

$$\text{е) } \frac{2z}{z^2 - 4} \sin^2 \frac{\pi z - i}{3z + i}, \quad z = \infty.$$

5.14. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{|z-3|=2} \frac{z}{(z-4)^2(z+1)} dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=1/2} \frac{\cos 1/z}{1-z} dz;$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3};$$

$$\text{г) } \int_{1+i\infty}^{1-i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2} dz, \quad t > 0;$$

$$\text{д) } \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5} \sin t + 3} dt;$$

$$\text{е) } \int_0^{\infty} \frac{1}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cos t)^2} dt.$$

5.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

$$\text{а) } E : \{\operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = 1/z;$$

$$\text{б) } E : \{|z| = 2\}, \quad w = \frac{1}{z} \left( z + \frac{1}{z} \right);$$

$$\text{в) } E : \{1 < |z| < 2\}, \quad w = 2/(z-1).$$

5.16. Конформно отобразить область

$$D : \{|z| > 0, z \notin [-2, -1], z \notin [1, 2]\}$$



6.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = 2(\operatorname{sh} x \sin y + xy)$ ,  $f(0) = 3i$ ;

б)  $v = \frac{x}{x^2 + y^2} + x$ ,  $f(1) = 2$ .

6.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z \operatorname{Re} z^2 dz,$$

где  $\Gamma$  – полуокружность  $|z| = 2$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ .

6.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2(4z + i\pi)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z + i| = 1/2$ , б)  $|z| = 1/2$ , в)  $|z| = 2$ .

6.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|n|} z^n.$$

6.10. Найти первые три члена разложения функции  $1/(5 + e^{-z})$  в ряд по степеням  $z$ .

6.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z + 2}{z + z^2 - 2z^3}$ ,  $z_0 = 0$ ;

б)  $\frac{8z - 16}{(z + 1)(z - 3)}$ ,  $z_0 = -2 - i$ ;

в)  $z \cos \frac{z}{z + 2i}$ ,  $z_0 = -2i$ .

6.12. Для функции  $\exp[1/(z + 1)]$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

6.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{\sin^2 z}{z^2}$ ,  $z = 0$ ;

б)  $\frac{1}{(z^4 + 4)^3}$ ,  $z = 2i$ ;

в)  $(z - 1)^2 \cos \frac{1}{z}$ ,  $z = 0$ ;

г)  $\frac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$ ,  $z = 0$ ;

д)  $\frac{z - 1}{z^2 + 1} \operatorname{ch} \left( \frac{2}{z - 3} \right)$ ,  $z = \infty$ ;

е)  $z \operatorname{ch} \frac{l}{z} \exp \frac{1}{z}$ ,  $z = \infty$ .



6.14. Вычислить интегралы

а) 
$$\int_{|z-6|=5} \frac{z^2}{\sin z} dz;$$

б) 
$$\int_{|z|=1/2} (z+2)e^{2/z} dz;$$

в) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+4x+13)^2};$$

г) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4x+20} dx;$$

д) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{7} \sin t + 4} dt;$$

е) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(4+3 \cos t)^2} dt.$$

6.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = e^{2z};$

б)  $E : \{|z| = 2\}, \quad w = z/(z+1);$

в)  $E : \{|z| < 1, z \notin [0, 1]\}, \quad w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$

6.16. Конформно отобразить область  $D : \{-\infty < \operatorname{Im} z < \infty, -\infty < \operatorname{Re} z < \infty; z \notin [i, 3i]\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

6.17. Найти изображение указанных функций

а)  $te^{-t} \sin t;$

б)  $\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau} d\tau.$

6.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{p^2+1}{p^2(p^2-1)};$

б)  $\frac{p}{p^4+5p^2+4}.$

6.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = \frac{e^t}{1+e^t}, \quad \dot{x}_0 = x_0 = 0.$$

6.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} - \dot{x} - 6x = 2, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 2;$

б)  $x^{(4)} + x^{(3)} = \cos t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0, \quad x_0^{(3)} = 1;$

в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t \geq \pi; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

6.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (t+5)\dot{x} + 3x = 0.$$



7.10. Найти первые три члена разложения функции  $f(z) = \frac{1}{z} \sin z$  в ряд по степеням  $z - 1$ .

7.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{2z + 16}{8z^2 + 2z^3 - z^4}, \quad z_0 = 0;$

б)  $\frac{2z}{z^2 + 4}, \quad z_0 = -1 - 3i;$

в)  $\sin \frac{z + i}{z - i}, \quad z_0 = i.$

7.12. Для функции  $\cos(1/z)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

7.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} z, \quad z = \pi/2;$

б)  $\frac{1}{z^3} \cos z, \quad z = 0;$

в)  $z^2 e^{1/(1-z)}, \quad z = 1;$

г)  $\frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{z + 1}{z(z - 1)} \sin\left(\frac{\pi z}{2z - 1}\right),$   
 $z = \infty;$

е)  $(z - 2i + 3) \ln\left(1 - \frac{\pi}{2z}\right),$   
 $z = \infty.$

7.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=1} \operatorname{ctg} z \, dz;$

б)  $\int_{|z|=2} \frac{1}{\sin^2 z} \, dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1} \, dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 \sin t + 5} \, dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(4 + \cos t)^2} \, dt.$

7.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z = 1\}, \quad w = z/(1 + z);$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = e^{2z};$

в)  $E : \{|z| > 1, z \notin [-2, -1], z \notin [1, +\infty)\}, \quad w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$

7.16. Конформно отобразить область  $D : \{\operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < a\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}, a > 0.$

7.17. Найти изображение указанных функций

а)  $e^{-t} \sin^2 t$

б)  $\int_0^t \frac{1}{\tau} \operatorname{sh} \tau \, d\tau.$

7.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а) } \frac{e^{-2p}}{(1+p)^3}; \quad \text{б) } \frac{1}{p^2 + 2p + 5}.$$

7.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = \frac{e^{2t}}{3 + e^t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

7.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\begin{aligned} \text{а) } \ddot{x} + x &= 2 \sin t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = -1; \\ \text{б) } \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x &= 12e^{3t}, \quad x_0 = 2, \quad \dot{x}_0 = 6; \\ \text{в) } \ddot{x} - \dot{x} &= \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t \geq \pi; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0. \end{aligned}$$

7.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (1+t)\dot{x} + 2(1-t)x = 0.$$

7.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 1, \\ \dot{y} = 2x + 3y, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2.$$

### Вариант № 8

8.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt{1-i} \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

8.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{sh}(1 + \pi i/2); \quad \text{б) } (-1 + i\sqrt{3})^{3i}.$$

8.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\operatorname{Re}(\operatorname{ctg} z) = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}.$$

8.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - 2i}{n(n-i)(n+2)}.$$

8.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = i$  при отображении  $w = 3e^{-iz} + 2z^2$ .

8.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

- а)  $u = x^3 - 3xy^2 + 2x, \quad f(0) = i;$   
 б)  $v = e^x(y \cos y + x \sin y), \quad f(0) = 0.$

8.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z^2 \operatorname{Im} z \, dz,$$

где  $\Gamma$  – отрезок прямой  $z_1 = 0, z_2 = 1 - 2i$ .

8.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{z+1}{z(z-1)(z+3)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1/2$ , б)  $|z-1| = 1/2$ , в)  $|z| = 2$ .

8.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n}.$$

8.10. Найти первые три члена разложения функции  $e^{1/(1-z)}$  в ряд по степеням  $z$ .

8.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}, \quad z_0 = 0;$

б)  $\frac{2z}{z^2+4}, \quad z_0 = -3+2i;$

в)  $z \exp\left(\frac{1}{z-2}\right), \quad z_0 = 2.$

8.12. Для функции  $(1 - \sin z)/\cos z$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

8.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{z^3}{\sin z - z} \cos z, \quad z = 0;$

б)  $\frac{z}{(z^2+1)^2}, \quad z = i;$

в)  $z \exp \frac{z}{z-1}, \quad z = 1;$

г)  $\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{z-1}{(z+1)^2} \cos^2\left(\frac{\pi z-2}{z+3i}\right),$   
 $z = \infty;$

е)  $(z+2i) \cos^2\left(\frac{\pi}{2z}\right),$   
 $z = \infty.$

8.14. Вычислить интегралы

а) 
$$\int_{|z-3|=3/2} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)(z^2-4)} dz;$$

б) 
$$\int_{|z|=1/2} z \cos^2(2/z) dz;$$

в) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx;$$

г) 
$$\int_{1+i\infty}^{1-i\infty} \frac{x \operatorname{ch} x}{x^2-2x+10} dx;$$

д) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3\sqrt{7} \sin t + 8} dt;$$

е) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+\sqrt{5} \cos t)^2} dt.$$

8.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z = \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = e^{iz};$

б)  $E : \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = (1-z)/(1+z);$

в)  $E : \{|z| < 1, \operatorname{Im} z < 0, z \notin [-i, -i/2]\}, \quad w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$

8.16. Конформно отобразить область

$$D : \left\{ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

8.17. Найти изображение указанных функций

а)  $t^2 \operatorname{ch} 2t;$

б)  $\int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau} d\tau.$

8.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{p^2 + a^2}{(p^2 - a^2)^2};$

б)  $\frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)}.$

8.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - x = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

8.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4 = t^3 e^{2t}, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 2;$

б)  $2\ddot{x} - 2\dot{x} + x = t - \sin t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0;$

в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1; \\ 2-t, & 1 \leq t < 2; \\ 0, & t \geq 2; \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1.$

8.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - 2(t+1)\dot{x} + (t+2)x = 0.$$



9.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{2z}{z^2 + 4}, \quad z_0 = 2 + 3i;$

б)  $\frac{5z + 100}{50z^2 + 5z^3 - z^4}, \quad z_0 = 0;$

в)  $\sin \frac{2z}{z - 4}, \quad z_0 = 4.$

9.12. Для функции  $f(z) = z/(1 - \sin^2 z)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

9.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{z-2} - 1}{z - 2}, \quad z = 2;$

б)  $\frac{e^z}{z^2(z+1)^6}, \quad z = -1;$

в)  $\cos \frac{1}{z} + \frac{1}{z}, \quad z = 0;$

г)  $\frac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{2z}{z^2 - 4} \sin \pi \frac{z+1}{2z}, \quad z = \infty;$

е)  $z^3 \ln \left(1 - \frac{2i}{z}\right), \quad z = \infty.$

9.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z-2|=2} \frac{\sin^2 z}{(z - \pi/2)^3} dz;$

б)  $\int_{|z|=1} \left(z \cos \frac{1}{z} - e^{2/z}\right) dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 2};$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(-2x)}{x^2 + 4} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{3} \sin t - 7} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2} dt.$

9.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z = 1\}, \quad w = z^2;$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = e^z;$

в)  $E : \{\pi/4 < \arg z < 3\pi/4, z \notin [0, i]\}, \quad w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right).$

9.16. Конформно отобразить область  $D : \{a < \operatorname{Re} z < b\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}, a < b.$

9.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\operatorname{sh} t \cos 2t \cos 3t;$

б)  $\frac{1}{t} \sin^2 t.$

9.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p + 4)};$

б)  $\frac{p^3}{(p^2 + 1)^3}.$



9.19. С помощью формулы Дюамеля найти решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \frac{2e^{2t}}{\operatorname{ch} 2t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

9.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\text{а) } \ddot{x} - \dot{x} = te^t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0;$$

$$\text{б) } \ddot{x} - \dot{x} = t^2, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1;$$

$$\text{в) } \ddot{x} + 9x = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1; \\ t, & 1 \leq t < 2; \\ 3 - t, & 2 \leq t < 3; \\ 0, & t \geq 3 \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

9.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (t + 5)\dot{x} + 3x = 0.$$

9.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 1, \\ \dot{y} = 4x - 2y, \end{cases} \quad x_0 = -1, \quad y_0 = 0.$$

### Вариант № 10

10.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[4]{-1};$$

$$\text{б) } \sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}.$$

10.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{sh}\left(2 + \frac{\pi}{4}i\right);$$

$$\text{б) } \operatorname{arcth}\left(\frac{3 + i2\sqrt{3}}{3}\right).$$

10.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\operatorname{Re}\{\operatorname{tg} z\} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}.$$

10.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6ni - 8}.$$

10.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1 + i$  при отображении  $w = \ln(z - 1)$ .

10.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = 2 \cos x \operatorname{ch} y, \quad f(0) = 2;$

б)  $v = 2xy + x, \quad f(0) = 0.$

10.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{|z|},$$

где  $\Gamma$  – отрезок прямой  $z_1 = 1, z_2 = i$ .

10.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2 + 1)^2} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 2i| = 2$ , б)  $|z + 2i| = 2$ , в)  $|z| = 2$ .

10.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z + 3i}{3} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{z + 3i} \right)^n.$$

10.10. Найти первые три члена разложения функции  $[\sin(3z - 1)]/z$  в ряд по степеням  $(z + 1)$ .

10.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{2z}{z^2 + 4}, \quad z_0 = -3 + 2i;$

б)  $\frac{13z + 338}{169z + 13z^2 - 2z^3}, \quad z_0 = 0;$

в)  $\exp\left(\frac{4z - 2z^2}{(z - 1)^2}\right), \quad z_0 = 1.$

10.12. Для функции  $f(z) = z^2(\cos z - 1)^{-3}$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

10.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{\cos z}{z - 3\pi/2}, \quad z = 3\pi/2;$

б)  $e^{1/(z+1)} + \frac{z^5}{(z+1)^3}, \quad z = -1;$

в)  $z \cos \frac{z}{z-2}, \quad z = 2;$

г)  $\frac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{4z + 2}{(z-i)(z+3)} \exp \frac{\pi z}{z-2},$   
 $z = \infty;$

е)  $(z+2)^2 \ln\left(1 - \frac{4}{z}\right),$   
 $z = \infty.$

10.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=1} \frac{z}{16z^{16} + 1} dz;$

б)  $\int_{|z|=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos^3 z}{z^2 \sin 5z} dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^3} dx;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 \sin t + 5} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2} dt.$

10.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Im} z = \pi/4\}, \quad w = \cos z;$

б)  $E : \{\pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}, \quad w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right);$

в)  $E : \{|z| < 2, |z - 1| > 1\}, \quad w = z/(z - 1).$

10.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z| < 2, |z - 1| < 1\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

10.17. Найти изображение указанных функций

а)  $t^2 \sin at;$

б)  $\int_0^t \sin \tau d\tau.$

10.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{3p + 1}{(p^2 + 1)^2};$

б)  $\frac{1}{p(p + 1)}.$

10.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + x = \frac{1}{\operatorname{ch} 2t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

10.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} - \dot{x} = t^2, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1;$

б)  $\ddot{x} + 4x = 8 \sin 2t, \quad x_0 = 3, \quad \dot{x}_0 = -1;$

в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & 2 \leq t; \\ -1, & 1 \leq t < 2; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

10.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - 2(t + 1)\dot{x} + (t + 2)x = 0.$$



11.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{3z - 18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}, \quad z_0 = 0;$

б)  $\frac{2z}{z^2 - 4}, \quad z_0 = 2 + 2i;$

в)  $z \exp \frac{\pi z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi.$

11.12. Для функции  $f(z) = (z - \pi)/\sin^2 z$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

11.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{1 - e^{2zi}}{z - \pi}, \quad z = \pi;$

б)  $z \cos \frac{4}{z + 2}, \quad z = -2;$

в)  $\frac{e^{iz}}{z(z - \pi)^3}, \quad z = \pi;$

г)  $\frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z - z^2/2}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{z - 1}{z^2 + 1} \operatorname{ch} \left( \frac{2}{z - 3} \right), \quad z = \infty;$

е)  $z^3 \exp \left( \frac{7}{z} \right), \quad z = \infty.$

11.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z+2|=1} \frac{e^{iz}}{(2z + 3)^2} dz;$

б)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5} dx;$

в)  $\int_{|z|=3/2} \frac{z^5 + z^3}{z^4 + 1} dz;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\sqrt{5} \sin t + 3} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{21} + \sin t + 5} dt.$

11.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{|z - 1/2| = 1/4\}, \quad w = 1/z;$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \operatorname{cth} z;$

в)  $E : \{|z| < 1, -3\pi/4 < \arg z < -\pi/4\}, \quad w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$

11.16. Конформно отобразить область  $D : \{0 < \arg(z - 1 - i) < \pi/2\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Re} w > 0\}$ .

11.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\operatorname{ch} at t \cos at;$

б)  $\frac{1}{t} e^{-at} \sin^2 t.$

11.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{1}{(p + 1)(p + 2)^2};$

б)  $\frac{p^2 + 2}{p^4 + p^2 + 1}.$

11.19. Решить дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \frac{e^{-t}}{(t+1)^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

11.20. Операционным методом решить задачу Коши

- а)  $\ddot{x} + 4x = \sin t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0;$   
 б)  $\ddot{x} + \dot{x} + x = t^2 + t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = -3;$   
 в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t > 1; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

11.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} + (6t - 13)x = 0.$$

11.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 2, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases} \quad x_0 = -1, \quad y_0 = 2.$$

### Вариант № 12

12.1. Найти все значения корня

- а)  $\sqrt[4]{-i};$  б)  $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}.$

12.2. Представить в алгебраической форме

- а)  $\cos(\pi/6 + 2i);$  б)  $\arctg\left(\frac{3+4i}{5}\right).$

12.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $\operatorname{Im}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} x \sin y.$

12.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+7n}{5^n + n^i}.$$

12.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 2 + i$  при отображении  $w = (z+1)/(z-i).$

12.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

- а)  $u = e^x \sin y + 2y, \quad f(0) = i;$   
 б)  $v = x^2 - y^2 - 2x, \quad f(0) = 1.$

12.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z^* dz,$$

где  $\Gamma$  – полуокружность  $|z| = 2$ ,  $\text{Im } z \leq 0$ .

12.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 e^z}{(z-1)(z+1)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z-1| = 1/2$ , б)  $|z+1| = 1/2$ , в)  $|z| = 2$ .

12.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5n+1) \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+i)^n}.$$

12.10. Найти первые три члена разложения функции  $\ln(1+\cos z)$  в ряд по степеням  $z$ .

12.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{2z}{z^2-4}, \quad z_0 = -1 + 3i;$

б)  $\frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}, \quad z_0 = 1.$

12.12. Для функции  $\text{ctg}(1/z) - 2z^3$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

12.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{1 - \sin z}{(z - \pi/2)^4}, \quad z = \pi/2;$

б)  $\frac{ze^z}{z^2 - 3z + 2}, \quad z = 1;$

в)  $z \exp \frac{z-1}{z+1}, \quad z = -1;$

г)  $\frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{z-2i}{4i-z^2} \sin \frac{\pi z+2}{2(z-1)}, \quad z = \infty;$

е)  $z^3 \ln \left( 1 - \frac{2i+1}{z} \right), \quad z = \infty.$

12.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z-\pi i|=4} \frac{e^z}{e^z+1} dz;$

б)  $\int_{|z|=1} [iz \cos(1/z) - e^{i/z}] dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2};$

г)  $\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz, \quad t > 0;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{6} \sin t - 5} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{2} + \cos t)^2} dt.$





13.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1.$$

13.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+i)^2}.$$

13.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 3 + 2i$  при отображении  $w = (z+1)/(z-1)$ .

13.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = e^{-y} \cos x, \quad f(0) = 1 + i;$

б)  $v = y - 2xy, \quad f(0) = 0.$

13.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (z^*)^2 dz,$$

где  $\Gamma$  – окружность единичного радиуса.

13.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 e^z}{z^2 + 1} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - i| = 1$ , б)  $|z + i| = 1$ , в)  $|z| = 3$ .

13.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

13.10. Найти первые три члена разложения функции  $\exp(\cos z)$  в ряд по степеням  $z$ .

13.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{2z}{z^2 - 4}, \quad z_0 = 3 - 2i;$

б)  $\frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \sin \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}, \quad z_0 = 1.$

13.12. Для функции  $1/\sin z$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

13.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{1 - \cos z}{\sin^2 z}, z = 0;$

б)  $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}, z = 2;$

в)  $\frac{1}{z-2} \exp \frac{z}{z-2}, z = 2;$

г)  $\frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}, z = 0;$

д)  $\frac{z}{\pi z^2 - 2} \sin \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}, z = \infty;$

е)  $(iz + 2) \operatorname{sh}(1/z), z = \infty.$

13.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=8} \frac{1}{\sin z} dz;$

б)  $\int_{|z|=1} z^n e^{2/z} dz;$

в)  $\int_0^{\infty} \left( \frac{x}{x^2 + 1} \right)^2 dx;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{35} \sin t - 6} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + \cos t)^2} dt.$

13.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z = 1\}, w = z/(z - 1 + i);$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}, w = ie^{iz};$

в)  $E : \{1 < |z| < 3, \operatorname{Im} z > 0\}, w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$

13.16. Конформно отобразить область  $D : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

13.17. Найти изображение указанных функций

а)  $e^{-4t} \sin 3t \cos 2t;$

б)  $\frac{1}{t} \sin t.$

13.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)};$

б)  $\frac{p^2+14}{(p^2+4)(p^2+9)}.$

13.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \frac{te^{-t}}{t+1}.$$

13.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} - \dot{x} = te^t, x_0 = \dot{x}_0 = 0;$

б)  $\ddot{x} - 9x = \sin t - \cos t, x_0 = -3, \dot{x}_0 = 2;$

в)  $\ddot{x} - \dot{x} = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t \geq 1; \end{cases} x_0 = \dot{x}_0 = 0.$



14.10. Найти первые три члена разложения функции  $\exp(z \cos z)$  в ряд по степеням  $z$ .

14.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 2 - 3i;$

б)  $\frac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \cos \frac{1}{z-2}, \quad z_0 = 2.$

14.12. Для функции  $\sin(\pi/(z+1))$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

14.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1}, \quad z = 0;$

б)  $\frac{e^{z^2}}{z(z-2i)^2}, \quad z = 2i;$

в)  $z \sin \frac{1}{z-1}, \quad z = 1;$

г)  $\frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{z-2}{(z-i)(z-1)} e^{z/(z-3)},$   
 $z = \infty;$

е)  $ze^{1/z} \cos \frac{2-i}{z},$   
 $z = \infty.$

14.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz;$

б)  $\int_{|z|=2} z \exp \frac{2}{z+1} dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx;$

г)  $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\operatorname{ch} zt}{(z+1)(z+2)} dz, \quad t > 0;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3} \sin t - 2} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{3} + \cos t)^2} dt.$

14.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = \pi/2\}, \quad w = e^{2z};$

б)  $E : \{|z-i| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = 1/z;$

в)  $E : \{|z| < 1, 0 < \arg z < \pi/4\}, \quad w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$

14.16. Конформно отобразить область  $D : \{a < \operatorname{Re} z < a+h\}$  на область  $D^* : \{0 < \operatorname{Re} w < 1\}$  при  $h > 0$ .

14.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\cos^2 t;$

б)  $t + \frac{1}{2} e^t.$

14.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а) } \frac{p+1}{p^3-5p^2+4p}; \quad \text{б) } \frac{p^5}{(p^6-1)}.$$

14.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - x = \frac{\text{sh } t}{\text{ch } 2t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

14.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\begin{aligned} \text{а) } \ddot{x} - \dot{x} &= te^t, & x_0 &= 1, & \dot{x}_0 &= 0; \\ \text{б) } \ddot{x} - x &= \cos 3t, & x_0 &= 0, & \dot{x}_0 &= 1; \\ \text{в) } \ddot{x} + \dot{x} &= \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2; \\ 2-t, & 2 \leq t < 4; \\ 0, & t \geq 4; \end{cases} & x_0 &= \dot{x}_0 = 0. \end{aligned}$$

14.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (1+t)\dot{x} + 2(1-t)x = 0.$$

14.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

### Вариант № 15

15.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[4]{i}; \quad \text{б) } \sqrt{2-2i}.$$

15.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \text{ch}(1 - \pi i); \quad \text{б) } \text{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3} + 8i}{7}\right).$$

15.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

15.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{arctg} \frac{n+3}{n^3+5i}.$$

15.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1 + i$  при отображении  $w = 1/z$ .

15.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y, \quad f(1) = 1;$

б)  $v = e^{-y} \cos x + x, \quad f(0) = i.$

15.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z dz,$$

где  $\Gamma$  – отрезок, соединяющий точки  $z_1 = 1, z_2 = i$ .

15.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\operatorname{ch} z}{z(z - i\pi)^2} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1$ , б)  $|z - 3i| = 1$ , в)  $|z| = 4$ .

15.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1 + i)^n}{5^n(1 + in)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n + 1)}{(z + 1 + i)^n}.$$

15.10. Найти первые три члена разложения функции  $\sqrt{\cos z}$  в ряд по степеням  $z$ .

15.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z + 1}{z(z - 1)}, \quad z_0 = -2 + i;$

б)  $\frac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \exp \frac{z}{z - 5}, \quad z_0 = 5.$

15.12. Для функции  $-\exp(-1/z^2)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

15.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{\cos z - 1}{z \sin z}, \quad z = 0;$

б)  $\frac{\exp \pi z}{(z - i)^2}, \quad z = i;$

в)  $(z + 1)^2 \sin \frac{1}{(z + 1)^2}, \quad z = -1;$

г)  $\frac{\sin z^2 - z^2}{(\exp z^3 - 1 - z^3)z}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{4z + 24}{32z^2 + 4z - 1} \cos \frac{z}{z - 5},$   
 $z = \infty;$

е)  $(z + 1)^2 \exp \frac{2 - i}{z},$   
 $z = \infty.$

15.14. Вычислить интегралы

а) 
$$\int_{|z-i|=1} \frac{\exp z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz;$$

в) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx;$$

д) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{15 \sin t - 4}} dt;$$

б) 
$$\int_{|z-1|=1/2} z \sin \frac{z}{z-1} dz;$$

г) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx;$$

е) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{13} + 2\sqrt{3} \cos t)^2} dt.$$

15.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Re} z = 1\}, \quad w = z/(z+1);$

б)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sin z;$

в)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \exp(iz).$

15.16. Конформно отобразить область

$$D : \left\{ |z| < 1, z \notin \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right\}$$

на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

15.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\sin^4 t;$  б)  $t \operatorname{ch} at \cos at.$

15.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{e^{-p}}{p^2} + 6 \frac{e^{-3p}}{p^4};$  б)  $\frac{1}{(p^2 + 1)^2 (p^2 - 4)}.$

15.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \frac{\exp(-t)}{1+t^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

15.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + x = 2 \sin t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = -1;$

б)  $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = -2(t+1), \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 1;$

в)  $\ddot{x} + \dot{x} = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2; \\ 2-t, & 2 \leq t < 4; \\ 0, & t \geq 4; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

15.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (1+t)\dot{x} + 2(1-t)x = 0.$$





16.10. Найти первые три члена разложения функции  $\exp(\sin z)$  в ряд по степеням  $z$ .

16.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

- а)  $\frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = 2 - i;$   
 б)  $\frac{z+4}{z^2 + z^3 - z^4}, \quad z_0 = 0;$   
 в)  $\cos \frac{3z}{z-i}, \quad z_0 = i.$

16.12. Для функции

$$\frac{1}{(z+i)^3} \sin \frac{1}{z}$$

найти изолированные особые точки и определить их тип.

16.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

- а)  $\frac{z}{1 - \cos z}, \quad z = 0;$   
 б)  $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}, \quad z = 1;$   
 в)  $z^2 \exp \frac{1}{z-1}, \quad z = 1;$   
 г)  $\frac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}, \quad z = 0;$   
 д)  $\frac{(13z + 338) \cos^2[-z/(z-3)]}{169 + 13z - 2z^2},$   
 $z = \infty;$   
 е)  $(z - 3i + 1) \operatorname{sh} \frac{\pi i + 2}{z},$   
 $z = \infty.$

16.14. Вычислить интегралы

- а)  $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz;$   
 б)  $\int_{|z|=3/4} \frac{1}{(z^8 + 1/2)^2(z-i)} dz;$   
 в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 25} dx;$   
 г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2 - 4x + 5} dx;$   
 д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{6 - 4\sqrt{2} \sin t} dt;$   
 е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + 2 \cos t)^2} dt.$

16.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

- а)  $E : \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \frac{z+1/z}{2};$   
 б)  $E : \{|z| = 1\}, \quad w = (i+z)/(i-z);$   
 в)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \cos z.$

16.16. Конформно отобразить область

$$D : \{|z-1| > 1, |z+1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$$



17.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = y + x/(x^2 + y^2), \quad f(1) = 1;$

б)  $v = 3x^2y - y^3, \quad f(0) = 0.$

17.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (2 \operatorname{Re} z - 3i \operatorname{Im} z) dz,$$

где  $\Gamma$  – полуокружность  $|z| = 2, \operatorname{Im} z < 0$ .

17.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\exp z}{z^2(z-2)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1/2$ , б)  $|z| = 3$ , в)  $|z - 2| = 1$ .

17.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

17.10. Найти первые три члена разложения функции  $f(z) = \exp(\cos(z+1))$  в ряд по степеням  $z+1$ .

17.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = -2 - 3i;$

б)  $\frac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}, \quad z_0 = 0;$

в)  $\sin \frac{3z-i}{3z+i}, \quad z_0 = -i/3.$

17.12. Для функции

$$\frac{1}{(z-i)^2} \exp \frac{1}{z}$$

найти изолированные особые точки и определить их тип.

17.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2}, \quad z = 0;$

б)  $\frac{1}{z^3} \cos(z-1), \quad z = 0;$

в)  $(z-1)^2 \exp \frac{1}{z+1}, \quad z = -1;$

г)  $\frac{\operatorname{sh} 4z - 6z}{e^z - 1 - z}, \quad z = 0;$

д)  $-\frac{1}{z-2} \cos^2 \left( \frac{\pi z^2 + 2z}{z^2 - 2} \right), \quad z = \infty;$

е)  $z^3 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{z}, \quad z = \infty.$

17.14. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{|z|=1} \operatorname{tg} \pi z \, dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^2-1)};$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$$

$$\text{г) } \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{2z}}{z^2 - 1} dz;$$

$$\text{д) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{8 - 2\sqrt{5} \sin t} dt;$$

$$\text{е) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{10} + 3 \cos t)^2} dt.$$

17.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

$$\text{а) } E : \{\operatorname{Re} z = \pi/2\}, \quad w = \sin z;$$

$$\text{б) } E : \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = i(1-z)/(1+z);$$

$$\text{в) } E : \{0 < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < a\}, \quad w = z^2, \quad a > 0.$$

17.16. Конформно отобразить область

$$D : \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0 \quad z \notin [i/2, i]\}$$

на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

17.17. Найти изображение указанных функций

$$\text{а) } \sin^2 t;$$

$$\text{б) } \frac{1}{t} e^{-at} \sin bt.$$

17.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а) } -\frac{1}{p^2 - 1} e^{-p};$$

$$\text{б) } \frac{3p^2}{(p^2 - 1)^2}.$$

17.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

17.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\text{а) } \ddot{x} + x = t^2 + 2t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = -2;$$

$$\text{б) } \ddot{x} + x = te^t + 4 \sin t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0;$$

$$\text{в) } \ddot{x} + 2\dot{x} + x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ -1, & 1 \leq t < 2; \\ 0, & 2 \leq t; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

17.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - \dot{x} = 0.$$



18.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

$$\text{а) } \frac{7z - 196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2}, \quad z_0 = 3 - i;$$

$$\text{б) } \frac{4z + 64}{32z^2 + 4z^3 - z^4}, \quad z_0 = 0;$$

$$\text{в) } z \sin \frac{z}{z-1}, \quad z_0 = 1.$$

18.12. Для функции  $1/[(z + \pi/2) \cos z]$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

18.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

$$\text{а) } \frac{\sin(z-1)}{z-1} \cos(z-1), \quad z=1; \quad \text{б) } \frac{1}{(z^2+1)^2} e^{iz}, \quad z=i;$$

$$\text{в) } z \cos \frac{1}{z-1}, \quad z=1; \quad \text{г) } \frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}, \quad z=0;$$

$$\text{д) } \frac{9z+16}{81+9z-2z^2} \sin \frac{\pi z}{2(z-i)}, \quad z=\infty; \quad \text{е) } (z+1)^3 \operatorname{sh}(1/z), \quad z=\infty.$$

18.14. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z \, dz;$$

$$\text{б) } \int_{|z-3i|=4} \frac{1}{e^z - 1} dz;$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$$

$$\text{г) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3z}{9 + x^2} dz;$$

$$\text{д) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - 2\sqrt{3} \sin t} dt;$$

$$\text{е) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} \cos t)^2} dt.$$

18.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

$$\text{а) } E : \{|z| = R\}, \quad w = z - 1/z;$$

$$\text{б) } E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}, \quad w = \cos z;$$

$$\text{в) } E : \{|z-1| > 1, |z+i| > 1\}, \quad w = 1/z.$$

18.16. Конформно отобразить область

$$D : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$$

на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

18.17. Найти изображение указанных функций

$$\text{а) } \cos^3 t;$$

$$\text{б) } \frac{1}{t} \sin 7t \sin 3t.$$

18.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{p}{p^2 - 4} e^{-2p}$ ;                      б)  $\frac{1}{p^4 + 5p^2 + 6}$ .

18.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \frac{e^{-2t}}{(1 + 2t)^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

18.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 7e^{2t}, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 4;$

б)  $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 4, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \ddot{x}_0 = -2;$

в)  $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t \geq 1; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

18.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - 4(t + 1)\dot{x} + (4t + 8)x = 0.$$

18.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 3, \\ \dot{y} = x + 2, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$

### Вариант № 19

19.1. Найти все значения корня

а)  $\sqrt{-i/4}$ ;                      б)  $\sqrt[4]{-128 - 128i\sqrt{3}}$ .

19.2. Представить в алгебраической форме

а)  $\operatorname{ch}(2 - \pi i/6)$ ;                      б)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{4 + 3i}{5}\right)$ .

19.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\operatorname{Im}(\operatorname{tg} z) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{sh} 2y}.$$

19.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^5 + i \ln^4 n}.$$

19.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 2i$  при отображении  $w = \ln(z + 2)$ .

19.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

- а)  $u = -\frac{4}{(x+1)^2 + y^2}, \quad f(0) = -4;$   
 б)  $v = e^x(x \cos y - y \sin y), \quad f(0) = 1.$

19.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \operatorname{Im} z^3 dz,$$

где  $\Gamma$  – отрезок прямой  $z_1 = 0, z_2 = 2 + 2i$ .

19.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z(z^2 + 2)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1/2$ , б)  $|z + i| = 1/2$ , в)  $|z| = 4$ .

19.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z+1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{4}\right)^n.$$

19.10. Найти первые три члена разложения функции  $1/(2 + \sin z)$  в ряд по степеням  $z$ .

19.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

- а)  $\frac{z+3}{z^2+1}, \quad z_0 = -2 - 2i;$   
 б)  $\frac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}, \quad z_0 = 0;$   
 в)  $z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}, \quad z_0 = 0.$

19.12. Для функции  $\operatorname{tg}(1/z)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

19.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

- а)  $\frac{1 - e^z}{z^2 - 2z}, \quad z = 0;$       б)  $\frac{\cos \pi z}{(z-1)^3}, \quad z = 1;$   
 в)  $(z+1) \exp(2/z), \quad z = 0;$       г)  $\frac{\sin z^3 - 2z^3}{\exp(z^2) - 1 - z^2}, \quad z = 0;$   
 д)  $\frac{z+3}{z^2-1} \exp \frac{1}{z^2+1}, \quad z = \infty;$       е)  $z^2 \operatorname{ch}^2(\pi/z), \quad z = \infty.$



19.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4 + 1} dz;$

б)  $\int_{|z|=1/2} (z-1)^2 \cos(1/z) dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx;$

г)  $\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{zt}}{z^2 - 1} dz, t < 0;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - \sqrt{27} \sin t} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cos t)^2} dt.$

19.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{1 < |z| < 2\}, w = (z+1)/(z+2);$

б)  $E : \{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1\}, w = 1/z;$

в)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}, w = \exp z.$

19.16. Конформно отобразить область  $D : \{\operatorname{Re} z < 1\}$  на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

19.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t);$

б)  $\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau.$

19.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{1}{p^2(p^2 - 1)};$

б)  $\frac{p^2}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$

19.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{1+t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

19.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + x = t \cos 2t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0;$

б)  $2\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0;$

в)  $\ddot{x} - 4x = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1; \\ 2-t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

19.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} + 2x = 0.$$

19.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x + y + 1, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$



20.12. Для функции  $\operatorname{ctg}(1/z)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

20.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

- а)  $\frac{\sin 2z - 2z}{\operatorname{sh} 3z - 3z}$ ,  $z = 0$ ;      б)  $\frac{\cos z}{(z - 2i)(z + i)^2}$ ,  $z = 0$ ;  
 в)  $\frac{1}{z^3} \ln(1 + z)$ ,  $z = 0$ ;      г)  $\frac{\sin 4z - 4z}{\exp(z^2) - 1 - z^2}$ ,  $z = 0$ ;  
 д)  $\frac{2z + 16}{8z^2 + 2z - 1} \ln\left(\frac{1 + z}{2z + i}\right)$ ,  $z = \infty$ ;      е)  $(z - 2i) \ln(1 - \pi/2)$ ,  
 $z = \infty$ .

20.14. Вычислить интегралы

- а)  $\int_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz$ ;      б)  $\int_{|z|=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh}(9z/4)} dz$ ;  
 в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$ ;      г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ ;  
 д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \sqrt{5} \sin t} dt$ ;      е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{7} + \cos t} dt$ .

20.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

- а)  $E : \{1 : |z| < 2\}$ ,  $w = 3/(z - 1)$ ;  
 б)  $E : \{\operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $w = (z - 3 + i)/(z + 1 + i)$ ;  
 в)  $E : \{\operatorname{Im} z = \pi\}$ ,  $w = \operatorname{cth} z$ .

20.16. Конформно отобразить область

$$D : \left\{ 0 < \arg(z - 1 - i) < \frac{\pi}{2} \right\}$$

на область  $D^* : \{\operatorname{Im} w > 0\}$ .

20.17. Найти изображение указанных функций

- а)  $t^3 e^{-t}$ ;      б)  $(1 + t) \sin 2t$ .

20.18. Найти оригинал по заданному изображению

- а)  $\frac{p}{(p - 2)(p - 1)}$ ;      б)  $\frac{p + 2}{p^2 + 2ap + b}$ .

20.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

20.20. Операционным методом решить задачу Коши

- а)  $\ddot{x} + 4x = \sin 2t, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1;$   
 б)  $\ddot{x} + 2\dot{x} = 2 + e^t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 2;$   
 в)  $\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2; \\ 2, & 2 \leq t; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

20.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - \dot{x} = 0.$$

20.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$

### Вариант № 21

21.1. Найти все значения корня

- а)  $\sqrt{2 - 2i};$  б)  $\sqrt[4]{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{32}}.$

21.2. Представить в алгебраической форме

- а)  $\sin(\pi/2 - 5i);$  б)  $\arctg\left(\frac{3\sqrt{3} - 8i}{7}\right).$

21.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $\operatorname{sh}^2 z = (\operatorname{ch} 2z - 1)/2.$

21.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - i \cos^2(6n)}.$$

21.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = i$  при отображении  $w = (z + 1)^{-2}.$

21.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

- а)  $u = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \quad f(0) = 0;$   
 б)  $v = x^2 - y^2 - 4xy - 2x - y, \quad f(0) = -2.$

21.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z^* z^{-1} dz,$$

где  $\Gamma$  – граница области  $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}.$

21.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin 3x}{z^2(z - \pi)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 3| = 1$ , б)  $|z| = 1$ , в)  $|z| = 6$ .

21.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n (2 - n^2) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{3^n}.$$

21.10. Найти первые три члена разложения функции  $\operatorname{tg} z$  в ряд по степеням  $z + 1$ .21.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$ 

а)  $\frac{z}{z^2 + 1}, \quad z_0 = -3 - 2i;$

б)  $\frac{z - 2}{2z^8 + z^2 - z}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \sin \frac{z}{z - 3}, \quad z_0 = 3.$

21.12. Для функции  $(z - \pi)^{-1} \operatorname{ctg} \pi z$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

21.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{z + 1}{\operatorname{sh}(z + 1) + \sin(z + 1)}, \quad z = -1;$  б)  $\frac{2z + 1}{z^2 + 1}, \quad z = -i;$

в)  $(z + 1) \exp \frac{1}{z - i}, \quad z = i;$  г)  $\frac{\operatorname{ch} 3z - 1}{\sin z - z}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{12z + 4}{121 + 11z - 2z^2} e^{z/(z-4)}, \quad z = \infty;$  е)  $z^5 \ln(1 + 1/z), \quad z = \infty.$

21.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=3} \frac{\exp(1/z) + 1}{z} dz;$

б)  $\int_{|z-1|=2} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4) \sin \pi/3} dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 4)^2} dx;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\sqrt{2} \sin t} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos t)^2} dt.$

21.15. Найти образы указанных множеств при заданных отоб-



22.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! + i4^n}.$$

22.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = -2i$  при отображении  $w = \exp(3z)$ .

22.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = (e^x + e^{-x}) \sin y, \quad f(0) = 2i;$

б)  $v = 2x^2 - 2y^2 - 2xy - x + 2y + 1, \quad f(0) = 2 + i.$

22.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} |z| z^* dz,$$

где  $\Gamma: \{|z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ .

22.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z + 2}{4z^2 + \pi z} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z + 1| = 1/2$ , б)  $|z| = 1/2$ , в)  $|z| = 6$ .

22.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{3^n} (z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (z-1)^n.$$

22.10. Найти первые три члена разложения функции  $\operatorname{th} z$  в ряд по степеням  $z + 1$ .

22.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{4z + 8}{(z-1)(z+3)}, \quad z_0 = 1 - 3i;$

б)  $\frac{2z - 16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}, \quad z_0 = 0;$

в)  $\exp\left(\frac{z}{z-3}\right), \quad z_0 = 3.$

22.12. Для функции  $(\sin \pi z)/(z+1)^4$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

22.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 2z}, \quad z = 0;$

б)  $\frac{z^2 + \sin z + 2}{z^2 + \pi z}, \quad z = -\pi;$

в)  $\frac{1}{z} \exp\left(\frac{1}{z} + 1\right), \quad z = 0;$

г)  $\frac{e^{z^4} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{2z + 1}{z^2 + 1} \operatorname{sh}\left(\frac{2}{z - 3}\right),$   
 $z = \infty;$

е)  $(z + i) \operatorname{sh}(e/z) \exp(-1/z),$   
 $z = \infty.$

22.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z-1|=2} \frac{z(z + \pi)}{\sin 2z} dz;$

б)  $\int_{|z|=2} \sin(i/z^2) dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2)(x^2 + 3)} dx;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7 + 4\sqrt{3} \sin t} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2} \cos t)^2} dt.$

22.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, \quad w = \operatorname{cth} z;$

б)  $E : \{\operatorname{Re} z = C, \operatorname{Im} z = C\}, \quad w = e^z;$

в)  $E : \{0 < \arg z < \alpha\}, \quad w = \ln z, \quad \alpha \leq 2\pi.$

22.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z| < 1\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(1) = 1, w(-1) = -1, w(i) = (3i - 4)/5.$

22.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\operatorname{sh}^3 t;$

б)  $\int_0^t \tau e^{t-\tau} \sin(t - \tau) d\tau.$

22.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{2pe^{-p}}{p^2 - 4};$

б)  $\frac{p}{(p^2 + 4)^2}.$

22.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 4x = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

22.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $2\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 3e^t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0;$

б)  $\ddot{\ddot{x}} + 6\ddot{x} + 11\dot{x} + 6x = 1 + t + t^2, \quad x_0 = \dot{x}_0 = \ddot{x}_0 = 0;$

в)  $\ddot{x} + 9x = f(x), \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 1.$





23.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+i}{z+1}\right)^n.$$

23.10. Найти первые три члена разложения функции  $\exp(z + \cos z)$  в ряд по степеням  $z$ .

23.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 1 + 2i;$

б)  $\frac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}, \quad z_0 = 0;$

в)  $\sin \frac{z^4-4z}{(z-2)^2}, \quad z_0 = 2.$

23.12. Для функции  $(\sin z)/(\exp z - 1)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

23.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{2z} - \cos 9z}{\operatorname{sh} \pi iz}, \quad z = 0;$

б)  $\frac{\operatorname{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}, \quad z = 1;$

в)  $z \sin \frac{i}{z-2}, \quad z = 2;$

г)  $\frac{e^{3z} - 1 - \sin 3z}{z^2 \operatorname{sh}(3\pi z)}, \quad z = 0;$

д)  $\frac{2z+1}{z(z-1)} \sin\left(\frac{\pi z}{6z-1}\right),$   
 $z = \infty;$

е)  $(z-2i) \ln(1 - \pi/3z),$   
 $z = \infty.$

23.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz;$

б)  $\int_{|z-3|=2} z \cos \frac{1}{z-4} dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx;$

г)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2z}{(x^2+1/4)^2} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \sqrt{7} \sin t} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \sqrt{7} \cos t} dt.$

23.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}, \quad w = \operatorname{tg} z;$

б)  $E : \{\operatorname{Im} z = k \operatorname{Re} z + b\}, \quad w = e^z;$

в)  $E : \{|z| < 1, 0 < \arg z < \alpha\}, \quad w = \ln z, \quad \alpha \leq 2\pi.$

23.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z| < 1\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(i) = i$ ,  $w(i/2) = 4i/5$ .

23.17. Найти изображение указанных функций

$$\text{а) } \operatorname{sh}^4 t; \quad \text{б) } \int_0^t (t - \tau)^2 \operatorname{ch} \tau d\tau.$$

23.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а) } \frac{4p - 1}{(p - 1)^2(p - 5)}; \quad \text{б) } \frac{p^3}{(p^2 + 3)(p^2 + 4)}.$$

23.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = \frac{e^t}{1 + e^t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

23.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\begin{aligned} \text{а) } \ddot{x} + x &= \cos t, & x_0 &= 2, & \dot{x}_0 &= 0; \\ \text{б) } \ddot{x} + \dot{x} - 2x &= e^t, & x_0 &= -1, & \dot{x}_0 &= 0; \\ \text{в) } \ddot{x} + 4x &= \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1; \\ 5e^{1-t}, & 1 \leq t; \end{cases} & x_0 &= \dot{x}_0 = 0. \end{aligned}$$

23.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} + (2t - 1)\dot{x} + (t - 1)x = 0.$$

23.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3; \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases} \quad x_0 = -1, \quad y_0 = 0.$$

### Вариант № 24

24.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{2}}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{27}.$$

24.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{ch}(\pi i/4 - 2); \quad \text{б) } 1^{2i}.$$

24.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\operatorname{ch} z_1 + \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}.$$

24.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1+2ni} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

24.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1 - i/2$  при отображении  $w = \exp(3z)$ .

24.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = 2x^2 - 2y^2 + 2xy + x - 2y + 1, \quad f(1) = 4 + 4i;$

б)  $v = e^y (\cos x - \sin x), \quad f(0) = 1 + i.$

24.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z \operatorname{Re} z^2 dz,$$

где  $\Gamma: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ .

24.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{2}{z^2(z+2i)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 1 - i| = 6$ , б)  $|z| = 1/2$ , в)  $|z + 3i/2| = 1$ .

24.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{3^n(i+n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z+i)^n} (n+i).$$

24.10. Найти первые три члена разложения функции  $\sec z$  в ряд по степеням  $z$ .

24.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -3 - 2i;$

б)  $\frac{5z-100}{z^4-5z^3-50z^2}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \exp\left(\frac{\pi}{z-a}\right)^2, \quad z_0 = a.$

24.12. Для функции  $[\exp(1/z)]/(z^4 - 1)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

24.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

- а)  $\frac{\exp 6z - \cos 8z}{\operatorname{sh} 4z}$ ,  $z = 0$ ;      б)  $\frac{\cos(\pi z/3)}{(z-3)^2(z-5)}$ ,  $z = 3$ ;  
 в)  $\frac{1}{z^2}(z^2 e^{1/z^2} - 1)$ ,  $z = 0$ ;      г)  $\frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z}$ ,  $z = 0$ ;  
 д)  $\frac{2z-1}{(z+1)^2} \cos^2 \pi z - 23z + 3i$ ,  
 $z = \infty$ ;      е)  $(z+2i) \cos^2 \frac{z\pi-1}{2z}$ ,  
 $z = \infty$ .

24.14. Вычислить интегралы

- а)  $\int_{|z-2|=2} z \operatorname{ch} \frac{3}{z-2} dz$ ;      б)  $\int_{|z-i|=2} \frac{\pi i}{\exp(\pi z/2) - i} dz$ ;  
 в)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx$ ;      г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx$ ;  
 д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+2\sqrt{6} \sin t} dt$ ;      е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3} \cos t)^2} dt$ .

24.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

- а)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ ,  $w = \operatorname{tg} z$ ;  
 б)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ ,  $w = e^z$ ;  
 в)  $E : \{\operatorname{Re} z = C, \operatorname{Im} z = C\}$ ,  $w = \cos z$ .

24.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z| < 1\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(1/2) = 1/2$ ,  $\arg w(1/2) = \pi/2$ .

24.17. Найти изображение указанных функций

- а)  $e^t \operatorname{sh} t$ ;      б)  $t^2 \cos t$ .

24.18. Найти оригинал по заданному изображению

- а)  $\frac{e^{-p/3}}{p(p^2-1)}$ ;      б)  $\frac{p-1}{(p^2+2)(p^2+3)}$ .

24.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = \frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

24.20. Операционным методом решить задачу Коши

- а)  $\ddot{x} - x = te^t$ ,  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ ;  
 б)  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos(t/2)$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ;  
 в)  $\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t < 1; \\ 4-2t, & 1 \leq t < 2; \\ 0, & 2 \leq t; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

24.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (2t + 8)\dot{x} + (t + 8)x = 0.$$

24.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + 3, \\ \dot{y} = x - y + 1, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

### Вариант № 25

25.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[4]{\frac{1}{256}}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}.$$

25.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{Ln}(-1 - i); \quad \text{б) } i^{3i}.$$

25.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$\operatorname{ch} z_1 - \operatorname{ch} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{sh} \frac{z_1 - z_2}{2}.$$

25.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - i) \ln 2n}.$$

25.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = -5 + i$  при отображении  $w = z/(z + 4i)$ .

25.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

$$\begin{aligned} \text{а) } u &= 9x^2y - 3y^3 + x + 1, & f(1) &= 2 + 2i; \\ \text{б) } v &= e^y \cos x + y, & f(\pi/2) &= 1. \end{aligned}$$

25.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} (\exp |z|^2) \operatorname{Im} z \, dz,$$

где  $\Gamma$  – отрезок прямой  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 0$ .

25.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{2 + \sin z}{z^2(z + 2i)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z| = 1$ , б)  $|z + 2i| = 1$ , в)  $|z| = 3$ .

25.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(3n+i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i-3^n}{(z-2i)^n}.$$

25.10. Найти первые три члена разложения функции  $\ln(\cos z)$  в ряд по степеням  $z$ .

25.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z-z_0$

а)  $\frac{z-1}{z(z+1)}, \quad z_0 = 1+3i;$

б)  $\frac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \sin \pi \frac{z+2}{z+1}, \quad z_0 = -1.$

25.12. Для функции  $(\cos \pi z)/[(4z^2-1)(z^2+1)]$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

25.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z \operatorname{sh}(3\pi z)}, \quad z=0;$

б)  $\frac{\operatorname{sh}(\pi iz)}{(z+2)^2 z}, \quad z=-2;$

в)  $z \operatorname{ch} \frac{1}{z+2}, \quad z=-2;$

г)  $\frac{\operatorname{sh} 2z-2z}{\cos z-1+z^2/2}, \quad z=0;$

д)  $\frac{z-1}{z^2+1} \operatorname{sh} \frac{z}{z-3}, \quad z=\infty;$

е)  $(z+1)^2 \operatorname{sh}(e/t), \quad z=\infty.$

25.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z-\pi|=2}^{\infty} \frac{\cos^2 z}{z \cos z} dz;$

б)  $\int_{|z|=1}^{\infty} \frac{ze^{1/z}-z-1}{z^3} dz;$

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+9)(x^2+4)^2} dx;$

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx;$

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3 \sin t} dt;$

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{6}+\cos t)^2} dt.$

25.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}, \quad w = \cos z;$

б)  $E: \{\operatorname{Re} z = 1\}, \quad w = (z-3+i)/(z+1+i);$

в)  $E: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \operatorname{tg} z.$

25.16. Конформно отобразить область  $D: \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D^*: \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(0) = i, w(-1) = 1, w(\infty) = -1.$

25.17. Найти изображение указанных функций

а)  $te^{-t} \operatorname{sh} t$ ;

б)  $\int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau \, d\tau$ .

25.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{2p+3}{p^3+p^2}$ ;

б)  $\frac{p^2 e^{-2p}}{p^3+1}$ .

25.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$2\ddot{x} - \dot{x} = \frac{e^t}{(1+e^{t/2})^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

25.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + \dot{x} = e^t, \quad x_0 = \ddot{x} = 0, \quad \dot{x}_0 = 2$ ;

б)  $\ddot{x} + 4\dot{x} = 10 \cos 3t + 3 \sin t, \quad x_0 = -2, \quad \dot{x}_0 = 3$ ;

в)  $\ddot{x} + 9x = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1; \\ 2-t, & 1 \leq t < 2; \\ 0, & 2 \leq t; \end{cases} \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

25.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} + (2t+1)\dot{x} + (t+1) = 0.$$

25.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y + 2, \\ \dot{y} = x + 2y, \end{cases} \quad x_0 = -1, \quad y_0 = 1.$$

### Вариант № 26

26.1. Найти все значения корня

а)  $\sqrt[3]{-\frac{1}{16} + i\frac{\sqrt{3}}{16}}$ ;

б)  $\sqrt[3]{-125}$ .

26.2. Представить в алгебраической форме

а)  $\operatorname{Ln} 6$ ;

б)  $(-1)^{4i}$ .

26.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $\cos^2 z = (1 + \cos 2z)/2$ .

26.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-i) \ln n}.$$



26.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$  при отображении  $w = 1/z^2$ .

26.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = e^y(\cos x + \sin x)$ ,  $f(0) = 1 + i$ ;

б)  $v = 3x^2 - 9xy^2 - y + 2$ ,  $f(i) = 1 + i$ .

26.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} |z|^2 dz,$$

где  $\Gamma: \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ .

26.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z + 1}{z(z-1)} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 1/2| = 1$ , б)  $|z| = 1/2$ , в)  $|z - 1| = 1/2$ .

26.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(z-i)^n}.$$

26.10. Найти первые три члена разложения функции  $\exp(z + \sin z)$  в ряд по степеням  $z$ .

26.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z-1}{z(z+1)}$ ,  $z_0 = -1 + 2i$ ;

б)  $\frac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$ ,  $z_0 = 0$ ;

в)  $z^2 \sin \frac{z+3}{z-1}$ ,  $z_0 = 1$ .

26.12. Для функции  $(\sin^3 z)/[z^2(1 - \cos z)]$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

26.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{z}{z+2} \sin(z-3i)$ ,  $z = 3i$ ;      б)  $\frac{\operatorname{sh}(\pi iz)}{(z-2-i)^2(z-1)}$ ,  $z = 0$ ;

в)  $z^2 \exp \frac{4}{(z-i)^3}$ ,  $z = i$ ;      г)  $\frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z \sin(5\pi z)}$ ,  $z = 0$ ;

д)  $\frac{2z}{z^2+4} \exp \frac{-i}{3z+i}$ ,  $z = \infty$ ;      е)  $2z \sin^2 \frac{\pi}{3z}$ ,  $z = \infty$ .

26.14. Вычислить интегралы

$$а) \int_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{(z - \pi) \sin 2z} dz;$$

$$б) \int_{|z|=1} \frac{z^2 \exp(1/z^2) - 1}{z} dz;$$

$$в) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx;$$

$$г) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 17} dx;$$

$$д) \int_0^{2\pi} \frac{1}{8 - 3\sqrt{7} \sin t} dt;$$

$$е) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2} dt.$$

26.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

$$а) E : \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}, \quad w = \operatorname{ch} z;$$

$$б) E : \{\arg z = \alpha\}, \quad w = \ln z;$$

$$в) E : \{9 < \operatorname{Re} z, 0 < \operatorname{Im} z\}, \quad w = \arcsin z.$$

26.16. Конформно отобразить область  $D : \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D^* : \{|z| < 1\}$  при условиях  $w(0) = -i$ ,  $w(2i) = i/3$ .

26.17. Найти изображение указанных функций

$$а) e^{2t} \operatorname{sh} t;$$

$$б) \int_0^t (t - \tau)^3 e^{-\tau} d\tau.$$

26.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$а) \frac{1}{p^3 - 1};$$

$$б) \frac{e^{-p/2}}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)}.$$

26.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x} = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

26.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$а) \ddot{x} + x = te^t + 4 \sin t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0;$$

$$б) \ddot{x} - \dot{x} = t^2, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 0;$$

$$в) \ddot{x} + 4x = f(t), \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

26.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - (2t + 6)\dot{x} + (t + 6)x = 0.$$

26.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y + 1, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$

## Вариант № 27

27.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[4]{\frac{1}{256}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{250} - \frac{i}{250}}.$$

27.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{Ln}(1+i); \quad \text{б) } (4-3i)^i.$$

27.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать  $\sin^2 z = (1 - \cos 2z)/2$ .

27.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2ni-3)\ln(3n+1)}.$$

27.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 3 + 2i$  при отображении  $w = \exp(2z + 1)$ .27.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$ 

$$\text{а) } u = e^{-2y}(3 \sin 2x - \cos 2x), \quad f(0) = -1 + 3i;$$

$$\text{б) } v = 2x^3 - 6xy^2 - y + 1, \quad f(1) = 3 + 3i.$$

27.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} |z| dz,$$

где  $\Gamma: \{|z| = \sqrt{2}, \pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4\}$ .

27.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z - 2| = 3$ , б)  $|z| = 4$ , в)  $|z + 2| = 3$ .

27.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^{|n|} z^n.$$

27.10. Найти первые три члена разложения функции  $e^{z(1+\sin z)}$  в ряд по степеням  $z$ .27.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$ 

$$\text{а) } \frac{z+3}{z^2-1}, \quad z_0 = 2+i;$$

$$\text{б) } \frac{3z-18}{9z+3z^2-2z^3}, \quad z_0 = 0;$$

$$\text{в) } z \cos \frac{z}{z-3}, \quad z_0 = 3.$$

27.12. Для функции  $\cos \frac{\pi}{z+2}$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

27.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

- а)  $\frac{2z-1}{z^2+4} \operatorname{sh}(z-2i)$ ,  $z=2i$ ;      б)  $\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}$ ,  $z=\pi$ ;  
 в)  $z \sin \frac{6}{z^2}$ ,  $z=0$ ;      г)  $\frac{\exp z^3 - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$ ,  $z=0$ ;  
 д)  $\frac{2z+1}{z^2-4} \sin \frac{\pi z - i}{z+i}$ ,  $z=\infty$ ;      е)  $(z+i)^2 \exp\left(\frac{2-i}{2z}\right)^2$ ,  $z=\infty$ .

27.14. Вычислить интегралы

- а)  $\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz$ ;      б)  $\int_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz$ ;  
 в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+3)^2} dx$ ;      г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3-2) \cos x/2}{(x^2+1)^2} dx$ ;  
 д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4 \sin t} dt$ ;      е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{5}+2 \cos t)^2} dt$ .

27.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

- а)  $E: \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = (1-z)/(1+z)$ ;  
 б)  $E: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \cos z$ ;  
 в)  $E: \{\operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \alpha\}$ ,  $w = e^z$ ,  $a < 2\pi$ .

27.16. Конформно отобразить область  $D: \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D^*: \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(1+i) = 0$ ,  $\arg w'(1+i) = \pi$ .

27.17. Найти изображение указанных функций

- а)  $\operatorname{ch} 2t \cos 2t$ ;      б)  $\int_0^t \tau^2 \operatorname{ch}(t-\tau) d\tau$ .

27.18. Найти оригинал по заданному изображению

- а)  $\frac{1}{(p+1)(p^2+4p+5)}$ ;      б)  $\frac{e^{-p}}{p^2-4}$ .

27.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

27.20. Операционным методом решить задачу Коши

- а)  $2\ddot{x} + 5\dot{x} = 29 \cos t$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ ;  
 б)  $2\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = e^{-2t}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 1$ ;  
 в)  $\ddot{x} - \dot{x} = f(t)$ ,  $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ .



28.10. Найти первые три члена разложения функции  $4e^{z+\exp z}$  в ряд по степеням  $z$ .

28.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z+3}{z^2-1}$ ,  $z_0 = -2 + 3i$ ;

б)  $\frac{3z-18}{18z^2+3z^3-z^4}$ ,  $z_0 = 0$ ;

в)  $z \cos \frac{z}{z-5}$ ,  $z_0 = 5$ .

28.12. Для функции  $(z-1)^{-1} \exp(z-i)^{-2}$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

28.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{z-i}-1}{z-i}$ ,  $z=i$ ;

б)  $\frac{z}{(z+2)^2(z-1)^2}$ ,  $z=1$ ;

в)  $(z+i) \cos^2\left(\frac{4}{z-2i}\right)$ ,  $z=2i$ ;

г)  $\frac{\cos z^2-1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$ ,  $z=0$ ;

д)  $\frac{z}{98+7z-z^2} \sin \frac{\pi z-1}{2z+4}$ ,  
 $z=\infty$ ;

е)  $(z-i)^2 \cos(\pi/z)$ ,  
 $z=\infty$ .

28.14. Вычислить интегралы

а)  $\int_{|z|=\pi}^{\infty} \frac{z^2+z+3}{(\pi+z) \sin z} dz$ ;

б)  $\int_{|z|=3}^{\infty} \frac{1-\sin 1/z}{z} dz$ ;

в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2(x^2+16)} dx$ ;

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \sin x}{(x^2+9)^2} dx$ ;

д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{9-4\sqrt{5} \sin t} dt$ ;

е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2} dt$ .

28.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E: \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = \pi/6\}$ ,  $w = e^z$ ;

б)  $E: \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \operatorname{arsh} z$ ;

в)  $E: \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, -h < \operatorname{Im} z < h\}$ ,  $w = \cos z$ ,  $h > 0$ .

28.16. Конформно отобразить область  $D: \{\operatorname{Im} z > 0\}$  на область  $D^*: \{\operatorname{Im} w > 0\}$  при условиях  $w(-1) = 0$ ,  $w(0) = 2$ ,  $w(1) = \infty$ .

28.17. Найти изображение указанных функций

а)  $(e^{3t} - e^{2t})/t$ ;

б)  $\int_0^t \tau^3 e^{-\tau} d\tau$ .

28.18. Найти оригинал по заданному изображению

$$\text{а) } \frac{1}{(p-2)(p^2-2p+3)}; \quad \text{б) } \frac{1-p}{p(p^2+3p+3)}.$$

28.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{\operatorname{ch} 2t}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

28.20. Операционным методом решить задачу Коши

$$\text{а) } \ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{-t}, \quad x_0 = -1, \quad \dot{x}_0 = 0;$$

$$\text{б) } \ddot{x} - x = 4 \sin t + 5 \cos 2t, \quad x_0 = -1, \quad \dot{x}_0 = -2;$$

$$\text{в) } \ddot{x} - \dot{x} = \theta(t-1)\theta(3-t), \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

28.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} + (2t+2)\dot{x} + (t+2)x = 0.$$

28.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

### Вариант № 29

29.1. Найти все значения корня

$$\text{а) } \sqrt[3]{-i/125}; \quad \text{б) } \sqrt[4]{8-8i\sqrt{3}}.$$

29.2. Представить в алгебраической форме

$$\text{а) } \operatorname{Ln}(-1-i); \quad \text{б) } (1-i)^{4i}.$$

29.3. Исходя из определения тригонометрических и гиперболических функций, доказать

$$|\operatorname{cth} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2x}}.$$

29.4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3+i}}.$$

29.5. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  в точке  $z_0 = 1 + 2i$  при отображении  $w = 1/(z+1)$ .

29.6. Найти аналитическую функцию  $f(z) = u + iv$  по известной действительной (или мнимой) части и значению  $f(z_0)$

а)  $u = x^2 - y^2 + 2xy - 2y - x - 2, \quad f(i) = -5 - i;$

б)  $v = e^{-3y}(3 \cos 3x - 2 \sin 3x), \quad f(\pi) = -2 - 3i.$

29.7. Вычислить

$$\int_{\Gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz,$$

где  $\Gamma$  – отрезок прямой  $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$ .

29.8. Вычислить

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos^2 z + 3}{2z^2 + \pi z} dz,$$

где  $\Gamma$ : а)  $|z + 3/2| = 1$ , б)  $|z| = 1/2$ , в)  $|z| = 3$ .

29.9. Найти и построить область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi n/6} (z+i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n (z+1)^n}.$$

29.10. Найти первые три члена разложения функции  $z/(2+\sin z)$  в ряд по степеням  $z$ .

29.11. Найти все лорановские разложения данной функции по степеням  $z - z_0$

а)  $\frac{z}{z^2 + 1}, \quad z_0 = 2 + i;$

б)  $\frac{9z - 162}{81z + 9z^2 - 2z^3}, \quad z_0 = 0;$

в)  $z \sin \frac{\pi z}{z-a}, \quad z_0 = a.$

29.12. Для функции  $(\sin 1/z)/(z+i)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

29.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

а)  $\frac{e^{z-i} - 1}{\sin(z-i)}, \quad z = i;$

б)  $\frac{z^3 - 1}{(z+\pi)^3 z}, \quad z = 0;$

в)  $(z-1) \operatorname{ch}^2 \frac{1}{z+2i}, \quad z = -2i;$

г)  $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z}, \quad z = 0;$

д)  $z \sin \frac{2 - \pi i}{z}, \quad z = \infty;$

е)  $\frac{2z+1}{z^2+1} \operatorname{ch} \frac{\pi z}{2z^2-1}, \quad z = \infty.$



29.14. Вычислить интегралы

а) 
$$\int_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z} dz;$$

б) 
$$\int_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz;$$

в) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - x + 1} dx;$$

г) 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx;$$

д) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sqrt{15} \sin t} dt;$$

е) 
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \sqrt{3} \cos t)^2} dt.$$

29.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

а)  $E : \{\operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \arcsin z;$

б)  $E : \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = \pi\}, \quad w = \operatorname{ch} z;$

в)  $E : \{1 < |z| < 3, z \notin [1, 3]\}, \quad w = \ln z.$

29.16. Конформно отобразить область  $D : \{|z - 1 - i| < 2\}$  на область  $D^* : \{|z| < 1\}$  при условиях  $w(i) = 0, \arg w'(i) = \pi/2$ .

29.17. Найти изображение указанных функций

а)  $\frac{1}{t} e^{-3t} \sin^2 t;$

б)  $\int_0^t (t - \tau)^2 \cos^2 \tau d\tau.$

29.18. Найти оригинал по заданному изображению

а)  $\frac{2p + 1}{(p + 1)(p^2 + 2p + 3)};$

б)  $\frac{2 - 3p}{(p - 2)(p^2 - 4p + 5)}.$

29.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 4x = \operatorname{th}^2 2t, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

29.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + 4x = 8 \sin 2t, \quad x_0 = 3, \quad \dot{x}_0 = 0;$

б)  $\ddot{x} + x = \operatorname{sh} t, \quad x_0 = 2, \quad \dot{x}_0 = 1;$

в)  $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \theta(t)\theta(1-t) - \theta(t-1)\theta(2-t),$   
 $x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

29.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - 2(t+3)\dot{x} + (t+6)x = 0.$$

29.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 1, \\ \dot{y} = -3x/2 + y, \end{cases} \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0.$$



30.12. Для функции  $1/(e^z + 1)$  найти изолированные особые точки и определить их тип.

30.13. Для данных функций найти вычеты в указанных особых точках

- а)  $\frac{z+3}{z^2+1} \sin(z+i)$ ,  $z = -i$ ;      б)  $\frac{z^3-1}{(z+1)(z-2i)^3}$ ,  $z = 2i$ ;  
 в)  $z^3 \exp(7/z^2)$ ,  $z = 0$ ;      г)  $\frac{e^{z^2}-1-z^2}{\sin z - z + z^3/6}$ ,  $z = 0$ ;  
 д)  $\frac{2z+i}{z^2+4} \sin \pi \frac{z+3}{2z}$ ,  $z = \infty$ ;      е)  $z^2 \sin \frac{2\pi+i}{z}$ ,  $z = \infty$ .

30.14. Вычислить интегралы

- а)  $\int_{|z|=2} z^3 \cos(2i/z) dz$ ;      б)  $\int_{|z|=1/4} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \operatorname{ch}(\pi iz)} dz$ ;  
 в)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$ ;      г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x/2}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$ ;  
 д)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{6 + \sqrt{35} \sin t} dt$ ;      е)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} \cos t)^2} dt$ .

30.15. Найти образы указанных множеств при заданных отображениях

- а)  $E : \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \cos z$ ;  
 б)  $E : \{|z| = 2, \operatorname{Im} z < 0\}$ ,  $w = \ln z$ ;  
 в)  $E : \{\operatorname{Re} z > 1\}$ ,  $w = (z - 3 + i)/(z + 1 + i)$ .

30.16. Конформно отобразить область  $D : \{\operatorname{Re} z > -1\}$  на область  $D^* : \{|w| < 1\}$  при условиях  $w(0) = 0$ ,  $\arg w'(0) = \pi$ .

30.17. Найти изображение указанных функций

- а)  $t^4 e^{-5t}$ ;      б)  $\int_0^t \tau^2 \cos(t - \tau) d\tau$ .

30.18. Найти оригинал по заданному изображению

- а)  $\frac{2}{p^3 - 8}$ ;      б)  $\frac{p+4}{p^2 + 4p + 5}$ .

30.19. С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \dot{x} = \frac{1}{(1 + e^t)^2}, \quad x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

30.20. Операционным методом решить задачу Коши

а)  $\ddot{x} + 2x = e^t, \quad x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 2;$

б)  $\ddot{x} + 3\dot{x} - 10x = -\sin 3t, \quad x_0 = 3, \quad \dot{x}_0 = -1;$

в)  $\ddot{x} + 4x = t\theta(t)\theta(1-t) + (2-t)\theta(t-1)\theta(2-t),$   
 $x_0 = \dot{x}_0 = 0.$

30.21. Операционным методом найти общее решение дифференциального уравнения

$$t\ddot{x} - 2(3t + 1)\dot{x} + (9t + 6)x = 0.$$

30.22. Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = 5x/2 - y + 2, \end{cases} \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

**Список литературы**

1. Анго А. *Математика для электро и радиоинженеров*. – М.: Наука, 1964. – 772 с.
2. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход*. – М.: Мир, 1976. – 311 с.
3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эстгольц Л.Э. *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости*. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
4. Багров В.Г., Бордовицын В.А. Классическая теория спина // *Изв. вузов. Физика*. – 1980. – № 2. – С. 67-76.
5. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Задачи по математической физике*. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.
6. Боярчук А.К. *Справочное пособие по высшей математике. Т. 4: Функции комплексного переменного (теория и практика)*. – М.: Изд-во УРСС, 1997. – 352 с.
7. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. *Сборник задач по математической физике*. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
8. Буслаев В.С. *Вариационное исчисление*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 288 с.
9. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
10. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
11. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
12. Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*. – М.: Наука, 1981. – 270 с.
13. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функции комплексного переменного*. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
14. Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление*. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 228 с.
15. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними*. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
16. Грищенко А.Е., Нагнибеда Н.И., Настасиев П.П. *Функции комплексного переменного. Решение задач*. – Киев: Вища школа, 1986. – 334 с.
17. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций*. – М.: Наука, 1968. – 618 с.
18. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 2*. – М.: Наука, 1980. – 366 с.

19. ДеБрейн Н.Г. *Асимптотические методы в анализе*. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1961. – 248 с.
20. Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа*. – М.: Наука, 1965. – 288 с.
21. Джеффрис Г., Свирлс Б. *Методы математической физики*. – М.: Мир, 1969 (Т. 1) – 424 с.; 1970 (Т. 2) – 352 с; 1970 (Т. 3) – 344 с.
22. Диткин В.А. Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
23. Евграфов М.А. *Аналитические функции*. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
24. Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции*. – М.: Наука, 1976. – 202 с.
25. Ефимов А.В. *Математический анализ (специальные разделы): Ч. I*. – М.: Высшая школа, 1980. – 280 с.
26. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. *Математический анализ (специальные разделы): Ч. II*. – М.: Высшая школа, 1980. – 296 с.
27. Зельдович Я.В., Яглом И.М. *Высшая математика для начинающих физиков и техников*. – М.: Наука, 1982. – 512 с.
28. Канторович М.И. *Операционное исчисление и процессы в электрических цепях*. – М.: Сов. радио, 1975. – 320 с.
29. Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
30. Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И. *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости*. – М.: Наука, 1981. – 302 с.
31. Копсон Э. *Асимптотические разложения*. – М.: Мир, 1966. – 160 с.
32. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1976. – 216 с.
33. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики*. В 2-х т. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1, 476 с.; Т. 2, 544 с.
34. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. *Курс вариационного исчисления*. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 296 с.
35. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
36. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
37. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. – М.: Наука, 1960. – 400 с.
38. Левинштейн М.Л. *Операционное исчисление и его приложение к задачам электротехники*. – М.-Л.: Энергия, 1964. – 466 с.
39. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций*. – В 2-х т. – Т. 1 М.: Наука, 1967. – 488 с.; Т. 2 М.: Наука, 1968. – 624 с.
40. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики*. – М.: Мир, 1958 (Т. 1) – 930 с.; 1960 (Т. 2) – 886 с.

41. Мышкис А.Д. *Математика для вузов. Специальные курсы.* – М.: Наука, 1971. – 632 с.
42. Олвер Ф. *Асимптотики и специальные функции.* – М.: Наука, 1990. – 528 с.
43. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях в частных производных.* – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
44. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1984. – 432 с.
45. Пчелин Б.К. *Специальные разделы высшей математики.* – М.: Наука, 1973. – 460 с.
46. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики: Т. 1. Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1977. – 358 с.; Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир, 1978. – 400 с.; Т. 3. Теория рассеяния. – М.: Мир, 1982. – 448 с.; Т. 4. Анализ операторов. – М.: Мир, 1982. – 432 с.
47. Рихтмайер Р. *Принципы современной математической физики.* – М.: Мир, 1982 (Т. 1) – 488 с.; 1984 (Т. 2) – 384 с.
48. Романовский П.И. *Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа.* – М.: Наука, 1964. – 304 с.
49. *Сборник задач по теории аналитических функций /* Под ред. М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 387 с.
50. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. *Теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1974. – 320 с.
51. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. *Лекции по математической физике.* – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 352 с.
52. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. *Лекции по теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 408 с.
53. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* – Т. 3, ч. 2. – М.: Наука, 1969. – 672 с.
54. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.
55. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.
56. Федорюк М.В. *Асимптотика интегралы и ряды.* – М.: Наука, 1987. – 544 с.
57. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1983. – 352 с.
58. Федорюк М.В. *Метод перевала.* – М.: Наука, 1977. – 368 с.
59. Френкель Я.И. *Электродинамика вращающегося электрона // Собр. избранных трудов. Т. 2.* – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. – С. 460-476.
60. Харди Г.Х. *Расходящиеся ряды.* – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.

61. Чудесенко В.Ф. *Сборник заданий по специальным курсам высшей математики ( типовые расчеты)*. – М.: Высшая школа, 1983. – 112 с.
62. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ*. Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 336 с.
63. Шварц Л. *Математические методы для физических наук*. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
64. Шелковников Ф.А., Тайкашвили К.Г. *Сборник упражнений по операционному исчислению*. – М.: Высшая школа, 1976. – 184 с.
65. Шилов Г.Е. *Математический анализ (специальный курс)*. – М.: Физматгиз, 1960. – 388 с.
66. Шилов Г.Е. *Математический анализ (второй специальный курс)*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 208 с.
67. Эльсгольд Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
68. Эрдейи А. *Асимптотические разложения*. – М.: Физматгиз, 1962. – 128 с.



Издательство НТЛ  
выпускает в 2002 году  
второй том учебного пособия

*Багров В. Г., Белов В. В., Задорожний В. Н., Трифонов А. Ю.*  
**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Том включает в себя  
часть III «Специальные функции»,  
часть IV «Уравнения математической физики».

Пособие посвящено изложению теории специальных функций, а также методов решения интегральных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка. Оно содержит теоретический материал в объеме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями (30 вариантов) для самостоятельного решения по разделам «Специальные и обобщенные функции» и «Уравнения математической физики» курса «Высшая математика и математическая физика».

По вопросам приобретения книги обращаться в издательство

Россия, 634050, г. Томск,  
пл. Ново-Соборная, 1  
тел.: (3822) 53-35-77  
факс: (3822) 52-67-68  
e-mail: physics@ic.tsu.ru

*Багров Владислав Гаврилович,  
Белов Владимир Владимирович,  
Задорожный Валерий Николаевич,  
Трифонов Андрей Юрьевич*

**Методы математической физики  
Основы комплексного анализа.  
Элементы вариационного исчисления  
и теория обобщенных функций**

Учебное пособие

Научный редактор *профессор, д.ф.-м.н. С.П. Гулько*  
Технический редактор *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике  
в издательской системе  $\text{T}_{\text{E}}\text{X} - \text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$   
с использованием семейства шрифтов Computer Modern